

**POLITECHNIKA LUBELSKA**

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI**

**INSTYTUT INFORMATYKI**

**Maciej Pańczyk**

**Rozprawa doktorska**



# **Elementy nieskończone w metodzie elementów brzegowych**

Promotor pracy

Prof. dr hab. inż. Jan Sikora

Lublin, 9 listopada 2009.

**Składam serdeczne podziękowania mojemu  
promotorowi prof. dr hab. inż. Janowi Sikorze  
za cierpliwość, bezcenną pomoc i cały wysiłek  
związany z realizacją pracy.**

**Maciej Pańczyk**

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008 – 2009 jako projekt badawczy, grant N N510 3423 34 „Elementy brzegowe nieskończone i ich zastosowanie w tomografii impedancyjnej i optycznej” oraz N N519 1203 33 „Dyfuzyjna tomografia optyczna, metoda nieskończonych elementów brzegowych oraz zbiorów poziomicowych w zastosowaniu do nieinwazyjnej diagnostyki piersi w aspekcie zmian nowotworowych”.

# Spis treści

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Wstęp</b>                                                    | <b>3</b>  |
| <b>1 Wprowadzenie</b>                                           | <b>5</b>  |
| 1.1 Wiadomości wstępne . . . . .                                | 7         |
| 1.2 Stan badań nad elementami brzegowymi nieskończonymi . . . . | 10        |
| 1.3 Cel, teza pracy i przyjęte ograniczenia . . . . .           | 11        |
| <b>2 Pojęcia podstawowe Metody Elementów Brzegowych</b>         | <b>13</b> |
| 2.1 Metoda Elementów Brzegowych . . . . .                       | 13        |
| 2.1.1 Równanie bazowe i podział obiektu na elementy brzegowe    | 15        |
| 2.1.2 Całkowanie numeryczne . . . . .                           | 20        |
| 2.1.3 Osobliwości . . . . .                                     | 20        |
| 2.2 Zgadnienie proste i odwrotne . . . . .                      | 23        |
| 2.2.1 Rozwiązanie zadania prostego . . . . .                    | 24        |
| 2.2.2 Rozwiązanie zadania odwrotnego . . . . .                  | 25        |
| <b>3 Elementy Brzegowe Nieskończone — obiekty dwuwymiarowe</b>  | <b>28</b> |
| 3.1 Klasyfikacja elementów nieskończonych . . . . .             | 28        |
| 3.2 Elementy Brzegowe Nieskończone z funkcjami zaniku . . . . . | 29        |
| 3.2.1 Funkcje zaniku . . . . .                                  | 29        |
| 3.2.2 Całkowanie numeryczne . . . . .                           | 31        |
| 3.2.3 Zmodyfikowane równanie całkowo-brzegowe . . . . .         | 33        |
| 3.2.4 Osobliwości . . . . .                                     | 36        |
| 3.3 Elementy brzegowe nieskończone odwzorowane . . . . .        | 37        |
| 3.4 Przykład obliczeniowy . . . . .                             | 40        |
| 3.5 Dyskusja wyników . . . . .                                  | 42        |

|          |                                                                                              |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Elementy Brzegowe Nieskończone — obiekty trójwymiarowe</b>                                | <b>49</b>  |
| 4.1      | Elementy Brzegowe Nieskończone z funkcjami zaniku . . . . .                                  | 49         |
| 4.1.1    | Funkcje zaniku . . . . .                                                                     | 49         |
| 4.1.2    | Jakobian . . . . .                                                                           | 60         |
| 4.1.3    | Całkowanie numeryczne . . . . .                                                              | 63         |
| 4.2      | Elementy brzegowe nieskończone odwzorowane . . . . .                                         | 70         |
| 4.3      | Przykład obliczeniowy - nieskończony tunel . . . . .                                         | 78         |
| 4.4      | Przykład obliczeniowy - model piersi . . . . .                                               | 80         |
| 4.5      | Dyskusja Wyników . . . . .                                                                   | 85         |
| <b>5</b> | <b>Środowiska niejednorodne</b>                                                              | <b>88</b>  |
| 5.1      | Wprowadzenie . . . . .                                                                       | 88         |
| 5.2      | Równanie Bazowe MEB i funkcja Greena dla środowisk z nie-<br>jednorodnością ciągłą . . . . . | 89         |
| 5.3      | Współczynniki równania bazowego dla środowiska z niejedno-<br>rodnością ciągłą . . . . .     | 92         |
| 5.3.1    | Obiekty dwuwymiarowe . . . . .                                                               | 92         |
| 5.3.2    | Obiekty trójwymiarowe . . . . .                                                              | 93         |
| <b>6</b> | <b>Analiza rozkładu zawilgocenia muru</b>                                                    | <b>95</b>  |
|          | Wprowadzenie . . . . .                                                                       | 95         |
| 6.1      | Opis obiektu i założenia wstępne . . . . .                                                   | 96         |
| 6.2      | Pomiary . . . . .                                                                            | 97         |
| 6.2.1    | Wyniki pomiarów uzyskane metodą suszarkowo-wagową . . . . .                                  | 97         |
| 6.2.2    | Zastosowanie tomografii rezystancyjnej z użyciem MEB<br>i elementów standardowych . . . . .  | 98         |
| 6.3      | Dyskusja wyników . . . . .                                                                   | 102        |
| <b>7</b> | <b>Podsumowanie</b>                                                                          | <b>106</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                                                          | <b>109</b> |
|          | <b>Spis rysunków</b>                                                                         | <b>119</b> |
|          | <b>Spis tablic</b>                                                                           | <b>124</b> |

# Wykaz ważniejszych oznaczeń

$\Phi$  – dowolna funkcja potencjalna (potencjał elektryczny [V] w Elektrostatyce, gęstość fotonów w przypadku Dyfuzyjnej Tomografii Optycznej).

$q$  – pochodna normalna  $\Phi \left( \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right)$ .

$\mathbf{n}$  – wektor normalny do krzywej lub powierzchni.

$G$  – funkcja Greena.

$\delta$  – funkcja delty Diraca.

$\mathbf{r}$  – wektor położenia punktu obserwacji.

$\mathbf{r}'$  – wektor położenia punktu źródła.

$R$  – odległość pomiędzy punktem obserwacji a punktem źródła.

$x, y, z$  – współrzędne kartezjańskie.

$\Omega$  – rozważany obszar.

$\Gamma S$  – krawędź lub powierzchnia rozważanego obszaru  $\Omega$ .

$\xi \eta \zeta$  – współrzędne lokalne.

$\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2$  – współrzędne lokalne, oznaczenia przyjęte w procesie regularyzacji (rozdział 4.1.3).

$N_i, M_i$  – bazowe funkcje interpolacji dla  $i$ -tego węzła.

$J(\xi)$  – jacobian przekształcenia.

$[A], [B]$  – odpowiednio macierze zawierające całki z pochodną normalną funkcji Greena i samą funkcję Greena.

---

$w_i$  – funkcja wagi dla kwadratur: Gaussa, Gaussa –Legendrea, Gaussa – Laguerra i zmodyfikowanych kwadratur Gaussa).

$L$  – długość elementu brzegowego.

$c(\mathbf{r})$  – współczynnik w równaniu całkowo-brzegowym.

$k$  – liczba falowa [ $cm^{-1}$ ].

$D$  – współczynnik dyfuzji [cm].

$i = \sqrt{-1}$  .

$\omega$  – pulsacja [ $rad/s$ ].

$f$  – częstotliwość [1/s].

$\gamma$  – konduktywność [ $1/(\Omega m)$ ].

$c$  – prędkość światła [mm/ps].

$\mu_a \Sigma$  – współczynnik absorpcji (pochłaniania światła) [ $mm^{-1}$ ].

$\mu_s$  – współczynnik rozpraszania światła [ $mm^{-1}$ ].

$\mu_s'$  – zredukowany współczynnik rozpraszania [ $mm^{-1}$ ].

$\alpha$  – współczynnik zależny od współczynnika załamania światła.

# Wstęp

Strona teoretyczna niniejszej pracy dotyczy elementów brzegowych nieskończonych (ang. Infinite Boundary Elements - IBE) jedno i dwuwymiarowych stosowanych do badań obiektów odpowiednio dwu i trój wymiarowych oraz metod ich wprowadzenia do Metody Elementów Brzegowych (MEB, ang. Boundary Element Method - BEM). Strona praktyczna wiąże się z zastosowaniem wzbogaconej o elementy nieskończone MEB do zagadnień tomografii impedancyjnej i optycznej odpowiednio do poszukiwania rozkładu zawilgoceń murów i przesiewowego wykrywania nowotworów piersi. Opracowane elementy brzegowe nieskończone zostały wprowadzone do powstałego autorskiego oprogramowania i użyte do rozwiązywania zadania prostego (analizy) i odwrotnego (tomografii) wspomnianych praktycznych zastosowań. Zawilgocony mur stanowi środowisko niejednorodne. Z tego względu niezbędne było rozszerzenie pracy o omówienie zagadnień obliczeń Metodą Elementów Brzegowych dokonywanych w środowiskach z niejednorodnością ciągłą.

Praca obejmuje siedem rozdziałów.

W rozdziale pierwszym wyjaśniono na ogólnym poglądowym przykładzie przyczyny i sens zainteresowania elementami nieskończonymi i Metodą Elementów Brzegowych. Dokonano przeglądu literatury w zakresie opracowań dotyczących elementów nieskończonych, środowisk niejednorodnych i ich zastosowania w Metodzie Elementów Brzegowych w Polsce i na świecie. Na końcu tego rozdziału przedstawiono cel i zakres pracy, oraz sformułowana została teza pracy.

Rozdział drugi zawiera omówienie podstawowych pojęć MEB, które w kolejnych rozdziałach będą modyfikowane bądź łączone z klasyczną MEB do postaci metody zhybrydyzowanej MEB zawierającej elementy standardowe i nieskończone.

W rozdziale trzecim opisane zostały jednowymiarowe elementy nieskoń-



czone z funkcjami zaniku i elementy nieskończone odwzorowane (z transformacją geometrii). Oba typy są używane do analizy obiektów dwuwymiarowych. Wyniki obliczeń odniesiono do rezultatów uzyskanych na podstawie rozwiązania analitycznego i otrzymanych z obliczeń standardową Metodą Elementów Brzegowych.

W rozdziale czwartym przedstawiono dwuwymiarowe elementy brzegowe nieskończone stosowane do analizy obiektów trójwymiarowych. Rozdział ten zawiera przykład który rozwijany będzie w rozdziale szóstym związany z tomografią impedancyjną i rzeczywistymi pomiarami. Przedstawiony jest również przykład skojarzony z dyfuzyjną tomografią optyczną stosowaną w medycynie.

W rozdziale piątym przedstawiono zagadnienia teoretyczne związane z analizą środowisk niejednorodnych w MEB.

Kolejny rozdział związany jest z obiektem rzeczywistym - badaniami zawilgocenia muru. Wyniki obliczeń wykorzystujących pomiary z tomografu rezystancyjnego i MEB z elementami nieskończonymi zostały porównane z danymi pomiarowymi uzyskanymi metodą suszarkowo-wagową z odwiertów wykonanych w murze [37].

W rozdziale siódmym przedstawiono podsumowanie i dyskusję wyników. Wskazano również możliwości dalszego praktycznego zastosowania opracowanych elementów brzegowych nieskończonych. Przedstawiony został też wkład autora w omawianą dziedzinę wiedzy.

Wyniki przeprowadzonych badań przedstawione zostały w formie publikacji w materiałach konferencyjnych oraz w czasopismach.

Praca doktorska była częściowo finansowana z grantu promotorskiego: N N510 342334, "Elementy brzegowe nieskończone i ich zastosowanie w tomografii impedancyjnej i optycznej" oraz własnego N N519 1203 33 "Dyfuzyjna tomografia optyczna, metoda nieskończonych elementów brzegowych oraz zbiorów poziomicowych w zastosowaniu do nieinwazyjnej diagnostyki piersi w aspekcie zmian nowotworowych" ze środków na badania w latach 2008/2009.

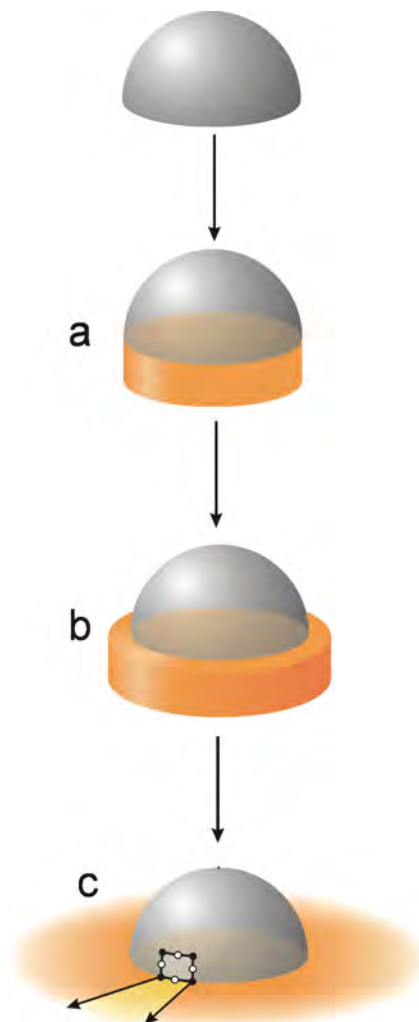
# Rozdział 1

## Wprowadzenie

W praktycznych zastosowaniach Metody Elementów Brzegowych często mamy do czynienia z obiektami o tzw. otwartym brzegu bądź z obiektami w których analizowane zjawisko rozciąga się poza badany obszar. W takich przypadkach najczęściej powiększa się siatkę elementów przyjmując w dużej ale skończonej odległości od interesującego nas obszaru sztuczne warunki brzegowe. Takie klasyczne podejście wiąże się ze zwiększeniem liczby elementów i wzrostem “kosztów” obliczeniowych. W przypadku gdy granica zaniku pola zostanie przyjęta zbyt blisko pojawiają się dodatkowe błędy obliczeniowe. Dobór właściwej odległości zaniku opiera się więc głównie na doświadczeniu a generalnie odbywa się metodą balloningu [82, 81, 34] poprzez stopniowe rozszerzanie siatki elementów poza główny obszar poszukiwania rozwiązania. Alternatywnym rozwiązaniem jest zastosowanie elementów brzegowych nieskończonych jak to po raz pierwszy zasugerował Watson [92] analogicznie do elementów nieskończonych stosowanych w Metodzie Elementów Skończonych. Jest to bardzo efektywna metoda jako, że w Metodzie Elementów Brzegowych dyskretyzacji podlega generalnie jedynie powierzchnia obszarów a rozwiązanie podstawowe spełnia automatycznie warunki brzegowe w nieskończoności.

Dla przybliżenia zagadnienia przedstawimy przykład zastosowania elementów brzegowych nieskończonych w medycynie. Przykład dotyczy badań przesiewowych związanych z wczesnym wykrywaniem nowotworów piersi. Metoda Elementów Brzegowych jako mechanizm rozwiązania zadania prostego jest kluczowym elementem tomografu impedancyjnego lub optycznego, pozwalającym w zadaniu odwrotnym na określenie obrazu medycznego niedostępnej tkanki wnętrza piersi. W tej dziedzinie szczególne znaczenie ma możliwość zastoso-

wania MEB w badaniach nieinwazyjnych a dla naszych rozważań dodatkowo niemożliwości dokonania pomiarów lub trudnych do określenia warunków brzegowych na niektórych powierzchniach diagnozowanych narządów.



Rys. 1.1. Ewolucja uproszczonego modelu piersi, zorientowana na poprawę dokładności wyników i zwiększenie efektywności obliczeniowej

Uproszczony model piersi przedstawiony jest w postaci półsfery jak na rysunku 1.1. W praktyce na powierzchni półsfery umieszcza się elektrody pomiarowe (w przypadku tomografii impedancyjnej) lub źródła światła zintegrowane z detektorami zliczające kwanty światła (w przypadku dyfuzyjnej tomografii optycznej). Podstawa półsfery odpowiadająca granicy pomiędzy tkanką piersi i klatki piersiowej pacjentki nie jest jednak dostępna pomiarowo. Proste obcięcie siatki elementów brzegowych powoduje powstanie istotnych błędów u

podstawy. Klasyczne rozszerzenie siatki elementów w postaci dodania walca odpowiadającego fragmentowi klatki piersiowej wiąże się z eksperymentowaniem zarówno wielkością dodatkowego obszaru jak i jego kształtem. Widoczne jest to jako przypadki „a” i „b” przedstawione na środkowym poziomie rysunku 1.1. Poprzez zastosowanie elementów nieskończonych jak to jest zaprezentowane w postaci dolnego modelu z rysunku, unikamy problemów związanych z rozszerzeniem siatki oraz przyjęciem sztucznych warunków brzegowych. Dodatkowo należy zauważyć że powstały model jest otwarty u podstawy półsfery.

## 1.1 Wiadomości wstępne

Mówiąc o elementach nieskończonych w Metodzie Elementów Brzegowych należy odnieść się do samej MEB. Warto porównać ją też z innymi siostrzanymi metodami przybliżonego rozwiązania zagadnień, opisanych przez układy równań różniczkowych takimi jak Metoda Elementów Skończonych (MES, ang. Finite Element Method - FEM) [98, 100, 99, 16, 82] czy też Metoda Różnic Skończonych (MRS, ang. Finite Difference Method - FDM) [16]. Głównym konkurentem MEB jest MES której popularność jest jednocześnie dobrym wyjaśnieniem i prognostykiem celowości rozwijania MEB. Wachlarz zastosowań MES jest bardzo szeroki - od badań wytrzymałości konstrukcji w mechanice poprzez ich dynamikę i kinematykę maszyn, defektoskopię, po badania z zakresu przepływy płynów, ciepła i elektromagnetyzmu. Gama oprogramowania bazującego na MES jest równie szeroka. Spośród wielu pakietów pozwolę sobie wymienić przykładowo - komercyjne: Multiphysics firmy COMSOL, FLUX firmy Cedrat, Opera-3D firmy Vector Fields, ABAQUS - ABAQUS Inc., ANSYS - ANSYS, Inc. lub powstałe w ośrodkach akademickich programy takie jak rodzimy FAT (Field Analysis Translator) - Politechniki Warszawskiej [80] czy SONMAP (System Oprogramowania Numerycznych Metod Analizy Pól) Politechniki Szczecińskiej [34].

Różnice pomiędzy poszczególnymi metodami numerycznymi używanymi do rozwiązywania zagadnień polowych wskazują na ich obszary zastosowań. Porównując Metodę Elementów Brzegowych z Metodą Elementów Skończonych możemy powiedzieć, że:

Zaletami MEB są:

- Wymagana dyskretyzacja jedynie powierzchni obiektu. Skraca to czas przygotowywania danych co jest szczególnie istotne podczas rozwiązywania zagadnienia odwrotnego np. przy optymalizacji lub identyfikacji kształtu (tomografia - siatki dedykowane badanemu pacjentowi).
- Wysoka dokładność niezależnie od gradientu funkcji stanu. Rozwiązanie jest dokładne i ciągle wewnątrz analizowanego obszaru. Automatycznie wskazuje to na zastosowania w modelowaniu problemów o gwałtownie zmieniającym się gradiencie funkcji stanu.
- Możliwość skrócenia czasu obliczeń i mniejsze wymagania sprzętowe związane z mniejszą niż w MES liczbą analizowanych węzłów i elementów.
- Możliwość wyznaczania poszukiwanych wartości w podobszarze bez konieczności analizy całego wnętrza obiektu.
- Łatwiejsza analiza obszarów o otwartym brzegu.
- W zagadnieniach odwrotnych zwłaszcza optymalizacji kształtu, nie jest konieczne ponowne generowanie siatki elementów.

Do wad MEB należy zaliczyć:

- Bardziej skomplikowany aparat matematyczny niż w MES (wymagana jest znajomość rozwiązania podstawowego, operowanie na dużych, pełnych i niesymetrycznych układach równań algebraicznych, które są trudniejsze do numerycznego rozwiązania oraz bardziej skomplikowane całkowanie w MEB w tym konieczność liczenia osobliwości wpływających istotnie na dokładność rozwiązania [49]).
- Powstającą pełną niesymetryczną, nie dodatnio określoną i gorzej uwarunkowaną niż w MES macierz.
- W problemach, w których wymagana jest analiza wnętrza (równania Poissona, materiały niejednorodne) MEB traci najważniejszą zaletę - redukcję wymiaru o jeden.
- Problematiczne zastosowanie w warstwach cienkich. Modelowanie warstw cienkich wymaga specjalnego potraktowania.

- Zastosowanie ograniczone jest zasadniczo do problemów liniowych. Konieczna jest znajomość rozwiązania podstawowego a przykładowo niejednorodności wymagają znalezienia specjalnej funkcji Greena.
- Podobnie specjalnego podejścia wymagają zagadnienia z symetrią osiową.

Metody te są nie tylko wzajemnie konkurencyjne ale również uzupełniające się w różnych zastosowaniach. Warto też wspomnieć, że są one również łączone w ramach jednolitych pakietów narzędziowo-obliczeniowych.

Ilość pakietów bazujących na MEB jest znacznie skromniejsza. Z programów MEB wymienić można przykładowo rodzimą bibliotekę BEMLIB realizowaną na licencji GNU [85, 93], rozwijane akademickie oprogramowanie MEB [77]: BEAN (Boundary Element Analysis) - Prof. Glaucio Paulino, University of Illinois at Urbana-Champaign, BEFE Boundary and Finite Element Computer Program: Prof. Gernot Beer, Technical University Graz, Austria.

W żadnym ze znanych autorowi komercyjnych programów MEB nie ma elementów nieskończonych. Dopiero najnowsza wersja pakietu MES COMSOL-Multiphysics [19] została wzbogacona o nieskończone elementy skończone. Prawdopodobnie częściowo tłumaczyć to należy najpopularniejszymi zastosowaniami MES i MEB najczęściej odnoszącymi się do mechaniki i rzadko wymagającymi analizy obszarów nieograniczonych. Inaczej jednak przedstawia się sytuacja, w której analizujemy zjawiska elektromagnetyczne, geologiczne, akustyczne czy generalnie falowe. Dotyczy to również zagadnień tomografii impedancyjnej i optycznej w technice i medycynie. Powstające pełne niesymetryczne, nie dodatnio określone i gorzej uwarunkowane niż w MES macierze, skutkują wyższymi wymaganiami dotyczącymi zasobów i wydajności sprzętu obliczeniowego. Najwyraźniej widoczne jest to w przypadku obiektów o skomplikowanych kształtach, często wielowarstwowych z jakimi mamy do czynienia np. w dziedzinie medycyny. Bardzo porządne są wówczas możliwie najszybsze procesory i pamięci rzędu gigabajtów. Mając na względzie stale rosnącą wydajność komputerów i spadek cen pamięci można powiedzieć, że wydajność komputerów i wymagania metody zbliżyły się obecnie do rozsądnych granic. Z tego powodu można spodziewać się rosnącej popularności zastosowań MEB. Jak się więc wydaje wysiłek włożony w rozwój czy też praktyczne zastosowania Metody Elementów Brzegowych jest uzasadniony i warty poświęcenia czasu i uwagi.

## 1.2 Stan badań nad elementami brzegowymi nieskończonymi na podstawie literatury przedmiotu

Pierwsze opracowania elementów nieskończonych wiążą się z pracami R.L. Unglessa [91] i D.L. Andersona z roku 1973 odnoszącymi się do Metody Elementów Skończonych. Pierwsze publikacje to praca C.O. Zienkiewicza i P. Bettessa [101] z roku 1975 i ponownie R.L. Unglessa i D.L. Andersona [6] z roku 1977. Na gruncie Metody Elementów Brzegowych do rozwoju elementów nieskończonych przyczyniają się prace J.O. Watsona i G. Beera [92, 11, 10] z lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Pierwsze opracowania dotyczą elementów nieskończonych z tzw. funkcjami zaniku (ang. decay function infinite elements). Po nich pojawiają się tzw. elementy nieskończone odwzorowane (ang. mapped infinite elements) [101, 92, 14, 15, 50]. Najczęstsze opracowania związane z elementami brzegowymi nieskończonymi dotyczą geologii - prace [10, 11, 20, 33, 50, 92] i akustyki - praca [96] gdzie propagacja analizowanych zjawisk mierzona jest często w kilometrach. Szczegółowe opracowanie elementów nieskończonych w MES stanowi książka P. Bettessa [15] i monografia St. Gratkowskiego [34]. Warto też zwrócić uwagę na międzynarodowe patenty St. Gratkowskiego związane z elementami nieskończonymi w MES [35].

Opracowania dotyczące elementów brzegowych nieskończonych mają natomiast charakter rozproszonych artykułów [10, 11, 20, 33, 92, 101, 79, 1, 46, 87, 32, 9] a właśnie w MEB ich implementacja jest szczególnie korzystna jak to wskazuje przytoczone wcześniej porównanie MES i MEB. Wydaje się więc, że warto pokusić się o całościowe ujęcie tematyki elementów nieskończonych w MEB do czego przyczynę ma w zamierzeniu dać niniejsza praca.

Omawiając całościowo literaturę, na której bazuje niniejsza dysertacja za konieczne uznaje autor wskazanie prekursorskich prac C.O. Zienkiewicza [98, 100, 99] dotyczących MES, C.A. Brebbii [17] - MEB, pierwszych zastosowań MES do zagadnień elektromagnetycznych A.M. Winsłowa [95] i pierwszych w Polsce prac w tej dziedzinie powstałych na Politechnice Warszawskiej [16]. W niniejszej dysertacji autor odwoływać się będzie również do prac Prof. Jana Sikory i zespołu jego doktorantów [80, 81, 82, 84, 83, 12, 27, 26, 58, 42, 86]. Za główną pracę dotyczącą środowisk niejednorodnych w Metodzie Elemen-

tów Brzegowych, na której oparto obliczenia w rozdziałach piątym i szóstym przyjął autor monografie E. Kurgana [44]. Artykuły związane z tą tematyką podobnie jak i inne dotyczące przykładowo funkcji Greena czy liczenia osobliwości występować będą sukcesywnie w stosownych rozdziałach pracy.

### 1.3 Cel, teza pracy i przyjęte ograniczenia

**Cel:** Opracowanie jednolitych podstaw teoretycznych dla elementów brzegowych nieskończonych z transformacją geometrii i z funkcjami zaniku w przestrzeni 2D i 3D oraz ich implementacja w zadaniach prostych i odwrotnych (tomografia).

Element nowości:

Implementacja różnych typów nieskończonych elementów brzegowych stopnia drugiego w zadaniach prostych (analizy) i zadaniach odwrotnych pola (tomografii impedancyjnej i optycznej).

Na podstawie przeprowadzonej analizy problematyki autor stawia następującą **tezę**, którą stara się uzasadnić:

**Zastosowanie elementów brzegowych nieskończonych pozwala na efektywne modelowanie zagadnień polowych, bez zaburzenia jednolitości Metody Elementów Brzegowych, zapewniając zadowalającą dokładność przy minimalnych „kosztach” obliczeniowych co jest szczególnie istotne w zagadnieniach odwrotnych.**

**Przyjęte ograniczenia:**

Ponieważ funkcje interpolacyjne w elementach nieskończonych wymagają zależności rzędu wyższego niż pierwszy dla funkcji wielomianowych lub złożenia z zależnościami wykładniczymi, wykorzystano elementy rzędu drugiego, ewentualnie w przypadku elementów nieskończonych z funkcjami zaniku, rzędu pierwszego. Dotyczy to zarówno zagadnień dwuwymiarowych jak i trójwymiarowych. W rozważaniach teoretycznych i przykładach obliczeniowych 3D nie stosowano popularnych elementów trójkątnych, ponieważ z zasady elementy nieskończone bazują na elementach czworokątnych. Omówienie procesu trans-



formacji elementu standardowego do nieskończonego wymaga odniesienia się do wyjściowego elementu czworokątnego. Natomiast wykorzystanie jako elementów standardowych elementów innych niż czworokątne nie wnosi niczego nowego do przedmiotu rozważań, a teoria takich elementów jest dobrze omówiona w literaturze [8, 5, 81, 82, 80, 16, 39, 47].

W zagadnieniach trójwymiarowych podstawowym ograniczeniem przyjętym w pracy będzie więc zawężenie rozważań do elementów nieskończonych bazujących na rozwinięciu standardowych czworokątnych, ośmiowęzłowych izoparametrycznych elementów brzegowych drugiego rzędu.

## Rozdział 2

# Pojęcia podstawowe Metody Elementów Brzegowych

### 2.1 Metoda Elementów Brzegowych

Niniejszy rozdział prezentuje generalnie znaną z literatury [81, 16, 80, 39, 47, 40, 5, 8, 17, 96, 73] standardową Metodę Elementów Brzegowych. Autor zdecydował się na krótkie naszkicowanie metody i zacytowanie poszczególnych jej kroków ponieważ nie istnieją obiekty których modele obliczeniowe składałyby się wyłącznie z elementów nieskończonych. Powstałe własne oprogramowanie zawiera zarówno elementy standardowe jak i nieskończone. Elementy brzegowe nieskończone bazują na modyfikacji ośmiowęzłowych czworokątnych izoparametrycznych elementów brzegowych drugiego rzędu. Teoria takich elementów nie jest zbyt popularna. W szczególności dotyczy to liczenia osobliwości. Proces transformacji elementów brzegowych standardowych w nieskończone wymaga odniesień do wspomnianych elementów czworokątnych i przedstawienia następujących po tym implikacji dla całego schematu obliczeniowego MEB. Wyodrębnienie tego rozdziału pozwala na łatwiejsze wielokrotne odwoływanie się do podstawowych zależności dostosowywanych do elementów nieskończonych w kolejnych rozdziałach. **Istotne również wydaje się ujęcie w rozprawie przynajmniej minimalnego zakresu "dokumentacji" łączącej dysertację z powstałym oprogramowaniem.**

Metoda elementów brzegowych jest jednym z przybliżonych sposobów rozwiązywania zagadnień pola elektromagnetycznego obok metody różnic skoń-

czonych, metody elementów skończonych, metod parametrycznych czy też metod wariacyjnych. Ujmując ideę MEB w skrócie poszczególne kroki metody wiążą się z:

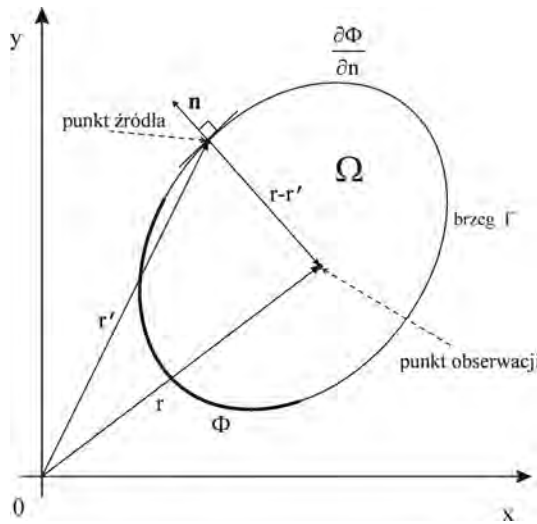
- Zastąpieniem układu równań różniczkowych równaniem całkowo-brzegowym i zadaniem stosownych warunków brzegowych. Wiąże się to z wyznaczeniem tzw. rozwiązania podstawowego (funkcją Greena). Jądra równania całkowo-brzegowego są równe funkcji Greena oraz jej pochodnej normalnej na brzegu. Dla typowych zagadnień funkcja ta może być znana. Generalnie jednak, tak jak w przypadku środowisk niejednorodnych omawianych w rozdziale szóstym rozwiązanie podstawowe jest przedmiotem złożonego procesu poszukiwań. Nie zawsze jest to proces uwieńczony sukcesem - przykładowo równanie Boltzmanna stosowane w Dyfuzyjnej Tomografii Optycznej nie posiada rozwiązania fundamentalnego [83].
- Podziałem analizowanego obszaru na siatkę elementów. W MEB dyskretyzacji podlega jedynie linia lub powierzchnia brzegowa obiektu ewentualnie powierzchnie rozdzielające jego warstwy.
- Określeniem i wyborem właściwych bazowych funkcji interpolacji. Równania całkowo-brzegowe rozwiązywane są dla elementów, zdyskretyzowanego modelu poprzez aproksymację funkcjami brzegowymi w węzłach elementów i funkcjami interpolacyjnymi. Ilość równań do rozwiązania zależy od gęstości dyskretyzacji obszaru i wyboru rzędu elementu aproksymującego. Dla elementów zerowego rzędu liczba równań odpowiada ilości elementów, a dla elementów pierwszego lub drugiego rzędu równa jest liczbie węzłów.
- Obliczenia dla danego elementu mogą być dokonywane symbolicznie jeżeli jesteśmy w stanie określić właściwe zależności analitycznie. Dla bardziej złożonych zależności i skomplikowanych kształtów badanego obiektu wykorzystuje się całkowanie numeryczne.
- Obliczeniu rozwiązania na brzegu obszaru.
- Przeprowadzeniem obliczeń dodatkowych związanych z wyznaczeniem wartości zmiennych stanu we wnętrzu obszaru.

### 2.1.1 Równanie bazowe i podział obiektu na elementy brzegowe

Dla zaprezentowania Metody Elementów Brzegowych przyjmijmy za punkt wyjściowy zagadnienie Dirichleta. Równanie różniczkowe dla tego przypadku i obiektu dwu-wymiarowego może być zapisane w postaci (2.1):

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial y^2}, \quad (2.1)$$

gdzie  $\Phi(\mathbf{r})$  odpowiada dowolnej funkcji potencjału (np. potencjałowi elektrycznemu w elektrostatyce) a  $x$  i  $y$  stanowią współrzędne w układzie kartezjańskim. Rozważając obszar poszukiwania rozwiązania jak na rysunku 2.1 określamy ustalony punkt wewnętrzny  $\mathbf{r}$  tzw. punkt obserwacji w którym wyznaczamy (obserwujemy) wartość  $\Phi$ . Zmiennymi całkowania w zależności (2.2) są współrzędne punktu  $\mathbf{r}'$  który przebiega obszar działania pola tzn. obliczany jest całkowity wpływ każdego z punktów  $\mathbf{r}'$  rozmieszczonych na długościach kolejnych elementów. Dlatego też punkty  $\mathbf{r}'$  nazywane są punktami źródła (źródła pola). Przejście z postaci różniczkowej do całkowo-brzegowej (2.2) zrealizo-



Rys. 2.1. Obszar poszukiwania rozwiązania we współrzędnych lokalnych

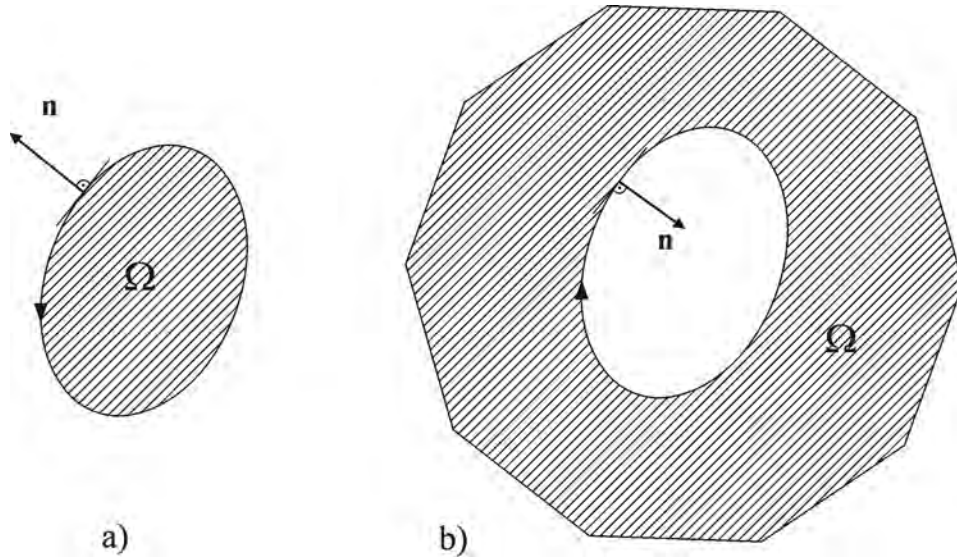
wane jest poprzez wykorzystanie funkcji Greena o znanej postaci (2.3)

$$c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') d\Gamma = \int_{\Gamma} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma, \quad (2.2)$$

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}, \quad (2.3)$$

gdzie  $x' y'$  są współrzędnymi kartezjańskimi punktu obserwacji a  $x y$  punktu źródła.

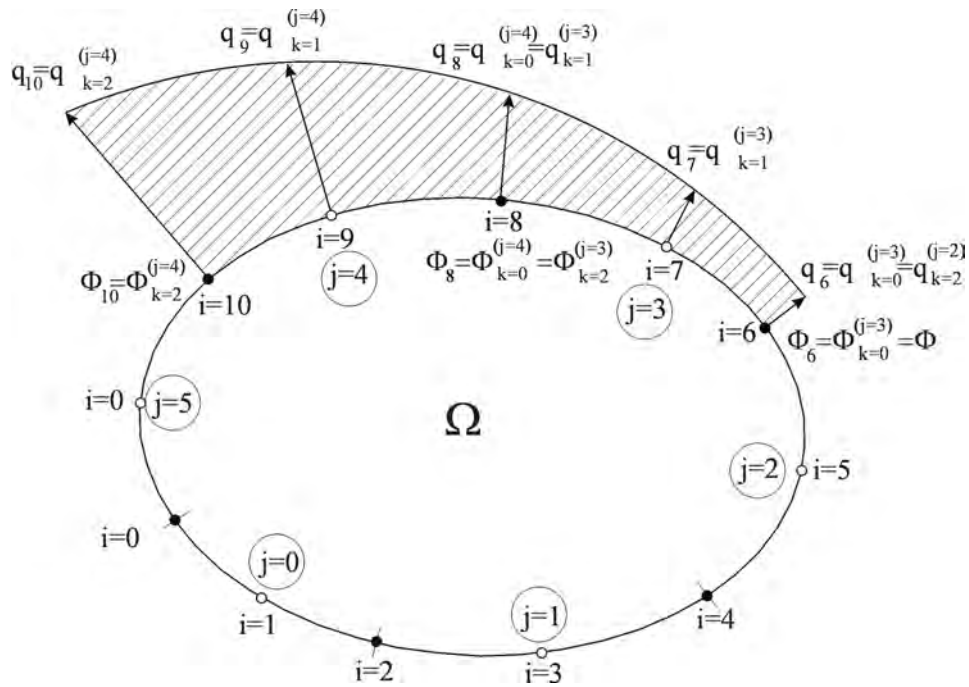
W MEB kierunek numerowania węzłów w elemencie decyduje o zwrocie wektora składowej normalnej. Przy numerowaniu węzłów w elemencie przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, tak jak na rysunku 2.2 a, opisany zostanie obszar wewnątrz aproksymowanej krawędzi. W przypadku kierunku zgodnego z ruchem wskazówek zegara analizowany jest obszar na zewnątrz krawędzi co przedstawiono na rysunku 2.2 b. Z uwagi na dokonany w dalszej części pracy



Rys. 2.2. Kierunki numerowania elementu brzegowego: a) zagadnienie wewnętrzne b) zagadnienie zewnętrzne

wyбір typu elementów obiekt dwuwymiarowy podzielimy na elementy drugiego rzędu jak na rysunku 2.3

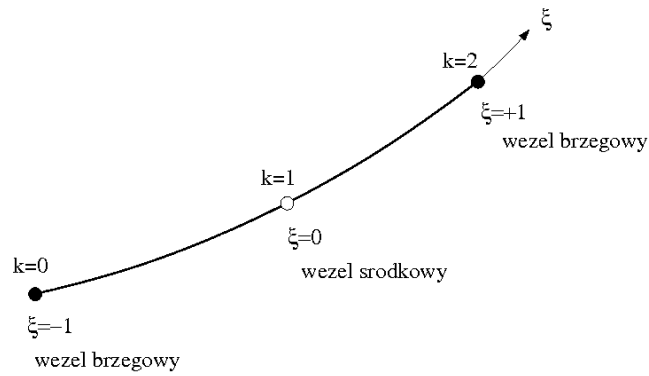
Generalnie standardowym krokiem MEB jest dyskretyzacja analizowanego obszaru. Czasem możliwe jest określenie zależności analitycznych dla części podobszarów lub części elementów. Wówczas korzystnie jest połączyć obliczenia numeryczne i analityczne. Przykładem tego typu opracowań może być praca [33]. Obliczenia dla poszczególnych elementów siatki prowadzone są w lokalnych układach współrzędnych w których standardowo przyjmuje się za środek układu środek elementu. Rzeczywiste współrzędne punktów krańcowych transformowane są do wartości odpowiednio  $-1$  i  $+1$ . Pojedynczy element



Rys. 2.3. Dyskretyzacja obszaru elementami 2-go rzędu [81]

krzywoliniowy i jego lokalny układ współrzędnych przedstawia rysunek 2.4.

