Pragnę wyrazić serdeczne podziękowania Panu Profesorowi Adamowi Stolarskiemu za opiekę naukową, cenne uwagi i żarliwe dyskusje, które przyczyniły się do powstania niniejszej pracy. Chcę wyrazić swoją wdzięczność i podziękowanie dla opiniodawców książki Pana Profesora Grzegorza Bąka oraz Ś.P. Pana Profesora Mieczysława Króla za ich cenne wskazówki i sugestie, które przyczyniły się do podniesienia jej wartości

Monografie – Politechnika Lubelska

Politechnika Lubelska
Wydział Budownictwa i Architektury
ul. Nadbystrzycka 40
20-618 Lublin

Piotr Smarzewski

Modelowanie statycznego zachowania niesprężystych belek żelbetowych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości

Politechnika Lubelska
Lublin 2011

Recenzenci:
prof. dr hab. inż. Grzegorz Bąk
prof. dr hab. Mieczysław Król

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

ISBN: 978-83-62596-48-5

Wydawca: Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin
Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej
Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej
ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl
www.biblioteka.pollub.pl
Druk: ESUS Agencja Reklamowo-Wydawnicza Tomasz Przybylak
www.esus.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl
Nakład: 100 egz.

SPIS TREŚCI

PODSTAWOWE SYMBOLE I OZNACZENIA

Duże litery łacińskie

$[D^c]$	macierz sprężystości dla materiału izotropowego
$\left[D_c^{ck}\right]$	macierz sztywności w układzie współrzędnych zgodnym z kierunkiem naprężeń głównych, z osią x^{ck} leżącą w linii prostopadłej do płaszczyzny rysy
$[K]$	macierz współczynników układu
$\left[K^T\right]$	macierz sztywności stycznej
$\left[K^S\right]$	macierz sztywności siecznej
$[K_l]$	macierz sztywności elementu prętowego
$[S_l]$	macierz sztywności naprężeń w elemencie prętowym
$\{F^a\}$	wektor uogólnionego obciążenia
$\{F_i^{nr}\}$	wektor wewnętrznych sił węzłowych w stanie naprężeń panującym w dyskretyzowanym układzie
$\{F_l\}$	niezrównoważony wektor obciążenia zewnętrznego dla elementu prętowego
$\{F_l^a\}$	uogólniony wektor obciążenia zewnętrznego dla elementu prętowego
$\{F_l^{nr}\}$	wektor przyrostu obciążenia zewnętrznego dla elementu prętowego
A_s	pole przekroju zbrojenia
E_c	styczny moduł sprężystości betonu przy ściskaniu
E_{cm}	sieczny moduł sprężystości betonu przy ściskaniu
E_s	wartość obliczeniowa modułu sprężystości stali zbrojeniowej
E_t	styczny moduł sprężystości betonu przy rozciąganiu
E_T	moduł odkształcenia plastycznego stali zbrojeniowej
F_{cr}	siła rysująca
F_i	funkcja stanu naprężeń w prostokątnym układzie współrzędnych

F_s siła podłużna w elemencie prętowym

F_u siła niszcząca

L_s długość elementu prętowego

R^t moduł osłabienia betonu po zarysowaniu

S_i powierzchnia graniczna betonu

T_c mnożnik sztywności betonu w strefie rozciąganej w fazie zarysowania

Małe litery łacińskie

$\{u\}$ wektor uogólnionego przemieszczenia

$\{\Delta u_i\}$ wektor przyrostu przemieszczenia

$\{\Delta u_i^I\}$ wektor przyrostu przemieszczenia wywołany jednostkowym parametrem obciążenia

$\{\Delta u_i^{II}\}$ wektor przyrostu przemieszczenia w metodzie Newtona-Raphsona

$\{\Delta u_n\}$ suma wektorów przyrostów przemieszczenia Δu_i w bieżącym kroku iteracyjnym

a_0, a_1, a_2 parametry określające promień przekroju dewiatorowego r_t powierzchni granicznej betonu

b szerokość przekroju belki

b_0, b_1, b_2 parametry określające promień przekroju dewiatorowego r_c powierzchni granicznej betonu

c_{stif} parametr sztywności betonu w stanie zarysowania lub zmiażdżenia

d wysokość użyteczna przekroju

$i,\ n$ numer kroku przyrostowego

f_1 wytrzymałość w stanie dwuosiowego ściskania nałożona w stanie naprężenia hydrostatycznego σ_h^a

f_2 wytrzymałość w stanie jednoosiowego ściskania nałożona w stanie naprężenia hydrostatycznego σ_h^a

f_c wytrzymałość betonu na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia

f_{cb}	wytrzymałość betonu w stanie dwuosiowego ściskania
$f_{c,cube}$	wytrzymałość gwarantowana betonu
f_{ck}	charakterystyczna wytrzymałość betonu na ściskanie
f_{cm}	średnia wartość wytrzymałości betonu na ściskanie
$f_{ct,sp}$	wytrzymałość betonu na rozciąganie przy rozłupywaniu
f_{st}	wytrzymałość stali na rozciąganie i ściskanie
f_t	wytrzymałość betonu na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia
f_y	granica plastyczności stali
p_t, p_c	parametry definiujące powierzchnię graniczną betonu
r	wektor promień lokalizujący położenie powierzchni granicznej
r_c	promień południka ściskania przekroju dewiatorowego powierzchni granicznej betonu
r_i	niezrównoważony parametr otrzymywany w wyniku skalarnego mnożenia wektora normalnego i stycznego
r_t	promień południka rozciągania przekroju dewiatorowego powierzchni granicznej betonu
t	parametr charakteryzujący beton wysokiej wytrzymałości, zależny od f_{ck}
u	różnica między przemieszczeniami w węźle
u_d	przemieszczenie pionowe na dolnej krawędzi elementu
u_g	przemieszczenie pionowe na górnej krawędzi elementu
Δu	różnica między przyrostami przemieszczenia w węźle
Δu_n	suma przyrostów przemieszczenia Δu_i w bieżącym kroku iteracyjnym
z	wierzchołek powierzchni granicznej betonu

Małe litery greckie

$\left\{\varepsilon'\right\}$	wektor zmodyfikowanego odkształcenia całkowitego betonu
$\left\{\varepsilon^{ck}\right\}$	wektor odkształcenia betonu przy zarysowaniu
$\left\{\varepsilon^{el}_{n-1}\right\}$	wektor odkształcenia sprężystego betonu w kroku poprzednim

$\left\{\Delta\varepsilon_n\right\}$	całkowity przyrost wektora odkształcenia betonu w danym kroku
$\left\{\Delta\varepsilon_n^{pl}\right\}$	przyrost wektora odkształcenia plastycznego betonu
β	parametr skalowania
β_c	parametr nośności na ścinanie przy zamykaniu rysy
β_t	parametr nośności na ścinanie przy otwieraniu rysy
ε^{in}	odkształcenie w elemencie prętowym w pierwszym kroku obciążenia
ε_c	odkształcenie betonu
ε_{c1}	graniczne odkształcenie betonu w fazie wzmocnienia sprężysto-plastycznego
ε_{ck}^{ck}	odkształcenie betonu w chwili powstania rysy
ε_{cu}	graniczne odkształcenie betonu przy ściskaniu w fazie osłabienia
ε_n	odkształcenie całkowite elementu prętowego
ε_n^{el}	odkształcenie sprężyste pręta stalowego
ε_n^{th}	odkształcenie termiczne elementu prętowego
ε_n^T	odkształcenie w elemencie prętowym w analizie liniowo-sprężystej lub w pierwszej iteracji analizy nieliniowej
ε_{su}	graniczne odkształcenie stali w zakresie plastyczności
$\varepsilon_x^{ck}, \varepsilon_y^{ck}, \varepsilon_z^{ck}$	składowe odkształcenia normalnego w rysie
$\Delta\varepsilon$	przyrost odkształcenia elementu prętowego
$\Delta\varepsilon^{pl}$	przyrost odkształcenia plastycznego
ϕ	średnica pręta zbrojenia
ϕ_1, ϕ_2	kąty nachylenia prostych tworzących stożek hydrostatyczny
λ	zmienny parametr obciążenia
$\Delta\lambda$	parametr przyrostu obciążenia
ν, ν_c	współczynnik Poissona dla betonu
ν_s	współczynnik Poissona dla stali
θ	kąt Lodego odpowiadający trzeciemu niezmiennikowi dewiatora
ρ, ρ_s	gęstość zbrojenia
ρ_c	gęstość betonu
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	naprężenia główne

σ_c	naprężenie ściskające w betonie
σ_{cu}	naprężenie ściskające w betonie odpowiadające granicznemu odkształceniu przy ściskaniu ε_{cu}
σ_h	stan naprężenia hydrostatycznego opisujący średnie naprężenia normalne odpowiadające pierwszemu niezmiennikowi dewiatora naprężenia
σ_s	naprężenie w stali
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	naprężenia normalne
$\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$	naprężenia normalne w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z
$\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$	naprężenia styczne
τ_a	średnia wartość naprężenia stycznego
ξ	parametr spadku adaptacyjnego
ξ_0, ξ_1, ξ_2	parametry wytrzymałościowe powierzchni granicznej betonu
ξ_c, ξ_t, ξ_{cb}	parametry wytrzymałościowe powierzchni granicznej betonu

1. WSTĘP

1.1. Problematyka analizy wytężenia belek żelbetowych

W ostatnich latach wraz z większą wydajnością systemów obliczeniowych oraz możliwością ich zastosowania w procesie analizy i projektowania konstrukcji inżynierskich nastąpił intensywny rozwój metod numerycznych używanych w zakresie obliczeń statycznych, wymiarowania i analizy zachowania konstrukcji aż do osiągnięcia przez nią stanów granicznych. Metody numeryczne są jedyną drogą do uzyskania praktycznie przydatnych rozwiązań w analizie złożonych ustrojów przestrzennych wykonanych z materiałów nie podlegających prawom liniowej sprężystości. Metody numeryczne prowadzą zawsze do rozwiązań przybliżonych, gdyż układ równań różniczkowych jest zastąpiony układem równań algebraicznych, a dokładne rozwiązanie w postaci zamkniętego wzoru analitycznego jest zastępowane zbiorem liczb opisującym rozpatrywane zjawisko. Symulacje komputerowe stworzyły możliwość analizowania zagadnień trudnych i złożonych, co w znacznym stopniu przyczynia się do redukcji kosztów związanych z przeprowadzeniem badań doświadczalnych.

Ze wszystkich metod numerycznych najczęściej stosowana jest Metoda Elementów Skończonych, która stała się podstawowym narzędziem analizy w bardzo wielu dziedzinach naukowych i praktyce inżynierskiej. Polega ona na podziale kontinuum o nieskończonej liczbie punktów na skończoną liczbę elementów połączonych ze sobą w węzłach. Wszystkie zmienne w równaniu zagadnienia wyraża się przez przemieszczenia punktów węzłowych wyznaczane z układu równań algebraicznych. Wymaga to sformułowania zależności geometrycznych oraz przyjęcia związków konstytutywnych uzależniających składowe stanu naprężenia i odkształcenia. We współczesnym piśmiennictwie jest wiele monografii i artykułów poświęconych tej metodzie. Do podstawowych prac w tym zakresie należą monografie Zienkiewicza [119], Zienkiewicza i Taylora [120], Crisfielda [30], Bathe [12], Kleibera [58], Borkowskiego i in. [17], Cooka [27], Boneta i Wooda [16], Moaveni [76].

Analiza wytężenia elementów konstrukcyjnych jest ważnym zagadnieniem mechaniki konstrukcji, szczególnie w odniesieniu do materiałów kruchych, gdyż umożliwia ocenę jej bezpieczeństwa i optymalne projektowanie. Zwiększenie nośności elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów kruchych uzyskuje się przez zastosowanie zbrojenia w postaci wiotkich prętów stalowych rozłożonych w materiale matrycy elementu w tych strefach, w których występują naprężenia rozciągające wywołujące zarysowanie materiału. Zasady takiego sposobu wzmacniania konstrukcji wchodzą w zakres metod wymiarowania żelbetowych elementów konstrukcyjnych. W odniesieniu do konstrukcji żelbetowych, które są kompozycją materiałową złożoną z dwóch materiałów: betonu i stali zbrojeniowej, teoretyczne zasady wymiarowania są przedstawione w pracach Suwalskiego [104], Kuczyńskiego [61], Kobiaka i Stachurskiego [60], Raya [89], Spiegela i Limbrunnera [98], Łapko [68], Starosolskiego [99]. Równie istotnym zagadnieniem jest sposób rozmieszczenia zbrojenia w objętości elementu, gdyż decyduje on o rzeczywistym wytężeniu i nośności konstrukcji. Teoretyczne i doświadczalne problemy analizy wytężenia elementów żelbetowych są przedmiotem rozważań zawartych w monografii Godyckiego-Ćwirko [46].

Dynamiczny rozwój techniki komputerowej stworzył również możliwości wykonania analiz nieliniowych dotyczących żelbetowych układów konstrukcyjnych ze szczególnym uwzględnieniem zróżnicowanych sprężysto-plastycznych charakterystyk materiałowych: betonu i stali, rzeczywistego układu zbrojenia, wzajemnej współpracy obu materiałów oraz symulacji mechanizmu zniszczenia elementów konstrukcyjnych. Oprogramowanie systemowe zastosowane do modelowania zachowania konstrukcji szczególnie w zakresie niesprężystym jest bardzo efektywne zwłaszcza w odniesieniu do tak zwanych otwartych systemów, w których można zastosować własne modele konstytutywne. Jak dowiodła praktyka inżynierska, zrealizowane dotychczas konstrukcje z betonu, zaprojektowane bez wspomagania komputerowego, spełniają najczęściej swoje zadania, niemniej jednak różne wpływy fizyczne, takie jak skurcz, oddziaływania termiczne, naprężenia przyczepności i pełzanie lub geometryczne, takie jak złożony układ konstrukcyjny były oceniane w dużym stopniu jedynie na podstawie intuicji inżynierskiej. Prowadziło to często do znacznego przewymiarowania konstrukcji, w celu zapewnienia im wymaganego bezpieczeństwa oraz odpowiednich walorów użytkowych.

Analiza pracy elementów żelbetowych była przedmiotem rozważań wielu publikacji. W literaturze można spotkać wiele opracowań dotyczących analizy statycznej. Przykłady zastosowania metody elementów skończonych w analizie niesprężystych elementów żelbetowych prezentowane są w pracach m.in. McNeice [73], Faherty [37], Lina i Scordelisa [66], Suidana i Schnobricha [103], Argyrisa i in. [5], Buyukozturka [19], Waszczyszyna i in. [111, 112], Hemmaty i in. [48, 49], Barzegara i Maddipudi [10], Barbosa i Ribeiro [9], Fostera [40], Cichorskiego [24], Pamina i Winnickiego [82, 83], Fanninga [38], Tavareza [108], Kachlakeva [54], Wolanskiego [118], Smarzewskiego i Stolarskiego [96, 97] oraz monografiach Hofstettera i Manga [50], Wojewódzkiego i in. [117], Stolarskiego i Cichorskiego [100], Willama i Tanabe [115], Szarlińskiego i in. [105], Majewskiego [69].

Do znanych rozwiązań numerycznych statyki belek żelbetowych z betonu zwykłego należy zaliczyć rozwiązania Ngo i Scordelisa [78], Nilsona [79], Isenberga [52], Barzegara, Maddipudi i Srinivasa [11], Gomesa i Awrucha [47].

Z kolei analiza zachowania belek żelbetowych wykonanych z betonu o wysokiej wytrzymałości była przedmiotem kilkunastu prac doświadczalnych m.in. Tognona i in. [108], Uzumeri i Basseta [110], Olsena i in [80], Lambotte i Taerwe [63], Taerwe [107], Larrarda i in. [64], Lina i in. [65], Pendyala i in. [85], Mansura i in. [71], Sarkera i in. [91], Pecce i Fabbrocino [36, 84], Weissa i in. [113], Rashida i Mansura [88]. W kraju podstawową pracą w tym zakresie jest praca Kamińskiej [55], będąca źródłem wzorcowych wyników, do których odnoszone są własne rozwiązania teoretyczne.

Beton wysokowartościowy, czyli beton o wysokiej wytrzymałości i jednocześnie wysokiej szczelności nie jest bynajmniej materiałem nieznanym. Zawiera on wszystkie składniki już wcześniej stosowane do betonów, lecz dozowane w innych proporcjach. Szczegółowe informacje dotyczące klasyfikacji i właściwości tych kompozytów materiałowych na bazie cementów zostały przedstawione w pracach Aïtcina [2, 3], Ajdukiewicza [4] i Kaszyńskiej [57]. Niewątpliwie zastosowanie betonów wysokowartościowych w budownictwie będzie stale wzrastało zarówno ze względu na jego wysoką wytrzymałość, jak i na wysoki moduł sprężystości. Ponadto w bardzo wielu praktycznych zastosowaniach olbrzymie znaczenie ma wysoka odporność betonu wysokowartościowego na wpływy klimatyczne i oddziaływanie agresywnego środowiska związana z jego bardzo wysoką szczelnością.

Oczywiście najstarsze zastosowania betonu wysokowartościowego datują się na późne lata osiemdziesiąte, a to oznacza, że czas eksploatacji tych konstrukcji jest jeszcze zbyt krótki, aby właściwie ocenić rzeczywistą trwałość użytkową budowli wykonanych z tego materiału.

Specyficzne cechy betonów wysokowartościowych skłaniają ku konieczności podjęcia nie tylko badań doświadczalnych, ale również rozważań teoretycznych z zakresu konstytutywnego modelowania właściwości materiałowych, a w szczególności modelowania zachowania zbrojonych elementów konstrukcyjnych oraz analizy mechanizmów wytężenia i zniszczenia konstrukcji wykonanych z takiego materiału. Przykładowa praca z tego obszaru badawczego autorstwa Majoramy i in. [70] dotyczy modelowania konstytutywnego betonu wysokiej wytrzymałości.

W ostatnich czterech dekadach w analizach numerycznych stosowano różne modele betonu i stali zbrojeniowej. W celu dokładniejszego opisu pokrytycznego zachowania elementów żelbetowych nadal doskonalone są konstytutywne modele materiałowe oraz wykorzystywane coraz bardziej efektywne algorytmy numerycznego rozwiązywania nieliniowych równań równowagi.

1.2. Cel, przedmiot i zakres pracy

Przedmiotem pracy są belki żelbetowe z betonu wysokiej wytrzymałości traktowane jako kompozycja materiałowa składająca się z matrycy betonowej wzmocnionej wiotkimi prętami stalowymi rozłożonymi dyskretnie w materiale matrycy.

Głównym celem pracy jest modelowanie mechanizmów zniszczenia belek żelbetowych obciążonych statycznie, procesów statycznego odkształcania belek żelbetowych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych betonu i stali zbrojeniowej.

Osiągnięcie tego celu wymaga zrealizowania celów szczegółowych, do których należą:

- opracowanie własnego modelu teoretycznego betonu dla materiału sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem osłabienia materiałowego przy ściskaniu i rozciąganiu,
- opracowanie oryginalnych analiz zachowania przestrzennych belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości pod obciążeniem statycznym,
- opracowanie efektywnej metody obliczeniowej długości łuku Crisfielda w analizach niezwykle gwałtowanych procesów zniszczenia: zarysowania i miażdżenia w celu dokładniejszego oszacowania pokrytycznego zachowania elementów konstrukcyjnych.

Zakres pracy obejmuje rozważania dotyczące modelowania niesprężystych właściwości materiałów, modelowania procesów odkształcania przestrzennych ustrojów konstrukcyjnych oraz opracowanie rozwiązań numerycznych.

Podstawowe założenia przyjęte w pracy dotyczą:

- rozważań w zakresie dużych odkształceń, gdyż zgodnie z postanowieniami Eurocode 2 [35] i PN-B-03264 [86] metody analizy nieliniowej związane z nieliniowością w sensie fizycznym powinny być stosowane w połączeniu w ramach teorii II rzędu z nieliniowością w sensie geometrycznym,
- idealnego współdziałania prętów zbrojeniowych i betonu w węzłach wspólnych obliczeniowego modelu konstrukcji, czyli zgodności deformacji pomiędzy wszystkimi elementami konstrukcji.

Praca składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów wypełniających zakres pracy, zakończenia zawierającego wnioski i zestawienia bibliograficznego.

W rozdziale drugim przedstawiono opis modeli materiałowych wykorzystywanych w analizach numerycznych. W analizie wytężenia konstrukcji żelbetowych modelowanie właściwości betonu jest odniesione do poziomu makroskopowego. Beton jest traktowany w początkowej fazie odkształcenia jako materiał jednorodny i izotropowy. Przyjęcie powyższego założenia umożliwia zastosowanie fenomenologicznego opisu zachowania betonu jako ośrodka ciągłego. Model betonu opisuje trójparametrowa lub pięcioparametrowa powierzchnia graniczna przy ściskaniu i rozciąganiu zgodna z teorią Willama-Warnke [116] oraz własna propozycja prawa ewolucji tej powierzchni w funkcji odkształcenia. Opracowano własną propozycję modelu sprężysto-plastycznego z osłabieniem w odniesieniu do betonu ściskanego. Z kolei dla betonu rozciąganego założono sprężysto-kruchy model z osłabieniem uwzględniającym efekty zesztywnienia konstrukcji żelbetowej. Model betonu opisuje efekty zarysowania i miażdżenia. Założono model rysy rozmytej. Powstanie zarysowania w punkcie numerycznego całkowania modelu obliczeniowego jest uwzględnione w zależności naprężenie-odkształcenie poprzez wprowadzenie płaszczyzny osłabienia zlokalizowanej w kierunku prostopadłym do powierzchni rysy. Przyjęty parametr ścinania przy rozwarciu rysy β_t redukuje nośność na ścinanie w chwili powstania poślizgu w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni zarysowanej. Miażdżenie betonu jest opisane zgodnie z założeniami teorii plastycznego płynięcia jako wyraźne pogorszenie strukturalnej niepodzielności w wyniku zniszczenia materiału przy jednoosiowym, dwuosiowym lub trójosiowym ściskaniu. Kolejny poziom modyfikacji modelu zaproponowany w tym rozdziale dotyczy modelowania zachowania betonów o wysokiej wytrzymałości. Istotą tej propozycji jest modyfikacja modelu Desayi-Krishnana [32] i uproszczonego modelu Stolarskiego [100] poprzez łączne uwzględnienie fazy sprężysto-plastycznego wzmocnienia i fazy osłabienia materiałowego oraz wprowadzenie znacznie większych wartości granicznych odkształceń przy ściskaniu w belkach żelbetowych związanych ze zbrojeniem i efektem skali belek potwierdzonych doświadczalnie w pracach Pecce i Fabbrocino [36, 84], Kamińskiej [55, 56], Larrarda i in. [64], Mansura i in. [71], Olsena i in. [80], Pendyala i in. [85], Weissa i in. [113]. W odniesieniu do stali zbrojeniowej założono model materiałowy sprężysto-idealnie plastyczny o identycznych charakterystykach przy rozciąganiu i ściskaniu lub model materiałowy z uwzględnieniem wzmocnienia po uplastycznieniu.

W rozdziale trzecim przedstawiono opis analiz wytężenia układu konstrukcyjnego przeprowadzonych w niniejszej pracy. Zaprezentowano podstawowe sposoby modelowania zbrojenia oraz zaproponowano hipotezę współpracy prętów zbrojenia i materiału matrycy wyrażającą w jawny sposób zasadę równoważności przemieszczeń w węzłach wspólnych elementów skończonych modelu obliczeniowego. Opisano również sposób modelowania warunków brzegowych w płaszczyznach symetrii elementu i na podporach oraz przedstawiono sposób modelowania rozkładu sił w strefie przyłożenia obciążenia. Przedstawiono ponadto opis algorytmów rozwiązania układów przyrostowych równań statycznej równowagi metody elementów skończonych: Newtona-Raphsona, Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym i długości łuku Crisfielda umożliwiające określenie stanów zarysowania, przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia z uwzględnieniem efektów nieliniowości fizycznej materiałów i geometrycznej elementów konstrukcyjnych w zagadnieniach statycznych w zakresie wymaganym do osiągnięcia celu niniejszej pracy. W analizach przestrzegane są zasady wynikające z kompromisu pomiędzy dążeniem do maksymalnej dokładności obliczeń poprzez wprowadzenie gęstego podziału i dużej liczby węzłów, a minimalizacją czasu obliczeń poprzez odpowiedni dobór wielkości kroku obciążenia i zastosowanie szybko-zbieżnej metody obliczeniowej.

W rozdziale czwartym, na przykładach belek żelbetowych obciążonych statycznie, przedstawiono porównania własnych wyników doświadczeń numerycznych otrzymanych dla różnych modeli betonu i stali zbrojeniowej z wynikami badań doświadczalnych Kamińskiej [55] dotyczącymi zachowania belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości. Porównania otrzymanych wyników na poziomie zależności obciążenie-przemieszczenie, obciążenie-odkształcenie skrajnych włókien ściskanego betonu oraz obciążenie-odkształcenie prętów rozciąganych stanowią podstawę do weryfikacji przyjętych założeń i modeli konstytutywnych betonu i stali. Podstawową częścią pracy są analizy stanu zarysowania, naprężenia oraz odkształcenia belek żelbetowych ze zwykłego betonu konstrukcyjnego i z betonu wysokiej wytrzymałości o różnym stopniu zbrojenia podłużnego i poprzecznego przy wykorzystaniu systemu programów metody elementów skończonych z implementacją własnego modelu betonu wysokiej wytrzymałości i odpowiedni dobór parametrów metody długości łuku Crisfielda w celu otrzymania efektywnego rozwiązania w zakresie lokalnego i globalnego osłabienia konstrukcji. Dopełnieniem rezultatów jest analiza nośności i stanu przemieszczenia belek żelbetowych. Stan naprężenia zilustrowano w postaci rozkładów naprężeń normalnych i stycznych w obszarze konstrukcji. Porównanie uzyskanych wyników numerycznych z wynikami badań doświadczalnych wykazuje dobrą zgodność rozwiązań oraz poprawność przyjętych założeń i modeli konstytutywnych betonu i stali.

W rozdziale piątym przedstawiono rozważania na temat wybranych problemów numerycznego modelowania zachowania belek żelbetowych z uwzględnieniem osłabienia betonu przy ściskaniu i rozciąganiu. Dokonano porównania uzyskanych wyników pod kątem ustalenia efektywności zastosowanych procedur obliczeniowych. Przeprowadzono analizy wpływu zmienności: modułu sprężystości betonu, modeli materiałowych, parametru resztkowej sztywności elementów skończonych materiału matrycy betonowej w procesie zarysowania i zmiażdżenia, efektów zmiażdżenia betonu oraz parametru ścinania przy rozciąganiu wzmacniającego beton po zarysowaniu na zachowanie modelowej belki żelbetowej z betonu wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcenia. Uzyskane wyniki numeryczne są zestawione z wynikami doświadczalnymi Kamińskiej [55] w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki.

W rozdziale szóstym przedstawiono metodę rozwiązania numerycznego belki żelbetowej polegającą na doborze parametrów modelu betonu wysokiej wytrzymałości na podstawie tylko jednej wielkości fizycznej tj. określonej doświadczalnie wytrzymałości na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia. Wszystkie parametry modelu stali zbrojeniowej przyjęto na podstawie wartości normowych dostosowanych do wymogów bezpieczeństwa konstrukcji.

W zakończeniu przedstawiono podsumowanie rezultatów pracy i wnioski wynikające z przeprowadzonych doświadczeń numerycznych. Otrzymane rozwiązania stanowią podstawę do dalszego rozwijania metody numerycznej symulacji zachowania żelbetowych elementów konstrukcyjnych, przede wszystkim w zakresie opisu mechanizmów zniszczenia betonu.

2. MODELOWANIE WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁÓW KONSTRUKCYJNYCH

2.1. Przedmiot modelowania konstytutywnego

Modelowanie statycznych właściwości materiałów konstrukcyjnych przeprowadzono z wykorzystaniem założeń teorii plastycznego płynięcia.

Opis stanu granicznego betonu obciążonego statycznie jest przedmiotem wielu prac. Równania powierzchni granicznych betonu zawierają m.in. prace Ottosena [81], Klisińskiego [59], Willama i Warnke [116], Stolarskiego [100, 101]. Zaproponowane w tych pracach równania powierzchni granicznych są zależne od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia oraz drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia. Taki opis umożliwia najwierniejszą aproksymację wyników doświadczalnych betonu w złożonych stanach naprężenia. W niniejszej pracy zastosowano trójparametrową oraz pięcioparametrową powierzchnię graniczną betonu przy ściskaniu i rozciąganiu zgodną z teorią Willama-Warnke [116] oraz własną propozycję prawa ewolucji tej powierzchni w funkcji odkształcenia. W odniesieniu do betonu przy ściskaniu przyjęto własną propozycję modelu sprężysto-plastycznego z wytrzymałością resztkową równą 80 % wytrzymałości betonu, natomiast dla betonu przy rozciąganiu założono sprężysto-kruchy model z osłabieniem uwzględniającym efekty zesztywnienia konstrukcji żelbetowej. Model powyższy opisuje procesy zarysowania i miażdżenia. Powstanie rysy rozmytej w punkcie numerycznego całkowania opisuje zmodyfikowana relacja między naprężeniem a odkształceniem z wprowadzoną płaszczyzną osłabienia usytuowaną w kierunku prostopadłym do jej powierzchni. Założony parametr ścinania β_t jest mnożnikiem redukującym nośność na ścinanie w tych procesach odkształcenia, w których powstaje poślizg w płaszczyźnie prostopadłej do zarysowanej powierzchni. Miażdżenie betonu w punkcie numerycznego całkowania jest uwzględnione jako proces zniszczenia przy jednoosiowym, dwuosiowym lub trójosiowym ściskaniu. Taki proces zniszczenia jest opisany zgodnie z założeniami teorii plastycznego płynięcia jako wynik osłabienia materiałowego w strefach ściskanych. W obszarze zmiażdżonym przyrost obciążenia wywołuje przyrost odkształceń przy stałych naprężeniach.

Kolejny poziom modyfikacji modelu betonu proponowany w niniejszej części pracy dotyczy modelowania zachowania betonu o wysokiej wytrzymałości. Istotą tej propozycji jest modyfikacja modelu Desayi-Krishnana [32] i uproszczonego modelu Stolarskiego [101, 102] polegająca na:

- łącznym uwzględnieniu fazy sprężysto-plastycznego wzmocnienia i fazy osłabienia materiałowego,

- przyjęciu potwierdzonego doświadczalnie założenia o znacznie większych wartościach granicznych odkształceń uzyskanych w konstrukcjach zbrojonych w porównaniu do odkształceń uzyskanych na próbkach, związanych ze zbrojeniem i efektem skali.

W odniesieniu do stali zbrojeniowej założono model materiałowy sprężysto-idealnie plastyczny o identycznych charakterystykach przy rozciąganiu i ściskaniu. Jedynie w analizach numerycznych belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości bez zbrojenia strefy ściskanej na odcinku czystego zginania przy wykorzystaniu obliczeniowej metody Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym zastosowany jest model materiałowy stali z uwzględnieniem wzmocnienia prętów zbrojeniowych. Taki model lepiej opisuje zachowanie ustrojów żelbetowych, w których na odcinku czystego zginania nie występuje zbrojenie strefy ściskanej przekroju szczególnie w obszarze naprężeń niesprężystych po uplastycznieniu stali zbrojeniowej.

2.2. Modelowanie właściwości betonu

2.2.1. Trójosiowa powierzchnia graniczna betonu

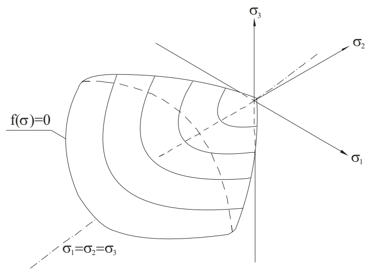
W pracy Argyrisa, Fausta, Szimmata, Warnkego i Willama [5] rozwinięto opis powierzchni granicznej betonu w postaci trójsymetrycznego stożka przedstawiony przez Genijewa i Kissiuka w pracy [44] i zaproponowano podobny model trójparametrowej powierzchni granicznej betonu. Zniszczenie początkowe według propozycji [5] opisane jest przez skalarną funkcję naprężeń:

$$f\left(\sigma\right) = 0 \,. \tag{2.1}$$

Geometryczną interpretacją tego warunku jest powierzchnia graniczna w przestrzeni naprężeń, oddzielająca liniowo-sprężyste zachowanie się materiału od nieliniowo-niesprężystego. Przy założeniu izotropii materiału opis powierzchni granicznej betonu może być sprowadzony do sformułowania równania w przestrzeni naprężeń głównych:

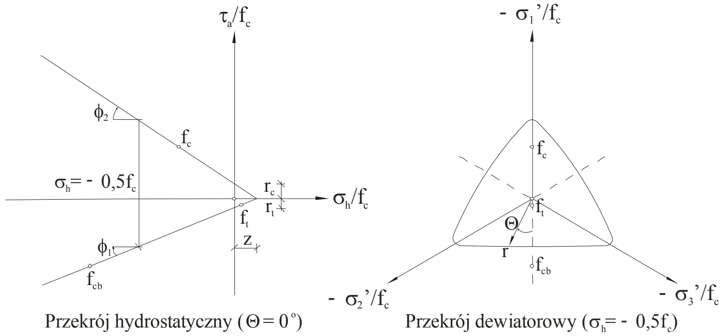
$$f\left(\sigma\right) = f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) = 0 \,. \tag{2.2}$$

Na Rys. 2.1 przedstawiono początkową powierzchnię graniczną betonu jako nieobrotowego stożka z krzywoliniowymi tworzącymi. Jeżeli składowe naprężeń głównych uszeregowane są w kolejności $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, to wystarczy rozpatrzyć 1/6 przestrzeni naprężeń głównych, ponieważ względem osi naprężeń głównych występuje potrójna symetria powierzchni granicznej.



Rys. 2.1. Początkowa powierzchnia graniczna dla betonu w trójosiowej przestrzeni naprężeń.

Na Rys. 2.2 zilustrowano powierzchnię graniczną rozłożoną na część hydrostatyczną (opis zmiany objętości) i część dewiatorową (opis zmiany kształtu). Przekrój hydrostatyczny tworzy powierzchnia południkowa, która zawiera oś obrotu $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Rys. 2.1). Przekrój dewiatorowy leży na powierzchni normalnej do osi obrotu.



Rys. 2.2. Model trójosiowej powierzchni betonu.

Dewiator naprężenia jest opisany przez współrzędne biegunowe r i θ, gdzie r jest wektorem promieniem lokalizującym położenie powierzchni granicznej dla dowolnego kąta θ z przedziału $0 \le \theta \le 60^\circ$. Kąt θ, zwany kątem Lodego, jest kątem pomiędzy rzutem osi naprężenia głównego σ_1 na płaszczyznę dewiatorową i kierunkiem fikcyjnego wektora naprężenia dewiatorowego $\bar{\sigma}$ leżącego w tej płaszczyźnie. Powierzchnia graniczna jest definiowana w postaci równania (2.3).

$$\frac{1}{z}\frac{\sigma_h}{f_c} + \frac{1}{r(\theta)}\frac{\tau_a}{f_c} = 1, \tag{2.3}$$

gdzie:

σ_h, τ_a - średnie wartości naprężeń normalnych i stycznych,

z - wierzchołek powierzchni granicznej,

f_c - wytrzymałość na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia.

Kąty nachylenia prostoliniowych tworzących stożka hydrostatycznego opisano przez ϕ_1 i ϕ_2. Parametry powierzchni zniszczenia z i r uzależniono od wytrzymałości na ściskanie f_c i rozciąganie f_t w jednoosiowym stanie naprężenia i wytrzymałości w stanie dwuosiowego ściskania f_{cb}. Matematyczny model granicznej powierzchni betonu charakteryzuje proste wyznaczenie wartości parametrów modelu na podstawie standardowej próby wytrzymałościowej oraz wypukłość (brak punktów przegięcia) i ciągłość powierzchni granicznej betonu. W pobliżu południka ściskania trójparametrowe kryterium wykazuje odstępstwa od wyników badań wytrzymałościowych betonu w trójosiowym stanie naprężenia w obszarze dużych ciśnień hydrostatycznych dla $\sigma_h < -4f_c$, także w strefie rozciągania dla $\sigma_h > f_t / 3$. Przyczyną tych odstępstw jest założenie prostoliniowego przebiegu południków powierzchni granicznej.

2.2.2. Pięcioparametrowa powierzchnia graniczna betonu

Willam i Warnke w pracy [116] przedstawili dokładniejszą aproksymację powierzchni granicznej betonu za pomocą modelu pięcioparametrowego. W celu opisania parabolicznego kształtu południków powierzchni granicznej model trójparametrowy uzupełniono o dodatkowe dwa parametry. Kryterium zniszczenia betonu w złożonym stanie naprężenia opisano wyrażeniem:

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0, \tag{2.4}$$

w którym:

F - funkcja stanu naprężeń $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$ działających w kierunkach prostokątnego układu współrzędnych x, y, z,

S - powierzchnia graniczna zależna od naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, gdzie: $\sigma_1 = \max\left(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}\right)$, $\sigma_3 = \min\left(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}\right)$ i $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ oraz pięciu parametrów: f_c - wytrzymałości na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia (wywołującej miażdżenie), f_t - wytrzymałości na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia (wywołującej zarysowanie), f_{cb} - wytrzymałości w stanie dwuosiowego ściskania (wywołującej miażdżenie), f_1 - wytrzymałości w stanie dwuosiowego ściskania nałożonej w stanie naprężenia hydrostatycznego σ_h^a oraz f_2 - wytrzymałości w stanie jednoosiowego ściskania nałożonej w stanie naprężenia hydrostatycznego σ_h^a.

Powierzchnia graniczna betonu jest wykorzystywana jako kryterium zniszczenia zgodnie z następującą interpretacją. Materiał znajduje się w stanie zniszczenia, gdy nierówność (2.4) jest spełniona. Jako stany zniszczenia rozróżnia się stan zarysowania, jeżeli dowolne naprężenie główne jest rozciągające, oraz stan zmiażdżenia, gdy wszystkie naprężenia główne są ściskające.

