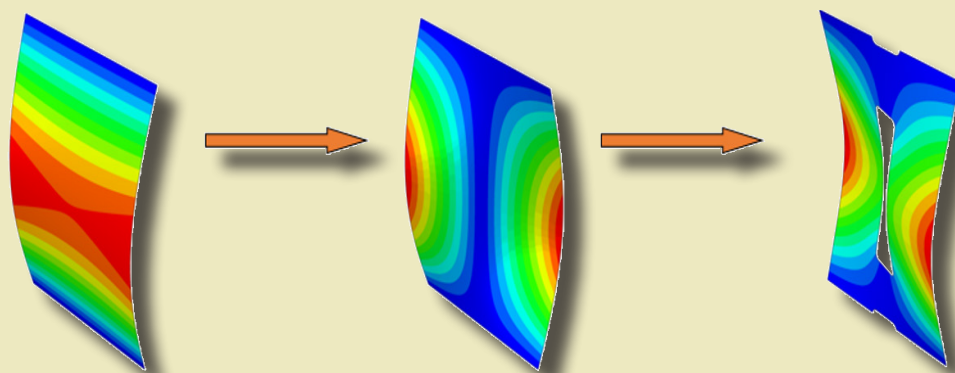




Katarzyna Falkowicz

Analiza pokrytycznych charakterystyk pracy ściskanych
cienkościennych płyt kompozytowych z centralnym
wycięciem posiadających sprężenia mechaniczne



Analiza pokrytycznych charakterystyk pracy ściskanych
cienkościennych płyt kompozytowych z centralnym
wycięciem posiadających sprzężenia mechaniczne

Monografie – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Mechaniczny
ul. Nadbystrzycka 36
20-618 LUBLIN

Katarzyna Falkowicz

Analiza pokrytycznych charakterystyk pracy ściskanych
cienkościennych płyt kompozytowych z centralnym
wycięciem posiadających sprzężenia mechaniczne



Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
Lublin 2020

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Radosław J. Mania, Politechnika Łódzka

dr hab. inż. Tomasz Kopecki, Politechnika Rzeszowska, profesor uczelni

Redakcja i skład: Katarzyna Falkowicz

Badania zostały sfinansowane z Projektu Politechnika Lubelska – Regionalna Inicjatywa Doskonałości ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego na podstawie umowy nr 030/RID/2018/19

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2020

ISBN: 978-83-7947-433-2

Wydawca: Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
www.biblioteka.pollub.pl/wydawnictwa
ul. Nadbystrzycka 36C, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59

Druk: DjaF – 30-092 Kraków, ul. Kmietowicza 1/1
www.djaf.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl

Nakład: 50 egz.

Spis treści

Streszczenie	6
Abstract	7
Wykaz symboli i oznaczeń	8
1. Wstęp	10
1.1. Przegląd literatury	12
1.1.1. Stateczność cienkościennych elementów płytowych.....	12
1.1.2. Mechanika laminatów	16
1.1.3. Stateczność w ujęciu MES.....	19
1.2. Cel i zakres pracy	22
2. Właściwości mechaniczne laminatów	23
2.1. Podstawowe założenia stateczności elementów płytowych	23
2.2. Równania konstytutywne dla płyt warstwowych.....	24
2.3. Własności mechaniczne laminatów	27
3. Przedmiot i zakres badań	29
3.1. Cienkościenne, kompozytowe płyty z centralnym wycięciem	29
3.2. Płyta o symetrycznym układzie warstw kompozytu – wariant 1	31
3.3. Płyta o niesymetrycznym układzie warstw kompozytu – wariant 2	34
4. Metodyka obliczeń numerycznych	39
4.1. Analiza stanu krytycznego	39
4.2. Analiza stanów pokrytycznych	40
4.3. Budowa modelu numerycznego płyty.....	42
5. Doświadczalna weryfikacja badań numerycznych	44
6. Wyniki badań	48
6.1. Płyty wykonane w symetrycznym układzie warstw kompozytu	48
6.1.1. Analiza stanu krytycznego	49
6.1.2. Analiza stanów pokrytycznych	53
6.2. Płyty wykonane w niesymetrycznym układzie warstw kompozytu.....	61
6.2.1. Analiza stanu krytycznego	62
6.2.2. Pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi płyt kompozytowych w układzie niesymetrycznym	65
7. Podsumowanie	82
Literatura	86

Streszczenie

W monografii omówiono zagadnienie dotyczące pracy płyt z centralnym wycięciem, wykonanych z kompozytu węglowo-epoksydowego, poddanych ścisłaniu. Badaniom poddano płyty w symetrycznym i niesymetrycznym układzie warstw kompozytu, wykonane techniką autoklawową. Miały one na celu wymuszenie stabilnej pracy płyty w zakresie pokrytycznym według wyższej, giętno-skrętnej postaci utraty stateczności. Badano wpływ wymiarów centralnego wycięcia (szerokości i wysokości) oraz układu warstw kompozytu na pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi konstrukcji siła-ugięcie (mierzone na kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty). Analizowano możliwość pracy elementu płytowego z centralnym wycięciem jako elementu sprężystego o określonej charakterystyce pokrytycznej.

Zastosowana metodyka badań obejmowała badania eksperymentalne prowadzone na fizycznych modelach konstrukcji oraz obliczenia numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych – oprogramowanie ABAQUS®. Prowadzone badania dotyczyły analizy stanów krytycznych oraz pracy konstrukcji w stanie pokrytycznym w zakresie obciążenia zapewniającego bezpieczną pracę płyty jako elementu sprężystego. Wartość maksymalnego obciążenia konstrukcji określano na podstawie naprężeniowego kryterium zniszczenia materiałów kompozytowych Tsai-Wu.

Otrzymane wyniki badań potwierdziły słuszność opracowanych modeli dyskretnych konstrukcji oraz zastosowanych metod badawczych z wykorzystaniem zjawiska sprzężeń mechanicznych w materiale kompozytowym, umożliwiających uzyskanie utraty stateczności ściskanej płyty z centralnym wycięciem według giętno-skrętnej postaci wyboczenia.

Abstract

The study investigates the issue of work of plates with central cut-out, made of carbon-epoxy composite, subjected to compression. Tests were performed on plates in a symmetrical and asymmetrical arrangement of composite layers, produced by the autoclave technique. The research were aimed at forcing the stable work of plate in the postcritical range according to the higher, bending-torsional form of loss of stability. The influence of the dimensions of the central cut-out (width and height) and the arrangement of composite layers on the postcritical representative equilibrium paths force-deflection of the structure (measured in direction perpendicular to the plane of the plate) was investigated. The possibility work of plate element with a central cut-out as an elastic element with specific postcritical characteristics was analyzed.

The applied research methodology included experimental research conducted on physical construction models and numerical calculations with using the finite element method – ABAQUS® software. The conducted research concerned the analysis of critical states and the work of the structure in postcritical state in terms of load ensuring safe work of the plate as a spring element. The value of the maximum load of the structure was determined on the basis of the stress criterion of composite damage Tsai-Wu.

The obtained test results confirmed the correctness of the developed discrete models of structures and the applied research methods using the phenomenon of mechanical couplings in the composite material, enabling the loss of stability of the compressed plate with a central cut-out according to the flexural-torsional buckling form.

Wykaz symboli i oznaczeń

u, v, w	– składowe przemieszczenia powierzchni środkowej płyty;
x, y, z	– współrzędne lokalnego układu kartezjańskiego płyty;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	– odkształcenia względne warstwy środkowej w kierunkach x, y ;
γ_{xy}	– kąt odkształcenia postaciowego warstwy środkowej, $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$;
κ_x, κ_y	– przyrosty krzywizny powierzchni środkowej płyty;
κ_{xy}	– przyrost skręcenia powierzchni środkowej płyty;
N_x, N_y, N_{xy}	– przekrojowe siły błonowe płyty;
M_x, M_y, M_{xy}	– przekrojowe momenty w powierzchni środkowej płyty;
$\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$	– naprężenia w warstwie kompozytu w konfiguracji osiowej;
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	– naprężenia w warstwie kompozytu w konfiguracji nieosiowej;
Q_{ij} –	– macierz sztywności w konfiguracji osiowej;
$\bar{Q}_{ij}$ –	– macierz sztywności w konfiguracji nieosiowej;
m, n	– sinus i cosinus zorientowanego kąta laminacji θ ;
$[A]$	– macierz sztywności rozciągania w płaszczyźnie kompozytu;
$[B]$	– macierz sprzężenia;
$[D]$	– macierz sztywności giętej;
$[T]$	– macierz transponowana;
ε	– tensor odkształceń powierzchni środkowej laminatu;
κ	– tensor krzywizn powierzchni środkowej laminatu;
t_k	– grubość k -tej warstwy laminatu;
t	– całkowita grubość laminatu;
N	– liczba warstw w laminacie;
z_k, z_{k-1}	– odległości k -tej warstwy od powierzchni środkowej laminatu;
z_k^c	– środek ciężkości k -tej warstwy laminatu;

λ	– parametr obciążenia (współczynnik stateczności);
$[K]$	– macierz sztywności konstrukcji;
$[H]$	– macierz sztywności geometrycznej układu;
$\{M\}$	– wektor momentów gnących;
$\{N\}$	– wektor sił normalnych;
b	– szerokość wycięcia płyty, rys. 4.1;
a	– wysokość wycięcia płyty, rys. 4.1;
R	– promień zaokrąglenia naroży płyty, rys. 4.1;
E_1, E_2	– moduły Younga w głównych kierunkach ortotropii 1,2;
G_{12}	– moduł Kirchhoffa w płaszczyźnie warstwy 1-2;
ν_{ij}	– liczby Poissona $i, j = 1, 2$; i -kierunek włókien kompozytu, j -kierunek prostopadły do kierunku włókien;
F_{TU1}, F_{TU2}	– wytrzymałość na rozciąganie kompozytu w głównych kierunkach ortotropii;
F_{SU}	– wytrzymałość na ścinanie kompozytu;
F_{CU1}, F_{CU2}	– wytrzymałość na ściskanie kompozytu w głównych kierunkach ortotropii;
P_1, P_2	– uogólnione siły zewnętrzne, rys. 5.1;
I_a, I_b	– uogólnione siły wewnętrzne, rys. 5.1;
P_Δ	– obciążenie przyrostowe, rys. 5.1;
R_a, R_b	– siły resztkowe, rys. 5.1;
K_0, K_a	– macierze sztywności, rys. 5.1;
u_0, u_a, u_b	– wektory przemieszczenia, rys. 5.1;
C_a, C_b	– przyrosty przemieszczenia, rys. 5.1;
U_y, U_z	– translacyjne stopnie swobody płyty;
UR_z	– rotacyjny stopień swobody płyty;
α	– kąt ułożenia włókien kompozytu.

1. Wstęp

Konstrukcje cienkościenne należą do grupy ustrojów nośnych, posiadających wiele zalet, wykazują one bowiem wysokie właściwości wytrzymałościowe i sztywnościowe przy stosunkowo niskim ciężarze własnym. Dodatkowo należą do kategorii ustrojów nośnych, które mogą pracować po utracie stateczności pod warunkiem, że znajdują się w stanie sprężystym. Stanowi to istotne ograniczenie w przypadku elementów wykonanych z tradycyjnych materiałów konstrukcyjnych, np. metali, których praca w zakresie pokrytycznym determinowana jest poziomem granicy plastyczności materiału, prowadząc do osiągnięcia trwałych deformacji powodujących istotne zmniejszenie właściwości mechanicznych konstrukcji. Grupę materiałową posiadającą sprężyste charakterystyki w zakresie pokrytycznym, praktycznie do zniszczenia, stanowią kompozyty włókniste o osnowie polimerowej zbrojone włóknami szklanymi (GFRP) oraz węglowymi (CFRP). Materiały te, ze względu na bardzo korzystne właściwości wytrzymałościowe w stosunku do ciężaru własnego, znajdują obecnie szerokie zastosowanie we współczesnych konstrukcjach cienkościennych.

Cechą elementów konstrukcyjnych wykonanych z kompozytów włóknistych jest również duży zapas nośności konstrukcyjnej, tzn. możliwości pracy po utracie stateczności, sięgający niekiedy dwukrotnej bądź trzykrotnej wartości obciążenia krytycznego, co zdecydowanie wyróżnia te materiały w stosunku do metalowych elementów konstrukcyjnych, osiągających odkształcenia trwałe na poziomie ok. 150% wartości obciążenia krytycznego. Ponadto konstrukcje kompozytowe ulegają zniszczeniu na ogół na skutek kruchego pęknięcia materiału, co w zasadzie eliminuje zagrożenie lokalnego uplastycznienia newralgicznych obszarów struktury nośnej, mogącego doprowadzić do szybkiego zniszczenia konstrukcji. Wysoki zapas nośności elementów kompozytowych podwyższa bezpieczeństwo pracy konstrukcji, która nawet z pierwszymi symptomami zniszczenia struktury kompozytu zachowuje wysoką sztywność, praktycznie do momentu osiągnięcia wartości obciążenia niszczącego. Te cechy kompozytów włóknistych w połączeniu z niską gęstością materiału stwarzają duże możliwości aplikacji tych materiałów, w wielu dziedzinach, jak m.in. przemyśle lotniczym, motoryzacyjnym czy kosmicznym, gdzie dominują rozwiązania konstrukcyjne bazujące na płytowych oraz powłokowych elementach cienkościennych i gdzie minimalizacja masy jest wysoce pożądana.

Jednolite, cienkie płyty należą do grupy elementów konstrukcyjnych dosyć tanich w wytwarzaniu, jednak ze względu na niewielką sztywność na zginanie, mogą przenosić stosunkowo nieduże obciążenia. Gdy są ściskane, utrata stateczności następuje przy niewielkim obciążeniu i ma charakter wyboczenia giętnego. Znane powszechnie sposoby zwiększenia odporności na zjawisko utraty stateczności elementów cienkościennych, polegające na zastosowaniu usztywnień w postaci żeber lub przetłoczeń, prowadzą często do zmiany postaci

konstrukcyjnej oraz wzrostu masy własnej konstrukcji. Istnieje jednak sposób, by znacznie poprawić odporność elementu płytowego na utratę stateczności, co umożliwiłoby ich wykorzystanie nie tylko, jako elementy nośne, ale także jako elementy sprężyste. Podwyższenie wartości obciążenia krytycznego oraz nośności płyty można uzyskać zabiegami konstrukcyjnymi, polegającymi na wymuszeniu utraty stateczności konstrukcji według wyższej postaci wyboczenia. Jednym ze sposobów wymuszenia wyższej postaci wyboczenia jest wykonanie w płycie centralnego wycięcia i nadania powstałym w ten sposób pasom pionowym odpowiednich ugięć wstępnych, umożliwiających ich przemieszczenie w przeciwnie strony. W otrzymanym ustroju, wyraźnie wydzielone konstrukcyjnie są w/w pasy pionowe, podlegające ściskaniu i zginaniu oraz pasy poziome, gdzie występuje głównie skręcanie. W zależności od tego, jaki obszar zajmują poszczególne strefy, co jest uzależnione od parametrów geometrycznych wycięcia, mamy wpływ na zachowanie konstrukcji w stanie krytycznym i pokrytycznym, a co za tym idzie na kształtowanie charakterystyki sztywnościowej konstrukcji. Ta właściwość może być bardzo istotna w aspekcie konstrukcyjnym, gdyż łatwo można uzyskać elementy o identycznych wymiarach do zabudowy, a krańcowo różnej charakterystyce sztywnościowej. Badania w tym zakresie dla płyt z dwuteowym wycięciem wykonanych z metalu zostały zaprezentowane przez M. Ferdynusa w pracy [79], w której autor badał serie płyt stalowych z różnymi wymiarami dwuteowego wycięcia metodami analitycznymi i numerycznymi. Wyniki prezentowanych badań nie zostały jednakże zweryfikowane doświadczalnie na fizycznych modelach konstrukcji. W niniejszej pracy zaproponowano rozwiązanie podobnego zagadnienia z wykorzystaniem materiałów kompozytowych o właściwościach ortotropowych, w przypadku których możliwa jest zmiana krytycznego i pokrytycznego zachowania konstrukcji poprzez zmianę konfiguracji warstw laminatu, przy zachowaniu tych samych wymiarów i masy konstrukcji.

W ostatnich latach zagadnienia dotyczące mechaniki i zniszczenia kompozytów należą do głównych zagadnień z obszaru nauk podstawowych, wymagających zastosowania interdyscyplinarnych metod badawczych. Problem ten należy do istotnych zagadnień w projektowaniu konstrukcji cienkościennych, jednakże mechanizmy powodujące zniszczenie struktury kompozytowej są jeszcze słabo poznane. Powstaje tutaj szereg pytań, na które wielu badaczy poszukiwało i nadal poszukuje odpowiedzi. Do zagadnień podstawowych należy pytanie o nośność tego typu ustrojów w konkretnych warunkach pracy konstrukcji, a także wpływ wielkości i rodzaju wycięcia na wspomnianą nośność.

W niniejszej pracy zaprezentowano własną koncepcję płytowego elementu cienkościennego z centralnym wycięciem, do zastosowania jako element sprężysty lub nośny. Badano wpływ parametrów geometrycznych wycięcia oraz konfigurację układu warstw kompozytu na charakterystykę pracy konstrukcji w zakresie obciążeń eksploatacyjnych. Badania obejmowały liniową i nieliniową

analizę numeryczną konstrukcji z wykorzystaniem metody elementów skończonych oraz eksperymentalną weryfikację obliczeń MES.

1.1. Studium literatury

1.1.1. Stateczność cienkościennych elementów płytowych

Utrata stateczności w elementach cienkościennych stanowi bardzo istotne zagadnienie. Zjawiska tego typu są bardzo często przyczyną zniszczenia, czego przykładem są m.in. wielkie katastrofy budowlane mostów stalowych z przełomu XIX i XX wieku. Problem utraty stateczności czy też dynamicznego wyboczenia konstrukcji cienkościennych, stał się w związku z tym przedmiotem licznych studiów oraz wnikliwych badań.

Elementy płytowe ze względu na swój kształt oraz fakt, że z reguły są to elementy cienkościenne, są szczególnie narażone na utratę stateczności. Dlatego też określenie obciążeń krytycznych oraz analiza zachowania się przy obciążeniach dynamicznych, stanowi bardzo istotny element analizy wytrzymałościowej płyt.

Pierwszych publikacji związanych z zagadnieniami stateczności sprężystej płyt w ujęciu tradycyjnym można się doszukiwać już pod koniec lat czterdziestych i na początku lat pięćdziesiątych XX wieku, już wtedy pojawiły się pierwsze rozwiązania analityczne związane z płytami niejednostopijnymi (z otworami) [156,167, 283]. Rozwój teorii płyt w literaturze można prześledzić na podstawie m.in. monografii [13, 123, 269], natomiast podstawowe zagadnienia teorii sprężystości umieszczono w pracach [73, 86, 113, 245]. Spośród starszych pozycji literaturowych poświęconych zagadnieniu stateczności płyt warto wyróżnić monografie Volmira [260], Timoshenki [244,246], Girkmanna [87] oraz Brzoski [33]. Dostępną często w literaturze przedmiotu cytowane są prace Abramowicha i Grunwalda [1] oraz Ari-Gura i Simonetta [8], powstałe w latach dziewięćdziesiątych w Technion University (Izrael). Natomiast z bardziej współczesnych opracowań z zakresu mechaniki płyt i powłok można wymienić Bażanta i Cedolina [26], monografie autorskie Kączkowskiego [128], Magnuckiego [174], Zelnica [281], Kowal-Michalskiej [148]. Na uwagę zasługuje wydana pod redakcją Woźniaka [269] monografia z 2001 roku, która stanowi ogólny i syntetyczny zarys współczesnej wiedzy na temat teorii płyt i powłok sprężystych, bogata w matematyczne modele i przykładowe rozwiązania różnej grubości powłok i płyt. Kolejna warta uwagi pozycja to praca zbiorowa pod redakcją Kowal-Michalskiej z 2007 roku [147], która zawiera obszerny przegląd literatury dotyczący stateczności dynamicznej płytowych konstrukcji cienkościennych. Szczególnie intensywny rozwój tych badań odnotować można na przełomie XX i XXI wieku, m.in. w pracach [14, 12, 15, 44, 46, 48, 49, 52]. Prace te obejmowały głównie wyizolowane płyty wykonane

z materiałów izotropowych o różnych charakterystykach materiałowych, a także problemy liniowej i nieliniowej teorii jednorodnych płyt w zakresie statycznym.

Przegląd prac dotyczący wyboczenia sprzężonego (interakcyjnego) konstrukcji, wydanych przed 1990 rokiem, dosyć obszernie podano w rozdziale 5 pracy zbiorowej pod redakcją Królaka [151]. Zjawisku wyboczenia interakcyjnego płytowych struktur cienkościennych, wykonanych z materiału izotropowego poświęcono wiele prac, spośród których wymienić można m.in. prace: Koitera [136, 137], Maniewicza [178, 179, 180] oraz Pignataro [205]. Wyniki badań dotyczące stateczności konstrukcji wykonanych z klasycznych, izotropowych materiałów inżynierskich, z zakresu analiz numerycznych i eksperymentalnych są jak widać dostępne powszechnie w literaturze. Zostały one w przeważającym stopniu dosyć szeroko zbadane i opisane.

Zagadnienia wyboczenia sprzężonego struktur płytowych wykonanych z materiałów kompozytowych opisywane były w literaturze, w znacznie mniejszym zakresie. Ogólnie rzecz biorąc, analiza płyt warstwowych jest bardziej skomplikowana, ze względu na ich anizotropowość i heterogeniczność. Jednak dzięki rozwojowi technik komputerowych i upowszechnieniu programów numerycznych, jak m.in. metoda elementów skończonych, zaczęły pojawiać się publikacje, w których zajęto się opisem tych zagadnień. Powstały m.in. prace dotyczące wyznaczania charakterystyk pracy dla konstrukcji zbudowanych z cienkich płyt, zarówno o przekrojach otwartych jak i zamkniętych ze wzmocnieniami [172, 202], czy też osłabionych otworami [76, 272]. Szczególną uwagę poświęcono badaniu wpływu niedokładności kształtu [280], warunków brzegowych [190, 226], parametrów geometrycznych konstrukcji [107, 108] czy też konfiguracji warstw kompozytu [60, 280]. Wiele z tych teoretycznych rozważań podparto badaniami eksperymentalnymi [20, 272]. Opis zachowania elementów płytowych z wykorzystaniem MES był również przedmiotem badań m.in. Batoz i inni [25], Cui i inni [59], Kundu i Sinha [159]. W pracach Davisa i jego zespołu [63] opisane zostały zachowania ściskanych warstwowych płyt kompozytowych, zbrojonych włóknami szklanymi w pełnym zakresie obciążenia. Do wyznaczenia sił krytycznych wykorzystano wówczas metodę Southwella, opisaną m.in. przez Ashtona i Love'a [11] czy też Kichera i Mendela [133].

W pracach Libove [169], Lukoshevichyus [173], Tung oraz Surdenas [253] przedstawiono ogólny przegląd podstawowych problemów stateczności płyt dla różnych przypadków obciążenia. Walczak i Mania [261] badali różne przypadki nierównomiernego rozkładu obciążenia płyty w zakresie sprężystym, natomiast Grądzki badał płyty obciążone nieosiowo [89] w zakresie sprężysto-plastycznym. Lanzi [162], Zhang, Liu i Zhao [278] zajmowali się tematyką płyt z żebrami poddanych obciążeniom ściskającym. Bardzo obszerną analizę dotyczącą stateczności dynamicznej cienkich, izotropowych płyt poddanych obciążeniu impulsowemu, przy wykorzystaniu metody Bubnova-Galerkina, przedstawili Petry i Fahlbusch [203]. Analizowali oni m.in. wpływ geometrii płyty oraz wpływ wielkości imperfekcji kształtu na wartość krytycznego obciążenia dynamicznego.

Jana i Bhaskar [121] przeprowadzili analizę wyboczeniową podpartej przegubowo prostokątnej płyty, poddawanej różnym rodzajom nierównomiernego obciążenia ściskającego. Chai i inni [43] zbadali wpływ warunków brzegowych, geometrii płyty i związane z tym optymalne siły krytyczne kompozytowych, laminowanych płyt, poddanych różnym liniowo zmieniającym się warunkom obciążenia. Hurang Hu i inni [108] badali zachowanie wyboczenia grafitowo-epoksydowej prostokątnej, laminowanej płyty w wariancie parabolicznych obciążeń osiowych. Stateczność płyt przy różnych obciążeniach ściskających, dla różnych warunków brzegowych była badana również przez Herrmanna i Armenakasa [103], Timoshenko i Gere [243] i wielu innych.

Zagadnienia stateczności i zachowań pokrywicznych ustrojów płytowych z otworami o różnych kształtach zostały opisane w pracy [229], gdzie można znaleźć bardzo obszerny przegląd literatury dotyczący tego zagadnienia. Ze względu na wymogi praktyczne, w elementach konstrukcyjnych często potrzebne są wycięcia, aby uzyskać lżejsze i bardziej wydajne struktury. Na przykład w celu zapewnienia dostępu do przewodów hydraulicznych, przewodów elektrycznych i kontroli uszkodzeń, konieczne jest stosowanie wycięć w dźwigarach i pokryciach skrzydeł w samolotach transportowych, czy też wojskowych [249]. Jedną z pierwszych prac opisujących analizę zachowania pokrywicznego ustrojów płytowych z otworami była praca [217]. Bardzo duży wkład w opis tego zagadnienia wnoszą również prace [188, 206, 230, 277], gdzie rozważa się stany pokrywiczne oraz nośność graniczną tego typu ustrojów.

Badania dotyczące stateczności laminowanych płyt z otworami prowadzono głównie na płytach prostokątnych [191, 213, 270], na ich podstawie stwierdzono, że podatność prostokątnych płyt na wyboczenie uzależniona jest od warunków brzegowych [165], układu warstw [109, 185] czy też promienia zaokrąglenia otworu [109, 191, 258]. Akbulut i Sayman [2] przeprowadzili analizę wyboczeniową prostokątnych kompozytowych płyt z centralnym kwadratowym otworem. Zor i inni [284] zajmowali się wpływem zjawiska delaminacji na wyboczenie kompozytowych płyt z wycięciem w kształcie kwadratu. Komur i inni [16], Lakshminarayana i inni [161] badali wyboczenie kompozytowych kwadratowych płyt z eliptycznym wycięciem. Wykazali oni, że projektanci powinni unikać dużych, eliptycznych otworów w kompozytowych płytach, jeśli chcą zapobiec ich wyboczeniu przy niskich ciśnieniach. Hamani i inni [95] analizowali wpływ orientacji włókien na siłę krytyczną kompozytowych płyt w układzie niesymetrycznym, osłabionych otworem o kształcie okręgu. Wykazali, że krytyczna siła wyboczeniowa osiąga maksymalną wartość przy orientacji włókien w zakresie 50° – 90° , natomiast minimalne wartości, gdy włókna ułożone są prostopadle do przyłożonego ciśnienia. Ouinas i Achour [199] analizowali wyboczenie kwadratowych płyt z eliptycznym otworem, badali wpływ wielkości i miejsca położenia otworu, a także wpływ niesymetrycznych układów warstw na siłę krytyczną. Dinesh, Kumar i Singh [70] zbadali wpływ

warunków brzegowych na wyboczenie i zachowanie powyboczeniowe osiowo ściskanego quasi-izotropowego laminatu o konfiguracji $(45/-45/0/90)_{2S}$ z różnymi kształtami wycięć (okrągły, kwadratowy, diamentowy, eliptyczny – pionowo i eliptyczny – poziomo) o różnych rozmiarach, przy użyciu metody elementów skończonych. Eiblmeir i Laughlan [75, 77] zbadali wpływ wielkości wycięć przy różnych warunkach brzegowych, na zachowanie się symetrycznych laminowanych (CFRP) płyt kwadratowych, poddanych jednoosiowemu ściskaniu, przy użyciu metody elementów skończonych. Husam i in. [115], Hani Aziz Ameen [96], Srivatsa [232] badali wpływ wielkości wycięcia, położenia wycięcia, kąta orientacji włókien i rodzaju obciążenia na siłę krytyczną kompozytowych laminatów z wycięciem. Jain i Kumar [120] przeprowadzili analizę pokrytyczną z wykorzystaniem metody elementów skończonych, symetrycznych kwadratowych laminatów z centralnym wycięciem, poddanych jednoosiowemu ściskaniu. Równania zagadnienia nieliniowej stateczności zostały rozwiązane przy wykorzystaniu metody Newtona Raphsona. Do celów analizy uwzględniono laminaty z wycięciami kołowymi i eliptycznymi, badając wpływu kształtu i wielkości wycięcia na siłę krytyczną oraz zniszczenie pierwszej warstwy laminatu. Zbiór aktualnego stanu wiedzy w zakresie zagadnień ściskanych cienkościennych płyt osłabionych otworem przedstawili również: Cheng [47], Jayashankarbabu [122], Ghannadpour i inni [85], Lorenzini [170], Khaled i inni [132].

Analizą zjawiska stateczności cienkościennych płyt wykonanych z materiałów kompozytowych, zajmowali się również w swoich pracach m.in.: Kołakowski i Kowal-Michalska [140], Kołakowski i Królak [141] oraz Kubiak [155]. Poruszali oni przede wszystkim zagadnienia dotyczące wyboczenia cienkościennych struktur kompozytowych poddanych ściskaniu. Powyższe zagadnienia rozwiązywane były w oparciu o asymptotyczną teorię Koitera.

Bardzo ważną i obszerną pracą, poświęconą w całości płytom kompozytowym, poddanym różnym stanom obciążenia jest monografia Reddy'ego [211]. Autor w swojej pracy omawia m.in. stateczność, zginanie, drgania, analizę nieliniową oraz zniszczenie kompozytowych elementów płytowych. Praca przedstawia m.in. metodykę modelowania płyt warstwowych z wykorzystaniem klasycznej teorii płyt cienkich, a także teorię pierwszego, czy też trzeciego rzędu.

Przedstawiony w niniejszym podrozdziale przegląd literatury wskazuje, iż nie natrafiono na opracowania, w których badano by ustroje płytowe z otworami, w których próbowano by wymusić wyboczenie konstrukcji według wyższej postaci utraty stateczności. Prezentowana praca stanowi próbę analizy zachowania się takich elementów pod działaniem obciążeń ściskających.

1.1.2. Mechanika laminatów

Projektowanie współczesnych konstrukcji o zoptymalizowanych parametrach wytrzymałościowych i sztywnościowych wymaga zastosowania nowoczesnych metod i narzędzi badawczych, umożliwiających analizę pracy konstrukcji w pełnym spektrum obciążenia. Dotyczy to przede wszystkim elementów konstrukcyjnych wykonanych z nowoczesnych materiałów, do których zaliczamy kompozyty o osnowie polimerowej wzmocnione włóknami ciągłymi, tzw. laminaty [19, 231]. Warstwy takiego kompozytu (tzw. laminy) ustawione są względem siebie oraz względem przyjętego arbitralnie układu odniesienia w taki sposób aby uzyskać charakterystyki sztywnościowe umożliwiające tworzenie elementów zdolnych do przenoszenia obciążenia o dowolnym kierunku. Odpowiednie sterowanie kierunkiem i sposobem ułożenia włókien powoduje, że konstrukcje te, w porównaniu do konstrukcji z materiałów jednorodnych, są bardziej wytrzymałe oraz mają mniejszą masę. Ze względu na swoje właściwości kompozyty włókniste znajdują coraz szersze zastosowanie we współczesnych konstrukcjach jako elementy nośne [38, 234]. Decyduje o tym korzystny stosunek gęstości do parametrów wytrzymałościowych tych materiałów [53]. Ciągłe doskonalenie metod wytwarzania laminatów pozwala osiągać wysoką jakość i powtarzalność wytwarzanych wyrobów kompozytowych, które zastępują dotychczasowe materiały konstrukcyjne, m.in. metale. Warto tu przypomnieć iż materiały kompozytowe mają swoje pierwowzory zaczerpnięte z naturalnych struktur wykształconych przez różnego rodzaju zjawiska i procesy przyrodnicze. Jako przykład można tu podać źdźbło słomy, drzewa bambusowe, łodygi niektórych roślin, które dzięki swojej budowie charakteryzują się dość dużą sztywnością na zginanie przy niskiej masie [220]. Jednak dopiero na przełomie ostatnich 60-ciu lat rozwój teoretycznej i stosowanej mechaniki pozwolił wykorzystać w pełni potencjał włóknistych materiałów kompozytowych.

Do analizy zachowania konstrukcji wykonanej z kompozytu, opisu zjawisk, które zachodzą pomiędzy osnową a włóknami należy odnieść się do poziomu mikrostruktury, nie wystarczy posłużyć się jedynie analizą makroskopową. Opisem takich wzajemnych interakcji zajmowali się m.in.: Jones [126], Saravanas i Chamis [227], Vasiliew [257], Vinson i Chou [259], Buryachenko [35], Tong i inni [247]. Jednak czasami w celu skrócenia czasu obliczeń, tak jak autorzy pracy [91], można ograniczyć się do opisu makroskopowego, gdzie posługujemy się już średnimi właściwościami mechanicznymi kompozytu. Wilczyński [267] w swojej pracy wykazał iż można uśrednić właściwości wytrzymałościowe kompozytu z jego dwóch składników. Hyla [116] badała wpływ składników kompozytu (tj. osnowy i włókien) na zachowanie materiału kompozytowego pod wpływem obciążenia. Warto tu również wspomnieć o obszernej, przeglądowej monografii Ochelskiego [195] w której to można znaleźć szczegółowe badania nad zachowaniem się składowych elementów kompozytu, badania dotyczące mechaniki struktury kompozytu, a także opis procesu niszczenia pod obciążeniem

i wiele innych równie ważnych aspektów. Ochelski w swojej pracy przedstawił m.in. zależność obrazującą wpływ orientacji włókien kompozytu grafitowo-epoksydowego na wytrzymałość na rozciąganie i moduł sprężystości wzdłużnej. Inne prace obejmujące wiedzę z zakresu kompozytów wraz z przykładami obliczeniowymi to prace: Malik [177], Matthews i Rawlings [184], Christensen [50]. Kształtowaniem pożądaney wytrzymałości czy też sztywności elementów struktury typu belka, płyta czy powłoka, poprzez odpowiednią sekwencję ułożenia warstw, zajmował się również w swoich pracach m.in. York [275, 276]. Mechanika kompozytów włóknistych oraz optymalizacja struktur kompozytowych została opisana w pracach Muca [186,187].