Bazowe funkcje interpolacji  $N_k(\xi)$  skojarzone z każdym z węzłów transformu-



Rys. 2.4. Izoparametryczny element brzegowy drugiego rzędu

jące współrzędne globalne do lokalnych zgodnie z zależnością:

$$\begin{aligned}
 x(\xi) &= \sum_{k=0}^2 N_k(\xi) x_k = N_0(\xi) x_0 + N_1(\xi) x_1 + N_2(\xi) x_2, \\
 y(\xi) &= \sum_{k=0}^2 N_k(\xi) y_k = N_0(\xi) y_0 + N_1(\xi) y_1 + N_2(\xi) y_2,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

wyrażają się:

$$\begin{aligned} N_0(\xi) &= -\frac{\xi}{2}(1 - \xi) = 0.5\xi(\xi - 1), \\ N_1(\xi) &= (1 + \xi)(1 - \xi) = 1 - \xi^2, \\ N_2(\xi) &= +\frac{\xi}{2}(1 + \xi) = 0.5\xi(\xi + 1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cechą bazowych funkcji interpolacji jest to, że przyjmują one wartość  $N_k(\xi) = 1$  we własnym węźle i  $N_k(\xi) = 0$  w pozostałych węzłach. Stosując elementy brzegowe izoparametryczne używamy tych samych bazowych funkcji interpolacji (2.5) zarówno do transformacji geometrii jak i dla przeliczenia wielkości fizycznych:

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^2 N_k(\xi)\Phi_k = N_0(\xi)\Phi_0 + N_1(\xi)\Phi_1 + N_2(\xi)\Phi_2, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial n} = \sum_{k=0}^2 N_k(\xi) \frac{\partial\Phi_k}{\partial n} = N_0(\xi) \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} + N_1(\xi) \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} + N_2(\xi) \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}. \quad (2.7)$$

Rysunek 2.5 przedstawia graficznie bazowe funkcje interpolacji dla standardowych elementów izoparametrycznych drugiego rzędu (2.5).

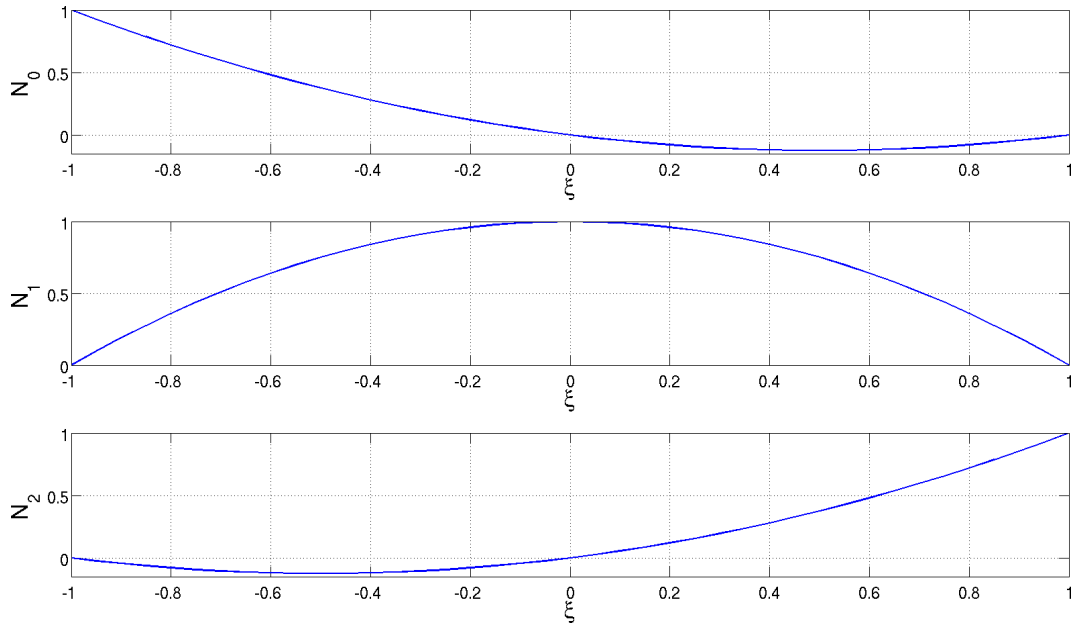
Wprowadzając powyższe przekształcenia obszaru i współrzędnych równanie całkowo-brzegowe (2.2) przyjmie postać (2.8):

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})\Phi_i(\mathbf{r}) &+ \sum_{j=0}^{M-1} \int_{-1}^{+1} \sum_{k=0}^1 \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}') N_k(\xi) \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \int_{-1}^{+1} \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}')}{\partial n} N_k(\xi) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie  $M$  – jest całkowitą liczbą elementów a  $J(\xi)$  jakobianem przekształcenia globalnego kartezjańskiego układu współrzędnych  $x, y$  do współrzędnych lokalnych  $\xi$ .

Transformacja lokalnego układu współrzędnych do granic  $<-1;+1>$  umożliwia zastosowanie całkowania numerycznego wykorzystującego kwadraturę Gaussa [2, 15, 81]. Jakobian tego przekształcenia (równanie (2.8)) przedstawia się następująco:

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2}. \quad (2.9)$$

Rys. 2.5. Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji  $N_0$ ,  $N_1$  i  $N_2$ 

Ponieważ wartości funkcji stanu w węzłach są stałe równanie (2.8) można zapisać jako (2.10):

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})\Phi_i(\mathbf{r}) + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}') \int_{-1}^{+1} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} N_k(\xi) J(\xi) d\xi = \\ = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}')}{\partial n} \int_{-1}^{+1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_k(\xi) J(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.10)$$

oznaczając:

$$a_{i,k}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} N_k(\xi) J(\xi) d\xi, \quad (2.11)$$

$$b_{i,k}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-1}^{+1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_k(\xi) J(\xi) d\xi. \quad (2.12)$$

Podstawiając  $a_{i,k}^{(j)}$  i  $b_{i,k}^{(j)}$  do równania (2.10) otrzymujemy równanie o postaci:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})\Phi_i(\mathbf{r}) + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 a_{i,k}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}') = \\ = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 b_{i,k}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}')}{\partial n}. \end{aligned} \quad (2.13)$$



Dla gładkiego brzegu funkcje  $a_{i,k}^{(j)}$  i  $b_{i,k}^{(j)}$  zebrane jako elementy macierzy  $A_{i,j}$  i  $B_{i,j}$  pozwalają na utworzenie układu równań liniowych, którego postać macierzowa przedstawia się następująco:

$$[\mathbf{A}] [\Phi] = [\mathbf{B}] \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right]. \quad (2.14)$$

W równaniu tym macierze  $[\mathbf{A}]$  i  $[\mathbf{B}]$  odwzorowują odpowiednio całki pochodnej normalnej  $\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) / \partial \mathbf{n}$  i  $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ . Człon  $c(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r})$  uwzględniony jest w macierzy  $[\mathbf{A}]$ . W praktyce elementy wektora  $[\Phi]$  oraz wektora  $\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right]$  stanowią zbiór danych znanych z określonych lub pomierzonych warunków brzegowych wraz z wartościami poszukiwanymi. Dla danej klasy zagadnień w klasycznej Metodzie Elementów Brzegowych funkcja Greena (rozwiązanie podstawowe)  $G$  przykładowo z równania (2.2) jest znana lub jak to zostanie przedstawione w rozdziale 5 będzie procesem odrębnego poszukiwania. Należy tu nadmienić, że w przypadkach gdy nie istnieje rozwiązanie podstawowe np. równania Boltzmana, F. M. E. Duddeck proponuje podejście oparte na teorii dystrybucji tzw. Fourier BEM [24, 23].

### 2.1.2 Całkowanie numeryczne

Ilustrację całkowania numerycznego dla elementów drugiego rzędu przedstawiono na rysunku 2.6. Punkt obserwacji umieszczony jest w węźle jedenastym (licząc od 0,  $i = 11$ ) a całkowany jest element o numerze  $j = 2$ .

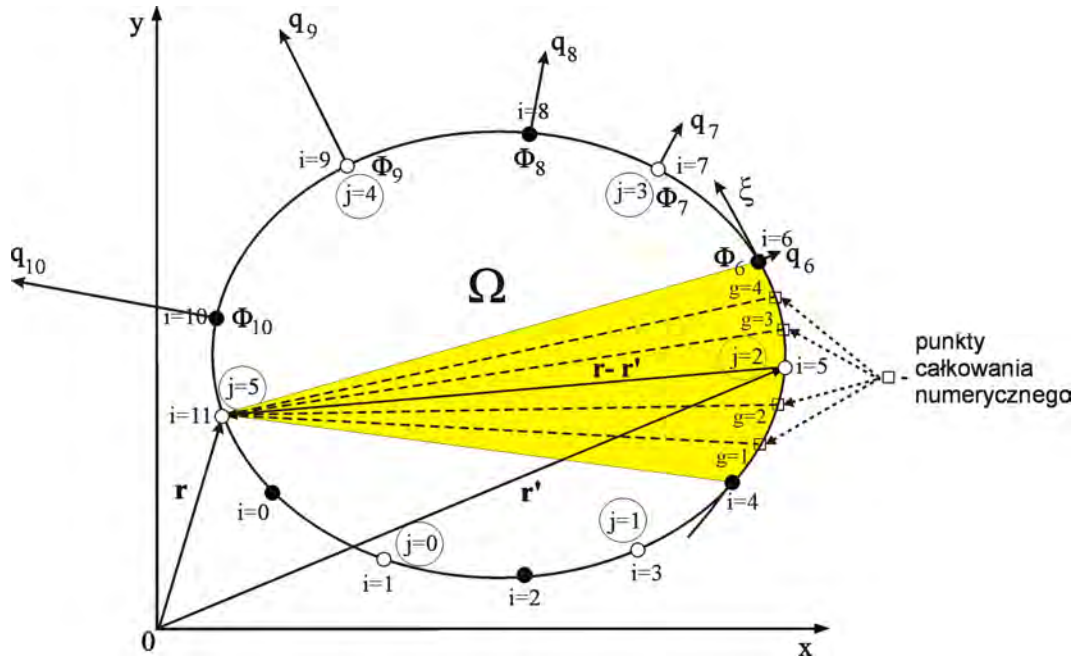
Analiza obiektów metodą elementów brzegowych wymaga obliczenia całek funkcji na brzegu lub powierzchni elementów. W przypadku obiektów dwuwymiarowych całkowanie numeryczne można przedstawić następująco:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) w_k. \quad (2.15)$$

Wartości punktów całkowania Gaussa i współczynników wag są opisane w literaturze np. [5]. Przykładowo najczęściej wykorzystywane wartości przedstawia tabela 2.1.

### 2.1.3 Osobliwości

Całkowanie numeryczne daje dokładne wyniki za wyjątkiem sytuacji kiedy punkt obserwacji i punkt źródła pokrywają się lub znajdują się bardzo blisko



Rys. 2.6. Całkowanie numeryczne dla elementów brzegowych 2-go rzędu [81]

siebie. Osobliwości związane z wzajemną bliskością tych punktów wymagają specjalnego podejścia. Poniżej omówiona zostanie zastosowana w obliczeniach metoda regularyzacji [5, 81].

W przypadku, gdy punkt źródła pokrywa się z punktem obserwacji tj.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  pojawiają się osobliwości. Widać to wyraźnie w równaniu (2.3), gdzie  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ . Całka tej postaci może być liczona z wykorzystaniem specjalnej logarytmicznej kwadratury Gaussa [81, 39, 44, 47]:

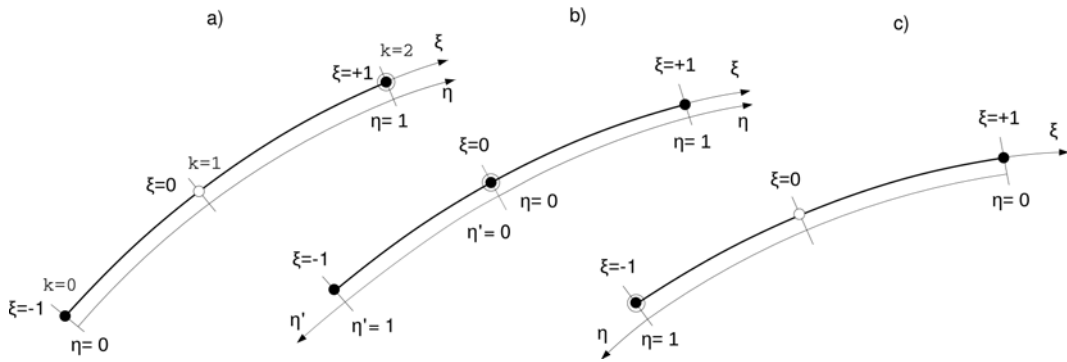
$$\int_0^1 f(\eta) \ln \frac{1}{\eta} d\eta = \sum_{i=0}^{gl-1} w_i f(\eta_i), \quad (2.16)$$

gdzie  $gl$  jest liczbą punktów całkowania logarytmicznej kwadratury Gaussa.

Przykładowe wartości punktów całkowania jedno-wymiarowej logarytmicznej kwadratury Gaussa i współczynników wag [5] przedstawia tabela 2.2.

Odległość  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$  odpowiednio dla węzłów  $i=0,1,2$  liczymy ponownie wykorzystując bazowe funkcje interpolacji:

$$\begin{aligned} R^2 &= [x'(\xi) - x_i]^2 + [y'(\xi) - y_i]^2 = \\ &= [N_0(\xi)x_0 + N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 - x_i]^2 + \end{aligned} \quad (2.17)$$



Rys. 2.7. Transformacja elementu zawierającego osobliwości z układu współrzędnych  $\xi \langle -1, +1 \rangle$  do  $\eta \langle 0, 1 \rangle$  [81]. a) gdy  $r$  znajduje się w pierwszym węźle, b) gdy  $r$  znajduje się w drugim węźle - wówczas element brzegowy dzielimy na dwa subelementy, c) gdy  $r$  znajduje się w trzecim węźle

$$+ [N_0(\xi)y_0 + N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 - y_i]^2.$$

**Punkt  $r$  znajduje się w węźle 0 elementu:**

$$\begin{aligned} R^2 &= (x'(\xi) - x_0)^2 + (y'(\xi) - y_0)^2 = \\ &= (N_0(\xi)x_0 + N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 - x_0)^2 + \\ &+ (N_0(\xi)y_0 + N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 - y_0)^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdzie bazowe funkcje interpolacji:  $N_0(\xi)$ ,  $N_1(\xi)$  i  $N_2(\xi)$  są zgodne z zależnościami (3.22).

Zatem:

$$\begin{aligned} R^2 &= \left[ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)x_0 + (1+\xi)(1-\xi)x_1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)x_2 - x_0 \right]^2 + \\ &+ \left[ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)y_0 + (1+\xi)(1-\xi)y_1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)y_2 - y_0 \right]^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Punkt  $r$  znajduje się w węźle 1 elementu:**

$$\begin{aligned} R^2 &= \left[ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)x_0 + (1+\xi)(1-\xi)x_1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)x_2 - x_1 \right]^2 + \\ &+ \left[ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)y_0 + (1+\xi)(1-\xi)y_1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)y_2 - y_1 \right]^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Punkt  $r$  znajduje się w węźle 2 elementu:**

$$R^2 = \left[ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)x_0 + (1+\xi)(1-\xi)x_1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)x_2 - x_2 \right]^2 +$$

$$+ \left[ -\frac{\xi}{2}(1-\xi)y_0 + (1+\xi)(1-\xi)y_1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)y_2 - y_2 \right]^2. \quad (2.21)$$

Dodatkowa liniowa transformacja z układu współrzędnych  $\xi$  do  $\eta$  przedstawia się następująco:

- a) gdy  $r$  znajduje się w pierwszym węźle:  $\eta = 0.5(1 + \xi)$ ,
- b) gdy  $r$  znajduje się w drugim węźle:  $\eta = -\xi$  dla  $-1 < \xi < 0$  i  $\eta = \xi$  dla  $0 < \xi < 1$ ,
- c) gdy  $r$  znajduje się w trzecim węźle:  $\eta = 0.5(1 - \xi)$ .

Całkowanie numeryczne odbywa się po współrzędnej  $\eta$  (zależność 2.16 i tabela 2.2). Transformację tą należy uwzględnić przy wyznaczaniu Jakobianu (2.9), w którym pochodne cząstkowe stają się pochodnymi funkcji złożonej:

$$\begin{aligned} J(\eta) = \frac{d\Gamma}{d\eta} &= \sqrt{\left[ \frac{dx(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi(\eta)}{d\eta} \right]^2 + \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi(\eta)}{d\eta} \right]^2} = \\ &= \left| \frac{d\xi(\eta)}{d\eta} \right| \sqrt{\left[ \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]^2 + \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]^2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Licząc numerycznie całki osobliwe używamy logarytmicznej kwadratury Gaussa dla stabilizowanych (tabela 2.2) wartości  $\eta$ . W praktyce w programie BEM wywołuje się standardowe bazowe funkcje interpolacji i Jakobian wstawiając w wywołaniu:

- a) gdy  $r$  znajduje się w pierwszym węźle:  $\xi = 2\eta - 1$ ,
- b) gdy  $r$  znajduje się w drugim węźle:  $\xi = -\eta$  dla  $-1 < \xi < 0$  i  $\xi = \eta$  dla  $0 < \xi < 1$ ,
- c) gdy  $r$  znajduje się w trzecim węźle:  $\xi = 1 - 2\eta$ .

Dodatkowy czynnik  $\left| \frac{d\xi(\eta)}{d\eta} \right|$  występujący w równaniu 2.22 uzupełnia więc potencjały warstwy pojedynczej i podwójnej postaci numerycznej równania całkowo-brzegowego po właściwym wywołaniu obliczeń jacobianu.

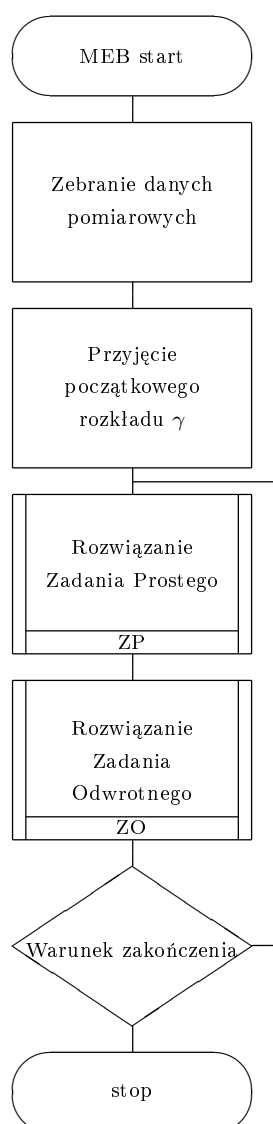
Oczywiście dla wspomnianej transformacji będzie on przyjmował wartość:

- a) gdy  $r$  znajduje się w pierwszym węźle: 2,
- b) gdy  $r$  znajduje się w drugim węźle: 1,
- c) gdy  $r$  znajduje się w trzecim węźle: 2.

## 2.2 Zgadnienie proste i odwrotne

Uproszczony schemat blokowy tworzenia obrazu w tomografii komputerowej, wskazujący relacje pomiędzy zadaniem prostym i odwrotnym przedstawia

się następująco:



Rys. 2.8. Uproszczony schemat blokowy tworzenia obrazu w tomografii komputerowej (TK)

### 2.2.1 Rozwiązanie zadania prostego

Rozwiązanie zagadnienia prostego ZP (ang. *Forward Problem*) polega na wyznaczeniu rozkładu potencjału wewnątrz obszaru  $\Omega$  przy pełnej informacji o rozpatrywanym obszarze (tzn. znanych warunkach brzegowych, rozkładzie współczynników materiałowych wewnątrz obszaru, wymiarach geome-

trycznych itp.). Do rozwiązania zagadnienia prostego w niniejszej dysertacji zastosowano Metodę Elementów Brzegowych MEB.

### 2.2.2 Rozwiązanie zadania odwrotnego

Zadanie odwrotne ZO (ang. *Inverse Problem*) formułowane jest, gdy brakuje pewnych informacji o analizowanym obiekcie bądź warunkach brzegowych. W zagadnieniach tomograficznych ZO formułowane jest dla współczynników materiałowych wewnątrz obszaru przy znanych wartościach potencjału  $\Phi$  na brzegu obiektu (pomiar).

Definiowana jest tzw. **postać funkcji celu** (ang. *objective function*)  $F_C(\gamma)$ . Wartość funkcji celu ma odzwierciedlać odległość pomiędzy wartościami obliczonymi numerycznie a wartościami uzyskanymi z pomiarów. Zadanie algorytmu konstrukcji obrazu polega na wyznaczeniu takich współczynników interpolacji funkcji  $\gamma$ , dla których funkcja celu osiąga przynajmniej minimum lokalne.

**Analiza wrażliwości** realizowana jest w dwóch krokach:

- poprzez wyznaczenie gradientu funkcji celu:

$$\frac{\partial F_C}{\partial \gamma} = \left[ \frac{\nabla F_C}{\nabla a}, \frac{\nabla F_C}{\nabla b}, \frac{\nabla F_C}{\nabla c} \right], \quad (2.23)$$

gdzie  $n$  - jest rozmiarem wektora  $\gamma$ .

Funkcję celu różniczkujemy względem współczynników materiałowych. Przykładowo dla zawilgocenia muru interpolowanego w rozdziale 6 wy-cinkiem funkcji kwadratowej  $\gamma = f(a, b, c) = \gamma_0(az^2 + bz + c)$ .

- i wyznaczenie kierunku poprawy  $\gamma$  metodą optymalizacyjną.

W przykładach z rozdziału (6) analizę wrażliwości dla współczynników interpolacji rozkładu konduktywności przeprowadzono Metodą Różnic Skończonych [16].

Minimalizację funkcji celu przy poszukiwaniu współczynników materiałowych zrealizowano wykorzystując metodę BFGS (ang. *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*) [86, 52].

Tablica 2.1. Wartości współrzędnych punktów Gaussa i odpowiadające im współczynniki wag

| n  | i  | $\xi_1$                 | $w_i$                  |
|----|----|-------------------------|------------------------|
| 3  | 1  | -0.77459666924148337704 | 0.5555555555555555556  |
|    | 2  | 0.0                     | 0.8888888888888888889  |
|    | 3  | +0.77459666924148337704 | 0.5555555555555555556  |
| 4  | 1  | -0.86113631159495257522 | 0.34785484513745385737 |
|    | 2  | -0.33998104358485626480 | 0.65214515486254614263 |
|    | 3  | +0.33998104358485626480 | 0.65214515486254614263 |
|    | 4  | +0.86113631159495257522 | 0.34785484513745385737 |
| 6  | 1  | -0.93246951420315202781 | 0.17132449237917034504 |
|    | 2  | -0.66120938646626451366 | 0.36076157304813860757 |
|    | 3  | -0.23861918608319690863 | 0.46791393457269104739 |
|    | 4  | +0.23861918608319690863 | 0.46791393457269104739 |
|    | 5  | +0.66120938646626451366 | 0.36076157304813860757 |
|    | 6  | +0.93246951420315202781 | 0.17132449237917034504 |
| 10 | 1  | -0.97390652851717172008 | 0.06667134430868813759 |
|    | 2  | -0.86506336668898451073 | 0.14945134915058059315 |
|    | 3  | -0.67940956829902440623 | 0.21908636251598204400 |
|    | 4  | -0.43339539412924719080 | 0.26926671930999635509 |
|    | 5  | -0.14887433898163121089 | 0.29552422471475287017 |
|    | 6  | +0.14887433898163121089 | 0.29552422471475287017 |
|    | 7  | +0.43339539412924719080 | 0.26926671930999635509 |
|    | 8  | +0.67940956829902440623 | 0.21908636251598204400 |
|    | 9  | +0.86506336668898451073 | 0.14945134915058059315 |
|    | 10 | +0.97390652851717172008 | 0.06667134430868813759 |
| 12 | 1  | -0.98156063424671925069 | 0.04717533638651182719 |
|    | 2  | -0.90411725637047485668 | 0.10693932599531843096 |
|    | 3  | -0.76990267419430468704 | 0.16007832854334622633 |
|    | 4  | -0.58731795428661744730 | 0.20316742672306592175 |
|    | 5  | -0.36783149899818019375 | 0.23349253653835480876 |
|    | 6  | -0.12523340851146891547 | 0.24914704581340278500 |
|    | 7  | +0.12523340851146891547 | 0.24914704581340278500 |
|    | 8  | +0.36783149899818019375 | 0.23349253653835480876 |
|    | 9  | +0.58731795428661744730 | 0.20316742672306592175 |
|    | 10 | +0.76990267419430468704 | 0.16007832854334622633 |
|    | 11 | +0.90411725637047485668 | 0.10693932599531843096 |
|    | 12 | +0.98156063424671925069 | 0.04717533638651182719 |
| 16 | 1  | -0.98940093499164993260 | 0.02715245941175409485 |
|    | 2  | -0.94457502307323257608 | 0.06225352393864789286 |
|    | 3  | -0.86563120238783174388 | 0.09515851168249278481 |
|    | 4  | -0.75540440835500303390 | 0.12462897125553387205 |
|    | 5  | -0.61787624440264374845 | 0.14959598881657673208 |
|    | 6  | -0.45801677765722738634 | 0.16915651939500253819 |
|    | 7  | -0.28160355077925891323 | 0.18260341504492358887 |
|    | 8  | -0.09501250983763744019 | 0.18945061045506849629 |
|    | 9  | +0.09501250983763744019 | 0.18945061045506849629 |
|    | 10 | +0.28160355077925891323 | 0.18260341504492358887 |
|    | 11 | +0.45801677765722738634 | 0.16915651939500253819 |
|    | 12 | +0.61787624440264374845 | 0.14959598881657673208 |
|    | 13 | +0.75540440835500303390 | 0.12462897125553387205 |
|    | 14 | +0.86563120238783174388 | 0.09515851168249278481 |
|    | 15 | +0.94457502307323257608 | 0.06225352393864789286 |
|    | 16 | +0.98940093499164993260 | 0.02715245941175409485 |

Tablica 2.2. Wartości współrzędnych punktów Gaussa i odpowiadające im współczynniki wag dla logarytmicznej kwadratury Gaussa

| n | i | $\eta_i$                | $w_i$                  |
|---|---|-------------------------|------------------------|
| 4 | 1 | 0.04144848019938322080  | 0.38346406814513512485 |
|   | 2 | 0.24527491432060225194  | 0.38687531777476262734 |
|   | 3 | 0.55616545356027583718  | 0.19043512695014241536 |
|   | 4 | 0.84898239453298517465  | 0.03922548712995983245 |
| 6 | 1 | -0.93246951420315202781 | 0.17132449237917034504 |
|   | 2 | -0.66120938646626451366 | 0.36076157304813860757 |
|   | 3 | -0.23861918608319690863 | 0.46791393457269104739 |
|   | 4 | +0.23861918608319690863 | 0.46791393457269104739 |
|   | 5 | +0.66120938646626451366 | 0.36076157304813860757 |
|   | 6 | +0.93246951420315202781 | 0.17132449237917034504 |
| 8 | 1 | 0.01332024416089246501  | 0.16441660472800288683 |
|   | 2 | 0.07975042901389493841  | 0.23752561002330602050 |
|   | 3 | 0.19787102932618805379  | 0.22684198443191912637 |
|   | 4 | 0.35415399435190941967  | 0.17575407900607024499 |
|   | 5 | 0.52945857523491727771  | 0.11292403024675905186 |
|   | 6 | 0.70181452993909996384  | 0.05787221071778207239 |
|   | 7 | 0.84937932044110667605  | 0.02097907374213297804 |
|   | 8 | 0.95332645005635978877  | 0.00368640710402761901 |



## Rozdział 3

# Elementy Brzegowe Nieskończone w odniesieniu do obiektów 2D

### 3.1 Klasyfikacja elementów nieskończonych

Istnieją dwie zasadnicze grupy elementów nieskończonych [101, 13, 14, 15, 10, 34, 11, 50, 92, 33, 20]:

- elementy nieskończone z funkcjami zaniku (ang. decay function) wykorzystujące standardowe bazowe funkcje interpolacji,
- elementy nieskończone odwzorowane (z transformacją geometrii, ang. mapping) transformujące geometrię elementu nieskończonego do skończonego.

W przypadku elementów nieskończonych bazowe funkcje interpolacji muszą spełniać dwa dodatkowe warunki. Po pierwsze muszą być realne, tzn. muszą zachowywać zgodność rozkładu badanych wartości w przestrzeni z rzeczywistością i po drugie muszą umożliwiać całkowanie po elemencie dające skończone wartości.

## 3.2 Elementy Brzegowe Nieskończone z funkcjami zaniku

Zasadnicza idea elementów nieskończonych z funkcjami zaniku polega na wykorzystaniu iloczynu standardowych bazowych funkcji interpolacji znanych z klasycznych elementów brzegowych i tzw. funkcji zaniku [101, 13, 14, 15, 10, 11, 34]. Powstałe w ten sposób nowe bazowe funkcje interpolacji nazywać będziemy w dalszym ciągu nieskończonymi bazowymi funkcjami interpolacji M. Zadaniem funkcji zaniku jest zapewnienie takiego rozkładu wartości zmiennych stanu, który możliwie poprawnie odpowiadać będzie fizyce problemu w nieskończoności. Tak więc związek pomiędzy nieskończonymi bazowymi funkcjami interpolacji M, standardowymi bazowymi funkcjami interpolacji N i funkcjami zaniku D jest następujący:

$$M_i(\xi) = N_i(\xi)D_i(\xi), \quad (3.1)$$

gdzie  $M_i$ ,  $N_i$  i  $D_i$  są wartościami stosownych funkcji dla  $i$ -tego węzła elementu.

Obie bazowe funkcje interpolacji M i N muszą przybierać wartość 1 we własnych węzłach zatem również funkcje zaniku D we własnych węzłach przybierać winny wartość 1:

$$D_i(\xi) = 1. \quad (3.2)$$

Dodatkowo w dużych odległościach od obiektu  $M_i$  muszą dążyć do wartości połowych osiągniętych w nieskończoności.

### 3.2.1 Funkcje zaniku

#### Wielomianowe funkcje zaniku

Przyjmując, że funkcje zaniku są odwrotnie proporcjonalne do odległości w lokalnym układzie współrzędnych można to wyrazić [101, 13, 15, 34]:

$$D_i(\xi) = \left( \frac{\xi_i - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^n. \quad (3.3)$$

gdzie  $\xi_o$  jest punktem początkowym (ang. origin point) a  $n$  jest dobieranym współczynnikiem potęgowym.

Punkt  $\xi_o$  musi leżeć poza elementem po stronie przeciwnej do jego nieskończonej części. Jeżeli przyjmiemy, że zanikanie następuje w dodatnim kierunku osi  $\xi$  wówczas  $\xi_o < -1$ . Wymóg ten jest konieczny dla uniknięcia osobliwości wewnątrz elementu. Ponadto  $n$  musi być większe niż najwyższa potęga  $\xi$  występująca w bazowych funkcjach interpolacji  $N_i$ . Zapewnia to dla  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $M_i \rightarrow 0$ . Dla zanikania w ujemnym kierunku wzdłuż osi  $\xi$  funkcja zaniku przedstawiać się będzie następująco:

$$D_i(\xi) = \left( \frac{\xi_o - \xi_i}{\xi_o - \xi} \right)^n. \quad (3.4)$$

wówczas  $\xi_o$  musi przyjmować wartości  $\xi_o > 1$ .

### Wykładnicze funkcje zaniku

Wykładnicze funkcje zaniku postaci  $e^{-r}$  oferują szybsze zanikanie. W przypadku zanikania jedynie w dodatnim kierunku osi  $\xi$ , przy uwzględnieniu warunku przyjmowania przez funkcje zaniku wartości 1 we własnych węzłach analogicznie jak w przypadku równania (3.2) funkcję zaniku zapiszemy jako:

$$D_i(\xi) = e^{(\xi_i - \xi)/L}, \quad (3.5)$$

gdzie  $L$  jest współczynnikiem decydującym o szybkości zanikania, a uwzględnienie  $\xi_i$  zapewnia spełnienie warunku (3.2).

W przypadku zanikania w ujemnym kierunku osi  $\xi$ , funkcję zaniku zapiszemy jako:

$$D_i(\xi_i) = e^{(\xi - \xi_i)/L}. \quad (3.6)$$

Wybór funkcji zaniku podyktowany winien być charakterem badanego zjawiska. Jeżeli szybkość zanikania zjawiska jest wprost proporcjonalna do odległości należy wybrać wielomianowe funkcje zaniku. Stopień wielomianu (równanie (3.3)) można dostosować do fizyki analizowanego problemu. Jeżeli zanikanie ma charakter wykładniczy jak w przypadku zawilgocenia muru (rozdział 6) warto posłużyć się funkcjami wykładniczymi. Należy również pamiętać, że w elementach izoparametrycznych te same bazowe funkcje interpolacji zastosowane są do transformacji geometrii.

### 3.2.2 Całkowanie numeryczne

#### Wielomianowe funkcje zaniku - Gauss-Legendre

Dla elementów o zanikaniu odwrotnie proporcjonalnym do odległości jako jedna z możliwości całkowania numerycznego wykorzystana zostanie zmodyfikowana metoda Gaussa-Legendrea dla obszarów nieograniczonych [2, 21, 76, 15]. Generalnie ideą jest zastosowanie znanych reguł całkowania Gaussa-Legendrea w przedziale od -1 do +1 dla przedziału od -1 do  $\infty$ . Transformacja zaproponowana przez Daviesa i Rabinowitza [21] zostanie przedstawiona:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^\infty f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right) \frac{dt}{(1+t^2)}. \quad (3.7)$$

Dla  $a = -1$  i  $b = +1$  otrzymamy:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 2 \int_0^\infty f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \frac{dt}{(1+t^2)}, \quad (3.8)$$

gdzie  $x = (t-1)/(t+1)$  i  $t = 1+2x/(1-x)$ .

Definiując nową zmienną  $\xi$  taką, że  $\xi = t-1$ ,  $t = 1+\xi$  otrzymamy:

$$\int_{-1}^\infty f(\xi)d\xi = 2 \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2x}{1-x}\right) \frac{dx}{(1-x^2)}. \quad (3.9)$$

Należy jeszcze uwzględnić zmianę wartości punktów całkowania i funkcji wag wprowadzoną przez powyższe przekształcenie:

$$\xi = 2x/(1-x), \quad (3.10)$$

oraz

$$W_{new} = W_{old}2/(1-x)^2, \quad (3.11)$$

gdzie  $x$  odpowiada stabilizowanym wartościom punktów całkowania Gaussa-Legendrea a  $W_{old}$  ich wagom.

#### Wykładnicze funkcje zaniku - Gauss-Laguerre

Wykorzystanie całkowania numerycznego Gaussa-Laguerrea wiąże się z przejściem od klasycznej formuły (3.12):

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx, \quad (3.12)$$

do właściwych dla elementów nieskończonych granic całkowania i postaci wyrażenia podcałkowego odpowiadającej zanikowi zgodnie z zależnością (3.5). W

przypadku elementów nieskończonych z wykładniczymi funkcjami zaniku typowa postać bazowych funkcji interpolacji składa się z iloczynu wielomianu związanego ze standardowymi bazowymi funkcjami interpolacji i z wykładniczej funkcji zaniku:

$$p(\xi)e^{-\xi/L}. \quad (3.13)$$

Podobny charakter mają pochodne nieskończonych funkcji interpolacji:

$$q(\xi)e^{-\xi/L}. \quad (3.14)$$

Ponieważ funkcje te i ich pochodne tworzą iloczyn w macierzy elementu a element rozciąga się od  $-1$  do  $\infty$ , typowa postać obliczanych całek wyraża się następująco:

$$\int_{-1}^{\infty} g(\xi)e^{-2\xi/L}d\xi. \quad (3.15)$$

Stosowne odwzorowanie pozwalające na zmianę granic całkowania od  $-1$  do  $\infty$  na granice od  $0$  do  $\infty$  dla całki postaci (3.15) można zdefiniować jako:

$$t = \frac{2}{L}(\xi + 1), \quad (3.16)$$

$$\xi = \frac{L}{2}t - 1,$$

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{2}{L}, \quad (3.17)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{L}{2}.$$

Zmiana granic całkowania przedstawia się następująco:

$$\int_{-1}^{\infty} g(\xi)e^{-2\xi/L}d\xi = \int_0^{\infty} g(\xi)(L/2)e^{2/L}e^{-t}dt. \quad (3.18)$$

Należy jeszcze uwzględnić zmianę wartości punktów całkowania:

$$\xi = \frac{L}{2}t - 1, \quad (3.19)$$

oraz nowe wartości wag:

$$W_{new} = W_{old}\frac{L}{2}e^{2/L}. \quad (3.20)$$

Dla zanikania w kierunku ujemnych wartości  $\xi$  równanie (3.18) przyjmie postać:

$$\int_{-\infty}^{+1} g(\xi)e^{2\xi/L}d\xi = \int_0^{\infty} g(\xi)(L/2)e^{2/L}e^{-t}dt, \quad (3.21)$$

a  $\xi = 1 - \frac{L}{2}t$ .