Powierzchnia graniczna jest definiowana przez pięć parametrów wytrzymałościowych $f_c, f_t, f_{cb}, f_1, f_2$ i stan hydrostatycznego naprężenia σ_h^a.

Wytrzymałości na ściskanie f_c i na rozciąganie f_t w jednoosiowym stanie naprężenia są konieczne do definiowania powierzchni granicznej betonu, natomiast pozostałe trzy parametry można wyznaczyć na podstawie równań opisanych w pracy [115] zależnych od f_c:

$$\begin{aligned} f_{cb} &= 1,2 f_c, \\ f_1 &= 1,45 f_c, \\ f_2 &= 1,725 f_c. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Powyższe zależności są prawdziwe pod warunkiem, że:

$$\left|\sigma_h\right| \le \sqrt{3} f_c, \tag{2.6}$$

$$\sigma_h = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}\right), \tag{2.6a}$$

gdzie:

σ_h - stan naprężenia hydrostatycznego opisujący średnie naprężenia normalne odpowiadające pierwszemu niezmiennikowi dewiatora naprężenia.

Warunek (2.6) ma zastosowanie, gdy rozważamy stan naprężeń dla niskich wartości naprężenia hydrostatycznego. W przypadkach, w których nie uwzględniano stanu miażdżenia betonu (wówczas jako parametr modelu przyjmuje się fikcyjną wartość $f_c = -1$), rysa powstanie wtedy, gdy dowolna składowa naprężenia głównego jest większa od f_t.

Opis zniszczenia betonu określa się w czterech zakresach stanu naprężenia:

- $0 \ge \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ (ściskanie - ściskanie - ściskanie),
- $\sigma_1 \ge 0 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ (rozciąganie - ściskanie - ściskanie),

- $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$ (rozciąganie - rozciąganie - ściskanie),
- $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ (rozciąganie - rozciąganie - rozciąganie).

W każdym zakresie stanu naprężenia, niezależne funkcje F_1, F_2, F_3, F_4 i S_1, S_2, S_3, S_4 opisują odpowiednio funkcję stanu naprężeń F i powierzchnię graniczną S. Funkcje te szczegółowo opisano w każdym zakresie stanu naprężenia.

Złożony stan naprężenia ściskanie - ściskanie - ściskanie, $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

W stanie ściskanie - ściskanie - ściskanie funkcja F odpowiadająca średnim naprężeniom stycznym, która jest wprost proporcjonalna do drugiego niezmiennika dewiatora ma postać:

$$F = F_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.7}$$

a eliptyczną powierzchnię zniszczenia S opisano na podstawie rozważań geometrycznych we współrzędnych biegunowych r, θ wyrażeniem:

$$S = S_1 = \frac{2r_c\left(r_c^2 - r_t^2\right)\cos\theta + r_c\left(2r_t - r_c\right)\left[4\left(r_c^2 - r_t^2\right)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c\right]^{\frac{1}{2}}}{4\left(r_c^2 - r_t^2\right)\cos^2\theta + \left(r_c - 2r_t\right)^2}, \tag{2.8}$$

przy czym wartość kąta Lodego θ odpowiada trzeciemu niezmiennikowi dewiatora i zależy od względnych wartości naprężeń głównych:

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.9}$$

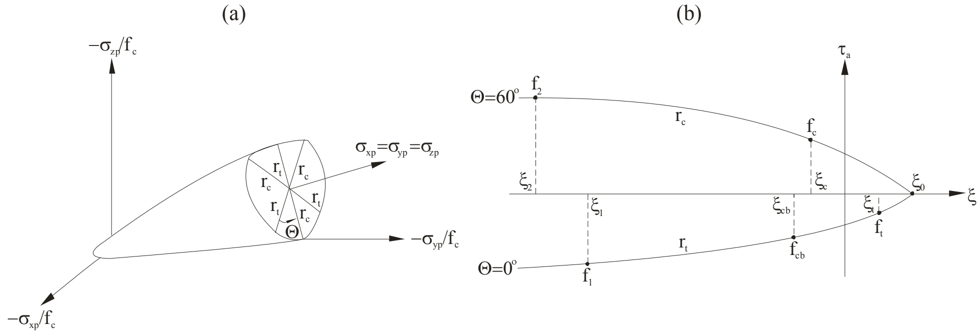
Rozkładając funkcję $r\left(\sigma_h, \theta\right)$ na dwie parabole drugiego stopnia, wzdłuż południka rozciągania dla $\theta = 0^\circ$ i ściskania dla $\theta = 60^\circ$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} r_t &= a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2, \\ r_c &= b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2, \\ \xi &= \frac{\sigma_h}{f_c}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdzie:

σ_h - obliczono na podstawie równania (2.6a), a nieznane wartości parametrów $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ określono rozwiązując liniowe układy równań.

Złożony stan jednoosiowego ściskania z dwuosiowym rozciąganiem, w którym $\sigma_3 = \sigma_2 > \sigma_1$, jest opisany równaniem (2.9), gdy wartość kąta Lodego $\theta = 0^\circ$. Złożony stan jednoosiowego rozciągania z dwuosiowym ściskaniem, w którym $\sigma_3 > \sigma_2 = \sigma_1$, jest opisany równaniem (2.9), gdy wartość kąta Lodego $\theta = 60^\circ$. Wszystkie inne złożone stany naprężenia powstają dla wartości kątów z przedziału $0^\circ \le \theta \le 60^\circ$. Powierzchnia graniczna S_1 obliczona z równania (2.8) odpowiada promieniowi r_t i przebiega wzdłuż południka rozciągania r_t dla kąta Lodego $\theta = 0^\circ$, natomiast dla kąta Lodego $\theta = 60^\circ$, S_1 odpowiada r_c i przebiega wzdłuż południka ściskania r_c. Powierzchnię graniczną i interpretację graficzną promieni przekroju dewiatorowego r_t, r_c w zależności od parametrów wytrzymałościowych ξ i kąta Lodego θ przedstawiono na Rys. 2.3.



Rys. 2.3. Konstrukcja pięcioparametrowej powierzchni granicznej: (a) w obszarze naprężeń głównych i (b) w przekroju hydrostatycznym.

Promień przekroju dewiatorowego r_t jest określony przez parametry a_0, a_1, a_2 dobrane w taki sposób, aby f_t, f_{cb}, f_1 leżały na powierzchni granicznej. Parametry znajdujemy na podstawie związków obowiązujących wzdłuż południka rozciągania dla $\theta = 0^\circ$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{F_1}{f_c}\left(\sigma_1 = f_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0\right) \\ \dfrac{F_1}{f_c}\left(\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{cb}\right) \\ \dfrac{F_1}{f_c}\left(\sigma_1 = -\sigma_h^a, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_h^a - f_1\right) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_t & \xi_t^2 \\ 1 & \xi_{cb} & \xi_{cb}^2 \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}, \qquad (2.11)$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -\xi_{cb} a_1 - \xi_{cb}^2 a_2 - \sqrt{\frac{3}{10}} \xi_{cb}, \\
a_1 &= -\left(\xi_t + \xi_{cb}\right) a_2 + \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{2\xi_t + \xi_{cb}}{\xi_t - \xi_{cb}}, \\
a_2 &= \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{\xi_1 \left(\xi_t + 2\xi_{cb}\right) - \xi \left(\xi_t - \xi_{cb}\right) + 3\xi_t \xi_{cb}}{\left(\xi_t - \xi_{cb}\right)\left(\xi_t + \xi_1\right)\left(\xi_{cb} + \xi_1\right)},
\end{aligned}
\tag{2.11a}
$$

przy czym parametry wytrzymałościowe mają wartości:

$$
\xi_t = \frac{f_t}{3f_c}, \xi_{cb} = -\frac{2f_{cb}}{3f_c}, \xi_1 = -\xi - \frac{2f_1}{3f_c} = -\frac{\sigma_h^a}{f_c} - \frac{2f_1}{3f_c}. \tag{2.11b}
$$

Promień przekroju dewiatorowego r_c jest wyrażony przez parametry b_0, b_1, b_2 określone na podstawie zależności zachodzących wzdłuż południka ściskania przy $\theta = 60^\circ$:

$$
\begin{Bmatrix}
\dfrac{F_1}{f_c}\left(\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -f_c\right) \\
\dfrac{F_1}{f_c}\left(\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_h^a, \sigma_3 = -\sigma_h^a - f_2\right) \\
\dfrac{F_1}{f_c}\left(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0\right)
\end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & \xi_c & \xi_c^2 \\
1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\
1 & \xi_0 & \xi_0^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{9} \\
1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\
1 & \xi_0 & \xi_0^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}, \tag{2.12}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= -\xi_0 b_1 - \xi_0^2 b_2, \\
b_1 &= \frac{3\xi + 1}{3} b_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{3\left(\xi + \xi_2\right) + 1}{3\xi - 1}, \\
b_2 &= -\sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\xi\left(3\xi_0 + 4\right) + \xi_2\left(3\xi_0 + 1\right) + 3\xi_0}{\left(3\xi_0 + 1\right)\left(\xi + \xi_0\right)\left(3\xi - 1\right)},
\end{aligned}
\tag{2.12a}
$$

przy czym parametry wytrzymałościowe są równe:

$$
\xi_c = -\frac{f_c}{3f_c} = -\frac{1}{3}, \xi_2 = -\frac{\sigma_h^a}{f_c} - \frac{f_2}{3f_c}. \tag{2.12b}
$$

Z warunku wspólnego wierzchołka $r_t\left(\xi_0\right) = r_c\left(\xi_0\right) = 0$, znajdujemy parametr ξ_0, który jest równy dodatniemu pierwiastkowi równania:

$$
r_c\left(\xi_0\right) = a_0 + a_1\xi_0 + a_2\xi_0^2 = 0 \Rightarrow \xi_0 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}, \tag{2.13}
$$

w którym a_0, a_1, a_2 są obliczone według zależności (2.11a, 2.11b). Wartości f_1, f_2 dobrano na poziomie stanu hydrostatycznego naprężenia dla konstrukcji rzeczywistej σ_h^a. Powierzchnia graniczna jest wypukła, jeśli wartości parametrów spełniają następujące silnie ograniczające nierówności:

$$a_0 > 0, a_1 \leq 0, a_2 \leq 0,$$
$$b_0 > 0, b_1 \leq 0, b_2 \leq 0, \tag{2.14}$$
$$0,5 < \frac{r_t}{r_c} < 1,25.$$

Model powierzchni granicznej opisany powyżej łatwo redukuje się do prostszych modeli powierzchni granicznych. W szczególnych przypadkach otrzymujemy:

- cylinder Misesa,
  $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$,
- stożek Druckera-Pragera,
  $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 = 0$,
- stożek z nieobrotową podstawą,
  $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1}$, $a_2 = b_2 = 0$,
- stożek z krzywoliniowymi tworzącymi i nieobrotową podstawą,
  $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Przedstawiony model obrazuje główne cechy zniszczenia betonu i wyznacza stożkową powierzchnię graniczną o krzywoliniowych tworzących i podstawie złożonej z trzech eliptycznych odcinków. Wartości parametrów charakteryzujących ten model są łatwe do wyznaczenia na podstawie standardowych prób wytrzymałościowych. Zawiera on wszystkie trzy niezmienniki naprężeń w równoważnej formie naprężeń średnich σ_h, F i kąt θ. Ponadto zapewnia on gładkość powierzchni granicznej w szerokim zakresie wartości parametrów i opisuje cztery inne modele powierzchni granicznej mające zastosowanie w zagadnieniach dotyczących zniszczenia betonu po odpowiednim ustaleniu stałych parametrów.

Złożony stan naprężenia rozciąganie - ściskanie - ściskanie, $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

W stanie rozciąganie - ściskanie - ściskanie funkcję F zapisujemy w postaci:

$$F = F_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\left[\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.15}$$

a S jest definiowane równaniem:

$$S = S_2 = \left(1 - \frac{\sigma_1}{f_t}\right)\frac{2p_c\left(p_c^2 - p_t^2\right)\cos\theta + p_c\left(2p_t - p_c\right)\left[4\left(p_c^2 - p_t^2\right)\cos^2\theta + 5p_t^2 - 4p_tp_c\right]^{\frac{1}{2}}}{4\left(p_c^2 - p_t^2\right)\cos^2\theta + \left(p_c - 2p_t\right)^2}, \tag{2.16}$$

w którym kąt θ określamy z równania (2.9), a p_t, p_c obliczamy ze wzorów:

$$p_t = a_0 + a_1\chi + a_2\chi^2, \tag{2.17}$$

$$p_c = b_0 + b_1\chi + b_2\chi^2.$$

Nieznane wartości parametrów $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ określono zgodnie z równaniami (2.11a-2.12b), dla:

$$\chi = \frac{1}{3}\left(\sigma_2 + \sigma_3\right). \tag{2.18}$$

Zarysowanie powstanie w jednej płaszczyźnie prostopadłej do kierunku naprężenia głównego σ_1, gdy spełnione jest kryterium zniszczenia (2.4). Zniszczenie w pozostałym obszarze skutkuje powstaniem rysy poślizgowej, gdyż wszystkie naprężenia główne są tu ściskające. Ten obraz zniszczenia ma charakter plastyczny i jest określany jako miażdżenie przy ściskaniu.

Złożony stan naprężenia rozciąganie - rozciąganie - ściskanie,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$$

W stanie rozciąganie-rozciąganie-ściskanie funkcja F przyjmuje postać:

$$F = F_3 = \sigma_i, \; i = 1,2, \tag{2.19}$$

a S jest definiowane jako:

$$S = S_3 = \frac{f_t}{f_c}\left(1 + \frac{\sigma_3}{f_c}\right). \tag{2.20}$$

Zarysowanie powstanie w dwóch płaszczyznach prostopadłych do kierunków naprężeń głównych σ_1, σ_2, gdy spełnione jest kryterium zniszczenia (2.4) dla $i = 1,2$. Zarysowanie powstanie tylko w jednej płaszczyźnie prostopadłej do kierunku naprężenia głównego σ_1, gdy spełnione jest kryterium zniszczenia dla $i = 1$. W rzeczywistości w różnych miejscach obciążonego ośrodka powstaną zarysowania we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Ten obraz zniszczenia bywa określany jako miażdżenie przy ściskaniu, gdy występuje wzdłuż południka ściskania oraz w jego bezpośrednim sąsiedztwie.

Złożony stan naprężenia rozciąganie - rozciąganie - rozciąganie,

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$

W stanie rozciąganie - rozciąganie - rozciąganie funkcja F ma postać:

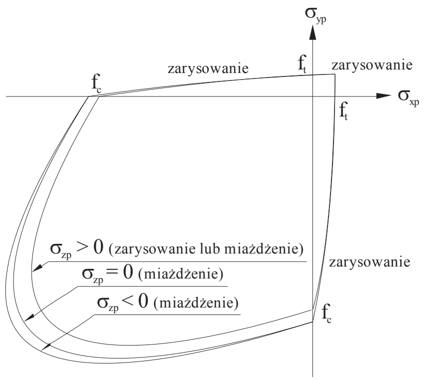
$$F = F_4 = \sigma_i, \; i = 1,2,3, \tag{2.21}$$

a S jest definiowane jako:

$$S = S_4 = \frac{f_t}{f_c}. \tag{2.22}$$

Zarysowanie powstanie w płaszczyznach prostopadłych do kierunków naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, gdy kryterium zniszczenia (2.4) jest spełnione dla $i = 1,2,3$. Zarysowanie powstanie w płaszczyznach prostopadłych do kierunków naprężeń głównych σ_1, σ_2, gdy kryterium zniszczenia (2.4) jest spełnione dla $i = 1,2$. Zarysowanie powstanie tylko w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku naprężenia głównego σ_1, gdy kryterium zniszczenia (2.4) jest spełnione dla $i = 1$.

Na Rys. 2.4 przedstawiono powierzchnię graniczną w dwuosiowym stanie naprężenia po zrzutowaniu na płaszczyznę σ_{xp}-σ_{yp} w obszarze największych niezerowych naprężeń normalnych σ_{xp}, σ_{yp}. Stany bezpiecznej pracy materiału znajdują się wewnątrz tej powierzchni, której ewolucja będzie reprezentować wzmocnienie lub osłabienie materiałowe. Osiągnięcie przez ścieżkę naprężenia powierzchni granicznej skutkuje wzrostem odkształceń bez zmiany naprężenia lub osłabieniem materiałowym opisującym spadek naprężeń. Na powierzchni granicznej natomiast są położone punkty odpowiadające zniszczeniu w funkcji znaku naprężenia normalnego σ_{zp} w kierunku z. Fizycznie niemożliwy jest stan, któremu odpowiada punkt położony na zewnątrz ograniczonego obszaru. Jeżeli w kierunkach x, y występuje ściskanie ($\sigma_{xp} < 0, \sigma_{yp} < 0$), a w kierunku z rozciąganie ($\sigma_{zp} > 0$), to rysa powstanie w płaszczyźnie prostopadłej do naprężenia rozciągającego σ_{zp}. Materiał zostanie zmiażdżony, gdy wartość naprężenia normalnego jest nieznacznie mniejsza lub równa zero ($\sigma_{zp} \leq 0$). Moduł sprężystości zmiażdżonego elementu materiału matrycy betonowej we wszystkich kierunkach jest równy zero.



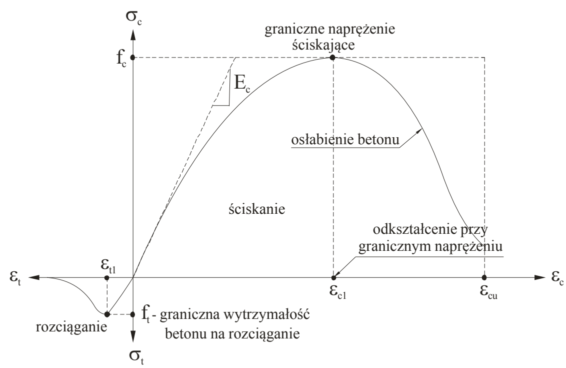
Rys. 2.4. Powierzchnia graniczna w obszarze naprężeń normalnych w dwuosiowym stanie naprężenia.

2.2.3. Prawo ewolucji powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń

Beton jest materiałem kruchym i charakteryzuje się różnym zachowaniem przy ściskaniu i rozciąganiu. Wytrzymałość betonu na rozciąganie wynosi od 8 do 15% wytrzymałości na ściskanie [93]. Prawo ewolucji powierzchni granicznej opisuje zależność pomiędzy naprężeniami a odkształceniami dla betonu w jednoosiowym stanie naprężenia, Rys. 2.5 [8].

Opis zachowania betonu w jednoosiowym stanie naprężenia był od dawna tematem licznych prac. Spośród nowszych należy wymienić prace Buyukozturka [19], Chena A.T.C. i Chena W.F. [22] oraz monografię Godyckiego-Ćwirko [46]. Funkcja naprężenie - odkształcenie przy ściskaniu jest liniowa do ok. 30 % wartości granicznej wytrzymałości na ściskanie f_c. Powyżej tego punktu naprężenia rosną stopniowo do osiągnięcia wytrzymałości na ściskanie. Po jej osiągnięciu beton ulega osłabieniu, a gałąź krzywej opada aż do zmiażdżenia przy granicznym odkształceniu ε_{cu}. Obserwowana opadająca część krzywej nie jest obiektywną cechą materiałową [23], lecz uzależniona jest warunkami eksperymentu. Przede wszystkim zależy od sztywności maszyny wytrzymałościowej w odniesieniu do sztywności badanego elementu i prędkości odkształceń [21]. Jeżeli krzywa naprężenie - odkształcenie kończy się raptownie w wierzchołku wykresu, to materiał jest klasyfikowany jako kruchy lub też proces badania był prowadzony ze zbyt dużą prędkością. Im mniej stroma jest opadająca część krzywej, tym bardziej materiał jest plastyczny, a gdy nachylenie wykresu poza wartością szczytową jest zerowe to materiał jest oceniany jako idealnie - plastyczny.

Krzywa naprężenie - odkształcenie dla betonu przy rozciąganiu ma kształt podobny jak przy ściskaniu i jest w przybliżeniu liniowa do granicznej wytrzymałości na rozciąganie f_t. Po osiągnięciu tej wartości rozwijają się główne rysy w betonie, a wytrzymałość spada do zera.



Rys. 2.5. Zależność naprężenie - odkształcenie dla betonu w stanie jednoosiowego ściskania i rozciągania [8].

Przy projektowaniu konstrukcji żelbetowych trzeba brać pod uwagę cały wykres naprężenie - odkształcenie, często w formie wyidealizowanej. Z tego względu szczególnie interesujące jest zachowanie betonu o wysokiej wytrzymałości, gdyż na wszystkich etapach obciążenia następuje w nim znacznie mniejszy rozwój zarysowania niż w betonie o normalnej wytrzymałości [93]. W efekcie większa część krzywej naprężenie - odkształcenie ma przebieg liniowy i jest bardziej stroma do znacznej części wytrzymałości granicznej. Również opadająca część krzywej jest mocno nachylona, co świadczy o tym, że beton o wysokiej wytrzymałości jest bardziej kruchy niż beton zwykły. Jednak pozorna kruchość betonu wysokiej wytrzymałości nie zawsze znajduje odzwierciedlenie w zachowaniu elementów żelbetowych z niego wykonanych. Wielu badaczy, np. Pecce i Fabbrocino [36, 84], Kamińska [55, 56], Lambotte i Taerwe [63], Larrard i in. [64], Lin i in. [65], Mansur i in. [71, 88], Olsen i in [80], Pendyala i in. [85], Sarker i in. [91], Tognon i in. [108], Uzumeri I Basset [110], Weiss i in. [113] stwierdziło, że wraz ze wzrostem wytrzymałości betonu następuje wzrost ciągliwości konstrukcji żelbetowej. Zachowanie betonu o wysokiej wytrzymałości zasługuje na uwagę również z powodu zmian wielkości odkształceń na różnych poziomach naprężenia. Jednakże przy tym samym naprężeniu, niezależnie od wytrzymałości, mocniejszy beton wykazuje mniejsze odkształcenie.

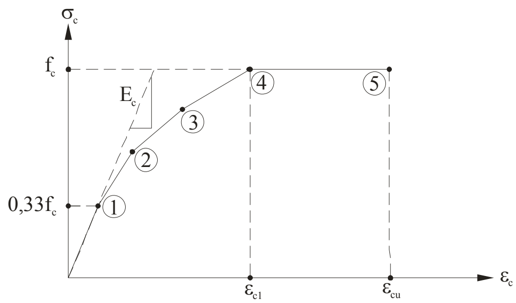
Równania opisujące krzywą zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami są bardzo użyteczne w zastosowaniach do analizy konstrukcji. Podejmowane były liczne próby wyprowadzania takich równań, ale według Neville [77] prawdopodobnie najbardziej udaną propozycję krzywej naprężenie - odkształcenie dla betonu zwykłego w stanie jednoosiowego ściskania wyprowadzili Desayi i Krishnan w pracy [32]:

$$\sigma_c = \frac{E_c \varepsilon_c}{1 + \left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}, \ \varepsilon_{c1} = \frac{2 f_c}{E_c}, \tag{2.23}$$

gdzie:

ε_{c1} - odkształcenie odpowiadające granicznej wytrzymałości na ściskanie f_c.

Wartość odkształcenia określającą koniec zakresu początkowej sprężystości betonu niezarysowanego w punkcie ① na Rys. 2.6 obliczono dla naprężenia $0,33 f_c$. Po punkcie ④ założono idealnie - plastyczne zachowanie betonu.



Rys. 2.6. Zależność naprężenie - odkształcenie dla betonu w stanie jednoosiowego ściskania według Desayi i Krishnana [32].

Według definicji Europejskiego Komitetu Betonu [25], beton wysokiej wytrzymałości jest to beton o charakterystycznej wytrzymałości na ściskanie $f_{ck} \geq 55 \text{ MPa}$ i niewielkich odkształceniach granicznych przy ściskaniu. Próbki poddawane ściskaniu niszczą się bowiem w sposób gwałtowny, a opadająca gałąź krzywej jest tym bardziej stroma, im wyższa jest wytrzymałość betonu.

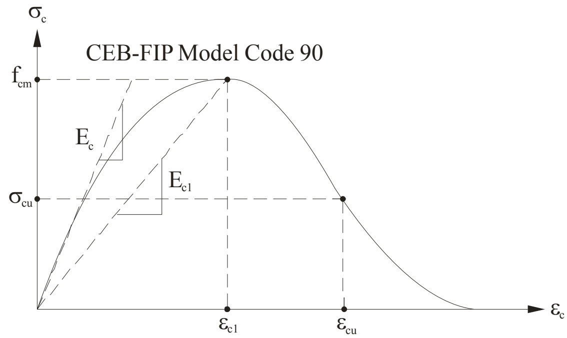
Według Model Code 90 [25] dla betonów o klasach wytrzymałości $\leq \text{C80}$ dla odkształceń $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$, przy oznaczeniach jak na Rys. 2.7, naprężenia opisane są równaniem:

$$\sigma_c = \frac{\dfrac{E_c}{E_{c1}} \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + \left(\dfrac{E_c}{E_{c1}} - 2 \right) \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm}, \tag{2.24}$$

w którym:

$$\varepsilon_{c1} = -0,0022\,,\ E_{c1} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}},\ E_c = 10^4\left(f_{cm}\right)^{1/3},\ f_{cm} = f_{ck} + 8\,,\ f_{ck}[\mathrm{MPa}],$$

a odkształcenie ε_{cu} odpowiada naprężeniu $\sigma_{cu} = 0,5f_{cm}$.



Rys. 2.7. Wykres zależności naprężenie-odkształcenie przy jednoosiowym ściskaniu według CEB [25].

W uaktualnionych zaleceniach do Model Code 90 [26] odkształcenie ε_{c1} przyjęto:

$$\varepsilon_{c1} = \frac{-0,7f_{cm}^{0,31}}{1000},\ f_{cm}[\mathrm{MPa}] \tag{2.25}$$

a opadająca część krzywej opisana jest zależnością:

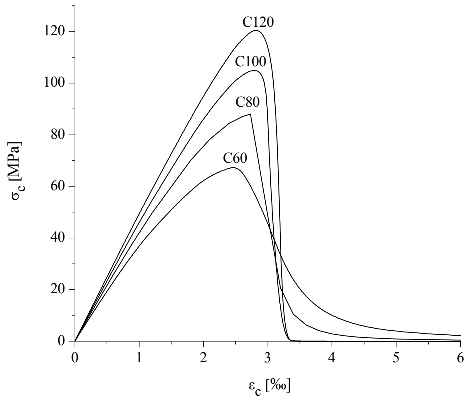
$$\sigma_c = \frac{f_{cm}}{1+\left(\dfrac{\eta-1}{\eta_2-1}\right)^2}, \tag{2.26}$$

w której: $\eta = \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$, $\eta_2 = \dfrac{\varepsilon_{c1}+t}{\varepsilon_{c1}}$, a t jest parametrem charakteryzującym betony wysokiej wytrzymałości w zależności od f_{ck} (Tablica 2.1).

Tablica 2.1. Parametr *t* dla betonów o wysokiej wytrzymałości

f_{ck} [MPa]	50	60	70	80	90	100
t [‰]	0,807	0,597	0,338	0,221	0,070	0,015

Zależności naprężenie - odkształcenie według propozycji Model Code 90 [26] dla czterech klas betonu wysokiej wytrzymałości przedstawiono na Rys. 2.8.



Rys. 2.8. Zależności naprężenie-odkształcenie według propozycji Model Code 90 dla betonów wysokiej wytrzymałości według CEB [26].

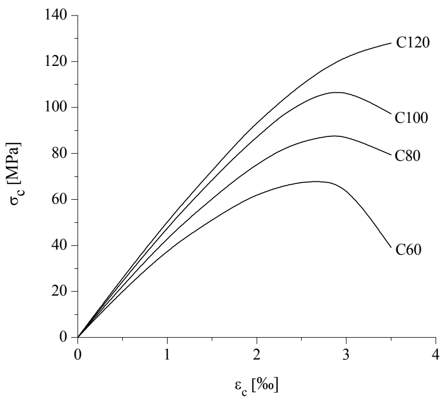
Podobne zależności naprężenie - odkształcenie zostały zaproponowane w normach DIN [33] i Eurocode 2 [35], w których przyjęto zasadę redukcji granicznych odkształceń betonu wraz z przyrostem jego wytrzymałości.

W Eurocode 2 zależność σ_c - ε_c przy jednoosiowym krótkotrwałym obciążeniu jest opisana jako:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + \left(k - 2\right)\eta}, \tag{2.27}$$

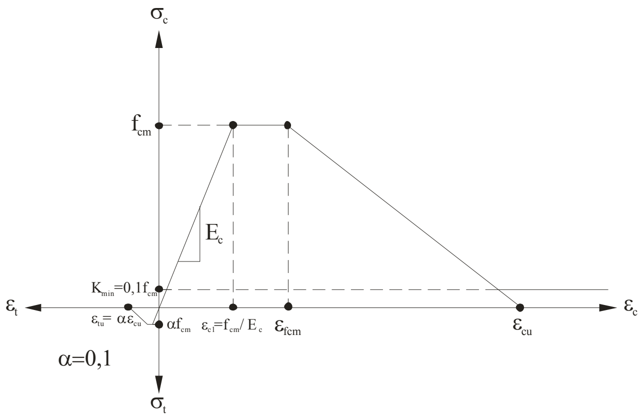
gdzie: $\eta = \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$, $\varepsilon_c < 0$, $k = -1{,}1 E_{cm} \dfrac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}}$, $E_{cm} = 9{,}5\left(f_{ck} + 8\right)^{1/3}$.

Zależność dla czterech klas betonu przedstawiono na Rys. 2.9.



Rys. 2.9. Zależności naprężenie-odkształcenie zalecane do analizy konstrukcji według Eurocode 2 [35].

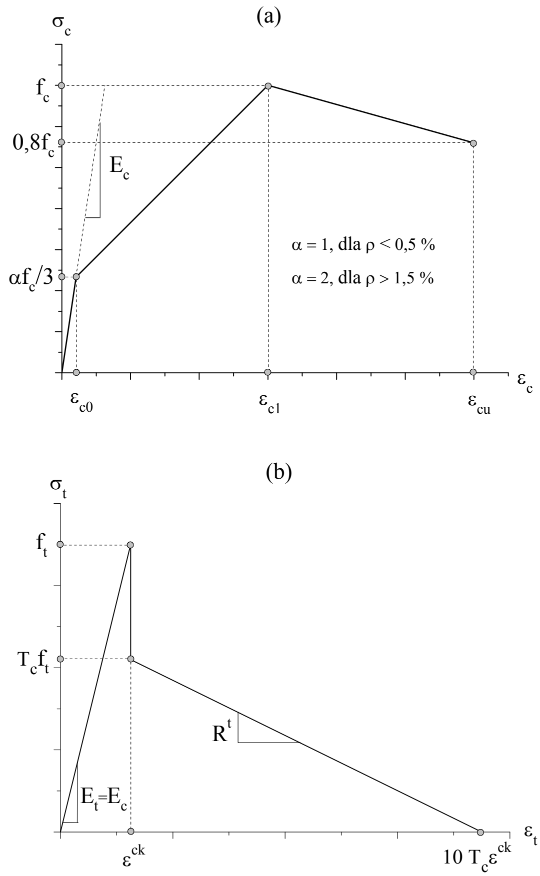
Oryginalną propozycję ewolucji powierzchni granicznej w modelowaniu dynamicznego odkształcenia betonu z uwzględnieniem osłabienia materiałowego opisano w pracach Stolarskiego [101, 102]. W analizach statycznego zachowania tarcz żelbetowych wykonanych z betonu zwykłego i z betonu wysokiej wytrzymałości opisanych w pracach Cichorskiego i Stolarskiego [24, 100] zaproponowano modyfikację tego modelu betonu w odniesieniu do betonów wysokiej wytrzymałości. Zgodnie z Rys. 2.10 polega ona na przyjęciu założenia, że odkształcenia graniczne, określające zakres idealnego płynięcia plastycznego i osłabienia materiałowego w modelu betonu są zależne od klasy betonu wysokiej wytrzymałości.



Rys. 2.10. Uproszczona zależność naprężenie-odkształcenie dla betonu wysokiej wytrzymałości w stanie jednoosiowego ściskania i rozciągania według Stolarskiego [100].

W przedstawionych równaniach opisujących zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami przyjęcie w analizach konstrukcji tak małych odkształceń betonu wysokiej wytrzymałości szczególnie przy ściskaniu skutkuje znacznym zmniejszeniem granicznych przemieszczeń konstrukcji, co zostało potwierdzone w doświadczeniach i obliczeniach numerycznych. Mniejsze krzywizny graniczne oznaczają zmniejszenie możliwości redystrybucji sił wewnętrznych w konstrukcji, niekorzystne z punktu widzenia jej bezpieczeństwa. W modelu betonu zwykłego i betonu wysokiej wytrzymałości zastosowano różne propozycje ewolucji powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń. Na podstawie przeprowadzonych doświadczeń numerycznych belek żelbetowych zaproponowano własną koncepcję zachowania betonu zwykłego i betonu o wysokiej wytrzymałości w stanie jednoosiowego ściskania i rozciągania w oparciu o: niestandardowy model statycznego odkształcenia betonu opisany w pracy Stolarskiego [100], model Desayi - Krishnana [32] i wyniki badań doświadczalnych belek żelbetowych przedstawione w pracach Buckhouse [18] i Kamińskiej [55].

Istotą własnej propozycji jest modyfikacja modelu Desayi - Krishnana i uproszczonego modelu Stolarskiego z uwzględnieniem fazy sprężysto - plastycznego wzmocnienia i fazy osłabienia materiałowego oraz potwierdzonej doświadczalnie obserwacji o znacznie większych wartościach granicznych odkształceń uzyskanych w konstrukcjach niż na próbkach związanych ze zbrojeniem konstrukcji i efektem skali.



Rys. 2.11. Propozycja zależności naprężenie - odkształcenie dla betonu: (a) w stanie jednoosiowego ściskania, (b) w stanie jednoosiowego rozciągania.

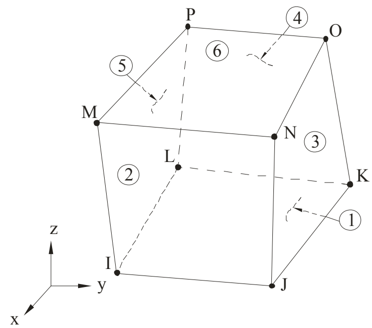
Na Rys. 2.11 zaproponowano własną koncepcję zależności naprężenie - odkształcenie dla betonu zwykłego i wysokiej wytrzymałości w stanie jednoosiowego ściskania.

Zakres fazy sprężystej w betonie przy ściskaniu jest uzależniony od stopnia zbrojenia konstrukcji i wytrzymałości betonu. Dla betonu o wysokiej wytrzymałości przy wysokim stopniu zbrojenia większym od 1,5 % założono liniowy przebieg funkcji naprężenie - odkształcenie przy ściskaniu do ok. 70 % wartości granicznej wytrzymałości na ściskanie f_c. Związany jest on również z bardziej sztywnym zachowaniem betonu wysokowartościowego niż betonu zwykłego z powodu mniejszej różnicy pomiędzy modułem sprężystości bardzo mocnego stwardniałego zaczynu cementowego i kruszywa, a w związku z tym większej wytrzymałości warstwy kontaktowej kruszywo-matryca. Dlatego też w betonie o wysokiej wytrzymałości występuje mniej mikrospękań w warstwie kontaktowej i liniowa część krzywej naprężenie - odkształcenie wydłuża się dwukrotnie. Powyżej występuje faza sprężysto - plastycznego wzmocnienia matrycy betonowej z liniowym przyrostem naprężenia do granicznej wytrzymałości na ściskanie f_c. Po jej osiągnięciu beton ulega osłabieniu do 80 % wartości granicznej wytrzymałości na ściskanie przy granicznym odkształceniu ε_{cu}, a gałąź krzywej opada łagodnie w obszarze osłabienia materiałowego. W modelach powstałych w oparciu o badania próbek opadająca część krzywej jest tym mocniej nachylona im wyższa jest wytrzymałość betonu, co świadczy o większej kruchości betonu wysokiej wytrzymałości. Ta prawidłowość nie zawsze jednak znajduje odzwierciedlenie w zachowaniu betonu w żelbetowych elementach konstrukcyjnych. Ponadto wyniki badań przedstawione we wcześniej cytowanych pracach wykazały, że obawy o niską odkształcalność betonu wysokiej wytrzymałości w elementach konstrukcyjnych są nieuzasadnione. W badaniach Kamińskiej stwierdzono, że w tych elementach, które uległy zniszczeniu przez zmiażdżenie betonu strefy ściskanej, odkształcenia betonu osiągały aż 6 ‰ i były dwukrotnie wyższe niż odkształcenia niszczące rejestrowane na próbkach, co jest korzystne z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji. Przyjęcie tak małych możliwości odkształcania się betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu jak w Model Code 90 [26] powoduje znaczne zmniejszenie granicznych krzywizn elementów konstrukcyjnych. Wykorzystując powyższe wnioski zaproponowano większą możliwość odkształcania się betonu przy ściskaniu. Założono odkształcenia ε_{c1} odpowiadające granicznej wytrzymałości na ściskanie f_c równe 6 ‰, a odkształcenia graniczne przy ściskaniu ε_{cu} równe 12 ‰. Krzywa naprężenie - odkształcenie dla betonu przy rozciąganiu ma przebieg liniowy do granicznej wytrzymałości na rozciąganie f_t. Założono, że moduł sprężystości przy rozciąganiu jest równy modułowi przy ściskaniu. Uzasadnieniem takiego założenia są wyniki badań betonu przy ściskaniu i rozciąganiu przeprowadzone przez Gallowaya i Hardinga [41] oraz Lydona i Balendrana [67]. Po osiągnięciu tej wartości powstają rysy w betonie i następuje kruchy spadek wytrzymałości związany z pękaniem do wartości większej lub równej 60 % granicznej wytrzymałości na rozciąganie. Wartość parametru T_c powinna być dobrana z przedziału zamkniętego $T_c \in \langle 0,6;1 \rangle$. W wyniku przyczepności na odcinku między rysami beton przejmuje znaczące wielkości naprężeń rozciągających stal zbrojeniową i w konsekwencji konstrukcja żelbetowa zwiększa swoją sztywność. Taki efekt usztywnienia uwzględniono poprzez założenie stopniowego, łagodnego spadku wytrzymałości na rozciąganie do zera przy zniszczeniu betonu przy średnich odkształceniach równych: 0,8 ‰, gdy $T_c = 0,6$ oraz 1,4 ‰, gdy $T_c = 1$.