Pierwsze prace w których poddano analizie anizotropowe płyty pochodzą z pierwszej połowy XX wieku, pośród nich można wymienić prace Hubera [114], Hayashi [100], Whitney'a [266], Reddy'ego [211]. Monografia Reddy'ego [211] została podzielona na rozdziały obejmujące modelowanie płyt warstwowych przy wykorzystaniu klasycznej teorii płyt cienkich, teorii pierwszego rzędu, czy też autorskiej teorii trzeciego rzędu. Jednak w rozwoju kompozytowych materiałów włóknistych największe znaczenie odniosła klasyczna teoria laminatu CLT (ang. *Classical Lamination Theory*) opisana m.in. w pracach [5, 72]. Zgodnie z tą teorią laminat złożony jest z połączonych ze sobą warstw, przy czym każda z warstw przyjmuje właściwości anizotropowe bądź izotropowe. Dzięki zależnościom sił wewnętrznych od odkształceń określonych w warstwie środkowej można określić uśrednione parametry materiałowe, które charakteryzują laminat symetryczny. W literaturze zagadnienia mechaniki laminatów według CLT rozpatrywane są z uwzględnieniem liniowej teorii Kirchhoffa-Love, bądź nieliniowej teorii Karmana, co też przedstawiono w pracach Królaka [152], Kołakowskiego i Kowal-Michalskiej [139]. W związku z tym iż CLT nie uwzględniała zjawiska ścinania pomiędzy warstwami laminatu, konieczny był jej rozwój czym też zajęli się Whitney i Pagano [265] przedstawiając teorię ścinania pierwszego rzędu dla laminatów FSDT (ang. *first-order shear deformation*). Oczywiście teoria ta w dalszym ciągu była udoskonalana co skutkowało wprowadzeniem teorii wyższego rzędu HSDT, którą to w 1984 roku wprowadził Reddy. Szeroki przegląd literatury dotyczący teorii HSDT (ang. *higher-order shear deformation*) można prześledzić w pracy Kreji [150]. Znaczną część teorii opisujących laminowane kompozytowe płyty opisano obszernie w publikacjach [30,40,41,42,117]. Niektóre z wymienionych prac zawierają odniesienia do ponad 400 pozycji literaturowych. Dostyć obszerny przegląd literatury dotyczący płyt kompozytowych można również znaleźć w pracy Woźniaka [269], w której to jeden z rozdziałów w całości poświęcony jest temu zagadnieniu. Autor ograniczył się do klasycznej teorii płyt cienkich przyjmując założenie Kirchhoff'a. Kolejna obszerna praca obejmująca mechanikę kompozytowych warstwowych płyt i powłok to praca Lewińskiego i Telegi [168]. Inne prace, które warto tu jeszcze odnotować, w których to autor dokonał rozdzielenia naprężenia w matrycy i sił we włóknach, w równaniach równowagi, to prace Świtka [235, 236].

Kolejnym zagadnieniem poruszonym w wielu pracach jest zniszczenie oraz nośność elementów wykonanych z materiałów kompozytowych. Nie jest to łatwe zagadnienie ponieważ model zniszczenia zależy od wielu czynników, co też utrudnia jednoznaczną interpretację całego procesu. W analizie zniszczenia należy wziąć pod uwagę takie czynniki jak: rodzaj obciążenia, wielkości i geometrię analizowanej struktury, właściwości użytych materiałów, sposób ich wytworzenia oraz wstępne obciążenia i uszkodzenia. Oczywiście do oceny zniszczenia obok naprężeń wprowadzono również wielkości zależne od nich jak np. odkształcenia, przemieszczenia, siły. Zagadnienia te szczegółowo omówiono m.in. w monografiach: Hinton i inni [105], Greenhalgh [90], Davis [64], Kunniuen i inni [160] Noor i Shuart [193], Zureick i Nettles [285].

Kompozyt ze względu na złożoną strukturę charakteryzuje się również złożonym procesem niszczenia. W związku z tym możemy wyróżnić uszkodzenia występujące wewnątrz warstwy oraz uszkodzenia występujące pomiędzy warstwami. Jeśli chodzi o warstwowe płyty włókno-kompozytowe to najczęściej mają tu zastosowanie makromodele, które bazują na kryteriach wytrzymałości odnoszących się do pojedynczej warstwy kompozytu ortotropowego [35, 99, 117, 129, 208, 247, 252]. Następnie wykorzystując kryteria odnoszące się do warstwy można rozszerzyć tą teorię na cały kompozyt, co poruszono w pracach: [61, 82, 200, 228]. Jedną z podstawowych, prezentowanych w literaturze, teorii zniszczenia jest teoria FPF (ang. *First Ply Failure*) w której proces inicjacji zniszczenia zapoczątkowany jest poprzez zniszczenie pierwszej warstwy, co też przedstawili w swojej pracy Reddy i Pandey [212]. Jednak w wielu przypadkach zastosowanie tego modelu nie prowadzi do wyczerpania nośności struktury kompozytowej i jest ona w stanie, w dalszym ciągu przenosić obciążenia, co zostało zbadane m.in. przez Różyło i inni [222] czy Gliszczynski i inni [88]. Pośród kryteriów zniszczenia pierwszej warstwy największą popularność w analizach praktycznych uzyskało kryterium Tsai-Wu, opisane m.in. w pracy [142]. Inne równie popularne to kryterium Tsai-Hilla [251], Hoffman'a [106] czy też Christensen'a [51]. Obecnie można znaleźć wiele kryteriów i metod opisujących inicjację oraz propagację zniszczenia materiałów kompozytowych. Oprócz wyżej wymienionych tzw. kryteriów inicjacyjnych należałoby tu jeszcze wymienić kryteria opisujące zniszczenie w odniesieniu do ścinania międzywarstwowego: kryterium maksymalnych naprężeń oraz odkształceń stycznych, czy też Chang-Lessarda [45], kryteria opisujące zniszczenie włókien i osnowy: kryterium maksymalnych naprężeń i odkształceń, Hashina [97, 98], Puck'a [207], które to oczywiście wynikają z badań doświadczalnych [28].

Opis zniszczenia materiałów kompozytowych prowadzony jest na podstawie standardowych prób wytrzymałościowych (tj. ściskania, rozciągania, ścinania, zginania), które pozwalają na wyznaczenie danych materiałowych kompozytu oraz innych parametrów dotyczących uszkodzenia struktury.

Bardzo wyczerpującego przeglądu literatury dotyczącego kryteriów i postaci zniszczenia, odnoszących się do materiałów kompozytowych dokonali Zhang i Yang [279] oraz Orifici i inni [198].

Dużo modeli zniszczenia materiałów kompozytowych opracowano z zastosowaniem teorii kontynualnej mechaniki uszkodzeń CDM (ang. *Continuum Damage Mechanics*), która zapoczątkowana była przez Kachanov'a [127]. Teoria ta zapoczątkowała powiązanie mechanizmu zniszczenia z właściwościami mechanicznymi laminatu i rozwijana była w późniejszym czasie przez Lemaitre'a i Chaboche'a [166].

Inny rodzaj zniszczenia o którym należy tu jeszcze wspomnieć to uszkodzenie kompozytu na styku warstw czyli delaminacja. Tym niebezpiecznym dla konstrukcji zjawiskiem zajmował się m.in. Bolotin [31] czy też Imielińska [118]. Kryteria pozwalające na opis inicjacji zjawiska delaminacji to m.in. kryterium Hashina [97], Lee [164], Tong'a [248] oraz kryteria pozwalające na opis jej rozwoju: Hahn'a [93], Whitcomb'a [263], Donaldson'a [71], czy choćby White'a [264].

Wykorzystanie niektórych modeli opisujących kryteria zniszczenia (m.in. kryterium maksymalnych naprężeń, Hashin'a, a przede wszystkim kryterium Tsai-Wu) znalazło szerokie, praktyczne zastosowanie w numerycznych programach obliczeniowych. Obecnie za jeden z bardziej zaawansowanych modeli uszkodzenia materiałów kompozytowych można uznać progresywne kryterium zniszczenia, którym zajmowali się Bażant i Oh [27] oraz German i Mikulski [83], a związane jest ono ze zmniejszeniem sztywności uszkodzonego kompozytu. Inne podejścia stanowiące dalsze kierunki badań to technika wirtualnego zamykania szczelin VCCT (ang. *virtual crack closure technique*) zaproponowana w pracy Rybicki i Kanninen [225], jednak podejście to wymaga istnienia pęknięcia i może posłużyć jedynie do modelowania jego rozwoju [255]. Kolejna metoda to metoda strefy kohezynnej [54, 62] oraz rozszerzona metoda elementów skończonych XFEM (ang. *Extended Finite Element Method*) [175].

1.1.3. Stateczność w ujęciu MES

Metoda elementów skończonych (MES), została wprowadzona na początku drugiej połowy XX wieku przez Turnera, Clough'a, Martina i Toppa [254]. Ich pracę nazwano „aktem urodzenia Metody Elementów Skończonych”. Jednak zaproponowane przez nich metody prowadziły do równań o dużej liczbie niewiadomych, których ówczesne komputery nie były w stanie rozwiązać. Z problemem tym uporali się prof. Zienkiewicz [282] i prof. Przemieniecki, którzy w latach sześćdziesiątych XX wieku przedstawili praktyczne zastosowania MES. Do dnia dzisiejszego w literaturze poświęconej CAE (ang. *Computer Aided Engineering*), prof. Zienkiewicz uważany jest za „ojca MES” oraz praktycznego zastosowania tej metody. Należy tu również wspomnieć o Szmelterze [237], który uważany jest za propagatora tej metody w Polsce. Zauważalny po drugiej wojnie

światowej rozwój teorii stateczności, doznał dosyć mocnego przyspieszenia na przełomie ostatnich czterdziestu lat, o czym świadczy bogata bibliografia w tym zakresie. Komputerowe techniki obliczeniowe znalazły w tym zakresie dosyć szerokie możliwości zastosowań. Jako pierwsi zastosowanie MES do rozwiązywania zagadnienia stateczności opublikowali w swoich pracach Argyris [10] Gallagher [80] oraz Martin [183], opisując macierz sztywności naprężeniowej. Podejście to zastosowano do analizy wyboczenia płyt [6, 130], powłok [81, 189, 196] oraz ram [9, 176]. Dołączając macierz mas zaczęto również badać problemy utraty stateczności pod wpływem obciążeń niekonserwatywnych [23]. Na przełomie kolejnych lat coraz dynamiczniej rozwijano tę metodę, wprowadzając bardziej zaawansowane elementy skończone oraz formułując procedury iteracyjne i równania przyrostowe, co umożliwiło numeryczny opis rzeczywistych nieliniowych ścieżek równowagi. Dostępna jest spora liczba publikacji poświęconych charakterystyce wyznaczania nieliniowych ścieżek równowagi. Można tu wymienić m.in. metodę Riksa [214, 215, 216], umożliwiającą opis ścieżek równowagi mających kilka ekstremów, którą w późniejszym czasie rozwinął i zmodyfikował Crisfield [55]. Bardzo popularną w rozwiązywaniu nieliniowych zagadnień MES, przyrostowo-iteracyjną metodę Newtona-Raphsona, opisano m.in. w pracach Waszczyszyna [262] i Crisfielda [56, 57], czy też inne metody numeryczne opisane w monografii Kleibera [135] oraz publikacji Rakowskiego i Kasprzyka [209].

Wyniki analiz stateczności konstrukcji nośnych z wykorzystaniem metody elementów skończonych przedstawili w swoich pracach m.in. Barsoum oraz Gallagher [24], poddając analizie zjawisko globalnego wyboczenia ustrojów belkowych. Analizę stateczności ściskanych konstrukcji cienkościennych z uwzględnieniem sprzężonych postaci wyboczenia, z zastosowaniem metody elementów skończonych opisano w pracach Kołakowskiego [138], Królaka (red.) [151], Kubiaka [155] oraz Bażanta i Cedolina [26]. Przykłady wykorzystania MES do rozwiązywania zagadnień liniowej i nieliniowej stateczności struktur kompozytowych można znaleźć m. in. w pracach Camanho oraz Davila [37], Alfano oraz Crisfielda [3], Kreji [150], Kopeckiego [146], Mani [181, 182], Tetera oraz Kołakowskiego [238, 239]. Doświadczalną weryfikację symulacji numerycznych MES zachowania kompozytowych struktur poddanych różnym stanom obciążenia przedstawili w swoich pracach m.in.: Dębski [65, 66], Dębski i inni [67–69], Banat i inni [21, 22], Kubiak i inni [154, 201], Kim i inni [134], Orifici i inni [197]. Dosyć szeroki przegląd obejmujący modelowanie wielowarstwowych płyt wraz z zamieszczonym bogatym spisem literatury zaprezentował Carrera [40]. W kolejnej swojej pracy [41] opisał zastosowanie wariacyjnej teorii Reissner’a w modelowaniu wielowarstwowych płyt. Bardzo obszerny przegląd literatury dotyczący zagadnienia stateczności i zachowań pokrywicznych elementów płytowych z różnego rodzaju otworami opisane zostały w pracy [128], gdzie jako autora najwcześniejszego opracowania, w aspekcie numerycznym, który jako pierwszy rozważał zagadnienie stateczności sprężystej

jednoosiowo ściskanej płyty z otworem, podaje się Penningtona Vanna. W artykule przedstawiono wyniki obliczeń MES i porównano je z rezultatami badań eksperymentalnych. Jedną z pierwszych prac, prezentujących zachowanie pokrytyczne ustrojów płytowych z otworami przedstawiono w pracy [217], w której przedstawiono szczegółowe informacje na temat badań teoretycznych i doświadczalnych, dotyczących zachowania swobodnie podpartych i równomiernie ściskanych kwadratowych oraz prostokątnych płyt z centralnym okrągłym otworem. Badanie obejmowało szereg eksperymentów na płytach o średnicach otworu od jednej do siedmiu dziesiątek szerokości płyty. Bardzo duży wkład wnoszą prace [58, 101, 192, 219, 256], w których rozważa się nośność graniczną oraz stany pokrytyczne tego typu ustrojów. Prace [74,157,232] opisują zachowanie ustrojów płytowych przy założonych warunkach brzegowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Kompozytowe laminowane płyty prostokątne ściskane jednokierunkowo badali m.in. Bruno i Lato [32] oraz Kozma i Ochoa [149]. Romeo [221] oraz Anil i inni [7] badali numerycznie i doświadczalnie stateczność kompozytowych płyt poddanych dwuosiosowemu obciążeniu ściskającemu. Analizie wyboczeniowej prostokątnych płyt z kwadratowym wycięciem poświęcone są m.in. prace [2,284]. W pracy [284] badany jest wpływ delaminacji dookoła otworu na siłę krytyczną kompozytowej płyty, natomiast w pracy [2] analizowano wartość siły krytycznej dla różnych wielkości otworów. Wpływ warunków brzegowych, promienia zaokrąglenia, sekwencji warstw kompozytu na siłę krytyczną i zachowanie pokrytyczne został przestudiowany wnikliwie w pracy [233]. Hu [110, 111, 112,], Hahn i Tsai [92], Haj Ali i Wang [94] badali wpływ nieliniowości geometrycznych i modelu materiału na zachowanie krytyczne i pokrytyczne laminowanych, kompozytowych płyt. Yang i inni [271] badali wrażliwość płyt na imperfekcje. Z polskich opracowań warto zwrócić uwagę na zbiorową pracę pod redakcją Królaka [151], w której jednym z analizowanych przykładów była prostokątna, cienkościenna płyta poddana różnym kombinacjom obciążenia. Badania prowadzono w zakresie sprężystym oraz sprężysto plastycznym, a otrzymane wyniki porównano z wynikami badań doświadczalnych. Rocha i inni [218, 219], Helbig i inni [102] oraz Isoldi i inni [119] zajmowali się optymalizacją kształtu i rozmiaru centralnie umieszczonego wycięcia w płycie, mając na celu maksymalizację obciążenia krytycznego. El-Sawy i inni [78] zastosowali MES do określenia naprężeń w przypadku wyboczenia sprężysto-plastycznego nieosiowo obciążonej i swobodnie podpartej kwadratowej oraz prostokątnej płyty z okrągłym wycięciem. Płytami z okrągłym wycięciem zajmowali się również Nemeth [191], Lee i Hyer [163], Baba [18] oraz Baba i Baltaci [17]. W literaturze spotyka się także dosyć często badania płyt z otworem eliptycznym [161, 171]. Wpływ różnych rodzajów wycięć na zachowanie pokrytyczne laminowanych płyt badali Kumar i Singh [157, 158].

Przedstawiony powyżej szczegółowy opis badanych w literaturze przypadków płyt, pokazuje sporą rozpiętość podejmowanych zagadnień dotyczących

problematyki ugięć i stateczności. Przeważa tu głównie analiza kwadratowych płyt bez wycięcia bądź z wycięciem w kształcie okręgu oraz elipsy. Z zaprezentowanego przeglądu literatury jednoznacznie wynika, że większość elementów cienkościennych badana była w zakresie wytrzymałościowym. Brak jest natomiast wyników badań głównie eksperymentalnych, dotyczących wykorzystania elementów cienkościennych jako elementy sprężyste.

1.2. Cel i zakres pracy

Na podstawie przeprowadzonego w poprzednim rozdziale przeglądu literatury sformułowano główne cele pracy, które stanowiły wymuszenie stabilnej pracy ściskanej płyty kompozytowej z centralnym wycięciem w zakresie pokrytycznym, tak, by postać deformacji odpowiadała giętno-skrętnej postaci wyboczenia oraz określenie wpływu parametrów geometrycznych centralnego wycięcia, jak również układu warstw kompozytu na możliwość kształtowania pokrytycznych ścieżek równowagi płytowego elementu sprężystego.

Prowadzone badania dotyczą analizy stanów krytycznych i pracy konstrukcji w zakresie pokrytycznym z wykorzystaniem symulacji numerycznych MES oraz badań doświadczalnych, prowadzonych na rzeczywistych modelach płyt kompozytowych, wytworzonych techniką autoklawową w symetrycznym i niesymetrycznym układzie warstw laminatu. Zakres obciążenia konstrukcji, determinujący zakres pracy płyty jako elementu sprężystego, wyznaczony zostanie z wykorzystaniem naprężeniowego kryterium zniszczenia materiałów kompozytowych Tsai-Wu.

Postawiono tezę pracy, iż istnieje możliwość kształtowania pokrytycznej ścieżki równowagi płytowego elementu sprężystego, poprzez zmianę parametrów geometrycznych centralnego wycięcia oraz odpowiedni dobór układu warstw kompozytu z wykorzystaniem sprzężeń mechanicznych, przy zachowaniu stałych parametrów geometrycznych i masy ustroju.

Zakres prowadzonych badań, zmierzający do rozwiązania postawionego problemu badawczego będzie obejmował wykorzystanie metod symulacyjnych, jak również badań doświadczalnych, stanowiących bieżącą weryfikację opracowanych modeli numerycznych. Badania numeryczne prowadzone będą w zakresie liniowym (rozwiązanie zagadnienia własnego – stan krytyczny) i nieliniowym (rozwiązanie zagadnienia nieliniowej stateczności), z wykorzystaniem komercyjnego pakietu obliczeniowego wykorzystującego metodę elementów skończonych – ABAQUS®. Opracowane modele dyskretne zostaną zwalidowane wynikami badań eksperymentalnych.

2. Właściwości mechaniczne laminatów

2.1. Podstawowe założenia stateczności elementów płytowych

W pracy analizowano cienkościenne elementy płytowe z centralnym wycięciem, podparte przegubowo na obydwu końcach. Badane elementy stanowią układ wielowarstwowy o właściwościach ortotropowych poszczególnych warstw, do analizy którego przyjęto dwuwymiarowy model płytowy z założeniami dotyczącymi klasycznej teorii cienkich płyt [4, 34, 125, 126, 131, 139, 151, 152, 269]:

- grubość płyty jest stała,
- grubość płyty jest wielokrotnie mniejsza od jej pozostałych wymiarów gabarytowych,
- płyta wykonana jest z materiału sprężystego podlegającemu prawu Hooke'a,
- naprężenia w płaszczyźnie płyty (σ_{xx} i σ_{yy}) są dominujące, naprężenia w kierunku normalnym do płyty (σ_{zz}) przyjmuje się równe zero, natomiast naprężenia styczne w kierunkach prostopadłych do powierzchni płyty (τ_{xz} i τ_{yz}) są wielokrotnie mniejsze w porównaniu do wartości naprężeń w płaszczyźnie płyty (σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy}), co oznacza, że w płycie panuje płaski stan naprężenia,
- obowiązuje hipoteza Kirchhoffa-Love'a, zgodnie z którą proste normalne do nieodkształconej powierzchni środkowej płyty pozostają prostymi normalnymi do powierzchni środkowej po wyboczeniu, dodatkowo pomija się tu składowe stanu odkształcenia (γ_{xz} , γ_{yz} , ϵ_z),
- przyjmuje się małe przemieszczenia w płaszczyźnie płyty, które nie zależą od kierunku z.

Ponadto przyjęto założenia klasycznej teorii płyt wielowarstwowych [4, 29, 36, 39, 104, 125, 126, 131, 145, 186, 194, 250, 267, 269]:

- każda warstwa płyty jest ortotropowa i ma stałą grubość, ponadto każda z warstw wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego,
- zakłada się, że warstwy płyty są doskonałe ze sobą połączone i płyta odkształca się spełniając założenia Kirchhoffa-Love'a,
- pomija się naprężenia między warstwami.

W związku z tym, że przyjmuje się jednorodność, liniową sprężystość i doskonałe połączenie ze sobą składników warstwy indywidulanej, ograniczenia dotyczą jedynie zhomogenizowanej warstwy materiału ortotropowego, co też stanowi istotę klasycznej teorii płyt kompozytowych.

Do opisu odkształceń powierzchni środkowej każdej płyty przyjęto postać tensora odkształcenia z zastosowaniem opisu przemieszczeń u , v , w , odpowiednio w kierunkach osi x , y , z (Królak (red.) [152], Kołakowski, Kowal-Michalska (red.)

[139], Kowal-Michalska (red.) [147], Kubiak [153], Kołakowski, Teter [143, 144], Teter, Kołakowski [240, 241], Teter [242]):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ix} &= u_{i,x} + 0,5(w_{i,x}^2 + u_{i,x}^2 + v_{i,x}^2) \\ \varepsilon_{iy} &= u_{i,y} + 0,5(w_{i,y}^2 + u_{i,y}^2 + v_{i,y}^2) \\ \varepsilon_{iz} &= 0 \\ 2\varepsilon_{ixy} &= \gamma_{ixy} = u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y} + u_{i,x}u_{i,y} + v_{i,x}v_{i,y}\end{aligned}\quad (2.1)$$

przy czym płaszczyzna x-y pokrywa się z powierzchnią środkową płyty przed jej wyboczeniem.

Przyrosty krzywizn zginania: κ_x , κ_y oraz skręcenia κ_{xy} dla każdej płyty opisane są liniowymi zależnościami, co też stanowi główne ograniczenie przyjętej teorii (Woźniak (red.) [268], Pietraszkiewicz [204]):

$$\kappa_{ix} = -w_{i,xx} \quad \kappa_{iy} = -w_{i,yy} \quad \kappa_{ixy} = -2w_{i,xy} \quad (2.2)$$

2.2. Równania konstytutywne dla płyt warstwowych

Jak już wcześniej wspomniano do opisu właściwości mechanicznych warstwy kompozytu przyjmuje się założenie idealnego połączenia poszczególnych warstw, co pozwala traktować kompozyt jako „continuum materiałowe”, dla którego opis formułowany jest na poziomie makro mechaniki.

Zależności naprężenie-odkształcenie dla ortotropowej płyty w płaskim stanie naprężenia, zgodnie z podstawowymi założeniami płyt warstwowych, w lokalnym układzie odniesienia związanym z głównymi kierunkami ortotropii (osie 1-2), mają następującą postać [139, 147, 210, 211]:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Występujące w równaniu (2.3) wyrazy macierzy sztywności Q_{ij} można zdefiniować przez tzw. stałe inżynierskie, które dla płaskiego stanu naprężenia przyjmują postać:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

W powyższych zależnościach, do opisu poszczególnych wyrazów macierzy sztywności (2.4) wprowadzono następujące oznaczenia: E_1 , E_2 – moduły

sprężystości Younga w głównych kierunkach ortotropii 1 i 2, G_{12} – moduł Kirchhoffa w płaszczyźnie warstwy 1-2, ν_{12}, ν_{21} (ν_{ij}) – liczby Poissona, dla których naprężenia są w kierunku i , natomiast kierunek j wyznacza kierunek odkształcenia poprzecznego. Dodatkowo zgodnie z symetrią macierzy sztywności Q_{ij} , a także z twierdzeniem Betty’ego – Maxwella pomiędzy modułami Younga a liczbami Poissona słuszna jest zależność:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} \quad (2.5)$$

Równania (2.3)÷(2.5) odnoszące się do warstwy ortotropowej zapisane są w głównych kierunkach ortotropii 1-2, które określane są w literaturze jako tzw. konfiguracja osiowa. Najczęściej nie pokrywają się one z globalnym układem współrzędnych (x-y), wyznaczonym przez geometrię płyty. Należy zatem dokonać transformacji naprężeń i odkształceń do globalnego układu odniesienia (x-y) związanego z całą płytą (zazwyczaj z jej krawędziami). Dla dwuwymiarowego przypadku (rys. 2.1) składowe stanu naprężenia i odkształcenia wyrażone w układzie (1-2) transformują się do globalnego układu (x-y) zgodnie z zależnościami:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

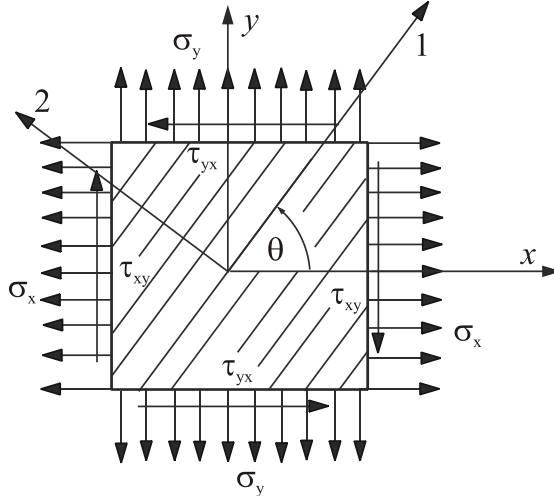
oraz

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

gdzie macierz $[T]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Występujące w macierzach transformacji elementy m i n oznaczają odpowiednio sinus i cosinus zorientowanego kąta laminacji θ (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Definicja lokalnego i globalnego układu współrzędnych

Związki konstytutywne (zależności naprężenie-odkształcenie) dla globalnego układu przyjmują postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

gdzie elementy macierzy sztywności $\bar{Q}_{ij}$ można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= \bar{Q}_{61} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{26} &= \bar{Q}_{62} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wzór (2.11) przedstawia zależność wiążącą ze sobą macierze sztywności w lokalnym oraz globalnym układzie współrzędnych:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \quad (2.11)$$

gdzie górny indeks -1 oznacza macierz odwrotną, zaś $-T$ macierz transponowaną.

2.3. Własności mechaniczne laminatów

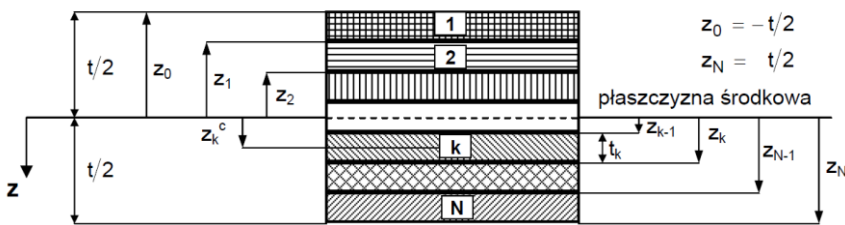
W analizie kompozytów warstwowych zgodnie z klasyczną teorią cienkich laminatowych płyt uwzględnia się wpływ właściwości mechanicznych poszczególnych warstw (tzw. lamin) na właściwości całego laminatu [84, 124]. Biorąc pod uwagę, iż obciążenia przyłożone do elementu kompozytowego wywołują w nim zmienne naprężenia i odkształcenia, a kryteria zniszczenia odnoszą się do naprężeń bądź odkształceń w każdej warstwie indywidualnej, to aby wyznaczyć wypadkowe siły i momenty w przekroju kompozytu, należy naprężenia działające w każdej warstwie scałkować po grubości tej warstwy, a następnie zsumować po wszystkich warstwach laminatu w sposób następujący [147]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \{N\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \{M\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (2.13)$$

gdzie: z_k i z_{k-1} – odległości k -tej warstwy od powierzchni środkowej laminatu, $z_0 = -t/2$, t – całkowita grubość laminatu, N – liczba warstw w laminacie.

Na rysunku 2.2 przedstawiono przekrój kompozytu wielowarstwowego (tzw. laminatu) składającego się z N warstw o grubości t_k .



Rys. 2.2. Przekrój laminatu [84]

Wykorzystując odpowiednie przekształcenia, końcową postać równań (2.12) i (2.13) dla laminatu można przedstawić w postaci:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

bądź w postaci uproszczonej:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

gdzie: ε , κ – tensory odkształceń i krzywizn powierzchni środkowej laminatu, A , B , D – wyrazy macierzy określane według poniższych zależności:

- macierz sztywności rozciągania

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.17)$$

- macierz sztywności sprzężeń

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.18)$$

- macierz sztywności zginania

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.19)$$

ponadto:

$$A_{ij} = A_{ji}, B_{ij} = B_{ji}, D_{ij} = D_{ji} \quad (2.20)$$

Macierz sztywności sprzężeń $[B]$ wykazuje sprzężone zależności pomiędzy składowymi stanu obciążenia i odkształcenia. Tak więc w ogólnym przypadku kompozytu warstwowego, stanom tarczowym towarzyszą również stany giętne (tj. zginanie i zwichrzenie) i odwrotnie. W większości przypadków typowych klas laminatów (tj. grup laminatów o specyficznym układzie kątowym warstw i sekwencji ich ułożenia), sprzężenia stanów tarczowych i giętnych nie występują, w wyniku czego stany tarczowe można opisać macierzą sztywności tarczowej $[A]$, a stany giętne macierzą $[D]$ [84].

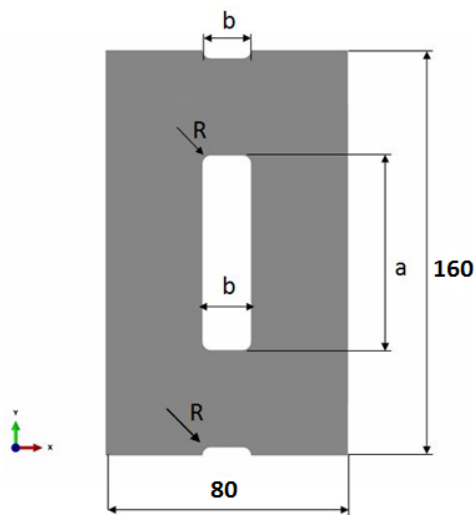
3. Przedmiot i zakres badań

Jednolite, cienkie płyty należą do grupy elementów konstrukcyjnych dość tanich w wytwarzaniu, jednak ze względu na niewielką sztywność na zginanie, mogą przenosić stosunkowo nieduże obciążenia. Gdy są ściskane utrata stateczności następuje przy niewielkim obciążeniu i ma charakter wyboczenia giętnego. Znane powszechnie sposoby poprawy nośności płyt poprzez zastosowanie usztywnień czy przetłoczeń, często prowadzą do znacznej zmiany postaci konstrukcyjnej, a niekiedy mogą prowadzić do niepożądanego wzrostu masy ustroju. Istnieje jednak sposób, by znacznie poprawić nośność tego typu konstrukcji, a nawet pokusić się o wykorzystanie tego typu struktur cienkościennych nie tylko, jako elementy nośne, ale także jako elementy sprężyste. Idea poprawy nośności polega na wymuszeniu pracy konstrukcji według wyższej postaci wyboczenia (giętno-skrętnej). Aby doprowadzić do pracy płyty w tejże postaci konieczne jest wykonanie centralnego wycięcia w strukturze płyty oraz zainicjowanie przemieszczenia powstałych pionowych pasów płyty każdy w przeciwną stronę, co powinno zapewnić stateczną pracę konstrukcji w zakresie pokrytycznym. Stwarza to możliwości projektowania elementów płytowych o bardzo korzystnych charakterystykach nieliniowo-sprężystych, prowadzących do istotnego podwyższenia wartości obciążenia krytycznego oraz wzrostu nośności konstrukcji.

Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są prostokątne płyty z centralnym wycięciem, wykonane z kompozytów włóknistych o zróżnicowanych układach warstw laminatu. Zakres badań obejmuje zagadnienia liniowej i nieliniowej stateczności płytowych struktur kompozytowych poddanych równomiernemu ściskaniu. Badania prowadzono z wykorzystaniem różnych metod badawczych, łączących ze sobą zagadnienia związane z badaniami doświadczalnymi, prowadzonymi na rzeczywistych konstrukcjach kompozytowych oraz obliczeniami numerycznymi z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Jako narzędzie numeryczne wykorzystano komercyjny pakiet obliczeniowy – program ABAQUS®.

3.1. Cienkościenna, kompozytowa płyta z centralnym wycięciem

W pracy zajmowano się prostokątnymi, cienkościennymi płytami z centralnym wycięciem, wykonanymi z kompozytu węglowo-epoksydowego, z wykorzystaniem techniki autoklawowej. Schemat geometryczny analizowanej płyty z wycięciem przedstawia rysunek 3.1.