### 3.2.3 Zmodyfikowane równanie całkowo-brzegowe

Dla izoparametrycznych elementów brzegowych nieskończonych z funkcjami zaniku bazujących na elementach drugiego rzędu wykorzystujemy standardowe bazowe funkcje interpolacji  $N_k(\xi)$  skojarzone z każdym z węzłów transformujące współrzędne globalne do lokalnych [31, 8, 17, 73, 81, 16, 80, 39, 44, 5]:

$$\begin{aligned} N_0(\xi) &= -\frac{\xi}{2}(1 - \xi) = 0.5\xi(\xi - 1), \\ N_1(\xi) &= (1 + \xi)(1 - \xi) = 1 - \xi^2, \\ N_2(\xi) &= +\frac{\xi}{2}(1 + \xi) = 0.5\xi(\xi + 1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

W połączeniu z wielomianowymi funkcjami zaniku (3.3) otrzymamy nieskończone bazowe funkcje interpolacji:

$$\begin{aligned} M_0^p(\xi) &= 0.5\xi(\xi - 1) \left( \frac{-1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\ M_1^p(\xi) &= (1 - \xi^2) \left( \frac{-\xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\ M_2^p(\xi) &= 0.5\xi(\xi + 1) \left( \frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

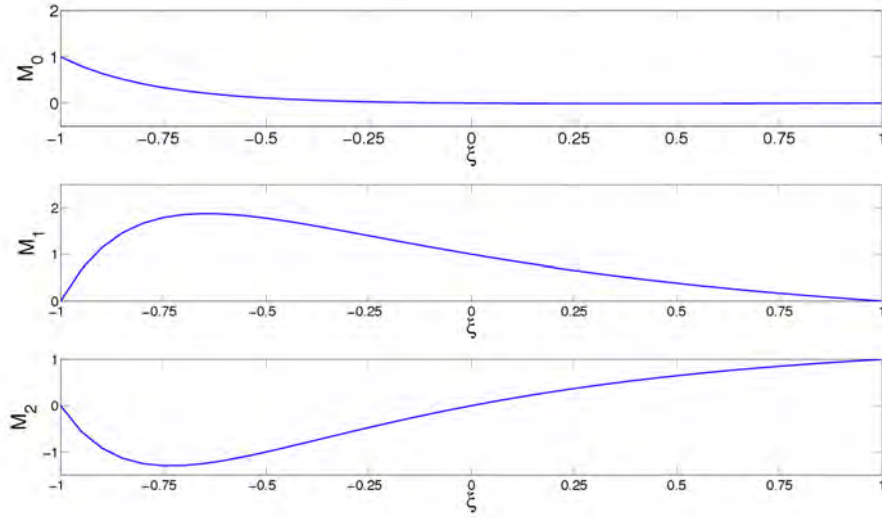
Graficznie nieskończone bazowe funkcje interpolacji wykorzystujące wielomianowe funkcje zaniku (3.23) przedstawiają się następująco:

Pierwsze pochodne bazowych funkcji interpolacji (3.23) wyniosą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0^p(\xi)}{\partial \xi} &= \frac{(\xi_o + 1)^3 (2\xi\xi_o - \xi_o + \xi^2 - 2\xi)}{2(\xi - \xi_o)^4}, \\ \frac{\partial M_1^p(\xi)}{\partial \xi} &= -\frac{\xi_o^3 (2\xi\xi_o + \xi^2 - 3)}{(\xi - \xi_o)^4}, \\ \frac{\partial M_2^p(\xi)}{\partial \xi} &= \frac{(\xi_o - 1)^3 (2\xi\xi_o + \xi_o + \xi^2 + 2\xi)}{2(\xi - \xi_o)^4}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

(3.25)

W przypadku połączenia z wykładniczymi funkcjami zaniku (3.5) otrzymamy nieskończone bazowe funkcje interpolacji:



Rys. 3.1. Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji  $M_0$ ,  $M_1$  i  $M_2$  z wielomianowymi funkcjami zaniku

$$\begin{aligned}
 M_0^e(\xi) &= 0.5\xi(\xi - 1)e^{(-1-\xi)/L}, \\
 M_1^e(\xi) &= (1 - \xi^2)e^{\xi/L}, \\
 M_2^e(\xi) &= 0.5\xi(\xi + 1)e^{(1-\xi)/L}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Graficznie nieskończone bazowe funkcje interpolacji wykorzystujące wykładnicze funkcje zaniku (3.26) przedstawiają się następująco:

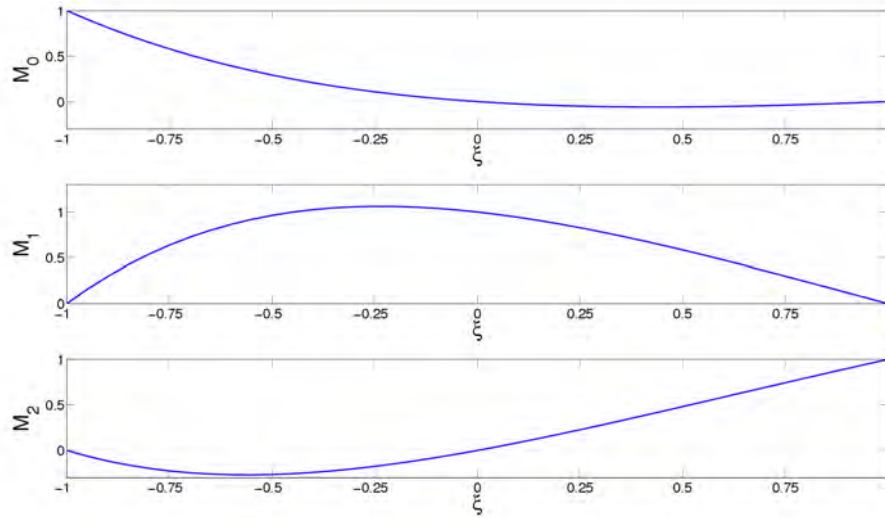
Pierwsze pochodne bazowych funkcji interpolacji (3.5) wyniosą:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_0^e(\xi)}{\partial \xi} &= -\frac{-2xL + L + x^2 - x}{2L}e^{(-x-1)/L}, \\
 \frac{\partial M_1^e(\xi)}{\partial \xi} &= -\frac{2xL + x^2 - 1}{L}e^{x/L},
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial M_2^e(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{-2xL - L + x^2 + x}{2L}e^{(1-x)/L}. \tag{3.28}$$

Funkcje te stosowane będą zarówno do transformacji geometrii:

$$x(\xi) = \sum_{k=0}^2 M_k(\xi)x_k = M_0(\xi)x_0 + M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2,$$



Rys. 3.2. Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji  $M_0$ ,  $M_1$  i  $M_2$  z wykładniczymi funkcjami zaniku

(3.29)

$$y(\xi) = \sum_{k=0}^2 M_k(\xi)y_k = M_0(\xi)y_0 + M_1(\xi)y_1 + M_2(\xi)y_2,$$

jak i właściwości fizycznych obiektu:

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^2 M_k(\xi)\Phi_k = M_0(\xi)\Phi_0 + M_1(\xi)\Phi_1 + M_2(\xi)\Phi_2, \quad (3.30)$$

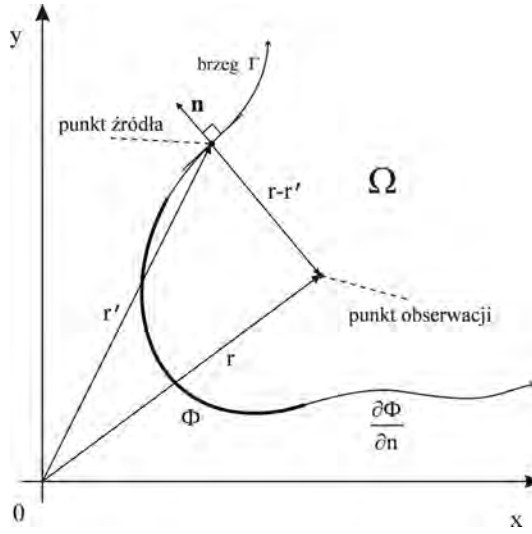
oraz:

$$\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n} = \sum_{k=0}^2 M_k(\xi) \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = M_0(\xi) \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} + M_1(\xi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + M_2(\xi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}. \quad (3.31)$$

Zmodyfikowane równanie całkowo-brzegowe dla przypadku obiektów dwuwymiarowych przyjmie więc postać:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})\Phi_i(\mathbf{r}) &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \int_{-1}^{+1} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J^N(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^2 \int_{-1}^{\infty} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J^M(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J^N(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^2 \int_{-1}^{\infty} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J^M(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.32)$$





Rys. 3.3. Obszar poszukiwania rozwiązania we współrzędnych lokalnych dla przypadku otwartego brzegu

Gdzie:  $n$  - liczba elementów standardowych, po których następuje sumowanie wartości liczonych we wszystkich węzłach  $i=0 \dots n-1$ , każdego z elementów standardowych, oraz  $m$  - liczba elementów nieskończonych, po których następuje sumowanie wartości liczonych we wszystkich węzłach  $i=0,1,2$ , każdego z elementów nieskończonych.

### 3.2.4 Osobliwości

Kolejnym elementem schematu obliczeniowego MEB wymagającym modyfikacji związanych z wprowadzeniem elementów nieskończonych są osobliwości.

Analogicznie dla elementów nieskończonych z wielomianowymi funkcjami zaniku i węzłów  $i = 0, 1, 2$  wykorzystamy nieskończone bazowe funkcje interpolacji  $M_i^p$  zgodnie z zależnościami (3.3):

$$\begin{aligned}
 R^2 &= [x'(\xi) - x_i]^2 + [y'(\xi) - y_i]^2 = \\
 &= [M_0^p(\xi)x_0 + M_1^p(\xi)x_1 + M_2^p(\xi)x_2 - x_i]^2 + \\
 &+ [M_0^p(\xi)y_0 + M_1^p(\xi)y_1 + M_2^p(\xi)y_2 - y_i]^2,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

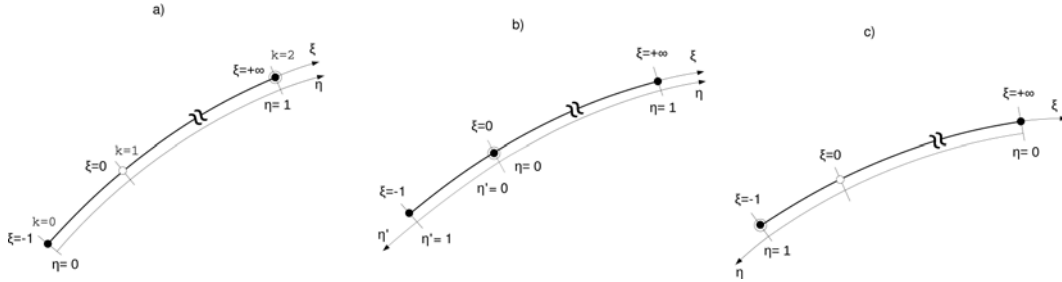
a dla elementów nieskończonych z wykładniczymi funkcjami zaniku i węzłów  $i=0,1,2$  wykorzystamy nieskończone bazowe funkcje interpolacji  $M_i^e$  (wzór 3.5):

$$\begin{aligned}
R^2 &= [x'(\xi) - x_i]^2 + [y'(\xi) - y_i]^2 = \\
&= [M_0^e(\xi) x_0 + M_1^e(\xi) x_1 + M_2^e(\xi) x_2 - x_i]^2 + \\
&+ [M_0^e(\xi) y_0 + M_1^e(\xi) y_1 + M_2^e(\xi) y_2 - y_i]^2.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Dodatkowa liniowa transformacja z układu współrzędnych  $\xi$  do  $\eta$  przedstawia się następująco:

- a) gdy  $r$  znajduje się w pierwszym węźle:  $\eta = 0.5(1 + \xi)$ ,
- b) gdy  $r$  znajduje się w drugim węźle:  $\eta' = -\xi$  dla  $-1 < \xi < 0$  i  $\eta = \xi$  dla  $0 < \xi < 1$ ,
- c) gdy  $r$  znajduje się w trzecim węźle:  $\eta = 0.5(1 - \xi)$ .

Należy również pamiętać o modyfikacji współrzędnych i funkcji wag związanej ze zmianą granic całkowania od 0 do 1 na granice od 0 do  $\infty$  adekwatnie do granic stosownych elementów jak na rysunku 3.4. O wyborze formuły całkowania numerycznego Gaussa-Legendrea czy Gaussa-Laguerrea zdecyduje typ zastosowanych elementów nieskończonych.

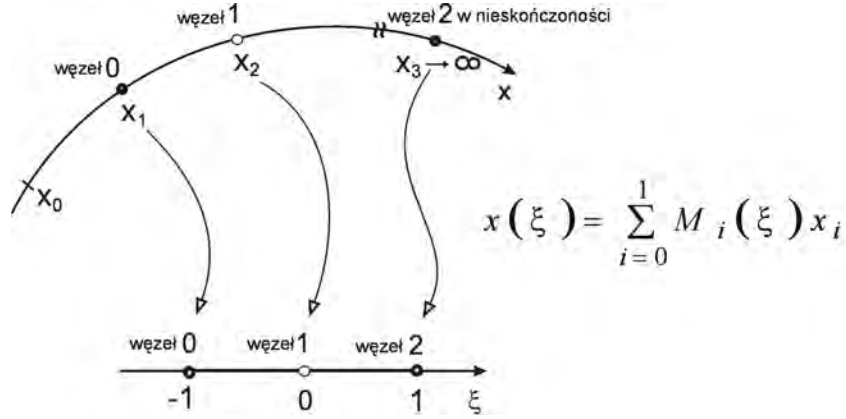


Rys. 3.4. Transformacja elementu zawierającego osobliwości z układu współrzędnych  $\xi < -1, +\infty >$  do  $\eta < 0, 1 >$ . a) gdy  $r$  znajduje się w pierwszym węźle ( $k=0$ ), b) w drugim ( $k=1$ ), c) w trzecim ( $k=2$ )

### 3.3 Elementy brzegowe nieskończone odwzorowane

Dla elementów brzegowych nieskończonych odwzorowanych (z transformacją geometrii) wprowadzamy specjalne bazowe funkcje interpolacji  $M$  [101, 79, 50] transformujące element nieskończony (rys. 3.5), do współrzędnych lokalnych  $\xi$ . Będziemy operować dwoma zestawami bazowych funkcji interpolacji.

„Nieskończone” bazowe funkcje interpolacji  $M_i^m$  będą używane do transformacji geometrii a standardowe bazowe funkcje interpolacji  $N_i^{std}$  [92, 10, 11] jedynie do interpolacji wartości zmiennej stanu. Bazowe funkcje interpolacji  $M$  po-



Rys. 3.5. Izoparametryczny element brzegowy nieskończony drugiego rzędu i jego transformacja ze współrzędnych  $x$  do  $\xi$

dobnie jak standardowe  $N$  muszą przyjmować wartość 1 we własnym węźle i 0 w pozostałych. Jednak w elementach nieskończonych w obliczeniach nie są uwzględniane węzły „uciekające” do nieskończoności jak węzeł 2 w przykładzie z rys.3.5. W elementach standardowych węzeł środkowy 1 leży dokładnie w środku pomiędzy węzłami brzegowymi 0 i 2. Jak to zostało wykazane przez Zienkiewicza, Emsona i Bettessa [101] lub Mosera, Dunsera i Beera [50], w elementach nieskończonych dobre rezultaty uzyskiwane są dla szerokiego zakresu położenia węzła środkowego, który nie musi leżeć dokładnie w środku elementu. Istotne jest aby bazowe funkcje interpolacji  $M$  spełniały warunek:

$$M_0(\xi) + M_1(\xi) = 1. \quad (3.35)$$

Dla jednowymiarowego elementu nieskończonego jak na rys. 3.5 geometria jest interpolowana jako:

$$x = M_0 x_0 + M_1 x_1,$$

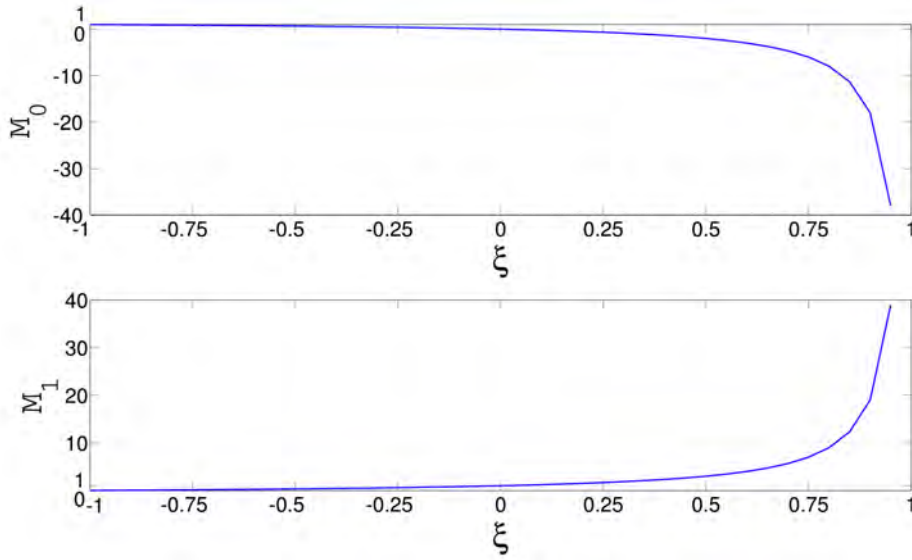
$$M_0 = -\frac{2\xi}{1-\xi} ; \quad M_1 = \frac{1+\xi}{1-\xi}. \quad (3.36)$$

Dla  $x = x_0$  w  $\xi = -1$ ,  $x = x_1$  w  $\xi = 0$  i

$$x_2 = \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{-2\xi x_0 + (1+\xi)x_1}{1-\xi} = \infty.$$

W elementach nieskończonych odwzorowanych, nieskończone bazowe funkcje interpolacji  $M$  pozwalają na transformację geometrii uwzględniającą trzeci uciekający do nieskończoności węzeł. Tworzenie macierzy stanu przebiega standardowo z wyjątkiem wykorzystania odwzorowania funkcjami  $M_0$  i  $M_1$  użytymi do wyznaczenia jakobianu, jego odwrotności i wyznacznika. Graficzną prezentację bazowych funkcji interpolacji  $M_0$  i  $M_1$  przedstawia rysunek 3.6.

Równanie (3.37) zawierające oba podobszary – skończony i nieskończony w



Rys. 3.6. Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji  $M_0$  i  $M_1$

postaci zdyskretyzowanej umożliwiającej wskazanie umiejscowienia wymienionych wcześniej elementów transformacji jest następujące:

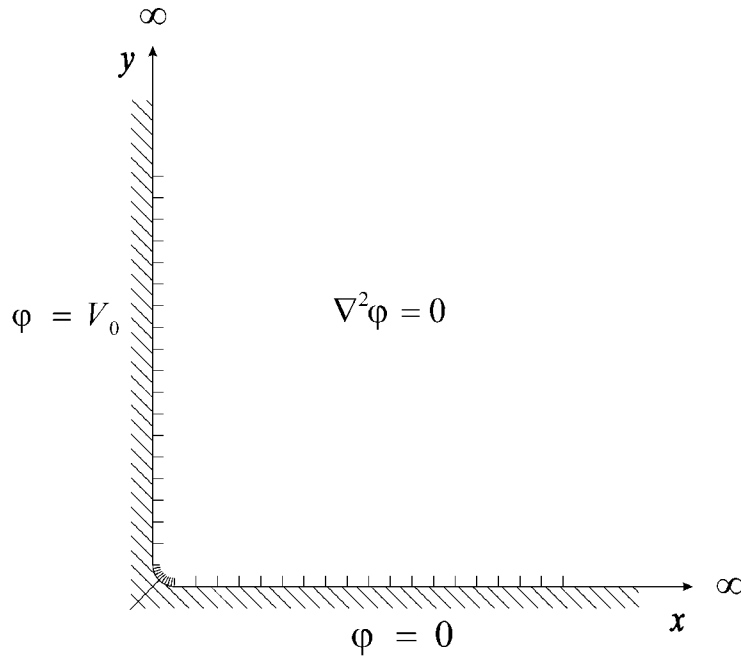
$$\begin{aligned}
 c(\mathbf{r})\Phi_i(\mathbf{r}) &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \int_{-1}^{+1} \Phi(\mathbf{r}') N_k(\xi) \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J^N(\xi) d\xi + \\
 &+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^1 \int_{-1}^{\infty} \Phi(\mathbf{r}') M_l(\xi) \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J^M(\xi) d\xi = \quad (3.37) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_k(\xi) J^N(\xi) d\xi + \\
 &+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^1 \int_{-1}^{\infty} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) M_l(\xi) J^M(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

W przedstawionym zapisie różnica w stosunku do równania bazowego z elementami nieskończonych z funkcjami zaniku wiąże się z pominięciem w ob-

liczeniach ostatniego “uciekającego do nieskończoności” węzła w elementach nieskończonych. Stosując elementy nieskończone z funkcjami zaniku w obliczeniach uwzględniamy wszystkie węzły, natomiast w elementach nieskończonych odwzorowanych pomijamy węzły “uciekające do nieskończoności”.

### 3.4 Przykład obliczeniowy

Jako przykład obliczeniowy zastosowania elementów nieskończonych wyznaczony zostanie rozkład pochodnej normalnej potencjału ( $\partial\phi(r)/\partial n$ ) w przestrzeni między dwoma półnieskończonymi przewodzącymi płaszczyznami, ustawionymi prostopadle, których różnica potencjałów wynosi  $V_0$  jak na rysunku 3.7



Rys. 3.7. Dwu-wymiarowy przykład obliczeniowy oraz jego dyskretyzacja

Istotne jest, że zadanie to posiada znane rozwiązanie analityczne [84] wyrażone wzorem (3.38):

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{V_0}{\pi} 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} &= \frac{V_0}{\pi} 2 \frac{y}{x^2 + y^2},\end{aligned}\tag{3.38}$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \frac{V_0}{\pi} 2 \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

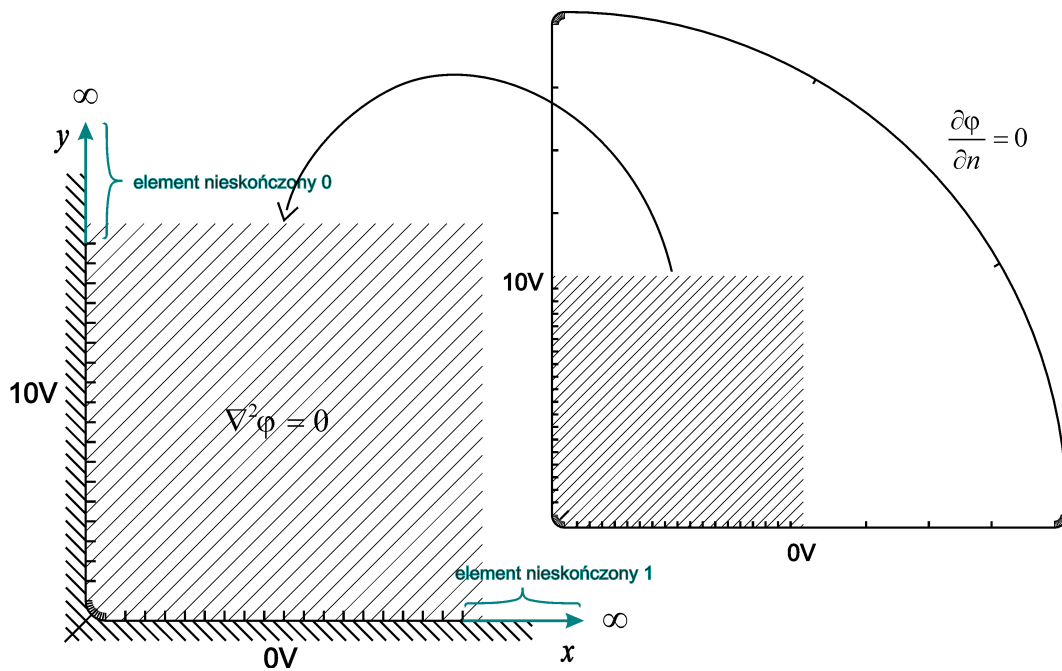
Pochodna normalna potencjału wyrazi się wzorem (3.39):

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{V_0}{\pi} 2 \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{1}_y - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{1}_x \right). \quad (3.39)$$

W celu uniknięcia osobliwości związanej ze skokiem potencjału na krawędzi styku naładowanych powierzchni w modelu numerycznym zmieniono ten fragment geometrii i występujące na nim warunki brzegowe. W miejsce ostrego naroża wprowadzono krzywą gładką zbudowaną z pojedynczych elementów na których następuje stopniowy spadek potencjału od wartości  $V_0$  do 0.

Uzyskane rozwiązanie numeryczne porównano z analitycznym oraz z przypadkiem użycia do obliczeń jedynie elementów standardowych. W obliczeniach wykonanych Metodą Elementów Brzegowych bez zastosowania elementów brzegowych nieskończonych dwukrotnie powiększono analizowany obszar. Powiększenie prezentuje prawa część rysunku 3.8. Właściwy obszar poszukiwania rozwiązania zaznaczony jest jako zakreskowana ukośnie część. Cały powiększony analizowany obszar zbliżony jest kształtem do ćwiartki koła. Jest to klasyczne podejście w którym obszar objęty siatką elementów brzegowych jest powiększany metodą prób i błędów aż do uzyskania zadowalającej dokładności rozwiązania. Metoda ta określana jest mianem balooningu [54, 80, 34]. Dokładny opis tej i innych metod analizy obszarów nieograniczonych można znaleźć np. w pracach [80, 82]. Jednocześnie należy zaznaczyć, że dodany obszar został zdyskretyzowany mniejszą ilością elementów. Jest to również typowe przy rozbudowywaniu siatki elementów i wiąże się z wprowadzeniem sztucznych warunków brzegowych, których bliskość wpływa negatywnie na otrzymywane wyniki obliczeń. Rysunek 3.8 przedstawia porównanie podejścia klasycznego z metodą wzbogaconą o elementy nieskończone.

Wyniki teoretyczne porównane są z obliczeniami numerycznymi. Poszczególne porównywane modele zawierają odpowiednio wyłącznie elementy standardowe i elementy standardowe z dołączonymi elementami nieskończonymi. Kolejno prezentowane modele z elementami nieskończonymi zawierają odpowiednio elementy z wielomianowymi funkcjami zaniku, elementy z wykładniczymi funkcjami zaniku oraz elementy nieskończone odwzorowane. Zaprezentowane na rysunku 3.9 graficznie wyniki odnoszą się do wartości pochodnej



Rys. 3.8. Idea zmniejszenia rozmiaru analizowanego obszaru poprzez zastosowanie elementów nieskończonych. Proporcje i kształty obszarów odpowiadają przyjętym dwuwymiarowym modelom obliczeniowym

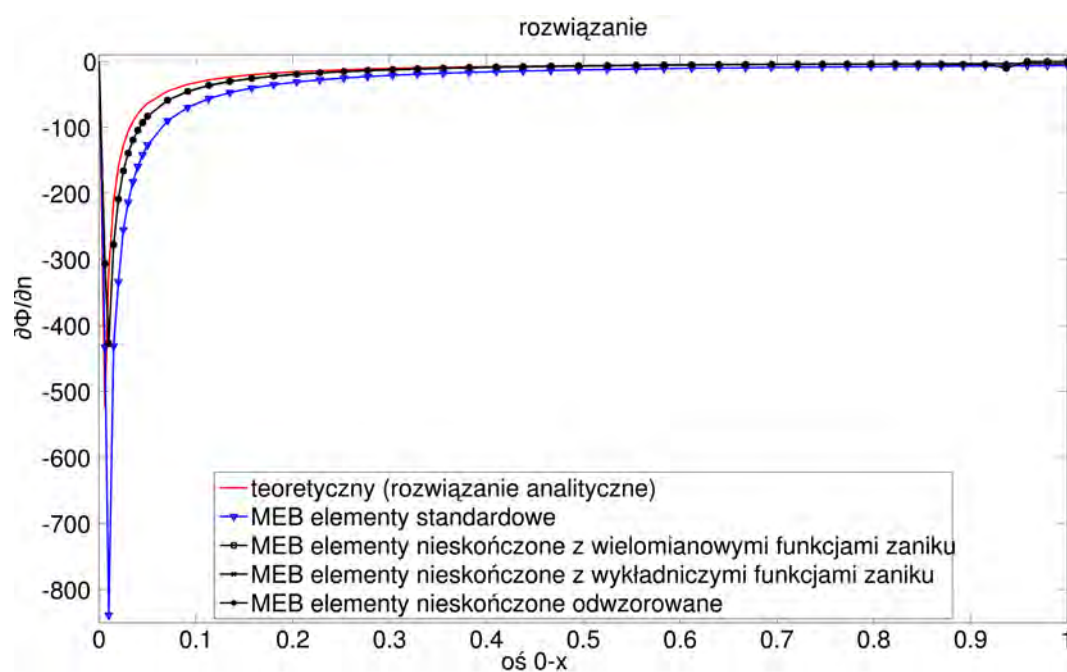
normalnej potencjału na osiach układu. Rysunek 3.10 przedstawia porównanie błędów obliczeniowych przy zadanej dyskretyzacji modeli.

### 3.5 Dyskusja wyników

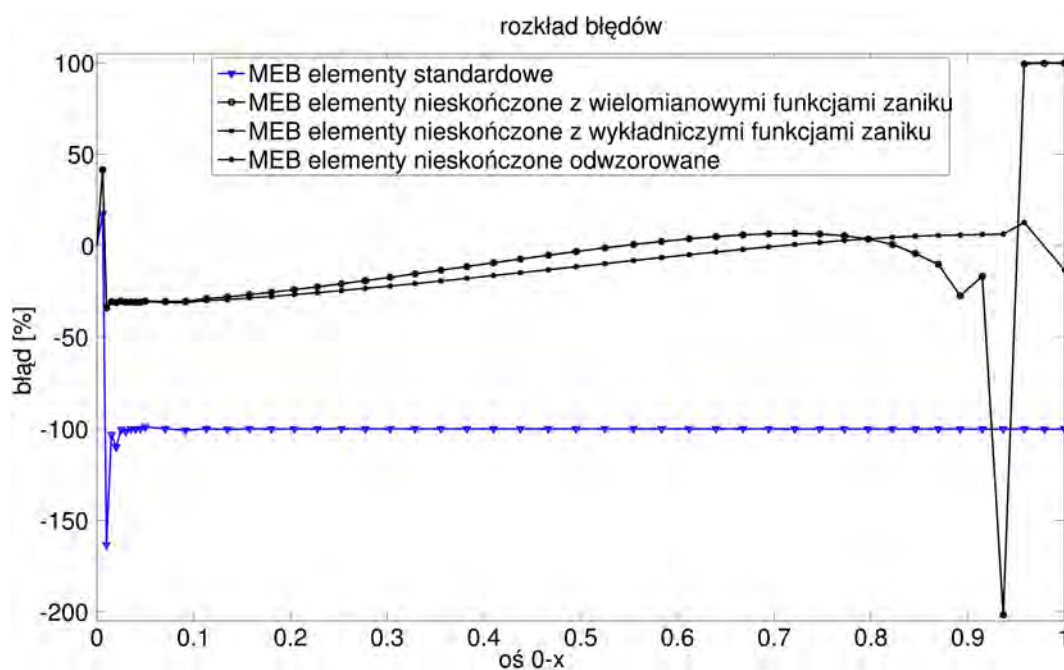
Dyskutowany model składa się z 18 elementów, oprócz 5 narożnych i 1 nieskończonego, na każdej z osi. Jest to stosunkowo nieduża dyskretyzacja. W przypadku obiektów rzeczywistych, przeważnie trójwymiarowych siatka elementów jest przeważnie znacznie gęstsza. Dla dwuwymiarowych rozważań teoretycznych uznano ją jednak za właściwą oferującą wystarczającą dokładność czy “gładkość” rozwiązania i jednocześnie pozwalającą na łatwą modyfikację - zagęszczanie bądź rozrzedzanie siatki elementów. Wyniki zaprezentowane na rysunkach 3.9 i 3.10 z uwagi na symetrię (oś symetrii przebiega wzdłuż prostej  $y = x$ ) przedstawiają rozkład wyników na osi  $0 - x$ .

Porównując otrzymane wyniki należy zauważyć, że:

- wszystkie modele są wrażliwe na odstępstwo od modelu teoretycznego



Rys. 3.9. Porównanie wyników numerycznych z wynikami rozwiązania analitycznego



Rys. 3.10. Porównanie błędów obliczeń numerycznych



jakim jest wygładzenie naroża (punkt 0,0 na rysunku 3.7) i zastąpienie skoku potencjału w punkcie (0,0) liniowym spadkiem potencjału.

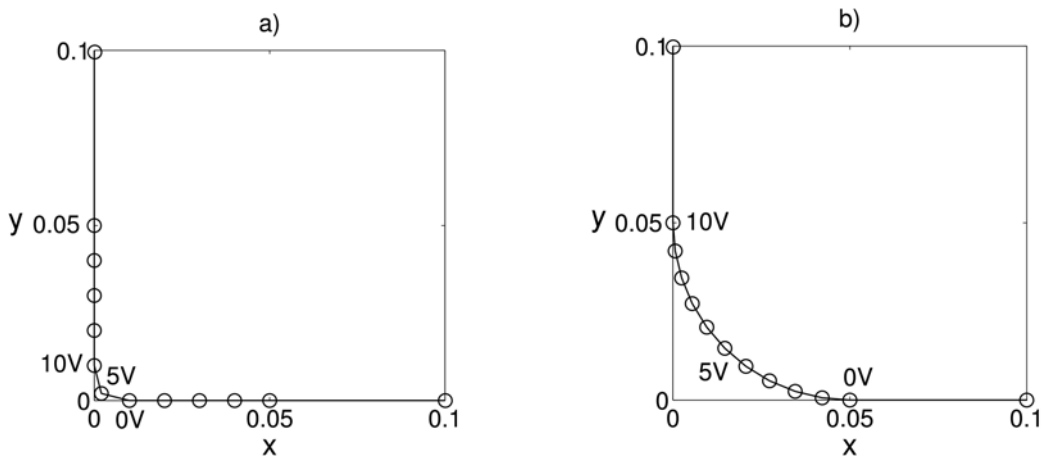
- wszystkie modele zawierające elementy nieskończone wykazują duże wahania błędu w węzłach elementów nieskończonych,
- model zbudowany wyłącznie z elementów standardowych zachowuje jednolity poziom błędu, jednak przy zaproponowanym dwukrotnym powiększeniu analizowanego obszaru błąd ten jest nie do zaakceptowania i w stosunku do rozwiązania analitycznego (teoretycznego) wynosi 100%.

Zastąpienie skoku potencjału w punkcie (0,0) liniowym jego spadkiem w kolejnych węzłach elementów narożnych od 10V poprzez 5V w punkcie (0,0) do 0V było niezbędne z uwagi na osobliwość wywołaną skokiem potencjału. Ostre naroże układu (otoczenie punktu (0,0)) zastąpiono krzywą gładką co pozwoliło na zachowanie stałego współczynnika  $c(\mathbf{r})$  w równaniu całkowo-brzegowym. Kwestie węzłów narożnych są szerzej omówione w pracach związanych z MEB przykładowo [81]. Analizę tego punktu modelu przeprowadzono badając kilka przypadków bazujących na dwóch zasadniczych podejściach:

- w pierwszym zgodnym z rysunkiem 3.11 *a*) otoczenie punktu (0,0) zdystryktyzowaną dziesięcio-krotnie gęstszą siatką elementów brzegowych o węzłach rozłożonych na ćwiartce koła. Spadek potencjału od 10V do 0V również rozłożono równomiernie na wszystkich węzłach tego łuku złożonego w sumie z 10 elementów .
- w drugim przypadku wygładzenie naroża i spadek potencjału ograniczono do dwóch elementów, po jednym na każdej osi  $x$  i  $y$  najbliższych punktowi (0,0) jak to jest przedstawione na rysunku 3.11 *b*).

Istotniejsze okazało się zmniejszenie rozmiaru deformacji i liniowego spadku potencjału, niż gładkość otoczenia punktu (0,0). Do budowy właściwego modelu wybrano przypadek z dziesięcioma gęstszymi elementami w otoczeniu punktu (0,0) i liniowym spadkiem potencjału oraz wygładzeniem naroża obejmującym tylko dwa elementy narożne. Wyniki z takiego właśnie modelu zaprezentowane są na rysunkach 3.9 i 3.10.

Drugi zauważony problem jakim są wahania wartości i błędu poszukiwanej pochodnej normalnej  $\partial\Phi/\partial n$  w węzłach elementu nieskończonego analizowano porównując wpływ:



Rys. 3.11. Przykładowe sposoby zastąpienia skoku potencjału i ostrego naroża w punkcie (0,0) liniowym spadkiem potencjału i krzywą gładką

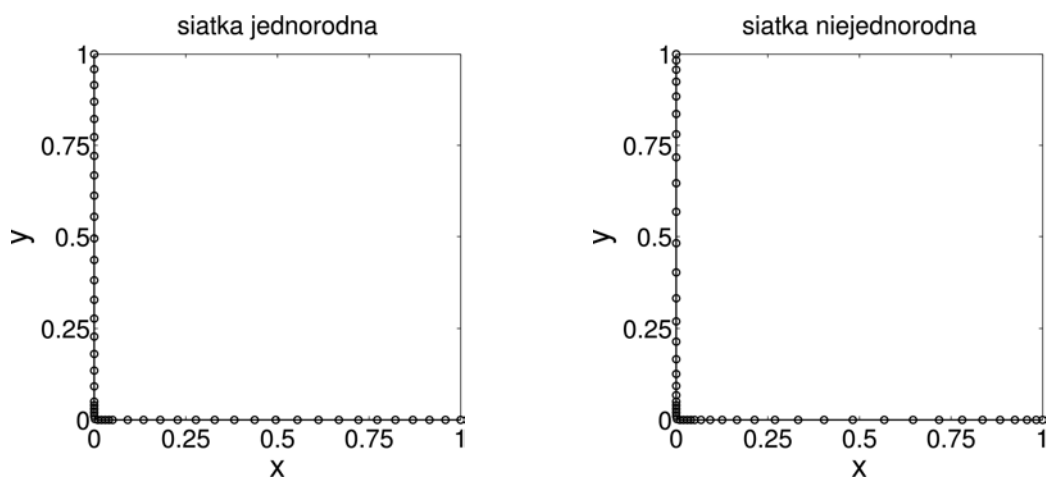
- gęstości siatki elementów standardowych w pobliżu elementów nieskończonych. Oprócz modelu o jednakowej wielkości elementów (z wyjątkiem otoczenia punktu (0,0)), zbudowano również model o siatce gęstszej w pobliżu naroża układu i w sąsiedztwie elementów nieskończonych - rysunki 3.12,
- gęstości punktów całkowania numerycznego w elementach nieskończonych i sąsiadujących z nimi standardowych zgodnie z tabelą 2.1.

Zmiana gęstości siatki w elementach standardowych nie wpłynęła zauważalnie na uzyskane wartości w węzłach elementów nieskończonych. Przykładowe porównanie dla modelu z zastosowanymi elementami brzegowymi nieskończonymi odwzorowanymi przedstawia rysunki 3.13 i 3.14.