2.2.4. Charakterystyka elementów skończonych materiału matrycy betonowej

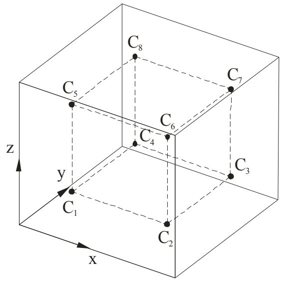
Wszystkie opisane elementy skończone zaprojektowano w oparciu o ideę, w myśl której geometryczne i mechaniczne właściwości analizowanej konstrukcji mogą być wyspecyfikowane w każdym punkcie obliczeniowym numerycznego całkowania elementu.

W analizie konstrukcji betonowych zastosowanie elementów sześciościennych jest korzystne ze względu na zazwyczaj ortogonalny przebieg zbrojenia. Element skończony materiału matrycy betonowej jest definiowany przez izotropowe właściwości materiału i osiem punktów węzłowych o trzech stopniach swobody w każdym z nich, to jest przemieszczeniach w punktach węzłowych w kierunkach x, y, z. Schemat elementu przedstawiono na Rys. 2.12.



Rys. 2.12. Element skończony materiału matrycy betonowej.

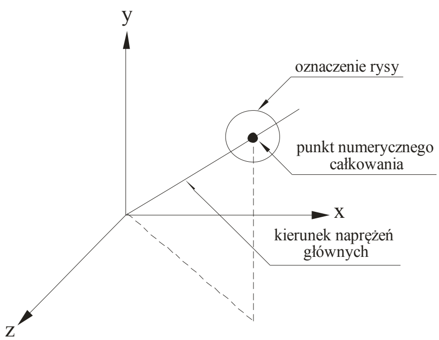
W każdym elemencie skończonym we wszystkich punktach numerycznego całkowania w trzech płaszczyznach lokalnego układu współrzędnych prostopadłych obliczane są odkształcenia i naprężenia. Stany przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia powstają zgodnie z założonym modelem σ–ε uwzględniającym zarysowanie, odkształcenia plastyczne, pełzanie i miażdżenie. Obliczeniowe punkty numerycznego całkowania w elemencie skończonym przedstawiono na Rys. 2.13.



Rys. 2.13. Punkty numerycznego całkowania w elemencie.

Założony model rysy rozmytej umożliwia opis zarysowania w każdym punkcie numerycznego całkowania na trzech kierunkach prostopadłych w przestrzeni naprężeń głównych.

Rysa powstaje wtedy, gdy rozciągające naprężenie główne jest większe od wytrzymałości betonu na rozciąganie. W graficznej reprezentacji wyników zarysowanie jest przedstawione w postaci okręgu widocznego w kierunku prostopadłym do głównego naprężenia, Rys. 2.14.



Rys. 2.14. Graficzna reprezentacja rysy.

Siła rysująca beton odpowiada chwili powstania pierwszej rysy. W następnej kolejności naprężenia styczne do płaszczyzny pierwszej rysy mogą wywołać drugą i trzecią rysę, która powstanie w punkcie numerycznego całkowania w kierunku prostopadłym do wywołującej ją odpowiedniej składowej naprężenia głównego. W przypadku, gdy dowolna rysa otworzy się, a po pewnym czasie zamknie, w graficznej reprezentacji wyników rysa jest przedstawiona w postaci okręgu z wpisanym krzyżem. Pierwsza rysa w dowolnym punkcie numerycznego całkowania jest oznaczona okręgiem koloru czerwonego, druga zielonego, a trzecia niebieskiego. Zmiażdżenie materiału jest przedstawione w kształcie ośmiościanu. Znak opisany w środku elementu obrazuje faktyczny stan destrukcji materiałowej w danym elemencie skończonym. W stanie zarysowania lub zmiażdżenia betonu dla zachowania równowagi numerycznej modelu w elemencie skończonym jest dodawana mała wartość sztywności. Parametr sztywności c_{stif} jest użyty dla elementu zarysowanego w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysy i dla elementu zmiażdżonego.

2.2.5. Związki konstytutywne betonu

Równania dla liniowo-sprężystego zachowania betonu

Macierz sprężystości $\left[D^c\right]$ dla materiału izotropowego jest przedstawiona w postaci:

$$\left[D^c\right]=\frac{E_c}{\left(1+\nu_c\right)\left(1-2\nu_c\right)}\begin{bmatrix} 1-\nu_c & \nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & 1-\nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & \nu_c & 1-\nu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_c}{2} \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

gdzie:

E_c - moduł sprężystości betonu,

ν_c - współczynnik Poissona.

Równania dla niesprężystego zachowania betonu

Beton jest materiałem podatnym na zarysowanie w trzech kierunkach prostopadłych, miażdżenie, odkształcenia plastyczne i pełzanie. W przypadku powstania zarysowania i miażdżenia macierz sztywności jest odpowiednio dostosowana do charakteru uszkodzenia.

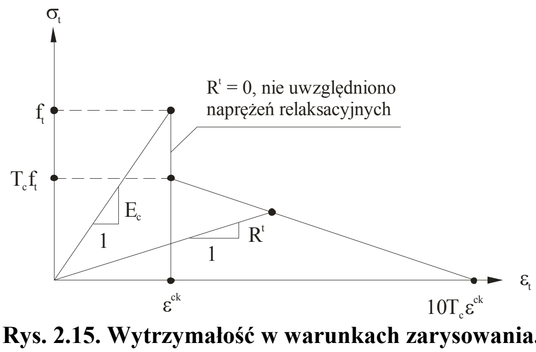
Modelowanie rysy

W modelowaniu numerycznym, w którym posługujemy się rozmytym obrazem rys, konieczne jest zastosowanie opisu uwzględniającego cechy betonu po powstaniu rys. Dotyczy to zarówno kierunku prostopadłego do płaszczyzny rysy, jak i kierunków leżących w tej płaszczyźnie. W betonie zarysowanym uwzględniono możliwość jego wzmocnienia przy ścinaniu poprzez wprowadzenie parametrów ścinania dla rozwarcia $\left(\beta_t\right)$ i zamknięcia się rysy $\left(\beta_c\right)$. Wartości tych parametrów są zawarte w przedziale zamkniętym $\left\langle 0,1\right\rangle$, przy czym dolna granica opisuje gładką powierzchnię rysy i informuje o utracie zdolności do przenoszenia ścinania, natomiast górna granica reprezentuje nierówną powierzchnię i zdolność do przenoszenia ścinania.

Powstanie rysy w punkcie numerycznego całkowania opisuje zmodyfikowana macierz sztywności z wprowadzoną płaszczyzną osłabienia usytuowaną w kierunku prostopadłym do powierzchni rysy. Parametr β_t jest mnożnikiem redukującym nośność na ścinanie po tych postępujących obciążeniach, po których powstaje poślizg w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni rysy. Zależność między naprężeniem a odkształceniem dla materiału zarysowanego w jednej płaszczyźnie jest zapisana w postaci macierzowej:

$$\left[D_c^{ck}\right]=\frac{E_c}{1+\nu_c}\begin{bmatrix} \frac{R^t\left(1+\nu_c\right)}{E_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\nu_c} & \frac{\nu_c}{1-\nu_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu_c}{1-\nu_c} & \frac{1}{1-\nu_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

w której indeks ck opisuje macierz sztywności w układzie współrzędnych z osią x^{ck} leżącą w linii prostopadłej do płaszczyzny rysy, analogicznym względem kierunków naprężeń głównych. Interpretację graficzną modułu osłabienia R^t i mnożnika sztywności strefy rozciąganej w fazie zarysowania T_c przy uwzględnieniu naprężeń relaksacyjnych po zarysowaniu przedstawiono na Rys. 2.15.



Rys. 2.15. Wytrzymałość w warunkach zarysowania.

Podczas zamykania się rysy wszystkie ściskające naprężenia normalne do płaszczyzny zarysowanej są przenoszone w poprzek rysy. W macierzy $\left[D_c^{ck}\right]$ jest wprowadzony parametr ścinania β_c dla zamykania się rysy.

$$\left[D_c^{ck}\right] = \frac{E_c}{\left(1+\nu_c\right)\left(1-2\nu_c\right)} \begin{bmatrix} 1-\nu_c & \nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & 1-\nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & \nu_c & 1-\nu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_c\left(1-2\nu_c\right)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_c\left(1-2\nu_c\right)}{2} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Macierz sztywności dla betonu zarysowanego w dwóch płaszczyznach jest postaci:

$$\left[D_c^{ck}\right] = E_c \begin{bmatrix} \frac{R^t}{E_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^t}{E_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2\left(1+\nu_c\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2\left(1+\nu_c\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2\left(1+\nu_c\right)} \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

a w przypadku, gdy rysy zamykane są w dwóch płaszczyznach to zależność jest wyrażona w postaci macierzowej (2.30).

Zależność między naprężeniem a odkształceniem dla betonu zarysowanego w trzech płaszczyznach jest zapisana w postaci macierzowej (2.31), a w przypadku, gdy trzy płaszczyzny rysy są zamknięte, macierz sztywności jest opisana jako (2.30).

Transformacja macierzy $\left[D_c^{ck}\right]$ elementu z lokalnego do globalnego układu współrzędnych jest postaci:

$$\left[D_c\right] = \left[T^{ck}\right]^T \left[D_c^{ck}\right] \left[T^{ck}\right], \tag{2.32}$$

w której $\left[T^{ck}\right]$ przybiera formę identyczną z transformacją opisaną przez Suidana i Schnobricha w pracy [103].

Rozwarcie lub zamknięcie rysy w punkcie numerycznego całkowania zależy od wartości odkształcenia przy zarysowaniu ε_{ck}^{ck}. W przypadku ewentualnego zarysowania w kierunku x odkształcenie jest obliczane jako:

- $\varepsilon_{ck}^{ck} = \varepsilon_x^{ck} + \dfrac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y^{ck} + \varepsilon_z^{ck}$, jeżeli zarysowanie nie wystąpi,
- $\varepsilon_{ck}^{ck} = \varepsilon_x^{ck} + \nu\varepsilon_z^{ck}$, jeżeli zarysowanie wystąpi w kierunku y,
  (2.33)
- $\varepsilon_{ck}^{ck} = \varepsilon_x^{ck}$, jeżeli zarysowanie wystąpi w kierunku y i z,

gdzie: $\varepsilon_x^{ck}, \varepsilon_y^{ck}, \varepsilon_z^{ck}$ - składowe odkształcenia normalnego w rysie.

Wektor $\left\{\varepsilon^{ck}\right\}$ jest opisany równaniem:

$$\left\{\varepsilon^{ck}\right\} = \left[T^{ck}\right]\left\{\varepsilon'\right\}, \tag{2.34}$$

w którym zmodyfikowane odkształcenie całkowite $\left\{\varepsilon'\right\}$ jest definiowane jako:

$$\left\{\varepsilon_n'\right\} = \left\{\varepsilon_{n-1}^{el}\right\} + \left\{\Delta\varepsilon_n\right\} - \left\{\Delta\varepsilon_n^{pl}\right\}, \tag{2.35}$$

gdzie:
n - numer kroku,
$\left\{\varepsilon_{n-1}^{el}\right\}$ - wektor odkształcenia sprężystego w kroku poprzednim,
$\left\{\Delta\varepsilon_n\right\}$ - całkowity przyrost odkształcenia zależny od przyrostu przemieszczenia $\left\{\Delta u_n\right\}$ w danym kroku,
$\left\{\Delta\varepsilon_n^{pl}\right\}$ - przyrost odkształcenia plastycznego.

Założono, że rysa jest zamknięta, jeżeli ε_{ck}^{ck} jest mniejsze od zera, a rozwarta, jeżeli ε_{ck}^{ck} jest większe lub równe zero.

Modelowanie miażdżenia

Miażdżenie betonu w punkcie numerycznego całkowania powstaje, gdy ulega on zniszczeniu przy jednoosiowym, dwuosiowym lub trójosiowym ściskaniu. Miażdżenie w elemencie skończonym jest opisane zgodnie z założeniami teorii plastycznego płynięcia jako końcowy stan procesu osłabienia materiałowego przy ściskaniu. W obszarze zmiażdżonym przyrost obciążenia wywołuje przyrost odkształceń przy stałych naprężeniach resztkowych.

2.3. Modelowanie właściwości stali zbrojeniowej

2.3.1. Model statycznego zachowania stali zbrojeniowej

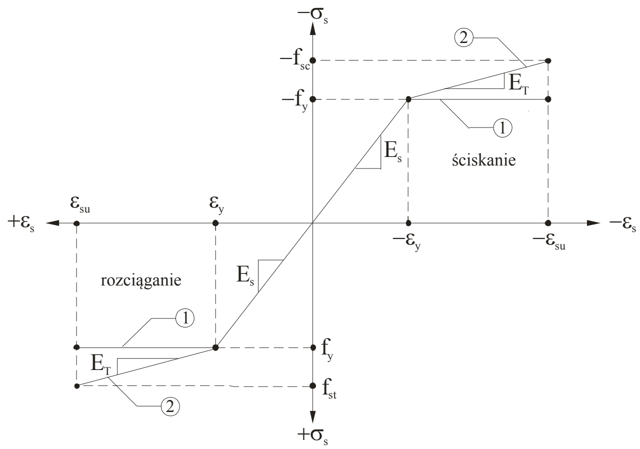
W konstrukcjach betonowych stal jest używana w postaci prętów zbrojeniowych. Upraszcza to znacznie problem modelu materiałowego stali do jednoosiowego stanu naprężenia. W obliczeniach numerycznych założono model materiałowy stali zbrojeniowej sprężysto - plastyczny o identycznych charakterystykach przy rozciąganiu i ściskaniu. Na Rys. 2.16 przedstawiono zastosowane modele materiałowe stali w analizie konstrukcyjnej ustrojów żelbetowych.

W rozwiązaniach numerycznych belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości bez zbrojenia strefy ściskanej na odcinku czystego zginania przy użyciu metody Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym zastosowany jest model materiałowy stali z uwzględnieniem wzmocnienia stali zbrojeniowej. Ten model lepiej opisuje zachowanie ustrojów żelbetowych, w których na odcinku czystego zginania nie występuje zbrojenie strefy ściskanej przekroju szczególnie w obszarze naprężeń niesprężystych po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. Moduł stali w zakresie plastyczności E_T wyznaczono na podstawie Rys. 2.16 ze wzoru:

$$E_T = \frac{f_{st} - f_y}{\varepsilon_{su} - \frac{f_y}{E_s}}. \tag{2.36}$$

Dla płyt stalowych usytuowanych w miejscach podparcia i przyłożenia siły skupionej założono model materiałowy liniowo-sprężysty.

Prosty model materiałowy stali pozwala w łatwy sposób określić obszar analizy. Gdy naprężenie stali nie przekracza granicy plastyczności f_y, wówczas występuje liniowo-sprężysty stan naprężenia.

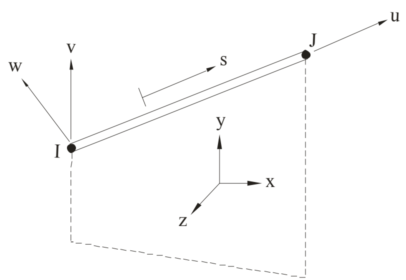


Rys. 2.16. Wykresy naprężenie-odkształcenie dla stali zbrojeniowej zastosowane w analizie konstrukcyjnej belek żelbetowych: linia 1 – wykres z poziomą półką plastyczną, linia 2 – wykres z uwzględnieniem wzmocnienia stali.

2.3.2. Charakterystyka elementów skończonych stali zbrojeniowej

W modelowaniu stali zbrojeniowej zastosowano przestrzenny element prętowy zilustrowany na Rys. 2.17, posiadający dwa punkty węzłowe o trzech stopniach swobody, to jest przemieszczeniach w punktach węzłowych w kierunkach x, y i z.

Element uwzględnia deformacje plastyczne, lecz nie ma możliwości przenoszenia zginania.



Rys. 2.17. Element skończony stali zbrojeniowej.

Sześciościenny element skończony stali zastosowany do modelowania płyt na podporze belki i w strefie przyłożenia siły skupionej odpowiada elementowi przedstawionemu na Rys. 2.12 i charakteryzuje go osiem punktów węzłowych o trzech stopniach swobody w każdym węźle.

2.3.3. Związki konstytutywne stali zbrojeniowej

Niesprężyste zachowanie zbrojenia

Macierz sztywności elementu prętowego ma postać:

$$\left[K_l\right] = \frac{A_s\hat{E}}{L_s}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

w której:

A_s - przekrój poprzeczny elementu prętowego,

$\hat{E} = \begin{cases} E_s \\ E_T \end{cases}$,

E_s - moduł odkształcenia sprężystego,

E_T - moduł odkształcenia plastycznego,

L_s - długość elementu prętowego.

Macierz sztywności naprężeń elementu jest wyrażona jako:

$$\left[S_l\right] = \frac{F_s}{L_s}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

w której:

$F_s = A_s E_s \varepsilon^{in}$ - siła osiowa w elemencie prętowym w pierwszym kroku obciążenia.

Niezrównoważony wektor obciążenia zewnętrznego elementu ma postać:

$$\left\{F_l\right\} = \left\{F_l^a\right\} - \left\{F_l^{nr}\right\}, \tag{2.39}$$

gdzie:

$\left\{F_l^a\right\}$ - uogólniony wektor obciążenia zewnętrznego,

$\left\{F_l^{nr}\right\}$ - wektor przyrostu obciążenia zewnętrznego.

Uogólniony wektor obciążenia zewnętrznego ma postać:

$$\left\{F_l^a\right\} = A_s E_s \varepsilon_n^T \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T. \tag{2.40}$$

W analizie liniowo-sprężystej lub pierwszej iteracji analizy nieliniowej odkształcenie ε_n^T obliczamy według wzoru:

$$\varepsilon_n^T = \varepsilon_n^{th} - \varepsilon^{in}, \tag{2.41}$$

ε_n^{th} - odkształcenie termiczne.

Wektor przyrostu obciążenia zewnętrznego ma postać

$$\left\{F_l^{nr}\right\} = A_s E_s \varepsilon_{n-1}^{el} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \tag{2.42}$$

gdzie:

ε_{n-1}^{el} - odkształcenie sprężyste w $n-1$ iteracji.

W analizie liniowo-sprężystej lub pierwszej iteracji analizy nieliniowej odkształcenie sprężyste ε_n^{el} obliczamy według zależności:

$$\varepsilon_n^{el} = \varepsilon_n + \varepsilon^{in}, \tag{2.43}$$

gdzie:

$\varepsilon_n = u / L_s$ - odkształcenie całkowite,

u - różnica pomiędzy przemieszczeniami w węźle.

W kolejnych iteracjach analizy nieliniowej odkształcenie sprężyste ε_n^{el} obliczamy na podstawie wzoru:

$$\varepsilon_n^{el} = \varepsilon_{n-1}^{el} + \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{pl}, \tag{2.44}$$

gdzie:

$\Delta\varepsilon = \Delta u / L_s$ - przyrost odkształcenia,

Δu - różnica pomiędzy przyrostami przemieszczenia w węźle,

$\Delta\varepsilon^{pl}$ - przyrost odkształcenia plastycznego.

Naprężenie σ_s jest opisane równaniem:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_n^{el}, \tag{2.45}$$

a ostateczną wartość siły F_s obliczamy na podstawie zależności:

$$F_s = A_s \sigma_s. \tag{2.46}$$

3. METODA ANALIZY

3.1. Przedmiot modelowania konstrukcyjnego

Opracowanie metody rozwiązania wymaga przeprowadzenia rozważań w zakresie modelowania procesów statycznego odkształcania przestrzennych belek żelbetowych. Element żelbetowy jest traktowany jako kompozycja materiałowa składająca się z matrycy betonowej wzmocnionej wiotkimi prętami stalowego zbrojenia rozłożonymi dyskretnie w materiale matrycy.

Metoda analizy wytężenia układu konstrukcyjnego opracowana jest z wykorzystaniem zasad metody elementów skończonych [30, 58, 119, 120]. W analizach przestrzegane są reguły wynikające z kompromisu pomiędzy dążeniem do maksymalnej dokładności obliczeń poprzez wprowadzenie gęstego podziału i dużej liczby węzłów, a minimalizacją czasu obliczeń poprzez odpowiedni dobór wielkości kroku obciążenia i zastosowanie szybko-zbieżnej metody obliczeniowej. Zaproponowano hipotezę współpracy prętów zbrojenia i materiału matrycy wyrażających w jawny sposób zasadę równoważności przemieszczeń w węzłach wspólnych elementów skończonych podziału. Rozwiązanie układów przyrostowych równań statycznej równowagi metody elementów skończonych przeprowadzono na podstawie metody Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym i metody ustalania długości łuku Crisfielda oraz programu numerycznej analizy przestrzennych stanów naprężenia umożliwiających określenie stanu przemieszczenia, odkształcenia, naprężenia i zarysowania, z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych materiałów i geometrycznych nieliniowości elementów konstrukcyjnych.

3.2. Modele elementu żelbetowego

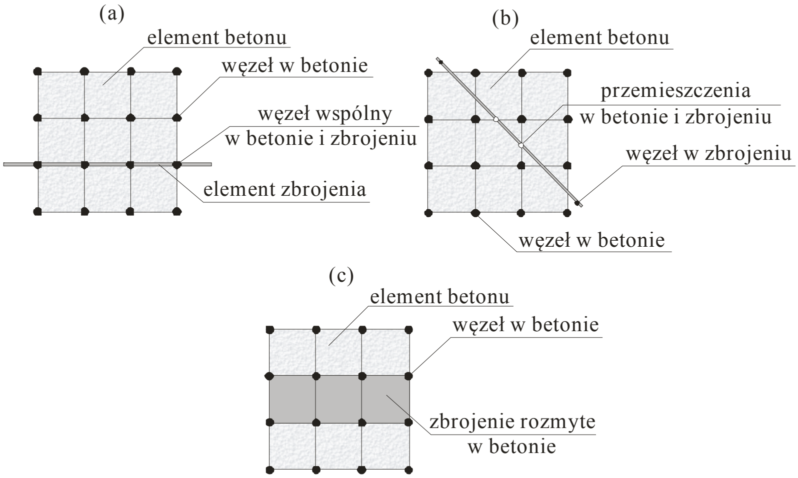
Znane są trzy sposoby modelowania elementów skończonych stali zbrojeniowej w materiale matrycy betonowej: model dyskretny, model wbudowanego pręta i model rozmyty, przedstawione m.in. w pracy Tavareza [109].

W modelu dyskretnym zbrojenia przedstawionym na Rys. 3.1a trajektoria prętów pokrywa się z siatką betonu. Siatka betonu i siatka zbrojenia mają wspólne punkty węzłowe, więc beton zajmuje te same obszary, co zbrojenie. Pewna niedokładność modelu wynika z faktu, że siatkę betonu ogranicza ulokowane zbrojenie a jego niewielka objętość nie jest odejmowana od objętości betonu.

W modelu wbudowanego pręta zilustrowanym na Rys. 3.1b zbrojenie przecina siatkę podziału elementów betonowych, a sztywność stali jest obliczona oddzielnie w elemencie skończonym materiału matrycy betonowej. Model jest skonstruowany w taki sposób, aby przemieszczenia analizować oddzielnie w pręcie stalowym i w otaczających go elementach betonowych.

Ta technika modelowania jest korzystna dla konstrukcji o złożonym układzie zbrojenia.

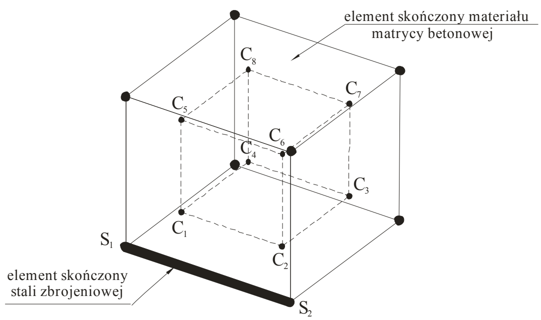
W modelu rozmytym przedstawionym na Rys. 3.1c przyjmuje się warstwowe zbrojenie, które jest równomiernie rozłożone w skończonych obszarach elementów matrycy betonowej. Technika ma zastosowanie w wielkowymiarowych modelach konstrukcji płytowych i powłokowych ze znikomym wpływem zbrojenia na nośność konstrukcji.



Rys. 3.1. Techniki modelowania elementów skończonych stali zbrojeniowej w betonie: (a) model dyskretny, (b) model wbudowanego pręta, (c) model rozmyty.

W niniejszej pracy zastosowano model zbrojenia dyskretnego w elemencie betonowym, w którym pręty stalowe modelowano przy wykorzystaniu przestrzennego skończonego elementu prętowego.

Siatkę elementów skończonych zbrojenia powiązano z siatką elementów skończonych matrycy betonowej poprzez modelowanie zgodności przemieszczeń węzłów wspólnych obydwu siatek, jak na Rys. 3.2.



Rys. 3.2. Połączenie elementu skończonego z betonu z elementem stalowym.

Dla ustroju dyskretyzowanego w taki sposób macierz sztywności jest sumą sztywności elementów skończonych modelujących beton i sztywności elementów modelujących stal. Technika ta jest bardzo wygodna w analizach zarysowania. W elemencie skończonym materiału matrycy betonowej w punkcie numerycznego całkowania powstanie rysa po osiągnięciu przez beton granicznych naprężeń rozciągających. Element zarysowany w trzech kierunkach we wszystkich ośmiu punktach numerycznego całkowania jest wyłączany z układu i przyjmuje resztkową wartość modułu odkształcenia betonu. Teoretycznie mogą zostać zarysowane wszystkie skończone elementy materiału matrycy betonowej.

3.3. Współpraca betonu ze stalą zbrojeniową

Współpraca betonu i stali zbrojeniowej jest szczególnie ważna z uwagi na zachowanie się konstrukcji żelbetowych. Pręty zbrojeniowe przenoszą głównie siły równoległe do swojej osi przekazywane z betonu dzięki jego przyczepności do stali. Przyczepność powstaje przede wszystkim jako rezultat: tarcia w płaszczyźnie styku między stalą i betonem, chemicznej adhezji, skurczu betonu, a w przypadku prętów żebrowanych w wyniku mechanicznej interakcji pomiędzy użebrowaniem pręta a betonem. Na odcinku między rysami znaczną część naprężeń rozciągających przejmuje beton, a powstałe zjawisko określa się jako zesztywnienie. W sytuacji, gdy pręty zbrojenia przenoszą siły prostopadłe do ich osi w miejscu pojawienia się rysy w betonie wywołanej działaniem sił poprzecznych występuje efekt klockujący. Więcej informacji dotyczących przyczepności przedstawiono w przeglądowych pracach Gambarova i in. [42, 43] oraz Smarzewskiego i Stolarskiego [95].

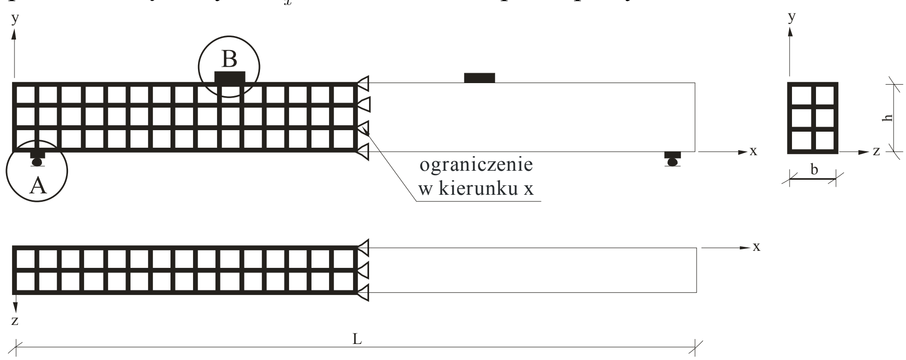
Problem przekazywania na pręty zbrojenia sił równoległych do ich osi jest ściśle związany ze sposobem reprezentacji zbrojenia przy dyskretyzacji ustroju za pomocą elementów skończonych. Zbrojenie jest modelowane jako dyskretne za pomocą prętowych elementów połączonych w węzłach z betonową siatką elementów. Przemieszczenia towarzyszące złożonemu stanowi naprężenia w strefie przyczepności są wtedy ujawnione jako deformacje elementów betonowych sąsiadujących z węzłami zawierającymi zbrojenie.

W wyniku przyczepności na odcinku między rysami pręty zbrojenia przekazują na beton znaczną część naprężeń rozciągających. Skutkuje to globalnym zwiększeniem sztywności konstrukcji żelbetowej. Powszechnie stosowanym sposobem uwzględnienia wpływu efektu usztywnienia jest założenie stopniowego spadku wytrzymałości na rozciąganie w wyniku zniszczenia betonu [92]. Dotychczas nie rozstrzygnięto, jaki charakter powinna mieć funkcja osłabienia betonu w strefie rozciąganej. Wydaje się jednak, że rozwiązanie tego problemu wymaga kalibracji modelu przez porównanie wyników analiz numerycznych z wynikami badań doświadczalnych. W analizach pominięto modelowanie efektu poślizgu związanego z przekazywaniem sił przyczepności w strefie kontaktowej oraz efektu klockującego.

3.4. Warunki brzegowe i obciążenie zastępcze

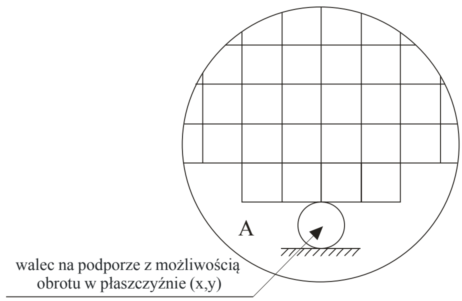
Warunki brzegowe modelowano w taki sposób, aby możliwie dokładnie odwzorować rzeczywiste zachowanie belek doświadczalnych. Na Rys. 3.3 przedstawiono warunki brzegowe w analizowanych modelach numerycznych.

W środku rozpiętości, we wszystkich rozważanych modelach belek, utworzono płaszczyznę symetrii poprzez ograniczenie przemieszczeń w punktach węzłowych $u_x = 0$ w kierunku prostopadłym x.



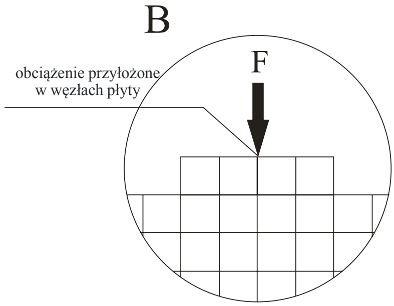
Rys. 3.3. Warunki brzegowe w płaszczyźnie symetrii elementu.

Warunki brzegowe na podporach modelowano jako poziome płyty stalowe przekazujące siły węzłowe z elementów materiału matrycy betonowej na wałek stalowy umożliwiający obrót belki w płaszczyźnie zginania (x, y). W osi podpory ograniczono przemieszczenia w punktach węzłowych w kierunkach x i z: $u_x = 0$ i $u_z = 0$. Przykładowe warunki podparcia zilustrowano na Rys. 3.4.



Rys. 3.4. Warunki brzegowe na podporze.

Obciążenie siłą skupioną F jest przyłożone za pośrednictwem poziomej płyty stalowej. Przyjęto równomierny rozkład siły w węzłach w kierunku poprzecznej osi symetrii płyty stalowej, Rys. 3.5. Obciążenia z węzłów płyty stalowej przenoszone są bezpośrednio na węzły elementów materiału matrycy betonowej.



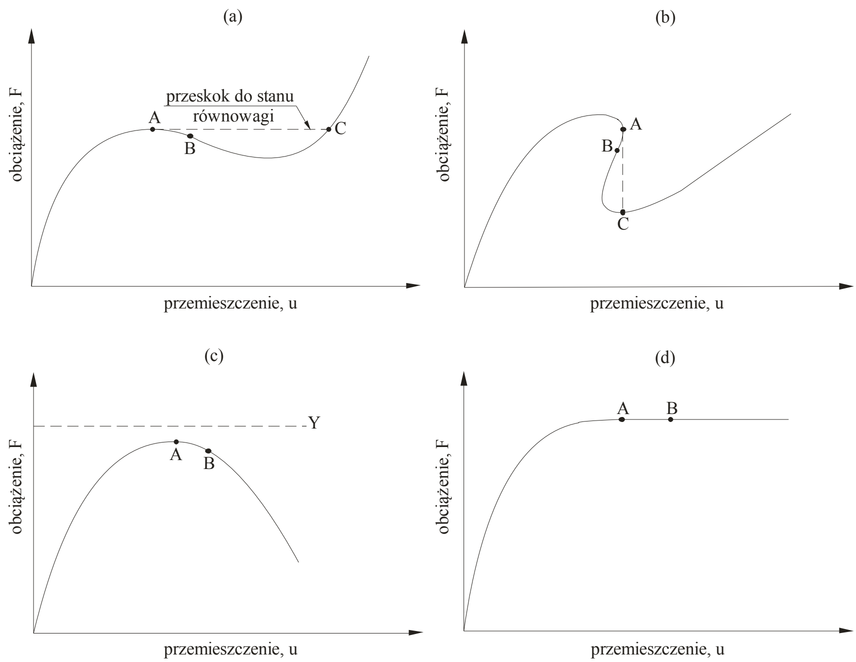
Rys. 3.5. Warunki brzegowe w strefie przyłożenia obciążenia.

3.5. Metody numeryczne rozwiązania układu równań równowagi

3.5.1. Przyczyny wykorzystania różnych metod numerycznych

Metoda Newtona-Raphsona jest wykorzystywana w większości spotykanych w praktyce przypadków z zakresu mechaniki konstrukcji do rozwiązywania układów równań. Metoda ta pracuje bez zarzutu dla materiałów o charakterystykach liniowo-sprężystych, nie jest natomiast tak skuteczna dla materiałów niesprężystych po wprowadzeniu zarysowania i miażdżenia. Wadą jej jest konieczność odwracania nowej macierzy sztywności w trakcie każdego kroku iteracyjnego oraz przede wszystkim brak możliwości opisu mechanizmu zniszczenia materiału, gdyż rozwiązanie nie jest zbieżne z chwilą zerowania macierzy sztywności stycznej w punkcie. Odzwierciedlenie ewentualnego osłabienia konstrukcji widocznego na krzywej obciążenie-przemieszczenie w postaci gwałtownych spadków obciążenia jest możliwe tylko przy wykorzystaniu metod iteracyjnych znacznie bardziej złożonych w porównaniu do metody Newtona-Raphsona.

Rzeczywiste zachowanie konstrukcji przedstawione na Rys. 3.6a,b powinno uwzględniać efekty lokalnych i globalnych spadków obciążenia. Na Rys. 3.6a wzdłuż linii przerywanej zaprezentowano przeskok do stanu równowagi przy sterowaniu obciążeniem. Wzdłuż linii ciągłej A-C przedstawiono niestabilny przebieg statycznego zachowania przy sterowaniu obciążeniem, a stabilny przy sterowaniu przemieszczeniem. Na Rys. 3.6b wzdłuż linii przerywanej A-C opisano przeskok do stanu równowagi przy sterowaniu przemieszczeniem, a wzdłuż linii ciągłej A-C przeskok do stanu równowagi przy sterowaniu obciążeniem. Szczegółowy przebieg niestabilnej ścieżki rozwiązania powinien zostać ustalony, gdyż w punkcie A jest maksimum lokalne (Rys. 3.6a,b). Ponadto w analizach konstrukcji bardzo ważna jest nie tylko znajomość spadku obciążenia, lecz również charakter osłabienia - kruchy (Rys. 3.6c) lub ciągliwy (Rys. 3.6d).



Rys. 3.6. Zależności obciążenie-przemieszczenie: (a) z przeskokiem w przód, (b) z przeskokiem wstecz, (c) ze zniszczeniem kruchym, (d) ze zniszczeniem ciągliwym.

W celu uzyskania kompletnej ścieżki obciążenie-przemieszczenie wykazującej lokalne i globalne osłabienie konstrukcji i opisu mechanizmu zniszczenia zastosowano efektywne metody: Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym i długości łuku Crisfielda. Metody długości łuku nie weryfikowano dla przestrzennych modeli elementów żelbetowych przy uwzględnieniu osłabienia odkształceniowego przy ściskaniu i rozciąganiu w betonie wysokiej wytrzymałości.

3.5.2. Metoda Newtona-Raphsona

Metoda Newtona-Raphsona jest szczegółowo opisana w monografiach Bathe [12], Kleibera [58] i pracy Zienkiewicza i Taylora [119]. W wyniku podziału na elementy skończone powstały następujące układy liniowych równań algebraicznych:

$$\left[K\right]\left\{u\right\} = \left\{F^a\right\}, \tag{3.1}$$

gdzie:

$\left[K\right]$ - macierz współczynników układu,

$\left\{u\right\}$ - poszukiwany wektor uogólnionego przemieszczenia w trzech kierunkach prostopadłych,

$\left\{F^a\right\}$ - znany wektor uogólnionego obciążenia.

Równanie (3.1) jest nieliniowe, gdy macierz współczynników układu $\left[K\right]$ jest funkcją lub pochodną poszukiwanych wartości uogólnionych przemieszczeń w trzech kierunkach prostopadłych.