Rys. 3.1. Wymiary geometryczne cienkościennej płyty z wycięciem

Badane płyty posiadały wykonany centralny prostokątny otwór o zmiennych parametrach geometrycznych a i b wraz z zaokrąglonymi narożami o stałym promieniu $R = 5$ mm. Na krótszych krawędziach płyty nad i pod centralnym wycięciem zastosowano technologiczne wybrania o szerokości równej szerokości wycięcia b , z takim samym promieniem zaokrąglenia jak w narożach wycięcia. Zadaniem wykonanych wybrań technologicznych było konstrukcyjne wydzielenie w badanej płycie stref, gdzie jest ona tylko skręcana i zginana, bez oddziaływań pochodzących od warunków brzegowych związanych z zamocowaniem.

Koncepcja wymuszenia pracy płyty według wyższej, giętno-skrętnej postaci wyboczenia przeprowadzona była dla dwóch wariantów konstrukcyjnych płyty. Wariant 1 dotyczył konstrukcji płyty wykonanej w symetrycznym układzie laminatu, w której uzyskanie postaci giętno-skrętnej, jako postaci stabilnej w zakresie zakrytycznym realizowano poprzez wymuszenie początkowych ugięć pionowych pasów płyty w kierunkach przeciwnych, prostopadłych do powierzchni płyty. Wariant 2 obejmował rozwiązanie konstrukcyjne, w którym wymuszenie postaci giętno-skrętnej, jako naturalnej najniższej postaci wyboczenia uzyskuje się poprzez wykorzystanie odpowiednich sprzężeń macierzy sztywności kompozytu, poprzez zastosowanie niesymetrycznych układów laminatu. W obydwu wymienionych wariantach geometria płyty, oraz warunki brzegowe i obciążenie konstrukcji były takie same.

Dodatkowo do opisu struktury laminatu zastosowano oznaczenia w postaci indeksu dolnego. Przykładowo, laminat symetryczny o układzie warstw: 0, 90, 45, -45, -45, 45, 90, 0 można zapisać następująco: $[0/90/45/-45]_S$, gdzie indeks S oznacza symetrię, czy też laminat niesymetryczny o układzie warstw

30,- 30,- 30,30,0,30,-30,30,-30,-30,30,0 można zapisać jako $[30/-30_2/30/0/30/-30/30/-30_2/30/0]_T$, gdzie indeks T oznacza cały laminat, natomiast indeks liczbowy pozwala na skrócenie zapisu konfiguracji. Prezentowany opis prowadzi do uproszczenia zapisu konfiguracji kompozytu w przypadku laminatów o dużej liczbie warstw.

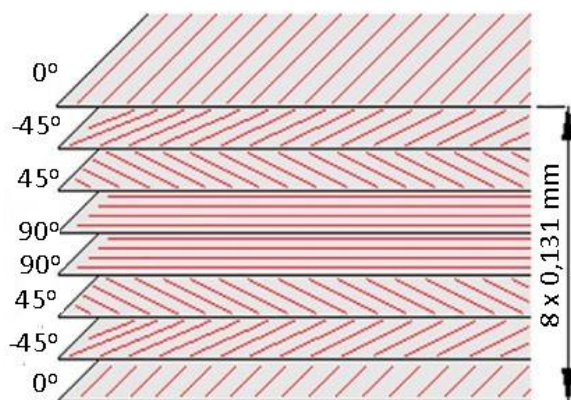
3.2. Płyta o symetrycznym układzie warstw kompozytu - wariant 1

Badania prowadzono dla płyt kompozytowych wykonanych z jednokierunkowej taśmy prepregowej systemu HexPly (Hexcel) kompozytu węglowo-epoksydowego o oznaczeniu M12/35%/UD134/AS7/300. Wzmocnienie kompozytu stanowiły włókna węglowe AS7J12K o gęstości $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$; $R_m = 4830 \text{ MPa}$; $\nu = 0,269$; $E = 241 \text{ GPa}$, natomiast jego osnowę, żywica epoksydowa o właściwościach: $\rho = 1,24 \text{ g/cm}^3$; $T_g = 128^\circ\text{C}$; $R_m = 64 \text{ MPa}$, $\nu = 0,4$; $E = 5,1 \text{ GPa}$. Właściwości mechaniczne materiału, wyznaczone w badaniach eksperymentalnych według norm ISO zestawiono w tabeli 3.1.

Tab. 3.1. Właściwości mechaniczne kompozytu węglowo-epoksydowego

Moduł na rozciąganie		Moduł na ścinanie	Liczba Poissona	Wytrzymałość na rozciąganie		Wytrzymałość na ścinanie	Wytrzymałość na ściskanie	
E_1 (0°)	E_2 (90°)	$G_{1,2}$	ν_{12}	F_{TU1} (0°)	F_{TU2} (90°)	$F_{su}(45^\circ)$	F_{cu1} (0°)	F_{cu2} (90°)
MPa	MPa	MPa	-	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
131710	6360	4180	0,32	1867	26	100,15	1531	214

Płyty zostały wykonane z ośmiu warstw laminatu w symetrycznym układzie według płaszczyzny środkowej płyty, w pięciu następujących konfiguracjach: $[45/-45/45/-45]_s$, $[0/-45/45/90]_s$, $[90/-45/45/0]_s$, $[45/-45/90/0]_s$, $[0/90/0/90]_s$. Wszystkie warstwy posiadały jednakową grubość wynoszącą 0,131 mm. Przykładowy schemat układu warstw laminatu symetrycznego po grubości płyty prezentuje rysunek 3.2.



Rys. 3.2. Schemat układu warstw kompozytu po grubości płyty – przykładowa konfiguracja $[0/-45/45/90]_s$

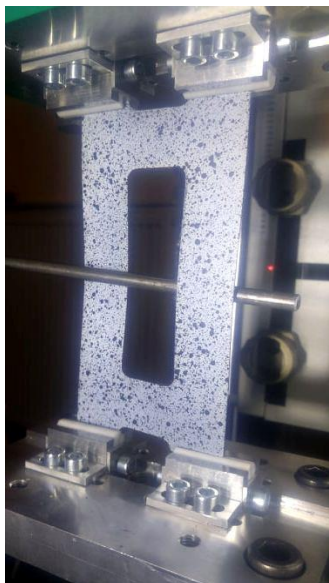
Analizowane płyty posiadały symetryczne wycięcie znajdujące się w środku płyty, którego wymiary, tj. wysokość a i szerokość b stanowiły zmienne parametry geometryczne konstrukcji, mające istotny wpływ na charakterystykę układu w stanie obciążonym. Zakres przyjętych parametrów geometrycznych wycięcia wynosił odpowiednio: $a = 80 \div 100$ mm oraz $b = 20 \div 40$ mm, przy czym wysokość wycięcia a zmieniano co 20 mm, a szerokość wycięcia co 10 mm, co finalnie prowadziło do analizy pięciu przypadków geometrycznych płyty. Próbki eksperymentalne cienkościennych płyt kompozytowych przedstawiono na rysunku 3.3.



Rys. 3.3. Próbkki eksperymentalne płyt dla różnych parametrów geometrycznych wycięcia

Realizację wstępnych ugięć modelu fizycznego płyty, zapewniającego jej pracę według giętno-skrętnej postaci wyboczenia uzyskiwano poprzez

mechaniczne wymuszenie ugięć pionowych pasów płyty w przeciwnych kierunkach – rysunek 3.4.



Rys. 3.4. Schemat wymuszenia wstępnych ugięć pionowych pasów płyty

W przypadku kompozytów symetrycznych, w których zarówno właściwości materiałowe, jak i geometryczne są symetryczne względem powierzchni środkowej laminatu, nie występują żadne sprzężenia mechaniczne, co oznacza, że macierze sprzężeń $[B]$ są zerowe. W tym przypadku równanie (2.16) w rozwinięciu można zapisać następująco:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

gdzie: $\{N\}$ oznacza wektor sił normalnych, $\{M\}$ – wektor momentów gnących, $[A]$ – macierz sztywności błonowej, $[D]$ – macierz sztywności zginania, zaś $[B]$ oznacza macierz sztywności sprzężeń mechanicznych; $\{\varepsilon\}$ reprezentuje odkształcenia, a $\{\kappa\}$ – krzywizny powierzchni środkowej.

3.3. Płyta o niesymetrycznym układzie warstw kompozytu – wariant 2

Układy symetryczne są najczęściej stosowanymi rozwiązaniami w konstrukcjach rzeczywistych, gdyż zapewniają stabilność procesu technologicznego, pozwalając uniknąć niepożądanych efektów „paczenia się” struktury kompozytu podczas jego wytwarzania. Jednakże w szczególnych rozwiązaniach szeroka skala możliwości, jakie dają niesymetryczne laminaty może pozwolić na uzyskanie korzystniejszych pod różnymi względami rozwiązań konstrukcyjnych [116]. Drugi wariant konstrukcyjny płyty, poprzez wykorzystanie odpowiednich sprzężeń mechanicznych macierzy sztywności, umożliwia uzyskanie naturalnej, najniższej giętno-skrętnej postaci wyboczenia ściskanej płyty kompozytowej z centralnym wycięciem.

W odniesieniu do klasycznej teorii laminatów (CLT) równania konstytutywne dla laminatu (2.16) w pełnym zapisie mają postać [125]:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^b\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

W przypadku kompozytów o niesymetrycznym układzie warstw, możliwe jest występowanie dodatkowych sprzężeń niesymetrycznych, gdy odpowiednie wyrazy macierzy sztywności sprzężeń B są niezerowe, tzn. $B_{11} \neq 0$, $B_{12} \neq 0$ oraz $B_{22} \neq 0$ (obciążenia normalne – odkształcenia giętne) lub $B_{66} \neq 0$ (obciążenia ścinające – odkształcenia skrętne) lub $B_{16} \neq 0$ i $B_{26} \neq 0$ (obciążenia normalne – odkształcenia skrętne). Takie cechy kompozytów o niesymetrycznym układzie warstw pozwalają na swobodne kreowanie właściwości mechanicznych elementów kompozytowych, poprzez projektowanie odpowiednich sprzężeń stanu odkształcenia. Strategia ta została wykorzystana w niniejszej pracy do poszukiwania rozwiązań zamiany kolejności postaci wyboczenia ściskanych płyt kompozytowych (giętnej i giętno-skrętnej) z różnymi wariantami wycięcia.

Odnosząc się do prac Ch. Yorka [273, 274, 276], macierz sztywności błonowej A oraz macierz sztywności giętnej D mogą przybierać jedną z dwóch form:
– A_s gdzie $A_{16}=A_{26}=0$ oraz D_s gdzie $D_{16}=D_{26}=0$ (proste laminaty, brak sprzężenia),

– A_F i D_F gdzie wszystkie składniki macierzy są różne od zera (pełne sprzężenie).

Każda z macierzy oznaczonych indeksem "0" składa się w sposób oczywisty ze wszystkich zerowych wyrazów. Macierz sprzężenia B , oprócz wariantu B_0 , może przyjmować dodatkowo pięć różnych form sprzężeń: B_L , B_T , B_{LT} , B_S i B_F , opisanych szczegółowo przez Yorka [273, 274]. Sumarycznie daje to 24 różne „klasy” sprzężeń laminatów złożonych z tysiąca możliwych konfiguracji warstw, w zależności od całkowitej liczby warstw w sekwencji. Postać $[A_S B_0 D_S]$, w której brak jest sprzężeń stanu błonowego i giętnego można opisać jako prosty laminat (ang. *Simple laminate*) podczas, gdy sprzężone formy można opisać w kategoriach odpowiedzi, jaką laminat wykazuje dla różnych kombinacji siły i momentu, z wykorzystaniem związku przyczynowo-skutkowego. Zatem laminat opisany jest jako laminat E-S, jeśli rozciąganie (E) powoduje efekt ścinania (S), natomiast jeśli zginanie powoduje efekt skręcenia, laminat opisany jest jako laminat B-T. Przy czym każda relacja przyczynowo-skutkowa jest odwracalna (tabela 3.2).

Tab. 3.2. Opis sprzężeń powiązanych z odpowiednimi indeksami współczynników macierzy

Indeks dolny	Odpowiedź układu, rodzaj sprzężenia
A_S	prosty laminat (ang. <i>Simple laminate</i>)
A_F	S-E, ścinanie-zginanie (ang. <i>Shear-Extension</i>)
B_T	E-T, rozciąganie-skręcanie (ang. <i>Extension-Twisting</i>) S-B, ścinanie-zginanie (ang. <i>Shear-Bending</i>)
B_S	E-B, rozciąganie-zginanie (ang. <i>Extension-Bending</i>) S-T, ścinanie-zginanie (ang. <i>Shear-Twisting</i>)
B_F	E-B, rozciąganie-zginanie (ang. <i>Extension-Bending</i>) S-B, ścinanie-zginanie (ang. <i>Shear-Bending</i>) E-T, rozciąganie-skręcanie (ang. <i>Extension-Twisting</i>) S-T, ścinanie-zginanie (ang. <i>Shear-Twisting</i>)
B_L	E-B, rozciąganie-zginanie (ang. <i>Extension-Bending</i>)
D_S	prosty laminat (ang. <i>Simple laminate</i>)
D_F	T-B, skręcanie-zginanie (ang. <i>Twisting-Bending</i>)

Badany drugi wariant konstrukcyjny płyty koncentruje się na sekwencjach warstw, które mają największy wpływ na możliwość otrzymania giętno-skrętnej postaci płyty poddanej ściskaniu. Z tego powodu do zamodelowania płyty o niesymetrycznych układach warstw wybrano klasy laminatu ze sprzężeniami E-B i T-B (zewnętrzne warstwy płyty) oraz E-T (rdzeń płyty). Dobór układów warstw tworzących laminat został dokonany na drodze analizy numerycznej tak, aby uzyskać poszukiwane rodzaje sprzężeń mechanicznych.

W tabeli 3.3 zestawiono końcowe konfiguracje laminatu, posiadające poszukiwane sprzężenia. Należy zaznaczyć, że zaprezentowane konfiguracje

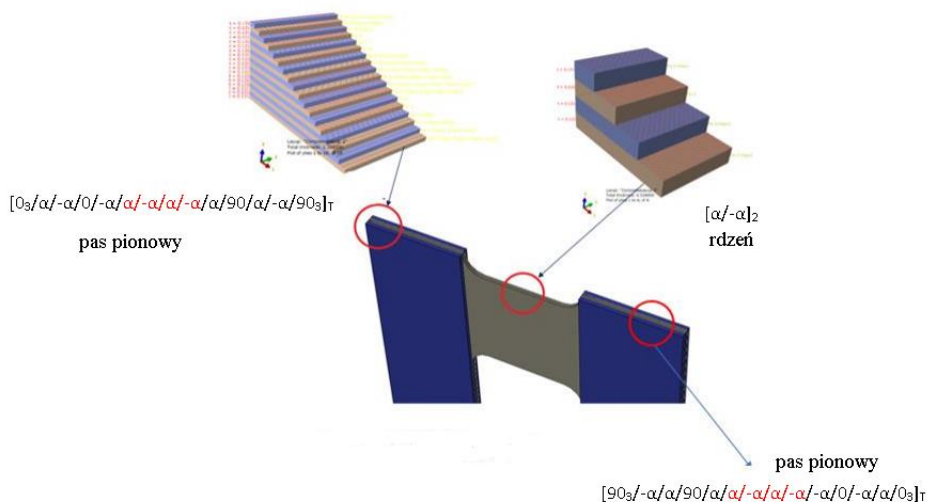
stanowią rozwinięcie podstawowych konfiguracji laminatów sprzężonych, zaproponowanych przez Yorka.

Największe modyfikacje dotyczą pierwszego układu zamieszczonego w tabeli 3.3, w którym to warstwy w rdzeniu zostały podwojone, w odniesieniu do oryginalnego układu zaprezentowanego przez Ch. Yorka. Natomiast postać $A_5B_LD_5$ wykorzystana na pionowe pasy płyty została zmodyfikowana poprzez dodanie potrojonych warstw laminatu o kątach 0° i 90° , a środkowa warstwa 0° została zastąpiona rdzeniem, czyli układem $[\alpha/-\alpha]_2$. Pozostałe układy stanowią złożenie odpowiednio dobranych sprzężeń zestawionych w poniższej tabeli. Obliczenia prowadzono dla 3 różnych wartości kątów ułożenia włókien laminatu: 30° , 45° oraz 60° .

Tab. 3.3. Wybrane konfiguracje laminatów w układach niesymetrycznych

Lp.	Liczba warstw n	Wykorzystane konfiguracje/sprzężenia warstw laminatu		Końcowa konfiguracja laminatu
		Pionowe pasy płyty	Rdzeń płyty	
1	18	$A_5B_LD_5^{**}$ $[\alpha/-\alpha/0/-\alpha/0/\alpha/90/\alpha/-\alpha]$	$A_5B_TD_5^*$ $[\alpha/-\alpha]_2$	$[0_3/\alpha/-\alpha/0/-\alpha/\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha/\alpha/90/\alpha/-\alpha/90_3]_T$
2	14	$A_5B_FD_F$ $[\alpha/-\alpha/0]_2$	$A_5B_TD_5$ $[\alpha/-\alpha]$	$[\alpha/-\alpha/0/\alpha/-\alpha/0/\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha/0/\alpha/-\alpha/0]_T$
3	12	$A_5B_5D_F$ $[\alpha/-\alpha_2/\alpha/0]$	$A_5B_TD_5$ $[\alpha/-\alpha]$	$[\alpha/-\alpha_2/\alpha/0/\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha_2/\alpha/0]_T$
* – układ warstw podany przez Yorka [273,274] składa się tylko z 2 warstw, w niniejszej pracy aby spełnić postawione założenia, rdzeń płyty składa się z 4 warstw,				
** – układ warstw przebadany przez Yorka [273,274] został zmodyfikowany na potrzeby pracy – w końcowej konfiguracji warstwę „0 ⁰⁰ ” zastąpiły warstwy $[\alpha/-\alpha]_2$ (rdzeń płyty), dodatkowo na zewnątrz dodano potrojone warstwy „0 ⁰⁰ ” i „90 ⁰⁰ ”.				

Przykładowy wariant konstrukcyjny płyty o niesymetrycznej konfiguracji kompozytu przedstawiono na rysunku 3.5, na którym schematycznie pokazano strukturę rdzenia oraz pasów pionowych płyty. Należy zaznaczyć, iż efekt wygięcia w przeciwnych kierunkach pionowych pasów płyty, uzyskano dla poszczególnych przypadków, poprzez asymetryczny układ warstw laminatu odpowiednio po obydwu stronach płyty.



Rys. 3.5. Schemat układu warstw kompozytu po grubości płyty dla przypadku $[0_3/a/-a/0/-a/a/-a/a/90/a/-a/90_3]_T$

Płyty w układach niesymetrycznych wykonano z kompozytu węglowo-epoksydowego o oznaczeniu EP137-CR527/100–35. Właściwości mechaniczne materiału, wyznaczone w badaniach eksperymentalnych według norm ISO zestawiono w tabeli 3.4.

Tab. 3.4. Właściwości mechaniczne kompozytu węglowo-epoksydowego

Moduł na rozciąganie		Moduł na ścinanie	Liczba Poissona	Wytrzymałość na rozciąganie		Wytrzymałość na ścinanie	Wytrzymałość na ściskanie	
E_1 (0°)	E_2 (90°)	$G_{1,2}$	ν_{12}	F_{TU1} (0°)	F_{TU2} (90°)	F_{su} (45°)	F_{CU1} (0°)	F_{CU2} (90°)
MPa	MPa	MPa	-	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
143530	5826	3845	0,36	2221	49	83,5	641	114

Wszystkie warstwy laminatu posiadały jednakową grubość wynoszącą 0,105 mm. Dodatkowo, podobnie jak w wariancie 1, analizowane płyty posiadały symetryczne wycięcie znajdujące się w środku płyty, którego wymiary, tj. wysokość a i szerokość b stanowiły zmienne parametry geometryczne konstrukcji. Zakres przyjętych parametrów geometrycznych wycięcia wynosił odpowiednio: $a = 80 \div 120$ mm i zmieniał się co 20 mm oraz $b = 20 \div 40$ mm, który zmieniał się co 10 mm, co prowadziło do analizy pięciu przypadków geometrycznych płyty. Na rysunku 3.6 przedstawiono przykładowe próbki eksperymentalne płyt w układzie niesymetrycznym.



Rys. 3.6. Próbkki eksperymentalne płyt o układach niesymetrycznych w pięciu wariantach otworów oraz w trzech niesymetrycznych konfiguracjach warstw

4. Metodyka obliczeń numerycznych

W dostępnej literaturze można znaleźć wiele pozycji, które prezentują metody numeryczne służące do rozwiązywania równań różniczkowych. Specyfika prezentowanego zagadnienia wymusza zastosowanie metody, która pozwala szybko i efektywnie otrzymać wyniki analiz obarczone jak najmniejszym błędem. Do takich metod można zaliczyć metodę elementów skończonych (MES), która jest obecnie jedną z najszerzej stosowanych metod obliczeniowych w analizie konstrukcji ciała stałego z dużą liczbą stopni swobody. Metoda ta opiera się na dyskretyzacji układów ciągłych, dzięki której otrzymuje się układ złożony ze skończonej liczby elementów skończonych.

W niniejszej pracy do rozwiązania zagadnienia stateczności cienkościennych płyt kompozytowych zastosowano komercyjny program ABAQUS®, wykorzystujący metodę elementów skończonych. Obliczenia prowadzono w dwóch etapach: dla stanu krytycznego i stanu pokrytycznego.

4.1. Analiza stanu krytycznego

W przypadku metody elementów skończonych wyznaczanie obciążenia krytycznego dla wyboczenia statycznego konstrukcji polega na rozwiązaniu zagadnienia własnego i realizowane jest na zasadzie tzw. ograniczonego podejścia do bifurkacyjnej utraty stateczności. Podejście to umożliwia wyznaczenie wartości obciążenia krytycznego oraz formy wyboczenia z zastosowaniem liniowej analizy sprężystej. Przy rozwiązaniu zagadnienia wykorzystuje się warunek ekstremum energii potencjalnej, gdzie stan równowagi układu odpowiada minimum energii potencjalnej [224], co oznacza, że druga wariacja energii potencjalnej dla układów o charakterze statecznym, musi być dodatnio określona. Rozwiązanie zagadnienia stateczności sprowadza się wówczas do rozwiązania równania:

$$K + \lambda H = 0 \quad (4.1)$$

gdzie: K – macierz sztywności układu, H – macierz sztywności geometrycznej układu, λ – parametr krytyczny (np. siła krytyczna).

Prowadzenie analizy polegającej na rozwiązaniu zagadnienia własnego, nie pozwala jednak na wyznaczenie pól naprężeń i przemieszczeń węzłów konstrukcji, które to uzyskuje się poprzez nieliniową analizę statyczną.

4.2. Analiza stanów pokrytycznych

Wiele konstrukcji cienkościennych, w tym również kompozytowych, może pracować po utracie stateczności. Oznacza to, że oprócz znajomości wartości obciążenia krytycznego, bardzo ważną rolę odgrywa również zachowanie się konstrukcji po utracie stateczności. Analiza stanów pokrytycznych wymaga zazwyczaj rozwiązania zagadnienia nieliniowego, a dokładniej uwzględnienia nieliniowych zależności pomiędzy przemieszczeniami, a odkształceniami [146]. Podejście takie daje możliwość wyznaczenia pól naprężeń i odkształceń konstrukcji dla wartości obciążenia przekraczającego wartość krytyczną. Najczęściej obliczenia nieliniowe realizowane są dla konstrukcji z zainicjowanymi imperfekcjami geometrycznymi, które odpowiadają wybranej postaci wyboczenia ustroju – zazwyczaj jest to postać najniższa. W analizie nieliniowej możliwe jest wyznaczenie tzw. pokrytycznych ścieżek równowagi, które określają zależności pomiędzy statycznymi parametrami odpowiadającymi obciążeniu struktury, a parametrami geometrycznymi określającymi przemieszczenia jej węzłów.

W prowadzonych obliczeniach numerycznych analizę stanu pokrytycznego, uwzględniającą zagadnienie geometrycznie nieliniowe realizowano wykorzystując przyrostowo-iteracyjną metodę Newtona-Raphsona. W metodzie tej zastosowane procedury przyrostowo-iteracyjne wymagają tworzenia i odwracania macierzy sztywności oraz rozwiązywania układu równań z nową, uaktualnioną macierzą sztywności w każdym kroku obliczeniowym. Zbieżność rozwiązania w bieżącym kroku obliczeniowym osiągana jest poprzez równowagę uogólnionych sił zewnętrznych i wewnętrznych, przy uwzględnieniu założonych tolerancji (tzw. sił resztkowych), dla aktualnego przyrostu obciążenia. Osiągnięcie równowagi układu realizowane jest poprzez kolejne iteracje w danym kroku przyrostowym, co umożliwia dalszą realizację obciążenia konstrukcji w kolejnych przyrostach obciążenia. Graficzną interpretację metody Newtona-Raphsona przedstawiono na rysunku 4.1.



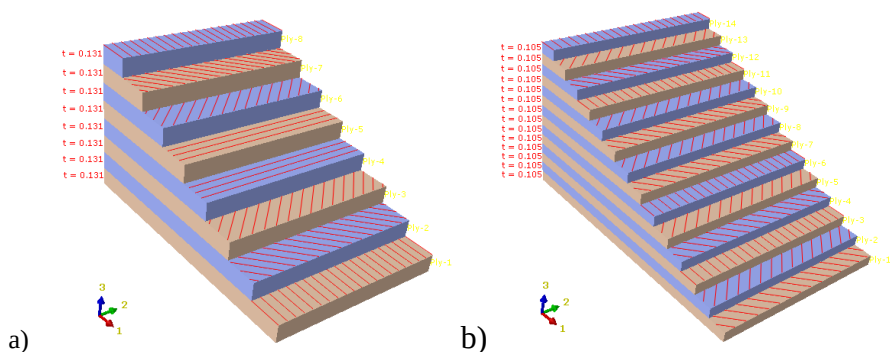
P_1, P_2	– uogólnione siły zewnętrzne,
I_a, I_b	– uogólnione siły wewnętrzne,
ΔP	– obciążenie przyrostowe,
R_a, R_b	– siły resztkowe,
K_0, K_a	– macierze sztywności,
u_0, u_a, u_b	– wektory przemieszczenia
C_a, C_b	– przyrosty przemieszczenia.

- wyznaczenie przyrostu przemieszczenia C_a z wykorzystaniem linowej macierzy sztywności K_0 oraz wartości u_0 i ΔP ,
- przyjęcie wartości kolejnego przemieszczenia u_a ,
- wyznaczenie wartości sił wewnętrznych I_a ,
- określenie siły reszkowej R_a ,
- w przypadku małej wartości R_a nieprzekraczającej 0,005 wartości obciążenia ΔP obliczenia przeprowadzone są iteracyjnie przy założonej następnej wartości przyrostowej obciążenia.

41

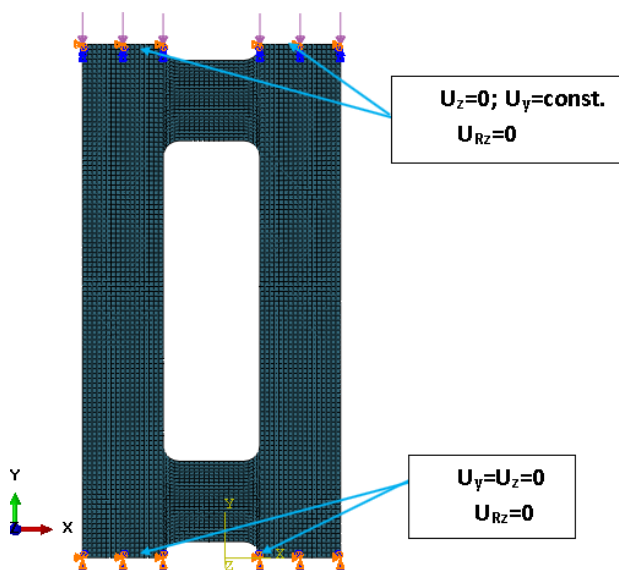
4.3. Budowa modelu numerycznego płyty

Modele dyskretnie płyt w symetrycznym i niesymetrycznym układzie laminatu wykonano z ośmiowęzłowych elementów powłokowych ze zredukowanym całkowaniem typu S8R, posiadających po 6 stopni swobody w każdym węźle. Technika zredukowanego całkowania jest jedną z najstarszych technik aproksymacji rozwiązań stanu przemieszczeniowo-naprężeniowego w elemencie. Zredukowane całkowanie pozwala na usuwanie fałszywych form deformacji elementów skończonych, dzięki zastosowaniu wielomianów wyższych rzędów w opisie funkcji elementu [223]. Do zamodelowania struktury laminatu wykorzystano technikę określaną jako *Layup-Ply*, przy pomocy której odwzorowano konfigurację warstw kompozytu po grubości płyty (rys. 4.2). Technika ta umożliwia w obszarze przyjętego elementu powłokowego definicję poszczególnych warstw laminatu, przy uwzględnieniu parametrów dla każdej warstwy, tj.: rodzaj materiału, kierunek ułożenia włókien oraz grubość warstwy.



Rys. 4.2. Przykładowy model struktury kompozytu po grubości elementu powłokowego:
a) konfiguracja $[0/45/-45/90]_s$ układ symetryczny, b) konfiguracja $[45/- 45/0/45/- 45/0/45/- 45/45/-45/0/45/-45/0]_T$ – układ niesymetryczny

Właściwości materiału kompozytowego opisano definiując model materiału ortotropowego w płaskim stanie naprężenia. Warunki brzegowe modelu numerycznego, odwzorowujące przegubowe podparcie płyty na krótszych krawędziach zdefiniowano poprzez zablokowanie kinematycznych stopni swobody węzłów znajdujących się na górnej i dolnej krawędzi płyty. Węzłom znajdującym się na dolnej krawędzi zablokowano dwa translacyjne stopnie swobody $U_y = U_z = 0$ oraz rotacyjny stopień swobody $U_{Rz} = 0$, pozostawiając możliwość swobodnego obrotu względem krawędzi płyty. W przypadku górnej krawędzi zastosowano analogiczne warunki brzegowe, dopuszczając dodatkowo możliwość przemieszczeń węzłów na kierunku realizacji obciążenia, tzn. $U_z = 0$ oraz $U_{Rz} = 0$. Pionowe krawędzie płyty pozostawały swobodne w trakcie procesu obciążania. Ściskanie modelu płyty zrealizowano poprzez równomierne obciążenie górnej krawędzi płyty (rys. 4.3).

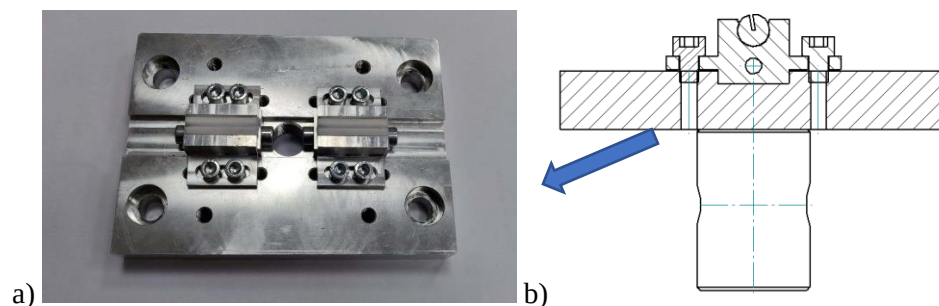


Rys. 4.3. Warunki brzegowe modelu numerycznego płyty

Zakres pracy obejmował prowadzenie badań eksperymentalnych na rzeczywistych konstrukcjach oraz wykonanie symulacji numerycznych z wykorzystaniem metody elementów skończonych w programie ABAQUS®. Obliczenia numeryczne prowadzono w dwóch etapach. Etap pierwszy stanowił analizę stanu krytycznego konstrukcji. Rozwiązanie liniowe zagadnienia własnego dotyczyło określenia wartości obciążenia krytycznego oraz wyznaczenia odpowiadającej mu postaci utraty stateczności. W każdym przypadku wyznaczano 3 najniższe postacie wyboczenia, co pozwoliło na określenie postaci giętno-skrętnej, zapewniającej stateczny charakter pracy konstrukcji po wyboczeniu. Drugi etap obliczeń stanowił rozwiązanie zagadnienia nieliniowej stateczności, w którym obliczenia prowadzono na modelach z zainicjowaną imperfekcją geometryczną odpowiadającą giętno-skrętnej postaci wyboczenia konstrukcji. W prowadzonych obliczeniach przyjęto wartość amplitudy początkowych imperfekcji wynoszącą 0,1 wartości grubości płyty. Analizę prowadzono w zakresie bezpiecznej pracy płyty (bez jej uszkodzenia), określanej z wykorzystaniem interakcyjnego kryterium zniszczenia kompozytu Tsai-Wu. Wyniki obliczeń numerycznych weryfikowano wynikami prowadzonych badań doświadczalnych.