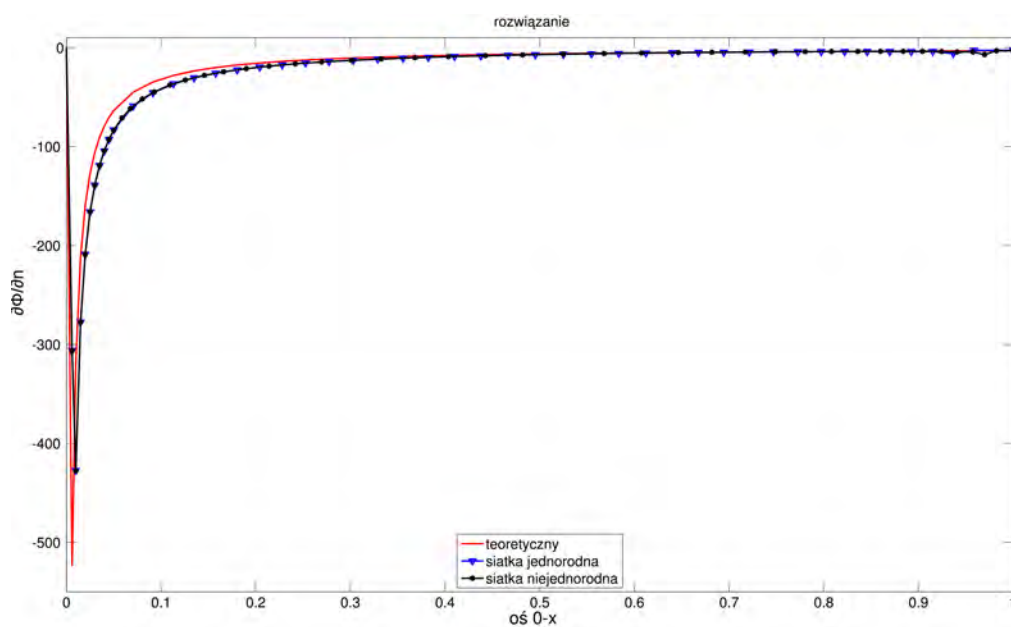
Podobnie zwiększenie gęstości punktów całkowania numerycznego i żonglowanie odmienną ilością tych punktów w elementach nieskończonych i standardowych nie wpływało znacząco na uzyskiwane wyniki w węzłach elementów nieskończonych. Należy uwzględnić fakt, iż zgodnie z zasadą stosowaną w metodzie balooningu [54, 80, 34] należy odrzucić wyniki z węzłów siatki będących poza tym obszarem rzeczywistego poszukiwania rozwiązania. Elementy nieskończone stanowią analogiczny dodatkowy obszar jak w klasycznym podejściu z metodą balooningu i również winny być pominięte. W związku z tym graficzna prezentacja wyników winna być węższa niż przedstawiona na rysunku 3.9. Oznacza to obcięcie wykresu błędów 3.10 o oscylacje widoczne w węzłach elementów nieskończonych. Bardzo istotny jest również fakt, iż

zarówno wartości uzyskiwane z obliczeń analitycznych jak i numerycznych są bardzo małe, bliskie zeru. Z tego też powodu nawet różnice na piątym miejscu po przecinku skutkują dużymi wartościami na wykresie błędów. W rzeczywistych zastosowaniach MEB związanych z obliczeniami w tomografii współczynniki materiałowe badanych obiektów różnią się o kilka rzędów wielkości a za wiarygodne przyjmowane są jedynie wyniki pochodzące z obszaru w którym analizowana wielkość fizyczna przyjmuje dobrze mierzalne wartości. Ostatnim wartym zauważenia wydaje się być fakt, że zaburzenie wywołane odstępstwem od modelu rzeczywistego w pojedynczym elemencie w narożu układu propaguje się na ponad połowę analizowanych elementów. Porównując to do wpływu również pojedynczego elementu nieskończonego należy powiedzieć, że jest on znacznie mniejszy a wyniki najbliższe rozwiązaniu analitycznemu znajdują się w części wykresów bliższych elementom nieskończonym niż narożu modelu.

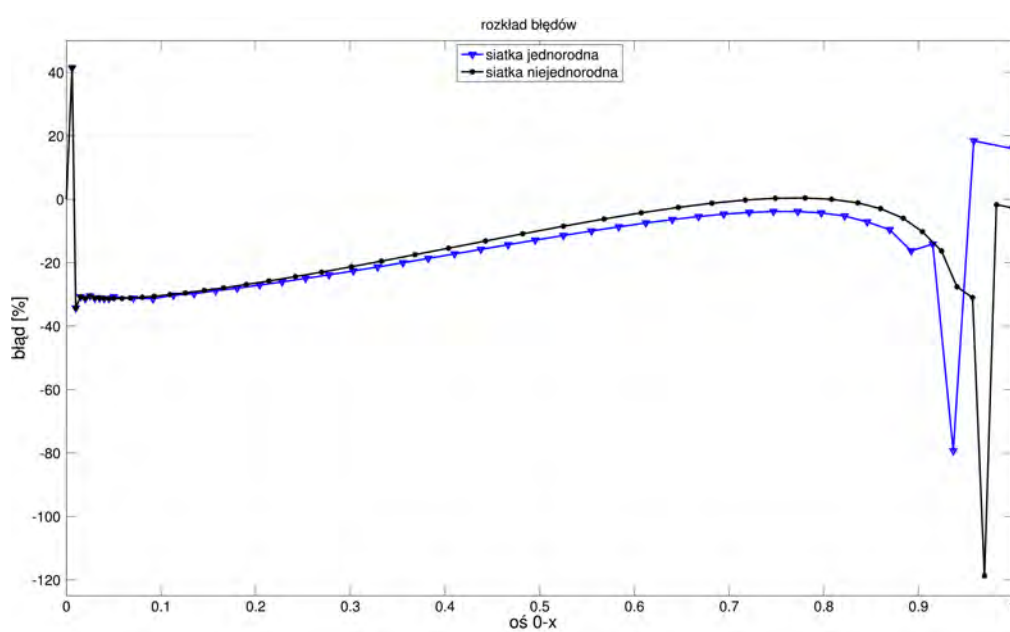
Porównując wyniki uzyskane z obliczeń modeli zawierających elementy nieskończone można zauważyć, że oba typy elementów z funkcjami zaniku (wielomianowymi i wykładniczymi) oferują praktycznie identyczne rezultaty a także poziom i rozkład błędów. Model z elementami nieskończonymi odwzorowanymi również pozwala na uzyskanie bardzo zbliżonych wyników. Generalnie elementy nieskończone spowodowały minimum trzy-krotną poprawę dokładności rozwiązania z poziomu błędów 100% do wachających się od kilku do ok 30% oraz skrócenie czasu rozwiązywania zadania prostego z 44 sekund do 20 sekund. Czas poszukiwania obrazu rozwiązania we wnętrzu obiektu w zadaniu odwrotnym w którym zadanie proste rozwiązywane jest wielokrotnie, jest bardzo istotny w praktycznych zastosowaniach tomograficznych, podobnie jak i wymagania dotyczące pamięci RAM rzędu gigabajtów w bardziej złożonych obiektach trójwymiarowych.



Rys. 3.12. Modele dwuwymiarowe o różnej siatce elementów brzegowych. Po lewej siatka elementów o stałym rozmiarze (z wyjątkiem zagęszczonego naroża). Po prawej siatka elementów rozszerzających się stopniowo od punktu (0,0) do połowy długości modelu a następnie ponownie stopniowo zagęszczająca się w miarę zbliżania się do elementu nieskończonego



Rys. 3.13. Porównanie wyników dla siatek elementów jak na rysunku 3.12 z zastosowanymi odwzorowanymi elementami brzegowymi nieskończonymi



Rys. 3.14. Porównanie błędów dla siatek elementów jak na rysunku 3.12 z zastosowanymi odwzorowanymi elementami brzegowymi nieskończonymi

## Rozdział 4

# Elementy Brzegowe Nieskończone w odniesieniu do obiektów 3D

### 4.1 Elementy Brzegowe Nieskończone z funkcjami zaniku

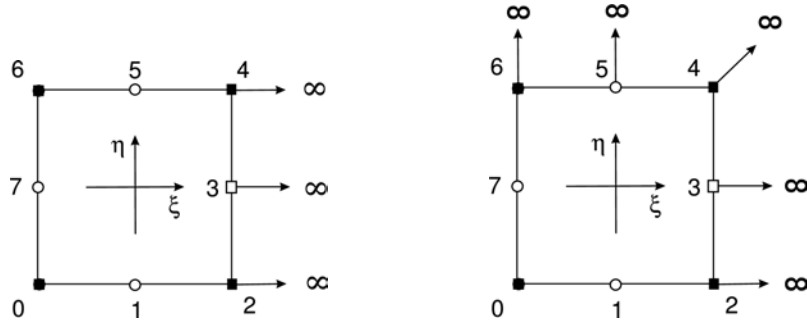
Dla dwuwymiarowych elementów nieskończonych z funkcjami zaniku podstawowa zasada polegająca na wykorzystaniu iloczynu standardowych bazowych funkcji interpolacji znanych z klasycznych elementów brzegowych i funkcji zaniku taka jak w elementach jednowymiarowych pozostaje niezmieniona. W elementach takich funkcje zaniku muszą uwzględniać oba kierunki  $\xi$  i  $\eta$ . Rozważone zostaną dwa przypadki. Pierwszy kiedy standardowy skończony element brzegowy będzie transformowany do nieskończonego w sposób odzwierciedlający zanikanie badanej wielkości fizycznej wzdłuż jednej tylko współrzędnej oraz drugi przypadek kiedy zanikanie następować będzie w obu kierunkach  $\xi$  i  $\eta$  jednocześnie (element narożny) - rysunek 4.1.

#### 4.1.1 Funkcje zaniku

##### Wielomianowe funkcje zaniku

W przypadku funkcji zaniku odwrotnie proporcjonalnych do odległości w lokalnym układzie współrzędnych wyrażone będą one następująco [101, 13, 15, 34]:

dla zanikania w dodatnim kierunku osi  $\xi$ :



Rys. 4.1. Elementy brzegowe nieskończone z funkcjami zaniku. Po lewej transformowany do nieskończoności wzdłuż jednej współrzędnej  $\xi$  i po prawej element narożny z transformacją wzdłuż obu współrzędnych  $\xi$  i  $\eta$

$$D_i(\xi) = \left( \frac{\xi_i - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^n, \quad (4.1)$$

dla zanikania w dodatnich kierunkach obu osi  $\xi$  i  $\eta$ :

$$D_i(\xi, \eta) = \left( \frac{\xi_i - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^n \left( \frac{\eta_i - \eta_o}{\eta - \eta_o} \right)^m, \quad (4.2)$$

gdzie  $(\xi_o, \eta_o)$  jest punktem początkowym (ang. origin point). Punkt ten musi leżeć poza elementem po stronie przeciwnej do jego nieskończonej części. Jeżeli przyjmujemy, że zanikanie następuje w dodatnim kierunku osi  $\xi$  wówczas  $\xi_o < -1$  i analogicznie dla osi  $\eta$ ,  $\eta_o < -1$ . W przypadku zanikania w ujemnych kierunkach osi  $\xi$  lub  $\eta$ ,  $\xi_o > 1$  lub odpowiednio  $\eta_o > 1$ . Wymogi te są konieczne dla uniknięcia osobliwości wewnątrz elementu. Ponadto wykładniki potęgowe  $n$  i  $m$  muszą być większe niż najwyższy wykładnik odpowiednio  $\xi$  i  $\eta$  występujący w bazowej funkcji interpolacji  $N_i$ . Zapewnia to osiągnięcie skończonych wartości przez funkcje  $M_i$  przy nieskończonej wartości ich argumentów  $\xi$  i  $\eta$ . Przy  $\xi \rightarrow \infty$  granica  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} M_i = 0$  i przy  $\eta \rightarrow \infty$  granica  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} M_i = 0$ .

Przyjmując dla standardowych kwadratowych funkcji bazowych interpolacji (4.3) wykładniki z zależności (4.2)  $n = 3$  i  $m = 3$

$$\begin{aligned} N_0(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)/4, \\ N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2, \\ N_2(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)/4, \\ N_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)/4, \\
N_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2, \\
N_6(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)/4, \\
N_7(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

otrzymamy bazowe funkcje interpolacji dla elementów nieskończonych bazujących na standardowych ośmiowęzłowych elementach drugiego rzędu. Dla zanikania w dodatnim kierunku osi  $\xi$  wielomianowe nieskończone bazowe funkcje interpolacji przyjmą postać:

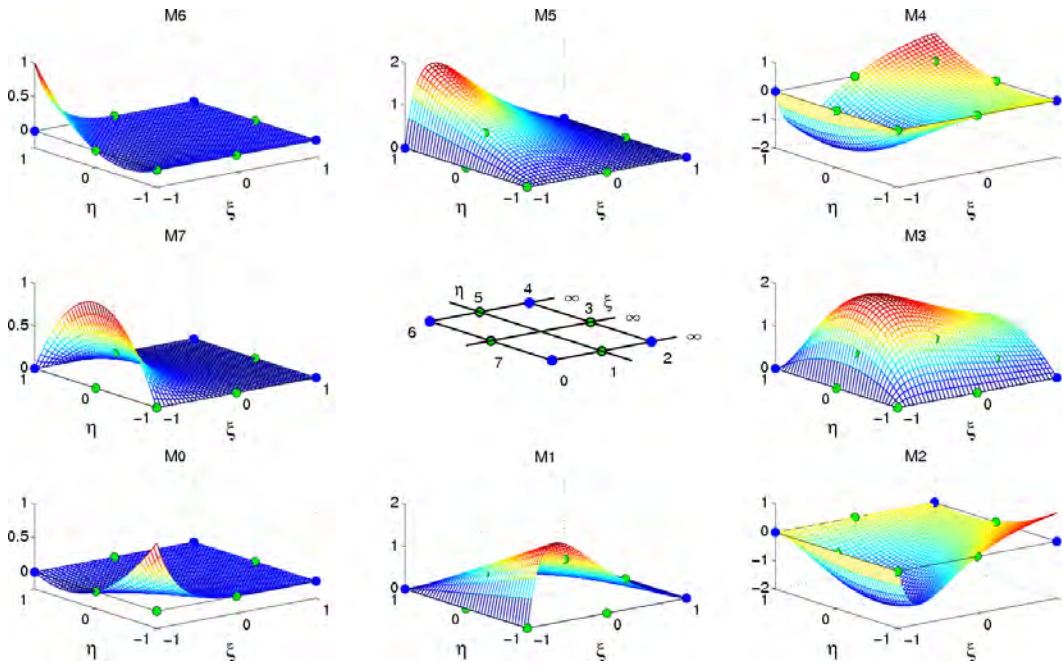
$$\begin{aligned}
M_0(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)/4 \cdot \left( \frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\
M_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2 \cdot \left( \frac{-\xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\
M_2(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)/4 \cdot \left( \frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\
M_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2 \cdot \left( \frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\
M_4(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)/4 \cdot \left( \frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\
M_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2 \cdot \left( \frac{-\xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\
M_6(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)/4 \cdot \left( \frac{-1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3, \\
M_7(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2 \cdot \left( \frac{-1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Graficznie wykreślone nieskończone bazowe funkcje interpolacji (4.4) dla elementów z wielomianowymi funkcjami zaniku (4.2) przedstawiają się jak na rys. 4.2.

Pierwsze pochodne bazowych funkcji interpolacji (4.4) odpowiednio po  $\xi$  i  $\eta$  wyniosą:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(\xi_o + 1)^3 (\eta - 1) (2\xi\eta + \xi_o\eta - 3\eta + \xi^2 + 2\xi_o\xi - 3)}{4(\xi - \xi_o)^4}, \\
\frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\xi_o^3 (\xi^2 + 2\xi_o\xi - 3) (\eta - 1)}{2(\xi - \xi_o)^4},
\end{aligned}$$





Rys. 4.2. Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wielomianowymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym i zanikaniu w dodatnim kierunku osi  $\xi$  ( $\xi_0 = -2$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(\xi_0 - 1)^3 (\eta - 1) (-2\xi\eta - \xi_0\eta - 3\eta + \xi^2 + 2\xi_0\xi - 3)}{4(\xi - \xi_0)^4}, \\
 \frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(\xi_0 - 1)^3 (2\xi + \xi_0 + 3) (\eta^2 - 1)}{2(\xi - \xi_0)^4}, \\
 \frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{(\xi_0 - 1)^3 (\eta + 1) (2\xi\eta + \xi_0\eta + 3\eta + \xi^2 + 2\xi_0\xi - 3)}{4(\xi - \xi_0)^4}, \\
 \frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{\xi_0^3 (\xi^2 + 2\xi_0\xi - 3) (\eta + 1)}{2(\xi - \xi_0)^4}, \\
 \frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{(\xi_0 + 1)^3 (\eta + 1) (-2\xi\eta - \xi_0\eta + 3\eta + \xi^2 + 2\xi_0\xi - 3)}{4(\xi - \xi_0)^4}, \\
 \frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{(\xi_0 + 1)^3 (2\xi + \xi_0 - 3) (\eta^2 - 1)}{2(\xi - \xi_0)^4},
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

oraz po  $\eta$ :

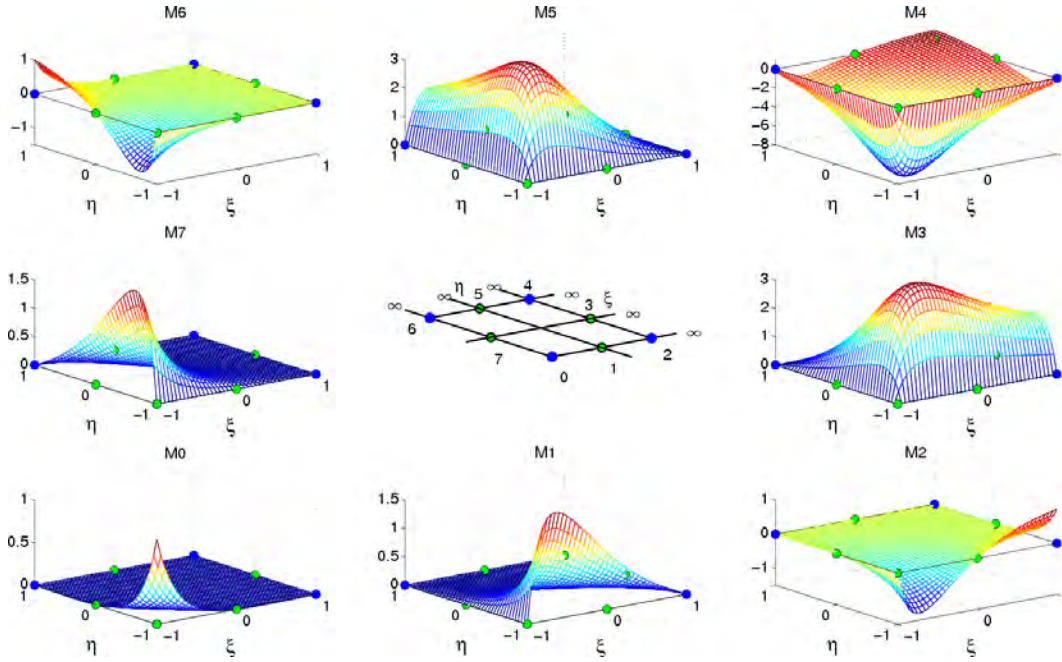
$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\xi_o + 1)^3 (\xi - 1) (2\eta + \xi)}{4(\xi - \xi_o)^3}, \\
\frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{\xi_o^3 (\xi^2 - 1)}{2(\xi - \xi_o)^3}, \\
\frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\xi_o - 1)^3 (\xi + 1) (\xi - 2\eta)}{4(\xi - \xi_o)^3}, \\
\frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\xi_o - 1)^3 (\xi + 1) \eta}{(\xi - \xi_o)^3}, \\
\frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(\xi_o - 1)^3 (\xi + 1) (2\eta + \xi)}{4(\xi - \xi_o)^3}, \\
\frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{\xi_o^3 (\xi^2 - 1)}{2(\xi - \xi_o)^3}, \\
\frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(\xi_o + 1)^3 (\xi - 1) (\xi - 2\eta)}{4(\xi - \xi_o)^3}, \\
\frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\xi_o + 1)^3 (1 - \xi) \eta}{(\xi - \xi_o)^3}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dla zanikania w dodatnich kierunkach obu osi  $\xi$  i  $\eta$  wielomianowe nieskończone bazowe funkcje interpolacji (4.7) przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
M_0(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)/4 \cdot \left(\frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^3 \left(\frac{1 - \eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^3, \\
M_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2 \cdot \left(\frac{-\xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^3 \left(\frac{-1 - \eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^3, \\
M_2(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)/4 \cdot \left(\frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^3 \left(\frac{-1 - \eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^3, \\
M_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2 \cdot \left(\frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^3 \left(\frac{-\eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^3, \\
M_4(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)/4 \cdot \left(\frac{1 - \xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^3 \left(\frac{1 - \eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^3, \\
M_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2 \cdot \left(\frac{-\xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^3 \left(\frac{1 - \eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^3, \\
M_6(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)/4 \cdot \left(\frac{-1 - \xi_o}{\xi - \xi_o}\right)^3 \left(\frac{1 - \eta_o}{\eta - \eta_o}\right)^3,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$M_7(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2 \cdot \left( \frac{-1 - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^3 \left( \frac{-\eta_o}{\eta - \eta_o} \right)^3.$$

Graficznie wykreślone nieskończone bazowe funkcje interpolacji (4.7) dla elementów z wielomianowymi funkcjami zaniku (4.1) przedstawiają się jak na rys. 4.3. Pierwsze pochodne otrzymanych w ten sposób bazowych funkcji



Rys. 4.3. Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wielomianowymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym i zanikaniu w dodatnich kierunkach obu osi  $\xi$  i  $\eta$  ( $\xi_0 = -2$  i  $\eta_0 = -2$ )

interpolacji (4.7) odpowiednio po  $\xi$  i  $\eta$  wyniosą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{(-1 + \eta)(\eta_0 + 1)^3 (-3 + \xi^2 + 2\xi\xi_0 + \eta(-3 + 2\xi + \xi_0)) (\xi_0 + 1)^3}{4(\eta - \eta_0)^3(\xi - \xi_0)^4}, \\ \frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(-1 + \eta)(\eta_0 + 1)^3 (-3 + \xi^2 + 2\xi\xi_0) \xi_0^3}{2(\eta - \eta_0)^3(\xi - \xi_0)^4}, \\ \frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(-1 + \eta)(\eta_0 + 1)^3 (3 - \xi^2 - 2\xi\xi_0 + \eta(3 + 2\xi + \xi_0)) (\xi_0 - 1)^3}{4(\eta - \eta_0)^3(\xi - \xi_0)^4}, \\ \frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{(-1 + \eta^2) \eta_0^3 (3 + 2\xi + \xi_0)(\xi_0 - 1)^3}{2(\eta - \eta_0)^3(\xi - \xi_0)^4}, \\ \frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(1 + \eta)(\eta_0 - 1)^3 (-3 + \xi^2 + 2\xi\xi_0 + \eta(3 + 2\xi + \xi_0)) (\xi_0 - 1)^3}{4(\eta - \eta_0)^3(\xi - \xi_0)^4}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(1+\eta)(\eta_0-1)^3(3+\xi^2+2\xi\xi_0)\xi_0^3}{2(\eta-\eta_0)^3(\xi-\xi_0)^4}, \\
\frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{(1+\eta)(\eta_0-1)^3(3-\xi^2-2\xi\xi_0+\eta(-3+2\xi+\xi_0))(\xi_0+1)^3}{4(\eta-\eta_0)^3(\xi-\xi_0)^4}, \\
\frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(-1+\eta^2)\eta_0^3(-3+2\xi+\xi_0)(\xi_0+1)^3}{2(\eta-\eta_0)^3(\xi-\xi_0)^4},
\end{aligned}$$

oraz po  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\eta_0+1)^3(-1+\xi)(-3+\eta^2+(-3+\eta_0)\xi+2\eta(\eta_0+\xi))(\xi_0+1)^3}{4(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}, \\
\frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(-3+2\eta+\eta_0)(\eta_0+1)^3(-1+\xi^2)\xi_0^3}{2(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}, \\
\frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(\eta_0+1)^3(1+\xi)(-3+\eta^2+2\eta(\eta_0-\xi)-(-3+\eta_0)\xi)(\xi_0-1)^3}{4(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}, \\
\frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(-3+\eta^2+2\eta\eta_0)\eta_0^3(1+\xi)(\xi_0-1)^3}{2(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}, \\
\frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(\eta_0-1)^3(1+\xi)(-3+\eta^2+(3+\eta_0)\xi+2\eta(\eta_0+\xi))(\xi_0-1)^3}{4(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}, \\
\frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(3+2\eta+\eta_0)(\eta_0-1)^3(1+\xi^2)\xi_0^3}{2(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}, \\
\frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\eta_0-1)^3(-1+\xi)(-3+\eta^2+2\eta(\eta_0-\xi)-(3+\eta_0)\xi)(\xi_0+1)^3}{4(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}, \\
\frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(-3+\eta^2+2\eta\eta_0)\eta_0^3(-1+\xi)(\xi_0+1)^3}{2(\eta-\eta_0)^4(\xi-\xi_0)^3}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

### Wykładnicze funkcje zaniku

Wykładnicze funkcje zaniku postaci  $e^{-r}$  oferują szybsze zanikanie. W przypadku zanikania jedynie w dodatnim kierunku osi  $\xi$ , przy uwzględnieniu warunku przyjmowania przez funkcje zaniku wartości 1 we własnych węzłach funkcję zaniku zapiszemy jako:

$$D_i(\xi, \eta) = e^{(\xi_i-\xi)/L}, \tag{4.10}$$

gdzie  $L$  [m] jest współczynnikiem decydującym o szybkości zanikania.

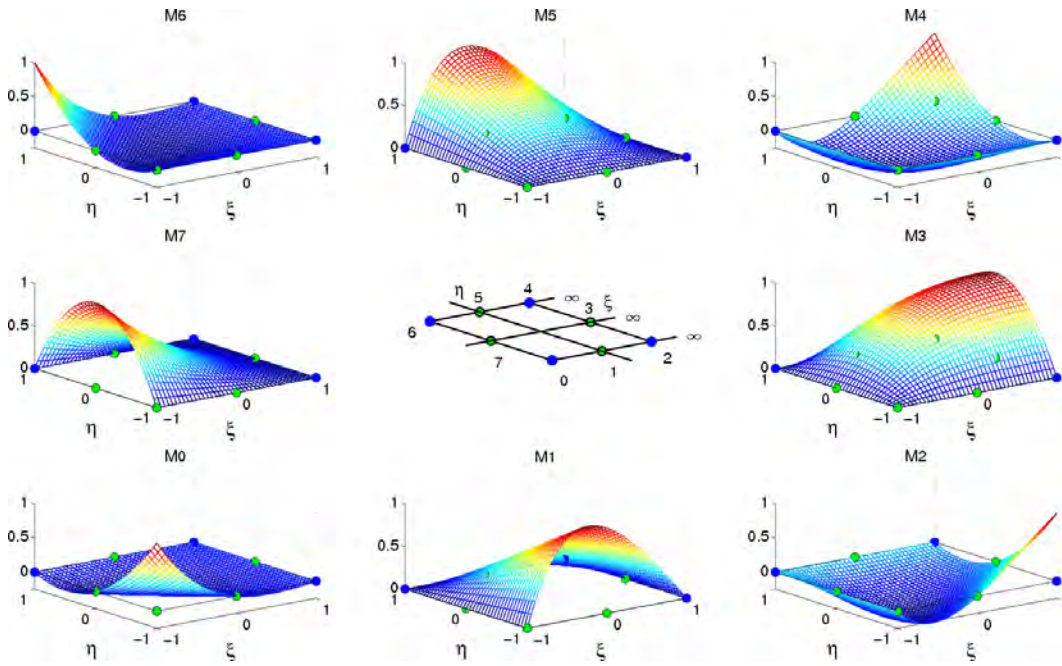
Składając funkcje zaniku (4.10) ze standardowymi funkcjami bazowymi interpolacji (4.3) otrzymamy bazowe funkcje interpolacji dla elementów nieskończonych:

$$\begin{aligned}
M_0(\xi, \eta) &= (\xi - 1)(1 - \eta)(\eta + \xi + 1) / 4 \cdot e^{(1-\xi)/L}, \\
M_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta) / 2 \cdot e^{-\xi/L}, \\
M_2(\xi, \eta) &= (-\xi - 1)(1 - \eta)(\eta - \xi + 1) / 4 \cdot e^{(-\xi-1)/L}, \\
M_3(\xi, \eta) &= (\xi + 1)(1 - \eta^2) / 2 \cdot e^{(-\xi-1)/L}, \\
M_4(\xi, \eta) &= (-\xi - 1)(-\eta - \xi + 1)(\eta + 1) / 4 \cdot e^{(-\xi-1)/L}, \\
M_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(\eta + 1) / 2 \cdot e^{-\xi/L}, \\
M_6(\xi, \eta) &= (\xi - 1)(-\eta + \xi + 1)(\eta + 1) / 4 \cdot e^{(1-\xi)/L}, \\
M_7(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta^2) / 2 \cdot e^{(1-\xi)/L}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Graficznie wyznaczone nieskończone bazowe funkcje interpolacji dla elementów z wykładniczymi funkcjami zaniku (4.10) przedstawiają się jak na rys. 4.4.

Pierwsze pochodne otrzymanych w ten sposób bazowych funkcji interpolacji odpowiednio po  $\xi$  i  $\eta$  wyniosą:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(\xi - 1)(1 - \eta)(\eta + \xi + 1)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4L} + \frac{(1 - \eta)(\eta + \xi + 1)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4} \\
&\quad + \frac{(\xi - 1)(1 - \eta)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4}, \\
\frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(1 - \xi^2)(1 - \eta)e^{-\frac{\xi}{L}}}{2L} - \xi(1 - \eta)e^{-\frac{\xi}{L}}, \\
\frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(-\xi - 1)(1 - \eta)(\eta - \xi + 1)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4L} - \frac{(1 - \eta)(\eta - \xi + 1)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4} \\
&\quad - \frac{(-\xi - 1)(1 - \eta)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4}, \\
\frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{(1 - \eta^2)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{2} - \frac{(\xi + 1)(1 - \eta^2)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{2L}, \\
\frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(-\xi - 1)(-\eta - \xi + 1)(\eta + 1)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4L} - \frac{(-\eta - \xi + 1)(\eta + 1)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4} \\
&\quad - \frac{(-\xi - 1)(\eta + 1)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4}, \\
\frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(1 - \xi^2)(\eta + 1)e^{-\frac{\xi}{L}}}{2L} - \xi(\eta + 1)e^{-\frac{\xi}{L}},
\end{aligned} \tag{4.12}$$



Rys. 4.4. Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wykładniczymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym, dla zanikania w dodatnim kierunku osi  $\xi$  ( $L = -2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(\xi - 1)(-\eta + \xi + 1)(\eta + 1)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4L} + \frac{(-\eta + \xi + 1)(\eta + 1)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4} \\ &\quad + \frac{(\xi - 1)(\eta + 1)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4}, \\ \frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{(1 - \xi)(1 - \eta^2)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{2L} - \frac{(1 - \eta^2)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{2}, \end{aligned}$$

oraz po  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\xi - 1)(1 - \eta)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4} - \frac{(\xi - 1)(\eta + \xi + 1)e^{\frac{1-\xi}{L}}}{4}, \\ \frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{(1 - \xi^2)e^{-\frac{\xi}{L}}}{2}, \\ \frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(-\xi - 1)(1 - \eta)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4} - \frac{(-\xi - 1)(\eta - \xi + 1)e^{\frac{-\xi-1}{L}}}{4}, \\ \frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -(\xi + 1)\eta e^{\frac{-\xi-1}{L}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(-\xi - 1)(-\eta - \xi + 1)e^{-\frac{\xi-1}{L}}}{4} - \frac{(-\xi - 1)(\eta + 1)e^{-\frac{\xi-1}{L}}}{4}, \\
\frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(1 - \xi^2)e^{-\frac{\xi}{L}}}{2}, \\
\frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{(\xi - 1)(-\eta + \xi + 1)e^{-\frac{1-\xi}{L}}}{4} - \frac{(\xi - 1)(\eta + 1)e^{-\frac{1-\xi}{L}}}{4}, \\
\frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -(1 - \xi)\eta e^{-\frac{1-\xi}{L}}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

W przypadku zanikania w dodatnich kierunkach obu osi  $\xi$  i  $\eta$ , funkcję zaniku zapiszemy jako:

$$D_i(\xi, \eta) = e^{(\xi_i + \eta_i - \xi - \eta)/L}. \tag{4.14}$$

W przypadku zanikania w ujemnym kierunku obu osi  $\xi$  i ujemnym osi  $\eta$ , funkcję zaniku zapiszemy jako:

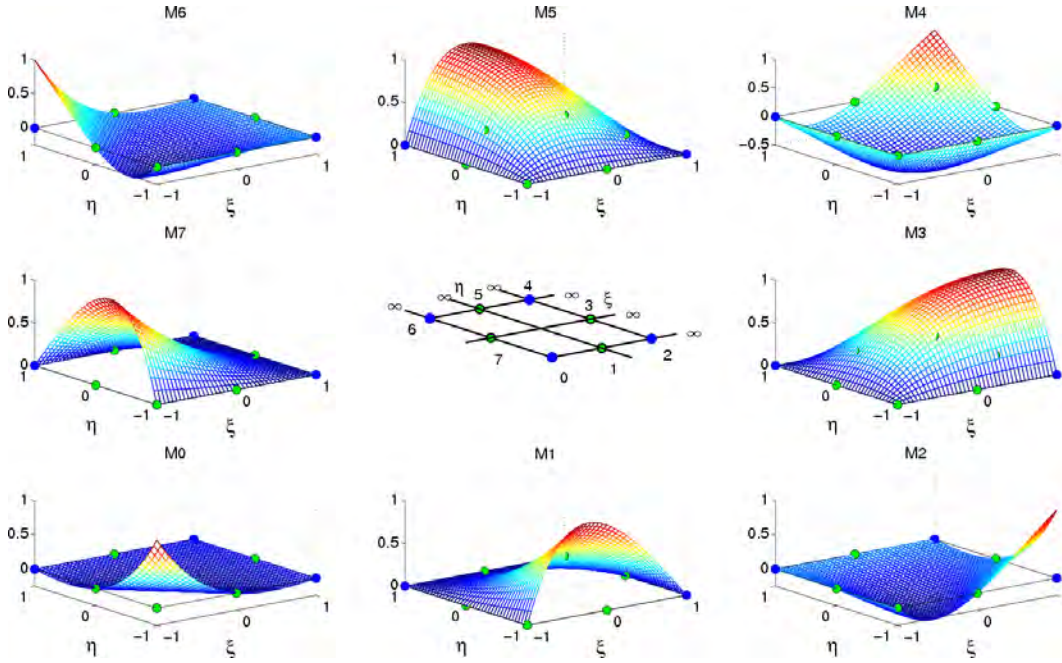
$$D_i(\xi, \eta) = e^{(\xi + \eta - \xi_i - \eta_i)/L}. \tag{4.15}$$

Składając funkcje zaniku (4.14) ze standardowymi funkcjami bazowymi interpolacji (4.3) otrzymamy bazowe funkcje interpolacji dla elementów nieskończonych:

$$\begin{aligned}
M_0(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)/4 \cdot e^{(-2 - \xi - \eta)/L}, \\
M_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2 \cdot e^{(-1 - \xi - \eta)/L}, \\
M_2(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)/4 \cdot e^{(-\xi - \eta)/L}, \\
M_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2 \cdot e^{(1 - \xi - \eta)/L}, \\
M_4(\xi, \eta) &= -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)/4 \cdot e^{(2 - \xi - \eta)/L}, \\
M_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2 \cdot e^{(1 - \xi - \eta)/L}, \\
M_6(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)/4 \cdot e^{(-\xi - \eta)/L}, \\
M_7(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta^2)/2 \cdot e^{(-1 - \xi - \eta)/L}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Graficznie wyznaczone nieskończone bazowe funkcje interpolacji dla elementów z wykładniczymi funkcjami zaniku (4.14) przedstawiają się jak na rys. 4.5.