Metoda Newtona-Raphsona przedstawiona graficznie na Rys. 3.7 jest procesem iteracyjnego rozwiązywania równań nieliniowych postaci:

$$\left[K_i^T\right]\ \left\{\Delta u_i\right\} = \left\{F^a\right\} - \left\{F_i^{nr}\right\}, \tag{3.2}$$

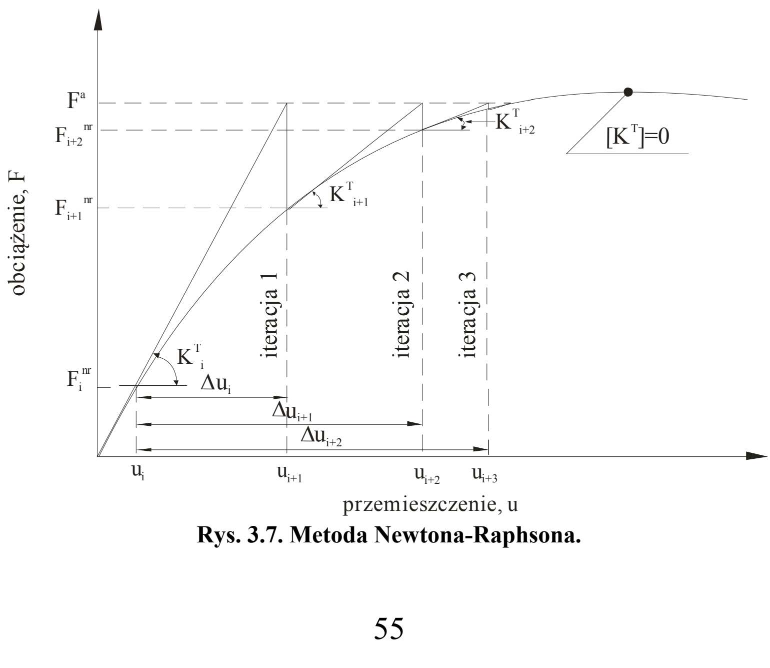
$$\left\{u_{i+1}\right\} = \left\{u_i\right\} + \left\{\Delta u_i\right\}, \tag{3.3}$$

gdzie:

$\left[K_i^T\right]$ - macierz sztywności stycznej,

i - indeks odpowiadający numerowi kroku przyrostowego,

$\left\{F_i^{nr}\right\}$ - wektor wewnętrznych sił węzłowych odpowiadających stanowi naprężenia panującemu w dyskretyzowanym układzie.



Rys. 3.7. Metoda Newtona-Raphsona.

Macierz sztywności $\left[K_i^T\right]$ i wektor wewnętrznych sił węzłowych $\left\{F_i^{nr}\right\}$ obliczono na podstawie wartości wektora przemieszczenia $\left\{u_i\right\}$. Prawa strona równania (3.2) jest nazywana niezrównoważonym wektorem obciążenia. Rozwiązanie jest zbieżne w wyniku wykonania co najmniej jednej iteracji, gdy wektor wewnętrznych sił węzłowych $\left\{F_i^{nr}\right\}$ odpowiadający aktualnemu stanowi naprężenia jest równy lub zachowuje tolerancję wektorowi uogólnionego obciążenia $\left\{F^a\right\}$.

Ogólny algorytm metody można zapisać w następujących krokach:

- Założenie wektora przemieszczenia $\left\{u_0\right\}$, który jest rozwiązaniem w poprzednim kroku; w pierwszym kroku przyrostowym $\left\{u_0\right\} = 0$.
- Obliczenie uaktualnionej macierzy sztywności stycznej $\left[K_i^T\right]$ i wektora wewnętrznych sił węzłowych $\left\{F_i^{nr}\right\}$ odpowiadającego wektorowi przemieszczenia $\left\{u_i\right\}$.
- Obliczenie poszukiwanego wektora przyrostu przemieszczenia $\left\{\Delta u_i\right\}$ na podstawie równania (3.2).
- Obliczenie przybliżenia wektora przemieszczenia w kolejnym kroku przyrostowym $\left\{u_{i+1}\right\}$ ze wzoru (3.3).
- Poprawianie dokładności otrzymanego rozwiązania przez powtarzanie czynności opisanych w punktach 2-4 aż do chwili otrzymania wymaganej zbieżności rozwiązania numerycznego.

3.5.3. Metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym

Metoda spadku adaptacyjnego przedstawiona w pracy Eggerta [34] polega na zmianie ścieżki rozwiązania w pobliżu punktu granicznego i poruszaniu się wstecz wzdłuż siecznej aż do szybkiego uzyskania zbieżności rozwiązania numerycznego.

Macierz sztywności w równaniu Newtona-Raphsona (3.2) jest opisana jako suma dwóch macierzy:

$$\left[K_i^T\right] = \xi\left[K^S\right] + \left(1-\xi\right)\left[K^T\right], \tag{3.4}$$

gdzie:

$\left[K^S\right]$ - macierz sztywności siecznej,

$\left[K^T\right]$ - macierz sztywności stycznej,

ξ - parametr spadku adaptacyjnego.

Metoda polega na uzgodnieniu parametru spadku adaptacyjnego ξ podczas iteracji równowagi zgodnie z przedstawionym algorytmem:

- Na początku każdego kroku pośredniego obliczana jest macierz sztywności stycznej na podstawie algorytmu metody Newtona-Raphsona przedstawionego w poprzednim rozdziale pracy przy założeniu w równaniu (3.4) parametru spadku adaptacyjnego $\xi = 0$.
- Podczas wykonywanych kolejnych iteracji równowagi sprawdzana jest zmienność normy rozwiązania dla niezrównoważonego wektora obciążenia:

  $\left\| \left\{ R \right\} \right\|_2 = \left(\sum R_i^2 \right)^{1/2}$,

  $\left\{ R \right\} = \left\{ F^a \right\} - \left\{ F^{nr} \right\}$ (prawa strona równania 3.2).

  Gdy norma rośnie to bardzo prawdopodobna jest rozbieżność rozwiązania numerycznego, natomiast w przeciwnym przypadku jest możliwa zbieżność rozwiązania. Parametr spadku adaptacyjnego ξ jest wyrównywany podczas wykonywania iteracji aż do chwili otrzymania wymaganej zbieżności rozwiązania numerycznego.

Macierz sztywności siecznej jest generowana w metodzie numerycznej w wyniku rozwiązywania nieliniowych zagadnień dotyczących uplastycznienia materiału, sztywności konstrukcji z dużymi odkształceniami, zmiażdżenia betonu z uwzględnieniem naprężeń relaksacyjnych po zarysowaniu.

3.5.4. Metoda Crisfielda

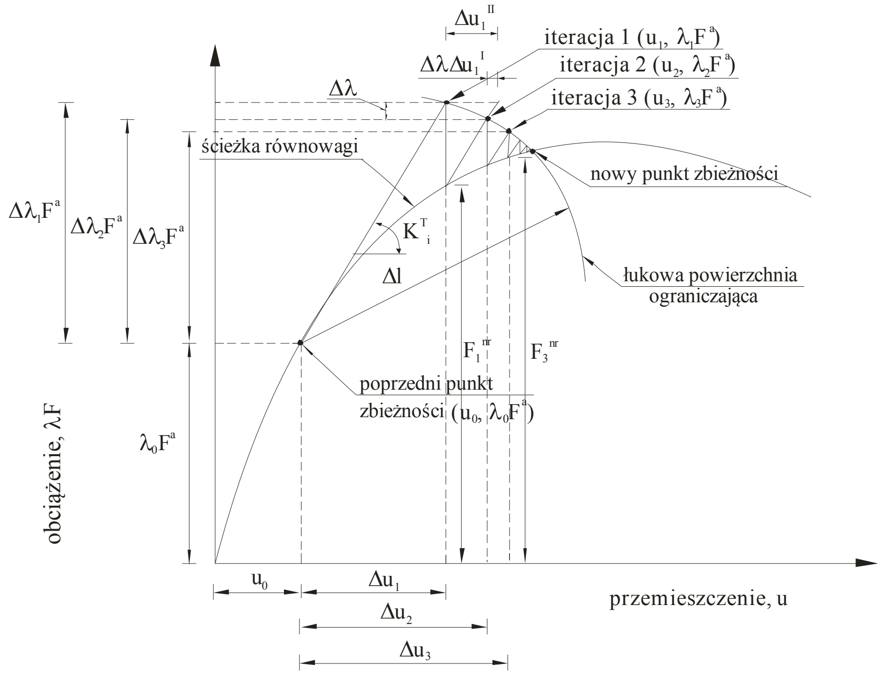
Wempner [114], Bergan i in. [14] oraz Riks [90] byli prekursorami zastosowania metody długości łuku w analizie konstrukcji. Cenne modyfikacje tej metody wprowadzili w późniejszych latach Crisfield [28, 29, 31], Ramm [87], Forde i Stiemer [39], Bellini i Chulya [13] oraz Lam i Morley [62].

Więcej informacji dotyczących różnych metod długości łuku przedstawiono m.in. w przeglądowej pracy Memona i Su [74] oraz w monografii Crisfielda [30].

W przedstawionej na Rys. 3.8 metodzie numerycznej długości łuku Crisfielda równanie (3.2) uzależniono od parametru obciążenia λ :

$$\left[K_i^T\right] \left\{\Delta u_i\right\} = \lambda \left\{F^a\right\} - \left\{F_i^{nr}\right\}. \tag{3.5}$$

W metodzie tej zmienny parametr obciążenia λ poszukiwany w równaniach równowagi w procedurze elementów skończonych jest wprowadzony z przedziału $\langle -1{,}1 \rangle$.



Rys. 3.8. Metoda długości łuku według Crisfielda [29].

Równanie w pośrednim kroku obciążenia jest postaci:

$$\left[K_i^T\right]\ \left\{\Delta u_i\right\} - \Delta\lambda\left\{F^a\right\} = \left(\lambda_0 + \Delta\lambda_i\right)\ \left\{F^a\right\} - \left\{F_i^{nr}\right\}, \qquad (3.6)$$

w którym:

$\Delta\lambda$ - parametr przyrostu obciążenia.

Na podstawie równania (3.6) poszukiwany wektor przyrostu przemieszczenia $\left\{\Delta u_i\right\}$ złożony z dwóch składowych opisano jako:

$$\left\{\Delta u_i\right\} = \Delta\lambda\left\{\Delta u_i^I\right\} + \left\{\Delta u_i^{II}\right\}, \qquad (3.7)$$

gdzie:

$\left\{\Delta u_i^I\right\}$ - wektor przyrostu przemieszczenia wywołany jednostkowym parametrem obciążenia,

$\left\{\Delta u_i^{II}\right\}$ - wektor przyrostu przemieszczenia w metodzie Newtona-Raphsona.

Wektory przemieszczenia są definiowane jako:

$$\left\{\Delta u_i^I\right\} = \left[K_i^T\right]^{-1}\left\{F^a\right\}, \tag{3.8}$$

$$\left\{\Delta u_i^{II}\right\} = \left[K_i^T\right]^{-1}\left[\left(\lambda_0 + \Delta\lambda_i\right)\left\{F^a\right\} - \left\{F_i^{nr}\right\}\right]. \tag{3.9}$$

Parametr przyrostu obciążenia $\Delta\lambda$ określono wg równania długości łuku:

$$l_i^2 = \Delta\lambda_i^2 + \beta^2\left\{\Delta u_n\right\}^T\left\{\Delta u_n\right\}, \tag{3.10}$$

w którym:

β - parametr skalowania,

Δu_n - suma przyrostów przemieszczenia Δu_i w bieżącym kroku iteracyjnym.

Istnieją różne sposoby przybliżonego obliczenia parametru przyrostu obciążenia $\Delta\lambda$. Forde i Stiemer w pracy [39] przedstawili ogólną procedurę obliczania parametru $\Delta\lambda$ opartą na zasadach prostopadłości:

$$\Delta\lambda = \frac{r_i - \left\{\Delta u_n\right\}^T\left\{\Delta u_i^{II}\right\}}{\beta^2\Delta\lambda_i + \left\{\Delta u_n\right\}^T\left\{\Delta u_i^I\right\}}, \tag{3.11}$$

gdzie:

r_i - niezrównoważony parametr otrzymywany w wyniku skalarnego mnożenia wektora normalnego i stycznego.

Uaktualniona metoda ma następującą postać:

$$\left\{u_{i+1}\right\} = \left\{u_0\right\} + \left\{\Delta u_n\right\} + \left\{\Delta u_i\right\}, \tag{3.12}$$

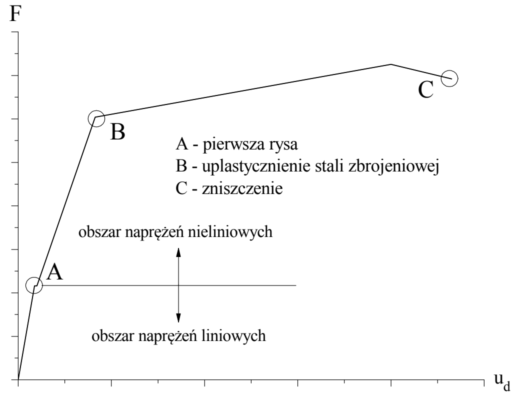
$$\lambda_{n+1} = \lambda_0 + \Delta\lambda_i + \Delta\lambda. \tag{3.13}$$

Iteracje ustaną w chwili otrzymania wymaganej zbieżności rozwiązania numerycznego.

3.6. Przyrost obciążenia i interpretacja zniszczenia

Przyrost obciążenia w analizach numerycznych konstrukcji żelbetowych jest ustalony zgodnie z przebiegiem doświadczalnej krzywej obciążenie-przemieszczenie.

Na Rys. 3.9 przedstawiono schemat przemieszczenia pionowego w punkcie środkowym na dolnej krawędzi belki od obciążenia sumarycznego z wyszczególnieniem charakterystycznych faz pracy konstrukcji żelbetowej.



Rys. 3.9. Schemat przemieszczenia pionowego w punkcie środkowym na dolnej krawędzi belki od obciążenia sumarycznego.

W zakresie liniowo-sprężystym konstrukcja zachowuje się stabilnie i nie jest konieczne stosowanie wielu kroków obciążenia $\left(\Delta F_{0A} = 1\right)$. W obszarze powstania rys w betonie (A) obciążenie jest przykładane stopniowo z małymi przyrostami równymi $\Delta F_A = 0,001$, gdyż na tym etapie analizy uzyskanie zbieżnego rozwiązania jest stosunkowo trudne. W obszarze naprężeń niesprężystych po pierwszym zarysowaniu analiza jest ponownie szybko-zbieżna $\left(\Delta F_{AB} = 0,01\right)$. W obszarze uplastycznienia stali zbrojeniowej (B) metoda jest wolniej zbieżna, a zbieżność rozwiązania jest zapewniona przez zastosowanie jak najmniejszego kroku obciążenia, równego $\Delta F_B = 0,0005$. Na ostatnim etapie rozwiązania numerycznego po uplastycznieniu stali przyrost obciążenia powoduje powstanie bardzo dużej ilości rys. W tym zakresie przyjęto minimalny przyrost obciążenia $\Delta F_{BC} = 0,0005$. W każdym modelu założono, że zniszczenie (C) nastąpi w chwili rozbieżności rozwiązania przy minimalnym przyroście obciążenia $\Delta F_C = 0,0005$.

4. DOŚWIADCZENIA NUMERYCZNE BELEK ŻELBETOWYCH

4.1. Cel i zakres doświadczeń numerycznych

Celem doświadczeń numerycznych jest weryfikacja poprawności metody analizy niesprężystego zachowania belek żelbetowych przeprowadzona na podstawie porównania uzyskanych wyników numerycznych z wynikami badań doświadczalnych Kamińskiej [55]. Zakres doświadczeń numerycznych obejmuje rozważania zachowania czterech prostokątnych belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości, oznaczonych w pracy Kamińskiej jako BP-1a, BP-1b, BP-2a, BP-2b, Rys. 4.3. Rozwiązanie układów przyrostowych równań statycznej równowagi metody elementów skończonych dla wszystkich rozważanych belek żelbetowych przeprowadzono według dwóch metod numerycznych: Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym i ustalania długości łuku Crisfielda.

4.2. Przedmiot doświadczeń numerycznych

W numerycznych modelach przestrzennych belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości zastosowano wymiary elementów oraz właściwości materiałów jak dla wolnopodpartych belek prostokątnych BP-1a, BP-1b, BP-2a, BP-2b badanych i opisanych przez Kamińską w pracy [55]. Wszystkie elementy wykonano z betonu o wytrzymałości $f_c = 70 - 80\ \mathrm{MPa}$. Belki były obciążane dwiema siłami skupionymi. Założono wysokość przekroju 300 mm i odpowiednio do niej rozpiętość w osiach podpór 3000 mm. Dla belek typu **1** przyjęto stopień podłużnego zbrojenia rozciąganego równy ok. 0,4 %, a dla belek typu **2** ok. 1,5 %. Zbrojenie strefy ściskanej było stałe i wynosiło $2\phi 10$, przy czym w środkowej części belek oznaczonych symbolem **b** na odcinku czystego zginania o długości przekraczającej czterokrotną wysokość przekroju nie wykonano zbrojenia ściskanej strefy przekroju. Rozstaw strzemion w strefach przypodporowych ustalono z warunku niedopuszczenia do zniszczenia belki na ścinanie, a w strefie pomiędzy siłami skupionymi z warunków konstrukcyjnych. Charakterystyki i oznaczenia belek zestawiono w Tablicy 4.1.

Tablica 4.1. Charakterystyka i oznaczenia belek

Belka	Zbrojenie podłużne w strefie czystego zginania			Rozstaw strzemion przy podporze
	dolne		górne	
	$\rho = A_{s1}/bd$			
BP-1a	0,0038	$2\phi 10$	$2\phi 10$	100
BP-1b		$2\phi 10$	-	
BP-2a	0,0146	$3\phi 16$	$2\phi 10$	80
BP-2b		$3\phi 16$	-	

Łącznie z badaniami elementów wykonano badania stali zbrojeniowej i betonu z rejestracją zależności naprężenie-odkształcenie. Zbrojenie podłużne belek wykonano ze stali żebrowanej 34GS o średnicy 10 mm i 16 mm, a strzemiona ze stali gładkiej o średnicy 6 mm. Badano 8 prętów zbrojeniowych o średnicy ϕ 10, 8 prętów zbrojeniowych o średnicy ϕ 16 i 4 pręty zbrojeniowe o średnicy ϕ 6. Do modelowania stali zbrojeniowej wykorzystano pomierzone doświadczalnie wartości średnie.

Wytrzymałościowe cechy betonu były określane w dniu badania belek na próbkach kostkowych o boku 150 mm $\left(f_{c,cube}, f_{ct,sp}\right)$ i walcowych o średnicy 150 mm i wysokości 300 mm $\left(f_c, E_c\right)$. Wyniki średnie badań betonu podano w Tablicy 4.2.

Tablica 4.2. Wytrzymałościowe cechy betonu

Belka	Wiek betonu [dni]	$f_{c,cube}$ [MPa]	f_c [MPa]	$f_{ct,sp}$ [MPa]	E_c [MPa]	$\frac{f_c}{f_{c,cube}}$
BP-1a	29	93,2	81,2	5,23	35300	0,87
BP-1b	29	84,6	72,8	4,73	34000	0,86
BP-2a	46	91,6	78,8	4,57	37000	0,86
BP-2b	32	89,5	73,3	5,06	35800	0,82

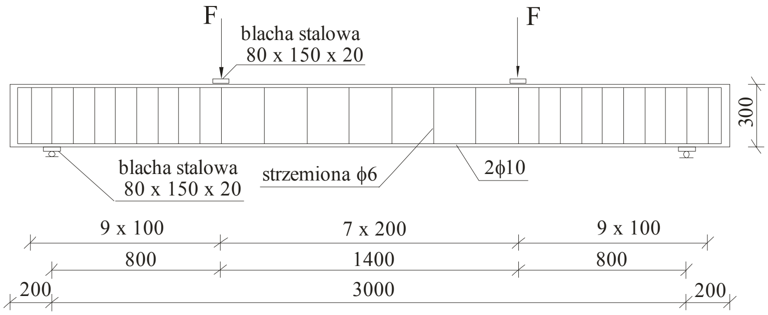
Wymiary i przekrój poprzeczny belki wraz z układem zbrojenia i schematem obciążenia przedstawiono na Rys. 4.1.

Belki o wyższym stopniu zbrojenia, BP-2 uległy zniszczeniu przez zmiażdżenie betonu w strefie ściskanej. W belkach bez zbrojenia strefy ściskanej zniszczenie miało charakter eksplozyjny, natomiast obecność zbrojenia wyraźnie łagodziła przebieg procesu zniszczenia. Nie udało się doprowadzić do zniszczenia belek o niskim stopniu zbrojenia BP-1, gdyż przy bardzo dużych przemieszczeniach, sięgających w połowie rozpiętości belek 200 mm, zostały wyczerpane możliwości stanowiska badawczego i dalsze obciążenie przerwano. Pomimo tak dużych ugięć zbrojenie w pełni współpracowało z betonem. W Tablicy 4.3 zestawiono maksymalne obciążenia i przemieszczenia. Podane wyniki oznaczone gwiazdką określono z warunku odkształceń, gdyż belek o niskim stopniu zbrojenia nie udało się doprowadzić do zniszczenia w sensie materiałowym [55].

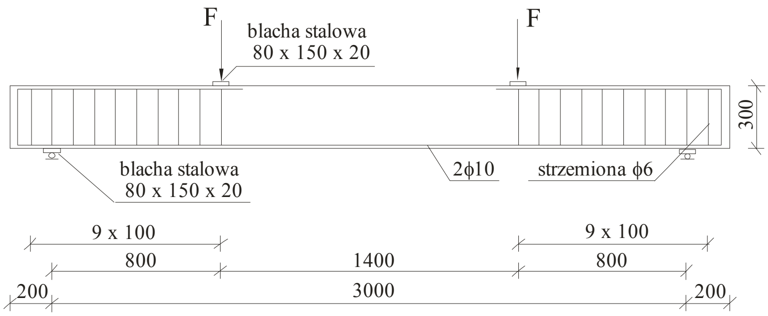
Zarysowanie wszystkich belek przebiegało podobnie. Rysy pojawiały się najpierw ponad zbrojeniem, na wysokości przekroju. W miarę narastania obciążenia rysy stawały się widoczne w poziomie zbrojenia i było ich kilkakrotnie więcej niż rys wtórnych. Ułożenie ich w formie wachlarza stanowiło przeszkodę w ustaleniu doświadczalnego rozstawu rys. W belkach o niskim stopniu zbrojenia BP-1a na odcinku czystego zginania układ głównych rys pokrywa się z układem strzemion. Natomiast w belce BP-1b bez zbrojenia poprzecznego na odcinku czystego zginania układ rys jest przypadkowy.

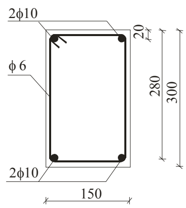
Obrazy rys potwierdzają znaną prawidłowość o wpływie stopnia zbrojenia na ilość rys. Tendencję do kształtowania się rys zbiorczych zaobserwowano również w badaniach Bernardi i in. [15], Lambotte i Taerwe [63] i Taerwe [107].

BP-1a

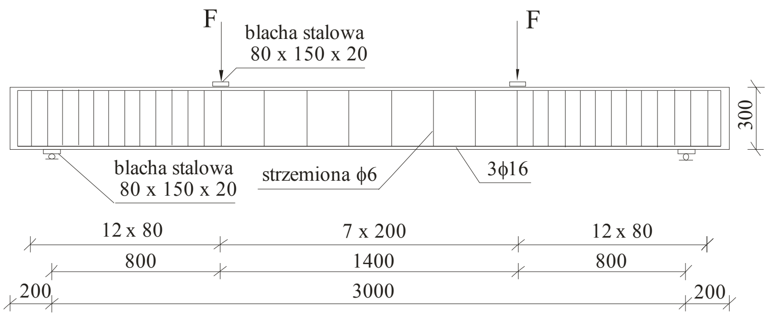


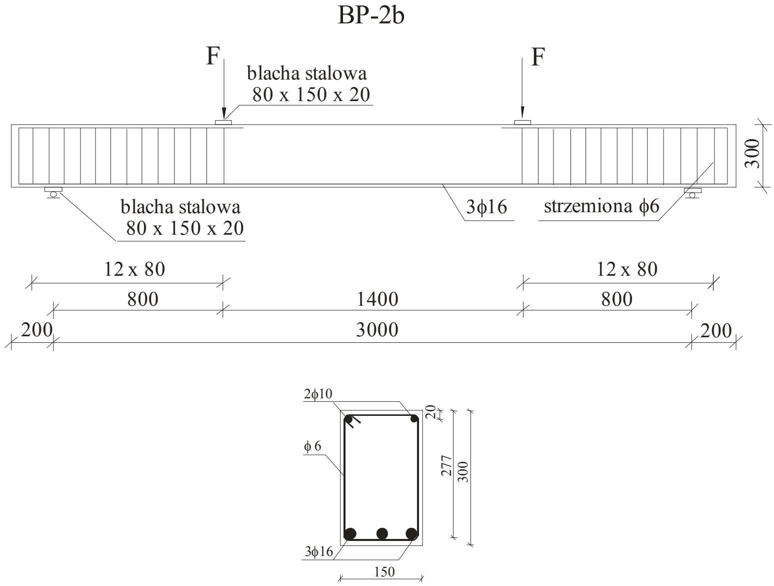
BP-1b





BP-2a





Rys. 4.1. Zbrojenie belek BP.

Tablica 4.3. Maksymalne obciążenia i przemieszczenia

Belka	Siła rysująca F_{cr} [kN]	Siła niszcząca F_u [kN]	Przemieszczenie pionowe w środku belki u_d [mm]	Charakter zniszczenia
BP-1a	13	30*	189,57	w sensie materiałowym zniszczenia nie było
BP-1b	11	28,5*	192,72	w sensie materiałowym zniszczenia nie było
BP-2a	25	104	110,92	zmiażdżenie betonu w strefie ściskanej
BP-2b	22	105	117,13	zmiażdżenie betonu w strefie ściskanej

Badania Kamińskiej [55] wykazały, że obawy o niską odkształcalność elementów z betonu wysokiej wytrzymałości są nieuzasadnione. Stwierdzono, że w tych elementach, które zniszczyły się przez zmiażdżenie betonu strefy ściskanej, następowało to przy odkształceniach znacznie większych niż odkształcenia niszczące rejestrowane na próbkach, co jest korzystne z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji. W belkach odkształcenia betonu osiągały aż 6 ‰ i były dwukrotnie wyższe od otrzymanych na próbkach. Tak dużą odkształcalność zginanych belek z betonu o wysokiej wytrzymałości zaobserwowano również w innych pracach o charakterze badawczym [15, 63, 107]. Współpraca zbrojenia i betonu była bardzo dobra, nawet przy znacznych odkształceniach w zbrojeniu rozciąganym rzędu kilkudziesięciu promili. Ujawniła się ponadto tendencja do powstawania rys zbiorczych w poziomie zbrojenia dzielących się na kilka o mniejszym rozwarciu.

Właściwości materiałów konstrukcyjnych ustalone doświadczalnie przez Kamińską [55] określają następujące parametry modeli konstytutywnych podane w kolejności dla belek BP-1a, BP-1b, BP-2a, BP-2b:

BETON WYSOKIEJ WYTRZYMAŁOŚCI

- wytrzymałość na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia f_c = 81,2 MPa, 72,8 MPa, 78,8 MPa, 73,3 MPa,
- moduł sprężystości E_c = 35300 MPa, 34000 MPa, 37000 MPa, 35800 MPa,
- wytrzymałość na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia f_t = 5,23 MPa, 4,73 MPa, 4,57 MPa, 5,06 MPa,
- współczynnik Poissona ν_c = 0,15,
- gęstość betonu ρ_c = 2600 kg/m^3,
- graniczne odkształcenia w fazie wzmocnienia sprężysto-plastycznego ε_{c1} = 6 ‰,
- graniczne odkształcenia w fazie osłabienia ε_{cu} = 12 ‰,
- parametr nośności na ścinanie dla rozwarcia rys β_t = 0,5,
- parametr nośności na ścinanie dla zamknięcia się rys β_c = 0,99.

STAL ZBROJENIOWA

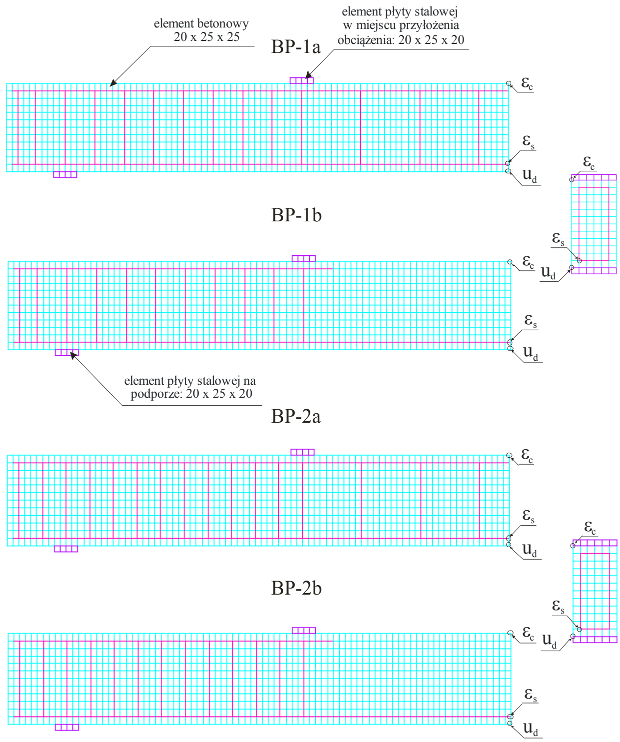
- moduł sprężystości dla ϕ 16 ze stali A-III E_s = 196 GPa, dla ϕ 10 ze stali A-III E_S = 194 GPa, dla ϕ 6 ze stali A-II E_s = 201 GPa,
- granica plastyczności dla ϕ 16 ze stali A-III f_y = 437 MPa, dla ϕ 10 ze stali A-III f_y = 420 MPa, dla ϕ 6 ze stali A-II f_y = 353 MPa,
- wytrzymałość stali na rozciąganie i ściskanie dla ϕ 16 ze stali A-III f_{st} = 713 MPa, dla ϕ 10 ze stali A-III f_{st} = 624 MPa, dla ϕ 6 ze stali A-II f_{st} = 466 MPa,
- graniczne odkształcenia w zakresie plastyczności dla ϕ 16 ze stali A-III ε_{su} = 106 ‰, dla ϕ 10 ze stali A-III ε_{su} = 116 ‰, dla ϕ 6 ze stali A-II ε_{su} = 75 ‰,
- moduł odkształcenia plastycznego dla ϕ 16 ze stali A-III E_T = 2659,7 MPa, dla ϕ 10 ze stali A-III E_T = 1792,1 MPa, dla ϕ 6 ze stali A-II E_T = 1542,8 MPa,

- współczynnik Poissona $\nu_s = 0{,}3$,
- gęstość stali $\rho_s = 7800$ kg/m^3.

STAL PŁYT PODPOROWYCH I PŁYT PRZEKAZUJĄCYCH OBCIĄŻENIE

- moduł sprężystości $E_s = 210$ GPa,
- współczynnik Poissona $\nu_s = 0{,}3$,
- gęstość stali $\rho_s = 7800$ kg/m^3.

Uwzględniając podłużną symetrię elementu, modelowano ½ belki o długości 1700 mm, szerokości 150 mm i wysokości 300 mm. Na Rys. 4.2 przedstawiono podział belek BP-1a, BP-1b, BP-2a, BP-2b na elementy skończone z zaznaczonymi punktami obserwacji zmian przemieszczenia i odkształcenia. Na rysunku wymiary elementów skończonych są podane w milimetrach w następującej kolejności: długość, szerokość i wysokość, usytuowanych odpowiednio w kierunku długości, szerokości i wysokości belki.



Rys. 4.2. Podział belek BP-1a, BP-1b, BP-2a, BP-2b na elementy skończone z oznaczonymi punktami obserwacji zmian przemieszczenia i odkształcenia.

W dyskretyzowanym modelu konstrukcji zastosowano przestrzenne, sześciościenne elementy o ośmiu narożnych węzłach i trzech stopniach swobody w każdym z nich: 6120 elementów dla matrycy betonowej i po 24 elementy dla płyty stalowej przekazującej obciążenie oraz płyty stalowej podporowej. W opisie stali zbrojeniowej w belkach oznaczonych symbolem **a** zastosowano dwuwęzłowe elementy prętowe z trzema stopniami swobody w każdym z węzłów: po 84 elementy dla pojedynczego pręta zbrojenia głównego i montażowego oraz po 28 elementów dla pojedynczego strzemiona. Natomiast w belkach oznaczonych symbolem **b** dla każdego pręta zbrojenia montażowego zastosowano po 54 dwuwęzłowe elementy.

4.3. Wyniki doświadczeń numerycznych belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości

4.3.1. Cel doświadczeń numerycznych

Celem niniejszej części pracy jest analiza stanu nośności i wytężenia belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcenia. W numerycznych modelach przestrzennych zastosowano wymiary elementów oraz właściwości materiałów jak dla eksperymentalnych wolnopodpartych belek prostokątnych BP-1a, BP-1b, BP-2a, BP-2b opisanych w pracy Kamińskiej [55].

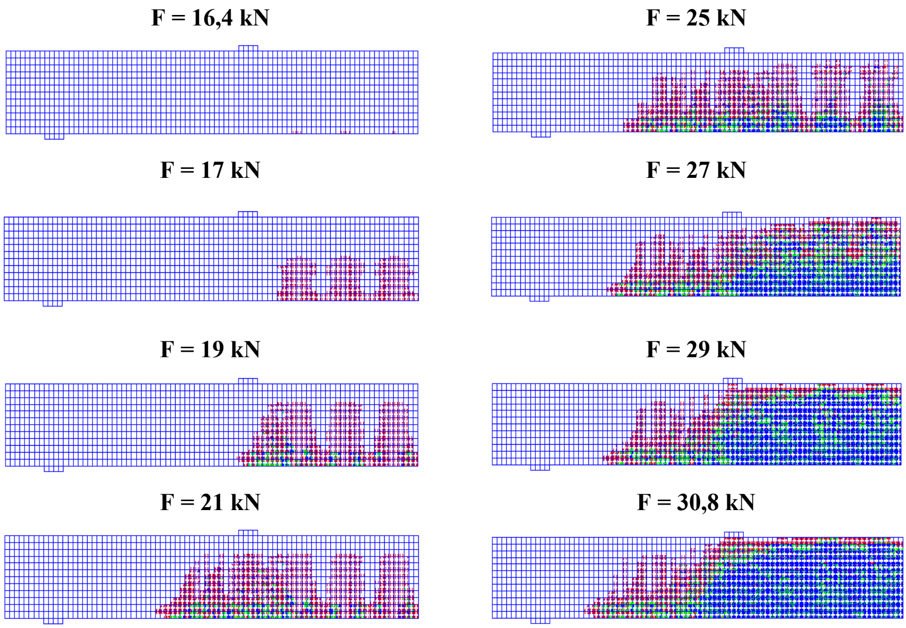
Wszystkie elementy wykonano z betonu o wytrzymałości f_c = 70-80 MPa. W tym rozdziale własne wyniki numeryczne są weryfikowane poprzez ich porównanie z wynikami doświadczalnymi [55]. Porównania otrzymanych wyników stanowią podstawę sprawdzenia poprawności przyjętych założeń i modeli odkształcenia betonu i stali w rozwiązaniach numerycznych.

Obliczenia numeryczne belek prostokątnych z betonu wysokiej wytrzymałości o niskim stopniu zbrojenia równym ok. 0,4 % (BP-1a, BP-1b) i wysokim stopniu zbrojenia równym ok. 1,5 % (BP-2a, BP-2b) wykonano przy wykorzystaniu quasi newtonowskich przyrostowo-iteracyjnych metod rozwiązywania równań nieliniowych: z ustalaniem spadku adaptacyjnego i długości łuku. Metody długości łuku dotychczas nie były weryfikowane dla przestrzennych modeli elementów żelbetowych przy uwzględnieniu osłabienia odkształceniowego betonu o wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu i rozciąganiu. W wyniku zastosowania tej metody do teoretycznego rozwiązywania nieliniowych zagadnień można uzyskać kompletne rozwiązanie numeryczne w postaci ścieżki obciążenie-ugięcie z lokalnym osłabieniem w chwili powstania pierwszych rys i globalnym zniszczeniem elementu konstrukcyjnego.

4.3.2. Rozwiązanie belki wzmocnionej o niskim stopniu zbrojenia metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym

4.3.2.1. Analiza stanu zarysowania

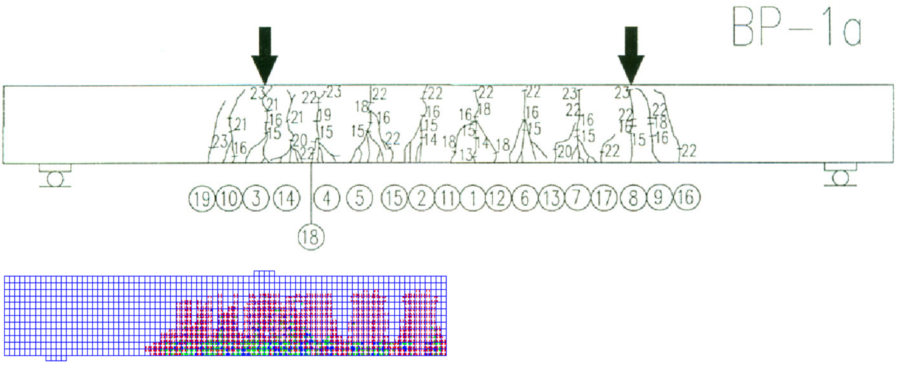
Na Rys. 4.3 prezentowane są mapy rys rozmytych otrzymane dla różnych poziomów obciążenia. Prostopadłe rysy od zginania propagują się w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 19 kN. W miarę jego dalszego przyrostu obszar zarysowany zwiększa się poziomo ku podporze. Znaczny wzrost zarysowania belki obserwuje się dla obciążenia 25 kN po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. Późniejszy rozwój zarysowania belki żelbetowej aż do chwili zniszczenia jest widoczny w strefie oddziaływania stałego momentu i w strefie przypodporowej.



Rys. 4.3. Mapy rys rozmytych dla różnych poziomów obciążenia.