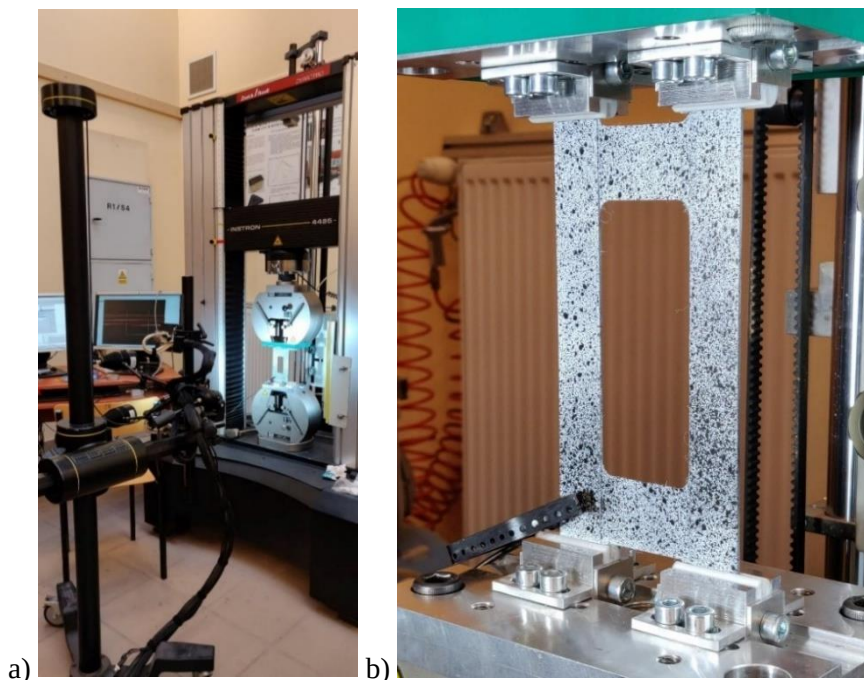
5. Doświadczalna weryfikacja badań numerycznych

Badania doświadczalne ściskanej płyty kompozytowej prowadzono na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej Zwick/Roell ZMART PRO o zakresie pomiarowym do 2500 kN, realizując próby ściskania statycznego ze stałą prędkością przemieszczania górnej trawersy maszyny wynoszącą 2mm/min. Badania prowadzono w warunkach laboratoryjnych w temperaturze 23°C. W trakcie procesu ściskania płyty były podparte przegubowo na krótszych (poziomych) krawędziach, co umożliwiały specjalnie do tego celu zaprojektowane i wykonane uchwyty montowane w maszynie wytrzymałościowej. Elementem zapewniającym przegubowe podparcie krawędzi płyty były walcowe wkładki z nacięciami umieszczone w aluminiowych uchwytach, umożliwiających swobodny obrót walca względem jego osi podłużnej. Uchwyty posiadały „fasolkowe” otwory, dzięki czemu ich położenie można było łatwo dostosować do próbek o różnych wymiarach wycięcia (szerokość wycięcia równa jest szerokości wybrania na poziomych krawędziach płyty). Wkładki wykonano z teflonu w celu zapewnienia niskiego współczynnika tarcia pomiędzy walcem a uchwytem. Widok rzeczywistego elementu mocującego oraz schemat ideowy zaprojektowanego uchwytu przedstawiono na rysunek 5.1.



Rys. 5.1. Uchwyt zapewniający przegubowe podparcie końców płyty: a) konstrukcja rzeczywista, b) schemat ideowy uchwytu

Na rysunku 5.2 zaprezentowano stanowisko do badań eksperymentalnych wraz z zamontowaną próbką badawczą oraz optycznym systemem ARAMIS do pomiarów przemieszczeń i odkształceń ściskanych elementów płytowych.



Rys. 5.2. Widok ogólny stanowiska badawczego z zamontowaną próbką a) widok całego stanowiska badawczego z systemem ARAMIS b) widok zamontowanej płyty

W badaniach eksperymentalnych stateczności konstrukcji cienkościennych bardzo istotna jest szczegółowa rejestracja odpowiednich parametrów próby. W celu właściwego opisu stanu krytycznego i pokrytycznego konstrukcji niezbędna jest rejestracja nie tylko wartości obciążenia, ale również przemieszczeń w wybranych punktach konstrukcji. W tym celu w realizowanych badaniach do pomiaru ugięć płyty zastosowano optyczny system ARAMIS (rys. 5.2.a), w którym odczytów przemieszczeń dokonuje się za pomocą dwóch szybkich kamer umieszczonych na specjalnym statywie (trójnogu).

System ARAMIS pozwala na pomiar w określonym obszarze próbki przemieszczeń 3D oraz prędkości przemieszczeń i odkształceń. Pola pomiarowe mogą mieć wymiary od 20x20 mm do 200x200 mm. Dokładność wyznaczania przemieszczeń jest rzędu 1 μm , natomiast odkształceń co najmniej 0,01%. Pomiar następuje na podstawie zdjęć wykonanych cyfrowymi kamerami, na których system rozpoznaje strukturę powierzchni mierzonego obiektu (każdemu pikselowi na zdjęciu przypisane są odpowiednie współrzędne). Pierwsze zdjęcie jest traktowane jako zdjęcie obiektu przed obciążeniem (brak deformacji). Kolejne zdjęcia nagrywane są w trakcie lub po obciążeniu. Porównując zdjęcia poprzez przypisanie charakterystycznym punktom kwadratowych lub prostokątnych małych płaszczyzn zwanych fasetkami, obliczane są przemieszczenia i odkształcenia charakterystycznych dla danego obiektu

punktów. Jest to system do bezkontaktowych trójwymiarowych pomiarów odkształceń. W trakcie badań rejestrowano przebieg siły obciążającej płytę, skrócenie płyty oraz ugięcie na kierunku prostopadłym do pionowych pasów płyty w połowie wysokości pasa, gdzie występowały największe wartości ugięć płyty. W rezultacie otrzymano pomiary, na podstawie których wyznaczone zostały charakterystyki płyty, umożliwiające ocenę stanu krytycznego oraz stanu pokrytycznego.

Problemem zasadniczym w badaniach płyt było wymuszenie pracy rzeczywistej konstrukcji według postaci giętno-skrętnej, nie będącej naturalną najniższą postacią wyboczenia badanego ustroju. W przeprowadzonych wstępnych badaniach eksperymentalnych zostało to zrealizowane poprzez zastosowanie pręta, pozwalającego na wymuszenie początkowych asymetrycznych ugięć pionowych pasów płyty, stanowiących początkową deformację giętno-skrętnej postaci wyboczenia konstrukcji – rysunek 3.4. Przy czym wymuszenie to zastosowano tylko dla płyt w układzie symetrycznym, dla płyt w układzie niesymetrycznym efekt wymuszenia wyższej postaci wyboczenia (giętno-skrętnej) uzyskano poprzez zastosowanie niesymetrycznych układów warstw laminatu.

Badania prowadzono na płytach kompozytowych z centralnym wycięciem o zróżnicowanej konfiguracji warstw kompozytu. Próby realizowano na płytach wykonanych w układzie symetrycznym względem płaszczyzny środkowej laminatu oraz w układzie niesymetrycznym, o oznaczeniach zamieszczonych w tabeli 5.1. Pierwszy etap badań obejmował rejestrację stanu dokrytycznego i krytycznego, natomiast drugi stanu pokrytycznego, do wartości obciążenia odpowiadającego inicjacji uszkodzenia pierwszej warstwy laminatu, określanego na podstawie kryterium Tsai-Wu.

Tab. 5.1. Struktura i oznaczenie analizowanych płyt kompozytowych

PŁYTY W UKŁADZIE SYMETRYCZNYM	
Symbol	Konfiguracja warstw
PS1 _{bxa}	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45] _T
PS2 _{bxa}	[0/45/-45/90/90/-45/45/0] _T
PS3 _{bxa}	[90/45/-45/0/0/-45/45/90] _T
PS4 _{bxa}	[45/-45/90/0/0/90/-45/45] _T
PS5 _{bxa}	[0/90/0/90/90/0/90/0] _T
PŁYTY W UKŁADZIE NIESYMETRYCZNYM	
Symbol	Konfiguracja warstw
PN1_α _{bxa}	[0 ₃ /α/-α/0/-α/α/-α/α/α/90/α/-α/90 ₃] _T
PN2 α _{bxa}	[α/-α/0/α/-α/0/α/-α/α/-α/0/α/-α/0] _T
PN3 α _{bxa}	[α/-α ₂ /α/0/α/-α/α/-α ₂ /α/0] _T

Szczegółowe badania doświadczalne prowadzono dla pięciu serii płyt kompozytowych w układzie symetrycznym ($PS1_{bxa} \div PS5_{bxa}$) i trzech w układzie niesymetrycznym ($PN1_{\alpha bxa} \div PN3_{\alpha bxa}$), przy czym jedna seria w układzie symetrycznym obejmowała pięć przypadków płyt różniących się wymiarami wycięcia, natomiast jedna seria w układzie niesymetrycznym obejmowała 15 przypadków płyt różniących się wymiarami wycięcia i kątem ułożenia włókien. Program badań obejmował wykonanie trzech pomiarów dla każdej próbki, na podstawie których wyznaczono charakterystyki płyt w zakresie pokrytycznym, umożliwiające ocenę ich pracy po utracie stateczności.

6. Wyniki badań

W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych MES oraz badań eksperymentalnych dotyczące stanów krytycznych i pokrytycznych ściskanych cienkościennych płyt kompozytowych z centralnym wycięciem. Otrzymane wyniki badań eksperymentalnych stanowiły w tym przypadku bezpośrednią weryfikację opracowanych modeli numerycznych konstrukcji. Podrozdział 6.1 dotyczy płyt kompozytowych w symetrycznym układzie warstw laminatu względem środkowej płaszczyzny układu, natomiast podrozdział 6.2 dotyczy płyt kompozytowych w niesymetrycznym układzie warstw. W przeprowadzonych badaniach podjęto próbę jakościowej weryfikacji otrzymanych wyników poprzez ocenę form wyboczenia konstrukcji oraz ilościową analizę otrzymanych wartości sił krytycznych oraz charakterystyk konstrukcji w stanie pokrytycznym.

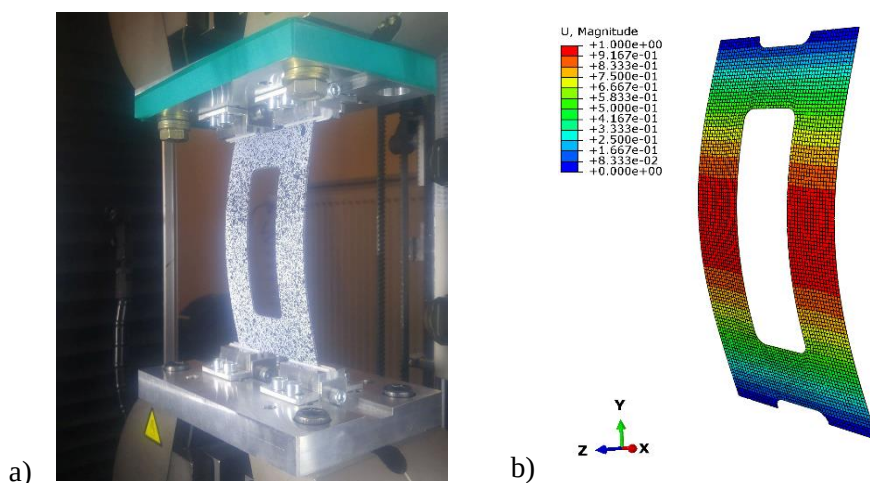
Przeprowadzone rozważania zawierają również syntetyczną analizę otrzymanych wyników z uwzględnieniem wpływu konfiguracji warstw kompozytu oraz wymiarów geometrycznych wycięcia na zachowanie się elementu płytowego w warunkach obciążenia krytycznego i pokrytycznego. Analizę prowadzono dla pięciu serii płyt kompozytowych w układzie symetrycznym (PS1_{bxa}÷PS5_{bxa}), przy czym w każdej serii analizowano pięć wybranych wymiarów centralnego wycięcia: 20x100mm, 30x10mm, 40x100mm, 30x80mm i 30x120mm. W układzie niesymetrycznym analizie poddano trzy konfiguracje warstw kompozytu, przy czym dla każdego układu analizowano pięć różnych wymiarów centralnego wycięcia (takich samych, jak w układzie symetrycznym) i trzy różne kąty ułożenia włókien (PN1_{α_{bxa}}÷PN3_{α_{bxa}}). Prezentowane w dalszej części wyniki wyznaczono zgodnie z opisaną we wcześniejszych rozdziałach metodyką badań doświadczalnych i numerycznych.

6.1. Płyty wykonane w symetrycznym układzie warstw kompozytu

W pierwszej kolejności zaprezentowano wyniki umożliwiające ocenę stanu krytycznego ściskanych kompozytowych płyt z centralnym wycięciem, w układzie symetrycznym laminatu. W prowadzonych badaniach stan krytyczny analizowano tylko na drodze analizy numerycznej. Analizie poddano wartości obciążenia krytycznego w kontekście przyjętego układu warstw kompozytu oraz wpływ parametrów geometrycznych centralnego wycięcia w płycie (wysokość i szerokość wycięcia) na postać utraty stateczności oraz wartość obciążenia krytycznego. W dalszej kolejności zaprezentowano wyniki analizy numerycznej oraz badań doświadczalnych dotyczące zachowania się elementów płytowych w stanie pokrytycznym.

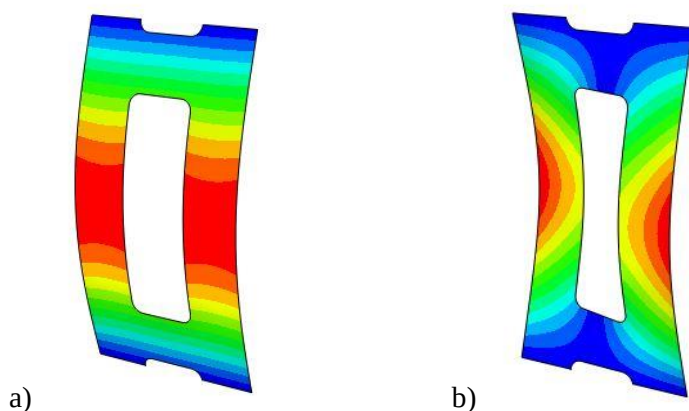
6.1.1. Analiza stanu krytycznego

Przeprowadzone badania doświadczalne ściskanej płyty w symetrycznym układzie warstw kompozytu dostarczyły informacji pozwalających na ocenę stanu odkształcenia konstrukcji rzeczywistej w funkcji obciążenia zewnętrznego. Otrzymane wyniki badań umożliwiają dokonanie jakościowej i ilościowej analizy stanu dokrytycznego oraz krytycznego w oparciu o zarejestrowane parametry próby. Identyfikację stanu krytycznego badanego elementu przeprowadzono na podstawie uzyskanej formy wyboczenia, stanowiącej najniższą postać utraty stateczności oraz odpowiadającej jej wartości obciążenia krytycznego. Otrzymaną najniższą formę wyboczenia badanej płyty kompozytowej przedstawiono na rysunku 6.1.



Rys. 6.1. Niższa postać wyboczenia płyty o układzie [90/-45/45/0]_s: a) badania eksperymentalne, b) obliczenia numeryczne

Jakościowa analiza wyników potwierdza zgodność wyznaczonych na drodze numerycznej form wyboczenia cienkościennej płyty z postacią deformacji uzyskaną w badaniach doświadczalnych. Jednakże otrzymana najniższa giętna postać wyboczenia konstrukcji nie zapewnia stabilnej pracy płyty jako elementu sprężystego i prowadzi do szybkiego jej zniszczenia, na skutek dużych przyrostów ugięcia, przy nieznacznym wzroście obciążenia ściskającego (mała sztywność konstrukcji). Z tego powodu w celu zapewnienia statecznej pracy płyty w zakresie pokrytycznym, zdolnej do przenoszenia wyższych wartości obciążenia wymuszono jej pracę według wyższej, giętno-skrętnej postaci wyboczenia – rysunek 6.2.



Rys. 6.2. Postacie utraty stateczności płyty z centralnym wycięciem a) postać giętą – najniższa b) wyższa postać giętno-skrętna

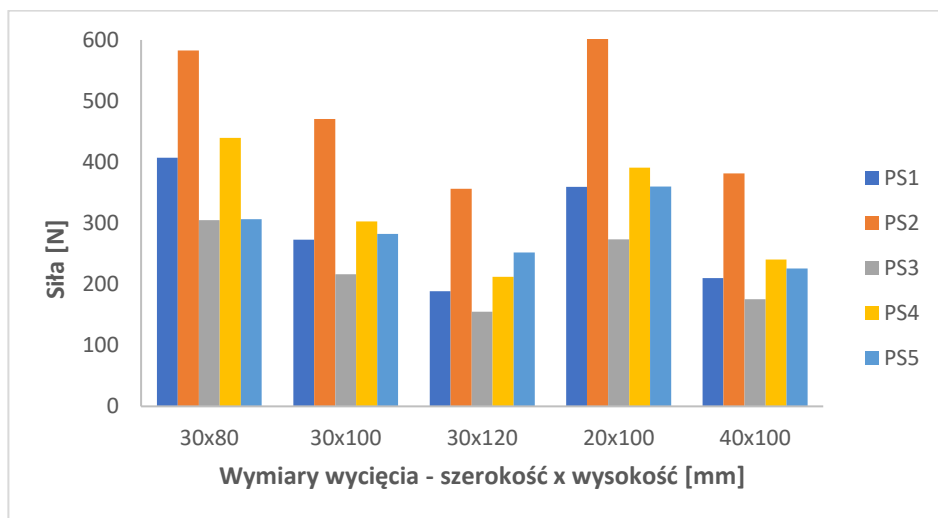
Dzięki takiemu zabiegowi zaobserwowano znaczący wzrost obciążenia krytycznego dochodzące w niektórych przypadkach nawet do 700–800% w stosunku do postaci giętej – tabela 6.1.

Tab. 6.1. Wartości sił krytycznych w [N] dla poszczególnych symetrycznych układów warstw laminatu wyznaczone metodą elementów skończonych

Układ warstw	Wartość siły krytycznej [N]	20x100	30x100	40x100	30x120	30x80
PS1	Postać giętą	41,20	31,83	24,72	30,42	34,30
	Postać giętno-skrętna	359,60	272,70	210,14	188,35	407,11
PS2	Postać giętą	197,54	157,94	126,43	156,24	161,69
	Postać giętno-skrętna	605,36	470,67	381,36	356,09	582,95
PS3	Postać giętą	46,01	36,93	29,65	36,34	38,10
	Postać giętno-skrętna	273,59	216,17	175,23	155,17	305,04
PS4	Postać giętą	54,59	43,20	34,28	42,03	45,34
	Postać giętno-skrętna	390,71	302,77	240,38	211,91	439,84
PS5	Postać giętą	216,20	173,19	138,83	172	176,10
	Postać giętno-skrętna	360,12	282,23	225,65	252,18	306,34

Kolejny etap obliczeń numerycznych obejmował określenie wpływu układu warstw kompozytu na wartość obciążenia krytycznego ściskanej płyty

w symetrycznym układzie warstw. Wartości wyznaczonych obciążeń krytycznych dla poszczególnych konfiguracji laminatu przedstawiono na wykresie 6.3.

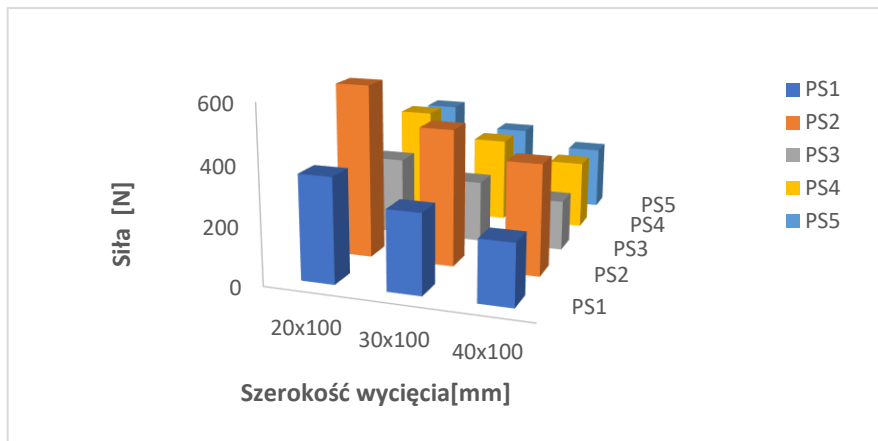


Rys. 6.3. Zależność siły krytycznej od układu warstw kompozytu

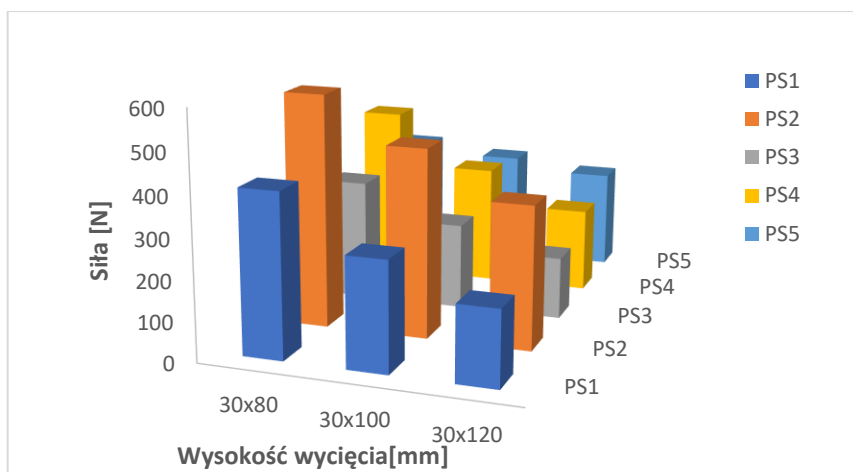
Zaprezentowane wartości obciążenia krytycznego dla wszystkich badanych układów warstw laminatu odpowiadają giętno-skrętnej postaci wyboczenia płyty. Zakres wartości obciążenia krytycznego w analizowanych przypadkach, w zależności od układu warstw kompozytu wynosi 305,04–582,95 N dla wycięcia 30x80, 216,17–470,67 N dla wycięcia 30x100, 155,17–356,09 N dla wycięcia 30x120, 273,59–605,36 N dla wycięcia 20x100 oraz 175,23–381,36 N dla wycięcia 40x100, co oznacza, że zmiana układu warstw laminatu, w przypadku rozważanych konfiguracji powoduje zmianę wartości obciążenia krytycznego o ok. 90–130% – tabela 6.1. Należy przy tym zauważyć, iż najbardziej podatne na wyboczenie są płyty w konfiguracji warstw $[90/45/-45/0]_s$, natomiast najwyższą odpornością na utratę stateczności charakteryzują się płyty w konfiguracji $[0/45/-45/90]_s$. Oznacza to, że warstwy w kierunku 0° , równoległym do kierunku działającego obciążenia ściskającego, ułożone po zewnętrznych stronach płyty powodują dosztywnienie konstrukcji, podwyższając wartość siły krytycznej ustroju.

Dalsze badania obejmowały analizę wpływu parametrów geometrycznych centralnego wycięcia w płycie (wysokości i szerokości) na wartość obciążenia krytycznego. Analizę numeryczną przeprowadzono dla 3 wartości szerokości wycięcia, zmieniających się w zakresie 20÷40 mm oraz 3 wartości wysokości wycięcia o wymiarach 80÷120 mm, przy czym parametry geometryczne wycięcia zmieniano co 10 mm – w przypadku szerokości wycięcia i co 20 mm –

w przypadku wysokości wycięcia. Na rysunkach 6.4 i 6.5 zestawiono zależności siły krytycznej od parametrów geometrycznych wycięcia, dla wszystkich rozpatrywanych konfiguracji warstw kompozytu.



Rys. 6.4. Zależność siły krytycznej od szerokości centralnego wycięcia, gdy wysokość jest stała i wynosi 100 mm



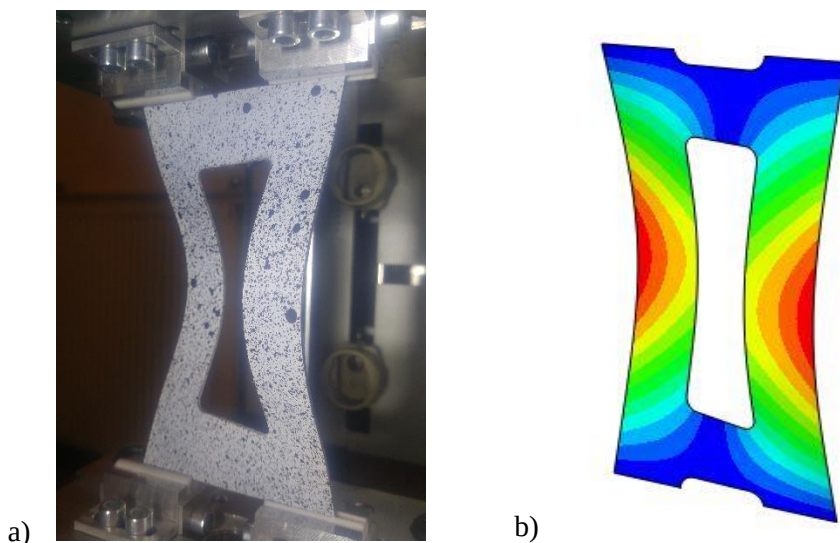
Rys. 6.5. Zależność siły krytycznej od wysokości centralnego wycięcia, gdy szerokość jest stała i wynosi 30 mm

Przeprowadzona analiza wykazała istotny wpływ parametrów geometrycznych centralnego wycięcia w płycie na wartość obciążenia krytycznego. W badanych przypadkach wraz ze wzrostem szerokości wycięcia nastąpił spadek wartości siły krytycznej na poziomie 42% dla układu PS1, 40% dla układu PS2, 36% dla układu PS3, 39% dla układu PS4 i 37% dla układu PS5. Analogicznie zwiększanie wysokości wycięcia powoduje spadek obciążenia

krytycznego na poziomie 54% dla układu PS1, 39% dla układu PS2, 49% dla układu PS3, 52% dla układu PS4 i 18% dla układu PS5. Otrzymane wyniki potwierdzają zatem możliwość kształtowania właściwości ustroju cienkościennego, poprzez odpowiedni dobór parametrów geometrycznych centralnego wycięcia, w celu otrzymania wymaganych parametrów mechanicznych układu.

6.1.2. Analiza stanów pokrytycznych

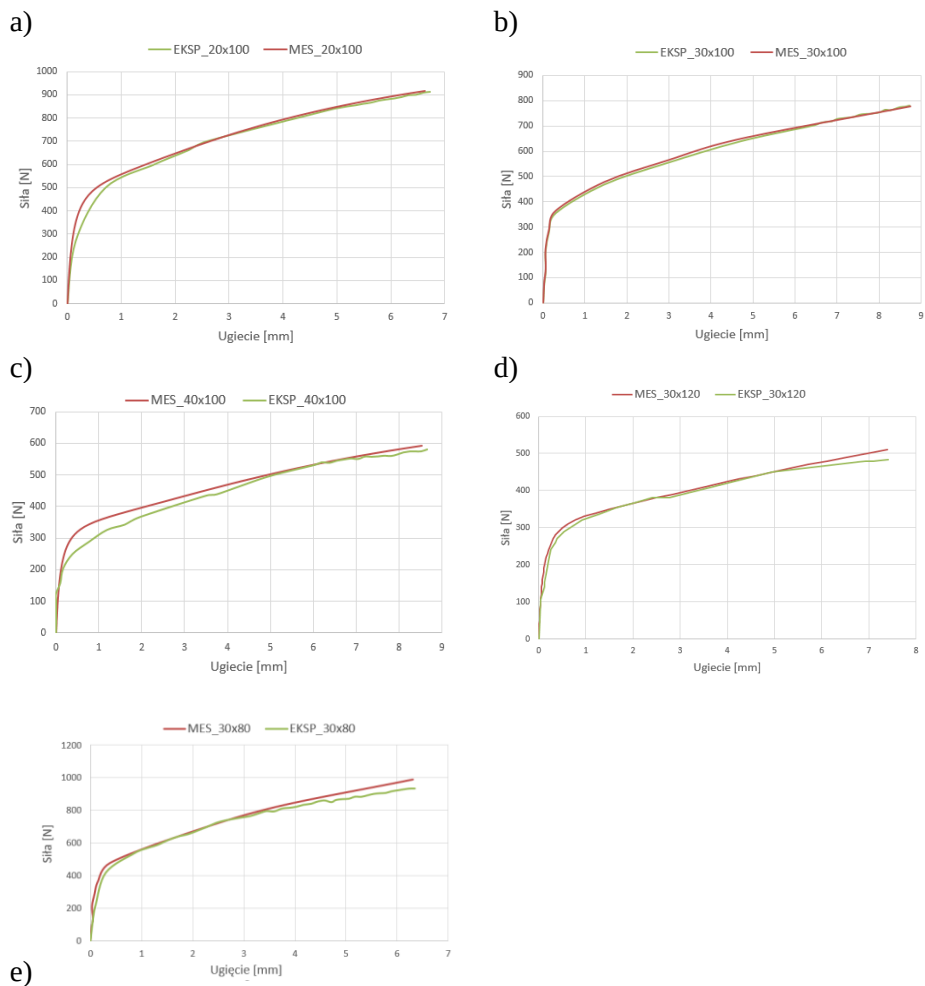
W drugim etapie badań płyt symetrycznych, stanowiącym rozwiązanie zagadnienia nieliniowej stateczności, analizowano pracę płyty w stanie pokrytycznym z wymuszoną wyższą, giętno-skrętną postacią wyboczenia płyty – rysunek 6.6. W tym celu, jak już wspomniano w rozdziale 6, ugięcia wstępne pionowych pasów płyty wymuszano za pomocą stalowego pręta, umieszczonego w połowie wysokości płyty.



Rys. 6.6. Wyższa giętno-skrętna postać wyboczenia płyty a) badania eksperymentalne, b) obliczenia numeryczne

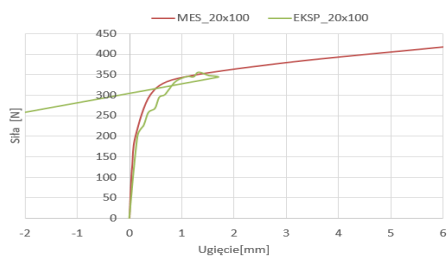
Analizę stanu pokrytycznego przeprowadzono na podstawie porównania doświadczalnych oraz numerycznych pokrytycznych ścieżek równowagi konstrukcji. Eksperymentalne pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi opisujące zależność *siła – ugięcie* wykonano na podstawie wyników zarejestrowanych przez system ARAMIS, który mierzył ugięcie na kierunku prostopadłym do pionowych pasów płyty w połowie wysokości pasa. W celu wygenerowania numerycznych ścieżek równowagi mierzono prostopadle przemieszczenie punktu ugięcia pionowego pasa płyty, odpowiadającego

doświadczalnemu punktowi pomiaru. Na rysunkach 6.7-6.9 przedstawiono porównanie badań doświadczalnych z wynikami analizy numerycznej, dla wybranych płyt w układzie symetrycznym: rysunek 6.7 – PS2, rysunek 6.8 – PS4 i rysunek 6.9 – PS5.

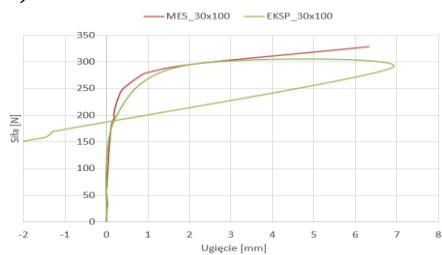


Rys. 6.7. Płyta PS2 – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100 mm, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

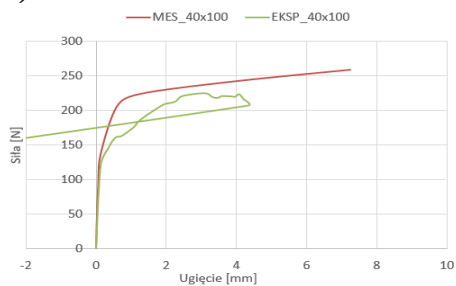
a)



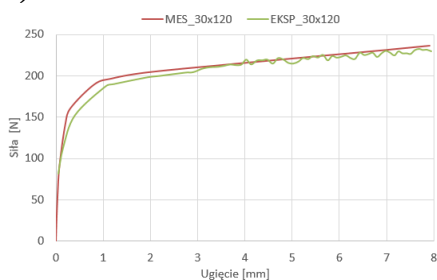
b)



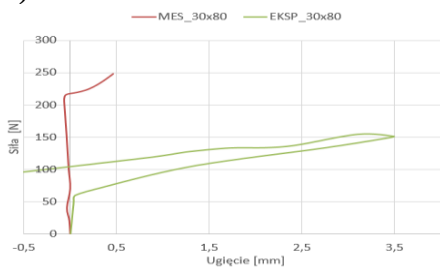
c)



d)

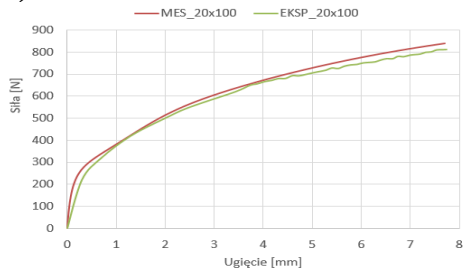


e)

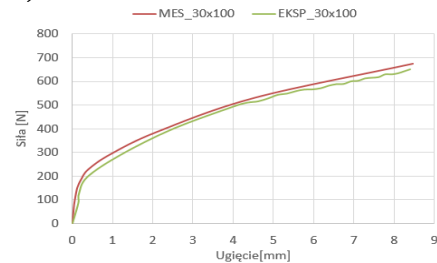


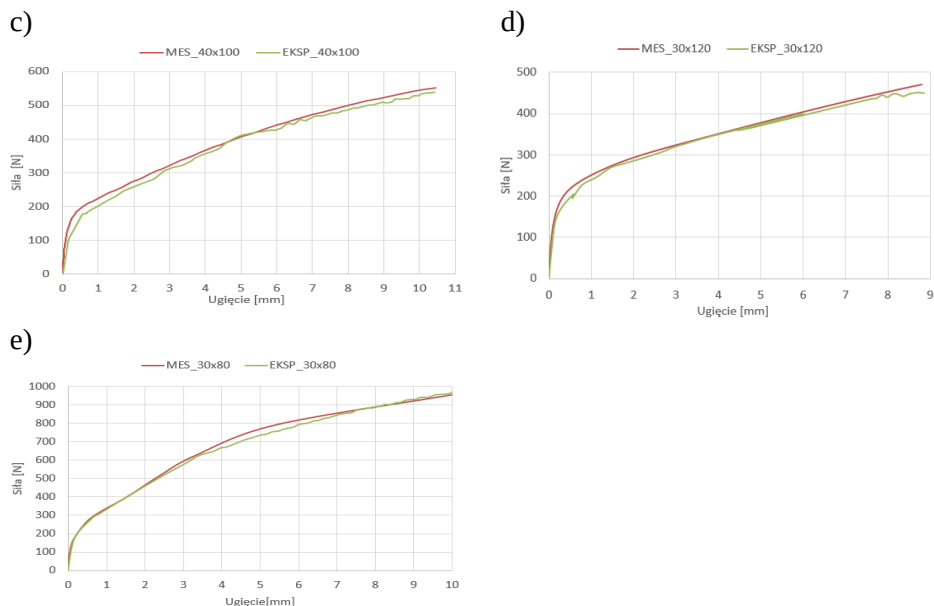
Rys. 6.8. Płyta PS4 – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100 mm, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

a)



b)

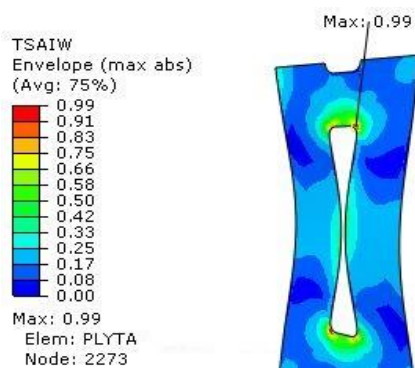




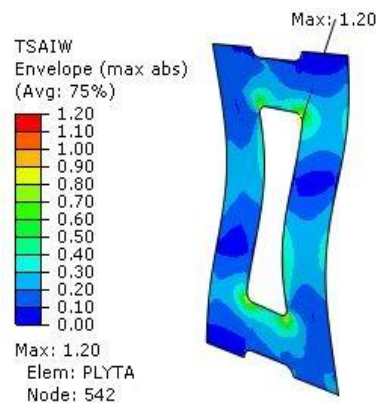
Rys. 6.9. Płyta PS5 – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100 mm, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

Otrzymane charakterystyki dla płyt w układzie PS2 i PS5 wykazują bardzo wysoką zbieżność wyników badań doświadczalnych z wynikami obliczeń numerycznych MES, czego potwierdzeniem są również uzyskane takie same postacie utraty stateczności (rys. 6.10). W przypadku konstrukcji rzeczywistej pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi wykazują niewiele niższą sztywność, niż krzywe wyznaczone numerycznie. W obydwu przypadkach otrzymane przebiegi posiadają zbliżony, stateczny charakter pracy, co potwierdza zdolność konstrukcji do dalszego przenoszenia obciążenia w zakresie pokrytycznym. Jednak w przypadku płyt w układzie PS4, jak również w pozostałych przypadkach (PS1 i PS3) brak jest zbieżności w wynikach. W badaniach doświadczalnych następuje przeskok do niższej – giętnej postaci wyboczenia, pomimo statecznych ścieżek otrzymanych w analizie numerycznej, przez co nie udaje się uzyskać stabilnej postaci giętno-skrętnej w zakresie pokrytycznym (rys. 6.11).