Pierwsze pochodne otrzymanych w ten sposób bazowych funkcji interpolacji odpowiednio po  $\xi$  i  $\eta$  wyniosą:



Rys. 4.5. Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wykładniczymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym, dla zanikania w dodatnich kierunkach obu osi  $\xi$  o  $\eta$  ( $L = -2$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-\left((\eta^2 + (2\xi - 1)\eta - 2\xi)L + (1 - \xi)\eta^2 + (\xi - \xi^2)\eta + \xi^2 - 1\right)e^{(-\eta - \xi - 2)/L}}{4L}, \\
 \frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((2\xi\eta - 2\xi)L + (1 - \xi^2)\eta + \xi^2 - 1\right)e^{(-\eta - \xi + 1)/L}}{2L}, \\
 \frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((\eta^2 + (-2\xi - 1)\eta + 2\xi)L + (-\xi - 1)\eta^2 + (\xi^2 + \xi)\eta - \xi^2 + 1\right)e^{(-\eta - \xi)/L}}{4L}, \\
 \frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-\left((\eta^2 - 1)L + (-\xi - 1)\eta^2 + \xi + 1\right)e^{(-\eta - \xi + 1)/L}}{2L}, \\
 \frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((\eta^2 + (2\xi + 1)\eta + 2\xi)L + (-\xi - 1)\eta^2 + (-\xi^2 - \xi)\eta - \xi^2 + 1\right)e^{(-\eta - \xi + 2)/L}}{4L}, \\
 \frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-\left((2\xi\eta + 2\xi)L + (1 - \xi^2)\eta - \xi^2 + 1\right)e^{(-\eta - \xi + 1)/L}}{2L}, \\
 \frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-\left((\eta^2 + (1 - 2\xi)\eta - 2\xi)L + (1 - \xi)\eta^2 + (\xi^2 - \xi)\eta + \xi^2 - 1\right)e^{(-\eta - \xi)/L}}{4L}, \\
 \frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((\eta^2 - 1)L + (1 - \xi)\eta^2 + \xi - 1\right)e^{(-\eta - \xi - 1)/L}}{2L},
 \end{aligned} \tag{4.17}$$



oraz po  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-\left((2\xi - 2)\eta + \xi^2 - \xi\right)L + (1 - \xi)\eta^2 + (\xi - \xi^2)\eta + \xi^2 - 1}{4L} e^{(-\eta - \xi - 2)/L}, \\
\frac{\partial M_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((\xi^2 - 1)L + (1 - \xi^2)\eta + \xi^2 - 1\right)}{2L} e^{(-\eta - \xi - 1)/L}, \\
\frac{\partial M_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((2\xi + 2)\eta - \xi^2 - \xi\right)L + (-\xi - 1)\eta^2 + (\xi^2 + \xi)\eta - \xi^2 + 1}{4L} e^{(-\eta - \xi)/L}, \\
\frac{\partial M_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-(2\xi + 2)\eta L + (-\xi - 1)\eta^2 + \xi + 1}{2L} e^{(-\eta - \xi + 1)/L}, \\
\frac{\partial M_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((2\xi + 2)\eta + \xi^2 + \xi\right)L + (-\xi - 1)\eta^2 + (-\xi^2 - \xi)\eta - \xi^2 + 1}{4L} e^{(-\eta - \xi + 2)/L}, \\
\frac{\partial M_5(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-(\xi^2 - 1)L + (1 - \xi^2)\eta - \xi^2 + 1}{2L} e^{(-\eta - \xi + 1)/L}, \\
\frac{\partial M_6(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{-\left((2\xi - 2)\eta - \xi^2 + \xi\right)L + (1 - \xi)\eta^2 + (\xi^2 - \xi)\eta + \xi^2 - 1}{4L} e^{(-\eta - \xi)/L}, \\
\frac{\partial M_7(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\left((2\xi - 2)\eta L + (1 - \xi)\eta^2 + \xi - 1\right)}{2L} e^{(-\eta - \xi - 1)/L},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

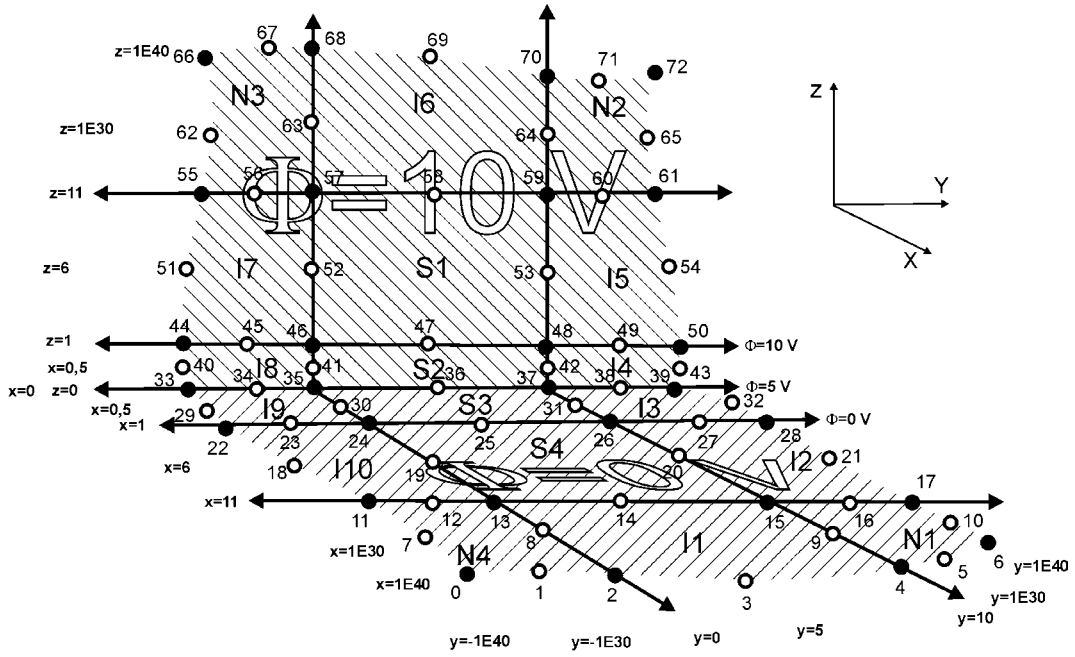
Przykładem zagadnienia wymagającego zastosowania elementów narożnych (zanikanie w kierunkach obu osi  $\xi$  i  $\eta$  jednocześnie) może być rozwinięcie analizowanego w rozdziale (3.4) przypadku, rysunek 3.7, dwóch nieskończenie rozległych półpłaszczyzn o różnych potencjałach. Trójwymiarowy model wraz ze stosowną dyskretyzacją przedstawiony jest na rysunku 4.6.

### 4.1.2 Jakobian

Każdy element powierzchni  $\Omega$  transformuje się do układu krzywoliniowego  $\xi, \eta, \zeta$ . Przejście z globalnego układu kartezjańskiego  $x, y, z$  do lokalnego krzywoliniowego układu  $\xi, \eta, \zeta$ , gdzie  $\xi, \eta$  są współrzędnymi lokalnymi a oś  $\zeta$  pokrywa się z kierunkiem i zwrotem wektora normalnego, zewnętrznego, do powierzchni  $\Omega$  opiera się na przekształceniu danej funkcji  $u$  określonym zależnością:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{d\xi} \\ \frac{du}{d\eta} \\ \frac{du}{d\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dx}{d\zeta} & \frac{dy}{d\zeta} & \frac{dz}{d\zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

gdzie macierz kwadratowa stanowi jacobian tego przekształcenia.



Rys. 4.6. Model zagadnienia wymagającego zastosowania narożnych nieskończonych elementów brzegowych  $N_1, N_2, N_3$  oraz  $N_4$

Ponieważ oś  $\zeta$  leży na kierunku normalnym do powierzchni elementu, wektor normalny  $\mathbf{n}$  można wyznaczyć jako iloczyn wektorowy dwóch wektorów stycznych  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi$  i  $\partial \mathbf{r} / \partial \eta$  jak to przedstawiono na rysunku 4.7. Element powierzchni  $d\Omega$  można więc wyrazić następująco [81, 16]:

$$d\Omega = d\xi d\eta = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\eta} \right| d\xi d\eta = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} d\xi d\eta, \quad (4.20)$$

gdzie

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{dy}{d\xi} \frac{dz}{d\eta} - \frac{dy}{d\eta} \frac{dz}{d\xi}, \\ n_y &= \frac{dz}{d\xi} \frac{dx}{d\eta} - \frac{dz}{d\eta} \frac{dx}{d\xi}, \\ n_z &= \frac{dx}{d\xi} \frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta} \frac{dy}{d\xi}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Istotne jest jeszcze uwzględnienie wektora normalnego  $\mathbf{n}$  do powierzchni elementarnej  $d\Omega$  (rysunek 4.7). Jest to realizowane w obliczeniach poprzez określenie zwrotu wektora normalnego, wiążąc początki i końce wektorów w elemencie z ustaloną zasadą numerowania węzłów w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



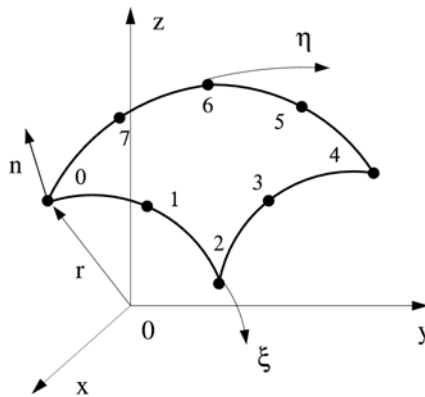
$$\begin{aligned}
\frac{dy(\xi, \eta)}{d\eta} &= \frac{dM_0(\xi, \eta)}{d\eta} y_0 + \frac{dM_1(\xi, \eta)}{d\eta} y_0 + \frac{dM_2(\xi, \eta)}{d\eta} y_0 + \frac{dM_3(\xi, \eta)}{d\eta} y_3 + \\
&\quad + \frac{dM_4(\xi, \eta)}{d\eta} y_4 + \frac{dM_5(\xi, \eta)}{d\eta} y_5 + \frac{dM_6(\xi, \eta)}{d\eta} y_6 + \frac{dM_7(\xi, \eta)}{d\eta} y_7, \\
\frac{dz(\xi, \eta)}{d\eta} &= \frac{dM_0(\xi, \eta)}{d\eta} z_0 + \frac{dM_1(\xi, \eta)}{d\eta} z_0 + \frac{dM_2(\xi, \eta)}{d\eta} z_0 + \frac{dM_3(\xi, \eta)}{d\eta} z_3 + \\
&\quad + \frac{dM_4(\xi, \eta)}{d\eta} z_4 + \frac{dM_5(\xi, \eta)}{d\eta} z_5 + \frac{dM_6(\xi, \eta)}{d\eta} z_6 + \frac{dM_7(\xi, \eta)}{d\eta} z_7.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Korzystając z równań (4.5), (4.6), (4.8), (4.9), (4.12), (4.13), (4.17) i (4.18)  $n_x, n_y, n_z$  dla bazowych funkcji interpolacji (4.4), (4.7), (4.11), (4.16) otrzymujemy jacobian transformacji pozwalającej na przejście z globalnego układu współrzędnych  $x, y, z$  do lokalnego układu  $\xi, \eta, \zeta$ .

### 4.1.3 Całkowanie numeryczne

Zależności z rozdziału o jednowymiarowych elementach nieskończonych z funkcjami zaniku związane ze zmianą granicy całkowania dla elementów nieskończonych odpowiednio, kwadratura Gaussa-Legendrea i Gaussa-Laguerrea rozdział 3.2.2 pozostają aktualne również dla dwuwymiarowych elementów nieskończonych.

**Całkowanie numeryczne całek nieosobliwych w odniesieniu do elementów czworokątnych**



Rys. 4.8. Lokalny układ współrzędnych krzywoliniowych  $\xi, \eta$  dla pojedynczego czworokątnego elementu brzegowego

Numeryczne całkowanie elementów brzegowych na powierzchni obiektów trójwymiarowych można przedstawić następująco:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n f(\xi_{1j}, \xi_{2i}) w_j \right) w_i. \quad (4.24)$$

Przykładowe współrzędne punktów Gaussa i odpowiadające im współczynniki wag są analogiczne jak w przypadku elementów jednowymiarowych - tabela 2.1. Wartości kolejnych współrzędnych  $\xi_2$  są powtórzeniem  $\xi_1$  a współczynniki wag są wspólne dla kolejnych par  $\xi_1, \xi_2$ .

### Całkowanie numeryczne całek osobliwych w odniesieniu do elementów czworokątnych

Jeżeli punkt obserwacji ( $\mathbf{r}$ ) pokrywa się lub leży bardzo blisko węzła elementu pojawiają się osobliwości wymagające odmiennego numerycznego całkowania niż (4.24). Jedną z najefektywniejszych metod jest metoda regularyzacji. Została ona zastosowana w obliczeniach i będzie zaprezentowana poniżej [81]. Schemat postępowania dla osobliwości zlokalizowanych w kolejnych węzłach ośmiowęzłowego elementu czworokątnego (osobliwości zakreślono kółkiem) rozpoczyna odwzorowanie trójwymiarowej przestrzeni Kartezjańskiej w przestrzeń dwuwymiarową za pomocą bazowych funkcji interpolacji. Następnie element z lokalnych współrzędnych krzywoliniowych  $\xi_1, \xi_2$  jest dzielony jest na dwa lub trzy trójkątne elementy zależnie od lokalizacji punktu osobliwego jak to przedstawiono na rysunku 4.9. Ostatecznie powstałe elementy trójkątne są ponownie odwzorowywane w kwadrat tak aby można było zastosować standardową kwadraturę Gaussa. W ten sposób wprowadzony zostaje kolejny jacobian związany z uniknięciem osobliwości w dwóch wymiarach.

#### Węzeł 0

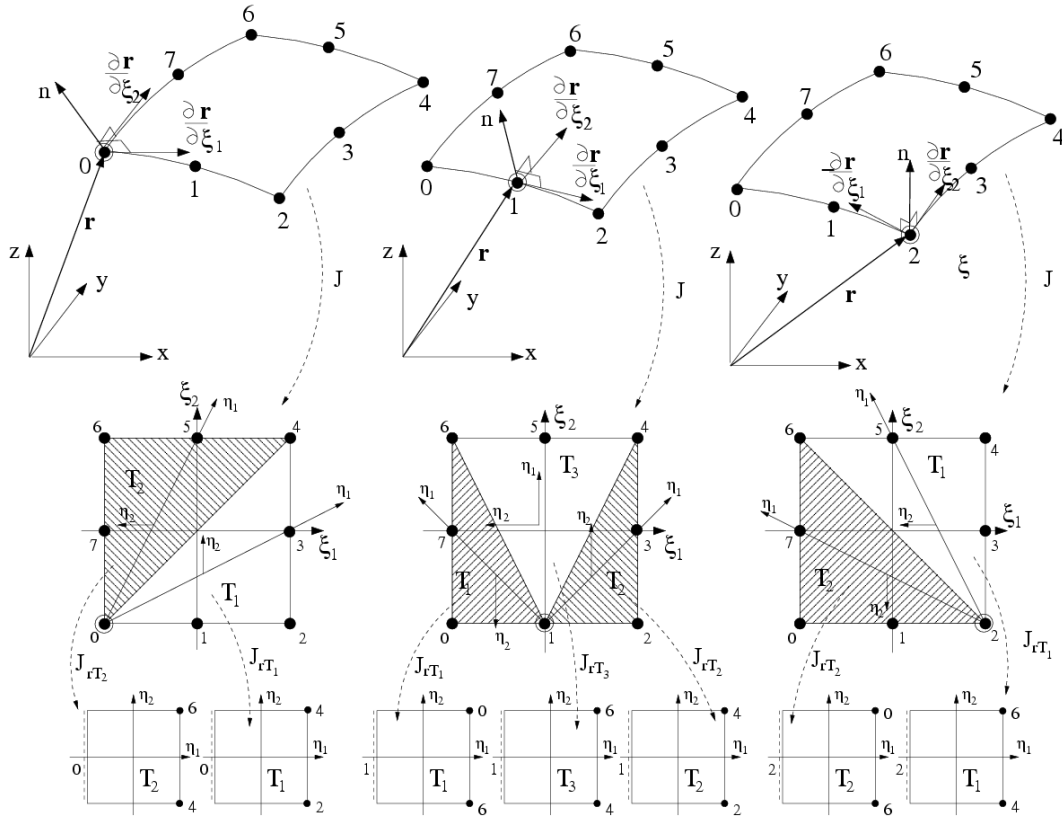
Dla trójkąta  $T_1$ :

$$\xi_1 = \eta_1 \quad \xi_2 = \frac{-1 + \eta_1 + (1 + \eta_1)\eta_2}{2}. \quad (4.25)$$

Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\xi_1 = \frac{-1 + \eta_1 - (1 + \eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = \eta_1. \quad (4.26)$$

Jacobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_r(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia



Rys. 4.9. Punkt osobliwy w węźle 0 (po lewej), w węźle 1 (w środku) i w węźle 2 (po prawej) [81]

się następująco:

$$J_r = \begin{vmatrix} \frac{d\xi_1}{d\eta_1} & \frac{d\xi_1}{d\eta_2} \\ \frac{d\xi_2}{d\eta_1} & \frac{d\xi_2}{d\eta_2} \end{vmatrix} = \frac{1 + \eta_1}{2}. \quad (4.27)$$

### Węzeł 1

Dla trójkąta  $T_1$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1 + \eta_1}{2} \\ \xi_2 &= \frac{-1 + \eta_1 - (1 + \eta_1)\eta_2}{2} \\ J_{r_{T_1}} &= \frac{1 + \eta_1}{4}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1 + \eta_1}{2} \\ \xi_2 &= \frac{-1 + \eta_1 + (1 + \eta_1)\eta_2}{2} \\ J_{r_{T_2}} &= \frac{1 + \eta_1}{4}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dla trójkąta  $T_3$ :

$$\xi_1 = -\frac{(1+\eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = \eta_1. \quad (4.30)$$

Jakobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_{r_{T_3}}(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia się następująco:

$$J_{r_{T_3}} = \frac{1+\eta_1}{2}. \quad (4.31)$$

### Węzeł 2

Dla trójkąta  $T_1$ :

$$\xi_1 = \frac{1-\eta_1-(1+\eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = \eta_1. \quad (4.32)$$

Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\xi_1 = -\eta_1 \quad \xi_2 = \frac{-1+\eta_1-(1+\eta_1)\eta_2}{2}. \quad (4.33)$$

Jakobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_r(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia się następująco:

$$J_r = \frac{1+\eta_1}{2} \quad (4.34)$$

Podobnie postępujemy dla osobliwości znajdujących się w węzłach 3, 4 i 5.

### Węzeł 3

Dla trójkąta  $T_1$ :

$$\xi_1 = \frac{1-\eta_1+(1+\eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = -\frac{1+\eta_1}{2}, \quad (4.35)$$

$$J_{r_{T_1}} = \frac{1+\eta_1}{4}. \quad (4.36)$$

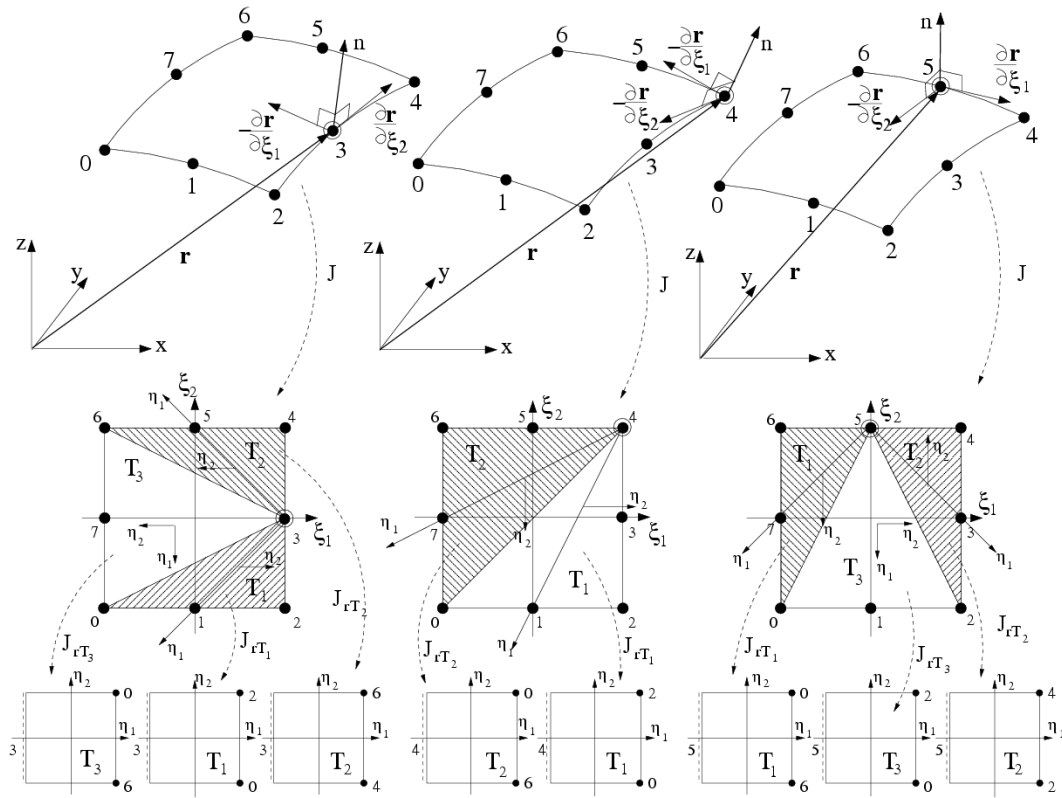
Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\xi_1 = \frac{1-\eta_1-(1+\eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = \frac{1+\eta_1}{2}, \quad (4.37)$$

$$J_{r_{T_2}} = \frac{1+\eta_1}{4}. \quad (4.38)$$

Dla trójkąta  $T_3$ :

$$\xi_1 = -\eta_1 \quad \xi_2 = -\frac{(1+\eta_1)\eta_2}{2}. \quad (4.39)$$



Rys. 4.10. Punkt osobliwy w węźle 3 (po lewej), w węźle 4 (w środku) i w węźle 5 (po prawej) [81]

Jakobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_{rT_3}(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia się następująco:

$$J_{rT_3} = \frac{1 + \eta_1}{2}. \quad (4.40)$$

#### Węzeł 4

Dla trójkąta  $T_1$ :

$$\xi_1 = \frac{-1 + \eta_1 + (1 + \eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = -\eta_1. \quad (4.41)$$

Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\xi_1 = \eta_1 \quad \xi_2 = \frac{1 - \eta_1 + (1 + \eta_1)\eta_2}{2}. \quad (4.42)$$

Jakobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_r(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia się następująco:

$$J_r = \frac{1 + \eta_1}{2}. \quad (4.43)$$



**Węzeł 5**

Dla trójkąta  $T_1$ :

$$\xi_1 = -\frac{1+\eta_1}{2} \quad \xi_2 = \frac{1-\eta_1-(1+\eta_1)\eta_2}{2}, \quad (4.44)$$

$$J_{r_{T_1}} = \frac{1+\eta_1}{4}. \quad (4.45)$$

Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\xi_1 = \frac{1+\eta_1}{2} \quad \xi_2 = \frac{1-\eta_1+(1+\eta_1)\eta_2}{2}, \quad (4.46)$$

$$J_{r_{T_2}} = \frac{1+\eta_1}{4}. \quad (4.47)$$

Dla trójkąta  $T_3$ :

$$\xi_1 = \frac{(1+\eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = -\eta_1. \quad (4.48)$$

Jakobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_{r_{T_3}}(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia się następująco:

$$J_{r_{T_3}} = \frac{1+\eta_1}{2}. \quad (4.49)$$

Analogicznie postępujemy dla osobliwości znajdujących się w ostatnich węzłach 6 i 7.

**Węzeł 6**

Dla trójkąta  $T_1$ :

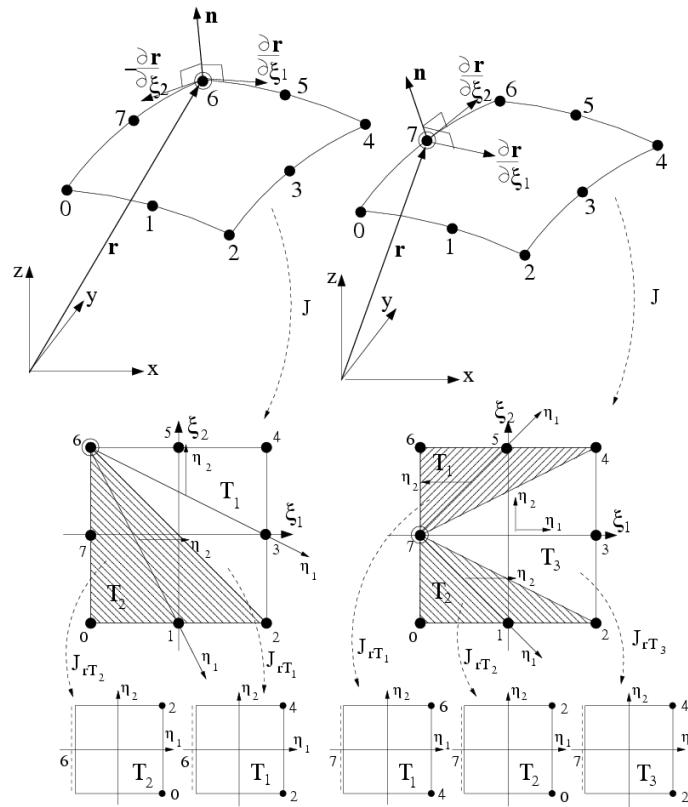
$$\xi_1 = \frac{-1+\eta_1+(1+\eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = -\eta_1. \quad (4.50)$$

Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\xi_1 = \eta_1 \quad \xi_2 = \frac{1-\eta_1+(1+\eta_1)\eta_2}{2}. \quad (4.51)$$

Jakobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_r(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia się następująco:

$$J_r = \frac{1+\eta_1}{2}. \quad (4.52)$$



Rys. 4.11. Punkt osobliwy w węźle 6 (po lewej) i w węźle 7 (po prawej) [81]

**Węzeł 7**Dla trójkąta  $T_1$ :

$$\xi_1 = \frac{-1 + \eta_1 + (1 + \eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = -\frac{1 + \eta_1}{2}, \quad (4.53)$$

$$J_{rT_1} = \frac{1 + \eta_1}{4}. \quad (4.54)$$

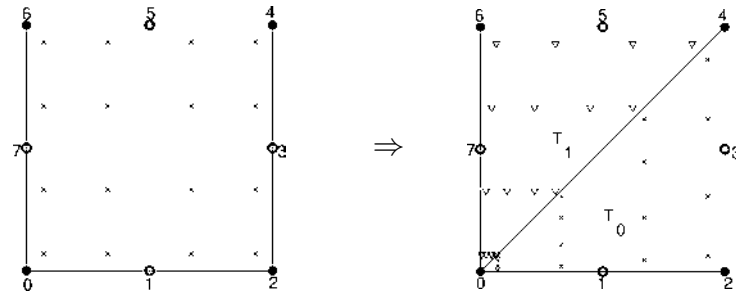
Dla trójkąta  $T_2$ :

$$\xi_1 = \frac{-1 + \eta_1 - (1 + \eta_1)\eta_2}{2} \quad \xi_2 = -\frac{1 + \eta_1}{2}, \quad (4.55)$$

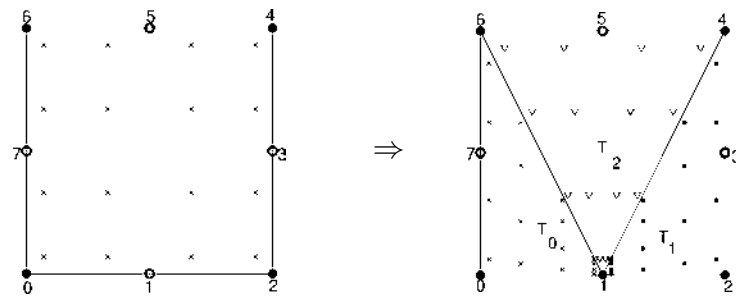
$$J_{rT_2} = \frac{1 + \eta_1}{4}. \quad (4.56)$$

Dla trójkąta  $T_3$ :

$$\xi_1 = \eta_1 \quad \xi_2 = \frac{(1 + \eta_1)\eta_2}{2}. \quad (4.57)$$



Rys. 4.12. Koncentracja punktów całkowania Gaussa wokół osobliwości w węźle 0



Rys. 4.13. Koncentracja punktów całkowania Gaussa wokół osobliwości w węźle 1

Jakobian regularyzacji związany z zamianą zmiennych  $J_{r_{T_3}}(\eta_1, \eta_2)$ , przedstawia się następująco:

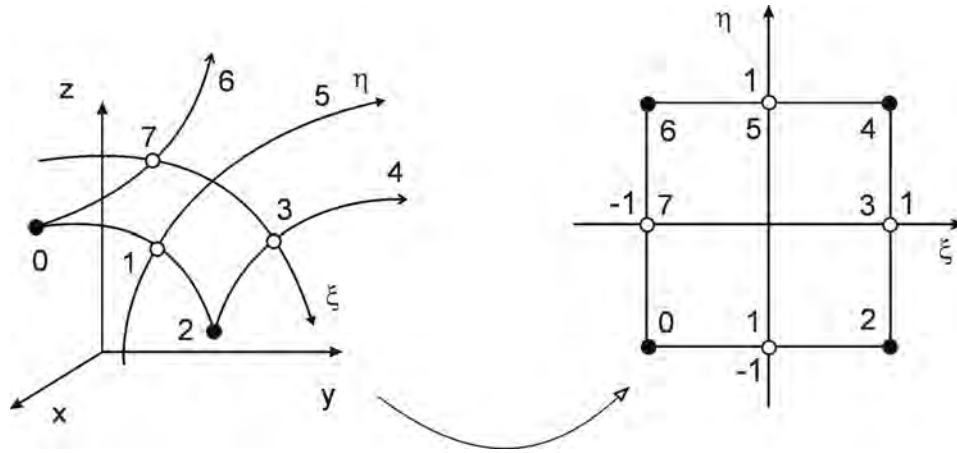
$$J_{r_{T_3}} = \frac{1 + \eta_1}{2}. \quad (4.58)$$

Rysunki 4.12 i 4.13 pokazują w jaki sposób podział elementu i odwzorowania geometrii powodują koncentrację punktów całkowania wokół osobliwości.

## 4.2 Elementy brzegowe nieskończone odwzorowane

Podobnie jak dla jednowymiarowych elementów brzegowych nieskończonych odwzorowanych (z transformacją geometrii) w przypadku elementów dwuwymiarowych (obiektów trójwymiarowych) wprowadzamy specjalne bazowe funkcje interpolacji M [15, 101, 79, 50] transformujące element nieskończony (rys. 4.14), do współrzędnych lokalnych  $\xi$ . Operujemy dwoma zestawami bazowych funkcji interpolacji. „Nieskończone” bazowe funkcje interpolacji  $M_i^m$

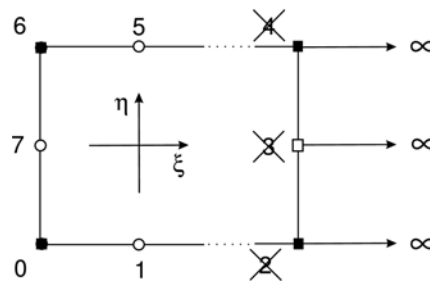
są używane do transformacji geometrii a standardowe bazowe funkcje interpolacji  $N_i^{std}$  [92, 10, 11] jedynie do interpolacji wartości zmiennej stanu. Bazowe



Rys. 4.14. Izoparametryczny element brzegowy nieskończony drugiego rzędu i jego transformacja ze współrzędnych  $x, y, z$  do  $\xi, \eta$

funkcje interpolacji  $M$  dla elementów dwuwymiarowych uzyskujemy poprzez właściwe połączenie funkcji jednowymiarowych standardowych i nieskończonych.

Wybór elementów brzegowych nieskończonych bazujących na standardowych czworokątnych izoparametrycznych elementach 8-węzłowych pociąga za sobą zastosowanie tzw. przypadkowych (ang. serendipity type) bazowych funkcji interpolacji [100, 15]. Pomimo złudnej nazwy są one logiczne i proces ich wyznaczania zostanie naszkicowany. Ośmiowęzłowy element brzegowy



Rys. 4.15. Czworokątny 8-węzłowy element brzegowy i bazujący na nim odwzorowany element nieskończony

i jego przekształcenie do 5-węzłowego elementu brzegowego nieskończonego przedstawia rys. 4.15.

Należy zaznaczyć, że element nieskończony zgodny z rys. 4.15 składać się będzie z jedynie 5 węzłów o numerach 0, 1, 5, 6 i 7. Na początek wyznaczone zostaną nieskończone bazowe funkcje interpolacji  $M_i$  dla węzłów środkowych. Węzeł 7 ( $\xi = -1$  i  $\eta = 0$ ):

Bazowa funkcja interpolacji  $M_7$  jest iloczynem jednowymiarowej liniowej nieskończonej bazowej funkcji interpolacji wzdłuż współrzędnej  $\xi$  i jednowymiarowej kwadratowej standardowej bazowej funkcji interpolacji w kierunku  $\eta$ :

$$M_7 = \frac{2}{1-\xi} \cdot (1-\eta^2). \quad (4.59)$$

Węzły 1 ( $\xi = 0$  i  $\eta = -1$ ) i 5 ( $\xi = 0$  i  $\eta = 1$ ):

Bazowe funkcje interpolacji  $M_1$  i  $M_5$  są iloczynem jednowymiarowej kwadratowej nieskończonej bazowej funkcji interpolacji wzdłuż współrzędnej  $\xi$  i odpowiedniej liniowej standardowej bazowej funkcji interpolacji w kierunku  $\eta$ :

$$M_1 = \frac{1+\xi}{1-\xi} \cdot \frac{1}{2}(1-\eta), \quad M_5 = \frac{1+\xi}{1-\xi} \cdot \frac{1}{2}(1+\eta). \quad (4.60)$$

Węzły 0 ( $\xi = 0$  i  $\eta = -1$ ) i 6 ( $\xi = 0$  i  $\eta = 1$ ):

Bazowe funkcje interpolacji  $M_0$  i  $M_6$  są konstruowane dwuetapowo. W pierwszym kroku są one iloczynem liniowej nieskończonej bazowej funkcji interpolacji wzdłuż współrzędnej  $\xi$  i odpowiedniej liniowej standardowej bazowej funkcji interpolacji w kierunku  $\eta$ :

$$\hat{M}_0 = \frac{2}{1-\xi} \cdot \frac{1}{2}(1-\eta) = \frac{1-\eta}{1-\xi}, \quad (4.61)$$

$$\hat{M}_6 = \frac{2}{1-\xi} \cdot \frac{1}{2}(1+\eta) = \frac{1+\eta}{1-\xi}.$$

Funkcje (4.61) nie spełniają jednak warunku przyjmowania wartości zerowych odpowiednio w węzłach środkowych 7 i 1:

$$\hat{M}_0(-1, 0) = \frac{1}{2}, \quad \hat{M}_6(0, -1) = 2. \quad (4.62)$$

oraz w węzłach środkowych 7 i 5:

$$\hat{M}_6(-1, 0) = \frac{1}{2}, \quad \hat{M}_6(0, 1) = 2. \quad (4.63)$$

Korygowane jest to w drugim kroku. Jako, że bazowe funkcje interpolacji  $M_1$ ,  $M_5$  i  $M_7$  we własnych węzłach przyjmować muszą wartość 1 a w pozostałych 0 wystarczy dołożyć ich przemnożone przez stałą wartości do funkcji

$\hat{M}_0$  i  $\hat{M}_6$ :

$$\begin{aligned} M_0 &= \hat{M}_0 - 2M_1 - \frac{1}{2}M_7 = \frac{-1 - \xi + \xi\eta + \eta^2}{1 - \xi}, \\ M_6 &= \hat{M}_6 - 2M_5 - \frac{1}{2}M_7 = \frac{-1 - \xi - \xi\eta + \eta^2}{1 - \xi}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Grupując razem wyprowadzone bazowe funkcje interpolacji dla odwzorowanych elementów brzegowych nieskończonych możemy zapisać:

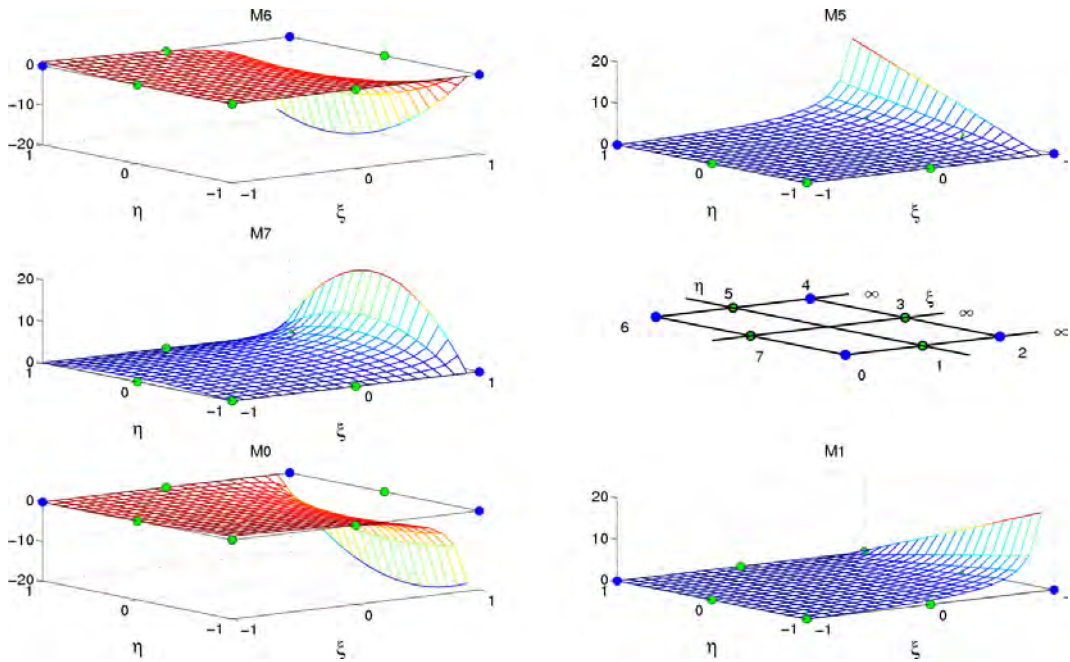
$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{-1 - \xi + \xi\eta + \eta^2}{1 - \xi}, \\ M_1 &= \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \cdot \frac{1}{2} (1 - \eta), \\ M_5 &= \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \cdot \frac{1}{2} (1 + \eta), \\ M_6 &= \frac{-1 - \xi - \xi\eta + \eta^2}{1 - \xi}, \\ M_7 &= \frac{2}{1 - \xi} \cdot (1 - \eta^2), \end{aligned} \quad (4.65)$$

Graficzna prezentacja nieskończonych bazowych funkcji interpolacji przedstawia się jak na rysunku 4.16. Pierwsze pochodne bazowych funkcji interpolacji  $M$  po zmiennej  $\xi$  i  $\eta$  przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_7}{\partial \xi} &= \frac{2}{(1 - \xi)^2} \cdot (1 - \eta^2), \\ \frac{\partial M_1}{\partial \xi} &= \frac{1 - \eta}{(1 - \xi)^2}, \\ \frac{\partial M_5}{\partial \xi} &= \frac{1 + \eta}{(1 - \xi)^2}, \\ \frac{\partial M_0}{\partial \xi} &= \frac{-2 + \eta + \eta^2}{(1 - \xi)^2}, \\ \frac{\partial M_6}{\partial \xi} &= \frac{-2 - \eta - \eta^2}{(1 - \xi)^2}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

a po zmiennej  $\eta$  jak poniżej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_7}{\partial \eta} &= \frac{-4\eta}{1 - \xi}, \\ \frac{\partial M_1}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \xi}{1 - \xi}, \end{aligned}$$



Rys. 4.16. Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla odwzorowanego elementu nieskończonego bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym dla przypadku zanikania w dodatnim kierunku osi  $\xi$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_5}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \xi}{1 - \xi}, \\
 \frac{\partial M_0}{\partial \eta} &= \frac{\xi - 2\eta}{1 - \xi}, \\
 \frac{\partial M_6}{\partial \eta} &= \frac{2\eta - \xi}{1 - \xi}.
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Analogicznie jak dla jednowymiarowych elementów nieskończonych odwzorowanych w obliczeniach nie są uwzględniane węzły „uciekające” do nieskończoności. Dla przypadku jak na rys.4.15 będą to węzły 2, 3 i 4.

Podobnie jak w przypadku elementów brzegowych nieskończonych z funkcjami zaniku w elementach odwzorowanych również możemy mieć do czynienia z elementami narożnymi. Logika wyznaczenia stosownych bazowych funkcji interpolacji jest podobna jak w przypadku zanikania w jednym tylko kierunku, tzn. funkcje te składane są ze stosownych funkcji jednowymiarowych.