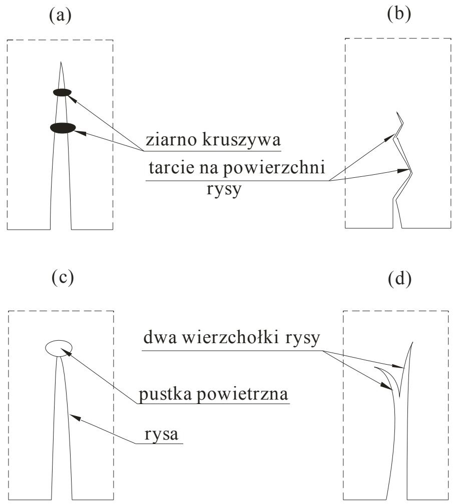
W doświadczeniu Kamińskiej [55] przy bardzo dużych ugięciach w połowie rozpiętości belki BP-1a równych ok. 200 mm zostały wyczerpane możliwości stanowiska badawczego. Natomiast w rozwiązaniu numerycznym zarejestrowano nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń u_d w środku belki (Rys. 4.2), będące objawem jej zniszczenia, dla obciążenia F = 30,8 kN.

Na Rys. 4.4 przedstawiono zestawienie obrazu rzeczywistego zarysowania dla całej belki BP-1a z numerycznym obrazem rys rozmytych dla lewej połowy belki przy tym samym poziomie obciążenia $F = 23$ kN. Otrzymane wyniki numeryczne obszarów zarysowanych są jakościowo zgodne, co do usytuowania, kierunku i koncentracji z wynikami doświadczalnymi, przy czym zaobserwowano nieznacznie większe obszary rys w kierunku podpory w przypadku wyników numerycznych. Zarówno w belkach modelowych, jak i doświadczalnych o niskim stopniu zbrojenia BP-1a na odcinku czystego zginania układ głównych rys dokładnie pokrywa się z układem strzemion. Ponadto uzyskane numerycznie obrazy rys rozmytych potwierdzają tendencję o kształtowaniu się rys zbiorczych w elementach z betonu o wysokiej wytrzymałości, zaobserwowaną również we wcześniej cytowanych pracach.



Rys. 4.4. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-1a dla siły F = 23 kN.

W poprzednim rozdziale wykazano, że mikrorysy są ogólną cechą betonu i ich obecność nie jest szkodliwa w obszarze naprężeń sprężystych. Niemniej jednak występowanie mikrozarysowania w belkach eksperymentalnych może być niewątpliwie główną przyczyną większej sztywności belek numerycznych. Z kolei na Rys. 4.5 zilustrowano różne korzystne mechanizmy wzmocnienia zarysowanej konstrukcji z betonu, blokujące i hamujące proces powstania rys, dokładnie opisane przez Shaha i in. [93]. Na Rys. 4.5a przedstawiono procesy blokujące rozwój rysy w wyniku kontaktu z ziarnem kruszywa. Natomiast na Rys. 4.5b pokazano wzajemnie styczne powierzchnie rysy, które mogą przenosić obciążenie w wyniku tarcia. Na Rys. 4.5c jest przedstawiona pustka powietrzna usytuowana w wierzchołku rysy, która stanowi naturalną przeszkodę do dalszego jej rozwoju. W końcu na Rys. 4.5d graficznie zilustrowano mechanizm rozgałęziania się rysy wywołany niejednorodną strukturą betonu, w którym utworzenie drugiej gałęzi rysy pochłania pewną dodatkową porcję energii. Pogłębione badanie takich efektów wymaga dalszego rozwinięcia poziomu konstytutywnego modelowania zachowania materiału matrycy betonowej.



Rys. 4.5. Mechanizmy wzmocnienia matrycy betonowej w rysie: (a) blokowanie ziaren kruszywa, (b) tarcie na powierzchni rysy, (c) wierzchołek rysy wygładzony przez pustkę powietrzną, (d) rozgałęzienie rysy, według Shaha i in. [93].

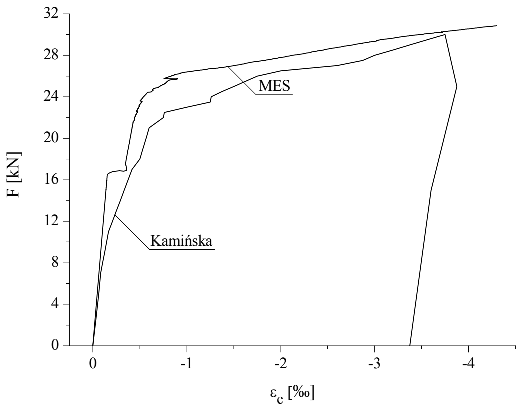
4.3.2.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

Do obserwacji zmian odkształcenia betonu w zależności od obciążenia przyjęto punkt na górnej krawędzi w przekroju środkowym belki BP-1a, natomiast do rejestracji zmian odkształcenia stali w zależności od obciążenia przyjęto punkt w poziomie pręta podłużnego w strefie rozciąganej w przekroju środkowym belki, Rys. 4.2.

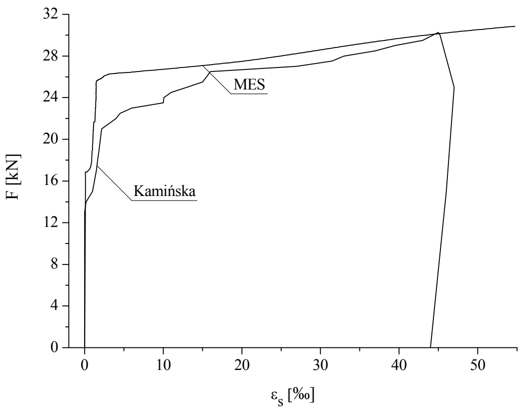
Na Rys. 4.6 przedstawiony jest rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku doświadczalnej belki BP-1a i w jej modelu numerycznym.

Z kolei na Rys. 4.7 prezentowane są wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia F, w środku eksperymentalnej belki BP-1a i w jej modelu numerycznym. W przypadku obu krzywych doświadczalnych przedstawiono gałąź odciążenia elementu zarejestrowaną w chwili wyczerpania możliwości jego dalszego odkształcania.

Wykres obciążenie-odkształcenie stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzuje się zgodnym przebiegiem z krzywą eksperymentalną. W obszarze zachowania liniowo-sprężystego odkształcenia pręta podłużnego określone numerycznie są prawie identyczne z pomierzonymi doświadczalnie. Niezgodności pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi dla betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego obserwuje się w fazie sprężysto-plastycznej pracy belki po zarysowaniu betonu.

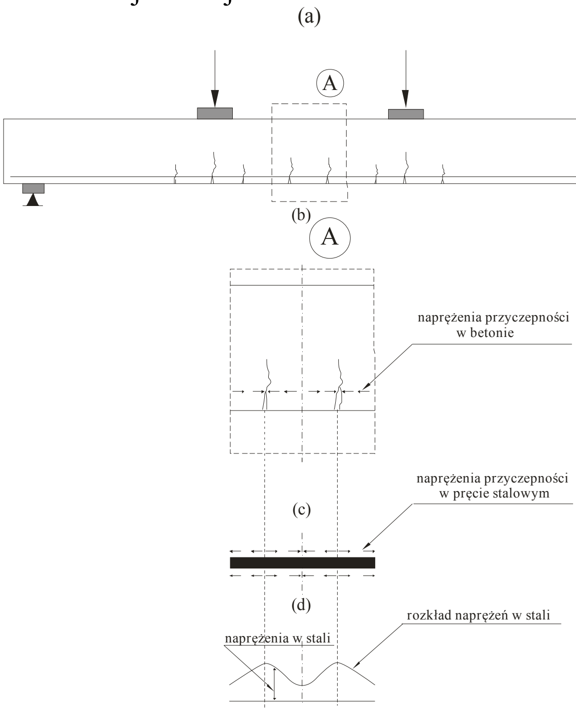


Rys. 4.6. Porównanie rozwoju odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku belki.



Rys. 4.7. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

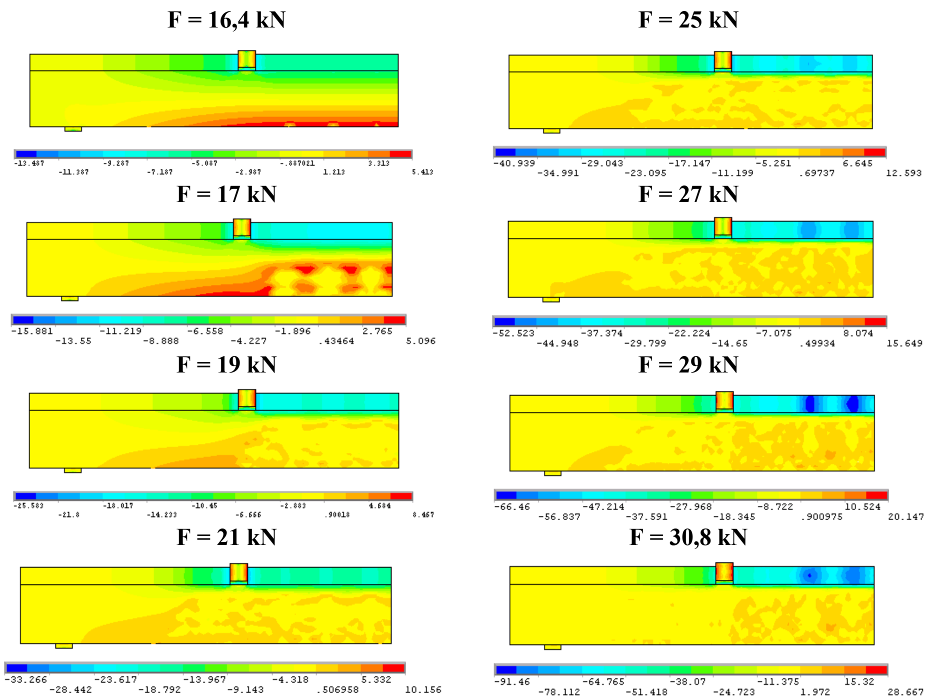
Wyższe wartości odkształcenia w modelu belki w skończonym elemencie prętowym po zarysowaniu betonu można wytłumaczyć na przykładzie typowego rozkładu naprężeń podczas czteropunktowego zginania belki żelbetowej przedstawionego na Rys. 4.8. Według Raya [89] dla pewnego poziomu wytężenia w betonie powstaną rysy, gdyż nie przeniesie on naprężeń rozciągających, Rys. 4.8a. Na długości pomiędzy rysami beton włączy się do współpracy ze stalą zbrojeniową i częściowo przeniesie naprężenia rozciągające działające w styku na długości połączenia, Rys. 4.8b. Zredukowana tym samym zostanie wartość siły w pręcie, co przedstawiono w postaci rozkładu naprężeń na długości zbrojenia na Rys. 4.8d. Dlatego też odkształcenia uzyskane z analiz metodą elementów skończonych mogą być wyższe od odkształceń pomierzonych doświadczalnie. W analogiczny sposób można wyjaśnić różnicę pomiędzy obliczoną i eksperymentalną wartością obciążenia w chwili uplastycznienia stali zbrojeniowej.



Rys. 4.8. Rozkład naprężeń w belkach żelbetowych: (a) typowy obraz rys, (b) wycinek belki, (c) naprężenia przyczepności w pręcie, (d) rozkład naprężeń w stali [89].

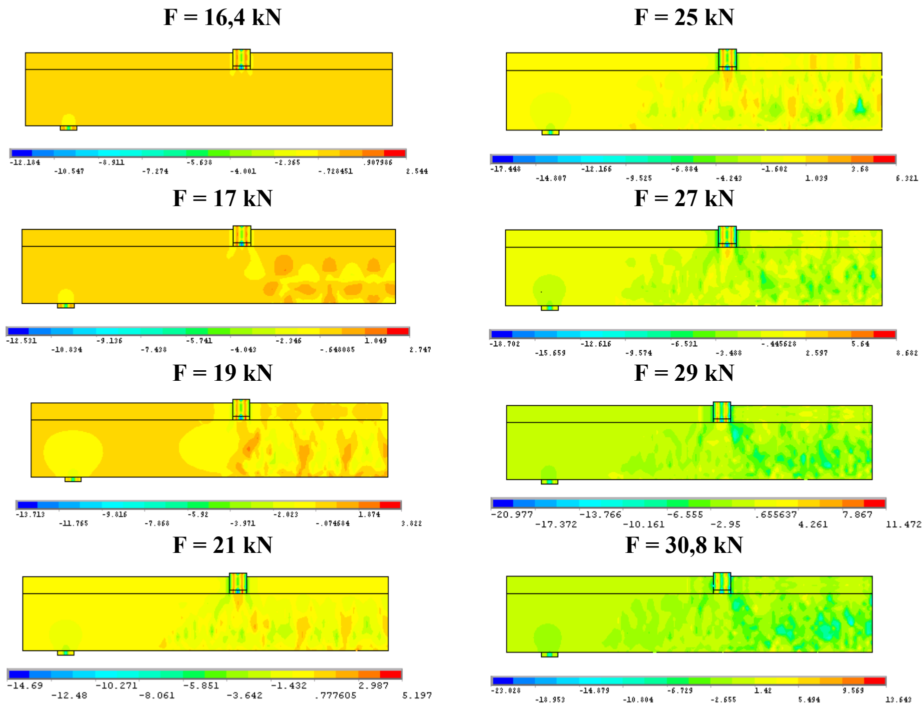
Na następnych rysunkach przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ oraz naprężeń stycznych $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ z uwagi na symetrie elementu i obciążenia tylko dla lewej połowy analizowanej belki przy różnych poziomach obciążenia zewnętrznego F w celu zobrazowania rozwoju stref niesprężystego zachowania się betonu w procesie obciążenia. Wszystkie belki modelowano w jednostkach układu SI o wymiarach zgodnych z wymiarami belek eksperymentalnych. Zilustrowane na rozkładach wartości naprężeń normalnych i stycznych wyrażono w MPa.

Na Rys. 4.9 przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_x dla lewej połowy belki. Poniżej obciążenia F = 16,4 kN obserwuje się rozkład naprężeń charakterystyczny w zakresie sprężystej pracy belki. Dla poziomu obciążenia F = 16,4 kN widoczne są poniżej osi obojętnej i obszaru uplastycznienia betonu w strefie oddziaływania stałego momentu trzy niewielkie obszary betonu zarysowanego. Ich lokalizacja odpowiada konstrukcyjnym rozstawom strzemion. Po wzroście obciążenia do $F = 17$ kN znacząco zwiększa się zarówno obszar zarysowania jak i obszar uplastycznienia betonu rozciąganego. Pomiędzy obszarami rys rozmytych wyraźnie widoczne są zaburzenia w rozkładzie naprężeń. Jednocześnie ze wzrostem obciążenia można zauważyć zbliżanie osi obojętnej do skrajnych włókien ściskanych. Przy poziomie obciążenia $F = 19$ kN obserwuje się zmniejszenie obszaru uplastycznienia betonu rozciąganego. Charakterystyczny dla wykresu jest pofalowany przebieg osi obojętnej i nieregularne obszary uplastycznienia betonu rozciąganego. Przemieszczanie się osi obojętnej ku górze w III fazie pracy belki o niskim stopniu zbrojenia równym ok. 0,4 % znajduje pełne potwierdzenie w doświadczeniach. Do poziomu obciążenia $F = 25$ kN widoczny jest rozwój zarysowania betonu w kierunku podpory. Z kolei dla obciążenia $F = 27$ kN obserwuje się na odcinku czystego zginania stopniowy rozwój obszaru zarysowanego betonu ku górze. Widoczny jest również dalszy rozwój procesów uplastycznienia betonu ściskanego w strefie ściskanej oddziaływania stałego momentu. Dla poziomu obciążenia $F = 30{,}8$ kN następuje przekroczenie poziomu nośności belki i element ulega lokalnemu zniszczeniu poprzez zmiażdżenie betonu w strefie ściskanej przekroju.

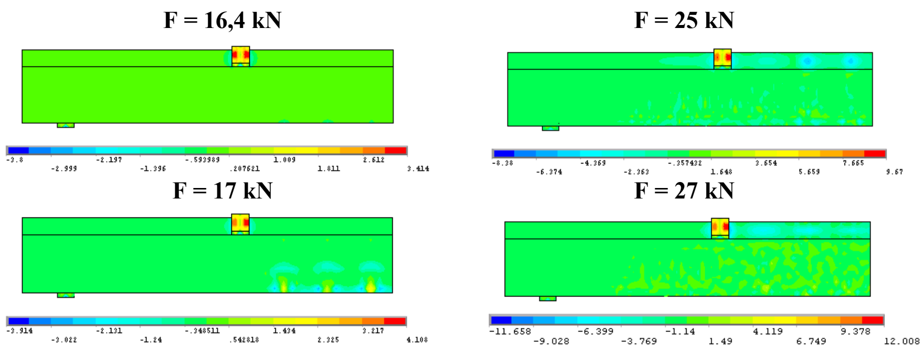


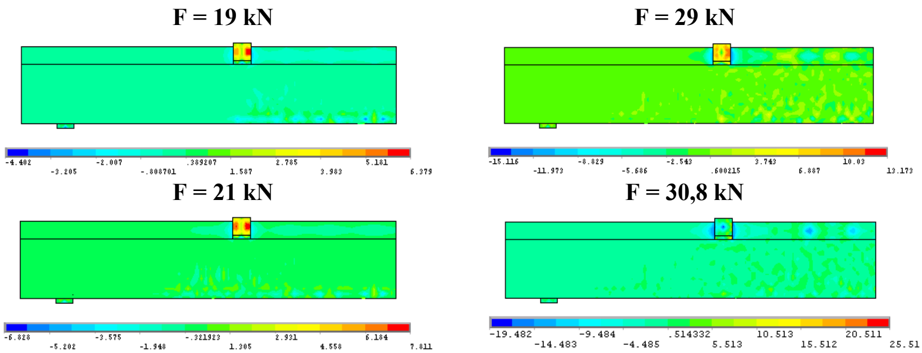
Rys. 4.9. Rozkład naprężeń normalnych σ_x dla różnych poziomów obciążenia.

Na Rys. 4.10 i 4.11 przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_y i σ_z dla połowy elementu. Należy zaznaczyć, że rozwój naprężeń w obu kierunkach jest zgodny z obszarem zarysowanym i gwałtownie wzrasta po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. Niewielkie wartości naprężeń ściskających i rozciągających rzędu kilku MPa decydują o przestrzennym zorientowaniu rys w elemencie.



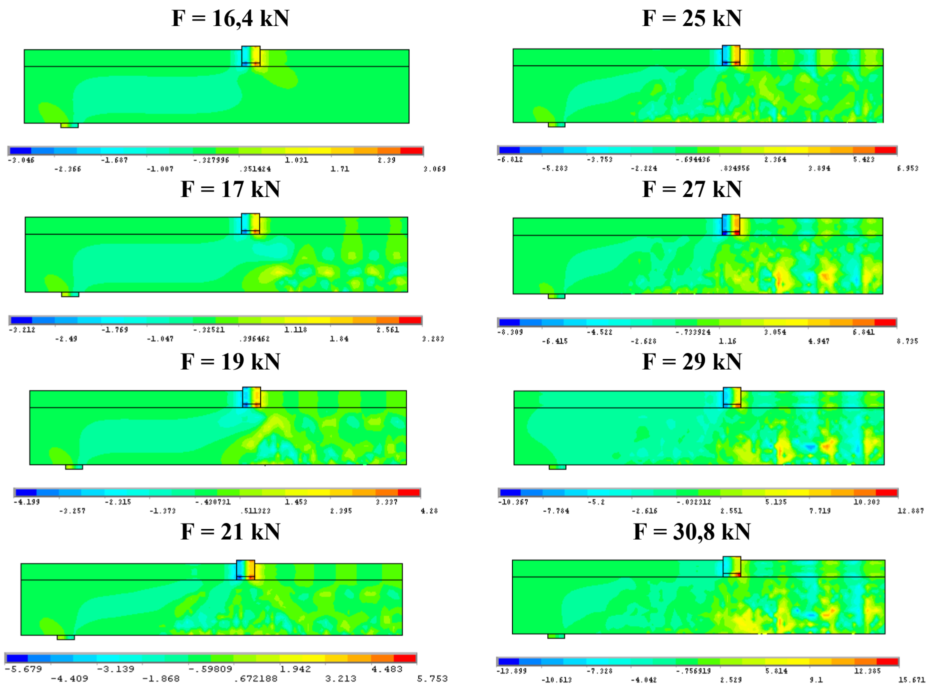
Rys. 4.10. Rozkład naprężeń normalnych σ_y dla różnych poziomów obciążenia.



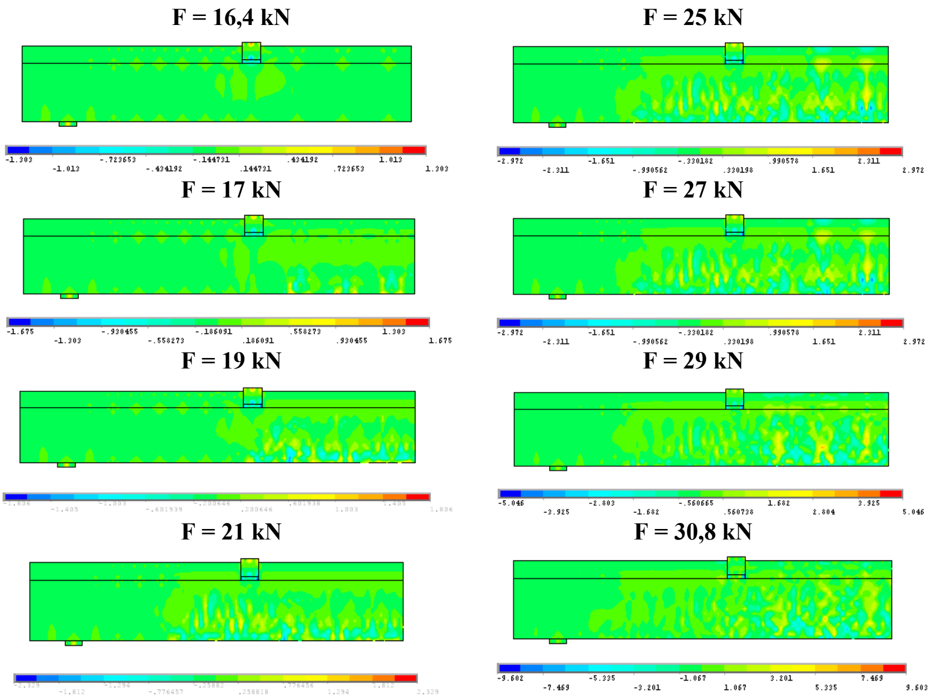


Rys. 4.11. Rozkład naprężeń normalnych σ_z dla różnych poziomów obciążenia.

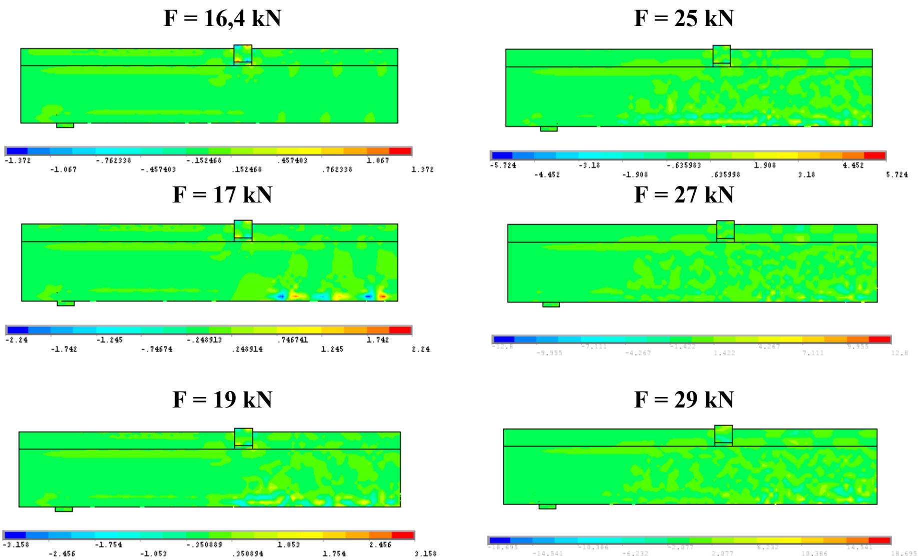
Rozkłady naprężeń stycznych $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ dla połowy belki BP-1a w zależności od poziomu obciążenia F przedstawiono na Rys. 4.12-4.14. Rozwój naprężeń stycznych w trzech płaszczyznach prostopadłych jest zgodny z obszarem zarysowanym.

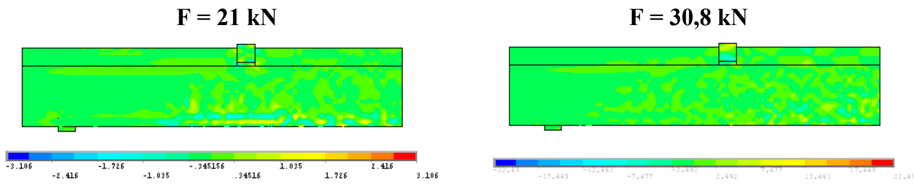


Rys. 4.12. Rozkład naprężeń stycznych σ_{xy} dla różnych poziomów obciążenia.



Rys. 4.13. Rozkład naprężeń stycznych σ_{yz} dla różnych poziomów obciążenia.



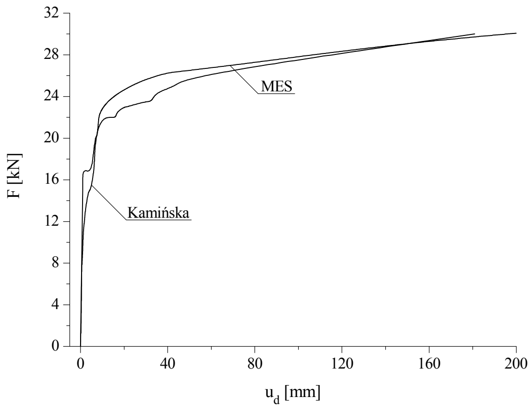


Rys. 4.14. Rozkład naprężeń stycznych σ_{xz} dla różnych poziomów obciążenia.

4.3.2.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Na Rys. 4.15 zilustrowano porównanie nieliniowych zależności obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki otrzymanych w analizie numerycznej i doświadczeniu.

W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu modelowa belka charakteryzuje się prawie taką samą sztywnością jak belka eksperymentalna. Drobne różnice dotyczą wartości obciążenia rysującego i fazy powstania uplastycznienia w stali zbrojeniowej. Na wykresie obciążenie-przemieszczenie faza uplastycznienia zbrojenia opisana jest standardowo, poprzez nagłe zmniejszenie sztywności belki. Otrzymane rezultaty są jakościowo zgodne z wynikami eksperymentów przedstawionymi w pracach Kamińskiej [55, 56].

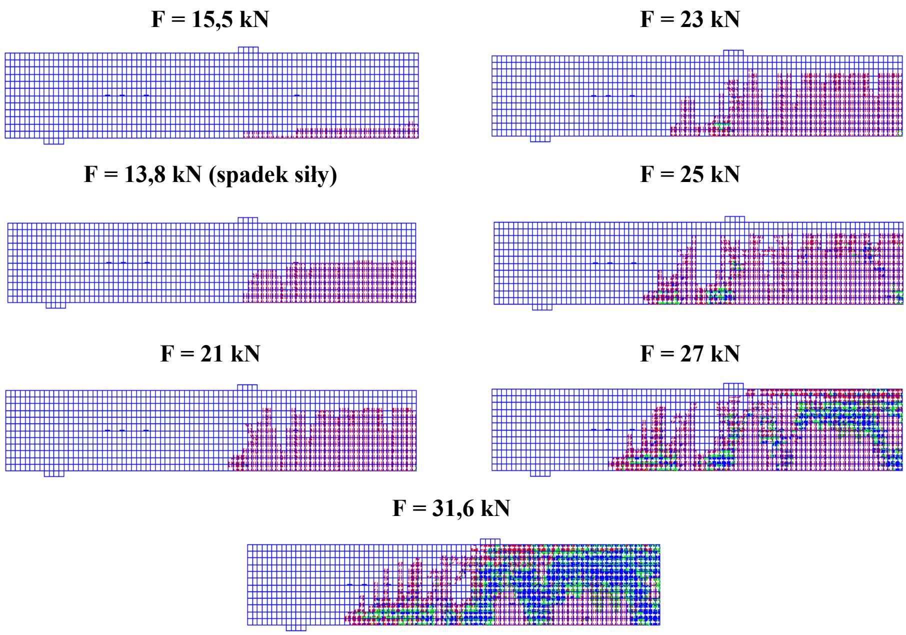


Rys. 4.15. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

4.3.3. Rozwiązanie belki wzmocnionej o niskim stopniu zbrojenia metodą długości łuku Crisfielda

4.3.3.1. Analiza stanu zarysowania

Obrazy rys rozmytych otrzymane dla różnych poziomów obciążenia przedstawiono na Rys. 4.16. Pierwsze rysy powstają na odcinku oddziaływania stałego momentu dla obciążenia rysującego F_{cr} = 15,5 kN, a więc nieco później niż w przypadku zarejestrowanej doświadczalnie wartości obciążenia rysującego równej F_{cr} = 15 kN. Na początku rysy prostopadłe od zginania propagują się w środku belki w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 21 kN, tj. nieco wolniej niż w przypadku wyników numerycznych zaprezentowanych w rozdziale 4.3.2.1 i otrzymanych dla tej samej belki rozwiązanej metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym. W miarę dalszego przyrostu obciążenia obszar zarysowany zwiększa się poziomo w kierunku podpory. Znaczny wzrost zarysowania belki obserwuje się dla obciążenia 25 kN po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. W fazie uplastycznienia stali zbrojeniowej obserwuje się dalszy rozwój rys prostopadłych i rys od miażdżenia w strefie czystego zginania oraz rys ukośnych w strefie ścinania belki żelbetowej. W końcowych etapach obciążenia począwszy od 27 kN aż do chwili zniszczenia widoczne jest spotęgowanie procesów degradacji w strefie czystego zginania, polegające na pojawieniu się nowych rys w płaszczyznach prostopadłych dotychczas niezarysowanych, którym równocześnie towarzyszy w przybliżeniu stały obszar rys w strefie przypodporowej.

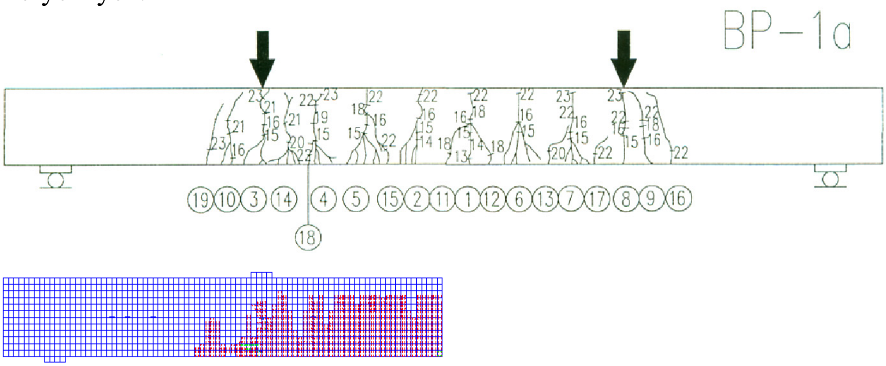


Rys. 4.16. Mapy rys rozmytych dla różnych poziomów obciążenia.

W doświadczeniu Kamińskiej [55] nie zaobserwowano zniszczenia belki, gdyż uniemożliwiły je zbyt duże ugięcia w stosunku do możliwości technicznych stanowiska badawczego, osiągające 200 mm w połowie elementu.

W numerycznym rozwiązaniu rejestrowano nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń u_d w środku belki BP-1a (Rys. 4.2), świadczące o jej zniszczeniu, dla obciążenia $F = 29$ kN.

Na Rys. 4.17 zaprezentowano zestawienie obrazu rzeczywistego zarysowania dla całej belki BP-1a z numerycznym obrazem rys rozmytych dla jej lewej połowy przy tym samym poziomie obciążenia $F = 23$ kN. Podobnie jak w poprzednim rozwiązaniu widoczna jest bardzo dobra zgodność wyników doświadczalnych i numerycznych. Numerycznie obrazy rys rozmytych uzyskane przy wykorzystaniu metody długości łuku Crisfielda najlepiej odzwierciedlają rzeczywisty obraz zarysowania. Niedokładności w obszarach rys, związane z ich znacznym zagęszczeniem, można prawdopodobnie wyeliminować poprzez redukcję minimalnego kroku przyrostu obciążenia, co równocześnie spowoduje znaczne wydłużenie czasu trwania obliczeń numerycznych.



Rys. 4.17. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-1a dla siły F = 23 kN.

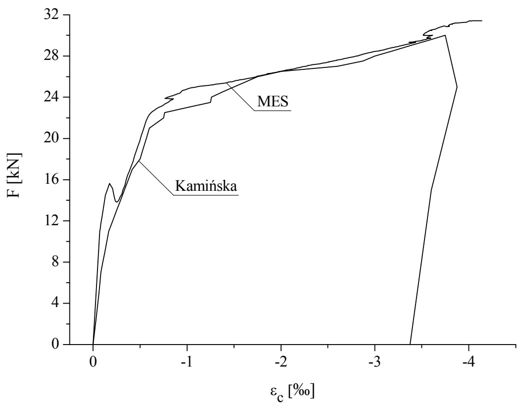
4.3.3.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

Poniżej przedstawiono analizę stanu naprężenia prostokątnej belki żelbetowej w przyrostowym procesie obciążenia.

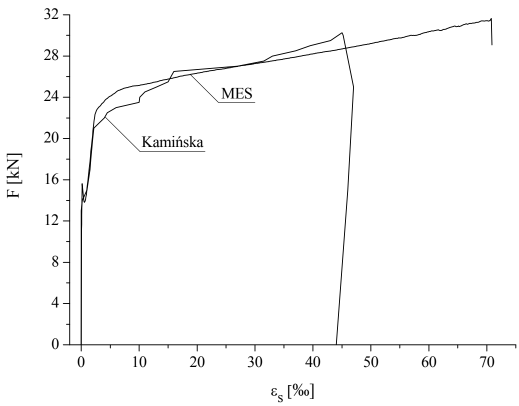
Obserwacje zmienności odkształcenia betonu i stali w zależności od obciążenia przeprowadzono w charakterystycznych punktach zaznaczonych na Rys. 4.2.

Na Rys. 4.18 zaprezentowano wyznaczony doświadczanie i numerycznie rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku elementu. Na Rys. 4.19 przedstawiono wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia F w środku eksperymentalnej belki BP-1a i w jej modelu numerycznym.

Na obydwu wykresach otrzymanych w wyniku obliczeń numerycznych widoczny jest charakterystyczny nieznaczny spadek obciążenia w chwili powstania pierwszych rys. Dla obydwu krzywych doświadczalnych przedstawiono ponadto gałąź odciążenia elementu zarejestrowaną w chwili wyczerpania możliwości dalszego odkształcania elementu.



Rys. 4.18. Porównanie rozwoju odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku belki.

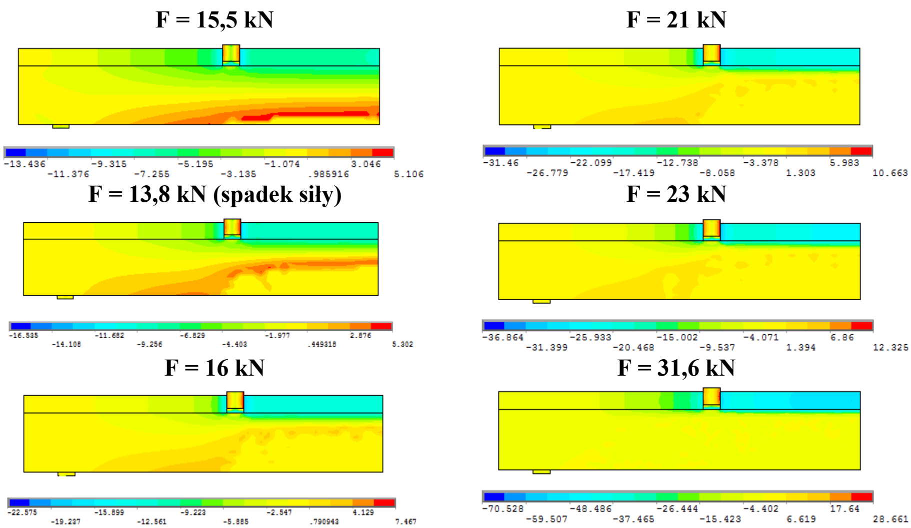


Rys. 4.19. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Wykres obciążenie-odkształcenie stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzuje się zgodnym przebiegiem z krzywą eksperymentalną. W obszarze zachowania liniowo-sprężystego odkształcenia pręta podłużnego określone numerycznie są prawie identyczne z pomierzonymi doświadczalnie. Nieznaczne różnice pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi dla betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego obserwuje się w fazie sprężysto-plastycznej pracy belki po zarysowaniu betonu.