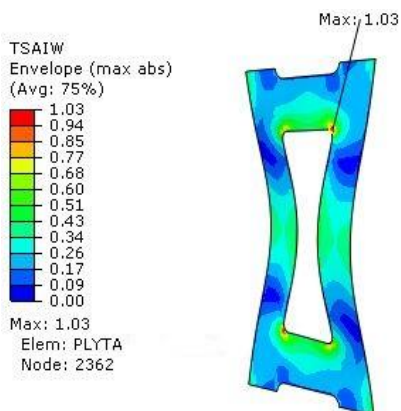
a) 20x100



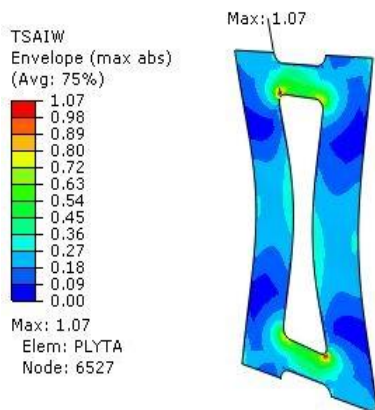
b) 30x100



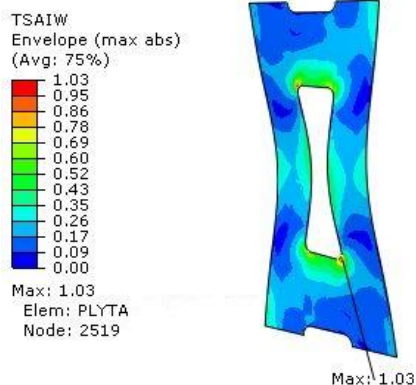
c) 40x100



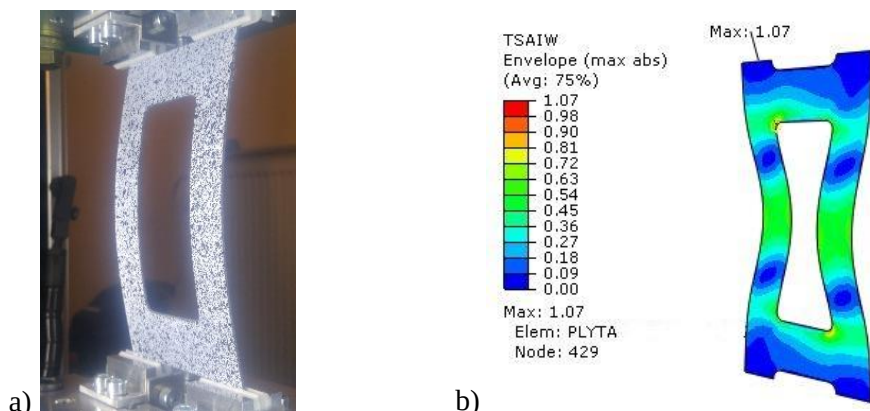
d) 30x120



a) 30x80

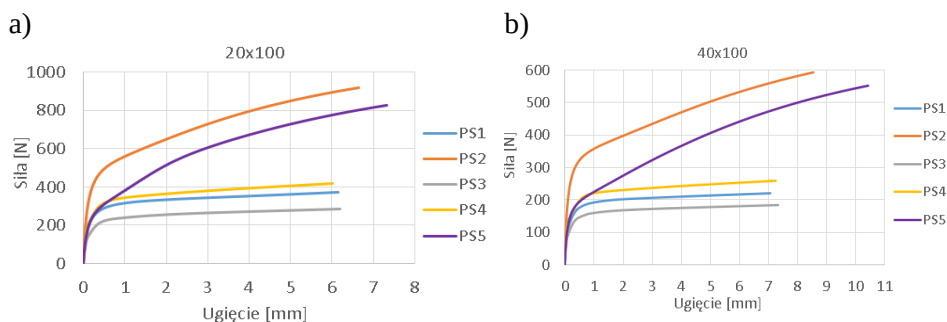


Rys. 6.10. Mapy parametru krytycznego Tsai-Wu wraz z uzyskanymi postaciami utraty stateczności dla płyt w układzie PS2 w zależności od parametrów geometrycznych wycięcia – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) 20x100 b) 30x100 c) 40x100 d) 30x120 d) 30x80

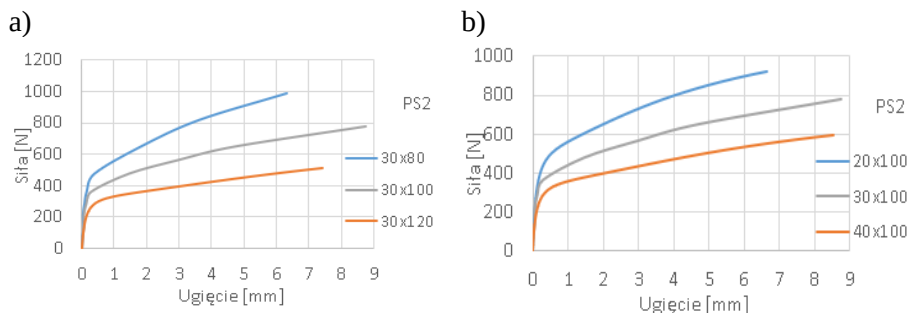


Rys. 6.11. Mapa parametru krytycznego Tsai-Wu wraz z uzyskanymi postaciami utraty stateczności dla płyty PS40x100 a) badania doświadczalne (po przeskoku na niższą, giętą postać wyboczenia), b) badania numeryczne (stabilna postać giętno-skrętna)

Na rysunku 6.12 zestawiono dodatkowo numeryczne pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi ściskanych płyt kompozytowych dla dwóch przykładowych wycięć z uwzględnieniem wpływu układu warstw laminatu na przebieg charakterystyk. Natomiast na rysunku 6.13 uwzględniono wpływ wymiarów geometrycznych otworu na pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla płyt w układzie PS2, dla których wyniki analizy MES oraz badań doświadczalnych były zbieżne.



Rys. 6.12. Pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi z uwzględnieniem wpływu układu warstw – wyniki badań numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 40x100 mm

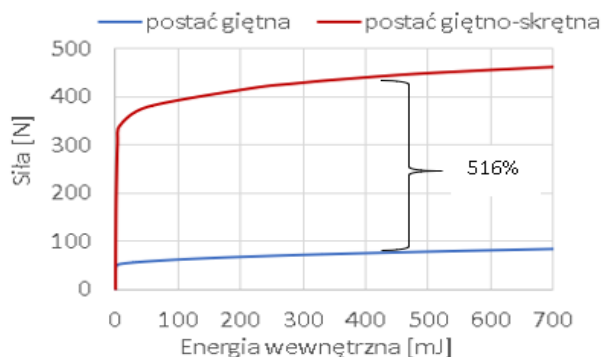


Rys. 6.13. Pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla PS2 z uwzględnieniem wpływu parametrów geometrycznych otworu – wyniki badań numerycznych: a) wpływ wysokości otworu, b) wpływ szerokości otworu

Zaprezentowane krzywe wskazują, że przy tych samych wymiarach gabarytowych płyty można uzyskać zdecydowanie odmienne charakterystyki pracy konstrukcji, w zależności od wymiarów wycięcia oraz układu warstw laminatu. Ilościowa analiza wyników wykazała dużą rozbieżność możliwości przenoszenia obciążenia dla różnych wysokości wycięcia – od ok. 500 N do ok. 1000 N oraz szerokości wycięcia od ok. 550 N do ok. 900 N dla płyty w układzie PS2. Natomiast wpływ układu warstw kompozytu powodował maksymalną różnicę obciążenia wynoszącą 616 N (stanowiącą różnicę obciążenia na poziomie 68%) w przypadku płyty z otworem 20x100 mm i 385 N (różnica 67%) dla płyty z otworem 40x100 mm.

Jak wcześniej wspomniano w badaniach eksperymentalnych prowadzonych na fizycznych modelach konstrukcji w większości przypadków występowały zasadnicze rozbieżności pomiędzy wynikami badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych – nie uzyskano stabilnej pracy płyty rzeczywistej w zakresie pokrytycznym. Wiązało się to ze zjawiskiem przeskoku płyty w zakresie pokrytycznym z wymuszonej wyższej giętno-skrętnej postaci wyboczenia na najniższą, giętną postać utraty stateczności płyty – rysunki 6.8 i 6.11.

Wyjaśnienia zjawiska przeskoku konstrukcji rzeczywistej dokonano poprzez analizę obciążenia ściskającego w funkcji energii wewnętrznej układu na drodze analizy numerycznej (rys. 6.14). Dla przykładowej płyty w układzie PS4 różnica w sile potrzebnej do uzyskania tej samej energii wewnętrznej pomiędzy najniższą, a wyższą wymuszoną postacią wyboczenia wynosi od ok. 500%, co tłumaczy przyczynę powrotu obciążanej konstrukcji na niższy poziom energetyczny.



Rys. 6.14. Zależność obciążenia ściskającego w funkcji energii wewnętrznej dla płyty w układzie PS4_{20x100}

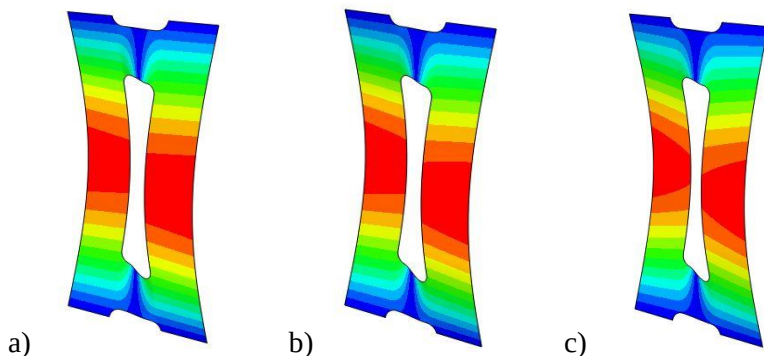
Uzyskane powyżej wyniki wykazują, iż w przypadku płyt w symetrycznym układzie laminatu nie udaje się uzyskać uniwersalnej metody wymuszenia pracy konstrukcji w zakresie pokrywczym według wyższej postaci utraty stateczności. Oznacza to, że należy poszukiwać innego rozwiązania, prowadzącego do naturalnego uzyskania najniższej postaci utraty stateczności konstrukcji, jako postaci giętno-skrętnej. W tym celu w pracy zaproponowano zastosowanie niesymetrycznych układów laminatu ze sprzężeniami mechanicznymi, pozwalającymi uzyskać stabilną pracę płyty według giętno-skrętnej postaci wyboczenia, niezależnie od wymiarów centralnego wycięcia.

6.2. Płyty wykonane w niesymetrycznym układzie warstw kompozytu

Podobnie jak w przypadku płyt wykonanych w układzie symetrycznym kompozytu, w pierwszej kolejności zaprezentowano wyniki umożliwiające ocenę stanu krytycznego ściskanych kompozytowych płyt z centralnym wycięciem, wykonanych w układzie niesymetrycznym laminatu. W prowadzonych badaniach stan krytyczny analizowano również tylko na drodze analizy numerycznej. Analizie poddano wartości obciążenia krytycznego w kontekście przyjętych układów warstw kompozytu oraz kąta ułożenia włókien, a także wpływ parametrów geometrycznych centralnego wycięcia w płycie (wysokość i szerokość wycięcia) na postać utraty stateczności oraz wartość obciążenia krytycznego. W dalszej kolejności zaprezentowano wyniki analizy numerycznej oraz badań doświadczalnych, dotyczące zachowania się elementów płytowych w stanie pokrywczym.

6.2.1. Analiza stanu krytycznego

Przeprowadzona analiza numeryczna wykazała, że zastosowana koncepcja płyty o niesymetrycznym układzie warstw kompozytu, pozwala na uzyskanie naturalnej, najniższej giętno-skrętnej postaci wyboczenia, wykazując stabilne cechy w pełnym zakresie procesu obciążania. Na rysunku 6.15 przedstawiono otrzymane giętno-skrętne postacie wyboczenia dla płyty PN1_α_{30x100}, dla trzech różnych kątów ułożenia włókien.



Rys. 6.15. Postacie wyboczenia dla płyty PN1_α_{30x100} odpowiednio dla kątów: a) 30°, b) 45°, c) 60°

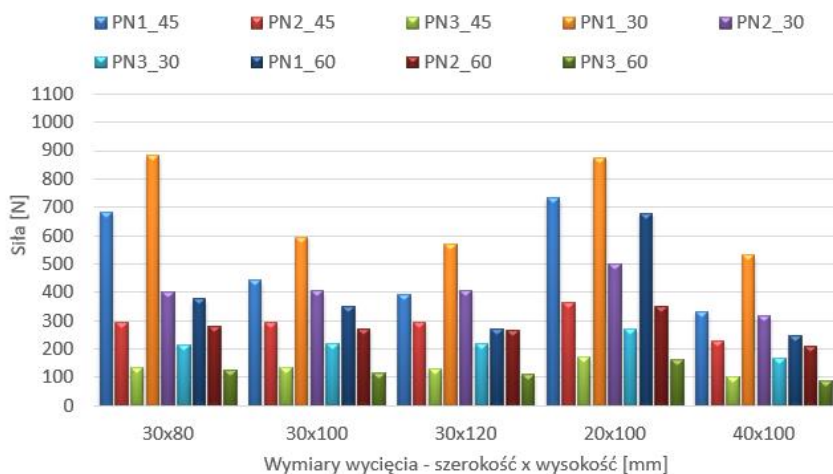
Wartości otrzymanych na drodze analizy numerycznej sił krytycznych dla wszystkich rozpatrywanych przypadków zestawiono w tabeli 6.2.

Tab. 6.2. Wartości sił krytycznych w [N] dla poszczególnych niesymetrycznych układów warstw laminatu wyznaczone metodą elementów skończonych

Układ warstw	Kąt ułożenia włókien [°]	20x100	30x100	40x100	30x120	30x80
PN1	30	875,74	595,18	532,89	568,49	883,34
	45	735,09	443,71	333,08	393,60	684,32
	60	679,72	351,69	246,59	270,02	376,56
PN2	30	502,46	406,15	316,82	407,71	402,42
	45	363,62	293,62	230,57	294,33	292,78
	60	350,60	270,89	211,99	266,82	281,73
PN3	30	272,43	217,32	168,42	217,54	216,26
	45	170,26	133,15	103,75	131,81	136,35
	60	161,44	115,50	89,01	109,64	127,99

Kolejny etap analizy obejmował określenie wpływu układu warstw kompozytu na wartość obciążenia krytycznego ściskanej płyty w niesymetrycznym układzie warstw. Wartości wyznaczonych obciążeń krytycznych w zależności od

konfiguracji laminatu, kąta ułożenia włókien oraz wymiarów geometrycznych wycięcia przedstawiono na rysunku 6.16.



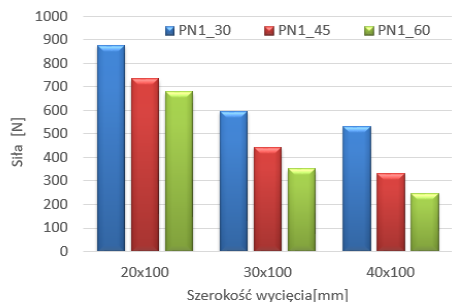
Rys. 6.16. Zależność siły krytycznej od konfiguracji laminatu, kąta ułożenia włókien oraz wymiarów geometrycznych wycięcia

Zaprezentowane wartości obciążenia krytycznego dla wszystkich badanych układów warstw laminatu odpowiadają giętno-skrętnej postaci wyboczenia płyty. Należy zauważyć, iż najbardziej podatne na wyboczenie są płyty w konfiguracji warstw PN3, natomiast najwyższą odpornością na utratę stateczności charakteryzują się płyty w konfiguracji PN1. Jednakże należy również brać pod uwagę liczbę warstw kompozytu, z której zostały utworzone poszczególne konfiguracje – konfiguracja PN1 składa się z 18 warstw kompozytu, natomiast konfiguracja PN3 z 12 warstw, co też miało wpływ na większe różnice w otrzymanych wartościach sił krytycznych. Dodatkowo w konfiguracji PN1 warstwy w kierunku 0° , równoległym do kierunku działającego obciążenia ściskającego, ułożone po zewnętrznych stronach płyty mogą powodować dosztywnienie konstrukcji, podwyższając tym samym wartość siły krytycznej ustroju.

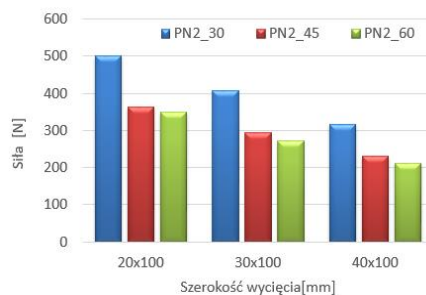
Dalsze badania obejmowały analizę wpływu parametrów geometrycznych centralnego wycięcia w płycie (wysokości i szerokości) oraz kąta ułożenia włókien kompozytu na wartość obciążenia krytycznego. Analizę numeryczną przeprowadzono dla 3 kątów ułożenia włókien: 30° , 45° i 60° , a także dla 3 wartości szerokości wycięcia, zmieniających się w zakresie $20 \div 40$ mm oraz 3 wartości wysokości wycięcia o wymiarach $80 \div 120$ mm, przy czym parametry geometryczne wycięcia zmieniano co 10 mm – w przypadku szerokości wycięcia i co 20 mm – w przypadku wysokości wycięcia. Na rysunkach 6.17 i 6.18 zestawiono zależności siły krytycznej od parametrów geometrycznych wycięcia

i kąta ułożenia włókien, dla wszystkich rozpatrywanych konfiguracji warstw kompozytu.

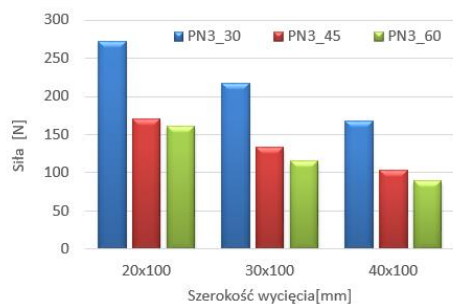
a)



b)



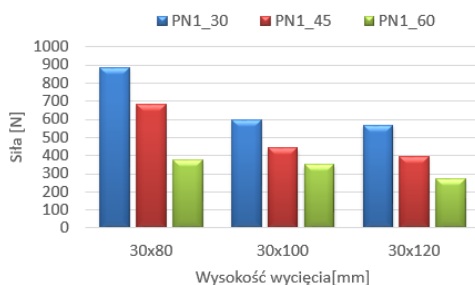
c)



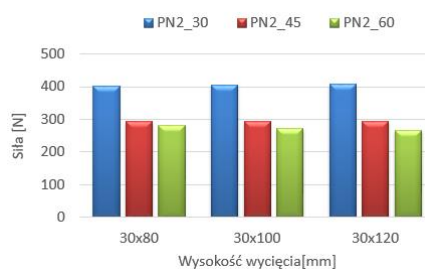
Rys. 6.17. Zależność siły krytycznej od szerokości centralnego wycięcia i trzech różnych kątów ułożenia włókien, dla stałej wysokości wycięcia wynoszącej 100 mm:

a) konfiguracja PN1, b) konfiguracja PN2, c) konfiguracja PN3

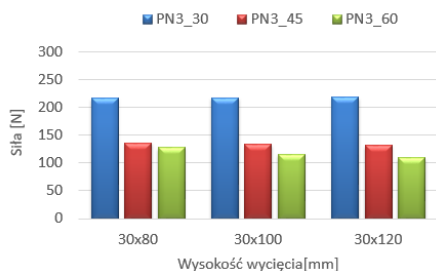
a)



b)



c)



Rys. 6.18. Zależność siły krytycznej od wysokości centralnego wycięcia i trzech różnych kątów ułożenia włókien, dla stałej szerokości wycięcia wynoszącej 30 mm:
a) konfiguracja PN1, b) konfiguracja PN2, c) konfiguracja PN3

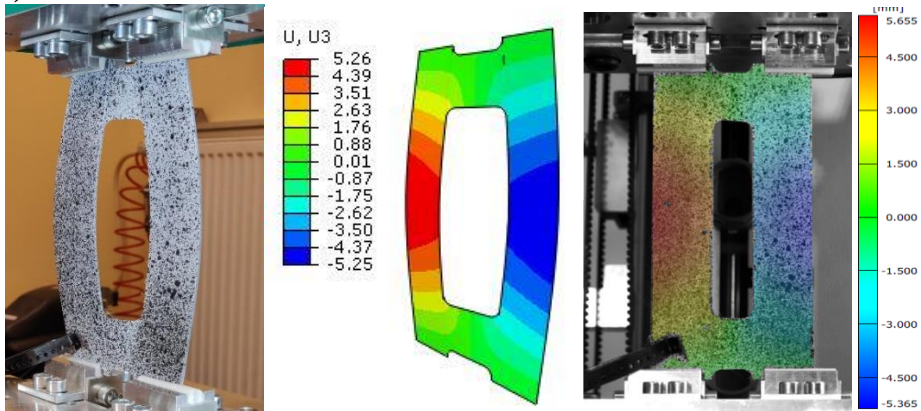
Otrzymane wyniki wykazały istotny wpływ parametrów geometrycznych centralnego wycięcia w płycie na wartość obciążenia krytycznego. Dotyczy to w szczególności szerokości wycięcia. We wszystkich analizowanych konfiguracjach wraz ze wzrostem szerokości wycięcia nastąpił spadek wartości siły krytycznej, przy czym największy spadek zaobserwowano dla płyt w konfiguracji PN1 i wynosi on ok. 39% dla kąta 30°, ok. 55% dla kąta 45° i ok. 64% dla kąta 60°. Dla dwóch pozostałych konfiguracji spadek ten był na poziomie ok. 40%. Analogicznie zwiększanie wysokości wycięcia powoduje spadek obciążenia krytycznego w przypadku konfiguracji PN1, który kształtuje się na poziomie ok. 36% dla kąta 30°, ok. 42% dla kąta 45° i ok. 28% dla kąta 60°. Natomiast w przypadku płyt w konfiguracjach PN2 i PN3 zmiana wysokości wycięcia nie powoduje zauważalnej zmiany wartości siły krytycznej i nie przekracza 5%, poza płytami w układzie PN3_60, gdzie spadek ten wynosi ok. 14%. Podobną zależność zaobserwowano przy zmianie kąta ułożenia włókien, gdzie wraz ze wzrostem kąta spada wartość siły krytycznej. Otrzymane wyniki potwierdzają zatem możliwość kształtowania właściwości ustroju cienkościennego, poprzez odpowiedni dobór parametrów geometrycznych centralnego wycięcia, jak i kąta ułożenia włókien, w celu otrzymania wymaganych parametrów mechanicznych układu.

6.2.2. Pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi płyt kompozytowych w układzie niesymetrycznym

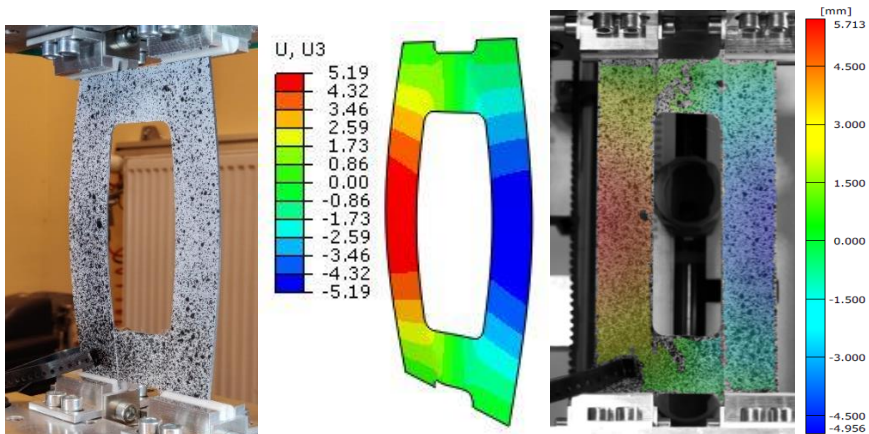
W drugim etapie badań zajmowano się analizą pracy płyt po utracie stateczności. W tym przypadku obliczenia numeryczne, stanowiące rozwiązanie zagadnienia nieliniowej stateczności, opisywały pracę płyty w stanie pokrytycznym z zaimplementowaną giętno-skrętną postacią wyboczenia płyty. Realizacja obciążenia konstrukcji po utracie stateczności powodowała pogłębianie się deformacji odpowiadającej uzyskanej najniższej, giętno-skrętniej postaci wyboczenia. Badania realizowano do wartości obciążenia ściskającego, odpowiadającego nieco niższej wartości, od wyznaczonego numerycznie

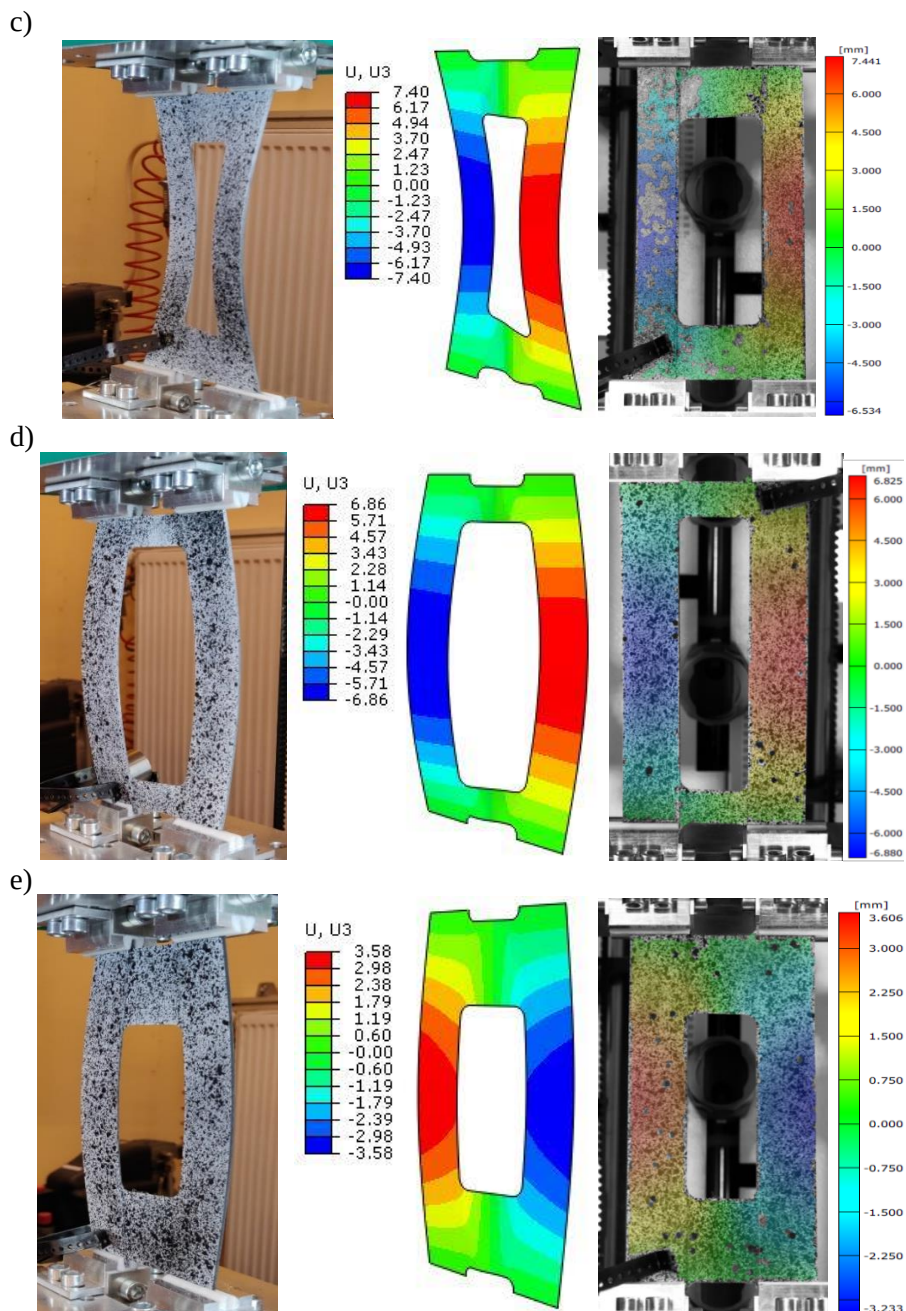
obciążenia inicjującego uszkodzenie materiału kompozytowego, wyznaczonego na podstawie kryterium Tsai-Wu. W trakcie badań nie zaobserwowano przeskoków płyty do postaci giętej, co miało miejsce w przypadku płyt wykonanych w symetrycznym układzie warstw kompozytu. Można zatem stwierdzić, że zastosowana koncepcja wykonania elementu płytowego w układzie niesymetrycznym zapewnia stabilną jego pracę jako elementu sprężystego, którego jedynym ograniczeniem eksploatacyjnym jest wartość obciążenia inicjującego uszkodzenie materiału kompozytowego. Przykładowe formy odkształcenia ściskanych płyt kompozytowych (na kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty) dla konfiguracji PN1÷PN3 oraz kąta ułożenia włókien wynoszącego 45° , znajdujących się w stanie pokrytycznym przedstawiono na rysunkach 6.19÷6.21.

a)



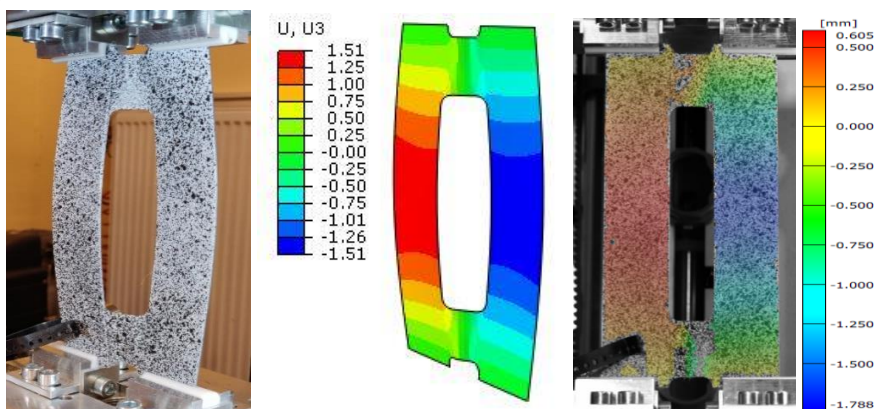
b)



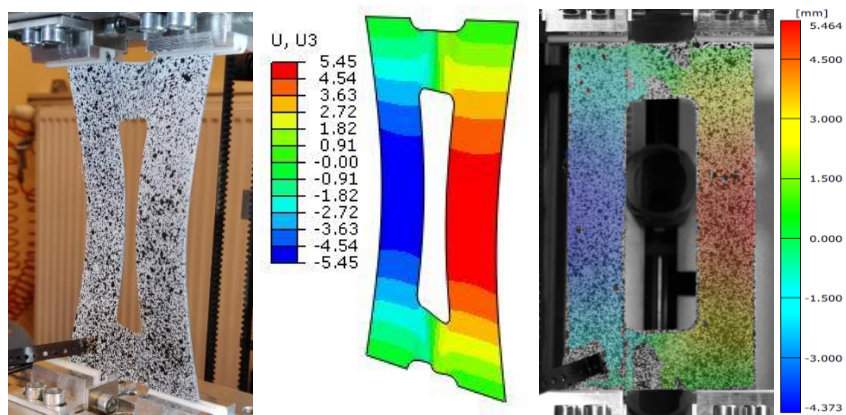


Rys. 6.19. Formy deformacji pokrywicznej płyty PN1_45 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