Bazowa funkcja interpolacji dla węzła 1 ( $\xi = 0$  i  $\eta = -1$ ) jest iloczynem jednowymiarowej nieskończonej kwadratowej bazowej funkcji interpolacji w kierunku  $\xi$  i jednowymiarowej nieskończonej liniowej bazowej funkcji interpolacji

w kierunku  $\eta$ :

$$M_1 = \frac{1+\xi}{1-\xi} \cdot \frac{2}{1-\eta} = \frac{2(1+\xi)}{(1-\xi)(1-\eta)}. \quad (4.68)$$

Bazowa funkcja interpolacji dla węzła 7 ( $\xi = -1$  i  $\eta = 0$ ) jest iloczynem jednowymiarowej nieskończonej liniowej bazowej funkcji interpolacji w kierunku  $\xi$  i jednowymiarowej nieskończonej kwadratowej bazowej funkcji interpolacji w kierunku  $\eta$ :

$$M_7 = \frac{2}{1-\xi} \cdot \frac{1+\eta}{1-\eta} = \frac{2(1+\eta)}{(1-\xi)(1-\eta)}. \quad (4.69)$$

Bazowa funkcja interpolacji dla węzła 0 ( $\xi = -1$  i  $\eta = -1$ ) jest iloczynem jednowymiarowych nieskończonych kwadratowych bazowych funkcji interpolacji w każdym z kierunków. Analogicznie jak w przypadku funkcji (4.61) jest ona konstruowana dwuetapowo. W pierwszym kroku będzie to iloczyn liniowej nieskończonej bazowej funkcji interpolacji wzdłuż współrzędnej  $\xi$  i liniowej standardowej bazowej funkcji interpolacji w kierunku  $\eta$ :

$$\hat{M}_0 = \frac{2}{1-\xi} \cdot \frac{2}{1-\eta} = \frac{4}{(1-\eta)(1-\xi)}. \quad (4.70)$$

Funkcja (4.70) nie spełnia jednak warunku przyjmowania wartości zerowych odpowiednio w węzłach środkowych 1 i 7:

$$\hat{M}_0(0, -1) = 2, \quad \hat{M}_0(-1, 0) = 2. \quad (4.71)$$

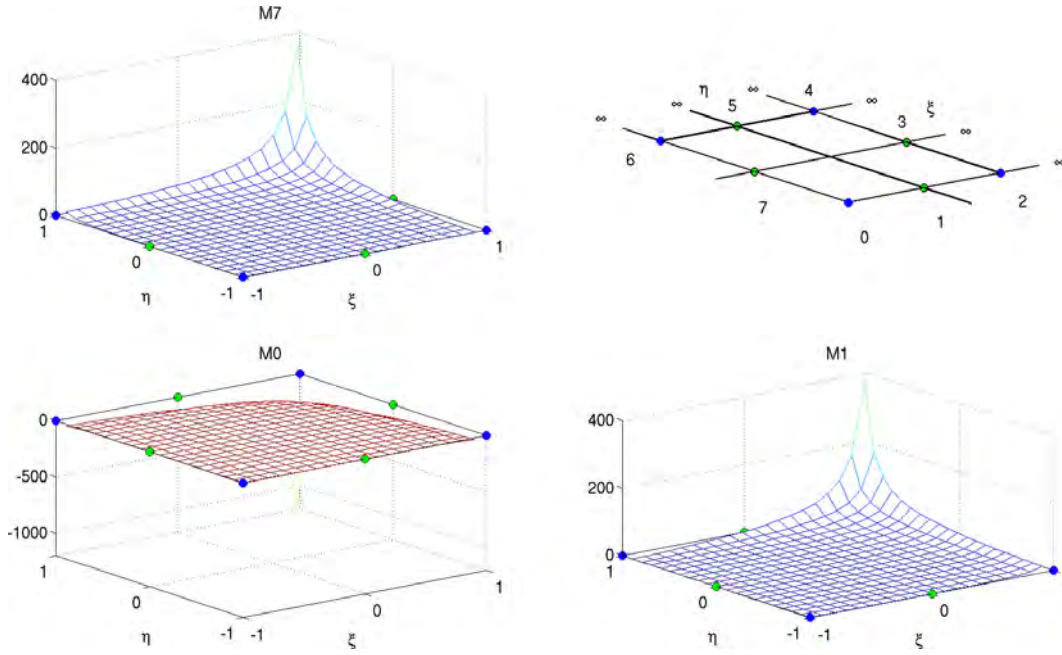
Korygowane jest to w drugim kroku. Jako, że bazowe funkcje interpolacji  $M_1$  i  $M_7$  we własnych węzłach przyjmować muszą wartość 1 a w pozostałych 0 wystarczy dołożyć ich przemnożone przez stałą wartości do funkcji  $\hat{M}_0$  i  $\hat{M}_6$ :

$$M_0 = \hat{M}_0 - 2M_1 - 2M_7 = \frac{4 - 4(1+\xi) - 4(1+\eta)}{(1-\eta)(1-\xi)},$$

$$M_0 = \frac{-4(1+\xi+\eta)}{(1-\eta)(1-\xi)}. \quad (4.72)$$

Graficzna prezentacja nieskończonych bazowych funkcji interpolacji w przypadku zanikania w dodatnim kierunku osi  $\xi$  i  $\eta$  przedstawia się jak na rysunku 4.17.





Rys. 4.17. Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla odwzorowanego elementu nieskończonego bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym dla przypadku zanikania w dodatnim kierunku osi  $\xi$

Warto jeszcze sprawdzić podobnie jak w wypadku elementów jednowymiarowych (równanie (3.36)) czy po transformacji z lokalnego do globalnego układu współrzędnych, współrzędne  $x$  i  $y$  przyjmą poprawne wartości  $(x_i, y_i)$ . Czyli sprawdzić dla kolejnych węzłów wynik:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^7 M_i(\xi, \eta) x_i = M_0(\xi) x_0 + M_1(\xi) x_1 + M_7(\xi) x_7, \quad (4.73)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^7 M_i(\xi, \eta) y_i = M_0(\xi) y_0 + M_1(\xi) y_1 + M_7(\xi) y_7.$$

Podstawiając do (4.73), bazowe funkcje interpolacji ((4.72), (4.68) i (4.69)) otrzymamy dla węzłów nie “uciekających” do nieskończoności i uwzględniających w obliczeniach ich własne współrzędne :

w węźle 0 ( $\xi = -1, \eta = -1$ ):  $x = x_0, y = y_0$ ,

w węźle 1 ( $\xi = 0, \eta = -1$ ):  $x = x_1, y = y_1$ ,

w węźle 7 ( $\xi = +1, \eta = -1$ ):  $x = x_7, y = y_7$ .

Pierwsze pochodne bazowych funkcji interpolacji  $M$  po zmiennej  $\xi$  i  $\eta$  przed-

stawiają się następująco:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_0}{\partial \xi} &= \frac{-4(2+\eta)}{(1-\xi)^2(1-\eta)}, \\ \frac{\partial M_1}{\partial \xi} &= \frac{4}{(1-\xi)^2(1-\eta)}, \\ \frac{\partial M_7}{\partial \xi} &= \frac{2(\eta+1)}{(1-\xi)^2(1-\eta)},\end{aligned}\tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_0}{\partial \eta} &= \frac{-4(2+\xi)}{(1-\xi)(1-\eta)^2}, \\ \frac{\partial M_1}{\partial \eta} &= \frac{2(\xi+1)}{(1-\xi)(1-\eta)^2}, \\ \frac{\partial M_7}{\partial \eta} &= \frac{4}{(1-\xi)(1-\eta)^2}.\end{aligned}\tag{4.75}$$

W elemencie odwzorowanym narożnym w obliczeniach uwzględniane są tylko trzy węzły: 0, 1 i 7.

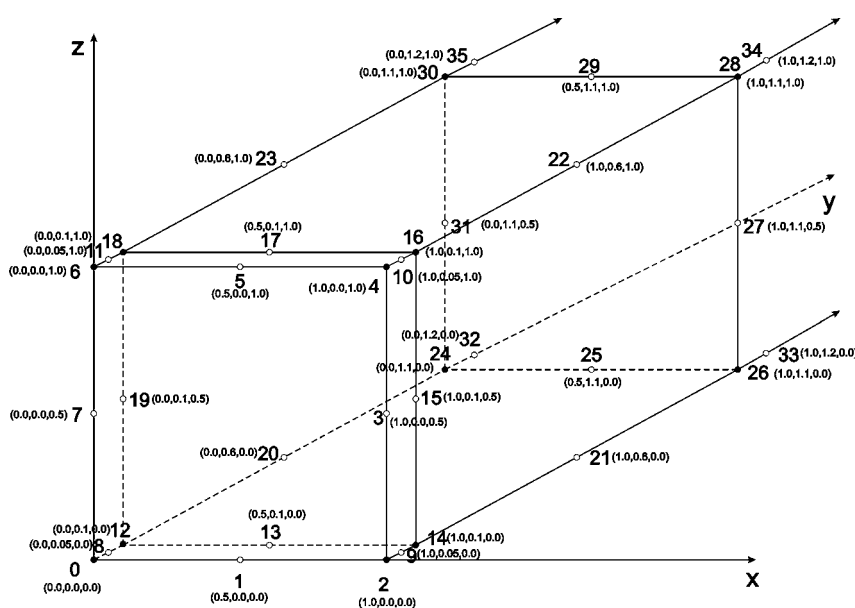
Równanie całkowo brzegowe zawierające oba podobszary – skończony i nieskończony w postaci zdyskretyzowanej wraz ze standardowymi bazowymi funkcjami interpolacji N (stosowanymi jedynie do interpolacji wartości zmiennej stanu) i nieskończonymi bazowymi funkcjami interpolacji M (transformującymi geometrię) jest następujące:

$$\begin{aligned}c(\mathbf{r})\Phi_i(\mathbf{r}) &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^7 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(\mathbf{r}') N_k(\xi, \eta) \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J^N(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^4 \int_{-1}^{\infty} \int_{-1}^{+1} \Phi(\mathbf{r}') M_l(\xi, \eta) \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J^M(\xi, \eta) d\xi d\eta = \tag{4.76} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^7 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_k(\xi, \eta) J^N(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^4 \int_{-1}^{\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) M_l(\xi, \eta) J^M(\xi, \eta) d\xi d\eta.\end{aligned}$$

W przedstawionym zapisie różnica w stosunku do równania bazowego z elementami nieskończonych z funkcjami zaniku wiąże się z pominięciem w obliczeniach “uciekających do nieskończoności” węzłów w elementach nieskończonych.

## 4.3 Przykład obliczeniowy - nieskończony tunel

Pierwszy trójwymiarowy przykład wykorzystujący elementy nieskończone stanowi model nieskończonego tunelu przedstawiony na rysunku 4.20. Model ten jest łącznikiem do rozdziału pracy odnoszącego się do rzeczywistych pomiarów związanych z badaniem zawilgoceń murów. W pierwszym etapie obliczeń dokonano na uproszczonym modelu, rysunek 4.18, składającym się z minimalnej ilości elementów. Rysunki 4.18 oraz 4.19 przedstawiają konstrukcję siatki elementów, numerację węzłów, ich współrzędne oraz kierunek numerowania węzłów w elementach.



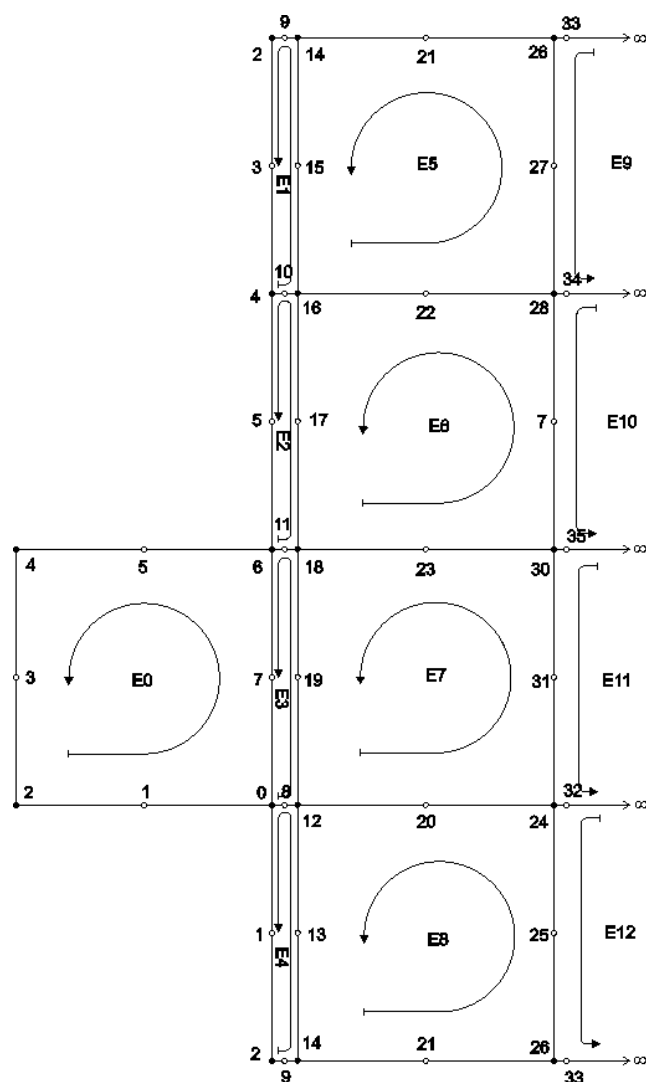
Rys. 4.18. Uproszczony model nieskończonego tunelu z numerami i współrzędnymi węzłów

Ponieważ nie istnieją generatory siatek, które pozwalałyby na konstrukcję obiektów z elementami nieskończonymi niezbędne było zweryfikowanie tworzonej samodzielnie tej i kolejnych siatek oraz implementacji elementów nieskończonych na tego typu prostym obiekcie złożonym z 9 standardowych elementów i 4 nieskończonych.

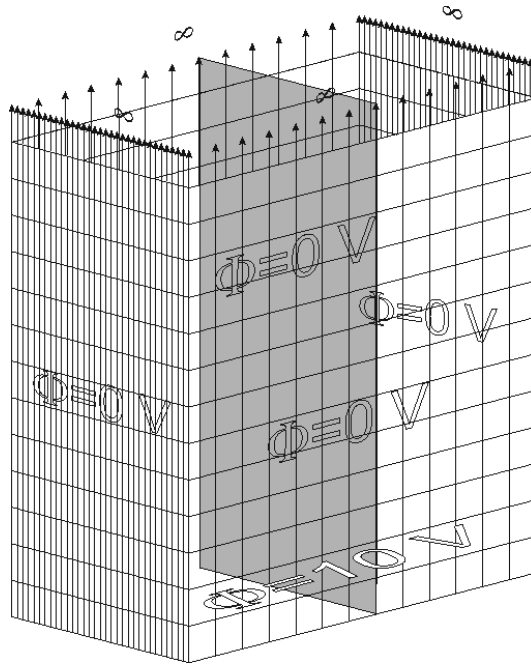
W celu uzyskania rozsądnej dokładności obliczeń liczbę elementów w modelu tunelu w drugim etapie zwiększono do 856. Geometrię z rysunku 4.20 można najprościej opisać jako: 12-elementów  $\times$  13-elementów  $\times$  13-elementów standardowych na poszczególnych bokach modelu i 50 kolejnych nieskończo-

nych elementów zamiast górnej powierzchni. Na wszystkich bokach tunelu przyjęto wartość potencjału  $\Phi = 0V$  a na podstawie  $\Phi = 10V$ . Podobnie jak w modelu dwuwymiarowym z rysunku 3.7 na styku naładowanych powierzchni pojawi się skok potencjału i związane z nim obliczeniowo osobliwości. Z tego powodu w elementach których węzły należą do krawędzi styku tych powierzchni przyjęto, że potencjał maleje stopniowo z 10V poprzez 7,5V do 5V na wspomnianej krawędzi i po drugiej stronie krawędzi z 5V poprzez 2,5V do 0V.

Wartością poszukiwaną jest rozkład pochodnej potencjału  $\partial\Phi/\partial n$ . Na wy-



Rys. 4.19. Siatka elementów brzegowych odpowiadająca modelowi nieskończonego tunelu ja na rysunku 4.18 z zaznaczonym kierunkiem numerowania węzłów w elementach

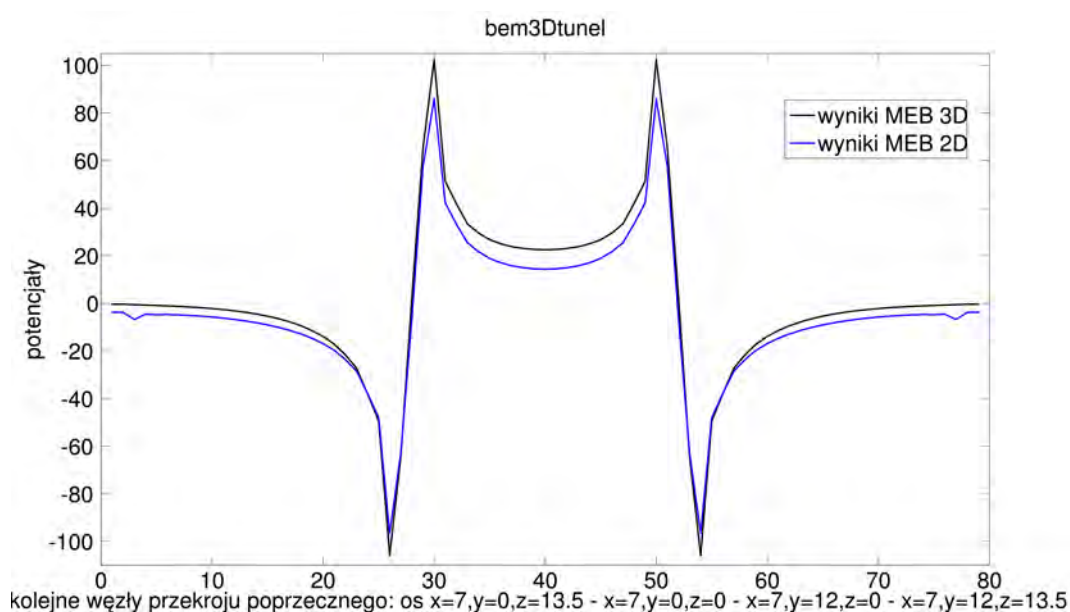


Rys. 4.20. Model nieskończonego tunelu zbudowanego z 856 elementów z elementami nieskończonymi analogiczny do modelu uproszczonego z rysunku 4.18

kresie 4.21 przedstawiono kolejne wartości  $\partial\Phi/\partial n$  w węzłach znajdujących się na krawędzi przekroju poprzecznego zaznaczonego szarym kolorem na rysunku 4.20 począwszy od punktu znajdującego się u szczytu jednej krawędzi ( $x = 7, y = 0, z = 13.5$ ) w dół do podstawy ( $x = 7, y = 0, z = 0$ ) wzdłuż podstawy ( $x = 7, y = 12, z = 0$ ) i ponownie do szczytowego węzła drugiej krawędzi przekroju ( $x = 7, y = 12, z = 13.5$ ). Dodatkowo na wykresie umieszczono wyniki uzyskane dla analogicznego modelu dwuwymiarowego. Jak można się było spodziewać z analogii modeli przebiegi te wykazują podobieństwo do przedstawionych w rozdziale 3.4. Zwiększenie szerokości muru (przez zwiększenie liczby elementów lub proste zwiększenie szerokości elementów wzdłuż współrzędnej  $x$ ) powoduje zbliżanie się rozwiązań 2D i 3D. Dalsze rozwinięcie powyższego modelu stanowić będzie analiza zawilgoceń murów zaprezentowana w rozdziale 6.

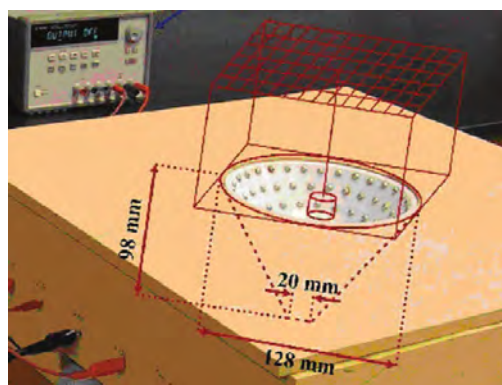
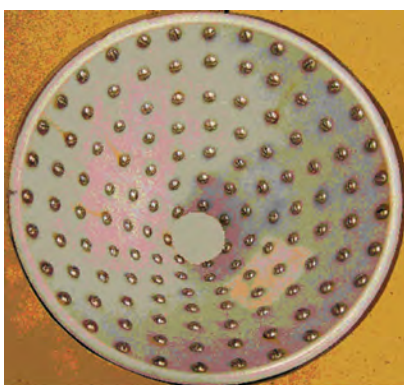
## 4.4 Przykład obliczeniowy - model piersi

Przykładem zastosowania elementów brzegowych nieskończonych może być model piersi używany w tomografii impedancyjnej i dyfuzyjnej optycznej w odniesieniu do wykrywania nowotworów piersi. Tomografy takie najczęściej wy-



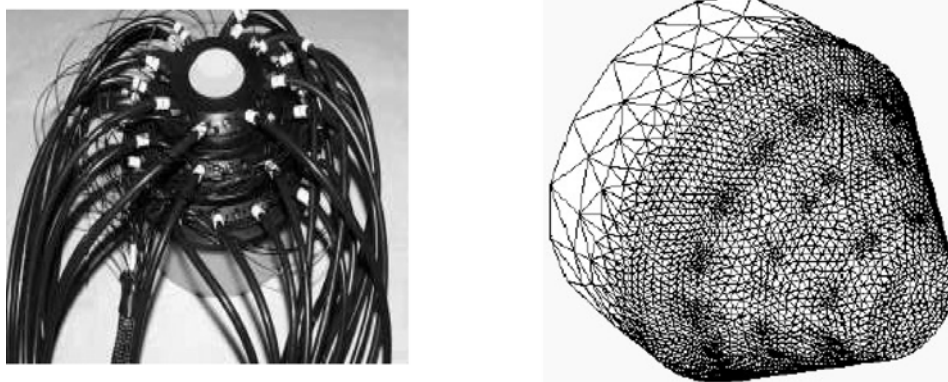
Rys. 4.21. Wykres  $\partial\Phi/\partial n$  na brzegu przekroju poprzecznego jak na rysunku 4.20

korzystują formę w postaci półsfery lub stożka wewnątrz której rozmieszczone są źródła i detektory. Przykłady takich urządzeń prezentują zdjęcia z rysunków 4.22 i 4.23. Warto zwrócić uwagę, że siatki elementów w obu przypadkach zawierają dodatkowe obszary sześcienny z siatką czworokątną i cylindryczny z siatką trójkątną o mniejszej gęstości dyskretyzacji obejmujące dodatkowy obszar poza strefą pomiarów.



Rys. 4.22. Przykład geometrii formy z elektrodami oraz siatki elementów stosowanych w tomografii impedancyjnej piersi [97]

Z obliczeniowego punktu widzenia Metoda Elementów Brzegowych wymaga

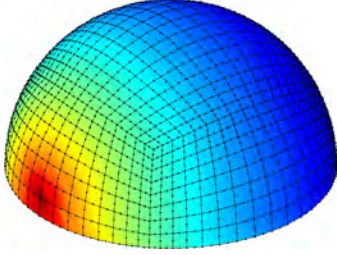


Rys. 4.23. Przykład geometrii formy o siatki modelu stosowanej w mammo-grafii optycznej piersi

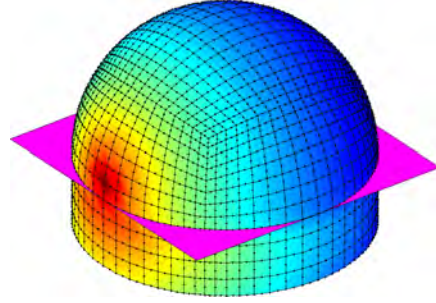
aby warunki brzegowe określone były na wszystkich powierzchniach badanego obiektu. Siatkę elektrod lub detektorów zliczania fotonów światła można rozmieścić jedynie na powierzchni skóry pacjenta. Nie ma natomiast możliwości dokonania takich pomiarów na styku klatki piersiowej i tkanki piersi. Uzyskanie precyzyjnych wartości współczynników dla mieszanych warunków brzegowych na takiej powierzchni drogą pomiarową jest niemożliwe. Trudno również dla każdego pacjenta czy ułożenia ciała precyzyjnie określić granicę tkanki piersi i tkanek mięśniowo-kostnych klatki piersiowej. Należy przy tym pamiętać że nawet niewielkie błędy w określeniu warunków brzegowych na powierzchni skutkują w MEB dużymi błędami w wyznaczanym obrazie wnętrza obiektu.

W celu przeanalizowania tego zagadnienia porównano cztery modele piersi. Dla wszystkich przypadków pojedyncze źródło światła umieszczono w tym samym miejscu w pobliżu podstawy półsfery. Pierwszy model przedstawiony na rysunku 4.24 stanowi półsfera. Drugi model rozszerzono dodając walec odpowiadający objęciu siatką elementów fragmentu klatki piersiowej (rysunek 4.25). Trzeci model stanowi dalsze rozwinięcie tej idei. Dodany walec ma w tym przypadku większą średnicę podstawy (rysunek 4.26). Wszystkie te modele zbudowane są z 1536 czworokątnych, ośmiowęzłowych elementów brzegowych drugiego rzędu [15, 10, 11] i 4610 węzłów. W każdym z tych przypadków połowa elementów pokrywa półsferę. Ostatni model przedstawiony na rysunku 4.27 zbudowany jest z takiej samej liczby elementów ułożonych na półsferze tj. 768 oraz z 64 pięciowęzłowych elementów nieskończonych odwzorowanych bazujących na ośmiowęzłowych czworokątnych elementach standar-

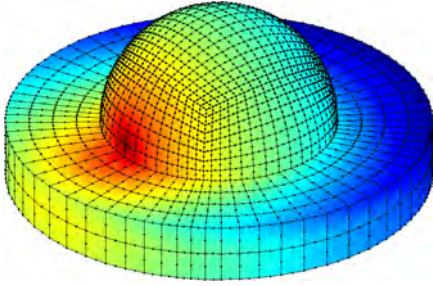
dowych drugiego rzędu. Liczba węzłów została w tym przypadku zredukowana do 2433.



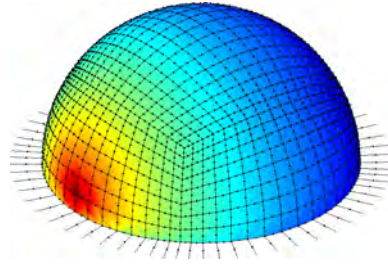
Rys. 4.24. Model piersi w postaci półsfery



Rys. 4.25. Model piersi w postaci półsfery z dodanym obszarem cylindrycznym odpowiadającym fragmentowi klatki piersiowej



Rys. 4.26. Model piersi w postaci półsfery z dodanym rozszerzonym obszarem cylindrycznym odpowiadającym fragmentowi klatki piersiowej



Rys. 4.27. Model piersi w postaci półsfery z otwartym brzegiem i elementami nieskończonymi

Zagadnienie opisane jest równaniem dyfuzji w dziedzinie częstotliwości [7, 81, 90] (równaniem Helmholtza przy założeniu, że tkanki są jednorodne z punktu widzenia współczynników odbicia i rozpraszania światła):

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega) - k^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{q_0(\mathbf{r}, \omega)}{D}, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega/\Gamma, \quad (4.77)$$

gdzie  $\Phi$  odpowiada gęstości fotonów,  $k = \sqrt{\frac{\mu_a}{D} - j\frac{\omega}{cD}}$  liczba falowa,  $D = [3(\mu_a + \mu'_S)]^{-1} [mm^{-1}]$  współczynnikowi dyfuzji,  $\mu'_S$  tzw. zredukowanemu współczynnikowi rozpraszania,  $\mu_a$  współczynnikowi pochłaniania,  $c$  prędkość światła



w medium a  $q_0$  punktowemu źródłu światła (liczba fotonów na jednostkę objętości emitowana przez punktowe źródło światła znajdujące się w pozycji  $\mathbf{r}$  o częstotliwości modulacji  $\omega$ ).

Generalnie w tomografii optycznej piersi a ściśle w dyfuzyjnej tomografii optycznej poszukuje się rozkładu  $\mu_a$  i  $\mu'_s$ .

Stosowne warunki brzegowe to warunki Robina [7, 81, 90]:

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) + 2\alpha D \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial n} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (4.78)$$

W analizowanych przykładach przyjęto zgodnie z literaturą przedmiotu [7, 90]  $\mu_a = 0.025[mm^{-1}]$ ,  $\mu'_s = 2[mm^{-1}]$ ,  $\alpha = 1$ ,  $f = 100kHz$  dla tkanki piersi.

Równanie całkowo brzegowe dla modelu z elementami nieskończonymi można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') d\Omega + \\ + \int_{\Omega_{\infty}} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') d\Omega_{\infty} = \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Omega + \\ + \int_{\Omega_{\infty}} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Omega_{\infty} - \sum_{S=0}^{n_S-1} Q_S G(|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|, \omega). \end{aligned}$$

gdzie  $Q_S$  odpowiada amplitudzie punktowego źródła światła ( $q_0 = Q_S \delta(\mathbf{r}_S)$ ) a  $n_S$  odpowiada liczbie tych źródeł. Dla równania dyfuzji w przestrzeni 3D rozwiązanie podstawowe ma postać:

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.79)$$

Pochodna normalna funkcji Greena wynosi:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla G = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( \frac{-1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{k}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) e^{-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.80)$$

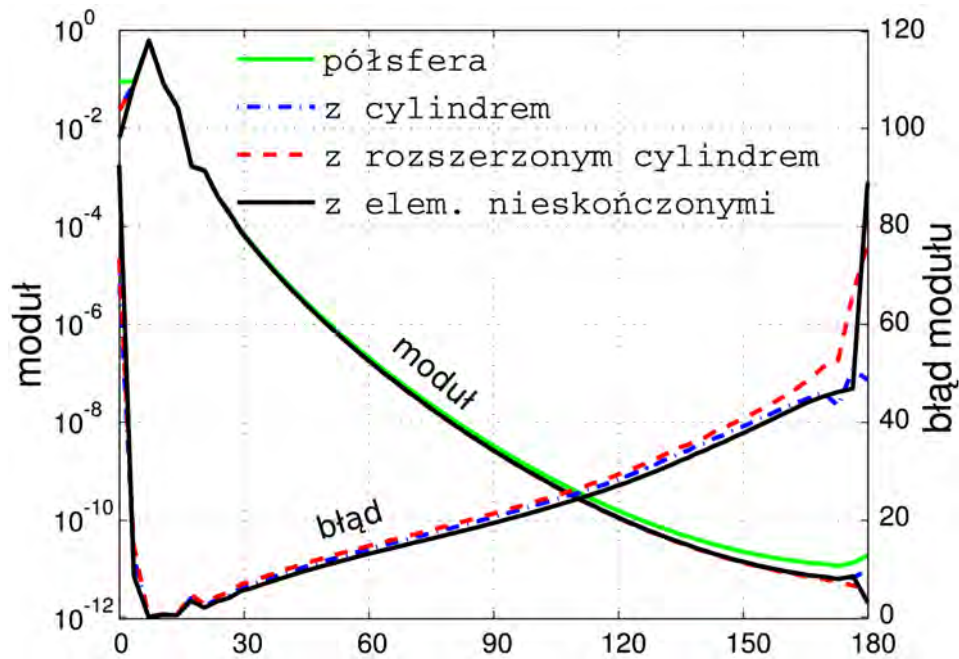
Pochodne względem poszczególnych współrzędnych przedstawiają się następująco:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{-k - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (x - x') e^{-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{-k - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (y - y') e^{-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{-k - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (z - z') e^{-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

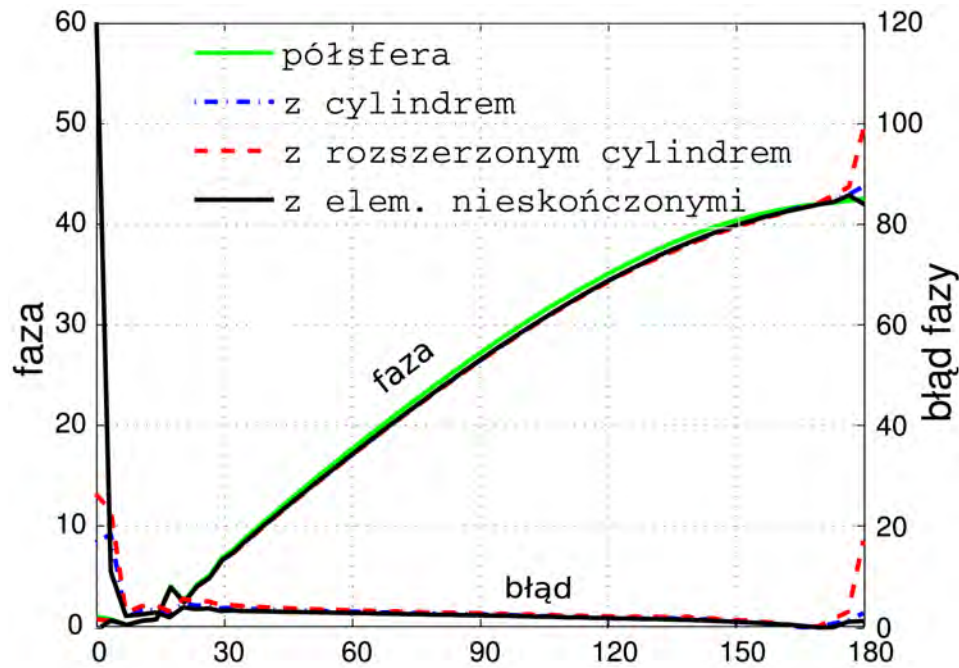
Porównano wyniki uzyskanych wartości brzegowych w węzłach siatki znajdujących się na łuku przekroju poprzecznego półsfery wzdłuż  $y = 0$ . Wartości modułu i fazy przedstawiono odpowiednio na rysunkach 4.28 i 4.29. Porównanie wyników w odniesieniu do podstawowego modelu półsfery przedstawiają rysunki 4.28 i 4.29.



Rys. 4.28. Porównanie wyników dla modułu  $\partial\Phi/\partial n(\Psi)$  w odniesieniu do podstawowego modelu półsfery

## 4.5 Dyskusja Wyników

Generalnie uzyskane wartości z trzech zmodyfikowanych modeli są zbliżone (wykresy 4.28 i 4.29) i najbardziej odbiegają od modelu wyjściowego półsfery. Średni błąd dla modułu wynosi ok. 30% a dla fazy około 3%. Trzydziesto procentowe różnice są wystarczająco duże aby usprawiedliwić konieczność objęcia siatką elementów nie tylko samej półsfery odpowiadającej tkance piersi ale również fragmentu klatki piersiowej odpowiadającego tkankom mięśni i kości. Warto też zauważyć, że wykres modułu  $\partial\Phi/\partial n$  4.28 ma skalę logarytmiczną.



Rys. 4.29. Porównanie wyników dla fazy  $\partial\Phi/\partial n(\Psi)$  w odniesieniu do podstawowego modelu półsfery

Korzyścią wnoszoną przez zastosowanie elementów nieskończonych jest ponad czterokrotna redukcja czasu obliczeń przy dokładności zbliżonej do modeli rozszerzonych o walec u podstawy półsfery.

Liczbę elementów zredukowano prawie o połowę co ma fundamentalne znaczenie w zagadnieniach odwrotnych gdy zagadnienie proste rozwiązywane jest wielokrotnie w procesie iteracyjnym. Należy dodatkowo zaznaczyć, że liczba elementów brzegowych we wszystkich modelach zbudowanych jedynie z elementów standardowych jest taka sama. Gęstość siatki na powierzchniach dodanych u podstawy części cylindrycznych jest mniejsza niż na powierzchni półsfery obejmującej właściwy obszar poszukiwania rozwiązania czy też w praktyce obrazu tomograficznego wnętrza piersi. Jest to typowe praktyczne podejście, w którym dodatkowy obszar będący poza sferą zainteresowań dyskretyzowany jest siatką o mniejszej gęstości. Dyskusja nad możliwością zwiększenia gęstości siatki celem zwiększenia dokładności obliczeń czy też zmniejszenia gęstości siatki modelu celem skrócenia czasu obliczeń wiąże się bardziej z samą Metodą Elementów Brzegowych niż z omawianymi elementami nieskończonymi. Warto jednak wspomnieć, że oprócz zaprezentowanej siatki składającej się z 4610 węzłów obliczenia wykonywano również dla modeli składających się z

384 elementów i 1154 węzłów oraz 6144 elementów i 18434 węzłów. Model 384 elementowy oferował zbyt niską dokładność i oscylacje wyników tworząc lekko piłokształtny wykres rozwiązania. Model z 6144 elementami wymagał z kolei bardzo długich czasów rozwiązania. Przekraczał też dostępny rozmiar pamięci rzędu 8 GB (szacunkowo wymaga ponad 16GB pamięci RAM). Czasy obliczeń zadania prostego przy zmianie modelu z 384 elementowego — 1154 węzły na 1536 elementowy — 4610 węzłów, wzrósł z 18 sekund do czterech minut i 47 sekund. Zastosowanie elementów nieskończonych z łącznie 832 elementami odpowiadającego gęstością siatki klasycznemu modelowi z 1536 elementami zredukowało czas obliczeń do 1 minuty i 24 sekund. Model zbudowany z 6144 elementów i 18434 węzłów z uwagi na użycie pamięci wirtualnej typu swap był zbyt kosztowny obliczeniowo i nieadekwatny do porównania. Z tego też powodu do dyskusji efektów zastosowania elementów nieskończonych i porównania z klasyczną metodą rozszerzania obszaru (balooningu) wybrano siatkę opartą o 4610 węzłów. Należy również dodać, że wymienione gęstości siatki wynikają z braku generatora siatki, który umożliwiałby wygenerowanie nie tylko modelu otwartego z elementami nieskończonymi ale również modelu zbudowanego w “części standardowej” z tylko i wyłącznie elementów ośmiowęzłowych. Ten ostatni mankament dotyczy skądinąd bardzo dobrego programu NETGEN [51]. Programy komercyjne jak przykładowo “QUAD-SURFACE 3.5” [75] były poza zasięgiem cenowym (ponad 5 tys. USD). Wykorzystanie siatki mieszanej trójkątno-kwadratowej podwajałoby zarówno wysiłek obliczeniowy jak i objętość pracy nie wnosząc zmian jakościowych do prezentowanej teorii. Przy generowaniu siatki elementów brzegowych wykorzystano więc własny generator zwiększający za każdym razem jej gęstość czterokrotnie. Dokładnie rzecz biorąc każdy element dzielony jest na cztery nowe. Stąd wynika sekwencja 384 elementy, 1536 elementów ( $4 \times 384$ ) i 6144 elementów ( $4 \times 1536$ ).

## Rozdział 5

# Środowiska niejednorodne

### 5.1 Wprowadzenie

Zagadnienia w których właściwości parametrów materiałowych zależą od współrzędnych przestrzennych wymagają specjalnego potraktowania aby mogły być rozwiązywane Metodą Elementów Brzegowych [44]. Wynika to z faktu, że MEB odnosi się tylko do wartości rozwiązania na brzegu obszaru. Badany obszar dzielony jest wówczas na jednorodne warstwy lub przyjmuje się, że niejednorodność ma charakter funkcyjny i ciągły. Przypadek zawilgoconego ceglanego muru rozważany w następnym rozdziale 6 zawiera oba wspomniane podejścia. Uwzględnienie zmian zawilgocenia muru wzdłuż jego grubości związane z przesychaniem powierzchni zewnętrznych uwzględnione jest w postaci modelu 4 warstwowego. Natomiast zmiana zawilgocenia w pionie wywołana nasiąkaniem muru od jego podstawy uwzględniana jest jako niejednorodność opisana w pionie wycinkiem funkcji kwadratowej lub funkcją wykładniczą. Rozważania zawarte w niniejszym rozdziale dotyczyć będą materiałów z niejednorodnością ciągłą (ang. Functionally Graded Materials) [44, 56, 88, 55] a przedstawione zależności teoretyczne znalazły zastosowanie obliczeniowe w badaniach zawilgoconego muru.