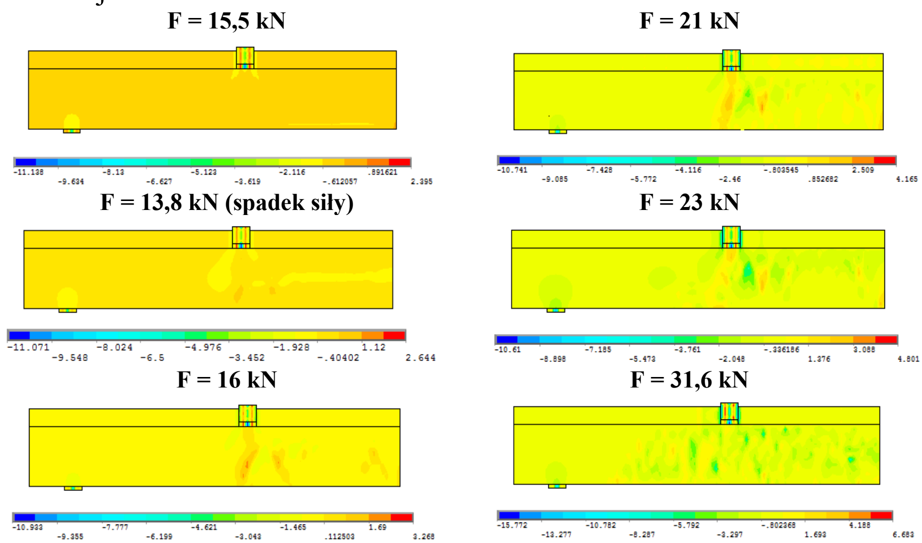
Następna grupa ilustracji dotyczy graficznego zobrazowania rozwoju stref niesprężystego zachowania betonu w procesie statycznego obciążenia. Na

Rys. 4.20-4.23 zaprezentowano zmienność tych stref w zależności od poziomu obciążenia zewnętrznego. Wartości naprężeń normalnych i stycznych są wyrażone w MPa. Dla obciążenia $F = 15{,}5$ kN obserwuje się pojawienie pierwszych procesów plastycznych w betonie w strefie rozciąganej oddziaływania stałego momentu. W tej strefie beton początkowo ulega uplastycznieniu w procesie rozciągania w fazie początkowego zarysowania. W pozostałej części belki beton pracuje w zakresie sprężystym zarówno na ściskanie jak i rozciąganie. Dalszy proces obciążenia powoduje, iż beton w strefie czystego zginania ulega gwałtownym procesom zarysowania, co wywołuje chwilowy spadek siły do wartości $F = 13{,}8$ kN. Do poziomu obciążenia $F = 27$ kN widoczny jest równoczesny rozwój w kierunku podpory zarówno obszaru zarysowanego betonu, jak i obszaru uplastycznienia betonu rozciąganego. Ogólnie wraz ze wzrostem obciążenia można zaobserwować zbliżanie osi obojętnej do skrajnych włókien ściskanych. Kolejnym obszarem, w którym stan naprężenia w betonie wyszedł poza zakres sprężysty jest strefa uplastycznienia betonu ściskanego. Dla obciążenia $F = 27$ kN obserwuje się na odcinku czystego zginania stopniowy rozwój obszaru zarysowanego betonu ku górze. Dalszy proces obciążenia konstrukcji dla $F = 31{,}6$ kN powoduje przejście skrajnych włókien betonu ściskanego do fazy osłabienia materiałowego, przekroczenie poziomu nośności belki i lokalne zniszczenie poprzez zmiażdżenie betonu w strefie ściskanej przekroju na odcinku czystego zginania. W momencie zniszczenia oś obojętna zajmuje położenie bardzo bliskie krawędzi ściskanej. Rysy przecinają tu niemal cały przekrój.

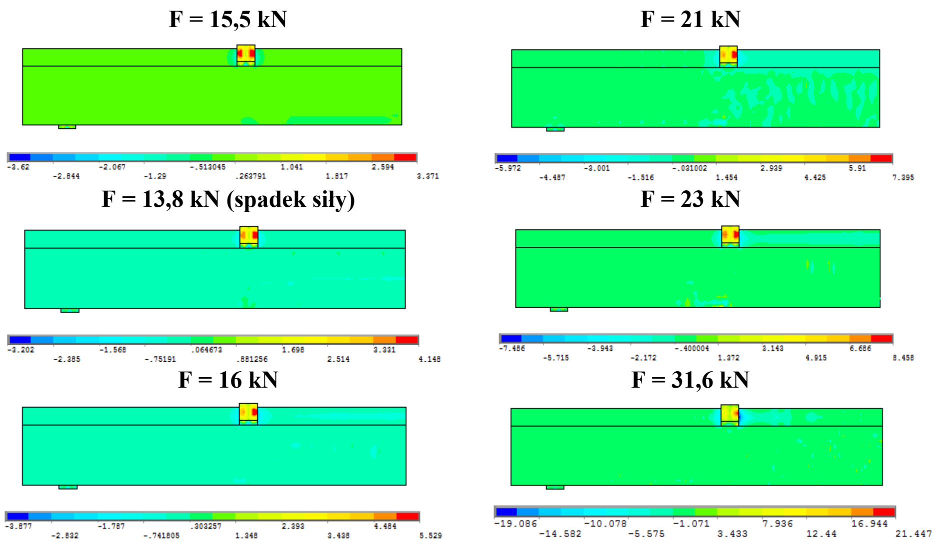


Rys. 4.20. Rozkład naprężeń normalnych σ_x dla różnych poziomów obciążenia.

Charakterystyczne rozkłady naprężeń normalnych σ_y i σ_z przedstawiono dla połowy elementu na Rys. 4.21 i 4.22. Można stwierdzić, że rozwój naprężeń w obu kierunkach jest zgodny z obszarem zarysowanym. Natomiast intensywność naprężeń rośnie po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. Nieznaczne naprężenia w tych kierunkach decydują o przestrzennym zarysowaniu belki żelbetowej.

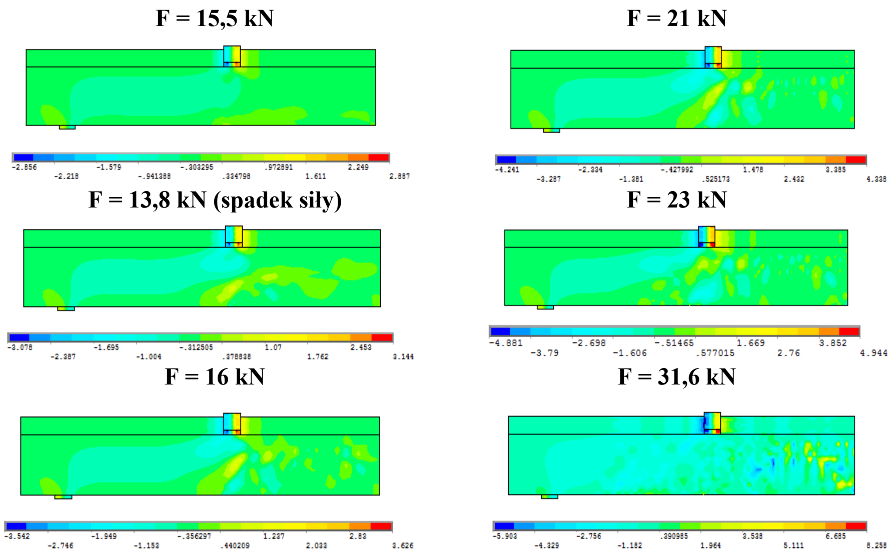


Rys. 4.21. Rozkład naprężeń normalnych σ_y dla różnych poziomów obciążenia.



Rys. 4.22. Rozkład naprężeń normalnych σ_z dla różnych poziomów obciążenia.

Rozkład naprężeń stycznych σ_{xy} dla połowy belki BP-1a dla różnych poziomów obciążenia F przedstawiono na Rys. 4.23. Rozciągające naprężenia normalne σ_x i ściskające naprężenia styczne σ_{xy} wyznaczają ukośny kierunek naprężeń głównych i decydują o powstaniu w płaszczyźnie prostopadłej rys ukośnych w strefach przypodporowych. Zaś rozciągające naprężenia styczne σ_{yz} i σ_{xz} przyczyniają się do rozwoju zarysowania betonu w strefie oddziaływania stałego momentu na odcinku czystego zginania i w poziomie usytuowania zbrojenia podłużnego.

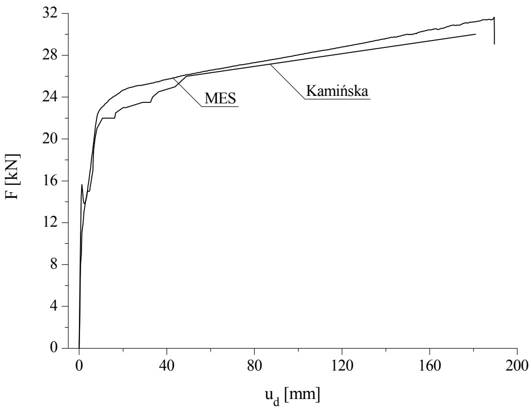


Rys. 4.23. Rozkład naprężeń stycznych σ_{xy} dla różnych poziomów obciążenia.

4.3.3.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Przebieg zależności obciążenie-przemieszczenie punktu centralnego na dolnej krawędzi belki $\left(F - u_d\right)$ zilustrowano na Rys. 4.24. Zmienność tej zależności wynika z założonego modelu zachowania betonu opisującego osłabienie materiału w procesie deformacji i z zastosowania metody numerycznej Crisfielda pozwalającej na uzyskanie kompletnej ścieżki rozwiązania wykazującej lokalne spadki sztywności i globalne osłabienie konstrukcji. Ostatnio przeprowadzane badania belek żelbetowych przez m.in. Ashoura [6], Fabbrocino i Pecce [36, 84], Rashida i Mansura [88] przy wykorzystaniu precyzyjnych urządzeń pomiarowych dowodzą, że skutki pęknięć belki w strefie rozciąganej nie są kompensowane przez sprężyste właściwości stali i plastyczność betonu w strefie ściskanej. W związku z tym na krzywej zależności obciążenie-ugięcie rejestrowane są efekty osłabienia w postaci gwałtownych spadków obciążenia.

W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu belka modelowa charakteryzuje się prawie taką samą sztywnością jak belka eksperymentalna, gdyż w betonie o wysokiej wytrzymałości tworzy się mniej mikrorys, co przejawia się bardziej gwałtownym pękaniem. Przyrost wytrzymałości na rozciąganie jest relatywnie mniejszy, co świadczy o większej kruchości betonu o wysokiej wytrzymałości. Jednak kruchość tych betonów jest ograniczona w konstrukcjach żelbetowych w wyniku bardzo dobrej współpracy betonu ze stalą zbrojeniową. Drobne różnice w wynikach eksperymentalnych i numerycznych dotyczą fazy uplastycznienia stali zbrojeniowej.

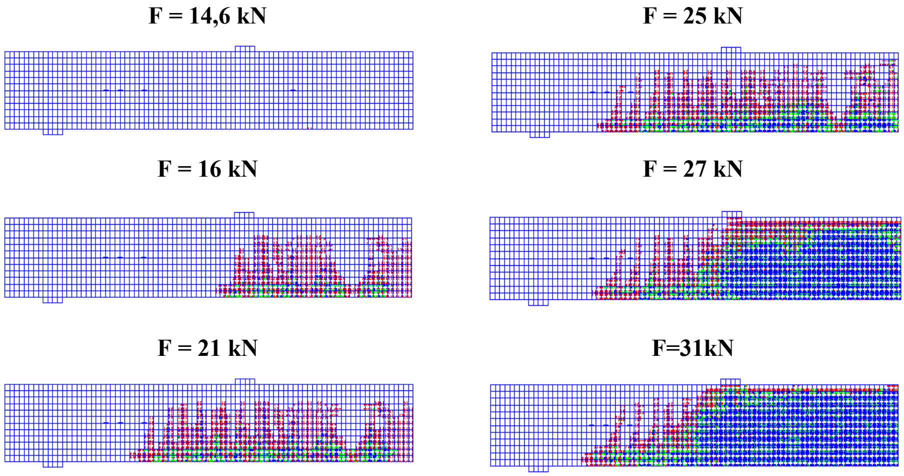


Rys. 4.24. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

4.3.4. Rozwiązanie belki o niskim stopniu zbrojenia metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym

4.3.4.1. Analiza stanu zarysowania

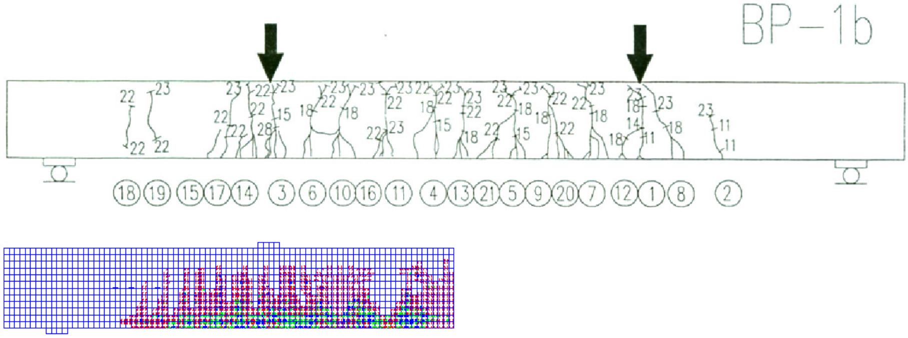
Rys. 4.25 przedstawia mapy rys rozmytych otrzymane dla różnych poziomów obciążenia. Prostopadłe rysy od zginania powstają w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 16 kN. W modelowej belce BP-1b bez zbrojenia strefy ściskanej proces pękania jest szybszy i bardziej gwałtowny niż w przypadku numerycznej belki BP-1a. Zbrojenie w strefie ściskanej rozmieszczone na długości odcinka czystego zginania nie tylko znacznie spowalnia proces zarysowania, ale też łagodzi procesy miażdżenia betonu skrajnych włókien ściskanych na odcinku oddziaływania stałego momentu. W miarę dalszego przyrostu obciążenia do ok. 25 kN obszar zarysowany zwiększa się poziomo ku podporze. Znaczny wzrost zarysowania belki obserwuje się po uplastycznieniu stali zbrojeniowej dla obciążenia 25 kN. Późniejszy rozwój zarysowania aż do chwili zniszczenia jest wyraźnie widoczny w strefach oddziaływania stałego momentu i przypodporowej.



Rys. 4.25. Mapy rys rozmytych dla różnych poziomów obciążenia.

W doświadczeniu Kamińskiej [55] przy bardzo dużych ugięciach równych ok. 200 mm w połowie rozpiętości belki BP-1b, podobnie jak w przypadku belki BP-1a, zostały wyczerpane możliwości stanowiska badawczego i element odciążono. W doświadczeniu numerycznym przyjęto zniszczenie dla obciążenia $F = 31$ kN, gdy w środku belki BP-1b powstały nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń u_d (Rys. 4.2).

Na Rys. 4.26 przedstawiono zestawienie obrazu rzeczywistego zarysowania dla całej belki BP-1b z numerycznym obrazem rys rozmytych dla lewej połowy belki przy tym samym poziomie obciążenia $F = 23$ kN.



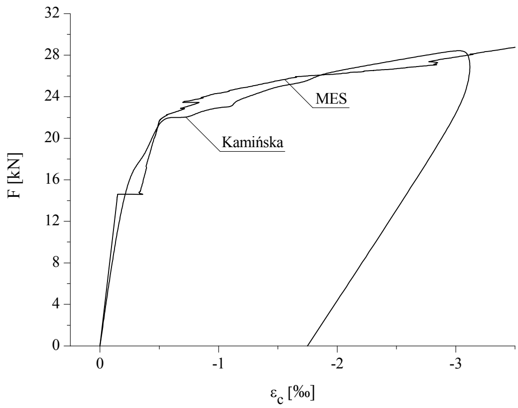
Rys. 4.26. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-1b dla siły F = 23 kN.

Widoczna jest dobra zgodność wyników, przy czym zaobserwowano nieznacznie większe obszary rys w kierunku podpory w przypadku wyników numerycznych. W wyniku braku strzemion w modelowych, jak i doświadczalnych belkach BP-1b o niskim stopniu zbrojenia na odcinku czystego zginania układ rys jest przypadkowy. Ponadto uzyskane numerycznie obrazy rys rozmytych potwierdzają tendencję zaobserwowaną również w badaniach m.in. Bernardi i in. [15] o kształtowaniu się rys grupowych w elementach z betonu o wysokiej wytrzymałości, które praktycznie uniemożliwiają ustalenie średniego rozstawu pomiędzy rysami.

4.3.4.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

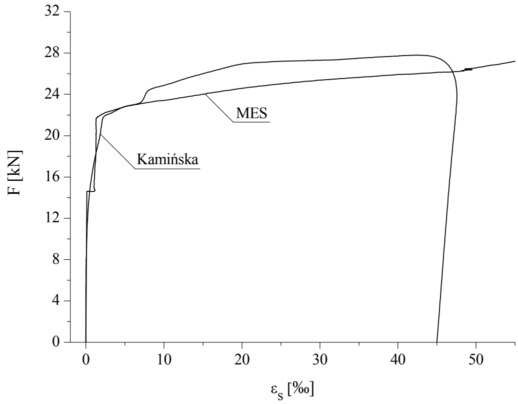
Obserwując zmienność odkształcenia betonu w zależności od obciążenia przyjęto punkt na górnej krawędzi w przekroju środkowym belki BP-1b, natomiast do rejestracji zmian odkształcenia stali w zależności od obciążenia przyjęto punkt w poziomie pręta podłużnego w strefie rozciąganej w przekroju środkowym belki, Rys. 4.2.

Na Rys. 4.27 przedstawiony jest rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku doświadczalnej belki BP-1b i w jej modelu numerycznym. Z kolei Rys. 4.28 prezentuje wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia F w środku eksperymentalnej belki BP-1a i w jej modelu numerycznym. W przypadku obu krzywych doświadczalnych przedstawiono gałąź odciążenia elementu.



Rys. 4.27. Porównanie rozwoju odkształceń w środku belki skrajnych włókien strefy ściskanej betonu.

Wykres obciążenie-odkształcenie stali zbrojeniowej w środku belki BP-1b charakteryzuje się zgodnym przebiegiem z krzywą eksperymentalną. W obszarze zachowania liniowo-sprężystego odkształcenia pręta podłużnego i betonu określone numerycznie są prawie identyczne z pomierzonymi doświadczalnie. Niezgodności pomiędzy wynikami odkształcalności betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego obserwuje się w fazie sprężysto-plastycznej pracy belki po zarysowaniu betonu i uplastycznieniu stali zbrojeniowej.

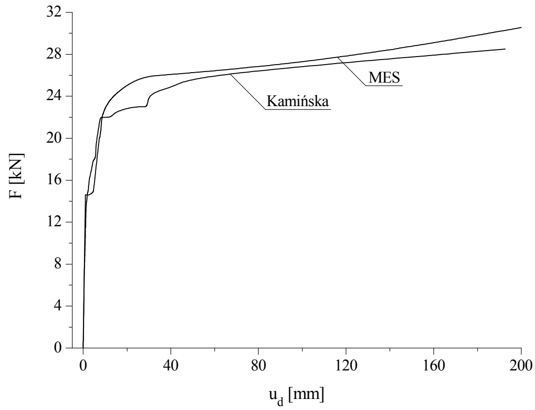


Rys. 4.28. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Na podstawie analiz rozkładów naprężeń normalnych dla lewej połowy belki stwierdzono, że poniżej obciążenia F = 14,6 kN rozkład naprężeń jest charakterystyczny dla zakresu sprężystej pracy belki, a po wzroście obciążenia do F = 25 kN zwiększa się zarówno obszar zarysowania jak i obszar uplastycznienia betonu rozciąganego. Pomiędzy obszarami rys rozmytych zaobserwowano zaburzenia w rozkładzie naprężeń. Jednocześnie ze wzrostem obciążenia zauważono zbliżanie osi obojętnej do skrajnych włókien ściskanych. Charakterystyczny jest wtedy falisty przebieg osi obojętnej i nieregularne obszary uplastycznienia betonu rozciąganego. Przemieszczenie ku górze osi obojętnej w fazie III w belce o niskim stopniu zbrojenia równym ok. 0,4 % znajduje pełne potwierdzenie w doświadczeniach. Do poziomu obciążenia F = 25 kN rozwój zarysowania betonu postępuje w kierunku podpory. Przy obciążeniu F = 27 kN na odcinku czystego zginania obserwuje się stopniowy rozwój obszaru zarysowanego betonu ku górze. Dalszy rozwój procesów uplastycznienia betonu występuje w strefie ściskanej oddziaływania stałego momentu. Dla poziomu obciążenia F = 31 kN nastąpiło przekroczenie poziomu nośności belki i element uległ lokalnemu zniszczeniu poprzez zmiażdżenie betonu w strefie ściskanej przekroju.

4.3.4.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Na Rys. 4.29 porównano nieliniowe zależności obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki otrzymane w analizie numerycznej i doświadczeniu.



Rys. 4.29. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

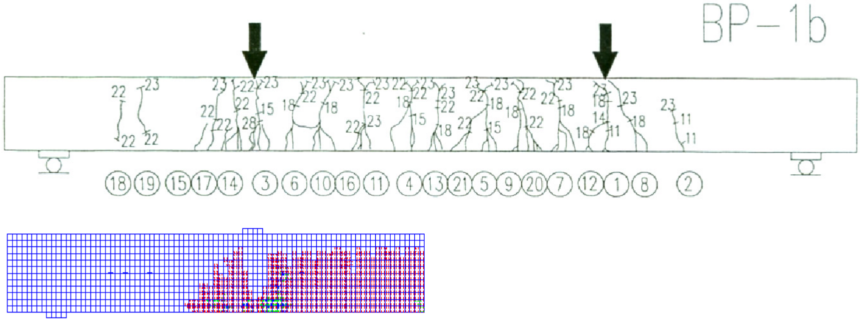
Ugięcie belki eksperymentalnej BP-1b przy maksymalnym obciążeniu F = 28,5 kN stanowiło aż około 1/15 część rozpiętości, a mimo tego zbrojenie w pełni współpracowało z betonem. Natomiast ugięcie belki modelowej BP-1b uzyskane dla maksymalnego obciążenia F = 31 kN stanowi 1/14 część rozpiętości. Otrzymane rezultaty numeryczne są jakościowo zgodne z wynikami eksperymentów przedstawionymi w pracach Kamińskiej [55, 56].

4.3.5. Rozwiązanie belki o niskim stopniu zbrojenia metodą długości łuku Crisfielda

4.3.5.1. Analiza stanu zarysowania

Pierwsze rysy w belce BP-1b powstają na odcinku oddziaływania stałego momentu dla obciążenia rysującego F_{cr} = 14 kN, a więc nieco później niż w przypadku zarejestrowanej doświadczalnie wartości obciążenia rysującego równej F_{cr} = 11 kN. Na początku rysy prostopadłe od zginania propagują się w środku belki w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 21 kN, tj. nieco wolniej niż w przypadku wyników numerycznych uzyskanych metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym dla tej samej belki. Wmiarę dalszego przyrostu obciążenia obszar zarysowany zwiększa się poziomo w kierunku podpory. Znaczny wzrost zarysowania belki obserwuje się dla obciążenia 25 kN po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. W fazie uplastycznienia stali zbrojeniowej obserwuje się dalszy rozwój rys prostopadłych i rys od miażdżenia w strefie czystego zginania oraz rys ukośnych w strefie ścinania belki żelbetowej. W końcowych etapach obciążenia począwszy od 27 kN aż do chwili zniszczenia przy 30,7 kN zaobserwowano spotęgowanie procesów degradacji w strefie czystego zginania polegające na pojawieniu się nowych rys w płaszczyznach prostopadłych dotychczas niezarysowanych, którym równocześnie towarzyszy w przybliżeniu stały obszar rys w strefie przypodporowej. Zniszczenie objawiło się poprzez nieskończenie duże przyrosty przemieszczeń u_d w środku belki BP-1b (Rys. 4.2) dla obciążenia $F = 30{,}7$ kN. W doświadczeniu Kamińskiej [55] belki BP-1b nie doprowadzono do zniszczenia w sensie materiałowym, gdyż uniemożliwiły je zbyt duże ugięcia belki osiągające 200 mm w połowie elementu.

Zestawienie rzeczywistego obrazu zarysowania z numerycznym obrazem rys rozmytych dla belki BP-1b przedstawiono na Rys. 4.30. Widoczna jest bardzo dobra zgodność wyników. Obrazy rys rozmytych uzyskane przy wykorzystaniu metody długości łuku Crisfielda wiernie odzwierciedlają rzeczywisty obraz zarysowania. Pewne niedokładności w obszarach rys można wyeliminować w wyniku redukcji minimalnego kroku przyrostu obciążenia, co z kolei wpływa na wydłużenie czasu trwania obliczeń numerycznych.



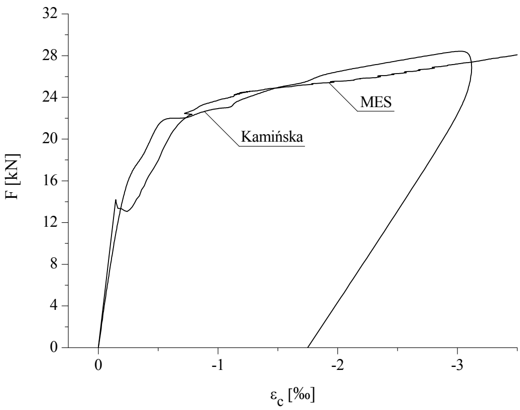
Rys. 4.30. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-1b dla siły F = 23 kN.

4.3.5.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

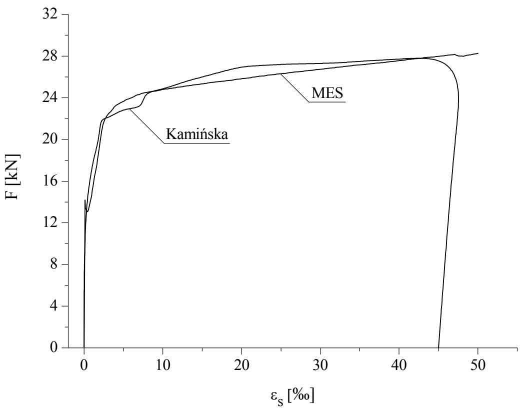
Do obserwacji zmian odkształcenia betonu i stali w zależności od obciążenia przyjęto charakterystyczne punkty oznaczone na Rys. 4.2.

Na Rys. 4.31 porównano zmienność odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w belce doświadczalnej i modelowej BP-1b.

Zaś na Rys. 4.32 prezentowane są wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia w środku eksperymentalnej i modelowej belki BP-1b. Na obydwu wykresach otrzymanych w wyniku obliczeń numerycznych widoczny jest charakterystyczny nieznaczny spadek obciążenia w chwili powstania pierwszych rys.



Rys. 4.31. Porównanie rozwoju odkształceń w środku belki skrajnych włókien strefy ściskanej betonu.

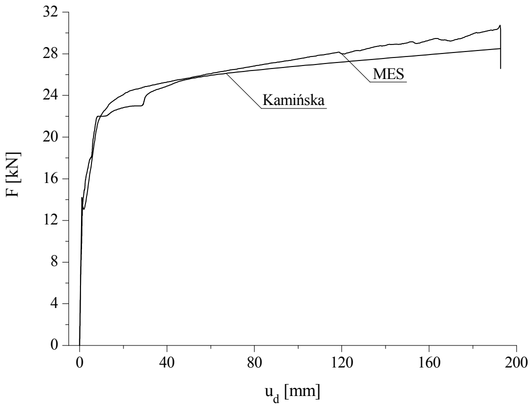


Rys. 4.32. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Przedstawione wykresy obciążenie-odkształcenie w środku belki dla materiałów konstrukcyjnych charakteryzują się zgodnym przebiegiem. W obszarze zachowania liniowo-sprężystego odkształcenia pręta podłużnego określone numerycznie są prawie identyczne z pomierzonymi doświadczalnie. Nieznaczne różnice pomiędzy wynikami dla betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego obserwuje się dopiero w fazie sprężysto-plastycznej pracy belki po zarysowaniu betonu, a następnie po uplastycznieniu zbrojenia.

4.3.5.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Obserwowany na Rys. 4.33 przebieg zmian zależności obciążenie-przemieszczenie punktu centralnego na dolnej krawędzi belki $\left(F - u_d\right)$ ma charakter niemonotoniczny wynikający z założonego modelu zachowania betonu opisującego osłabienie materiału w procesie deformacji i z zastosowania metody numerycznej Crisfielda pozwalającej na uzyskanie kompletnej ścieżki rozwiązania wykazującej lokalne spadki sztywności i globalne osłabienie konstrukcji.

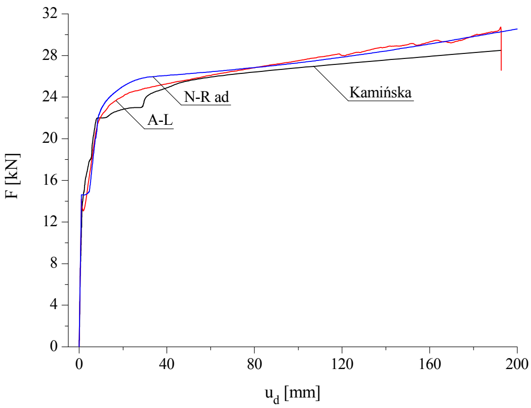


Rys. 4.33. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu modelowa belka charakteryzuje się prawie taką samą sztywnością jak belka eksperymentalna. Przyczyną jest najprawdopodobniej mniejsza ilość mikrorys w betonie o wysokiej wytrzymałości. Drobne różnice w wynikach eksperymentalnych i numerycznych dotyczą fazy po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. Na wykresie obciążenie-przemieszczenie faza uplastycznienia zbrojenia opisana jest przez nagłe zmniejszenie sztywności belki.

Na Rys. 4.34 zestawiono zależności obciążenie-przemieszczenie w środku belki BP-1b otrzymane w wyniku eksperymentu i obliczeń numerycznych przeprowadzonych przy wykorzystaniu dwóch różnych metod rozwiązywania równań nieliniowych.

Zastosowane metody przyrostowo-iteracyjne: zarówno technika ustalania spadku adaptacyjnego (N-R ad – adaptive descent), jak i długości łuku Crisfielda (A-L – arc-length) dają zadowalające wyniki numeryczne. Przy czym tylko metoda długości łuku stwarza możliwość uzyskania kompletnej ścieżki obciążenie-ugięcie z lokalnym i globalnym osłabieniem konstrukcji. Ponadto algorytm ten charakteryzuje duża efektywność, a zmienny krok przyrostu obciążenia i prawidłowo dobrane parametry długości łuku gwarantują znaczne skrócenie czasu obliczeń numerycznych i uzyskanie bardzo dokładnego rozwiązania.



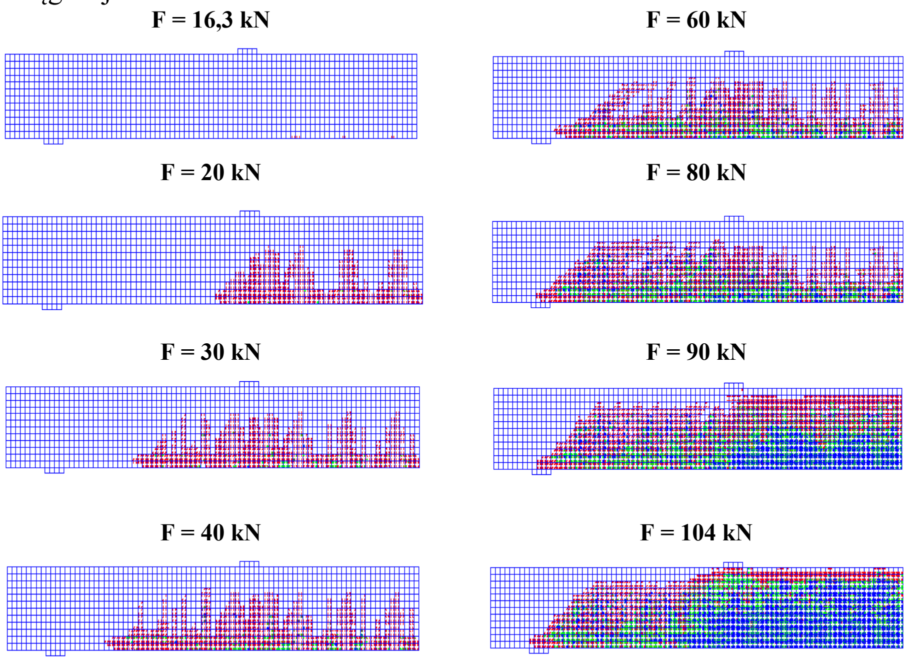
Rys. 4.34. Zestawienie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1b od obciążenia uzyskanych różnymi metodami numerycznymi.

4.3.6. Rozwiązanie belki wzmocnionej o wysokim stopniu zbrojenia metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym

4.3.6.1. Analiza stanu zarysowania

Rys. 4.35 prezentuje mapy rys rozmytych otrzymane dla różnych poziomów obciążenia. Obliczone obciążenie rysujące równe 16,3 kN jest mniejsze od zarejestrowanego doświadczalnie. Powstanie pierwszej rysy w belce eksperymentalnej zauważyć można nieco później, bo dla obciążenia 25 kN. Różnica pomiędzy obciążeniem rysującym obliczonym i doświadczalnym jest znaczna i wynosi około 35 %. Lokalizacja pierwszych rys w rozwiązaniu numerycznym pokrywa się z położeniem strzemion na odcinku czystego zginania. Prostopadłe rysy od zginania propagują się w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 20 kN. W miarę jego dalszego przyrostu obszar zarysowany zwiększa się poziomo ku podporze. Znaczny wzrost zarysowania belki zaobserwowano w chwili powstania rys ukośnych w strefie oddziaływania naprężeń normalnych i stycznych dla obciążenia 60 kN. Uplastycznienie stali zbrojeniowej powstaje dla obciążenia 80 kN, o czym świadczy gwałtowny przyrost przemieszczenia pionowego w środku belki. Późniejszy rozwój zarysowania belki żelbetowej aż do chwili zniszczenia przy obciążeniu równym 104 kN jest intensywny w strefie oddziaływania stałego momentu i w strefie przypodporowej. Zarejestrowano, że począwszy od poziomu obciążenia 90 kN powstają rysy wywołane ściskaniem w obszarach sąsiadujących z punktami obciążenia. W końcowych etapach obciążenia zaobserwowano spotęgowanie procesów degradacji w strefie czystego zginania polegające na pojawieniu się nowych rys w płaszczyznach prostopadłych dotychczas niezarysowanych. W rozwiązaniu numerycznym stan graniczny nośności zarejestrowano dla obciążenia $F_u = 104$ kN. W rozwiązaniu numerycznym stan graniczny nośności zinterpretowano jako stan osiągany dla takiego obciążenia, dla którego jest obserwowany gwałtowny przyrost przemieszczenia przy bardzo małych przyrostach obciążenia ok. 10 N w wyniku czego rozwiązanie numeryczne jest rozbieżne.

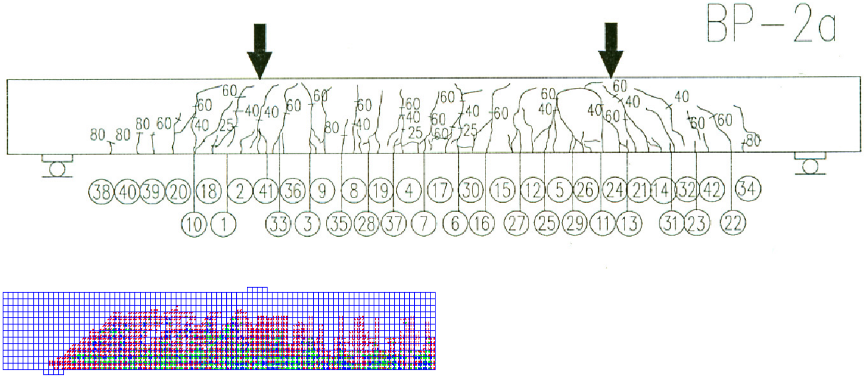
Eksperymentalna belka BP-2a o wyższym stopniu zbrojenia uległa zniszczeniu na skutek zmiażdżenia betonu w strefie ściskanej. Obecność zbrojenia w strefie ściskanej wyraźnie łagodziła przebieg procesu zniszczenia. W belce BP-2a podłużne zbrojenie strefy ściskanej i strzemiona radykalnie ograniczyły zasięg obszaru zniszczenia, zwłaszcza w odniesieniu do strefy rozciąganej.



Rys. 4.35. Mapy rys rozmytych dla różnych poziomów obciążenia.

Na Rys. 4.36 przedstawiono porównanie obrazu rzeczywistego zarysowania dla całej belki BP-2a z obrazem numerycznym rys rozmytych dla lewej połowy belki przy tym samym poziomie obciążenia $F = 80$ kN. Widoczna jest dobra zgodność wyników, szczególnie w obrębie prawej połowy eksperymentalnej belki BP-2a. Zaobserwowano przy tym nieznacznie większe obszary rys w strefie podporowej w przypadku wyników numerycznych. Zarówno w belkach modelowych, jak i doświadczalnych o wyższym stopniu zbrojenia (BP-2a) na odcinku czystego zginania układ głównych rys dokładnie pokrywa się z układem strzemion. Schemat zarysowania jest jakościowo zgodny z obrazem rys zarejestrowanym w badaniach doświadczalnych Kamińskiej [55].

Założenie modelu rys rozmytych w elementach betonowych powoduje powstanie większych obszarów rys niż w przypadku modelu dyskretnego, gdyż w momencie, w którym sztywność zarysowanych skończonych elementów matrycy betonowej jest w przybliżeniu równa zero w skończonych elementach prętowych rozkład naprężeń rozciągających jest różny od rozkładu w belkach rzeczywistych. Siła rozciągająca pręt stalowy jest stała na długości elementu i z tego powodu odkształcenia określone numerycznie są wyższe od odkształceń eksperymentalnych.



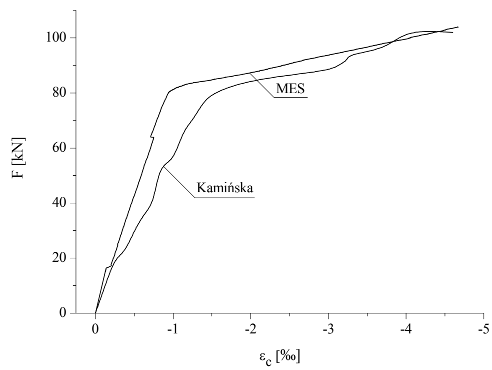
Rys. 4.36. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-2a dla siły F = 80 kN.