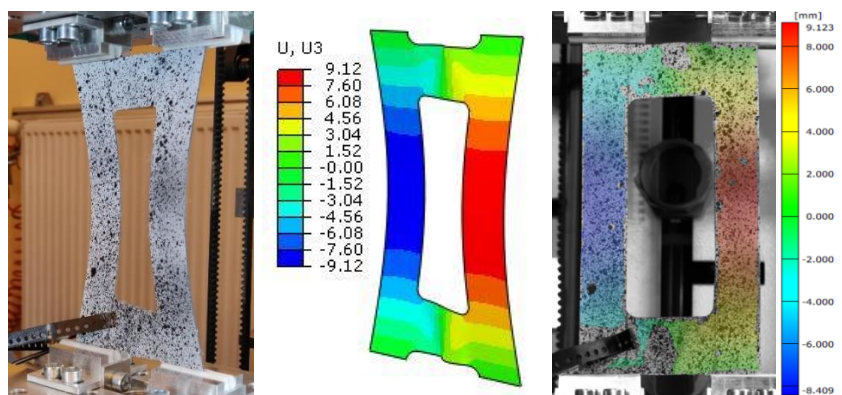
a)



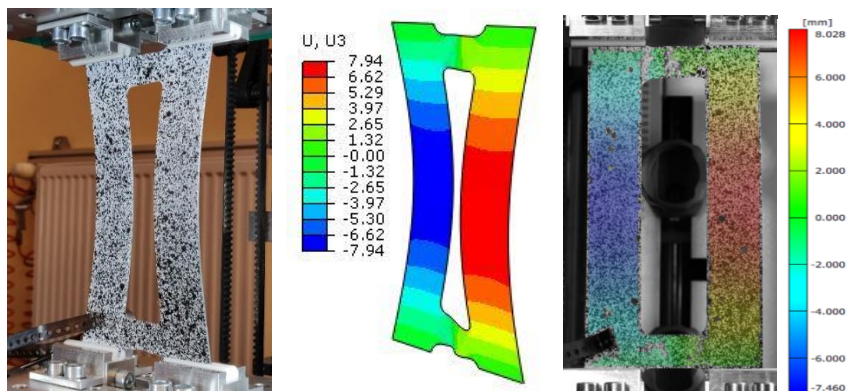
b)



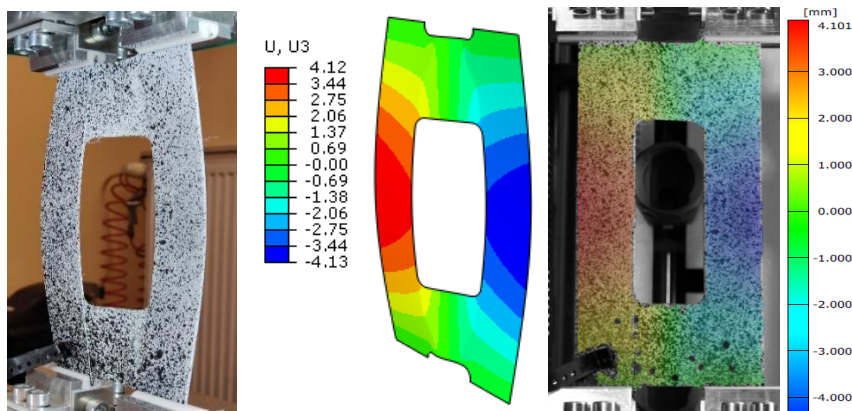
c)



d)

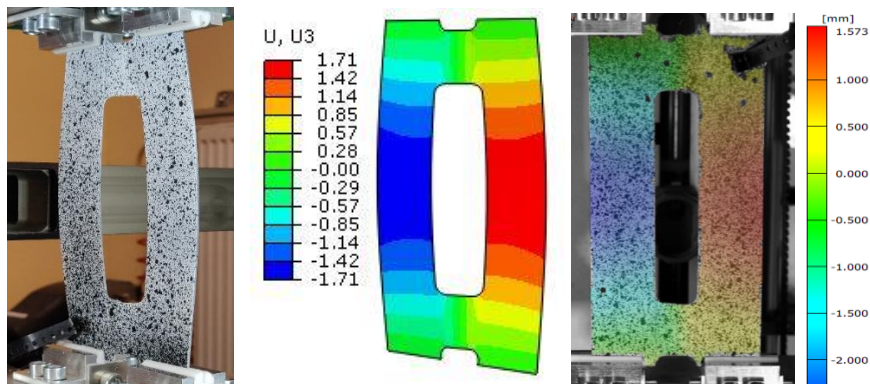


e)

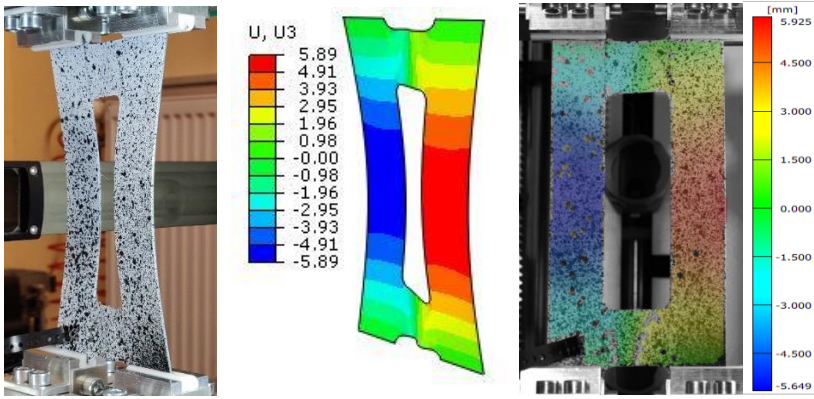


Rys. 6.20. Formy deformacji pokrywyczej płyty PN2_45 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

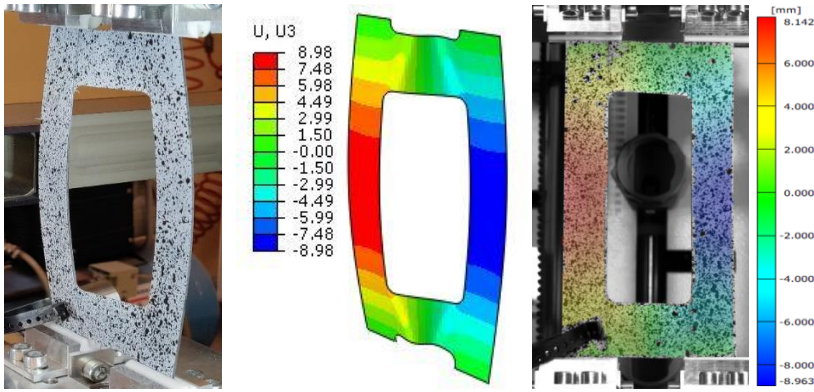
a)



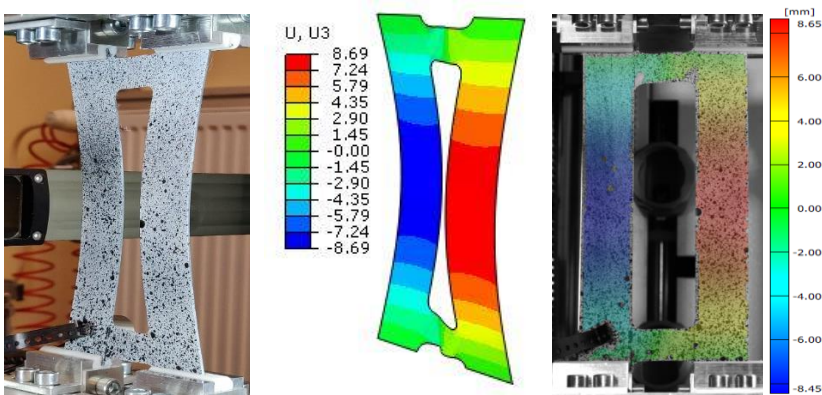
b)



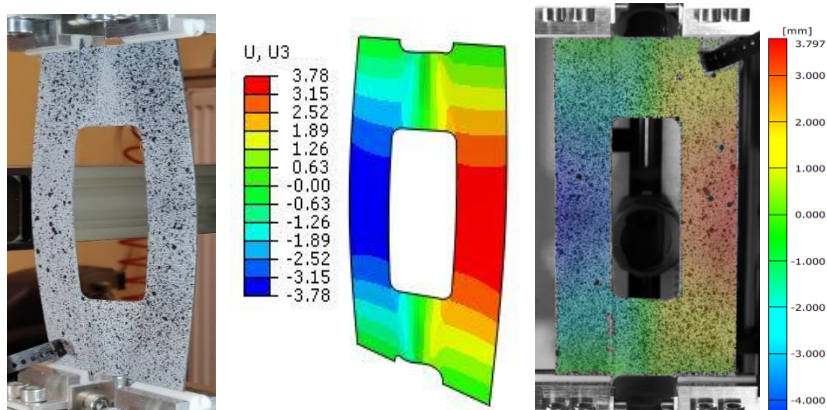
c)



d)



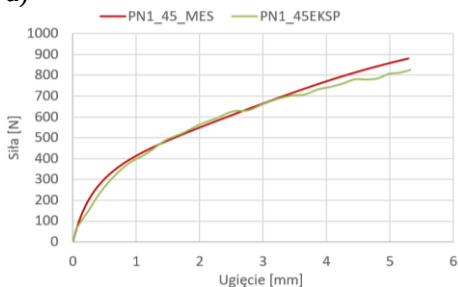
e)



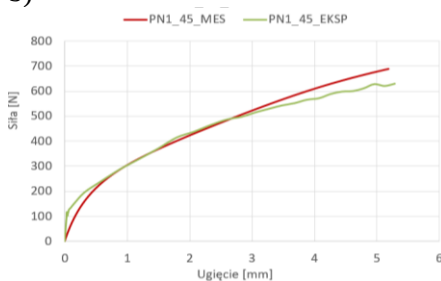
Rys. 6.21. Formy deformacji pokrywicznej płyty PN3_45 – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

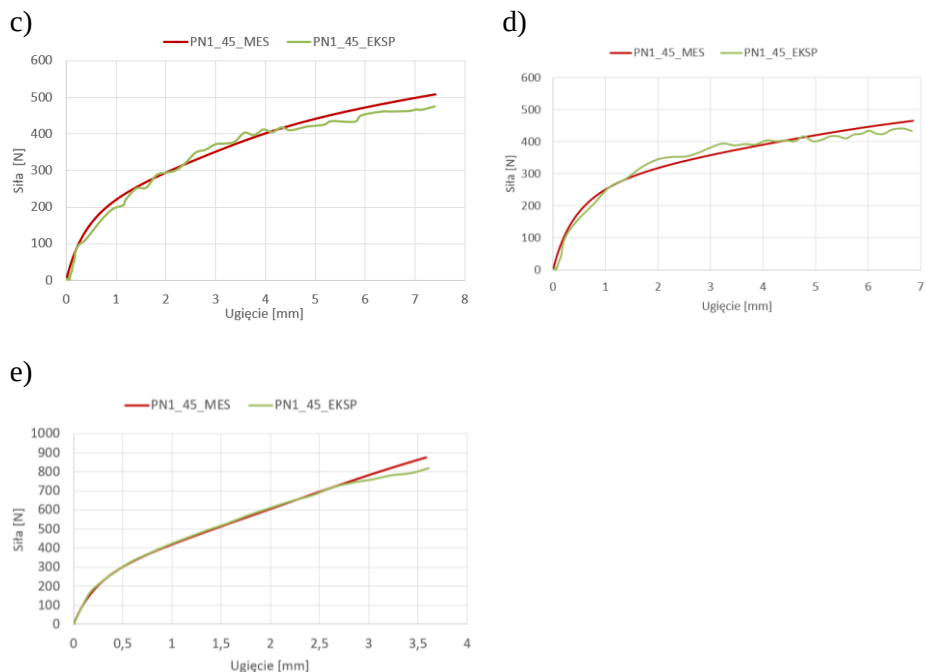
W badaniach numerycznych i doświadczalnych wyznaczone zostały charakterystyki pracy konstrukcji *siła-ugięcie* (mierzone na kierunku prostopadłym do powierzchni płyty), stanowiące pokrywiczną reprezentatywną ścieżkę równowagi płytowego elementu sprężystego. Na rysunkach 6.22÷6.24 przedstawiono porównanie badań doświadczalnych z wynikami analizy numerycznej płyt PN1÷PN3, dla kąta ułożenia włókien wynoszącego 45°, a także dla różnych wymiarów geometrycznych centralnego wycięcia. We wszystkich analizowanych przypadkach zakres pracy sprężystej płyty determinowany był obciążeniem inicjującym uszkodzenie pierwszej warstwy kompozytu, zgodnie z tensorowym kryterium zniszczenia Tsai-Wu.

a)

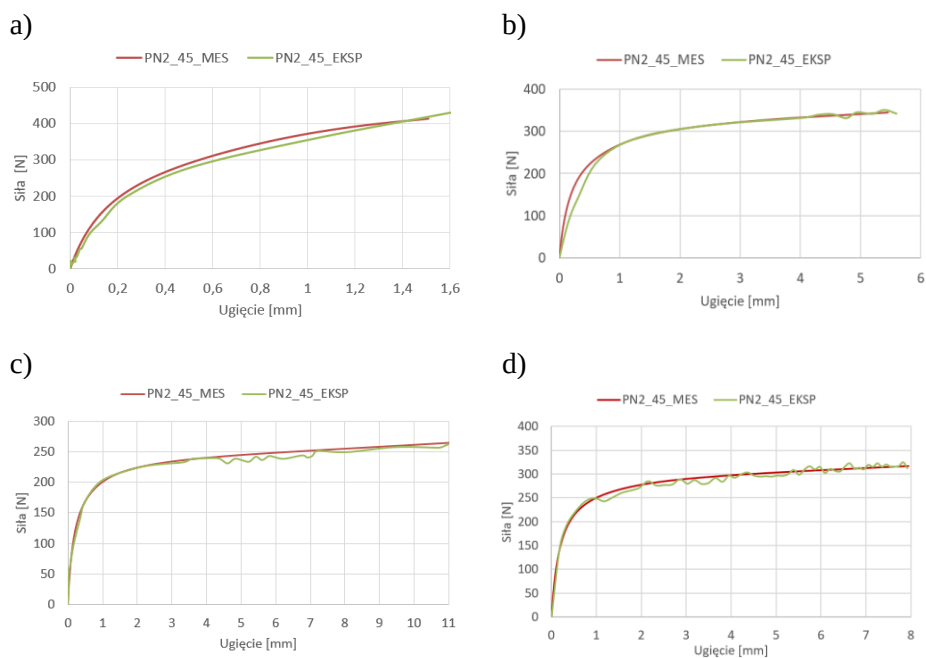


b)

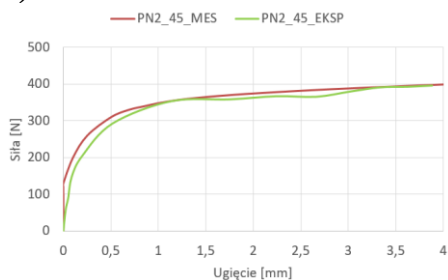




Rys. 6.22. Płyta PN1_45 – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100 mm, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

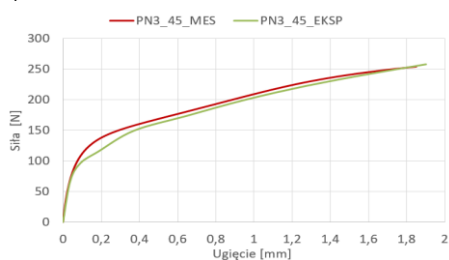


e)

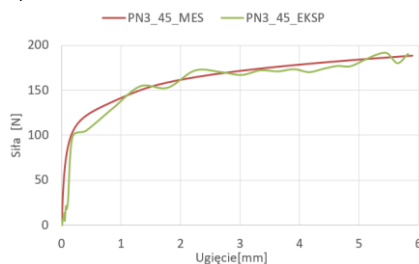


Rys. 6.23. Płyta PN2_45 – pokrywiczne reprezentatywne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100 mm, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

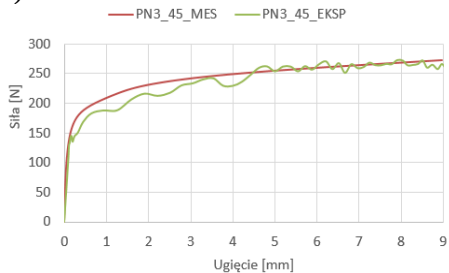
a)



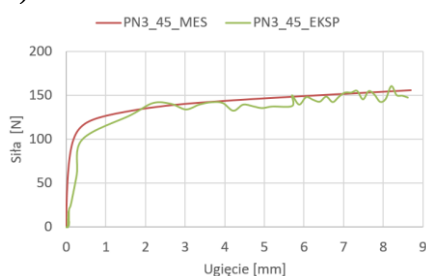
b)



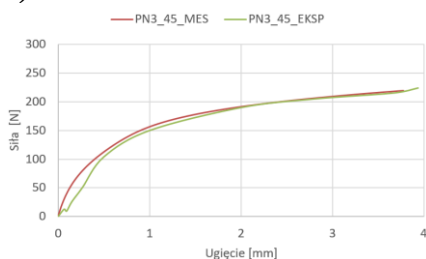
c)



d)

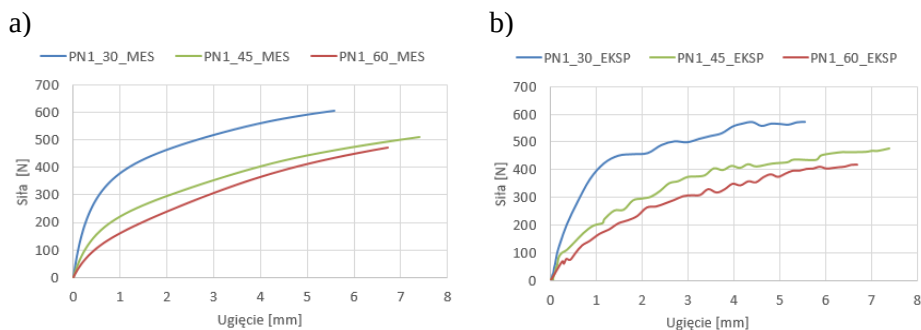


e)

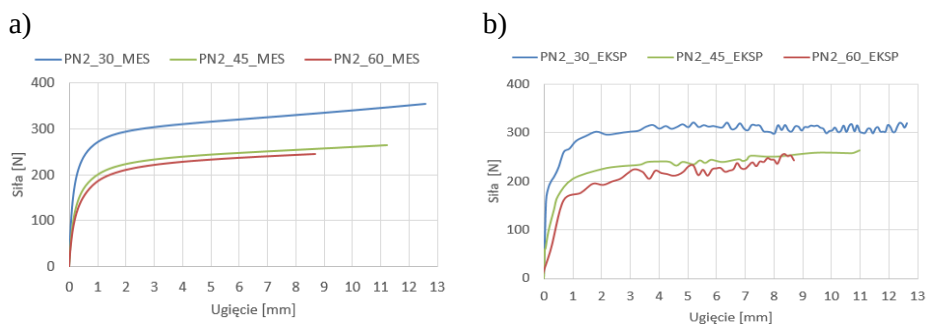


Rys. 6.24. Płyta PN3_45 – pokrywiczne reprezentatywne ścieżki równowagi – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) wycięcie 20x100 mm, b) wycięcie 30x100 mm, c) wycięcie 40x100 mm, d) wycięcie 30x120 mm, e) wycięcie 30x80 mm

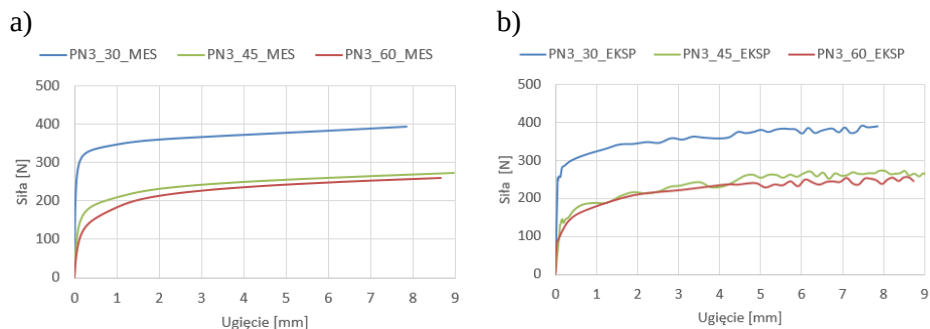
Otrzymane charakterystyki potwierdzają wysoką zbieżność wyników badań doświadczalnych z wynikami obliczeń numerycznych MES. W przypadku konstrukcji rzeczywistej pokrywające reprezentatywne ścieżki równowagi wykazują nieco niższą sztywność, niż krzywe wyznaczone numerycznie. W obydwu przypadkach otrzymane przebiegi posiadają zbliżony, stateczny charakter pracy, co potwierdza zdolność konstrukcji do dalszego przenoszenia obciążenia w zakresie pokrywczym. Na rysunkach 6.25÷6.27 zestawiono dodatkowo doświadczalne oraz numeryczne pokrywające reprezentatywne ścieżki równowagi ściskanych płyt w układach PN1÷PN3, z uwzględnieniem wpływu kąta ułożenia włókien laminatu na przebieg charakterystyk, dla wybranego wycięcia o wymiarach 40x100 mm. Natomiast na rysunkach 6.28÷6.33 uwzględniono wpływ wymiarów geometrycznych wycięcia na pokrywające reprezentatywne ścieżki równowagi dla płyt PN1÷PN3, dla przykładowego kąta ułożenia włókien wynoszącego 45°.



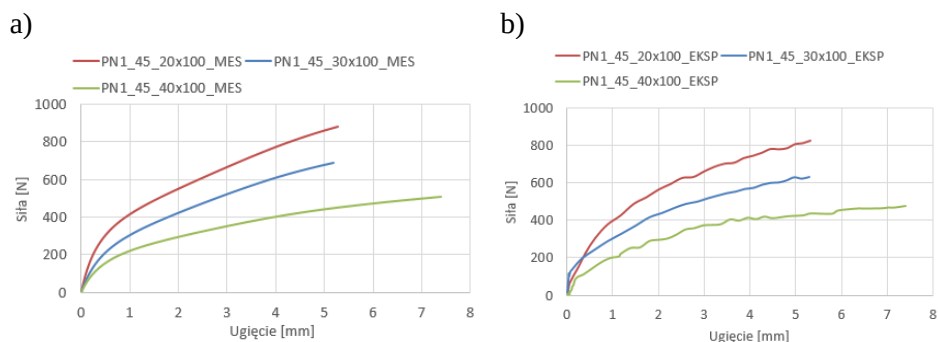
Rys. 6.25. Płyta PN1_α40x100 – pokrywające reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych kątów ułożenia włókien a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych



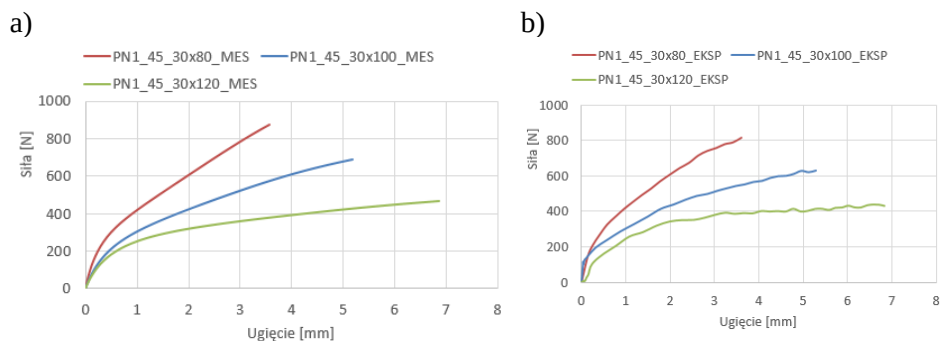
Rys. 6.26. Płyta PN2_α40x100 – pokrywające reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych kątów ułożenia włókien a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych



Rys. 6.27. Płyta PN3_40x100 – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych kątów ułożenia włókien a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych

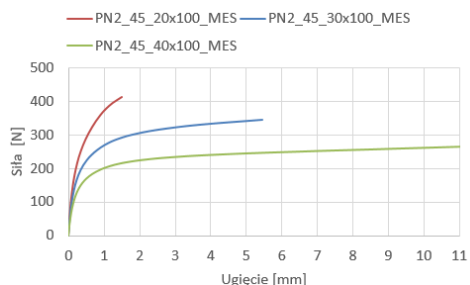


Rys. 6.28. Płyta PN1_45bxa – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych szerokości centralnego wycięcia, przy stałej wysokości centralnego wycięcia wynoszącej 100 mm: a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych

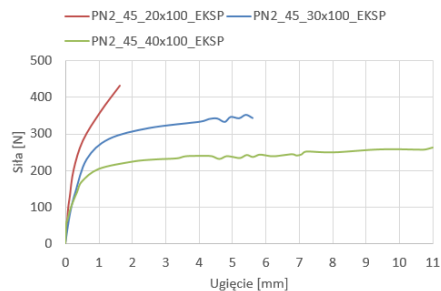


Rys. 6.29. Płyta PN1_45bxa – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych wysokości centralnego wycięcia, przy stałej szerokości centralnego wycięcia wynoszącej 30 mm: a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych

a)



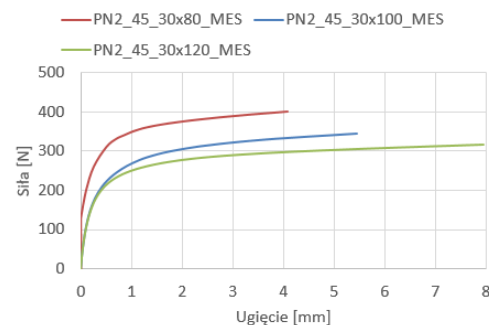
b)



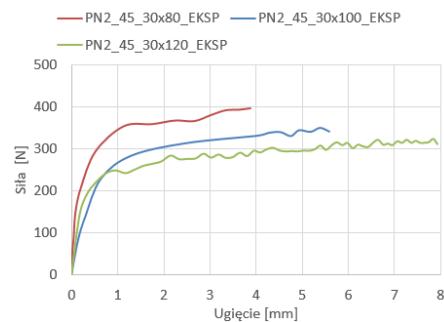
Rys. 6.30. Płyta PN2_45_{bx}a – pokrywiczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych szerokości centralnego wycięcia, przy stałej wysokości wynoszącej 100 mm:

a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych

a)



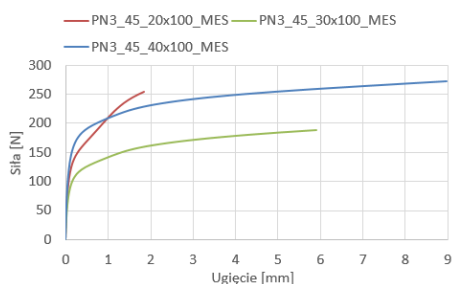
b)



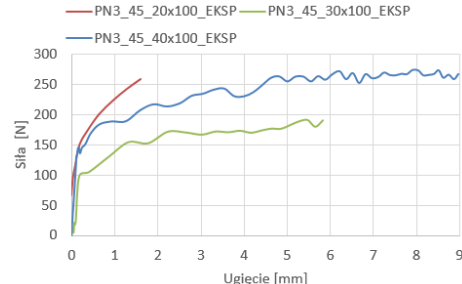
Rys. 6.31. Płyta PN2_45_{bx}a – pokrywiczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych wysokości centralnego wycięcia, przy stałej szerokości wynoszącej 30 mm:

a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych

a)

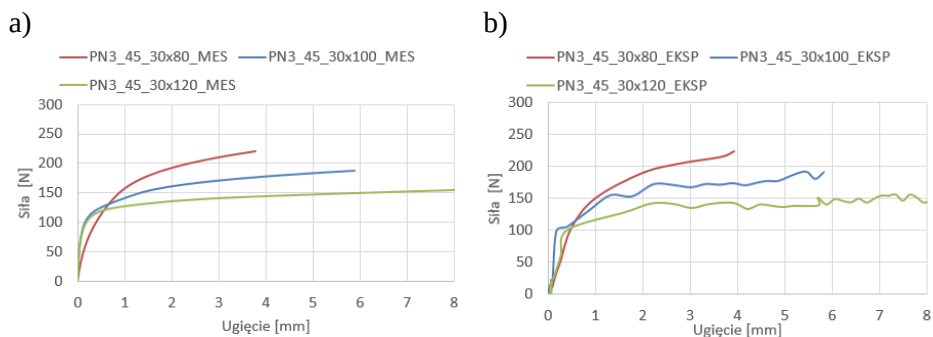


b)



Rys. 6.32. Płyta PN3_45_{bx}a – pokrywiczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych szerokości centralnego wycięcia, przy stałej wysokości wynoszącej 100 mm:

a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych

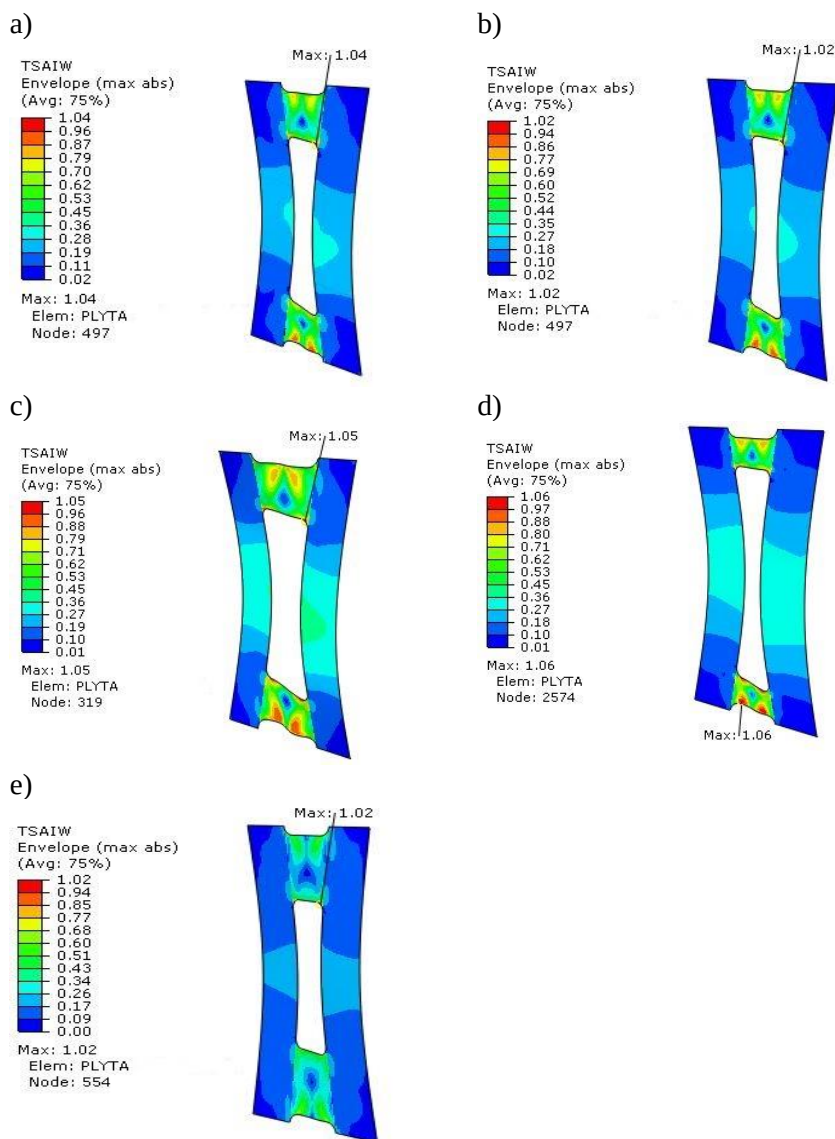


Rys. 6.33. Płyta PN3_45_{bx} – pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi dla trzech badanych wysokości centralnego wycięcia, przy stałej szerokości wynoszącej 30 mm:
a) wyniki badań numerycznych, b) wyniki badań doświadczalnych

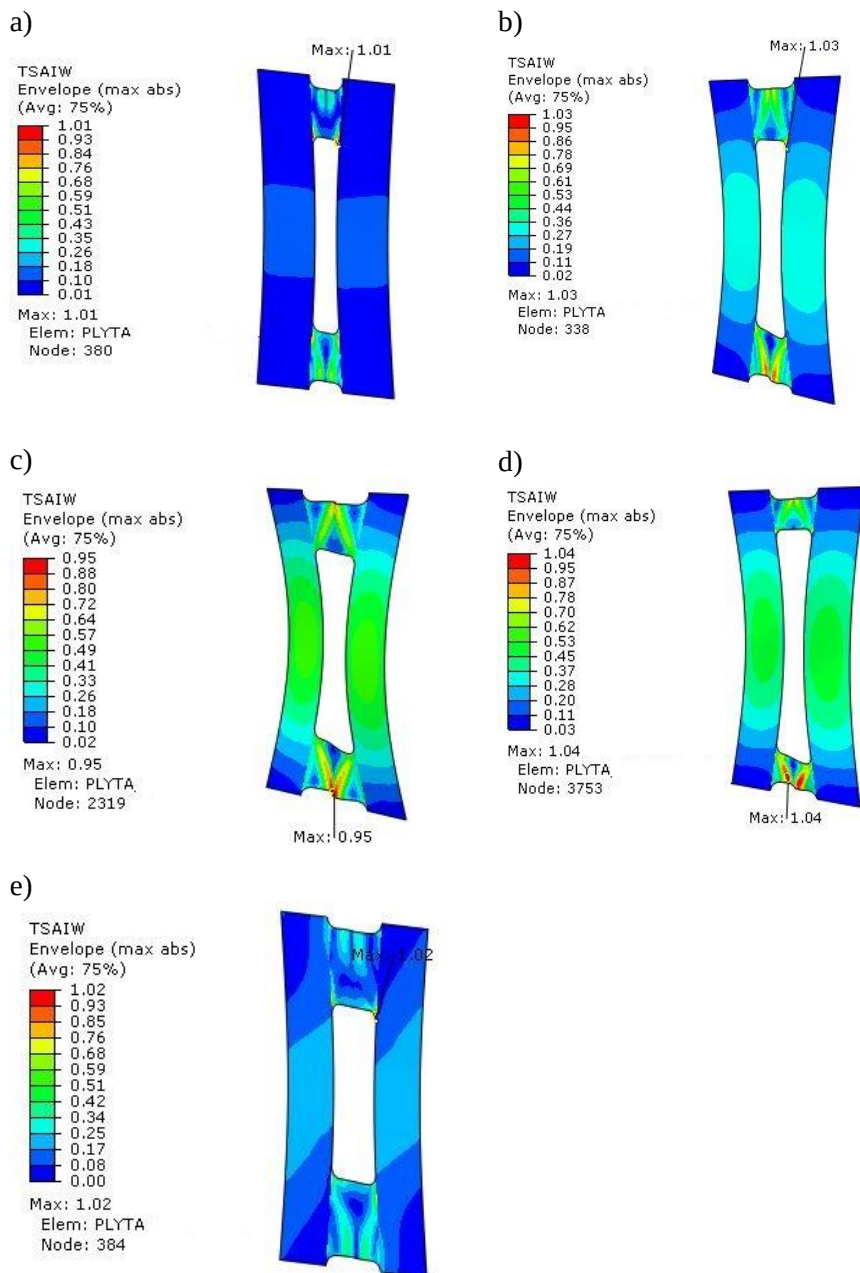
Z przeprowadzonych badań wynika, że płyty z zaimplementowaną giętno-skrotną postacią wyboczenia charakteryzują się statecznymi, progresywnymi ścieżkami równowagi pokrytycznej, umożliwiającymi ich wykorzystanie jako elementy sprężyste. Charakterystyki takich elementów mogą być w szerokim zakresie projektowane poprzez zmianę parametrów geometrycznych centralnego wycięcia (wysokości oraz szerokości), jak również zmianę układu warstw kompozytu. Ilościowa analiza wyników wykazała dosyć szeroki zakres możliwości przenoszenia obciążenia dla różnych wysokości wycięcia – od 375 N do 875 N – PN1_45 (rys. 6.29), 297 N÷400 N – PN2_45 (rys. 6.31), 144÷220 N – PN3_45 (rys. 6.33). Analogicznie zmiana szerokości wycięcia prowadziła do zmiany maksymalnego obciążenia w zakresie 451 N÷882 N - PN1_45 (rys. 6.28), 217÷414 N – PN2_45 (rys. 6.30), 160÷254 N – PN3_45 (rys. 6.32). Natomiast w przypadku zmiany kąta ułożenia włókien zakres ten wynosił odpowiednio: 441÷605 N dla PN1_α (rys. 6.25), 244÷333 N – PN2_α (rys. 6.26) oraz 256÷392 N – PN3_α (rys. 6.27). Otrzymane pokrytyczne charakterystyki ściskanych płyt w zależności od wartości kąta ułożenia włókien laminatu, wykazują znaczący wpływ kąta 30° na zmianę sztywności charakterystyki ściskanej konstrukcji i jednocześnie na wartość maksymalnego obciążenia, limitującego bezpieczną pracę płyty. Różnica obciążenia pomiędzy kątem 45°, a 60° jest niewielka i nie przekracza 10%.