## 5.2 Równanie Bazowe MEB i funkcja Greena dla środowisk z niejednorodnością ciągłą

Równanie bazowe opisujące potencjał całkowity w materiale niejednorodnym przedstawia się następująco [44, 39]:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}') \frac{\partial G^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n(\mathbf{r}')} \Phi(\mathbf{r}') d\Gamma(\mathbf{r}') = \\ = \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}') G^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} d\Gamma(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Funkcja  $G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  nie jest jednak rozwiązaniem fundamentalnym dla równania Laplace'a. Równanie różniczkowe cząstkowe, które należy rozwiązać względem  $\Phi$  przedstawia się następująco:

$$\nabla [\gamma(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r})] = 0. \quad (5.2)$$

Przyjmujemy następnie, że  $G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  jest funkcją Greena dla równania (5.2), czyli:

$$\nabla [\gamma(\mathbf{r}) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.3)$$

Rozwiązanie analityczne równania (5.3) można uzyskać tylko dla pewnych szczególnych funkcji  $\gamma$  [44].

Równanie całkowo-brzegowe (5.1) można wyprowadzić stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego (twierdzenie o dywergencji wektora) [43] do wektora  $\gamma(\mathbf{r})G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla\Phi(\mathbf{r})$ :

$$\int_{\Omega} \nabla(\gamma(\mathbf{r})G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla\Phi(\mathbf{r}))d\Omega(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r})G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{r})} d\Gamma(\mathbf{r}). \quad (5.4)$$

Dalszy tok postępowania jest analogiczny jak przy klasycznym wyprowadzaniu równania całkowo-brzegowego [39, 16] dla Metody Elementów Brzegowych.

Funkcję pod całką powyższego równania można zapisać w postaci:

$$\nabla(\gamma(\mathbf{r})G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla\Phi(\mathbf{r})) = G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla(\gamma(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r})) + \gamma(\mathbf{r})\nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (5.5)$$

Równanie (5.4) przybierze postać:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla (\gamma(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r})) + \gamma(\mathbf{r}) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \Phi(\mathbf{r})] d\Omega(\mathbf{r}) = \\ = \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{r})} d\Gamma(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Analogicznie jak przy wyprowadzeniu drugiej formuły Greena zamieniając miejscami  $G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  i  $\Phi(\mathbf{r})$  miejscami otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\Phi(\mathbf{r}) \nabla (\gamma(\mathbf{r}) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) + \gamma(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] d\Omega(\mathbf{r}) = \\ = \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r})} d\Gamma(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Odejmując stronami równania (5.6) i (5.7) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla (\gamma(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r})) - \Phi(\mathbf{r}) \nabla (\gamma(\mathbf{r}) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))] d\Omega(\mathbf{r}) = \\ = \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{r})} - \gamma(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r})} d\Gamma(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Uwzględniając równanie (5.2) oraz na podstawie właściwości delty Diraca:

$$- \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{r}) \nabla (\gamma(\mathbf{r}) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) d\Omega(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\Omega(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}'), \quad (5.9)$$

otrzymamy równanie całkowo-brzegowe (5.1) odpowiadające równaniu różniczkowemu cząstkowemu (5.2):

$$c(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} d\Gamma(\mathbf{r}') = \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}') G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} d\Gamma(\mathbf{r}'). \quad (5.10)$$

Wprowadzamy nową zmienną  $\Phi(\mathbf{r}')$  spełniającą zależność:

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (5.11)$$

Druga pochodna tej funkcji względem  $x$  wynosi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\gamma^{\frac{1}{2}}) G^* + 2 \frac{\partial}{\partial x} (\gamma^{\frac{1}{2}}) \frac{\partial G^*}{\partial x} + \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\gamma^{\frac{1}{2}}) G^* + \gamma^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial G^*}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} \right] = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\gamma^{\frac{1}{2}}) G^* + \gamma^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial G^*}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Uwzględniając analogiczne pochodne po  $y$  i  $z$  otrzymamy:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla^2 \left( \gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) \right) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} (\gamma(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')). \quad (5.13)$$

Przyjmując, że przewodność  $\gamma$  spełnia następujący warunek:

$$\nabla^2 \left( \gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) \right) = 0, \quad (5.14)$$

równanie (5.13) ulega uproszczeniu do postaci:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} (\gamma(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')). \quad (5.15)$$

Podstawiając (5.9) do (5.15) dostajemy:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.16)$$

Wykorzystując następnie symetryczność funkcji Diraca względem swoich zmiennych tj.  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  dostajemy również:

$$\nabla_{\mathbf{r}'}^2 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (5.17)$$

Jako rozwiązanie powyższego równania otrzymujemy:

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma^{-\frac{1}{2}} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.18)$$

gdzie  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  jest już funkcją Greena dla równania Laplace'a. Podstawiając to do (5.11) otrzymujemy końcowy wzór:

$$G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) \gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (5.19)$$

Pochodna normalna  $\partial G^* / \partial n$  jest równa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} &= \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{n}}{n} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma(\mathbf{r})\gamma(\mathbf{r}')}} \left[ \frac{\nabla \sqrt{\gamma(\mathbf{r})}}{\sqrt{\gamma(\mathbf{r})}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \frac{\mathbf{n}}{n}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym a  $n$  jego długością.



## 5.3 Współczynniki równania bazowego dla środowiska z niejednorodnością ciągłą

### 5.3.1 Obiekty dwuwymiarowe

Dla przypadku 2D na podstawie równania (5.21) mamy:

$$G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma(\mathbf{r})\gamma(\mathbf{r}')}} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.21)$$

oraz pochodną normalną

$$\frac{\partial G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma(\mathbf{r})\gamma(\mathbf{r}')}} \left[ \frac{\nabla \sqrt{\gamma(\mathbf{r})}}{\sqrt{\gamma(\mathbf{r})}} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] \cdot \frac{\mathbf{n}}{n}. \quad (5.22)$$

Współczynniki macierzy **A** i **B** :

$$A_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-1}^{+1} \gamma(\mathbf{r}) \frac{\partial G^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J(\xi) d\xi, \quad (5.23)$$

$$B_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-1}^{+1} \gamma(\mathbf{r}) G^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J(\xi) d\xi.$$

Oznaczając:

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (5.24)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} &= \frac{\partial G^*}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial G^*}{\partial R} \left[ \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi R^2} [(x' - x)n_x + (y' - y)n_y], \end{aligned} \quad (5.25)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{x' - x}{R}, & \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{y' - y}{R}, \\ \frac{\partial x}{\partial n} &= n_x, & \frac{\partial y}{\partial n} &= n_y, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$n_x$  i  $n_y$  są zdefiniowane jako (5.27):

$$n_x = \frac{y_1 - y_0}{L}, \quad n_y = -\frac{x_1 - x_0}{L}, \quad (5.27)$$

$L$  jest odległością między węzłami brzegowymi elementu.

### 5.3.2 Obiekty trójwymiarowe

Analogicznie dla przypadku 3D na podstawie równania (5.19) mamy:

$$G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\gamma(\mathbf{r})\gamma(\mathbf{r}')|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}, \quad (5.28)$$

oraz pochodną normalną

$$\frac{\partial G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\gamma(\mathbf{r})\gamma(\mathbf{r}')}} \left[ \frac{\nabla\sqrt{\gamma(\mathbf{r})}}{\sqrt{\gamma(\mathbf{r})}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \cdot \frac{\mathbf{n}}{n}. \quad (5.29)$$

Współczynniki macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  wyznaczane są analogicznie jak dla przypadku 2D.

Szczegółowe rozwinięcie równań (5.28) i (5.29) przedstawione jest w następnym rozdziale gdzie są on stosowane do obliczeń zawilgocenia muru.

W przypadku gdy niejednorodność  $\gamma$  opisana jest funkcją wykładniczą zależną od jednej tylko współrzędnej  $z$ :

$$\gamma(x, y, z) = \gamma(z) = \gamma_0 e^{2\beta z}, \quad (5.30)$$

gdzie  $\beta$  jest współczynnikiem niejednorodności materiału,

równanie (5.2) można zapisać w postaci:

$$\nabla^2 \Phi + 2\beta \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (5.31)$$

Funkcja Greena będzie rozwiązaniem równania:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 2\beta \frac{\partial G}{\partial z} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.32)$$

gdzie standardowo  $\mathbf{r}$  jest punktem źródła a  $\mathbf{r}'$  punktem obserwacji.

Rozwiązanie równania (5.32) jest wyprowadzone w pracach [36, 45] i przedstawia się następująco:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{\beta(-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+R_z)}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.33)$$

a  $R_z = z_{r'} - z_r$ .

Warto jeszcze zapisać zależność (5.33) w postaci:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{e^{\beta(-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+R_z)} - 1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.34)$$

Pierwsza część równania (5.34) jest funkcją Greena dla równania Laplacea w środowisku jednorodnym. Druga część zanika gdy  $\beta \rightarrow 0$  czyli gdy mamy do czynienia ze środowiskiem jednorodnym. Jednocześnie ta postać równania wskazuje, że gdy  $r \rightarrow r'$  mamy odczynienia z identycznym sformułowaniem osobliwości jak dla równania Laplacea w przestrzeni trójwymiarowej.

Do obliczeń Metodą Elementów Brzegowych niezbędne będzie jeszcze przedstawienie pierwszej pochodnej funkcji Greena:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{R_z \beta}{2\pi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2} e^{\frac{\beta(-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+R_z)}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}, \quad (5.35)$$

oraz sformułowanie równania całkowo-brzegowego:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} - 2\beta n_z G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \Phi(\mathbf{r}') d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$n_z$  jest składową z wektora normalnego  $\mathbf{n}$ .

## Rozdział 6

# Analiza rozkładu zawilgocenia muru

### Wprowadzenie

Celem weryfikacji przedstawionych w poprzednich rozdziałach rozważań teoretycznych przytoczone zostaną wyniki pomiarów i badań wykonane na obiekcie rzeczywistym. Badania wiązały się z nieinwazyjnym, opartym o tomografię impedancyjną określaniem rozkładu zawilgocenia murów ceglanych. Prowadzone one były przez zespół badań tomograficznych Instytutu Elektrotechniki w Międzyzlesiu kierowany przez dyr. dr inż. Stefana Wójtowicza i zespół prof. dr hab. inż. Jerzego Hoły z Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej.

Zawilgocenie ścian i murów zbudowanych z materiałów porowatych takich jak cegła czy beton jest częstym problemem w budownictwie związanym szczególnie w starszych budynkach, z niewystarczającą izolacją poziomą i pionową ścian fundamentowych. W takich przypadkach podciągana kapilarnie z gruntu wilgoć może sięgnąć nawet na wysokość 3 metrów. Towarzyszące temu zjawisku zanieczyszczenie struktury murów roztworami soli, zasad czy kwasów organicznych wzmaga niszczące działanie wilgoci. Wytrzymałość muru spada. Zamarzająca zimą woda i krystalizująca się sól mogą prowadzić do pęknięcia murów. Wilgoć i zagrzybienie takich murów są również szkodliwe dla zdrowia ludzi. Abstrahując od stosowanej metody osuszania należy powiedzieć, że kontrolowanie zawilgocenia w czasie takiego procesu jest niezbędne. Konduktywność muru różni się w zależności od jego składu, stopnia zasolenia czy zawarto-

ści dodatkowych substancji zmieniających jego właściwości użytkowe. Jednak czynnikiem najbardziej wpływającym na zmiany konduktywności muru jest jego względna wilgotność. Ponieważ konduktywność muru zmienia się wraz z jego wilgotnością można ją określać stosując metody elektryczne takie jak tomografia impedancyjna do której walorów zaliczyć należy nieinwazyjność i powstanie obrazu rozkładu zawilgocenia wewnątrz muru.

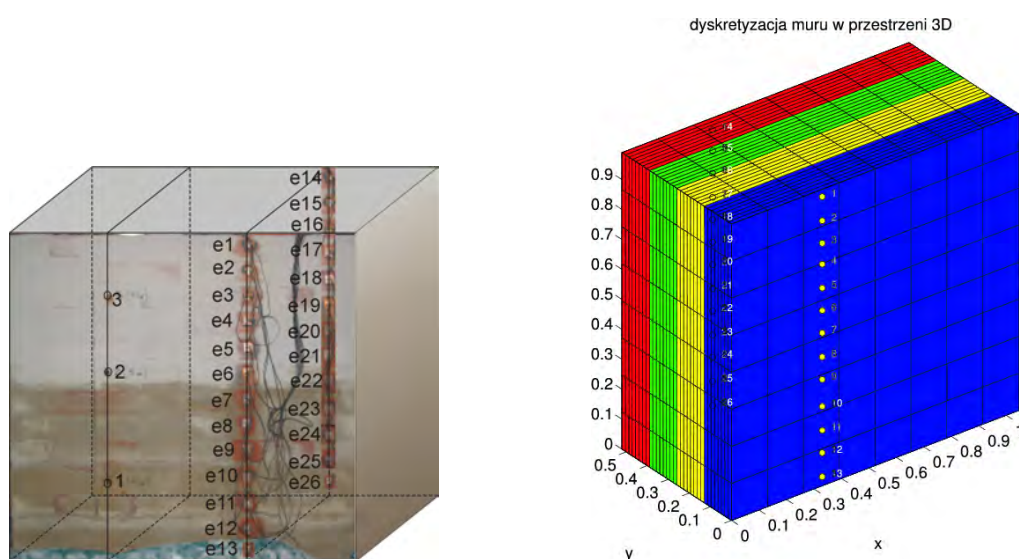
## 6.1 Opis obiektu i założenia wstępne

Rzeczywisty obiekt badań stanowił mur ceglany specjalnie zbudowany do badań w certyfikowanym laboratorium Instytutu Budownictwa we Wrocławiu o wymiarach  $1m \times 1m \times 0.51m$  - zdjęcia 6.1.



Rys. 6.1. Zdjęcia badanego muru ceglanego w Instytucie Budownictwa we Wrocławiu.

Mur zalany został wodą do połowy wysokości. Następnie wodę odprowadzono i następnego dnia dokonano pomiarów. Mur został nawiercony na 3 różnych wysokościach w celu pobrania próbek z różnych głębokości dla określenia stopnia zawilgocenia metodą suszarkowo-wagową. Jednocześnie dokonano pomiarów napięć na 26 elektrodach tomografu impedancyjnego jak na rys. 6.2 w celu określenia rozkładu zawilgocenia muru. Uzyskanie tomograficznego obrazu zawilgocenia muru wymagało uwzględnienia niejednorodności badanego środowiska. Wynika to z różnego stopnia zawilgocenia zmieniającego się wraz z wysokością muru. Istotą niniejszego rozdziału jest porównanie wyników uzyskanych z pomiarów tomograficznych w których aparacie obliczeniowym zastosowano Metodę Elementów Brzegowych z elementami wyłącznie standardowymi oraz po hybrydyzacji z elementami nieskończonymi. Założono na podstawie pomiarów dokonanych metodą suszarkowo-wagową i spodziewa-



Rys. 6.2. Zawilgocony ceglany mur z elektrodami tomografu rezystancyjnego e1÷e26 i trzema punktami, w których dokonano odwiertów dla pomiarów metodą suszarkowo-wagową 1÷3 - po lewej oraz odpowiadający mu 4 warstwowy model z siatką czworokątną - po prawej.

nego oddziaływania środowiska, że wilgotność muru maleje wykładniczo wraz z oddalaniem się od nasiąkniętej podstawy muru.

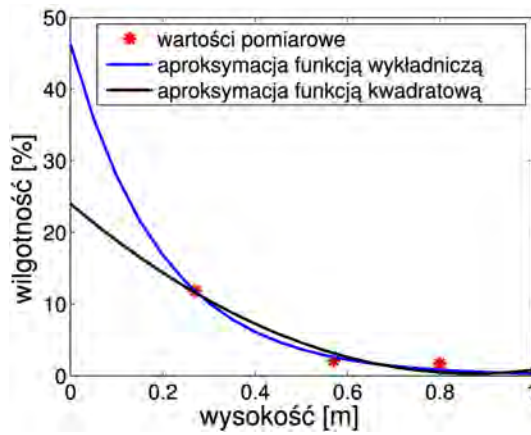
## 6.2 Pomiary

### 6.2.1 Wyniki pomiarów uzyskane metodą suszarkowo-wagową

Wyniki pomiarów dokonanych z odwiertów umiejscowionych na 3 różnych wysokościach muru przedstawione zostały w tabeli 6.1 natomiast wyniki pomiarów potencjałów dla kolejnych kątów projekcji w tabeli 6.2. Poprzez kąt projekcji rozumiany jest układ elektrod doprowadzającej napięcie i uziemionej. Przykładowo kąt projekcji 1-26 oznacza, że napięcie podano na pierwszą elektrodę, dwudziesta szóstą elektrodą została uziemiona a potencjały mierzone są kolejno na wszystkich pozostałych elektrodach pomiarowo-doprowadzających.

Tablica 6.1. Wyniki pomiarów uzyskane metodą suszarkowo-wagową dla zawilgoconego muru

| miejsce<br>pomiarowe | wysokość<br>punktu<br>pom. [m] | głębokość [m]  |       |       |       |       |       |       | wilgotność<br>średnia [%] |
|----------------------|--------------------------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------------|
|                      |                                | 0              | 0.05  | 0.10  | 0.15  | 0.20  | 0.25  | 0.51  |                           |
|                      |                                | wilgotność [%] |       |       |       |       |       |       |                           |
| 1                    | 0.27                           | 12.40          | 13.16 | 11.00 | 10.50 | 11.74 | 12.50 | 12.30 | 11.84                     |
| 2                    | 0.57                           | 2.54           | 2.26  | 1.50  | 2.26  | 1.70  | 2.00  | 2.50  | 2.11                      |
| 3                    | 0.80                           | 1.48           | 1.56  | 1.64  | 1.70  | 1.74  | 2.13  | 1.50  | 1.68                      |



Rys. 6.3. Niejednorodność materiału określona funkcją wykładniczą lub wielomianem stopnia drugiego

### 6.2.2 Zastosowanie tomografii rezystancyjnej z użyciem MEB i elementów standardowych

Z uwagi na przyjęte ograniczenia (5.14) wykładniczy sposób zanikania zawilgocenia muru wraz z oddalaniem się ku górze od nasiąkniętej podstawy został zastąpiony aproksymacją funkcją kwadratową jak na rysunku 6.3:

Przyjmując  $\gamma = \gamma_0(Ay^2 + By + C)$  otrzymujemy:

$$G^*(x, y) = \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{2\pi\gamma_0 \sqrt{(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)}}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial G^*(x, y)}{\partial x} = \frac{(x - x')}{2\pi\gamma_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2] \sqrt{(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)}} - \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\gamma_0^2(Ay^2 + By + C)(2Ay' + B) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{4\pi [\gamma_0^2(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)]^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial G^*(x, y)}{\partial y} &= \frac{(y - y')}{2\pi\gamma_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2] \sqrt{(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)}} - \\
& - \frac{\gamma_0^2(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{4\pi [\gamma_0^2(Ay^2 + By + C)(2Ay' + B)]^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

W przypadku środowiska o odmiennym rozkładzie niejednorodności w pionie i w poziomie przyjmując  $\gamma = \gamma_0(ax^2 + bx + c)(Ay^2 + By + C)$  otrzymujemy:

$$G^*(x, y) = \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{2\pi\gamma_0 \sqrt{(ax^2 + bx + c)(ax'^2 + bx' + c)(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)}}, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^*(x, y)}{\partial x} &= \frac{(x - x')}{2\pi\gamma_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2] \sqrt{(ax^2 + bx + c)(ax'^2 + bx' + c)(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)}} + \\
& - \frac{\gamma_0^2(ax^2 + bx + c)(ax'^2 + bx' + c)(Ay^2 + By + C)(2Ay' + B) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{4\pi [\gamma_0^2(ax^2 + bx + c)(2ax' + b)(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)]^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^*(x, y)}{\partial y} &= \frac{(y - y')}{2\pi\gamma_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2] \sqrt{(ax^2 + bx + c)(ax'^2 + bx' + c)(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C)}} + \\
& - \frac{\gamma_0^2(ax^2 + bx + c)(2ax' + b)(Ay^2 + By + C)(Ay'^2 + By' + C) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{4\pi [\gamma_0^2(ax^2 + bx + c)(ax'^2 + bx' + c)(Ay^2 + By + C)(2Ay' + B)]^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$



Tablica 6.2. Wyniki pomiarów uzyskane z tomografu rezystancyjnego dla źródła o częstotliwości 1kHz

| kąt<br>projekcji | numer elektrody |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|------------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                  | 1               | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 11      | 12      | 13      |
| 1-26             | 6.99            | 3.61891 | 2.32919 | 1.65201 | 1.55743 | 1.42938 | 1.38398 | 1.28239 | 1.23561 | 1.21802 | 1.17962 | 1.16483 | 1.16404 |
| 2-25             | 4.23574         | 6.91    | 2.96391 | 1.89604 | 1.77992 | 1.60128 | 1.54659 | 1.41699 | 1.35927 | 1.33842 | 1.29239 | 1.27315 | 1.27381 |
| 3-24             | 3.38786         | 3.75453 | 6.95    | 2.70895 | 2.36037 | 2.07817 | 1.98501 | 1.81921 | 1.74932 | 1.72776 | 1.67992 | 1.66037 | 1.66214 |
| 4-23             | 3.01863         | 3.08302 | 3.47046 | 6.93    | 4.04317 | 3.01931 | 2.70257 | 2.3795  | 2.28056 | 2.24981 | 2.19427 | 2.177   | 2.17585 |
| 5-22             | 3.07533         | 3.14271 | 3.30807 | 4.4203  | 6.95    | 3.60549 | 3.1586  | 2.63837 | 2.52378 | 2.48749 | 2.42873 | 2.41067 | 2.41026 |
| 6-21             | 3.28281         | 3.30632 | 3.39645 | 3.85395 | 4.23334 | 6.96    | 4.40756 | 3.28514 | 3.06662 | 3.01888 | 2.94381 | 2.92583 | 2.92329 |
| 7-20             | 3.56786         | 3.5896  | 3.64601 | 3.89236 | 4.16512 | 4.85293 | 6.93    | 3.88103 | 3.61164 | 3.545   | 3.46717 | 3.45195 | 3.44764 |
| 8-19             | 3.86916         | 3.87659 | 3.91322 | 4.02561 | 4.08192 | 4.30833 | 4.44364 | 6.94    | 4.66769 | 4.37705 | 4.09213 | 4.05066 | 4.04115 |
| 9-18             | 4.18824         | 4.19166 | 4.23142 | 4.32624 | 4.37215 | 4.49487 | 4.58833 | 5.15643 | 6.94    | 5.35258 | 4.69641 | 4.62061 | 4.59621 |
| 10-17            | 4.33207         | 4.3373  | 4.37748 | 4.47203 | 4.5125  | 4.62384 | 4.68721 | 5.07043 | 5.56475 | 6.91    | 5.02678 | 4.86761 | 4.84323 |
| 11-16            | 4.81715         | 4.82416 | 4.87562 | 4.9807  | 5.01977 | 5.11291 | 5.15985 | 5.32759 | 5.47395 | 5.61947 | 6.93    | 5.80112 | 5.68157 |
| 12-15            | 5.09303         | 5.09514 | 5.11519 | 5.25202 | 5.28572 | 5.36934 | 5.40872 | 5.53382 | 5.63319 | 5.68238 | 5.9956  | 6.86    | 6.20913 |
| 13-14            | 5.34707         | 5.3528  | 5.39708 | 5.48391 | 5.51414 | 5.58312 | 5.61586 | 5.71869 | 5.79289 | 5.83524 | 6.04052 | 6.31653 | 6.93    |

| kąt<br>projekcji | numer elektrody |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |          |          |  |  |  |
|------------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|--|--|--|
|                  | 14              | 15      | 16      | 17      | 18      | 19      | 20      | 21      | 22      | 23      | 24      | 25       | 26       |  |  |  |
| 1-26             | 1.58319         | 1.57767 | 1.53569 | 1.4537  | 1.42529 | 1.35953 | 1.32861 | 1.2303  | 1.15937 | 1.11838 | 1.01453 | 0.639287 | 0        |  |  |  |
| 2-25             | 1.76641         | 1.76516 | 1.71192 | 1.61625 | 1.58466 | 1.50383 | 1.46656 | 1.34525 | 1.24954 | 1.20083 | 1.02385 | 0        | 0.662328 |  |  |  |
| 3-24             | 2.15656         | 2.14988 | 2.10191 | 1.99972 | 1.95906 | 1.86694 | 1.81447 | 1.63455 | 1.40712 | 1.23637 | 0       | 1.33939  | 1.43221  |  |  |  |
| 4-23             | 2.56787         | 2.56437 | 2.52528 | 2.43361 | 2.39465 | 2.28472 | 2.22258 | 1.84748 | 1.35584 | 0       | 1.63575 | 1.99863  | 2.02313  |  |  |  |
| 5-22             | 2.73596         | 2.73482 | 2.69557 | 2.60376 | 2.56039 | 2.4385  | 2.34848 | 1.79049 | 0       | 1.55428 | 2.03331 | 2.26316  | 2.28828  |  |  |  |
| 6-21             | 3.05548         | 3.04996 | 3.01449 | 2.90645 | 2.85197 | 2.63171 | 2.49735 | 0       | 2.21614 | 2.49734 | 2.73595 | 2.82442  | 2.83432  |  |  |  |
| 7-20             | 3.32665         | 3.3082  | 3.25348 | 3.01638 | 2.7563  | 2.07659 | 0       | 2.95764 | 3.22278 | 3.29021 | 3.35129 | 3.38638  | 3.39121  |  |  |  |
| 8-19             | 3.6457          | 3.62466 | 3.5399  | 3.10123 | 2.73077 | 0       | 2.49649 | 3.58078 | 3.80154 | 3.85039 | 3.91337 | 3.94893  | 3.95193  |  |  |  |
| 9-18             | 3.85527         | 3.79305 | 3.63393 | 2.54399 | 0       | 3.27028 | 3.70601 | 4.23027 | 4.3493  | 4.38812 | 4.43825 | 4.47131  | 4.4724   |  |  |  |
| 10-17            | 3.89191         | 3.83092 | 3.46121 | 0       | 2.83307 | 3.82242 | 4.13914 | 4.46936 | 4.57379 | 4.60679 | 4.65432 | 4.68654  | 4.68824  |  |  |  |
| 11-16            | 3.59923         | 3.23777 | 0       | 4.20045 | 4.55332 | 4.84902 | 4.94685 | 5.13146 | 5.20864 | 5.23693 | 5.28213 | 5.3168   | 5.31857  |  |  |  |
| 12-15            | 2.65871         | 0       | 3.84113 | 4.90512 | 5.02552 | 5.2175  | 5.27646 | 5.4204  | 5.48467 | 5.50883 | 5.55071 | 5.5837   | 5.58382  |  |  |  |
| 13-14            | 0.01            | 3.27776 | 4.5339  | 5.22546 | 5.32632 | 5.46677 | 5.51691 | 5.63172 | 5.68486 | 5.70543 | 5.73982 | 5.76777  | 5.76933  |  |  |  |

Tablica 6.3. Wyniki obliczeń BEM z zastosowaniem wyłącznie elementów standardowych.

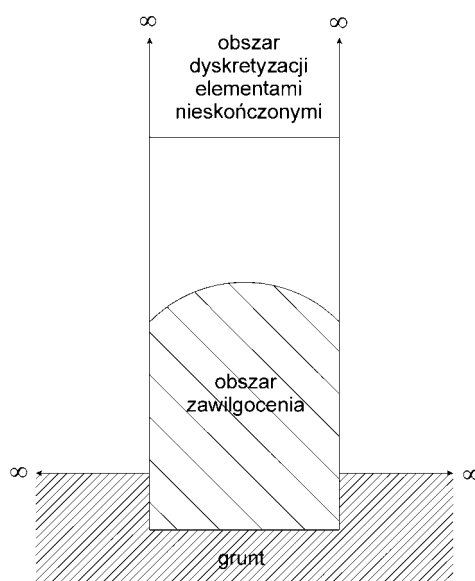
| kąt<br>projekcji | numer elektrody |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
|------------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
|                  | 1               | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     |  |
| 1-26             | 6.91            | 3.3247 | 2.6319 | 2.1950 | 1.8320 | 1.4973 | 1.1910 | 0.9329 | 0.7387 | 0.6090 | 0.5343 | 0.5042 | 0.51   |  |
| 2-25             | 4.2405          | 6.91   | 3.3904 | 2.4926 | 1.9269 | 1.5104 | 1.1837 | 0.92   | 0.7049 | 0.5309 | 0.3946 | 0.2941 | 0.2249 |  |
| 3-24             | 3.8788          | 4.2386 | 6.95   | 3.4172 | 2.5088 | 1.9293 | 1.4987 | 1.1607 | 0.8925 | 0.6851 | 0.5340 | 0.4313 | 0.3640 |  |
| 4-23             | 3.6931          | 3.8398 | 4.2082 | 6.93   | 3.3904 | 2.4738 | 1.8889 | 1.4627 | 1.1476 | 0.9258 | 0.7803 | 0.6885 | 0.6293 |  |
| 5-22             | 3.5942          | 3.6691 | 3.8176 | 4.1898 | 6.95   | 3.3824 | 2.4784 | 1.9379 | 1.5940 | 1.3849 | 1.2623 | 1.1887 | 1.1415 |  |
| 6-21             | 3.5286          | 3.5680 | 3.6403 | 3.7919 | 4.1804 | 6.96   | 3.5406 | 2.8002 | 2.4496 | 2.2761 | 2.1877 | 2.1390 | 2.1094 |  |
| 7-20             | 3.4884          | 3.5059 | 3.5476 | 3.6396 | 3.8419 | 4.3164 | 6.93   | 4.2533 | 3.8497 | 3.7115 | 3.6614 | 3.6440 | 3.6392 |  |
| 8-19             | 3.4810          | 3.4930 | 3.5394 | 3.6493 | 3.8690 | 4.2512 | 4.8685 | 6.94   | 5.2717 | 5.1027 | 5.0722 | 5.0784 | 5.0949 |  |
| 9-18             | 3.4659          | 3.4956 | 3.5853 | 3.7705 | 4.0793 | 4.4998 | 4.9899 | 5.5498 | 6.94   | 5.9777 | 5.9156 | 5.9258 | 5.9519 |  |
| 10-17            | 3.4718          | 3.5479 | 3.7199 | 4.0090 | 4.3961 | 4.8254 | 5.2472 | 5.6438 | 6.0410 | 6.91   | 6.3705 | 6.3568 | 6.3819 |  |
| 11-16            | 3.5821          | 3.7380 | 4.0159 | 4.3899 | 4.8008 | 5.1964 | 5.5516 | 5.8623 | 6.1370 | 6.4004 | 6.93   | 6.6388 | 6.6489 |  |
| 12-15            | 3.7710          | 4.0182 | 4.3721 | 4.7644 | 5.1402 | 5.4737 | 5.7597 | 6.0022 | 6.2083 | 6.3869 | 6.5535 | 6.86   | 6.7215 |  |
| 13-14            | 4.2247          | 4.5264 | 4.8913 | 5.2484 | 5.5657 | 5.8361 | 6.0627 | 6.2519 | 6.4099 | 6.5426 | 6.6561 | 6.7595 | 6.93   |  |

| kąt<br>projekcji | numer elektrody |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
|------------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
|                  | 14              | 15     | 16     | 17     | 18     | 19     | 20     | 21     | 22     | 23     | 24     | 25     | 26     |  |
| 1-26             | 2.1830          | 2.2959 | 2.2590 | 2.0982 | 1.8519 | 1.5589 | 1.2591 | 0.9916 | 0.7815 | 0.6301 | 0.5188 | 0.4109 | 0      |  |
| 2-25             | 3.1984          | 2.9952 | 2.6681 | 2.2768 | 1.8839 | 1.5263 | 1.2159 | 0.9511 | 0.7254 | 0.5291 | 0.3451 | 0      | 0.1642 |  |
| 3-24             | 3.4006          | 3.2851 | 3.0515 | 2.7065 | 2.2988 | 1.8878 | 1.5095 | 1.1744 | 0.8761 | 0.5883 | 0      | 0.3324 | 0.3261 |  |
| 4-23             | 3.4621          | 3.4118 | 3.2792 | 3.0345 | 2.6767 | 2.2507 | 1.8123 | 1.3894 | 0.9592 | 0      | 0.6084 | 0.6291 | 0.6061 |  |
| 5-22             | 3.4779          | 3.4617 | 3.3970 | 3.2512 | 2.9875 | 2.5966 | 2.1072 | 1.5194 | 0      | 1.0779 | 1.1551 | 1.1501 | 1.1264 |  |
| 6-21             | 3.4653          | 3.4582 | 3.4235 | 3.3370 | 3.1549 | 2.8142 | 2.2133 | 0      | 1.8587 | 2.0624 | 2.1075 | 2.1086 | 2.0966 |  |
| 7-20             | 3.4419          | 3.4242 | 3.3855 | 3.3025 | 3.1193 | 2.6722 | 0      | 2.8726 | 3.3421 | 3.5146 | 3.5831 | 3.6114 | 3.6233 |  |
| 8-19             | 3.4175          | 3.3771 | 3.3047 | 3.1555 | 2.7742 | 0      | 3.4736 | 4.2641 | 4.6612 | 4.8677 | 4.9759 | 5.0361 | 5.0728 |  |
| 9-18             | 3.3438          | 3.2689 | 3.1204 | 2.7495 | 0      | 3.5630 | 4.4750 | 5.0335 | 5.4039 | 5.6396 | 5.7817 | 5.8673 | 5.9215 |  |
| 10-17            | 3.2204          | 3.0760 | 2.7094 | 0      | 3.5244 | 4.4364 | 5.0197 | 5.4487 | 5.7729 | 6.0094 | 6.1703 | 6.2737 | 6.3399 |  |
| 11-16            | 3.0539          | 2.7005 | 0      | 3.5221 | 4.4261 | 5.0016 | 5.4289 | 5.7649 | 6.0338 | 6.2459 | 6.4052 | 6.5169 | 6.5909 |  |
| 12-15            | 2.6369          | 0      | 3.4985 | 4.3898 | 4.9498 | 5.3610 | 5.6828 | 5.9424 | 6.1544 | 6.3272 | 6.4649 | 6.5692 | 6.6428 |  |
| 13-14            | 0               | 3.5767 | 4.4879 | 5.0477 | 5.4507 | 5.7610 | 6.0085 | 6.2095 | 6.3744 | 6.5099 | 6.6200 | 6.7071 | 6.7724 |  |

Graficzną prezentację wyników pomiarów oraz obliczeń dla modeli dwu- i trój-wymiarowego przedstawiają rysunki 6.5 i 6.6.