4.3.6.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

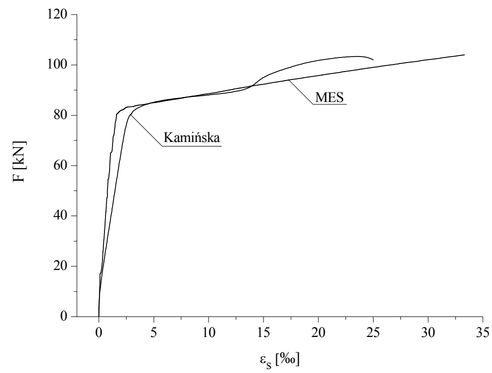
Celem poniższej części pracy jest analiza stanu naprężenia prostokątnej belki żelbetowej w przyrostowym procesie obciążenia.

Do obserwacji zmian odkształcenia betonu w zależności od obciążenia przyjęto punkt na górnej krawędzi w przekroju środkowym belki BP-2a, natomiast do rejestracji zmian odkształcenia stali w zależności od obciążenia przyjęto punkt w poziomie pręta podłużnego w strefie rozciąganej w przekroju środkowym belki, Rys. 4.2.

Na Rys. 4.37 przedstawiony jest rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku modelu numerycznego i doświadczalnej belki BP-2a. Na Rys. 4.38 prezentowane są wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia F w środku modelu numerycznego i eksperymentalnej belki BP-2a. Chociaż wykresy obciążenie-odkształcenie dla betonu i stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzują się ogólnie zgodnym przebiegiem z krzywymi eksperymentalnymi to obserwuje się różnice pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi dla betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego w fazie sprężysto-plastycznej pracy belki po zarysowaniu betonu. Wyraźnie widoczne jest załamanie wykresów związane z uplastycznieniem zbrojenia rozciąganego. Natomiast wzmocnienie zbrojenia rozciąganego sygnalizuje zmiana nachylenia krzywych doświadczalnych dla końcowych etapów obciążenia – w belce eksperymentalnej BP-2a ma to miejsce przy średnim odkształceniu skrajnego włókna ok. 3,2 ‰. W modelu belki BP-2a nie zaobserwowano wzmocnienia zbrojenia, głównie z powodu założenia uproszczonego zachowania się prętów zbrojeniowych po uplastycznieniu (założono model materiałowy sprężysto-idealnie plastyczny), ale również w wyniku nieuwzględnienia innych efektów związanych z pracą belki zginanej, tj. poślizgu zbrojenia, klockowania, których brak jest szczególnie dostrzegalny w przypadku modelowania elementów żelbetowych o wyższym stopniu zbrojenia.



Rys. 4.37. Porównanie rozwoju odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku belki.

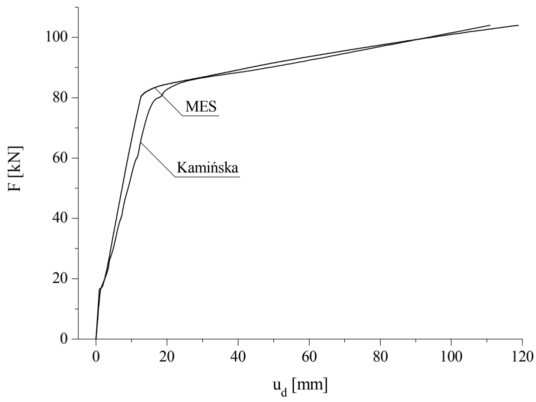


Rys. 4.38. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Na większe niedokładności w porównaniach wyników numerycznych i doświadczalnych uzyskanych dla belek o wyższym stopniu zbrojenia wpływa również przyjęcie w tych analizach w obszarze sprężysto-plastycznego zachowania konstrukcji do chwili uplastycznienia zbrojenia dziesięć razy większego przyrostu kroku obciążenia równego ok. 100 N. Założenie w doświadczeniach numerycznych mniejszego przyrostu kroku obciążenia wpływa na wydłużenie procesu trwania rozwiązania i znaczne zwiększenie rozmiaru pliku wynikowego.

4.3.6.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Rys. 4.39 stanowi porównanie nieliniowych zależności obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki BP-2a otrzymanych w analizie numerycznej i doświadczeniu. W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu modelowa belka charakteryzuje się prawie taką samą sztywnością jak belka eksperymentalna. Występowanie mikrozarysowania w belkach eksperymentalnych może być niewątpliwie główną przyczyną większej sztywności belek numerycznych. Różnice dotyczą też wartości obciążenia rysującego i wartości obciążenia, przy którym uplastycznia się zbrojenie.



Rys. 4.39. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

W analizie numerycznej siła rysująca wynosi 16,3 kN i jest niższa o ok. 35 % od wartości zarejestrowanej w doświadczeniu równej 25 kN. Na wykresie obciążenie-przemieszczenie faza uplastycznienia prętów stalowych opisana jest przez nagłe zmniejszenie sztywności belki. W numerycznym modelu belki uplastycznienie zbrojenia rozciąganego zaobserwowano dla obciążenia równego 80 kN. Otrzymane rezultaty są jakościowo zgodne z wynikami eksperymentów przedstawionymi w pracach Kamińskiej. Obciążenie graniczne wyznaczone numerycznie wynosi 103,96 kN i jest prawie równe obciążeniu doświadczalnemu równemu 104 kN. Graniczne przemieszczenie pionowe, czyli graniczne ugięcie w środku rozpiętości belki zarejestrowane w rozwiązaniu numerycznym równe 119 mm jest o ok. 7 % większe od wyniku ugięcia zarejestrowanego w doświadczeniu równego 111 mm.

4.3.7. Rozwiązanie belki wzmocnionej o wysokim stopniu zbrojenia metodą długości łuku Crisfielda

4.3.7.1. Analiza stanu zarysowania

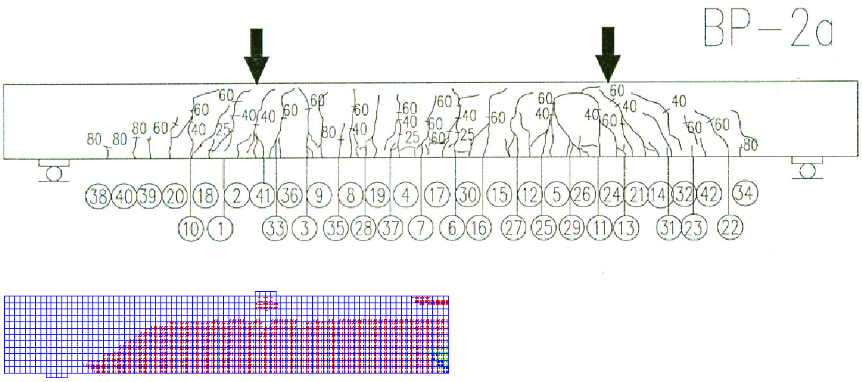
Pierwsze rysy w belce wzmocnionej BP-2a powstają na odcinku oddziaływania stałego momentu dla obciążenia rysującego F_{cr} = 15,7 kN, a więc wcześniej niż w przypadku zarejestrowanej doświadczalnie wartości obciążenia rysującego równej F_{cr} = 25 kN. Różnica pomiędzy obciążeniem rysującym obliczonym i doświadczalnym wynosi ok. 37 %.

Prostopadłe rysy od zginania powstają początkowo w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 20 kN. Dalszy rozwój zarysowania przebiega analogicznie, jak w rozwiązaniu belki BP-2a metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym.

W rozwiązaniu numerycznym stan graniczny nośności zarejestrowano dla obciążenia F_u = 114 kN i zinterpretowano go analogicznie, jak w rozdziale 4.3.6.1, jako stan osiągany dla takiego obciążenia, dla którego jest obserwowany gwałtowny przyrost przemieszczenia. Podczas rozwiązania założono większe przyrosty obciążenia równe ok. 100 N.

Rys. 4.40 przedstawia zestawienie obrazu rzeczywistego zarysowania dla całej belki BP-2a z obrazem numerycznym rys rozmytych dla lewej połowy belki przy tym samym poziomie obciążenia F = 80 kN. Schemat zarysowania jest jakościowo zgodny z obrazem rys zarejestrowanym w badaniach doświadczalnych Kamińskiej.

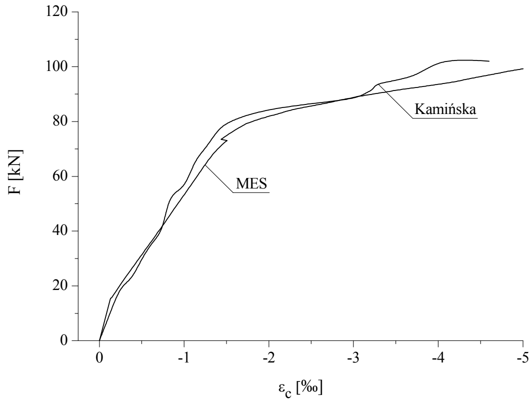
Numerycznie obrazy rys rozmytych uzyskane przy wykorzystaniu metody długości łuku Crisfielda dosyć dobrze odzwierciedlają rzeczywiste obszary zarysowania. Wskazane jest zwiększenie dokładności wyników numerycznych otrzymanych tą metodą poprzez zmniejszenie kroku przyrostu obciążenia kosztem wydłużenia czasu rozwiązania nieliniowych równań równowagi. Niewątpliwie w taki sposób przeprowadzonych obliczeniach nie zostaną pominięte niektóre fazy pracy zginanych belek żelbetowych. Poprawiona będzie również lokalizacja rys pierwotnych z równoczesnym uzyskaniem mniejszych obszarów rys rozmytych we wszystkich etapach obciążenia.



Rys. 4.40. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-2a dla siły F = 80 kN.

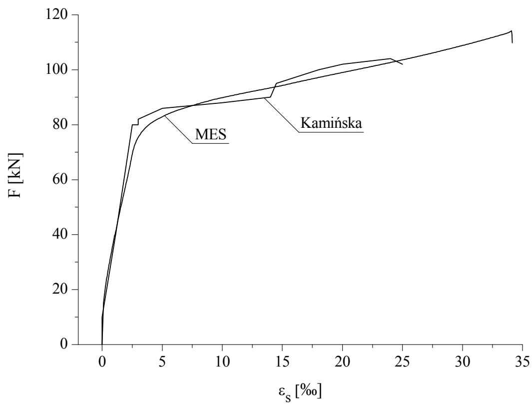
4.3.7.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

Na Rys. 4.41 przedstawiony jest rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku doświadczalnej belki BP-2a i w jej modelu numerycznym. Natomiast na Rys. 4.42 prezentowane są wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia F w środku modelowej i eksperymentalnej belki BP-2a.



Rys. 4.41. Porównanie rozwoju odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku belki.

Wykresy obciążenie-odkształcenie dla betonu i stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzują się ogólnie zgodnym przebiegiem z krzywymi eksperymentalnymi. Pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi dla betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego obserwuje się nieznaczne różnice w obszarze naprężeń niesprężystych. W chwili uplastycznienia zbrojenia rozciąganego wyraźnie widoczne jest załamanie wykresów.



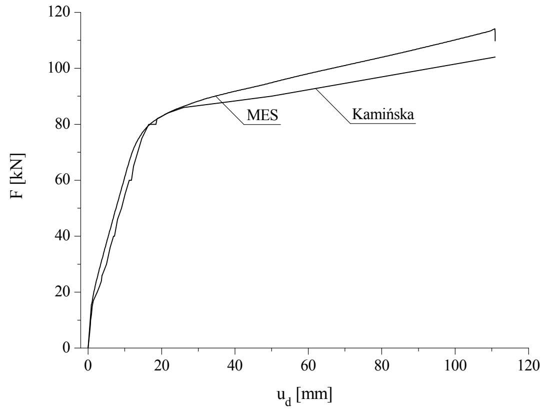
Rys. 4.42. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Na krzywych doświadczalnych w końcowym etapie obciążenia belki BP-2a występuje wzmocnienie zbrojenia rozciąganego sygnalizowane zmianą nachylenia wykresu. W wynikach numerycznych nie zaobserwowano wzmocnienia zbrojenia z powodu założenia modelu sprężysto-idealnie plastycznego dla stali, ale również wskutek nieuwzględnienia innych efektów tj. poślizgu, klockowania, związanych z zachowaniem zbrojenia i betonu w belce zginanej, których brak jest szczególnie dostrzegalny w przypadku modelowania elementów żelbetowych o wyższym stopniu zbrojenia. Na większe niedokładności w porównaniach wyników numerycznych i doświadczalnych uzyskanych dla belek o wyższym stopniu zbrojenia wpływa ponadto przyjęcie w tych analizach w obszarze sprężysto-plastycznego zachowania konstrukcji do chwili uplastycznienia zbrojenia dużo większego przyrostu kroku obciążenia.

4.3.7.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Przebieg zmian zależności obciążenie-przemieszczenie punktu centralnego na dolnej krawędzi belki uzyskany przy zastosowaniu metody numerycznej Crisfielda pozwalającej na opis kompletnej ścieżki rozwiązania przedstawiono na Rys. 4.43.

W analizie numerycznej siła rysująca wynosi 15,7 kN i jest niższa o ok. 37 % od wartości zarejestrowanej w doświadczeniu równej 25 kN. W belce doświadczalnej BP-2a i jej numerycznym modelu uplastycznienie zbrojenia rozciąganego zaobserwowano dla obciążenia równego 80 kN. Obciążenie graniczne wyznaczone numerycznie wynosi 109 kN i jest większe od obciążenia doświadczalnego równego 104 kN o ok. 5 %. Graniczne ugięcie w środku rozpiętości belki zarejestrowane w rozwiązaniu numerycznym równe 111 mm jest prawie równe wartości ugięcia zarejestrowanej w doświadczeniu równej 110,9 mm.



Rys. 4.43. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

Uzyskane wyniki numeryczne poparte wynikami doświadczenia potwierdzają właściwość, że kruchość betonów o wysokiej wytrzymałości w belkach zginanych jest neutralizowana przez bardzo dobrą współpracę betonu i zbrojenia.

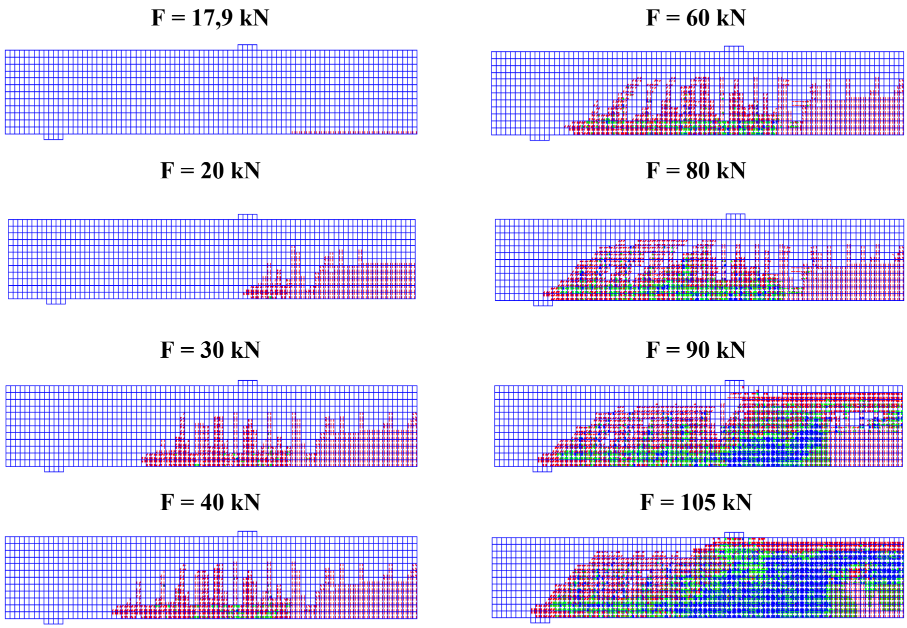
4.3.8. Rozwiązanie belki o wysokim stopniu zbrojenia metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym

4.3.8.1. Analiza stanu zarysowania

Mapy rys rozmytych otrzymane dla różnych poziomów obciążenia przedstawiono na Rys. 4.44. Obliczone obciążenie rysujące równe 17,9 kN jest mniejsze od zarejestrowanego doświadczalnie. Powstanie pierwszej rysy w belce eksperymentalnej BP-2b zaobserwowano nieco później, bo dla obciążenia 22 kN. Różnica pomiędzy obliczonym a doświadczalnym obciążeniem rysującym wynosi ok. 19 %.

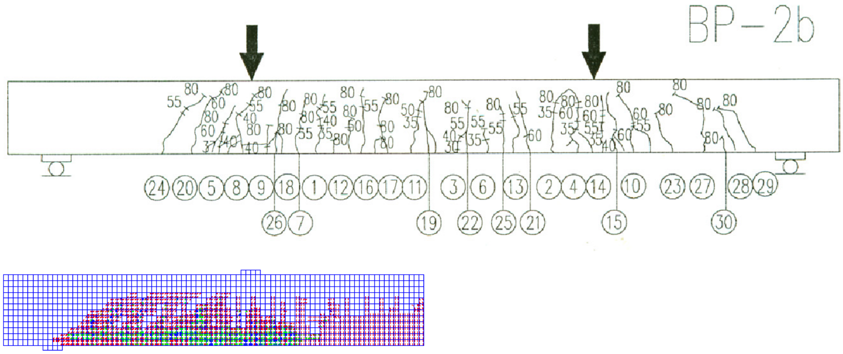
Prostopadłe rysy od zginania propagują się w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 20 kN. W miarę jego dalszego przyrostu obszar zarysowany zwiększa się poziomo ku podporze. Znaczny wzrost zarysowania belki BP-2b zaobserwowano w chwili powstania rys ukośnych w strefie oddziaływania naprężeń normalnych i stycznych dla obciążenia 60 kN, podobnie jak dla belki BP-2a. Uplastycznienie stali zbrojeniowej powstaje dla obciążenia 80 kN, o czym świadczy gwałtowny przyrost przemieszczenia pionowego w środku belki. Późniejszy rozwój zarysowania belki żelbetowej aż do chwili zniszczenia przy obciążeniu równym 105 kN jest intensywny w strefie oddziaływania stałego momentu i w strefie przypodporowej. Zarejestrowano, że począwszy od poziomu obciążenia 90 kN powstają rysy wywołane ściskaniem w obszarach sąsiadujących z punktami obciążenia. W końcowych etapach obciążenia zaobserwowano spotęgowanie procesów degradacji w strefie czystego zginania. W rozwiązaniu numerycznym stan graniczny nośności zarejestrowano dla obciążenia $F_u = 105$ kN i zinterpretowano go jako stan osiągany dla takiego obciążenia, dla którego jest obserwowany gwałtowny przyrost przemieszczenia przy bardzo małych przyrostach obciążenia ok. 10 N, w wyniku którego rozwiązanie numeryczne jest rozbieżne. W modelowej belce BP-2b bez zbrojenia strefy ściskanej na odcinku czystego zginania proces pękania jest szybszy i bardziej gwałtowny niż w przypadku numerycznej belki BP-2a zbrojonej na tym odcinku.

Eksperymentalna belka BP-2b o wyższym stopniu zbrojenia uległa zniszczeniu na skutek zmiażdżenia betonu w strefie ściskanej. Zniszczenie belki BP-2b ma charakter eksplozyjny z powodu braku podłużnego zbrojenia strefy ściskanej i strzemion na długości odcinka czystego zginania. Natomiast w strefie rozciąganej wzdłuż zbrojenia głównego w betonie powstały rysy podłużne charakterystyczne dla zerwania przyczepności betonu na długości pręta stalowego i poślizgu zbrojenia w betonie.



Rys. 4.44. Mapy rys rozmytych dla różnych poziomów obciążenia.

Na Rys. 4.45 zestawiono rzeczywisty obraz zarysowania dla całej belki BP-2b z numerycznym obrazem rys rozmytych dla lewej połowy belki przy tym samym poziomie obciążenia $F = 80$ kN. Widoczna jest dobra zgodność wyników, szczególnie dla prawej połowy eksperymentalnej belki BP-2b, przy czym zaobserwowano większe obszary rys w strefie podporowej w przypadku wyników numerycznych. Wskutek braku strzemion w belkach modelowych i doświadczalnych BP-2b o wyższym stopniu zbrojenia na odcinku czystego zginania układ rys jest dosyć przypadkowy.



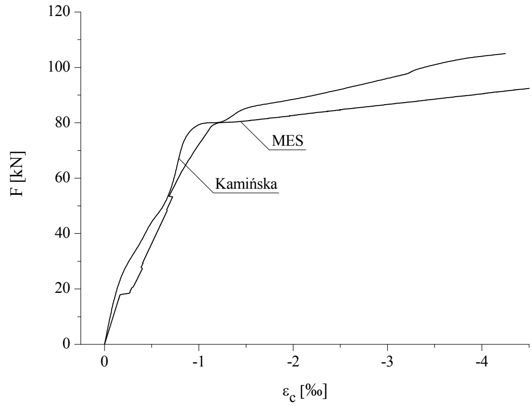
Rys. 4.45. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-2b dla siły F = 80 kN.

4.3.8.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

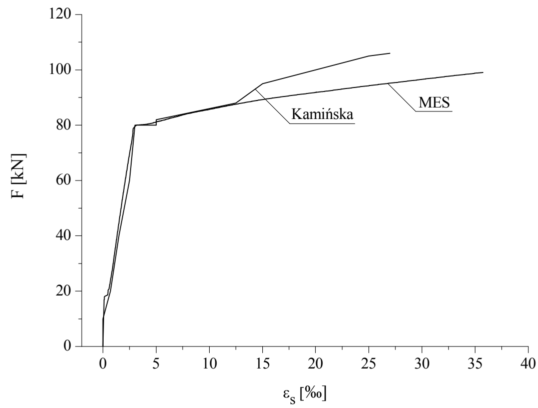
Zmienność odkształcenia w belce BP-2b betonu i stali porównano w punktach zilustrowanych na Rys. 4.4.

Na Rys. 4.46 przedstawiony jest rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku doświadczalnej belki BP-2b i w jej modelu. Na Rys. 4.47 prezentowane są wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia w środku eksperymentalnej i modelowej belki BP-2b. Chociaż wykresy obciążenie-odkształcenie dla betonu i stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzują się ogólnie zgodnym przebiegiem z krzywymi eksperymentalnymi to obserwuje się znaczne różnice pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi dla betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego w fazie sprężysto-plastycznej pracy belki po uplastycznieniu zbrojenia. Załamanie wykresów jest związane z uplastycznieniem zbrojenia rozciąganego. Natomiast wzmocnienie zbrojenia na krzywych doświadczalnych sygnalizuje zmiana nachylenia wykresu w końcowych etapach obciążenia.

W analizach numerycznych belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości bez zbrojenia strefy ściskanej na odcinku czystego zginania przy użyciu metody Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym zastosowany jest model materiałowy stali z uwzględnieniem jej wzmocnienia. Chociaż model ten lepiej opisuje zachowanie belki żelbetowej bez zbrojenia strefy ściskanej przekroju na odcinku czystego zginania, szczególnie w obszarze naprężeń niesprężystych po uplastycznieniu stali zbrojeniowej, to i tak rzeczywiste zachowanie prętów rozciąganych znacznie odbiega od założonego modelu materiałowego.



Rys. 4.46. Porównanie rozwoju odkształceń w środku belki skrajnych włókien strefy ściskanej betonu.

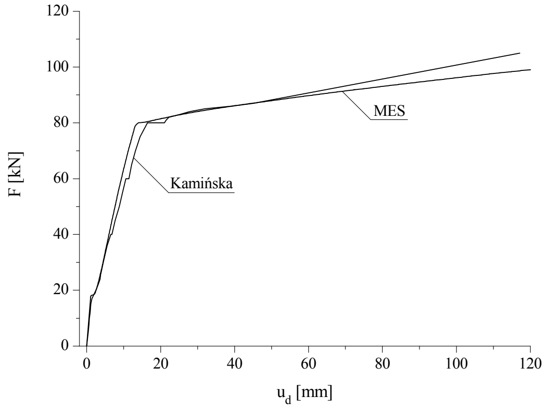


Rys. 4.47. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Na uzyskane wyniki numeryczne odkształcalności materiałów w zginanych belkach żelbetowych o wysokim stopniu zbrojenia wyraźny wpływ mają również pomijane efekty poślizgu i klockowania prętów stalowych oraz dziesięciokrotnie większe przyrosty kroku obciążenia równe ok. 100 N.

4.3.8.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Porównanie nieliniowych zależności obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki BP-2b otrzymanych w analizie numerycznej i doświadczeniu przedstawiono na Rys. 4.48.



Rys. 4.48. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

W obszarze naprężeń sprężystych belka modelowa ma prawie taką samą sztywność jak belka eksperymentalna. Belka modelowa charakteryzuje się nieco większą sztywnością od belki doświadczalnej po zarysowaniu. Występowanie mikrozarysowania w elementach rzeczywistych jest prawdopodobnie główną przyczyną większej sztywności modeli numerycznych. Różnice wyników dotyczą też wartości obciążenia rysującego i poziomu uplastycznienia zbrojenia. W analizie numerycznej siła rysująca wynosi 17,9 kN i jest niższa o ok. 19 % od wartości zarejestrowanej w doświadczeniu równej 22 kN. W numerycznym modelu belki uplastycznienie zbrojenia rozciąganego zaobserwowano dla obciążenia równego 80 kN. Obciążenie graniczne wyznaczone numerycznie wynosi 100 kN i jest niższe od obciążenia doświadczalnego równego 105 kN o ok. 5 %. Graniczne przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości belki zarejestrowane w rozwiązaniu numerycznym równe 120 mm jest o ok. 3 % większe od wyniku ugięcia zarejestrowanego w doświadczeniu równego 117 mm. Otrzymane rezultaty są jakościowo zgodne z wynikami eksperymentów.

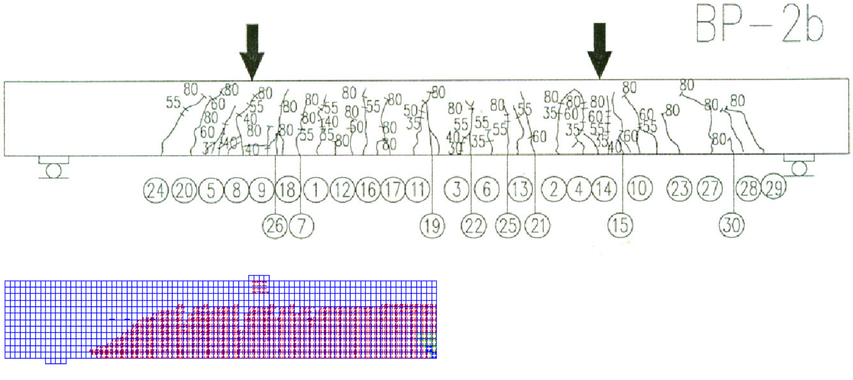
4.3.9. Rozwiązanie belki o wysokim stopniu zbrojenia metodą długości łuku Crisfielda

4.3.9.1. Analiza stanu zarysowania

Pierwsze rysy powstają na odcinku oddziaływania stałego momentu dla obciążenia rysującego F_{cr} = 17,6 kN, a więc wcześniej niż w przypadku zarejestrowanej doświadczalnie wartości obciążenia rysującego równej F_{cr} = 22 kN. Różnica pomiędzy obciążeniem rysującym obliczonym i doświadczalnym wynosi ok. 20 %.

Prostopadłe rysy od zginania rozwijają się w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 20 kN. W miarę jego dalszego przyrostu obszar zarysowany zwiększa się w kierunku podpory. Znaczny wzrost zarysowania belki zaobserwowano w chwili powstania rys ukośnych w strefie oddziaływania naprężeń normalnych i stycznych dla obciążenia 60 kN. Uplastycznienie stali zbrojeniowej powstaje dla obciążenia 80 kN i od tego momentu powstają rysy od ściskania w strefie przyłożonego obciążenia. W końcowych etapach obciążenia następuje dalsza propagacja rys prostopadłych w płaszczyznach dotychczas niezarysowanych i rys od zmiażdżenia w strefie czystego zginania oraz rys ukośnych w strefie ścinania belki żelbetowej. W rozwiązaniu numerycznym stan graniczny nośności zarejestrowano dla poziomu obciążenia równego F_u = 113 kN.

Na Rys. 4.49 przedstawiono zestawienie obrazu rzeczywistego zarysowania dla całej belki BP-2b z obrazem numerycznym rys rozmytych dla lewej połowy belki przy jednakowym poziomie obciążenia F = 80 kN. Schemat zarysowania jest jakościowo zgodny z rzeczywistym obrazem rys szczególnie dla prawej połowy eksperymentalnej belki BP-2b.



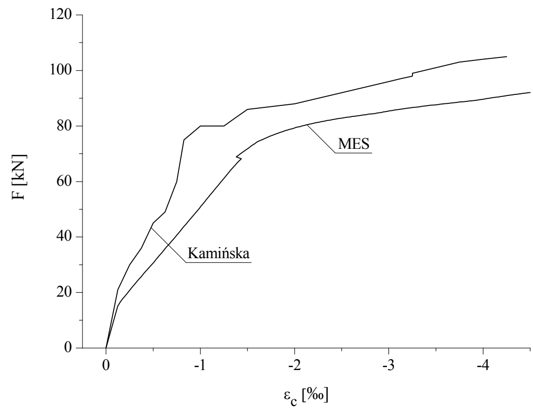
Rys. 4.49. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belki BP-2b dla siły F = 80 kN.

Numerycznie obrazy rys rozmytych uzyskane przy wykorzystaniu metody długości łuku Crisfielda dosyć dobrze odzwierciedlają rzeczywiste obszary zarysowania, jednak wskazane jest zwiększenie dokładności wyników numerycznych otrzymanych tą metodą poprzez zmniejszenie kroku przyrostu obciążenia, nawet kosztem wydłużenia czasu rozwiązywania nieliniowych równań równowagi. Niewątpliwie tak uzyskane wyniki będzie charakteryzować większa dokładność, gdyż zostaną uwzględnione wszystkie fazy pracy zginanych belek żelbetowych, poprawiona będzie lokalizacja rys pierwotnych z równoczesnym uzyskaniem zawężonych obszarów rys rozmytych.

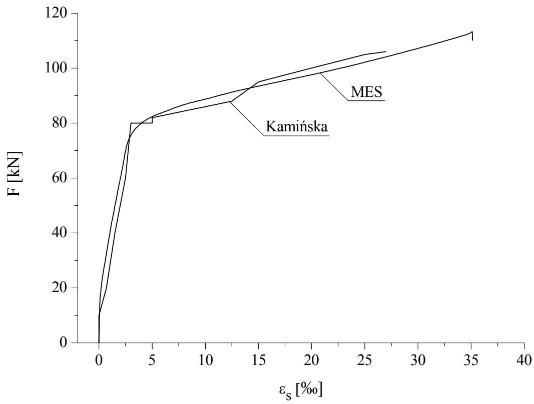
4.3.9.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

Rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku doświadczalnej belki BP-2b i w jej modelu numerycznym przedstawiony jest na Rys. 4.50. Wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia F w środku modelu i eksperymentalnej belki BP-2b prezentowane są na Rys. 4.51.

Wykresy obciążenie-odkształcenie dla betonu i stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzują się ogólnie zgodnym przebiegiem z krzywymi eksperymentalnymi. Większe różnice pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi dla betonu ściskanego obserwuje się w obszarze naprężeń niesprężystych. W chwili uplastycznienia zbrojenia rozciąganego wyraźnie widoczne jest załamanie wykresów. Na krzywych doświadczalnych w końcowym etapie obciążenia belki BP-2b występuje wzmocnienie zbrojenia rozciąganego sygnalizowane zmianą nachylenia wykresu.



Rys. 4.50. Porównanie rozwoju odkształceń w środku belki skrajnych włókien strefy ściskanej betonu.

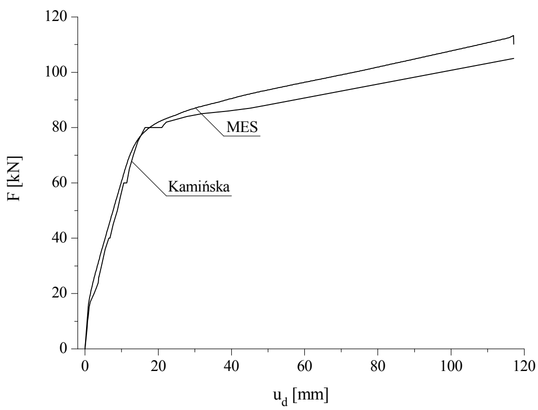


Rys. 4.51. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Na większe niedokładności w porównaniach wyników numerycznych i doświadczalnych uzyskanych dla belek o wyższym stopniu zbrojenia wpływa również przyjęcie w tych analizach w obszarze sprężysto-plastycznego zachowania konstrukcji do chwili uplastycznienia zbrojenia większego przyrostu kroku obciążenia.

4.3.9.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Na Rys. 4.52 obserwowany jest przebieg zmian zależności obciążenie-przemieszczenie punktu centralnego na dolnej krawędzi belki uzyskany przy zastosowaniu metody numerycznej długości łuku Crisfielda.



Rys. 4.52. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.

W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu modelowa belka charakteryzuje się prawie identyczną sztywnością jak belka eksperymentalna. Obecność mikrorys w belkach eksperymentalnych jest główną przyczyną większej sztywności belek numerycznych. Różnice dotyczą przede wszystkim wartości obciążenia rysującego. W analizie numerycznej siła rysująca wynosi 17,6 kN i jest niższa o ok. 20 % od wartości zarejestrowanej w doświadczeniu równej 22 kN. Na wykresie obciążenie-przemieszczenie faza uplastycznienia prętów stalowych opisana jest przez nagłe zmniejszenie sztywności belki. W belce doświadczalnej BP-2b i numerycznym modelu uplastycznienie zbrojenia rozciąganego zaobserwowano dla obciążenia równego 80 kN. Obciążenie graniczne wyznaczone numerycznie wynosi 105 kN i jest mniejsze od obciążenia doświadczalnego równego 113 kN o ok. 7 % . Graniczne ugięcie w środku rozpiętości belki zarejestrowane w rozwiązaniu numerycznym równe 117 mm jest prawie równe ugięciu zarejestrowanemu w doświadczeniu.

5. DYSKUSJA PROBLEMÓW NUMERYCZNEGO MODELOWANIA ZACHOWANIA BELEK ŻELBETOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM OSŁABIENIA MATERIAŁOWEGO

5.1. Analiza efektywności zastosowanych metod rozwiązania problemu

W celu ustalenia ścieżki równowagi w większości nieliniowych analiz konstrukcji żelbetowych do niedawna stosowano metodę Newtona-Raphsona lub jej zmodyfikowaną postać. Obie techniki są skuteczne dla materiałów o charakterystykach liniowych i dwuliniowych. Natomiast nie sprawdzają się w przypadku materiałów o wyższym stopniu nieliniowości przy uwzględnieniu efektu osłabienia materiałowego. Ponadto wadą tych metod jest brak możliwości uzyskania opisu opadającej gałęzi krzywej obciążenie-przemieszczenie znamionującej globalne osłabienie konstrukcji. Baltoz i Dhatt [7] zaproponowali sterowanie przemieszczeniami w bliskim otoczeniu punktów granicznych. Jednak metoda ta nie jest odpowiednia do rozwiązywania zagadnień o wielu stopniach swobody w nieliniowych analizach konstrukcji żelbetowych z uwzględnieniem osłabienia odkształceniowego.

W wyniku zastosowania w analizie nieliniowej konstrukcji metody długości łuku w połączeniu z metodą Newtona-Raphsona możliwe jest odzwierciedlenie zniszczenia materiału, przeskoków wstecz na krzywej opisującej odpowiedź konstrukcji oraz wygenerowanie kompletnej zależności obciążenie-przemieszczenie. Powyższa metoda znalazła szerokie zastosowanie również w analizach konstrukcji żelbetowych, a niektórzy autorzy uzyskali dobrą zgodność wyników doświadczalnych i numerycznych.

W Tablicy 5.1 zestawiono dziewięć przykładów obliczeniowych. Przykłady 1-2 analizował Foster [40], przykłady 3-4 analizował Crisfield [28, 29], a przykłady 5-9 są przedmiotem analiz numerycznych niniejszej pracy. Wszystkie przykłady obliczeniowe zestawiono dla porównania metody Newtona-Raphsona z metodą długości łuku w celu przedstawienia zalet stosowania metody długości łuku.

Metody długości łuku powinny znaleźć szerokie zastosowanie w analizach nieliniowego zachowania elementów żelbetowych, gdyż tylko one dają możliwość uzyskania kompletnej ścieżki obciążenie-ugięcie z zarówno lokalnym, jak i globalnym osłabieniem konstrukcji. Ponadto ich algorytmy charakteryzuje duża efektywność, a zmienny krok przyrostu obciążenia i prawidłowo dobrane parametry łuku gwarantują znaczne skrócenie czasu obliczeń numerycznych, a przy tym uzyskanie bardzo dokładnego rozwiązania. Według wiedzy autora poprawność metody nie została dotychczas zweryfikowana na modelach przestrzennych konstrukcji żelbetowych z uwzględnieniem osłabienia odkształceniowego przy ściskaniu i rozciąganiu.

Tablica 5.1. Porównanie metody Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym z metodą długości łuku Crisfielda

Źródło	Analizowany element żelbetowy	Liczba etapów obciążenia		Liczba iteracji	
		Metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym (N-R-ad)	Metoda długości łuku Crisfielda (A-L)	Metoda N-R-ad	Metoda A-L
Crisfield [28, 29]]	płyta Jain-Kennedy [53]	-	14	-	246
	płyta McNeice [73]	-	14	-	244
Foster [40]	tarcza jednoprzęsłowa	13	13	682	341
	tarcza dwuprzęsłowa	13	13	420	120
Smarzewski	belka Buckhouse C1 [18]	6	2	1557	637
	belka Kamińska BP-1a [55]	5	2	1241	653
	belka Kamińska BP-1b [55]	5	2	1001	655
	belka Kamińska BP-2a [55]	4	2	3241	650
	belka Kamińska BP-2b [55]	4	2	3157	650

5.2. Wpływ modułu sprężystości betonu na zależność siła-przemieszczenie belki wzmocnionej o niskim stopniu zbrojenia

Mechaniczne właściwości betonów o wysokiej wytrzymałości wynikają z ich składu z charakterystycznym współczynnikiem W/(C+krzemionka) oraz szczelnej i jednorodnej struktury ukształtowanej w wyniku zastosowania superplastyfikatorów i mikrowypełniaczy. Beton wysokowartościowy zachowuje się jak materiał kompozytowy, w którym kruszywo grube decyduje o jego właściwościach mechanicznych.