Zaprezentowane krzywe potwierdzają fakt, że przy tych samych wymiarach gabarytowych płyty można uzyskać zdecydowanie odmienne charakterystyki pracy konstrukcji, w zależności od wymiarów centralnego wycięcia oraz układu warstw laminatu. Daje to możliwość projektowania w szerokim zakresie charakterystyk sztywnościowych konstrukcji płytowych, pracujących jako elementy sprężyste.

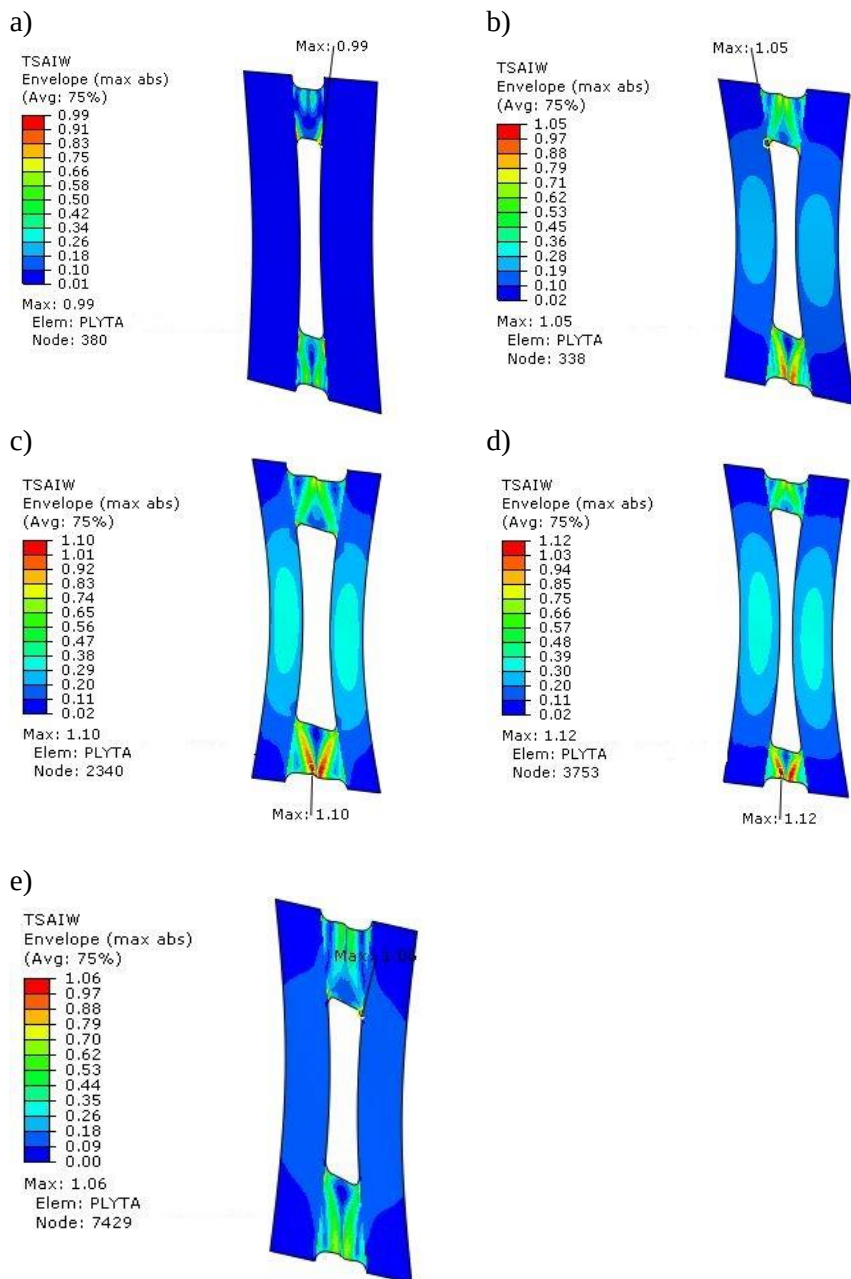
W przeprowadzonych obliczeniach numerycznych wyznaczono dodatkowo mapy parametru krytycznego Tsai-Wu. Na rysunkach 6.34÷6.36 zaprezentowano obszary, w których może wystąpić inicjacja uszkodzenia pierwszej warstwy kompozytu, odpowiadająca osiągnięciu wartości 1 parametru krytycznego, określanego według kryterium Tsai-Wu.



Rys. 6.34. Mapy parametru krytycznego Tsai-Wu dla płyt w układzie PN1_45 w zależności od parametrów geometrycznych wycięcia – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) 20x100 b) 30x100 c) 40x100 d) 30x120 e) 30x80



Rys. 6.35. Mapy parametru krytycznego Tsai-Wu dla płyt w układzie PN2_45 w zależności od parametrów geometrycznych wycięcia – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) 20x100 b) 30x100 c) 40x100 d) 30x120 e) 30x80



Rys. 6.36. Mapy parametru krytycznego Tsai-Wu dla płyt w układzie PN3_45 w zależności od parametrów geometrycznych wycięcia – wyniki badań doświadczalnych i numerycznych: a) 20x100 b) 30x100 c) 40x100 d) 30x120 d) 30x80

Otrzymane mapy parametru krytycznego Tsai-Wu, niezależnie od układu warstw kompozytu oraz parametrów geometrycznych centralnego wycięcia wykazują lokalny charakter możliwości wystąpienia uszkodzenia materiału kompozytowego w obszarach usytuowanych w pobliżu naroży centralnego wycięcia płyty. Obszary te będą zatem limitowały maksymalną wartość obciążenia, jakiemu może zostać poddana ściskana konstrukcja.

7. Podsumowanie

W monografii zajmowano się zagadnieniem pracy płyt z centralnym wycięciem, wykonanych z kompozytu węglowo-epoksydowego, poddanych ścisłaniu. Badaniom poddano płyty w symetrycznym i niesymetrycznym układzie warstw kompozytu, wykonane techniką autoklawową. Badania miały na celu wymuszenie stabilnej pracy płyty w zakresie pokrytycznym według wyższej, giętno-skrętnej postaci utraty stateczności. Badano wpływ wymiarów centralnego wycięcia (szerokości i wysokości) oraz układu warstw kompozytu na pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi konstrukcji *sila – ugięcie* (mierzone na kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty). Analizowano możliwość pracy elementu płytowego z centralnym wycięciem jako elementu sprężystego o określonej charakterystyce pokrytycznej.

Zastosowana metodyka badań obejmowała badania eksperymentalne prowadzone na fizycznych modelach konstrukcji oraz obliczenia numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych – oprogramowanie ABAQUS®. Prowadzone badania dotyczyły analizy stanów krytycznych oraz pracy konstrukcji w stanie pokrytycznym, w zakresie obciążenia zapewniającego bezpieczną pracę płyty jako elementu sprężystego. Wartość maksymalnego obciążenia konstrukcji określano na podstawie naprężeniowego kryterium zniszczenia materiałów kompozytowych Tsai-Wu.

Głównym celem prowadzonych badań było opracowanie metody wymuszenia stabilnej pracy ściskanej płyty według giętno-skrętnej postaci wyboczenia. W przypadku ściskania elementów płytowych naturalną, najniższą postacią utraty stateczności jest postać giętą. Niestety wyboczenie płyty według postaci giętej następuje zazwyczaj przy niewielkim obciążeniu, prowadząc do szybkiego zniszczenia konstrukcji. Aby móc wykorzystać ściskany element płytowy jako element sprężysty, należy podwyższyć jego odporność na wyboczenie oraz zapewnić odpowiednią sztywność i stabilność pracy konstrukcji w zakresie pokrytycznym. W tym celu starano się wymusić utratę stateczności płyty z centralnym wycięciem według wyższej giętno-skrętnej postaci wyboczenia. W przypadku płyt w symetrycznym układzie kompozytu, wymuszenie giętno-skrętnej postaci wyboczenia próbowano uzyskać poprzez wymuszenie odpowiednich ugięć wstępnych pionowych pasów płyty, każdy w przeciwną stronę. Zastosowany rodzaj wymuszenia zapewniał stabilną pracę konstrukcji tylko w nielicznych przypadkach – większość badanych płyt w trakcie ściskania (w zależności od konfiguracji warstw kompozytu) doznawała zjawiska przeskoku na najniższą, giętą postać wyboczenia. Oznaczało to, że zastosowana metoda nie daje pożądaných rezultatów, w związku z powyższym podjęto próby naturalnego wymuszenia wyboczenia płyty według giętno-skrętnej postaci. W tym celu prowadzono badania na płytach w układzie niesymetrycznym, poszukując konfiguracji, dla których najniższą postacią utraty stateczności będzie postać giętno-skrętą. Efekt ten osiągnięto wykorzystując zjawisko sprężenia

mechanicznego laminatu niesymetrycznego. Bazując na teorii Yorka zmodyfikowano trzy układy laminatu zawierającego sprzężenia typu Extension-Bending, Extension-Twisting oraz Twisting-Bending. Zaproponowane zmiany pozwoliły uzyskać konfiguracje kompozytu, zapewniające uzyskanie stabilnej, najniższej giętno-skrętnej postaci wyboczenia płyty.

Badania eksperymentalne ściskanych płyt kompozytowych z centralnym wycięciem wykonywano w warunkach laboratoryjnych w Katedrze Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Wydziału Mechanicznego Politechniki Łódzkiej. Badania realizowano na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej z wykorzystaniem specjalnie zaprojektowanych i wykonanych uchwytów, zapewniających przegubowe podparcie poziomych (górnej i dolnej) krawędzi płyty. W trakcie badań rejestrowano przebieg siły ściskającej w czasie oraz ugięcia płyty z wykorzystaniem systemu optycznego ARAMIS. Rejestrowane parametry umożliwiły wyznaczenie pokrytycznych ścieżek równowagi konstrukcji rzeczywistej *siła – ugięcie*. Wyznaczone charakterystyki umożliwiły określenie charakterystyk sztywnościowych elementu płytowego w zależności od wymiarów centralnego wycięcia oraz konfiguracji warstw kompozytu. W trakcie prób monitorowano bieżący stan struktury materiału kompozytowego z wykorzystaniem metody emisji akustycznej, rejestrując parametry sygnału emisji z wykorzystaniem czujnika piezoelektrycznego.

Równolegle prowadzono obliczenia numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Wyniki badań doświadczalnych umożliwiały prowadzenie bieżącej walidacji opracowanych modeli dyskretnych. Badano stan krytyczny ściskanych płyt z wykorzystaniem liniowej analizy zagadnienia własnego, umożliwiającej wyznaczenie wartości sił krytycznych oraz odpowiadających im postaci utraty stateczności, w zależności od wymiarów centralnego wycięcia oraz konfiguracji warstw kompozytu wraz ze zmianą kąta ułożenia włókien. Drugi etap obliczeń numerycznych stanowił obliczenia nieliniowe, prowadzone na modelach z zainicjowaną imperfekcją wstępną, odpowiadającą giętno-skrętnej postaci utraty stateczności płyty. Obliczenia prowadzono z wykorzystaniem przyrostowo-iteracyjnej metody Newtona-Raphsona. Zakres obciążenia determinowany był bezpieczną pracą konstrukcji, którą oceniano na podstawie interakcyjnego kryterium zniszczenia laminatu Tsai-Wu. Wyniki obliczeń numerycznych umożliwiły wyznaczenie pokrytycznych ścieżek równowagi modelu numerycznego, które zestawiano z charakterystykami wyznaczonymi eksperymentalnie. Otrzymane wyniki obliczeń wykazywały wysoką zgodność form deformacji oraz charakterystyk pokrytycznych z wynikami badań eksperymentalnych, potwierdzając adekwatność opracowanych modeli dyskretnych konstrukcji.

Analiza otrzymanych wyników wykazała istotny wpływ parametrów geometrycznych centralnego wycięcia na stan krytyczny oraz pokrytyczne reprezentatywne ścieżki równowagi konstrukcji. W przypadku płyt w symetrycznym układzie kompozytu, ze względu na niestabilną pracę i zjawisko

przeskoku na niższą, giętą postać utraty stateczności konstrukcji rzeczywistej zaprezentowano tylko częściowe wyniki przeprowadzonych badań. Dodatkowo nie uzyskano zgodności obliczeń numerycznych z wynikami badań eksperymentalnych, polegających na tym, że zaimplementowana w analizie nieliniowej imperfekcja odpowiadająca postaci giętno-skrętnej zapewniała stabilną pracę modelu numerycznego w zakresie pokrytycznym, podczas, gdy konstrukcja rzeczywista doznawała zjawiska przeskoku na niższą postać wyboczenia. W obliczeniach numerycznych wykazano, że pomiędzy postacią giętą, a giętno-skrętną występuje bardzo duża różnica poziomów energetycznych, co tłumaczy zjawisko przeskoku do niższej postaci wyboczenia (na niższy poziom energetyczny).

Szeroką analizę wyników badań przeprowadzono dla badanych układów niesymetrycznych laminatu, w przypadku których uzyskano stabilną pracę płyty jako elementu sprężystego w zakresie pokrytycznym, według naturalnej, najniższej giętno-skrętnej postaci wyboczenia. Otrzymane wyniki potwierdziły możliwość kształtowania pokrytycznych charakterystyk konstrukcji poprzez zmianę parametrów geometrycznych centralnego wycięcia. Zmiana szerokości wycięcia w zakresie od 20 do 40mm (z podziałką co 10mm) powodowała spadek wartości obciążenia krytycznego na poziomie 40%÷65% w przypadku układu PN1, w zależności od kąta ułożenia włókien oraz ok. 40% w przypadku dwóch pozostałych konfiguracji. Zmiana ta powodowała również zmniejszenie sztywności pokrytycznych ścieżek równowagi o 48% dla PN1_45 i PN2_45 oraz o 38% dla PN3_45. Analogicznie zmiana wysokości centralnego wycięcia od wartości 80mm do 120mm (z podziałką co 20mm) powodowała spadek wartości siły krytycznej o ok. 30%÷40% dla PN1, natomiast dla PN2 i PN3 spadek wartości siły krytycznej nie przekraczał 15%, oraz powodowała zmniejszenie sztywności pokrytycznych ścieżek równowagi o 57% dla PN1_45, 26% dla PN2_45 i 35% dla PN3_45. Fakt ten oznacza, że poprzez zmianę powyższych parametrów geometrycznych można bezpośrednio wpływać na to, przy jakiej wartości obciążenia ściskającego konstrukcja utraci stateczność. Dodatkowo, zmieniając parametry geometryczne centralnego wycięcia można kształtować sztywność charakterystyk pracy płytowego elementu sprężystego po utracie stateczności w znacznym zakresie ugięć.

Przeprowadzone badania pozwoliły również na ilościową ocenę wpływu układu warstw kompozytu na sztywność ściskanych płyt kompozytowych. Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że największą sztywnością charakteryzują się płyty w układzie PN1 z kątem ułożenia włókien wynoszącym 30°. Zmiana wartości kąta do 60° powoduje zmniejszenie sztywności pokrytycznych charakterystyk konstrukcji o 27%. Natomiast największą podatność wykazały płyty w układzie PN3 z kątem ułożenia włókien 60°. Analogicznie zmiana kąta ułożenia włókien do wartości 30° powodowała zmianę sztywności pokrytycznych charakterystyk konstrukcji o 35%. Są to wartości znaczące, które potwierdzają duży wpływ układu warstw laminatu oraz kąta

ułożenia włókien na pracę konstrukcji w stanie pokrytycznym. Zatem konfiguracja laminatu jest kolejnym parametrem, którym można w znacznym zakresie kształtować sztywność konstrukcji płytowych z centralnym wycięciem, przy zachowaniu stałej masy konstrukcji.

Otrzymane wyniki badań potwierdzają realizację głównych celów pracy, które zostały osiągnięte poprzez wykorzystanie zjawiska sprzężeń mechanicznych w materiale kompozytowym, umożliwiającego uzyskanie utraty stateczności ściskanej płyty z centralnym wycięciem według giętno-skrętnej postaci wyboczenia. Dodatkowo wykazano, że wymuszona w powyższy sposób najniższa postać wyboczenia giętno-skrętnego zapewnia stabilny charakter pracy w zakresie pokrytycznym. Potwierdza to możliwość wykorzystania kompozytowego elementu płytowego z centralnym wycięciem jako elementu sprężystego z możliwością kreowania charakterystyk sztywnościowych konstrukcji. Otrzymana wysoka zgodność wyników badań eksperymentalnych z wynikami obliczeń numerycznych potwierdza słuszność zastosowanych metod badawczych, potwierdzając jednocześnie adekwatność opracowanych modeli dyskretnych konstrukcji.

Podsumowując, przeprowadzone badania mogą wskazać dalsze kierunki prac w tym zakresie, polegające na analizie pracy cienkościennych konstrukcji kompozytowych w pełnym zakresie obciążenia, aż do momentu całkowitej utraty nośności konstrukcji, wraz ze szczegółowym opisem procesu zniszczenia struktury materiału kompozytowego. Wymaga to uwzględnienia w obliczeniach numerycznych złożonych modeli zniszczenia materiałów kompozytowych, które uwzględniają moment inicjacji uszkodzenia materiału, a także pozwalają na opis dalszej propagacji uszkodzonego kompozytu.

Częściowe wyniki badań zostały przedstawione w publikacjach własnych zamieszczonych na str. 104.

Literatura

1. Abramovich H., Grunwald A., *Stability of axially impacted composite plates*, Composite Structures, 1995, 32, pp.151–158.
2. Akbulut H., Sayman O., *An investigation on buckling of laminated plates with central square hole*, J Reinf Plast Compos, 2001, 20, pp.1112–1124.
3. Alfano, G., Crisfield M. A., *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites*, Mechanical and Computational Issues, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001,50, pp.1701–1736.
4. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W., *Structural analysis of laminate and sandwich beams and plates*, An introduction into the mechanics of composite, Lublin, Lubelskie Towarzystwo Naukowe, 2001.
5. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W., *Mechanics of composite structural elements*, Springer Verlag Berlin – Heidelberg, 2004.
6. Anderson R. G., Irons B. H., Zienkiewicz O. C., *Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements*, Int. J. Solids Struct., 1986, 4, pp. 1031–1055.
7. Anil V., Upadhyay C. S., Iyengar N. G. R., *Stability analysis of composite laminate with and without rectangular cutout under biaxial loading*, Composite Structure, 2007, 80(1), pp.92–104.
8. Ari-Gur J., Simonetta S. R., *Dynamic pulse buckling of rectangular composite plates*, Composite Part B, 1997, 28B, pp. 301–308.
9. Artz B. J. H., *Matrix Formulation of Structural Stability Problems*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 1965, ST5, pp.141–157.
10. Arygris J. H., Konig M., Nagy D. A., Haase M., Malejanalus G., *Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych*, Metody Obliczeniowe w Mechanice Nieliniowej, Ossolineum, 1977, s. 163–234.
11. Ashton J. E., Love T. S., *Experimental Study of the Stability of Composite Plates*, Journal of Composite Materials, 1969, 3, pp. 230–242.
12. Awrejcewicz J., Adrianov J. V., Manevitch L. I., *Asymptotical mechanics of thin-walled structures*, A handbook, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
13. Awrejcewicz J., Andrianov I. V., *Płyty i powłoki w przyrodzie, mechanice i biomechanice*, Wyd. WNT, Warszawa, 2001.
14. Awrejcewicz J., Krysko V. A., *Nonclassical thermoelastic problems in nonlinear dynamics of shells*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
15. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Vakakis A. F., *Nonlinear dynamics of continuous elastic systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
16. Aydin Komur M., Faruk S., Akin A., Nurettin A., *Buckling analysis of laminated composite plates with an elliptical/circular cut-out using FEM*, Adv Eng Software, 2010, 41, pp.161–164.

17. Baba B. O., Baltaci A., *Buckling characteristics of symmetrically and antisymmetrically laminated composite plates with central cutout*, Appl Compos Mater, 2007, 14, pp. 265–276.
18. Baba B. O., *Buckling behaviour of laminated composite plates*, J Reinf Plast Compos, 2007, 26, pp.1637–1655.
19. Baker A., Dutton S., Donald Kelly D., *Composite materials for aircraft structures*, USA, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004.
20. Bambach M., Rasmussen K., *Experimental techniques for testing unstiffened plates in compression and bending*, in Third International Conference on Thin-Walled Structures, Thin-Walled Structures-Advances and Development, Kraków, Elsevier, 2001.
21. Banat D., Kołakowski Z., Mania R., *Investigations of FML profile buckling and post-buckling behaviour under axial compression*, Thin-Walled Structures, 2016, 107, pp. 335–344.
22. Banat D., Mania R., *Zastosowanie MES do weryfikacji badań zniszczenia cienkościennych profili z materiału typu FML*, Modelowanie Inżynierskie, 2016, nr 59, ISSN 1896–771X.
23. Barsoum R. S., *Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of a Non-conservative system*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1971, 3, pp. 63–87.
24. Barsoum R. S., Gallagher R. H., *Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1970, 2, pp. 335–352.
25. Batoz J. L., Bathe K. J., Ho L.W., *A study of three-node triangular plate bending elements*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1980, 12(12) , pp.1771–1812.
26. Bažant Z. P., Cedolin L., *Stability of structures*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1991.
27. Bažant Z. P., Oh B. H., *Crack band theory for fracture of concreto*, Materials and Structures, 1983, 16, pp.155–177.
28. Benzeggagh, M. L., Khellil, K., Chotard, T., *Exparimental determination of Tsai failure tensorial terms F_{ij} for unidirectional composite materials*, Composites Science and Technology, 1995, 55, pp.145–156.
29. Berthelot J. M., *Composite Materials-Mechanical Behaviour and Structural Analysis*, Springer Verlag, New York, 1981.
30. Bogdanovich A. E., Sierakowski R. L., *Composite materials and structures: Science, technology and structures. A compendium of books, review papers and others sources of information*, Applied Mechanics Reviews, December 1999, 52(12), pp. 351–366.
31. Bolotin, V. V., *Mechanics of delaminations in laminate composite structures*, Mechanics of Composite Materials, 2001, 37, pp. 367–380.
32. Bruno, D. and Lato, S., *Buckling of moderately thick composite plates*, Composite Structures, 1991, 18(1), pp. 65–75.

33. Brzoska Z., *Statyka i stateczność konstrukcji*, PWN, Warszawa, 1965.
34. Budiansky B., *Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures*, Advances in Applied Mechanics, Acad. Press, 1974, 14, pp. 1–65.
35. Buryachenko V., *Micromechanics of Heterogeneous Materials*, Springer, 2007.
36. Calcote L.R., *The analysis of laminated composite structures*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.
37. Camanho, P. P., Davila C.G., *Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials*, 2002, NASA/TM-2002–211737, pp.1–37.
38. Campbell F. C., *Manufacturing Technology for Aerospace Structural Materials*, Elsevier, 2006.
39. Carlsson L. A., Pipes R. B., *Experimental characterization of advanced composite materials*, Lancaster-Basel, Technomic Publishing Co., 1997.
40. Carrera E., *An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates*, Composite Structures, 2000, vol. 50, pp.183–198.
41. Carrera E., *Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells*, Applied Mechanics Reviews, 2001, vol. 54, pp. 301–329.
42. Carrera E., *Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells*, Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(3), s.287–308.
43. Chai G. B., Ooi K. T. and Khong P. W., *Buckling strength optimization of laminated composite plates*, Computers and structures, 1993, 46, pp. 77–82.
44. Chamis C. C., Abumeri G. H., *Probabilistic dynamic buckling of composite shell structures*, Composite Part A, 2005, 36, pp. 1368–1380.
45. Chang F. K., Lessard L. B., *Damage tolerance of laminated composites containing an open hole and subject to compressive loadings: part I – analysis*, J Compos Mater., 1991, 25, pp. 2–43.
46. Chatopadhyay A., Radu A. G., *Dynamic instability of composite laminates using a higher order theory*, Computers and Structures, 2000, 77, pp. 453–460.
47. Cheng B., Zhao J., *Strengthening of perforated plates under uniaxial compression: Buckling analysis*, Thin-Walled Structures, 2010, 48, pp. 905–914.
48. Cheong H. K., Hao H., Cui S., *Experimental investigation of dynamic post-buckling characteristics of rectangular plates under fluid-solid slamming*, Engineering Structures, 2000, 22, pp. 947–960.

49. Choong K. K., Ramm E., *Simulation of buckling process of shells by using the finite element method*, Thin Walled Structures, 1998, 31, pp. 39–72.
50. Christensen R. M., *Mechanics of composite materials*, John Wiley and Sons, New York, 1979.
51. Christensen R. M., *Tensor transformations and failure criteria for the analysis of fiber composite materials*, J Compos Mater., 1988, 22, pp. 874–97.
52. Chun L., Lam K. Y., *Dynamic analysis of clamped laminated curved panels*, Composite Structures, 1995, 30, pp. 389–398.
53. Chung D., *Carbon Fiber Composites*, Butterworth-Heinemann, USA, 1994.
54. Corigliano, A., Allix O., *Some aspects of interlaminar degradation in composites*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 185, pp. 203–224.
55. Crisfield M. A., *A faster modified Newton-Raphson iteration*, Comp. Meth. In. Appl. Mech. Eng., 1979, 20, pp. 267–278.
56. Crisfield M. A., *An arc-length method including line searches and accelerations*, Int. J. Num. Met. Eng., 1983, 19, pp. 1269–1289.
57. Crisfield M. A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley & Sons Ltd, London, vol. 1 and 2, 1991.
58. Crisfield MA., *Full-range analysis of steel plates and stiffened plating under uniaxial compression*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, 1975, vol. 59, pp. 595–624.
59. Cui S., Hao H., Cheong H. K., *Numerical analysis of dynamic buckling of rectangular plates subjected to intermediate-velocity impact*, International Journal of Impact Engineering, 2001, vol. 25, pp. 147–167.
60. Czapski P., Kubiak T., *Influence of fibre arrangement on the buckling load of composite plates – analytical solution*, Fibres & Textiles in Eastern Europe, 2015, 5(113), pp. 92–97.
61. Dato, M. H., *Mechanics of fibrous composites*, Elsevier, 1991.
62. Daudeville, L., Allix, O.; Ladeveze, P., *Delamination Analysis by Damage Mechanics: Some Applications*, Composite Engineering, 1991, 5, pp. 17–24.
63. Davis J. G., Zender G. W., *Compressive Behavior of Plates Fabricated from Glass Filaments and Epoxy Resin*, Washington, NASA TN D-3918, 1967.
64. Davis J. G., *Compressive Strength of Fiber Reinforced Composite Materials*, NASA TM X-71992, 1974.
65. Dębski H., *Badania numeryczne i doświadczalne stateczności i nośności kompozytowych słupów cienkościennych poddanych ściskaniu*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2013.
66. Dębski H., *Experimental investigation of post-buckling behavior of composite column with top-hat cross-section*, Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability, 2013, 15(2), pp. 106–110.

67. Debski H., Kubiak T., Teter A., *Buckling and postbuckling behaviour of thin-walled composite channel section column*, Composite Structures, 2013, 100, pp. 195–204.
68. Debski H., Kubiak T., Teter A., *Experimental investigation of channel-section composite profiles behaviour with various sequences of plies subjected to static compression*, Thin-Walled Structures, 2013, 71, pp. 147–154.
69. Dębski H., Kubiak T., Teter A., *Numerical and experimental studies of compressed composite columns with complex open cross-sections*, Composite Structures, 2014, 118, pp. 28–35.
70. Dinesh K., Singh S. B., *Effects of boundary conditions on buckling and postbuckling responses of composite laminate with various shaped cutouts*, Composite Structure, 2010, 92, pp. 769–779.
71. Donaldson S. L., *Fracture toughness testing of graphite/epoxy and graphite/peek composites*, Composites, 1985, 16(2), pp. 103–12.
72. Dong S. B., Pister K. S., Taylor R. L., *On the theory of laminated anisotropic shells and plates*, J. Aerosp. Sci., 1962, pp. 969–975.
73. Donnell L. H., *Beams, plates and shells*, McGraw-Hill Book Comp., 1976.
74. Durban, D., Zuckerman, Z., *Elastoplastic buckling of rectangular plates in biaxial compression/tension*, International Journal of Mechanical Science, 1999, vol. 41, pp. 751–65.
75. Eiblmeier J., Loughlan J., *The buckling response of carbon fibre composite panels with reinforced cutouts*, Composite Structure, 1995, 32, 97113.
76. Eiblmeier J., Loughlan J., *The influence of reinforcement ring width on the buckling response of carbon fibre composite panels with circular cut-outs*, Composite Structures, 1997, vol. 38(1-4), pp. 609–622.
77. Eiblmeier J., Loughlan J., *The influence of reinforcement ring width on the buckling response of carbon fibre composite panels with circular cutouts*, Composite Structure, 1997, 38, pp. 609–622.
78. El-Sawy K. M., Nazmy A. S., Martini, M. I., *Elastoplastic buckling of perforated plates under uniaxial compression*, Thin-Walled Structures, 2004, vol. 42, pp. 1083–1101.
79. Ferdynus Mirosław, *Analiza wytrzymałościowa ściskanej płyty ze szczeliną*, Lublin, Politechnika Lubelska, 2000.
80. Gallagher R. H., Padlog J., *Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis*, AIAAJ, 1963, 6(1), pp. 1437–1439.
81. Gallagher R. H., Gellatly R. A., Padloo J., Mallett R. H., *A Discrete Element Procedure for Thin-Shell Instability Analysis*, AIAA J., 1967, 1(5), pp. 138–145.
82. Ganapathy, S., Tripathy, B., Rao, K. P., *Damage and its growth in laminate composite circular/rectangular plater undergoing large deformations*, Composite Structures, 1995, 32, pp. 367–373.