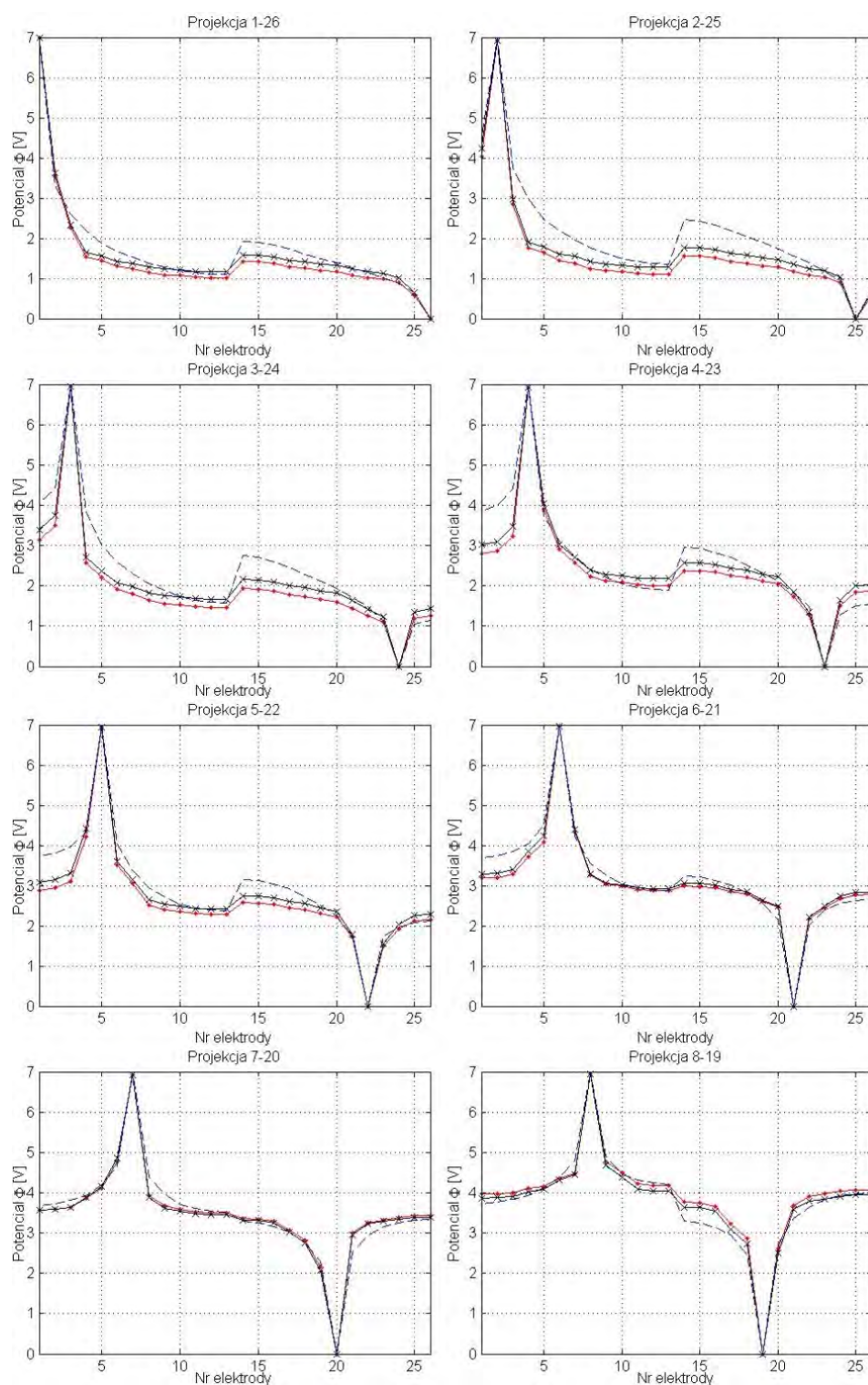
## 6.3 Dyskusja wyników

Przedstawione rzeczywiste pomiary doświadczalnych, zawilgoconych murów wykonane zostały w celu opracowania metody nieinwazyjnego, bez konieczności dokonywania odwiertów, badania i monitorowania zawilgoceń murów ceglanych za pomocą tomografu impedancyjnego. Zmodyfikowana o uwzględnienie środowisk z niejednorodnością ciągłą Metoda Elementów Brzegowych służyła do rozwiązywania zadania prostego. Wspomniane mury miały skończone rozmiary porównywalne do wysokości zawilgocenia – przed odprowadzeniem wody zalewane były do połowy wysokości. Ponadto elektrody pomiarowo-doprowadzające rozmieszczone były na całej wysokości muru. Z tego względu istotniejsze wydawało się jak najrzetelniesze odzwierciedlenie możliwości i dokładności oferowanej przez zastosowanie tomografu impedancyjnego wykorzystującego pomiary z wszystkich elektrod. Mimo, że przypadek ten nie zawierał elementów nieskończonych stanowi on doskonały przykład możliwości ich zastosowania. Rzeczywiste mury budynków osiągają zazwyczaj kilkanaście razy większe wysokości co łącznie z nieznaną wysokością zawilgocenia stanowi wskazanie do zastosowania elementów nieskończonych. Poszukiwanie obrazu niedostępnego wnętrza obiektów w badaniach tomograficznych wiąże się określeniem rozkładu współczynników materiałowych tak jak to ma miejsce w środowiskach niejednorodnych. Możliwość doświadczalnej weryfikacji analizy środowisk niejednorodnych z użyciem MEB uznać można za ważny krok w kierunku praktycznego zastosowania tej metody w tomografii a więc również omawianych w rozprawie elementów brzegowych nieskończonych. Przybliżeniem obiektu takiego jak omawiany mur był przypadek nieskończonego tunelu jak w rozdziale 4.3. Porównanie rysunków 4.20 i 6.2 uwidacznia celowe podobieństwo zbudowanych modeli. Inny model muru odnoszący się do przypadku rzeczywistego można wyobrazić sobie tak jak to ideowo jest przedstawione na rysunku 6.4. Odnosząc się do samych wyników uzyskanych z pomiarów i obliczeń należy uznać rezultaty z modelu dwu-wymiarowego za zadowalające natomiast efekt obliczeń modelu trójwymiarowego za zdecydowanie dobry. Oprócz różnicy wymiarów modele te różniły się zastosowaną do interpolacji założoną funkcją

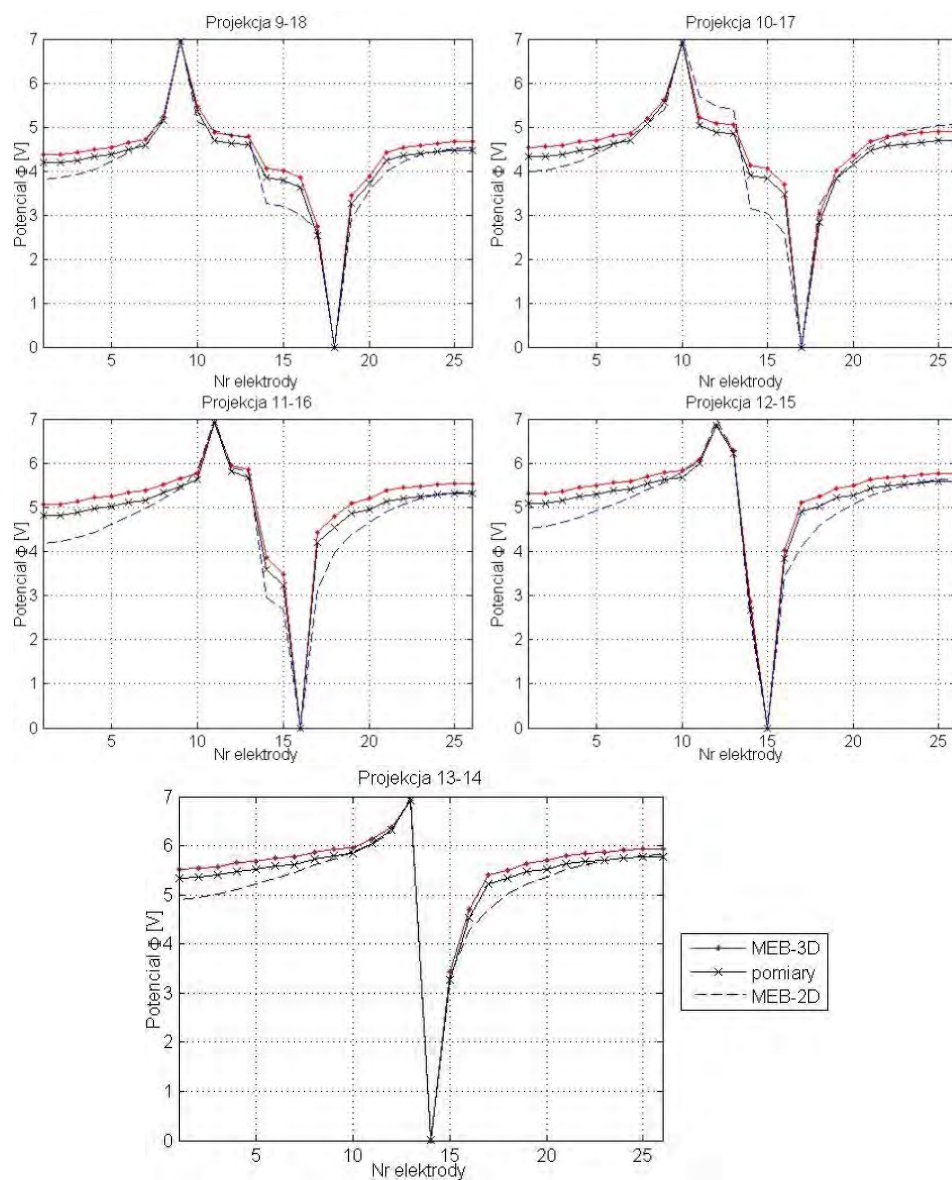


Rys. 6.4. Poglądowy model zawilgoconego muru z elementami nieskończonymi

rozkładu przewodności. W modelu dwuwymiarowym zastosowano interpolację wycinkiem funkcji kwadratowej natomiast w modelu trójwymiarowym funkcją wykładniczą. Efektem takiego podejścia było zastosowanie w zadaniu odwrotnym funkcji celu zależnej od trzech współczynników materiałowych  $a, b, c$  dla modelu dwuwymiarowego ( $\gamma = \gamma_o(az^2 + bz + c)$ ) a w przypadku modelu trójwymiarowego zależnej od jednego współczynnika materiałowego  $\beta$  ( $\gamma = \gamma_o e^{2\beta z}$ ).



Rys. 6.5. Potencjały na poszczególnych elektrodach w przypadku muru zawilgoconego do połowy pomiary dla pobudzenia 1KHz, symulacja numeryczna dla zmian własności materiałowych środowiska aproksymowanych wielomianem stopnia drugiego w przypadku 2D i funkcją wykładniczą w przypadku 3D. Kąty projekcji od 1-26 do 8-19



Rys. 6.6. Potencjały na poszczególnych elektrodach w przypadku muru zawilgoconego do połowy pomiary dla pobudzenia 1KHz, symulacja numeryczna dla zmian własności materiałowych środowiska aproksymowanych wielomianem stopnia drugiego w przypadku 2D i funkcją wykładniczą w przypadku 3D. Kąty projekcji od 9-18 do 13-14

## Rozdział 7

### Podsumowanie

Zgodnie ze sformułowaną na początku pracy tezą i celem pracy, tematem niniejszej rozprawy było opracowanie teoretyczne elementów brzegowych nieskończonych odwzorowanych i z funkcjami zaniku oraz ich praktyczna implementacja w zagadnieniach tomografii komputerowej - impedancyjnej i optycznej, wykorzystującej w zadaniu prostym Metodę Elementów Brzegowych.

W kolejnych rozdziałach opracowano i przedyskutowano teorię elementów brzegowych nieskończonych i ich implementację w kodzie Metody Elementów Brzegowych. Jak to wskazano w pierwszym rozdziale pracy siostrzana Metoda Elementów Skończonych doczekała się zbiorczych opracowań tego zagadnienia [15, 34, 35], natomiast opracowania dotyczące elementów nieskończonych w MEB mają przeważnie charakter rozproszonych artykułów [101, 10, 11, 20, 33, 50, 79, 9] lub niewielkich dodatków w książkach dotyczących MEB [8, 17, 96]. Mówiąc o pozycjach książkowych jest to zazwyczaj kilka zdań lub pojedynczych stron w zasadzie bardziej wzmiankujących istnienie takiego rozwiązania niż przedstawiających je w szczegółach, które mogłyby być pomocne w praktycznym zastosowaniu. Kolejne trzy rozdziały prezentują właśnie szczegółowo opracowane elementy brzegowe i związane z ich wprowadzeniem moduły algorytmu obliczeniowego MEB kolejno dla obiektów dwu- i trój-wymiarowych. Dwa końcowe rozdziały omawiają zagadnienie obliczeń środowisk niejednorodnych Metodą Elementów Brzegowych. Wskazują na zarówno praktyczne wykorzystanie MEB w tomografii jak i na możliwe praktyczne zastosowanie elementów brzegowych nieskończonych.

Autor opracował następujące zagadnienia:

1. elementy brzegowe nieskończone bazujące na standardowym izoparamet-

trycznym elemencie drugiego rzędu - jednowymiarowe stosowane do obiektów dwu-wymiarowych z wielomianowymi funkcjami zaniku, z wykładniczymi funkcjami zaniku oraz odwzorowane (z transformacją geometrii) wraz z ich analizą porównawczą,

2. analogiczne elementy brzegowe nieskończone bazujące na standardowym czworokątnym, ośmiowęzłowym izoparametrycznym elemencie drugiego rzędu - dwuwymiarowe stosowane do obiektów trój-wymiarowych z wielomianowymi funkcjami zaniku, z wykładniczymi funkcjami zaniku oraz odwzorowane (z transformacją geometrii),
3. szczegóły implementacji wymienionych elementów brzegowych nieskończonych w Metodzie Elementów Brzegowych,
4. opracowanie i przetestowanie efektywnych modeli piersi zbudowanych z ośmiowęzłowych elementów brzegowych czworokątnych i odpowiadających im opracowanych elementach nieskończonych w zastosowaniu do mammografii optycznej lub impedancyjnej,
5. wprowadzenie do zagadnień odwrotnych związanych zarówno z elementami nieskończonymi jak i środowiskami niejednorodnymi,
6. dokonanie identyfikacji zawilgocenia muru dla danych rzeczywistych,

Za własne osiągnięcia w pracy uważam zbiorcze opracowanie elementów brzegowych nieskończonych w zastosowaniu do mammografii optycznej i tomografii impedancyjnej, począwszy od generowania jednorodnej siatki elementów brzegowych czworokątnych drugiego rzędu po szczegóły implementacji i niezbędnych modyfikacji algorytmu MEB jak również porównanie takiego podejścia z klasyczną metodą rozszerzania obszaru i doboru na jego sztucznej granicy warunków brzegowych w obszarach nieograniczonych.

Znaczenie opracowanych elementów brzegowych nieskończonych i zastosowanie ich w MEB w zagadnieniach odwrotnych związane jest z redukcją liczby węzłów i wynikającym stąd kilkukrotnemu skróceniu czasu obliczeń. Ma niebagatelne znaczenie w aspekcie badań tomograficznych gdzie poszukiwanie obrazu niedostępnego wnętrza obiektu jest procesem powtarzanym wielokrotnie. Jednocześnie należy zauważyć, że dwukrotne zwiększenie analizowanego obszaru w metodzie klasycznej oferuje znacznie gorszą dokładność wyników



niż wprowadzenie elementów nieskończonych. Twierdzenie postawione w tezie pracy o możliwości efektywnego modelowania zagadnień polowych z wykorzystaniem MEB i elementów nieskończonych wydaje się więc całkowicie uzasadnione.

## Bibliografia

- [1] T.T. Abdel-Fattah, H.A. Hodhod, and A.Y. Akl. A novel formulation of infinite elements for static analysis. *Computers and Structures*, (77):371 – 379, 2000.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. John Wiley, New York, 1973.
- [3] P.R. Adby and M.A.H. Dempster. *Introduction to Optimization Methods*. Chapman and Hall, London, 1974.
- [4] M. H. Aliabadi and W. S. Hall. *The regularising transformation integration method for boundary element kernels. Comparison with series expansion and weighted Gaussian integration methods*. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 6, No 2, 1989.
- [5] M.H. Aliabadi. *The Boundary Element Method Volume 2*. John Willey & Sons, Inbunden, 2005.
- [6] D.L. Anderson and R.L. Ungless. Infinite finite elements. France, 1977.
- [7] S. R. Arridge. Optical tomography in medical imaging. *Inverse Problems*, 15: R41 – R93, 1999.
- [8] G. Beer. *Programming the Boundary Element Method. An Introduction for Engineers*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2001.
- [9] G. Beer and J.L. Meek. Infinite domain elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(1): 43 – 52, 1981.
- [10] G. Beer and J. O. Watson. Infinite boundary elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28: 1233 – 1247, 1989.

- [11] G. Beer, J. O. Watson, and G. Swoboda. Three-dimensional analysis of tunnels using infinite boundary elements. *Computers and Geotechnics*, 3: 37 – 58, 1987.
- [12] P. Berowski, J. Sikora, S. Wójtowicz, and S. F. Filipowicz. Monitoring of dehumidification process of the wall using 3d eit system. In *15th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields - COMPUMAG*, volume 2, pages 166 – 167, Shenyang Chiny, Luty 2005.
- [13] P. Bettess. Infinite elements. pages 53 – 64, 1977.
- [14] P. Bettess. More on infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15: 1613 – 1626, 1980.
- [15] P. Bettess. *Infinite Elements*. Penshaw Press, 1992.
- [16] St. Bolkowski, J. Sikora, J. Skoczylas, J. Sroka, M. Stabrowski, and St. Wincenciak. *Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1986.
- [17] C. A. Brebbia. *The Boundary Element Method for engineers*. Pentech Press, London, 1978.
- [18] Zhang Chuhan, Chen Xinfeng, and Wang Guanglun. A coupling model of fe-be-ie-ibe for non-linear layered soil-structure interactions. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 28(4): 421 – 441, 1999.
- [19] <http://www.comsol.com/>.
- [20] T. G. Davies and S. Bu. Infinite boundary elements for the analysis of halfspace problems. *Computers and Geotechnics*, 19(2): 137 – 151, 1996.
- [21] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, New York, London, 1984.
- [22] M. Dryja and J. i M. Jankowscy. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz.2*. WNT, Warszawa, 1988.
- [23] F.M.E. Duddeck. Fourier-bem: or what to do if no fundamental solution is available? *Meccanica Kluwer Academic Publishers. Netherlands*, 36(4): 437 – 448, 2001.

- [24] F.M.E. Duddeck. *Fourier BEM. Generalization of Boundary Element Methods by Fourier Transform*, volume 5 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2002.
- [25] R. Duraiswami, G.L. Chahine, and K. Sarkar. Boundary element techniques for efficient 2d and 3d electrical impedance tomography. *Chemical Enginerring Science*, 52(13): 2185 – 2196, 1997.
- [26] S.F. Filipowicz, K. Nita, P. Berowski, and J. Sikora. Boundary element method in the inverse problem of electroencephalography. In *3rd International Symposium on Process Tomography In Poland*, pages 68 – 71, Łódź, September 2004.
- [27] S.F. Filipowicz, K. Nita, and J. Sikora. Uproszczony wielowarstwowy model głowy w badaniach encefalograficznych. *ZKwE*, Kwiecień April 10-12, 2006.
- [28] S.F. Filipowicz and T. Rymarczyk. *Tomografia impedancyjna, pomiary, konstrukcje i metody tworzenia obrazu*. BEL Studio, Warszawa, 2003.
- [29] Z. Fortuna, B. Macukow, and J. Wasowski. *Metody numeryczne*. WNT, Warszawa, 1993.
- [30] V. Frayssse, L. Giraud, and S. Gratton. A set of gmres routines for real and complex arithmetics. Technical report tr/pa/97/49, CERACS, 1997.
- [31] J.H.M. Frijns, S.L. De Snoo, and R. Schoonhoven. Improving the accuracy of the boundary elemnt method by use of second-order interpolation functions. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 47(10): 1336 – 1346, 2000.
- [32] Li-Yun Fu and Ru-Shan Wu. Infinite element-based absorbing boundary technique for elastic wave modeling. *Technical Reports No 2, Institute of Tectonics, University of California at Santa Cruz*, pages 1489 – 1492, 1997.
- [33] X.-W. Gao and T. G. Davies. Infinite boundary elements for half-space problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21: 207 – 213, 1998.

- [34] S. Gratkowski. *Elementy specjalne w metodzie elementów skończonych stosowanej do obliczeń elektromagnetycznych*. Prace naukowe Politechniki Szczecińskiej, Nr 532, KETiI Nr 5, Szczecin, 1996.
- [35] St. Gratkowski. Us patent 5966524 - 3-d electromagnetic infinite element, 10 1999. <http://www.patentstorm.us/patents/5966524.html>.
- [36] L. J. Gray, T. Kaplan, J. D. Richardson, and G. H. Paulino. Green's functions and bounday integral analysis for exponentially graded materials: Heat conduction. *Journal od Applied Mechanics*, 70: 543 – 549, July 2003.
- [37] J. Hoła, Z. Matkowski, and K. Schabowicz. *Impedance tomographic method of assessing the dampness of masonry*, volume Z.1-B. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, [http://bc.biblos.pk.edu.pl/bc/resources/CT/CzasopismoTechniczne\\_1B\\_2007/HolaJ/TomografiaImpedancyjna/pdf/HolaJ\\_TomografiaImpedancyjna.pdf](http://bc.biblos.pk.edu.pl/bc/resources/CT/CzasopismoTechniczne_1B_2007/HolaJ/TomografiaImpedancyjna/pdf/HolaJ_TomografiaImpedancyjna.pdf), 2007.
- [38] <http://www.boundary-element-method.com>.
- [39] P. Jabłoński. *Metoda elementów brzegowych w analizie pola elektromagnetycznego*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2003.
- [40] A. Jaworski. *Metoda Elementów Brzegowych: Zagadnienia potencjalne*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2000.
- [41] Yu Li Jiang. Magnetolectric green's functions and their application to the inclusion and inhomogeneity problems. *International Journal of Solids and Structures*, (39): 4201 – 4213, 2002.
- [42] A. Kamińska. *Wykorzystanie tomografii komputerowej do identyfikacji rozkładu konduktywności w obszarach nieograniczonych*. PhD thesis, Politechnika Lubelska, 1997.
- [43] M. Krakowski. *Elektrotechnika teoretyczna. Pole elektromagnetyczne*, volume 2. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1990.

- [44] E. Kurgan. *Analiza pola magnetostatycznego w Środowisku niejednorodnym metodą elementów brzegowych*. Uczelniane wydawnictwa naukowo-dydaktyczne AGH, Kraków, 1999.
- [45] B. Q. Li and J. W. Evans. Boundary element solution of heat convection-diffusion problems. *Journal of Computational Physics*, 93: 255 – 272, April 1991.
- [46] J. Liang and K. M. Liew. Boundary elements for half-space problems via fundamental solutions: A three-dimensional analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(11): 1189 – 1202, 2001.
- [47] E. Majchrzak. *Metoda Elementów Brzegowych w przepływie ciepła*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2001.
- [48] A. Majewski. Finite element analysis of anisotropic optical fibers having an arbitrary index distribution. *Archiwum Elektrotechniki*, 35(3-4): 993 – 998, 1986.
- [49] J.W.H. Meijs, O.W. Weiner, M.J. Peters, and A. Van Oosterom. On the numerical accuracy of the boundary element method. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 36:1038–1049, 1989.
- [50] W. Moser, Ch. Duenser, and G. Beer. Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61: 317 – 328, 2004.
- [51] <http://www.hpfem.jku.at/netgen/>.
- [52] K.R. Nita. *Lokalizacja położenia autonomicznych źródeł wewnątrz obszaru metodą elementów brzegowych*. PhD thesis, Politechnika Warszawska, 2007.
- [53] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, 1999.
- [54] Bettess P. Finite element modelling of exterior electromagnetic problems. *IEEE Transaction on Magnetics*, 24(1): 238 – 243, 1988.

- [55] G. H. Paulino and A. Sutradhar. The simple boundary element method for multiple cracks in functionally graded media governed by potential theory: a three-dimensional galerkin approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (65): 2007 – 2034, 2005.
- [56] G. H. Paulino, A. Sutradhar, and L. J. Gray. Boundary element methods for functionally graded materials. In *IABEM 2002, International Association for Boundary Element Methods*, Austin, May 2002.
- [57] K. Pawluk. Jak pisać teksty techniczne poprawnie (pn-88/e-01100).
- [58] B. Pańczyk. *Konstrukcja obrazu rozkładu właściwości fizycznych obiektu metodą impedancyjnej tomografii komputerowej*. PhD thesis, Politechnika Lubelska, 1995.
- [59] M. Pańczyk and J. Sikora. Eight nodes quadrilateral isoparametric infinite boundary elements in boundary elements method. In *PROC-TOM2006, 4th International Symposium on Process Tomography in Poland*, pages 119 – 122, Warszawa, wrzesień 2006.
- [60] M. Pańczyk and J. Sikora. Transformacja geometrii i właściwości fizycznych obiektu w zagadnieniach 2d metody elementów brzegowych z elementami nieskończonymi. In *Symposium ELEKTROTECHNIKA 2006*, pages 68 – 71, Warszawa, grudzień 2006.
- [61] M. Pańczyk and J. Sikora. Wybrane zagadnienia analizy numerycznej elementów brzegowych nieskończonych. In *XXIX IC - SPETO 2006, XXIX International Conference on Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory*, volume 1, pages 195 – 198, Ustroń, maj 2006.
- [62] M. Pańczyk and J. Sikora. Concept of mapped infinite elements incorporation into boundary elements method. In *ISTET'07, XIV International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET'07 and SEEM'07*, page 24, Szczecin, June 2007.
- [63] M. Pańczyk and J. Sikora. Koncepcja odwzorowanych elementów nieskończonych w metodzie elementów brzegowych. *Przegląd Elektrotechniczny*, 83: 25 – 28, 2007.

- [64] M. Pańczyk and J. Sikora. Model obliczeniowy metody elementów brzegowych z elementami nieskończonymi. *Prace Instytutu Elektrotechniki*, 230: 9 – 24, 2007.
- [65] M. Pańczyk and J. Sikora. Transformacja geometrii i właściwości fizycznych obiektu w zagadnieniach 2d metody elementów brzegowych z elementami nieskończonymi. *Prace Instytutu Elektrotechniki*, 233: 31 – 41, 2007.
- [66] M. Pańczyk and J. Sikora. Implementation of boundary element method in electrical impedance tomography for functionally graded materials. In *OWD 2008, X International PhD Workshop*, volume 25, pages 405 – 408, Wisła, październik 2008.
- [67] M. Pańczyk and J. Sikora. Wybrane zagadnienia analizy numerycznej elementów brzegowych nieskończonych. In *XXXI IC - SPETO 2008, XXXI International Conference on Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory*, volume 1, pages 17 – 18, Ustroń, maj 2008.
- [68] M. Pańczyk and J. Sikora. Zastosowanie elementów brzegowych nieskończonych w odniesieniu do obiektów niejednorodnych na przykładzie badań zawilgocenia murów. *Prace Instytutu Elektrotechniki*, 239: 103 – 115, 2008.
- [69] M. Pańczyk and J. Sikora. Zastosowanie metody elementów brzegowych w odniesieniu do obiektów niejednorodnych na przykładzie badań zawilgocenia murów. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 10: 737 – 738, 2008.
- [70] M. Pańczyk and J. Sikora. 3d mapped infinite boundary elements usage in electrical impedance tomography - pe2008. *Przegląd Elektrotechniczny*, 5: 71 – 74, 2009.
- [71] S. Pissanetzky. An infinite element and a formula for numerical quadrature over an infinite interval. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19: 913 – 928, 1983.
- [72] S. Pissanetzky. A simple infinite element. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 3(2): 107 – 114, 1984.



- [73] C. Pozrikidis. *A Practical Guide to Boundary Element Methods with the Software Library BEMLIB*. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [74] W.H Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, <http://www.nr.com>, 1992.
- [75] <http://comecau.awardspace.com/>.
- [76] P. Rabinowitz and G. Weiss. Tables of abscissas and weights for numerical evaluation of integrals of the form:  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} f(x) dx$ . *Math. Tables Other Aids to Comput.*, 13: 285 – 294, 1959.
- [77] J.J. Rencis. Boundary element resources network (benet). <http://comp.uark.edu/~jjrencis/benet/computer/>.
- [78] F. J. Rizzo, P. A. Martin, and R. A. Roberts. Boundary elements and green's function library.
- [79] M. Ross. Modeling methods for silent boundaries in infinite media. *ASEN 5519-006: Fluid-Structure Interaction Aerospace Engineering Sciences - University of Colorado at Boulder*, 2004.
- [80] J. Sikora. *Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiroprowodowej*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2000.
- [81] J. Sikora. *Boundary Element Method for Impecance and Optical Tomography*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2007.
- [82] J. Sikora. *Podstawy metody elementów skończonych*. Wydawnictwo Instytutu Elektrotechniki, Warszawa, 2008.
- [83] J. Sikora and S. Arridge. Some numerical aspectsof 3d bem aplication to optical tomography. *IV International Workshop - Comutational Problems of Electrical Engineering*, pages 59 – 62, 2002.
- [84] J. Sikora, J. Skoczylas, J. Sroka, and S. Wincenciak. *Zbiór zadań z teorii pola elektromagnetycznego*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2004.

- [85] J. Sikora and P. Wieleba. Biblioteka meb dla dyfuzyjnej tomografii optycznej realizowana na licencji gnu. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2k: 219 – 222, 2007.
- [86] M. Stasiak. *Identyfikacja wnętrza obiektów trójwymiarowych metodą tomografii impedancyjnej*. PhD thesis, Politechnika Łódzka, 2005.
- [87] Bu Suhol. Infinite boundary elements for the dynamic analysis of machine foundations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(21): 3901 – 3917, 1998.
- [88] A. Sutradhar and G. H. Paulino. A simple boundary element method for problems of potential in non-homogeneous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (60): 2203 – 2230, 2004.
- [89] A. Sutradhar, G. H. Paulino, and L. J. Gray. On hypersingular surface integrals in the symmetric galerkin boundary element method: application to heat conduction in exponentially graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (62): 122 – 157, 2005.
- [90] T. Tarvainen. *Computational Methods for Light Transport in Optical Tomography*. PhD thesis, Department of Physics, University of Kuopio, 2006. [http://physics.uku.fi/~vilhunen/phdthesis\\_ttarvainen.pdf](http://physics.uku.fi/~vilhunen/phdthesis_ttarvainen.pdf).
- [91] R. L. Ungless. An infinite finite element. Master's thesis, University of British Columbia, 1973.
- [92] J. O. Watson. Advanced implementation of the boundary element method for two- and three-dimensional elastostatics. *Developments in Boundary Element Methods - 1 (Editors P.K. Banerjee and R. Butterfield)*, Elsevier Applied Science Publishers, 61: 31 – 63, 1979.
- [93] P. Wieleba and J. Sikora. Open source bem library. *Elsevier - Advances in Engineering Software*, 40(8): 564 – 569, sierpień 2009.
- [94] <http://en.wikipedia.org/>.
- [95] A.M. Winslow. Numerical solution of the quasilinear poisson equation in a uniform triangle mesh. *Journal of Computational Physics*, 2: 149 – 172, 1967.

- 
- [96] L. C. Wrobel. *The Boundary Element Method Application in Thermo-Fluids and Acoustics*. John Willey & Sons, 2002.
- [97] G. A. Ybarra, Q. H. Liu, G. Ye, K. H. Lim, J.-H. Lee, W. T. Joines, and Rhett T. G. Breast imaging using electrical impedance tomography (eit). American Scientific Publishers, 2007. Chapter 15, [http://people.ee.duke.edu/~gary/ASP/Chapter15\\_color.pdf](http://people.ee.duke.edu/~gary/ASP/Chapter15_color.pdf).
- [98] C.O. Zienkiewicz. *The Finite Element in Engineering Science*. McGraw-Hill, New York, 1971.
- [99] C.O. Zienkiewicz. *Metoda Elementów Skończonych*. Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1974.
- [100] C.O. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, 4th edition, 1993.
- [101] O. C. Zienkiewicz, C. Emson, and P. Bettess. A novel boundary infinite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 16: 393 – 404, 1983.

## Spis rysunków

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Ewolucja uproszczonego modelu piersi, zorientowana na poprawę dokładności wyników i zwiększenie efektywności obliczeniowej . . . . .                                                                                                                                                                          | 6  |
| 2.1 | Obszar poszukiwania rozwiązania we współrzędnych lokalnych . . . . .                                                                                                                                                                                                                                          | 15 |
| 2.2 | Kierunki numerowania elementu brzegowego: a) zagadnienie wewnętrzne b) zagadnienie zewnętrzne . . . . .                                                                                                                                                                                                       | 16 |
| 2.3 | Dyskretyzacja obszaru elementami 2-go rzędu [81] . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 17 |
| 2.4 | Izoparametryczny element brzegowy drugiego rzędu . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 17 |
| 2.5 | Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji $N_0$ , $N_1$ i $N_2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 19 |
| 2.6 | Całkowanie numeryczne dla elementów brzegowych 2-go rzędu [81] . . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 21 |
| 2.7 | Transformacja elementu zawierającego osobliwości z układu współrzędnych $\xi < -1, +1 >$ do $\eta < 0, 1 >$ [81]. a) gdy $r$ znajduje się w pierwszym węźle, b) gdy $r$ znajduje się w drugim węźle - wówczas element brzegowy dzielimy na dwa subelementy, c) gdy $r$ znajduje się w trzecim węźle . . . . . | 22 |
| 2.8 | Uproszczony schemat blokowy tworzenia obrazu w tomografii komputerowej (TK) . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 24 |
| 3.1 | Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji $M_0$ , $M_1$ i $M_2$ z wielomianowymi funkcjami zaniku . . . . .                                                                                                                                                                                         | 34 |
| 3.2 | Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji $M_0$ , $M_1$ i $M_2$ z wykładniczymi funkcjami zaniku . . . . .                                                                                                                                                                                          | 35 |
| 3.3 | Obszar poszukiwania rozwiązania we współrzędnych lokalnych dla przypadku otwartego brzegu . . . . .                                                                                                                                                                                                           | 36 |
| 3.4 | Transformacja elementu zawierającego osobliwości z układu współrzędnych $\xi < -1, +\infty >$ do $\eta < 0, 1 >$ . a) gdy $r$ znajduje się w pierwszym węźle ( $k=0$ ), b) w drugim ( $k=1$ ), c) w trzecim ( $k=2$ ) . . . . .                                                                               | 37 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.5  | Izoparametryczny element brzegowy nieskończony drugiego rzędu i jego transformacja ze współrzędnych $x$ do $\xi$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 38 |
| 3.6  | Graficzna prezentacja bazowych funkcji interpolacji $M_0$ i $M_1$ . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 39 |
| 3.7  | Dwu-wymiarowy przykład obliczeniowy oraz jego dyskretyzacja                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 40 |
| 3.8  | Idea zmniejszenia rozmiaru analizowanego obszaru poprzez zastosowanie elementów nieskończonych. Proporcje i kształty obszarów odpowiadają przyjętym dwuwymiarowym modelom obliczeniowym . . . . .                                                                                                                                                         | 42 |
| 3.9  | Porównanie wyników numerycznych z wynikami rozwiązania analitycznego . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                            | 43 |
| 3.10 | Porównanie błędów obliczeń numerycznych . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 43 |
| 3.11 | Przykładowe sposoby zastąpienia skoku potencjału i ostrego naroża w punkcie (0,0) liniowym spadkiem potencjału i krzywą gładką . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 45 |
| 3.12 | Modele dwuwymiarowe o różnej siatce elementów brzegowych. Po lewej siatka elementów o stałym rozmiarze (z wyjątkiem zagęszczonego naroża). Po prawej siatka elementów rozszerzających się stopniowo od punktu (0,0) do połowy długości modelu a następnie ponownie stopniowo zagęszczająca się w miarę zbliżania się do elementu nieskończonego . . . . . | 47 |
| 3.13 | Porównanie wyników dla siatek elementów jak na rysunku 3.12 z zastosowanymi odwzorowanymi elementami brzegowymi nieskończonymi . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 47 |
| 3.14 | Porównanie błędów dla siatek elementów jak na rysunku 3.12 z zastosowanymi odwzorowanymi elementami brzegowymi nieskończonymi . . . . .                                                                                                                                                                                                                   | 48 |
| 4.1  | Elementy brzegowe nieskończone z funkcjami zaniku. Po lewej transformowany do nieskończoności wzdłuż jednej współrzędnej $\xi$ i po prawej element narożny z transformacją wzdłuż obu współrzędnych $\xi$ i $\eta$ . . . . .                                                                                                                              | 50 |
| 4.2  | Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wielomianowymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym i zanikaniu w dodatnim kierunku osi $\xi$ ( $\xi_0 = -2$ ) . . . .                                                                                                    | 52 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.3  | Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wielomianowymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym i zanikaniu w dodatnich kierunkach obu osi $\xi$ i $\eta$ ( $\xi_0 = -2$ i $\eta_0 = -2$ ) . . . . . | 54 |
| 4.4  | Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wykładniczymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym, dla zanikania w dodatnim kierunku osi $\xi$ ( $L = -2$ ) . . . . .                                   | 57 |
| 4.5  | Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla elementu nieskończonego z wykładniczymi funkcjami zaniku bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym, dla zanikania w dodatnich kierunkach obu osi $\xi$ o $\eta$ ( $L = -2$ ) . .                         | 59 |
| 4.6  | Model zagadnienia wymagającego zastosowania narożnych nieskończonych elementów brzegowych $N_1, N_2, N_3$ oraz $N_4$ . . . . .                                                                                                                                                           | 61 |
| 4.7  | Elementarny przyrost powierzchni brzegowej i wektor normalny do powierzchni elementu w punkcie M . . . . .                                                                                                                                                                               | 62 |
| 4.8  | Lokalny układ współrzędnych krzywoliniowych $\xi, \eta$ dla pojedynczego czworokątnego elementu brzegowego . . . . .                                                                                                                                                                     | 63 |
| 4.9  | Punkt osobliwy w węźle 0 (po lewej), w węźle 1 (w środku) i w węźle 2 (po prawej) [81] . . . . .                                                                                                                                                                                         | 65 |
| 4.10 | Punkt osobliwy w węźle 3 (po lewej), w węźle 4 (w środku) i w węźle 5 (po prawej) [81] . . . . .                                                                                                                                                                                         | 67 |
| 4.11 | Punkt osobliwy w węźle 6 (po lewej) i w węźle 7 (po prawej) [81] . . . . .                                                                                                                                                                                                               | 69 |
| 4.12 | Koncentracja punktów całkowania Gaussa wokół osobliwości w węźle 0 . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 70 |
| 4.13 | Koncentracja punktów całkowania Gaussa wokół osobliwości w węźle 1 . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 70 |
| 4.14 | Izoparametryczny element brzegowy nieskończony drugiego rzędu i jego transformacja ze współrzędnych $x, y, z$ do $\xi, \eta$ . . . . .                                                                                                                                                   | 71 |
| 4.15 | Czworokątny 8-węzłowy element brzegowy i bazujący na nim odwzorowany element nieskończony . . . . .                                                                                                                                                                                      | 71 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                 |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.16 | Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla odwzorowanego elementu nieskończonego bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym dla przypadku zanikania w dodatnim kierunku osi $\xi$ . . . . . | 74 |
| 4.17 | Graficzna prezentacja funkcji interpolacyjnych dla odwzorowanego elementu nieskończonego bazującego na standardowym czworokątnym 8-węzłowym elemencie brzegowym dla przypadku zanikania w dodatnim kierunku osi $\xi$ . . . . . | 76 |
| 4.18 | Uproszczony model nieskończonego tunelu z numerami i współrzędnymi węzłów . . . . .                                                                                                                                             | 78 |
| 4.19 | Siatka elementów brzegowych odpowiadająca modelowi nieskończonego tunelu jak na rysunku 4.18 z zaznaczonym kierunkiem numerowania węzłów w elementach . . . . .                                                                 | 79 |
| 4.20 | Model nieskończonego tunelu zbudowanego z 856 elementów z elementami nieskończonymi analogiczny do modelu uproszczonego z rysunku 4.18 . . . . .                                                                                | 80 |
| 4.21 | Wykres $\partial\Phi/\partial n$ na brzegu przekroju poprzecznego jak na rysunku 4.20 . . . . .                                                                                                                                 | 81 |
| 4.22 | Przykład geometrii formy z elektrodami oraz siatki elementów stosowanych w tomografii impedancyjnej piersi [97] . . . . .                                                                                                       | 81 |
| 4.23 | Przykład geometrii formy o siatki modelu stosowanej w mamografii optycznej piersi . . . . .                                                                                                                                     | 82 |
| 4.24 | Model piersi w postaci półsfery . . . . .                                                                                                                                                                                       | 83 |
| 4.25 | Model piersi w postaci półsfery z dodanym obszarem cylindrycznym odpowiadającym fragmentowi klatki piersiowej . . . . .                                                                                                         | 83 |
| 4.26 | Model piersi w postaci półsfery z dodanym rozszerzonym obszarem cylindrycznym odpowiadającym fragmentowi klatki piersiowej . . . . .                                                                                            | 83 |
| 4.27 | Model piersi w postaci półsfery z otwartym brzegiem i elementami nieskończonymi . . . . .                                                                                                                                       | 83 |
| 4.28 | Porównanie wyników dla modułu $\partial\Phi/\partial n(\Psi)$ w odniesieniu do podstawowego modelu półsfery . . . . .                                                                                                           | 85 |
| 4.29 | Porównanie wyników dla fazy $\partial\Phi/\partial n(\Psi)$ w odniesieniu do podstawowego modelu półsfery . . . . .                                                                                                             | 86 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 | Zdjęcia badanego muru ceglanego w Instytucie Budownictwa we Wrocławiu. . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 96  |
| 6.2 | Zawilgocony ceglany mur z elektrodami tomografu rezystancyjnego $e1 \div e26$ i trzema punktami, w których dokonano odwiertów dla pomiarów metodą suszarkowo-wagową $1 \div 3$ - po lewej oraz odpowiadający mu 4 warstwowy model z siatką czworokątną - po prawej. . . . .                                                  | 97  |
| 6.3 | Niejednorodność materiału określona funkcją wykładniczą lub wielomianem stopnia drugiego . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 98  |
| 6.4 | Poglądowy model zawilgoconego muru z elementami nieskończonymi . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 103 |
| 6.5 | Potencjały na poszczególnych elektrodach w przypadku muru zawilgoconego do połowy pomiary dla pobudzenia 1KHz, symulacja numeryczna dla zmian własności materiałowych środowiska aproksymowanych wielomianem stopnia drugiego w przypadku 2D i funkcją wykładniczą w przypadku 3D. Kąty projekcji od 1-26 do 8-19 . . . . .  | 104 |
| 6.6 | Potencjały na poszczególnych elektrodach w przypadku muru zawilgoconego do połowy pomiary dla pobudzenia 1KHz, symulacja numeryczna dla zmian własności materiałowych środowiska aproksymowanych wielomianem stopnia drugiego w przypadku 2D i funkcją wykładniczą w przypadku 3D. Kąty projekcji od 9-18 do 13-14 . . . . . | 105 |



## Spis tablic

|     |                                                                                                                       |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Wartości współrzędnych punktów Gaussa i odpowiadające im współczynniki wag . . . . .                                  | 26  |
| 2.2 | Wartości współrzędnych punktów Gaussa i odpowiadające im współczynniki wag dla logarytmicznej kwadratury Gaussa . . . | 27  |
| 6.1 | Wyniki pomiarów uzyskane metodą suszarkowo-wagową dla zawilgoconego muru . . . . .                                    | 98  |
| 6.2 | Wyniki pomiarów uzyskane z tomografu rezystancyjnego dla źródła o częstotliwości 1kHz . . . . .                       | 100 |
| 6.3 | Wyniki obliczeń BEM z zastosowaniem wyłącznie elementów standardowych. . . . .                                        | 101 |