83. German J., Mikulski Z., *Zastosowanie koncepcji uszkodzeń kontynualnych do opisu progresywnego zniszczenia laminatów kompozytowych*, Mechanika Czasopismo Techniczne, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 3– M/2010, Zeszyt 9.
84. German J., *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, Politechnika Krakowska, Kraków, 2001.
85. Ghannadpour S. A. M., Najafi A., Mohammadi B., *On the buckling behavior of cross-ply laminated composite plates due to circular/elliptical cutouts*, Composite Structures, 2006, 75, pp. 3–6.
86. Gilbert R. P. (ed), *Theories of plates and shells*, J. Wiley& Sons, New York.
87. Girkmann K., *Dźwigary powierzchniowe*, Wyd. Arkady, Warszawa, 1957.
88. Gliszczyński A., Jakubczak P., Kubiak T., Bieniaś J., *Damage assessment of channel section columns subjected to uniform compression*, Composite Structures, 2018, vol. 202, pp. 500–510.
89. Grądzki R., *Stability of plater In the elasto-plastic range subjected to eccentric compression*, Archiwum Budowy Maszyn, 1994, vol. XLI, zeszyt 1, pp. 5–17.
90. Greenhalgh E. S., *Failure analysis and fractography of polymer composites*, Woodhead Publishing Limited and CRC Press LLC, 2009.
91. Gürdal, Z., Haftka, R. T., Hajela, P., *Design and optimization of laminated composite materials*, John Wiley and Sons, 1999.
92. Hahn H. T., Tsai S. W., *Nonlinear elastic behavior of unidirectional composite laminae*, J Compos Mater 1973, 7, pp. 102–18.
93. Hahn H. T., *A mixed-mode fracture criterion for composite materials*, Compos Technol Rev., 1983, 5, pp. 26–9.
94. Haj Ali R., Wang S. S., *Nonlinear behavior of fiber composite materials and its effect on the postbuckling response of laminated plates*, Technical Report UIUCNCCMR-90-10, Urbana, Illinois: National Center for Composite Materials Research, University of Illinois, 1990.
95. Hamani N., Ouinas D., Benderdouche N., Sahnoun M., *Buckling analyses of the antisymmetrical composite laminate plate with a crack from circular notch*, Adv Mater Res, Switzerland: Trans Tech Publications, 2012, vol. 365, ISSN: 1022-6680, pp. 56–1.
96. Hani Aziz A., *Buckling analysis of composite laminated plate with cutouts*, Eng.& Tech.Journal, 2009, 27, pp. 1611–1621.
97. Hashin Z., *Failure criteria for unidirectional fiber composites*, J Appl Mech, 1980, 47, pp. 329–334.
98. Hashin Z., *Theory of Fiber Reinforced Materials*, NASA CR-1974, 1972.
99. Hashin, Z., *Failure criteria for unidirectional composites*, Journal for Applied Mechanics, 1980, 47, pp. 329–334.

100. Hayashi T., *On the elastic constants and stiffness of orthogonal anisotropic plates*, J. Soc. Aeronaut. Eng. Nippon, 1941, 8(69), pp. 601–626.
101. Helbig D., Cardoso de Silva C. C., Domingues des Santos E., Isoldi L. A., Rocha L. A. O., *Study About Buckling Phenomenon in Perforated Thin Steel Plates Employing Computational Modeling and Constructal Design Method*, Latin American Journal of Solids and Structures, 2016, vol.13(10).
102. Helbig, D., Rocha, L. A. O., Da Silva, C. C. C., Dos Santos, E. D., Real, M. V., Isoldi, L. A., *Numerical simulation and Constructal Design method applied to the study of the cutout shape Influence in the mechanical behavior of perforated plates subjected to buckling*, In: Proceedings of XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE), UFC (Fortaleza), 2014.
103. Herrmann, G., and Armenakas, A. E., *Vibration and stability of plates under initial stress*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1960, vol.86, no.EM3, pp. 65–94.
104. Hill R., *Theory of mechanical properties of fibre-strengthened Materials – III. Self-consistent model*, J. Mech. Phys. Solids., 1965, 13, pp. 189–198.
105. Hinton MJ, Kaddour AS, Soden PD., *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites*, The World-Wide Failure Exercise, Elsevier Science Ltd, 2004.
106. Hoffman O., *The brittle strength of orthotropic material*, J Compos Mater, 1967, 1(2), pp. 200–206.
107. Hsuan-Teh Hu & Bor-Horng Lin, *Buckling optimization of symmetrically laminated plates with various geometries and end conditions*, Comp Sci and Technol, 1995, 55, pp. 277–285.
108. Hu H., Badir A., Abatan A., *Buckling behavior of graphite/epoxy composite plate under parabolic variation of axial loads*, International journal of Mechanical Sciences, 2003, 45, pp. 1135–1147.
109. Hu H. T., Flax B. H., *Buckling optimization of symmetrically laminated rectangular flat with various geometry and end conditions*, Comp Sci Technol, 1995, 55 pp. 277–85.
110. Hu H. T., *Buckling analyses of fiber-composite laminate plates with material nonlinearity*, Finite Elem Anal Des, 1995, 19, pp. 169–79.
111. Hu H. T., *Influence of in-plane shear nonlinearity on buckling and postbuckling responses of composite plates and shells*, In: Schwer L et al., editors. The winter annual meeting of ASME on enhancing analysis techniques for composite materials, 10, Atlanta, Georgia: ASME, 1991, pp. 179–86.
112. Hu H. T., *Influence of in-plane shear nonlinearity on buckling and postbuckling responses of composite plates and shells*, J Compos Mater, 1993, 27, pp. 138–51.
113. Huber M. T., *Teoria sprężystości – część I i 2*, Wyd. PWN, Warszawa, 1954.

114. Huber M. T., *Die theorie der rechteckigen anisotropen Platten, mit besonderer Berücksichtigung der armierten. s.n.*, Lemberg, Poland, 1921.
115. Husam A. Q., Hasan K., Hazim D., *Assessment of the buckling behaviour of square composite plates with circular cutout subjected to in-plane shear*, Jordan Journal of Civil Engineering, 2009, 3, pp. 184–195.
116. Hyla I., Ślężiona J., *Kompozyty: elementy mechaniki i projektowania*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2004.
117. Idlbi A., Karama M., Touratier M., *Comparisoion of various laminated plate theories*, Composite Structures, 1997, 37, pp. 173–184.
118. Imielińska, K., *Degradation and damage of advanced laminate polymer composites due to environmental effects and low velocity impact*, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 2005.
119. Isoldi, L. A., Real, M. V., Correia, A. L. G., Vaz J., dos Santos, E. D., & Rocha L. A. O., *The flow of stresses: constructal design of perforated plates subjected to tension or buckling*, In Rocha L. A. O., Lorente S., and Bejan A., eds., *Constructal Law and the Unifying Principle of Design*, Springer-Verlag, 2013, pp. 195–217, DOI: 10.1007/978-1-4614-5049-8_12.
120. Jain P, Kumar A., *Post buckling response of square laminates with a central circular/elliptical cutout*, Composite Structure, 2004, 65, pp. 179–185.
121. Jana P., Bhaskar K., *Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions*, Thin-Walled Structures, 2006, 44, pp. 507–516.
122. Jayashankarbabu B. S., Karisiddappa, *Stability of Square Plate with Concentric Cutout*, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering, 2014, 8(3).
123. Jemielita G., *Meandry teorii płyt*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, 1991, z. 117, pp. 3–22.
124. Jones R., *Mechanics of composite materials*, 2/E, Taylor&Francis, USA, 1998.
125. Jones R. M., *Mechanics of composite materials*, Tokyo, International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1975.
126. Jones R. M., *Mechanics of composite materials*, Philadelphia, Taylor & Francis, Inc., 1999.
127. Kachanov L. M., *Time of the rupture process under creep conditions*, IVZ Akad Nauk SSR Otd Tech Nauk, 1958, 8, pp. 26–31.
128. Kączkowski Z., *Płyty, Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa, 2000.
129. Kam, T. Y., Jan, T. B., *First-ply analysis of laminated composite plates based on layerwise linear displacement theory*, Composite Structures, 1995, 32, pp. 583–591.

130. Kapur K. K., Hartz B. J., *Stability of Plates Using the Finite Element Method*, Proc. ASCE, J. Mech. Eng. Div., EM2, 1966, pp.177–195.
131. Kelly A. (Ed.), *Concise Encyclopedia of Composite Materials*, Pergamon Press, 1989.
132. Khaled M. El-Sawy, Mohammad Ikbāl Martini, *Elastic stability of bi-axially loaded rectangular plate with a single circular hole*, Thin-Walled Structures, 2007, 45, pp. 122–133.
133. Kicher T. P., Mandell J. E., *A Study of the Buckling of Laminated Composite Plates*, AIAA, 1971, 9(4), pp. 605–613.
134. Kim S. C., Kim J. S., Yoon H. J., *Experimental and Numerical Investigations of Mode I Delamination Behaviors of Woven Fabric Composites with Carbon, Kevlar and Their Hybrid Fibers*, International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2011, 12(2), pp. 321–329.
135. Kleiber M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa-Poznań, 1985.
136. Koiter W. T., *General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures*, WTHD, Report 590, Delft, 1976, p. 41.
137. Koiter W. T., *Elastic stability and post-buckling behavior*, In: Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin, 1963.
138. Kołakowski Z., *Interakcyjne wyboczenie cienkościennych konstrukcji sprężystych*, Rozprawy Naukowe Politechniki Łódzkiej z. 173, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, Zeszyty Naukowe nr 653/1992.
139. Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (pod red.), *Selected problems of instabilities in composite structures*, Wyd. Politechniki Łódzkiej, seria Monografie, 1999.
140. Kołakowski Z., Kowal-Michalska K., *Interactive buckling regarding the axial extension mode of a thin-walled channel under uniform compression in the first nonlinear approximation*, International Journal of Solids and Structures, 2011, 48, pp. 119–125.
141. Kołakowski Z., Królak M., *Modal coupled instabilities of thin-walled composite plate and shell structures*, Composite Structures, 2006, 76, pp. 303–313.
142. Kołakowski Z., *On some aspects of the modified TSAI-WU criterion in thin-walled composite structures*, Thin-Walled Structures, 2003, 41(4), pp. 357–374.
143. Kołakowski Z., Teter A., *Influence of local postbuckling behaviour on bending of thin-walled elastic beams with central intermediate stiffeners*, Engineering Transactions, 1995, 43(3), pp. 383–396.
144. Kołakowski Z., Teter A., *Interactive buckling of thin-walled closed elastic column-beams with intermediate stiffeners*, International Journal of Solid and Structures, 1995, 32(11), pp. 1501–1516.

145. Kollar L., Springer G., *Mechanics of Composite Structure*, Cambridge University Press, 2003.
146. Kopecki T., *Stany zaawansowanych deformacji w projektowaniu cienkościennych ustrojów nośnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2010.
147. Kowal-Michalska K. (red.), *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*, WNT, Łódź–Warszawa, 2007.
148. Kowal-Michalska K., *Stany zakrytyczne w obszarach sprężysto-plastycznych konstrukcji płytowych*, Seria monografie, WPL, Łódź, 2013.
149. Kozma, F. and Ochoa, O. O., *Buckling of composite plates using shear deformable finite elements*, AIAA Journal, 1986, 24, pp. 1721–1723.
150. Kreja I., *A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels*, Cent. Eur. J. Eng., 2011, 1(1), pp. 59–80.
151. Królak M. (pod red.), *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*, PWN, Warszawa–Łódź, 1990.
152. Królak M. (pod red.), *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*, Wyd. Politechniki Łódzkiej, seria Monografie, 1995.
153. Kubiak T., *Interakcyjne wyboczenie dynamiczne cienkościennych słupów*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej nr 998, Rozprawy Naukowe z. 358, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2007.
154. Kubiak T., Kaczmarek Ł., *Estimation of load-carrying capacity for thin-walled composite beams*, Composite Structures, 2015, 119, pp. 749–756.
155. Kubiak T., *Static and dynamic buckling of thin-walled plate structures*, Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2013.
156. Kumai T., *Elastic stability of the square plate with a central circular hole under edge thrust*, Reports of the Research Institute for Applied Mechanics1, 1952, 2, pp.1–10.
157. Kumar D., Singh S.B., *Effects of boundary conditions on buckling and postbuckling responses of composite laminate with various shaped cutouts*, Composite Structures, 2010, 92, pp. 769–779.
158. Kumar D., Singh S. B., *Postbuckling strengths of composite laminate with various shaped cutouts under in-plane shear*, Composite Structures, 2010, 92, pp. 2966–2978.
159. Kundu C. K., Sinha P. K., *Post buckling analysis of laminated composite shells*, Composite Structures, 2007, 78, pp. 316–24.
160. Kunniuen M. F., Rybicki E. F., Griffith W. I., Broek D., *Fundamental Analysis of the Failure of Polymer-Based Fiber Reinforced Composites*, NASA CR–2689, 1976.
161. Lakshminarayana A., Kumar V. R., Krishna Mohana Rao G., *Buckling analysis of quasi-isotropic symmetrically laminated rectangular composite*

- plates with an elliptical/circular cutout subjected to linearly varying in-plane loading using fem*, International Journal of Mechanics, 2012, 6(1), pp. 5–8.
162. Lanzi L., *A numerical and experimental investigation on composite stiffened panels into post-buckling*, Thin-Walled Structures, 2004, 42(12), pp. 1645–1664.
 163. Lee H. H., Hyer M. W., *Postbuckling failure of composite plates with holes*, AIAA J 1993, 31(7), pp. 1293–1298.
 164. Lee J. D., *Three dimensional finite element analysis of damage accumulation in composite laminate*, Comput Struct, 1982, 15(33), pp. 335–50.
 165. Leissa A. W., *Composite buckling of laminated flat and shell panels*, AFWAL-TR-85-3069, Flight dynamics laboratory, Air Force Wright Aeronautical Laboratories Wright-Patterson Air Forces Foundation: Ohio; 1985.
 166. Lemaitre J., Chaboche J. L., *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1990.
 167. Levy S. and others, *Instability of supported square plate with reinforced circular hole in edge compression*, Research Paper 1849, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1947, 39(6), pp. 571–577.
 168. Lewiński, T., Telega, J. J., *Plates, laminates and shells*, Singapore, World Scientific, 1999.
 169. Libove C., *Buckling Pattern of Biaxially Compressed Simple Supported Orthotropic Rectangular Plates*, Journal of Composite Materials, 1983, 17, pp. 45–48.
 170. Lorenzini G., Helbig D., Cardoso da Silva C. C. , Mauro de Vasconcellos Real , Elizaldo Domingues dos Santos, Liércio André Isoldi, Luiz A. O. Rocha, *Numerical evaluation of the effect of type and shape of perforations on the buckling of thin steel plates by means of the constructal design method*, International Journal of Heat and Technology, 2016, vol.34, Special Issue 1, S9–S20.
 171. Lorenzini G., Helbig D., M. de V. Real, E. D. dos Santos, Isoldi S. A. and Rocha L. A. O., *Computational Modeling and Constructal Design Method Applied to the Mechanical Behavior Improvement of Thin Perforated Steel Plates Subject to Buckling*, Journal of Engineering Thermophysics, 2016, 25(2), pp. 1–19.
 172. Loughlan J., Yidris N., Cunningham P. R., *The effects of local buckling and materials yielding on the axial stiffness and failure of uniformly compressed l-section and box-section struts*, J. of Thin-Walled Structures, 2011, 49(2), pp. 264–279.
 173. Lukoshevichyus R. S., *Minimizing the Mass of Reinforced Rectangular Plates Compressed in Two Directions in a Manner Conductive toward Stability*, Polymer Mechanics, 1977, 12(6), pp. 929–933.

174. Magnucki K., *Stateczność sprężysta konstrukcji prętowych i powłokowych w ujęciu energetycznym*, Rozprawy, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, nr 246, 1991.
175. Malekan M., Barros F. B., Pitangueira L. S., *Fracture analysis in plane structures with the two-scale G/XFEM method*, International Journal of Solids and Structures, 2018, vol. 155, pp. 65–80.
176. Mallett R. H., Marcal P. V., *Finite Element Analysis of Nonlinear Structures*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 1968, ST9, pp. 2081–105.
177. Mallik P. K., *Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing, and design*, Marcel Dekker, 1988..
178. Manevich A. L., *Interaction of buckling modes of stiffened plate under compression*, Stroitel'naya Mekhanika I Raschet Sooruzhenii, 1985, 2, pp. 34–38, (in Russian).
179. Manevich A. L., *Interactive buckling of stiffened plate under compression*, Mekhanika Tverdogo Tela, 1988, 5, pp. 152–159, (in Russian).
180. Manevich A. L., *Stability of shells and plates with T-section stiffeners*, Stroitel'naya Mekhanika I Raschet Sooruzhenii, 1981, 5, pp. 24–29, (in Russian).
181. Mania R., *Comparative Static Buckling Study Of Fml Thin-Walled Profiles*, ECCM 16th European Conference On Composite Materials, Seville, Spain, 22–26 June 2014.
182. Mania R., Kołakowski Z., Bieniaś J., Majerski K., *Comparative study of FML profiles buckling and postbuckling behaviour under axial loading*, Composite Structures, August 2015, 134.
183. Martin H. C., *On the derivation stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems*, Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton Ohio, Wright-Patterson AFB, DL-TR, 1966, 66(80), pp. 697–716.
184. Matthews, F. L.; Rawlings, R. D., *Composite materials: engineering and science*, Woodhead Publishing Ltd., 1990.
185. Muc A., *Optimum grain orientation for simply-supported acute angle-ply flat under biaxial compression*, Composite Structure, 1988, 9, pp. 161–72.
186. Muc A., *Mechanika kompozytów włóknistych*, Księgarnia Akademicka Kraków, 2003.
187. Muc A., *Optymalizacja struktur kompozytowych i procesów technologicznych ich wytwarzania*, Księgarnia Akademicka, Kraków, 2005.
188. Narayanan R., Chow F. Y., *Ultimate capacity of uniaxially compressed perforated plates*, Thin-Walled Structures, 1984, 2(2), pp. 241–264.
189. Navaratna D. R., Pian T. H. H., Wilimir L. A., *Stability Analysis of Shells of Revolution, by the Finite Element Method*, AIAA J., 1968, 6, pp. 355–336.
190. Nemeth M. P., *Buckling behavior of long symmetrically laminated plates subjected to shear and linearly varying edge loads*, NASA TP–3659, 1997.

191. Nemeth M. P., *Buckling behavior of compression-loaded symmetrically laminated acute angle-ply flat with holes*, AIAA Newspaper, 1988, 26, pp. 330–336.
192. Noor A. K., *Finite element buckling and postbuckling analyses*, In: Turvey GJ, Marshall IH, editors. *Buckling and postbuckling of composite plates*. Chapman & Hall, London, UK, 1995, pp. 59–107.
193. Noor A. K., Stuart M. J. (pod red.), *Failure Analysis and Mechanisms of Failure of Fibrous, Composite Structures*, NASA Conference Publication 2278, 1983.
194. Nowacki J., *Materiały kompozytowe*, Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1993.
195. Ochelski S., *Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych*, WNT, Warszawa, 2004, ISBN 83-204-2890-4.
196. Oden J. T., Key J. E., *Numerical Analysis of Finite Axisymmetric Deformations of Incompressible Elastic Solids of Revolution*, Int. J. Solid Struct., 1970, 6, pp. 497–518.
197. Orifici A. C., Thomson R. S., Degenhardt R., Kling A., Rohwer K., Bayandor J., *Degradation investigation in a postbuckling composite stiffened fuselage panel*, Composite Structures, 2008, 82, pp. 217–224.
198. Orifici A. C., Herszberg I., Thomson R. S., *Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure*, Composite Structure, 2008, 86(1–3), pp. 194–210.
199. Ouinas D., Achour B., *Buckling analysis of laminated composite plates [(h/h)] containing an elliptical notch*, Composites: Part B, 2013, 55, pp. 575–579.
200. Padhi, G. S., Sheno, R. A.; Moy, S. S. J., Hawkins G. L., *Progressive failure and ultimate collapse of laminated composite plates in bending*, Composite Structures, 1998, 40, pp. 277–291.
201. Paszkiewicz M., Kubiak T., *Selected problems concerning determination of the buckling load of channel section beams and columns*, Thin-Walled Structures, 2015, 93, pp. 112–121.
202. Paulo R. M. F., Teixeira-Dias F., Valente R. A. F., *Numerical simulation of aluminium stiffened panels subjected to axial compression. Sensitivity analysis to initial geometrical imperfection and material properties*, Thin-Walled Structures, 2013, 62.
203. Petry D., Fahlbusch G., *Dynamic buckling of thin isotropic plates subjected to in-plane impact*, Thin-Walled Structures, 2000, 38, pp. 267–283.
204. Pietraszkiewicz W., *Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells*, Advances in Mechanics, 1989, 12(1), pp. 51–130.
205. Pignataro M. and Luongo A., *Multiple interactive buckling of thin-walled members in compression*, Proc. Int. Colloq. On Stability of Plate and Shell Structures, University Ghent, Ghent, 1987, pp. 235–240.

206. Prabhakara D. L., Datta P. K., *Vibration, Buckling and Parametric Instability Behaviour of Plates with Centrally Located Cutouts Subjected to In-Plane Edge Loading (Tension or Compression)*, Thin-Walled Structures, 1997, 27(4), pp. 287–310.
207. Puck A., Schürmann H., *Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models*, Compos Sci Technol, 1998, 58, pp. 1045–67.
208. Puck, A., Schuermann, H., *Failure Analysis of Frp Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models*, Composites Science and Technology, 1998, 58, pp.1045–1067.
209. Rakowski G., Kasprzyk Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1993.
210. Reddy J. N., *Energy principles and variational methods in applied mechanics*, J. Wiley & Sons Inc., New Jersey, 2002.
211. Reddy J. S. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, 2004.
212. Reddy Y. S. N., Pandey A. K., *A first-ply failure analysis of composite laminates*, Comput Struct, 1987, 25(3), pp. 371–93.
213. Rhodes M. D., Mikulas M. M., McGowan P. E., *Effects of orthotropy and width on the compression strength of graphite–epoxy with holes panels*, AIAA Newspaper 1984, 22, pp. 1283–92.
214. Riks E., *A unqied method for the computation of critical equilibrium states of nonlinear elastic systems*, Acta Techn. Acad. Scient. Hungaricae., 1978, 87(1–2), pp. 121–141.
215. Riks E., *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Solids & Structures, 1979, 15, pp. 529–551.
216. Riks E., *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*, Trans. ASME, 1. Appl. Mech., 1972, 39, pp. 1060–1066.
217. Ritchie D., Rhodes J., *Buckling and post-buckling behaviour of plates with holes*, The Aeronautical Quarterly, 1975, 26(4), pp. 281–296.
218. Rocha L. A. O., Isoldi L. A., Real M. V., dos Santos E. D., Correia A. L. G., Lorenzini G., Biserni C., *Constructal design applied to the elastic buckling of thin plates with holes*, Central European Journal of Engineering, 2013, vol. 3, pp. 475–483, DOI: 10.2478/s13531-013-0105-x.
219. Rocha L. A. O., Real M. V., Correia A. L. G., Vaz J., dos Santos E. D. & Isoldi L. A., *Geometric optimization based on the constructal design of perforated thin plates subject to buckling*, Computational Thermal Sciences, 2012, 4(2), pp. 119–129, DOI: 10.1615/ComputThermalScien.2012005125.
220. Romanów F., *Wytrzymałość konstrukcji warstwowych*, Wyd. WSI, Zielona Góra, 1995.

221. Romeo G., *Analytical and experimental behaviour of laminated panels with rectangular opening under biaxial tension, compression and shear loads*, J Compos Mater, 2001, 35(8), pp. 639–64.
222. Różyło P., Dębski H., Wysmulski P., Falkowicz K., *Numerical and experimental failure analysis of thin-walled composite columns with a top-hat cross section under axial compression*, Composite Structures, 2018, vol. 204, pp. 207–216.
223. Rudawska A., Dębski H., *Experimental and Numerical Analysis of Adhesively Bonded Aluminium Alloy Sheets Joints*, Eksploatacja i Niezawodność–Maintenance and Reliability, 2011, 1, pp. 4–10.
224. Rusiński E., Czmochoński J., Smolnicki T., *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2000.
225. Rybicki, E. F., Kanninen, M. F., *A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral*, Engineering Fracture Mechanics, 1977, 9, pp. 931–938.
226. Sarat K. P., Ramachandra R.S., *Buckling of rectangular plates with various boundary conditions loaded by non-uniform inplane loads*, International journal of mechanical sciences, 2010, 52, pp. 819–828.
227. Saravanos D. A., Chamis C. C., *Unified Micromechanics of Damping for Unidirectional Fiber Reinforced Composites*, NASA TM-102107, 1989.
228. Sciuva M. D., Icardi U., Villani, *Failure analysis of composite laminates under large deflection*, Composite Structures, 1998, 40, pp. 239–255.
229. Shanmugam N. E., *Openings in Thin-walled Steel Structures*, Thin-Walled Structures, 1997, 28(3/4), pp. 355–372.
230. Shanmugam N. E., Thevendran V., Tan Y. H., *Design formula for axially compressed perforated plates*, Thin-Walled Structures, 1999, 34(1), pp. 1–20.
231. Soutis C., *Carbon fibre reinforced plastics in aircraft construction*, Materials Science and Engineering, 2005, A 412, pp. 171–176.
232. Srivatsa K. S., Krishna Murthy, *Stability of laminated composite plates with cutouts*, Computers & Structures, 1992, 43, pp. 273–279.
233. Sundaresan P., Singh G., Venkateswara Rao G., *Buckling and postbuckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates*, Computers Structures, 1996, 61(1), pp. 79–86.
234. Swanson S. R., *Introduction to Design and Analysis with Advanced Composite Materials*, Prentice-Hall, 1997.
235. Świtka R., *Equations of the fibre composite plates*, Engineering Transactions, 1992, 40, pp. 187–201.
236. Świtka R., *O pewnej koncepcji teorii płyt włóknokompozytowych*, In: III Sympozjum: Kompozyty. Konstrukcje warstwowe, Wrocław-Karpacz, 2004, pp. 149–156.

237. Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*, Arkady, Warszawa, 1972.
238. Teter A., Kołakowski Z., *Buckling of thin-walled composite structures with intermediate stiffeners*, Composite Structures, 2005, 69(4), pp. 421–428.
239. Teter A., Kołakowski Z., *Coupled dynamic buckling of thin-walled composite columns with open cross-sections*, Composite Structures, 2013, 95, pp. 28–34.
240. Teter A., Kołakowski Z., *Interactive buckling of thin-walled open elastic column-beams with intermediate stiffeners*, International Journal of Solid and Structures, 1996, 33(3), pp. 315–330.
241. Teter A., Kołakowski Z., *Natural frequencies of thin-walled structures with central intermediate stiffeners or/and variable thickness*, Thin-Walled Structures, 2003, 41, pp. 291–316.
242. Teter A., *Static and dynamic interactive buckling of isotropic thin-walled closed columns with variable thickness*, Thin-Walled Structures, 2007, 45, pp. 936–940.
243. Timoshenko S. P. and James M. Gere., *Theory of Elastic Stability*, second ed. McGraw-Hill company, Singapore, 1963, pp. 348–389.
244. Timoszenko S., Gere J. M., *Teoria stateczności sprężystej*, Wyd. Arkady, Warszawa, 1963.
245. Timoszenko S., Goodier J. N., *Teoria sprężystości*, Wyd. Arkady, Warszawa, 1962.
246. Timoszenko S., Woinowsky-Krieger S., *Teoria płyt i powłok*, Wyd. Arkady, Warszawa, 1962.
247. Tong L., Mouritz A. P., Bannister M. K., *3D Fibre Reinforced Polymer Composites*, Elsevier Science Ltd., 2002.
248. Tong L., *An assessment of failure criteria to predict the strength of adhesively bonded composite double lap joints*, J Reinf Plastic Compos, 1997, 16(8), pp. 698–713.
249. Topal U., Uzman U., *Maximization of buckling load of laminated composite plates with central circular holes using MFD method*, Struct Multidisc optim, 2008, 35, pp.131–139.
250. Tsai S. W., *Composite design–1985*, United States Air Force Materials Laboratory, Think Composites, Dayton Paris and Tokyo, 1985.
251. Tsai S. W., *Strength characteristics of composite materials*, NASA CR-224, 1965.
252. Tsai, S. W., Wu, E. M., *A general theory of strength for anisotropic materials*, Journal of Composite Materials, 1971, 5, pp. 58–80.
253. Tung T. K., Surdenas J., *Buckling of Rectangular Orthotropic Plates un-der Biaxial Loading*, Journal of Composite Materials, 1987, 21, pp. 124–128.

254. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aeronaut. Sci., 1956, 23, pp. 805–824.
255. Turon, A., Camanho, P. P., Costa, J., Davila, C. G., *An interface damage model for the simulation of delamination under variable-mode ratio in composite materials*, In: NASA/TM2004-213277, 2004.
256. Turvey G. J., Marshall I. H., *Buckling and Postbuckling of Composite Plates*, Springer Science + Business Media Dordrecht, 1995.
257. Vasiliev V. V., Morozov E. V., *Mechanics and Analysis of Composite Materials*, Elsevier Science Ltd, Oxford, 2001.
258. Vellaichamy S., Prakash B. G., Brown S., *Optimum design of cutouts in laminate composite structures*, Comput Struct, 1990, 37, pp. 241–246.
259. Vinson J. R., Chou T. W., *Composite Materials and Their Use in Structures*, Applied Science Publishers Ltd, London, 1975.
260. Volmir A. S., *Uстойчивость деформируемых систем*, Wyd. Nauka, Moskwa, 1967.
261. Walczak W., Mania R., *Stateczność prostokątnej płyty trójwarstwowej, poddanej działaniu jednokierunkowego, liniowo zmiennego ściskania przy różnych warunkach podparcia krawędzi płyty*, Archiwum Budowy Maszyn, 1982, tom XXIX, zeszyt 3–4, s. 327–341.
262. Waszczyszyn Z. i inni, *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa, 1990.
263. Whitcomb J. D., *Analysis of instability-related growth of a through-width delamination*, NASA TM-86301, 1984.
264. White S. R., *Mixed-mode interlaminar fracture of graphite/epoxy*, Washington University, 1987.
265. Whitney J. M., Pagano N. J., *Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 1970, 37, pp. 1031–1036.
266. Whitney J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Lancaster PA, Technomic Publishing Co. Inc., 1987.
267. Wilczyński A. P., *Polimerowe kompozyty włókniste-własności, struktura, projektowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1996.
268. Woźniak C. (red.), *Mechanika techniczna – mechanika sprężysta płyt i powłok*, Tom VIII, PWN, Warszawa, 2001.
269. Woźniak Cz., *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Praca zbiorowa pod red. Czesława Woźniaka, Wyd. PWN, Warszawa, 2001.
270. Wu G. Y., Shih Y. S., *Dynamic instability of rectangular plate with an edge crack*, Computers and Structures, 2005, vol. 84, pp.1-10.
271. Yang J., Liew K. M., Kitipornchai S., *Imperfection sensitivity of the post-buckling behavior of higher-order shear deformable functionally graded*

- plates, *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol.43, pp. 5247–5266.
272. Ye J., Rasmussen K., *Compression strength of unstiffened elements in cold-reduced high strength steel*, *Journal of Structural Engineering*, 2008, 134(2), pp.189–197.
 273. York C. B., *Tapered hygro-thermally curvature-stable laminates with nonstandard ply orientations*, *Compos A Appl Sci Manuf*, 2013, 44, pp. 140–8.
 274. York C. B., *Unified approach to the characterization of coupled composite laminates: benchmark configurations and special cases*, *J Aerosp Eng*, 2010, 23 (4), pp. 219–42.
 275. York C. B., *Coupled quasi-homogeneous orthotropic laminates*, *Mechanics of Composite Materials*, 2011, 47(4), pp. 405–426.
 276. York C. B., *Characterization of non-symmetric forms of fully orthotropic laminates*, *Journal of Aircraft*, 2009, 46(4), pp. 1114–1125.
 277. Yu W. W., Davies Ch. S., *Cold-formed steel members with perforated elements*, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 1973, 99, pp. 2061–2077.
 278. Zhang T., Liu T., Zhao Y., *Nonlinear dynamic buckling of stiffened shells*, *Computers and Structures*, 2003, 81, pp. 1031–1039.
 279. Zhang Y. X., Yang C. H., *Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates*, *Composite Structures*, 2009, 88, pp. 147–157.
 280. Zhong H., Chao Gu, *Buckling of symmetrical cross-ply composite rectangular plates under a linearly varying in-plane load*, *Composite structures*, 2007, 80, pp. 42–48.
 281. Zielnica J., *Stateczność powłok sprężysto-plastycznych*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2001.
 282. Zienkiewicz O. C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawy, 1972.
 283. Zizicas G. A., *Dynamic buckling of elastic plates*, *Transactions ASME*, 1952, 74, 7, pp. 1257–1268.
 284. Zor M., Şen F., Toygar M. E., *An investigation of square delamination effects on the buckling behavior of laminated composite plates with a square hole by using three-dimensional FEM analysis*, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2005, 24(11), pp. 1119–1130.
 285. Zureick A., Nettles A. T. (pod red.), *Composite Materials: Testing, Design, and Acceptance Criteria*, ASTM Stock Number: STPI416, 2002.

Publikacje własne

1. Falkowicz K., Debski H., *The post-critical behaviour of compressed plate with non-standard play orientation*, Composite Structures, 2020, 252, 112701.
2. Falkowicz K., Debski H., Wysmulski P., *Effect of extension-twisting and extension-bending coupling on a compressed plate with a cut-out*, Composite Structures, 2020, 238, 111941.
3. Falkowicz K., Debski H., Wysmulski P., Rozylo P., *The behaviour of compressed plate with a central cut-out, made of composite in an asymmetrical arrangement of layers*, Composite Structures, 2019, 214, pp. 406–413.
4. Falkowicz K., Debski H., *The Work of a Compressed, Composite Plate in Asymmetrical Arrangement of Layers*, AIP Conference Proceedings, 2019, 2078, 020005.
5. Falkowicz K., *Stiffening material impact on the work of thin-walled element*, MATEC Web of Conferences, 2019, 252, 07009.
6. Falkowicz K., Debski H., Teter A., *Design solutions for improving the lowest buckling loads of a thin laminate plate with notch*, AIP Conference Proceedings, 2018, 1922, 080004.
7. Falkowicz K., *Experimental and Numerical Analysis of Compression Thin-Walled Composite Plates Weakened by Cut-Outs*, Archives of Civil Engineering, 2017, 63(4), pp. 161–172.
8. Falkowicz K., Debski H., *Postbuckling Behaviour of Laminated Plates With a Cut-Out*, Advances In Science And Technology–Research Journal, 2017, 11(1), pp. 186–193.
9. Falkowicz K., *Stability of rectangular plates with notch using FEM*, ITM Web of Conferences, 2017, 15, 07013.
10. Falkowicz K., Mazurek P., Rozylo P., Wysmulski P., Smagowski W., *Experimental and Numerical Analysis of The Compression Thin-Walled Composite Plate*, Advances in Science and Technology–Research Journal, 2016, 10(31), pp. 177–184.
11. Falkowicz K., Ferdynus M., Debski H., *Numerical analysis of compressed plates with a cut-out operating in the geometrically nonlinear range*, Eksploatacja i Niezawodnosc, 2015, 17(2), pp. 222–227.