Ogólnie można stwierdzić, że gdy znana jest wartość wytrzymałości betonu na ściskanie f_c to zazwyczaj jest możliwe ustalenie kompletu danych materiałowych niezbędnych do przeprowadzenia obliczeń w nieliniowym modelu numerycznym. Badanie wytrzymałości betonu na ściskanie wykonane na betonowych próbkach rdzeniowych zazwyczaj wykorzystuje się do szacowania właściwości betonu w istniejących konstrukcjach.

W analizowanym numerycznym modelu przestrzennym belki żelbetowej BP-1a z betonu wysokiej wytrzymałości stałym parametrem jest jego wytrzymałość na ściskanie określona doświadczalnie, równa f_c = 81,2 MPa.

W Tablicy 5.2 przedstawiono propozycje zależności pomiędzy wytrzymałością na rozciąganie f_t i modułem sprężystości E_c a wytrzymałością na ściskanie f_c. Dla wszystkich zestawionych zależności obliczono wartości

E_c i f_t dla betonu o wytrzymałości na ściskanie równej f_c = 81,2 MPa. W celu porównania podano również doświadczalne wartości E_c i f_t ustalone w badaniach Kamińskiej [55] na próbkach wykonanych z tego samego betonu co belka BP-1a.

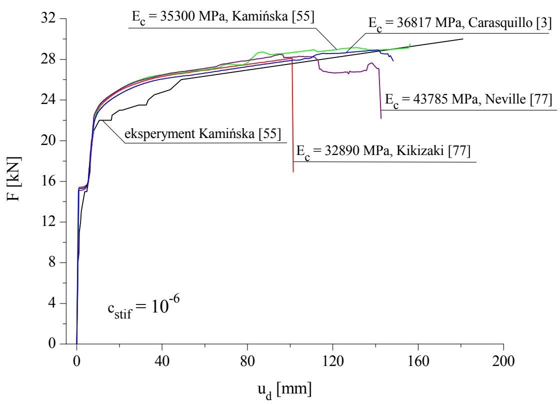
Tablica 5.2. Cechy mechaniczne betonu o wysokiej wytrzymałości belki BP-1a określone doświadczalnie i według różnych wzorów dla f_c = 81,2 MPa [3, 57, 77]

Źródło	Wzory	f_t [MPa]	E_c [MPa]
Kamińska [55]	-	5,23	35300
Neville [77]	$f_t = 0,3 f_c^{2/3}$ $E_c = 57000\sqrt{f_c}$	5,63	42649
CEB-FIB [25, 26]	$f_t = 0,273 f_c^{2/3}$ $E_c = 10\left(f_c + 8\right)^{1/3}$	5,12	44681
Ahmad, Shah [57]	$f_t = 0,462 f_c^{0,55}$	5,19	-
Burge, Ost [57]	$f_t = 0,61\sqrt{f_c}$	5,5	-
CAN A23.3-M90 [3]	$E_c = 5\sqrt{f_c}$	-	45056
Carasquillo, ACI 363 [3]	$f_t = 0,54\sqrt{f_c}$ $E_c = 3,32\sqrt{f_c} + 6,9$	4,87	36817
Kikizaki [77]	$E_c = 3,65\sqrt{f_c}$	-	32890

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano duże rozrzuty wartości modułu sprężystości betonu E_c od ok. 33 GPa do ponad 45 GPa. Najmniejsza różnica pomiędzy wartością modułu odkształcenia betonu ustaloną eksperymentalnie i teoretycznie jest równa ok. 4 % w przypadku, gdy E_c obliczono według propozycji Carasquillo [3].

Na Rys. 5.1 zilustrowano porównanie nieliniowych zależności obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki BP-1a otrzymanych w wyniku przeprowadzonego doświadczenia i kilku analiz numerycznych. Parametrem zmiennym w przedstawionych analizach numerycznych jest moduł sprężystości betonu. W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu belka modelowa niezależnie od wartości modułu sprężystości charakteryzuje się prawie taką samą sztywnością jak belka eksperymentalna. Większe różnice są dostrzegalne w chwili powstania rys i uplastycznienia stali zbrojeniowej. Obserwowany na Rys. 5.1 przebieg zmian zależności obciążenie-przemieszczenie punktu centralnego na dolnej krawędzi belki $(F - u_d)$ ma charakter niemonotoniczny w obszarze po uplastycznieniu zbrojenia wynikający z założonego modelu zachowania betonu opisującego osłabienie materiału w procesie deformacji i z zastosowania metody numerycznej Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym pozwalającej w dość precyzyjny sposób zlokalizować niektóre stany wytężenia belki żelbetowej opisywane w pracach doświadczalnych w postaci gwałtownych spadków krzywej ugięcia w obszarze po uplastycznieniu zbrojenia. W szczególności dotyczy to fazy obrazującej początek zmiażdżenia betonu i fazy końcowej zniszczenia betonu w strefie ściskanej.

Zarówno w obszarze naprężeń sprężystych, jak i po zarysowaniu model belki charakteryzuje się nieznacznie większą sztywnością od belki eksperymentalnej. Przyczyny zmian sztywności belki EI wynikają ze zmienności modułu sprężystości betonu E_c, wywołanej rysami zmienności momentu bezwładności przekroju I i przyczepności stali do betonu. Graniczne ugięcia w środku rozpiętości belki zarejestrowane w rozwiązaniach numerycznych są mniejsze od wartości ugięcia eksperymentalnego, co jest związane z przyjęciem zbyt małych możliwości odkształcania się betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu. Niewątpliwie w elementach zbrojonych beton o wysokiej wytrzymałości zachowuje się inaczej niż w próbkach ze względu na zbrojenie i efekt skali i w związku z tym zaproponowano zwiększenie granicznych wartości odkształceń przy ściskaniu w numerycznych analizach konstrukcji żelbetowych.



Rys. 5.1. Porównanie przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia w zależności od wartości modułu sprężystości betonu.

Stwierdzono, że otrzymane rozwiązania numeryczne są bardzo wrażliwe na wartość modułu sprężystości betonu i są jakościowo zgodne z wynikami doświadczalnymi przedstawionymi w pracach Kamińskiej [55, 56].

5.3. Wpływ modeli materiałowych na zależność siła-przemieszczenie belek o niskim stopniu zbrojenia

Celem niniejszego rozdziału pracy jest analiza wpływu założonych modeli materiałowych na zachowanie belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcania. W numerycznych modelach przestrzennych zastosowano wymiary elementów oraz właściwości materiałów jak dla eksperymentalnych wolnopodpartych belek prostokątnych BP-1a i BP-1b opisanych w pracy [55]. Uzyskane własne wyniki numeryczne są porównane z wynikami doświadczalnymi.

Obliczenia numeryczne belki prostokątnej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości wykonano przy wykorzystaniu quasi newtonowskiej przyrostowo-iteracyjnej metody rozwiązywania równań nieliniowych z ustalaniem spadku adaptacyjnego. Z kolei obliczenia belki BP-1b z betonu o wysokiej wytrzymałości wykonano przy użyciu metody Crisfielda z ustalaniem długości łuku. Rząd wszystkich rozwiązań odpowiada analizie dużych odkształceń. W wyniku uwzględnienia nieliniowych efektów geometrycznych w belkach żelbetowych otrzymano lepszą zgodność wyników numerycznych z doświadczalnymi, wyraźnie dostrzegalną w fazie po uplastycznieniu stali zbrojeniowej.

W analizowanym numerycznym modelu przestrzennym belki żelbetowej BP-1a z betonu wysokiej wytrzymałości stałymi parametrami są określone doświadczalnie wytrzymałość na ściskanie f_c = 81,2 MPa i moduł sprężystości E_c = 35300 MPa. Model belki BP-1a analizowano według siedmiu różnych modeli materiałowych. We wszystkich modelach założono sprężysto-idealnie plastyczne zachowanie stali zbrojeniowej i model sprężysto-kruchy z osłabieniem (zesztywnieniem) betonu przy rozciąganiu. Model betonu przy ściskaniu jest parametrem zmiennym, lecz we wszystkich przykładach założono miażdżenie betonu w strefie ściskanej. W pierwszej analizie [1a] przyjęto model sprężysto-idealnie plastyczny w oparciu o kryterium Misesa. Z kolei w przykładach [1b], [1c] odpowiednio założono sprężysto-idealnie plastyczny model: z wytrzymałością resztkową 85 % przy odkształceniu granicznym opisany przez Hongnerstada oraz z wytrzymałością resztkową 90 %. Zachowanie ściskanego betonu w następnych analizach opisują wieloliniowe jednoosiowe zależności naprężenie-odkształcenie Desai-Krishnana [2a] i [2b] oraz Model Code 90 [3a] symulujące paraboliczną krzywą. Dodatkowo w zależnościach naprężenie-odkształcenie w przykładach [2b] i [3a] uwzględniono gałąź osłabieniową opisującą stopniową degradację betonu ściskanego w procesie statycznego obciążenia. W analizie [2c] założono zmodyfikowany model sprężysto-plastyczny z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej Stolarskiego.

W analizowanym numerycznym modelu przestrzennym belki żelbetowej BP-1b z betonu wysokiej wytrzymałości stałymi parametrami są określone doświadczalnie wytrzymałość na ściskanie f_c = 72,8 MPa i moduł sprężystości E_c = 34000 MPa. Model belki BP-1b analizowano według trzech różnych modeli materiałowych. We wszystkich modelach założono model sprężysto-kruchy z osłabieniem dla betonu przy rozciąganiu i zmodyfikowany model Stolarskiego sprężysto-plastyczny z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej dla betonu przy ściskaniu. Model stali zbrojeniowej i resztkowa sztywność betonu po zarysowaniu są parametrami zmiennymi. W analizie [4a] przyjęto model sprężysto-idealnie plastyczny dla stali zbrojeniowej, natomiast w analizach [4b], [4c] założono zachowanie zbrojenia sprężysto-plastyczne ze wzmocnieniem.

Wykonane analizy numeryczne i opisy analizowanych modeli zestawiono w Tablicy 5.3.

Tablica 5.3. Zestawienie analizowanych modeli materiałowych

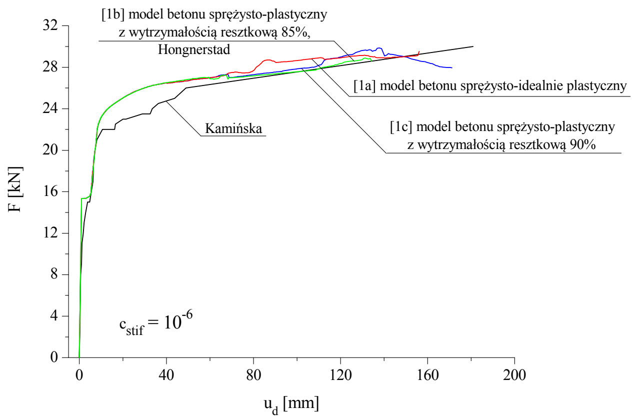
Analizy	**Model betonu**		**Model stali zbrojeniowej**	
	rozciąganie	ściskanie	rodzaj zbrojenia	model materiału
belka BP-1a [1a]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-idealnie plastyczny	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1a [1b]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-idealnie plastyczny z wytrzymałością resztkową 85 % (Hongnerstad)	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1a [1c]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-idealnie plastyczny z wytrzymałością resztkową 90 %	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1a [2a]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem (Desai-Krishnan)	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1a [2b]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem i osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej (Desai-Krishnan)	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1a [2c]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-plastyczny z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej (Stolarski)	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1a [3a]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-plastyczny z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej (Model Code 90)	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1b [4a]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-plastyczny z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej (Stolarski)	dyskretny	sprężysto-idealnie plastyczny
belka BP-1b [4b], [4c]	sprężysto-kruchy z osłabieniem	sprężysto-plastyczny z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej (Stolarski)	dyskretny	sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem

Na Rys. 5.2-5.4 przedstawiono porównanie wyników uzyskanych dla różnych modeli odkształcenia matrycy betonowej. Przedstawione wyniki wskazują na wpływ poszczególnych efektów nieliniowości fizycznej w matrycy betonu i elementach prętowych na wielkości przemieszczeń pionowych u_d na dolnej krawędzi w przekroju środkowym belki BP-1a w zależności od poziomu obciążenia F.

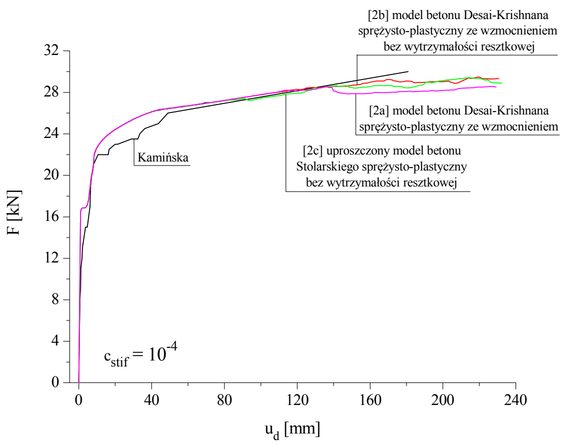
Z kolei na Rys. 5.5 zilustrowano porównanie nieliniowych zależności obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki BP-1b otrzymanych w wyniku przeprowadzonych analiz numerycznych i doświadczenia. Parametrami zmiennymi w przedstawionych analizach numerycznych są model materiałowy dla stali zbrojeniowej i resztkowa sztywność betonu po zarysowaniu.

Analizowane modele są podobne, a zatem zgodnie z oczekiwaniem wyniki numeryczne na krzywej obciążenie-przemieszczenie pionowe we wczesnych etapach historii obciążenia są bardzo zbliżone we wszystkich przeprowadzonych analizach i doświadczeniu. W początkowych etapach obciążenia zależność ta jest liniowa. Natomiast w chwili zarysowania betonu występuje nieznaczny skok obrazujący nagłą utratę sztywności. Większe różnice są dostrzegalne w fazie uplastycznienia stali zbrojeniowej i na końcowych etapach obciążenia opisujących początek zmiażdżenia betonu i jego zniszczenie w strefie ściskanej.

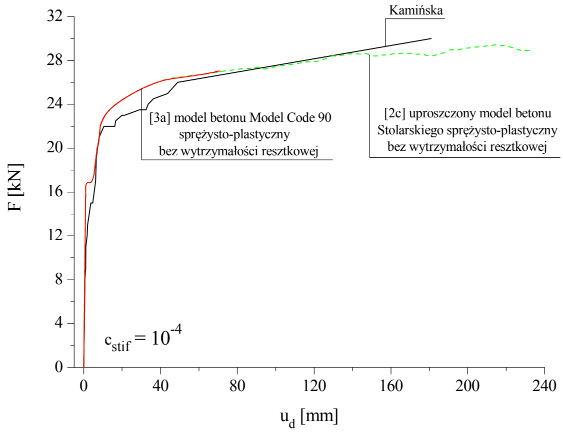
Na Rys. 5.2 i 5.3 widoczne jest zróżnicowanie uzyskanych wartości przemieszczeń pionowych dla poszczególnych modeli betonu, szczególnie dla zakresu obciążenia powyżej 27 kN, dla którego beton w strefie ściskanej na odcinku oddziaływania stałego momentu ulega zarysowaniu. Pomimo, że końcowe obciążenie nie jest graniczne, to analizy [1a], [1b], [1c] są przerwane z powodu braku zbieżności. Przedstawione na Rys. 5.3 wyniki numeryczne otrzymane dla różnych modeli sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem przy ściskaniu i zbrojenia dyskretnego [2a], [2b] i [2c] charakteryzuje długa ścieżka obciążenia. Z kolei na Rys. 5.4 w modelu [3a] występuje przedwczesne zniszczenie belki BP-1a w wyniku zmiażdżenia betonu w strefie ściskanej, natomiast model [2c] generuje kompletny wykres obciążenie-przemieszczenie pionowe. W analizie [3a] nośność modelowej belki jest dużo mniejsza niż belki doświadczalnej, chociaż zależność obciążenie-przemieszczenie pionowe aż do chwili utraty zbieżności wykazuje bardzo dobrą zgodność. Uzyskanie znacznie zmniejszonej granicznej krzywizny jest związane z założeniem zbyt małych możliwości odkształcania się betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu. Można oczekiwać, że w elementach zbrojonych beton o wysokiej wytrzymałości będzie zachowywał się inaczej niż w próbkach ze względu na zbrojenie i efekt skali. Najlepsze wyniki dla belki BP-1a uzyskano dla modelu [2b] betonu sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem i osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej Desai-Krishnana i modelu [2c] betonu sprężysto-plastycznego z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej Stolarskiego, natomiast w przypadku belki BP-1b dla modelu [4a] stali zbrojeniowej sprężysto-idealnie plastycznego. Dla modelu [2c] i [4a] uzyskano wyniki zbliżone do wartości oczekiwanych.



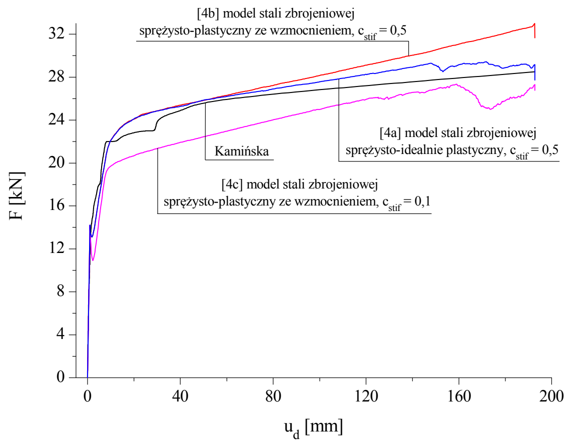
Rys. 5.2. Porównanie przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia w zależności od założonego modelu betonu przy ściskaniu.



Rys. 5.3. Porównanie przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia w zależności od założonego modelu betonu przy ściskaniu.



Rys. 5.4. Porównanie przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia w zależności od założonego modelu betonu przy ściskaniu.

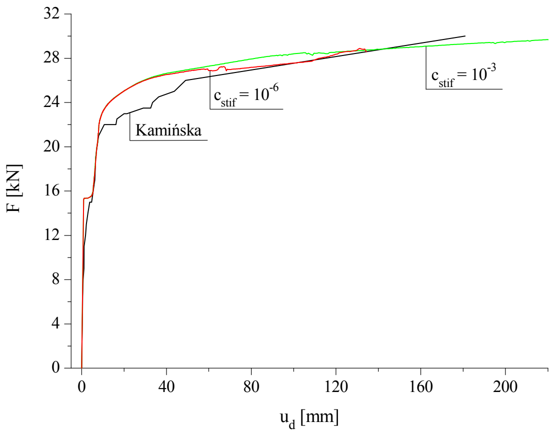


Rys. 5.5. Porównanie przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1b od obciążenia w zależności od założonego modelu stali zbrojeniowej.

Otrzymane trajektorie zależności obciążenia-przemieszczenia pionowe we wszystkich wykonanych analizach numerycznych wykazują dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi dla całej historii obciążenia, tak więc najwyższe obciążenia uzyskane w wyniku analiz mogą być brane pod uwagę przy ustalaniu granicznego obciążenia belki modelowej i eksperymentalnej. Zaobserwowano, że przyjęcie zbyt małych możliwości odkształcania się betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu skutkuje zmniejszeniem granicznych krzywizn. Prezentowane wyniki potwierdzają tak ważny aspekt modelowania zachowania konstrukcji żelbetowych, jak dobór odpowiednich modeli opisujących właściwości materiałów.

5.4. Wpływ sztywności resztkowej zarysowanych i zmiażdżonych skończonych elementów materiału matrycy betonowej na zależność siła-przemieszczenie belki wzmocnionej o niskim stopniu zbrojenia

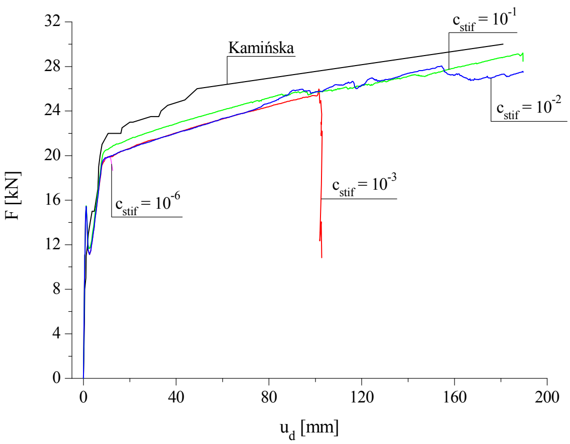
Celem niniejszej części pracy jest analiza wpływu zmiennej resztkowej sztywności zarysowanych i zmiażdżonych skończonych elementów materiału matrycy betonowej na zachowanie modelowej belki żelbetowej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcania. Uzyskane własne wyniki numeryczne są zestawione z wynikami doświadczalnymi [55] w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki $(F-u_d)$. Na Rys. 5.6-5.7 zilustrowano porównanie nieliniowych zależności $(F-u_d)$ dla belki BP-1a otrzymanych w wyniku przeprowadzonych analiz numerycznych i doświadczenia.



Rys. 5.6. Porównanie przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia w zależności od resztkowej sztywności elementów materiału matrycy betonowej.

Przedstawione na Rys. 5.6 obliczenia numeryczne belki prostokątnej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości wykonano przy wykorzystaniu quasi newtonowskiej przyrostowo-iteracyjnej metody rozwiązywania równań nieliniowych z ustalaniem spadku adaptacyjnego. Z kolei zilustrowane na Rys. 5.7 obliczenia belki BP-1a przeprowadzono przy użyciu metody Crisfielda ustalania długości łuku.

Rząd wszystkich rozwiązań odpowiada analizie dużych odkształceń. W wyniku uwzględnienia nieliniowych efektów geometrycznych w belce żelbetowej otrzymano znacznie lepszą zgodność wyników numerycznych z doświadczalnymi, szczególnie wyraźnie widoczną po uplastycznieniu zbrojenia. W analizowanym numerycznym modelu przestrzennym belki żelbetowej BP-1a z betonu wysokiej wytrzymałości stałymi parametrami są określony doświadczalnie moduł sprężystości $E_c = 35300$ MPa oraz wytrzymałość na ściskanie $f_c = 81{,}2$ MPa.



Rys. 5.7. Porównanie przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia w zależności od resztkowej sztywności elementów matrycy betonowej.

Przedstawione na Rys. 5.6 obliczenia numeryczne wykonano przy założeniu modelu sprężysto-idealnie plastycznego zachowania stali zbrojeniowej, modelu sprężysto-kruchego z osłabieniem betonu przy rozciąganiu oraz modelu sprężysto-idealnie plastycznego z wytrzymałością resztkową 85 % dla odkształcenia granicznego przy ściskaniu opisanego przez Hongnerstada (1951). Natomiast zilustrowane na Rys. 5.7 obliczenia belki BP-1a przeprowadzono przy użyciu modelu sprężysto- plastycznego ze wzmocnieniem dla stali zbrojeniowej, modelu sprężysto-kruchego z osłabieniem betonu przy rozciąganiu oraz zmodyfikowanego modelu sprężysto-plastycznego z osłabieniem bez wytrzymałości resztkowej przy ściskaniu Stolarskiego.

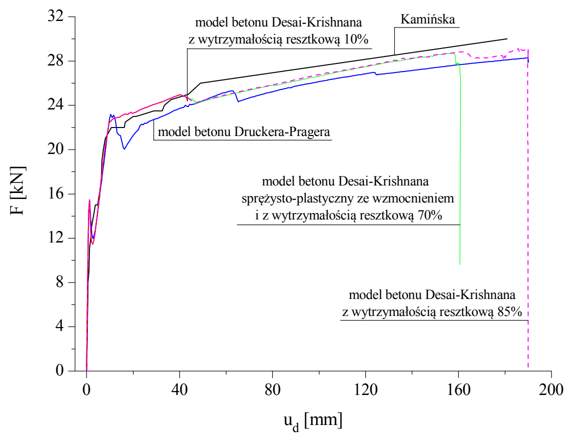
Parametrem zmiennym we wszystkich przedstawionych analizach jest sztywność resztkowa w zarysowanym lub zmiażdżonym skończonym elemencie z betonu. Stan zarysowania lub zmiażdżenia może powstać w ośmiu punktach numerycznego całkowania w trzech kierunkach prostopadłych w każdym elemencie skończonym. W tych przypadkach w elemencie zmiażdżonym lub zarysowanym w kierunku prostopadłym do płaszczyzny powstania rysy jest wprowadzony parametr sztywności c_{stif} o małej wartości w celu zachowania równowagi numerycznej w elemencie skończonym.

5.5. Wpływ wytrzymałości resztkowej przy ściskaniu betonu na zależność siła-przemieszczenie belki wzmocnionej o niskim stopniu zbrojenia

Celem poniższego rozdziału pracy jest analiza wpływu zmiennej resztkowej wytrzymałości odpowiadającej granicznym odkształceniom betonu przy ściskaniu w jednoosiowym stanie naprężenia na zachowanie modelowej belki żelbetowej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcania. Uzyskane własne wyniki numeryczne są zestawione z wynikami doświadczalnymi [55] w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki $(F - u_d)$.

Na Rys. 5.8 zilustrowano porównanie nieliniowych zależności $(F - u_d)$ dla belki BP-1a otrzymanych w wyniku eksperymentu i analiz numerycznych przeprowadzonych przy użyciu metody Crisfielda ustalania długości łuku.

Wszystkie rozwiązania uzyskano w wyniku analiz dużych odkształceń. Dzięki uwzględnieniu nieliniowych efektów geometrycznych otrzymano znacznie lepszą zgodność wyników numerycznych i eksperymentalnych. W analizowanych rozwiązaniach przestrzennego modelu belki żelbetowej BP-1a z betonu wysokiej wytrzymałości stałymi parametrami są określony doświadczalnie moduł sprężystości E_c = 35300 MPa, wytrzymałość na ściskanie f_c = 81,2 MPa oraz sztywność resztkowa c_{stif} = 10^{-3}.



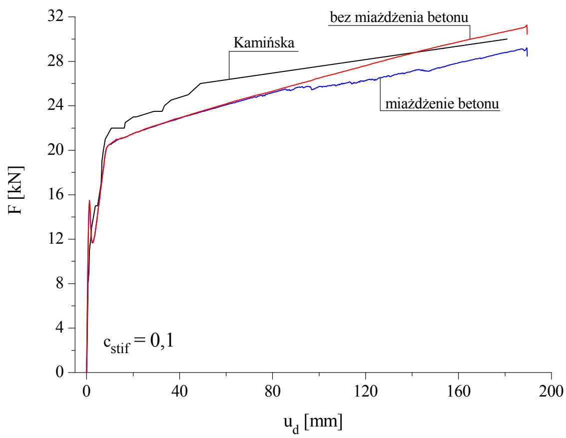
Rys. 5.8. Zestawienie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia uzyskanych różnymi metodami numerycznymi.

Wszystkie wyniki numeryczne przedstawione na Rys. 5.8 w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie uzyskano dla założonego sprężysto-idealnie plastycznego modelu stali zbrojeniowej oraz sprężysto-kruchego modelu betonu z osłabieniem przy rozciąganiu. Natomiast przy ściskaniu założono sprężysto-plastyczny model betonu Desai-Krishnana ze zmienną wytrzymałością resztkową równą 10 %, 70 % i 85 % oraz sprężysto-idealnie plastyczny model betonu Druckera-Pragera. Dla modelu z największą wytrzymałością resztkową uzyskano wyniki zbliżone do wartości oczekiwanych.

5.6. Wpływ zmiażdżenia betonu na zależność siła-przemieszczenie belki wzmocnionej o niskim stopniu zbrojenia

Celem niniejszego rozdziału pracy jest analiza wpływu zmiażdżenia betonu na zachowanie modelowej belki żelbetowej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcania. Uzyskane własne wyniki numeryczne zostały zestawione z wynikami doświadczalnymi Kamińskiej [55] w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki $(F - u_d)$.

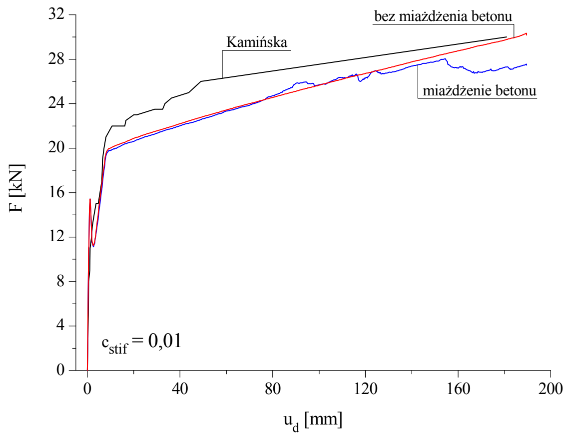
Na Rys. 5.9-5.10 zilustrowano porównanie nieliniowych zależności $(F - u_d)$ dla belki BP-1a otrzymanych w wyniku eksperymentu i analiz numerycznych przeprowadzonych przy użyciu metody Crisfielda ustalania długości łuku. Wszystkie rozwiązania uzyskano w wyniku analiz dużych odkształceń.



Rys. 5.9. Zestawienie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia uzyskanych różnymi metodami numerycznymi.

W analizowanych rozwiązaniach przestrzennego modelu belki żelbetowej BP-1a z betonu wysokiej wytrzymałości stałymi parametrami są określony doświadczalnie moduł sprężystości $E_c = 35300$ MPa oraz wytrzymałość na ściskanie $f_c = 81{,}2$ MPa.

Wszystkie wyniki numeryczne przedstawione na Rys. 5.9 w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie uzyskano dla założonego sprężysto-plastycznego modelu stali zbrojeniowej ze wzmocnieniem oraz sprężysto-kruchego modelu betonu z osłabieniem przy rozciąganiu. Natomiast przy ściskaniu założono zmodyfikowany sprężysto-plastyczny model betonu Stolarskiego z wytrzymałością resztkową równą 80 % i sztywność resztkową w zarysowanym lub zmiażdżonym skończonym elemencie z betonu równą $c_{stif} = 10^{-1}$.



Rys. 5.10. Zestawienie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia uzyskanych różnymi metodami numerycznymi.

Wyniki numeryczne zilustrowane na Rys. 5.10 w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie uzyskano dla identycznych modeli materiałowych oraz mniejszej sztywności resztkowej elementu betonowego równej $c_{stif} = 10^{-2}$. Dzięki uwzględnieniu miażdżenia i nieliniowych efektów geometrycznych przy użyciu metody Crisfielda ustalania długości łuku otrzymano znacznie lepszą zgodność wyników numerycznych i eksperymentalnych.

W przypadku włączenia zdolności betonu do miażdżenia w obliczeniach numerycznych belki prostokątnej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości wykonanych metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym obserwowano zbyt wczesne zniszczenie belki. Natomiast w przypadku nieuwzględnienia miażdżenia w powyższych analizach otrzymano bardzo dobre wyniki numeryczne. Zjawisko miażdżenia pominięto w związku z postulatem postawionym przez Mindessa, Younga [75] i Shaha [93], że zniszczenie betonu w stanie czystego jednoosiowego ściskania jest w rzeczywistości niemożliwe, gdyż w kierunku prostopadłym do naprężenia ściskającego wystąpi wywołane wtórnie odkształcenie rozciągające, a ponieważ beton ma stosunkowo niską wytrzymałość na rozciąganie to właśnie zarysowanie ostatecznie zadecyduje o zniszczeniu betonu. Podobnie zachowuje się ściskany beton o wysokiej wytrzymałości bez możliwości zmiażdżenia w numerycznych analizach belek żelbetowych wykonanych metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym. W powyższych analizach w elementach betonowych zlokalizowanych w pobliżu miejsca przyłożenia obciążenia powstały rysy od ściskania w kierunku y prostopadłym do głównych naprężeń rozciągających. Bardzo prawdopodobna jest hipoteza, że proces zniszczenia w skrajnych ściskanych włóknach betonu zależy od wzrostu odkształceń poprzecznych związanych ze współczynnikiem Poissona ν_c [20]. Jednakże charakter mechanizmu zmiażdżenia nie został dotychczas ściśle opisany.

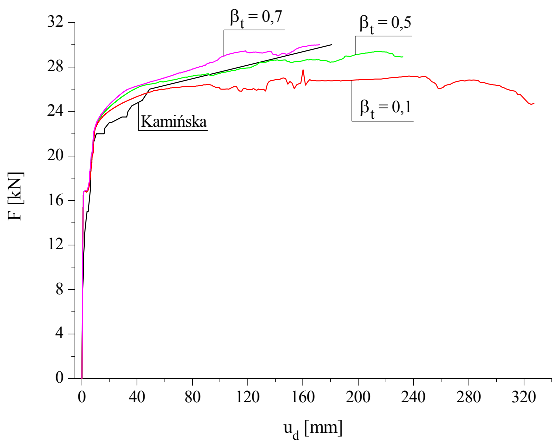
5.7. Wpływ parametru ścinania przy rozciąganiu β_t na zależność siła-przemieszczenie belki wzmocnionej o niskim stopniu zbrojenia

Celem niniejszej części pracy jest analiza wpływu zmienności parametru ścinania β_t dla rozwarcia rys w modelowej belce żelbetowej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcania. W modelowaniu numerycznym rozmytych rys, konieczne jest zastosowanie opisu uwzględniającego zachowanie betonu po ich powstaniu. W zarysowanym betonie założono jego wzmocnienia przy ścinaniu poprzez wprowadzenie parametrów ścinania dla rozwarcia β_t i zamknięcia rys β_c dobranych z przedziału wartości $\langle 0,1 \rangle$. Dolna wartość opisuje gładką powierzchnię rysy i informuje o utracie zdolności do przenoszenia ścinania, natomiast górna wartość reprezentuje nierówną powierzchnię rysy i jej zdolność do przenoszenia ścinania. Uzyskane własne wyniki numeryczne zestawiono z wynikami doświadczalnymi [55] w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki $(F - u_d)$. Wstępnie przeprowadzone analizy obejmowały różne warianty wartości parametru nośności na ścinanie β_t.

W pracach Bangasha [8], Hemmaty i in. [48, 49], Kachlakeva i in. [54], Waszczyszyna [111] i Wolanskiego [118] wartość parametru nośności na ścinanie dla rozwarcia rys β_t przyjmowano z przedziału od 0,05 do 0,25.

Na Rys. 5.11 zilustrowano porównanie nieliniowych zależności $(F - u_d)$ dla belki BP-1a otrzymanych w wyniku przeprowadzonych analiz numerycznych i doświadczenia. Obliczenia numeryczne belki prostokątnej BP-1a z betonu o wysokiej wytrzymałości wykonano przy wykorzystaniu quasi newtonowskiej przyrostowo-iteracyjnej metody rozwiązywania równań nieliniowych z ustalaniem spadku adaptacyjnego.

Wszystkie rozwiązania uzyskano w wyniku analiz dużych odkształceń. Dzięki uwzględnieniu nieliniowych efektów geometrycznych otrzymano znacznie lepszą zgodność wyników numerycznych i eksperymentalnych. W analizowanych rozwiązaniach przestrzennego modelu belki żelbetowej BP-1a z betonu wysokiej wytrzymałości stałymi parametrami są określony doświadczalnie moduł sprężystości $E_c = 35300$ MPa i wytrzymałość na ściskanie $f_c = 81{,}2$ MPa, parametr ścinania dla zamknięcia się rys $\beta_c = 0{,}99$ oraz sztywność resztkowa $c_{stif} = 10^{-4}$. Wszystkie wyniki numeryczne przedstawione na Rys. 5.11 w postaci krzywych obciążenie-przemieszczenie uzyskano dla założonego sprężysto-idealnie plastycznego modelu stali zbrojeniowej oraz sprężysto-kruchego modelu betonu z osłabieniem przy rozciąganiu. Natomiast przy ściskaniu założono zmodyfikowany sprężysto-plastyczny model betonu Stolarskiego bez wytrzymałości resztkowej. Parametrem zmiennym we wszystkich przedstawionych analizach jest parametr ścinania dla rozwarcia rys β_t. Dla parametru ścinania $\beta_t = 0{,}5$ uzyskano wyniki zbliżone do wartości oczekiwanych.



Rys. 5.11. Zestawienie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia uzyskanych różnymi metodami numerycznymi.

6. ROZWIĄZANIE BELKI WZMOCNIONEJ O NISKIM STOPNIU ZBROJENIA WEDŁUG PROPONOWANEJ METODYKI USTALANIA PARAMETRÓW MODELU KONSTYTUTYWNEGO BETONU

6.1. Metodyka doboru parametrów modelu betonu

Celem niniejszej części pracy jest analiza zachowania modelowej belki żelbetowej z betonu o wysokiej wytrzymałości w procesie statycznego odkształcania. W numerycznym modelu przestrzennej belki żelbetowej z betonu wysokiej wytrzymałości zastosowano wymiary elementu jak dla wolnopodpartej belki prostokątnej BP-1a badanej i opisanej przez Kamińską w pracy [55]. Wyniki obliczeń numerycznych otrzymane przy użyciu metod Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym i ustalania długości łuku Crisfielda porównano z wynikami doświadczalnymi [55].

Mather [72] wykazał, że teoretycznie powinno być możliwe wyrażenie kryteriów zniszczenia betonu we wszystkich możliwych kombinacjach naprężeń przez jeden parametr tzn. wytrzymałość betonu na ściskanie w stanie jednoosiowym. Jednak takie uniwersalne rozwiązanie nie zostało dotąd znalezione. W celu oszacowania wytrzymałości betonu na ściskanie w istniejących konstrukcjach najczęściej wykonuje się badania rdzeni betonowych. Ogólnie, gdy znana jest wartość wytrzymałości betonu na ściskanie to możliwe jest ustalenie kompletu danych materiałowych niezbędnych do przeprowadzenia obliczeń w nieliniowym modelu numerycznym.

W trzech przedstawionych propozycjach rozwiązania numerycznego belki BP-1a wszystkie parametry modelu betonu wysokiej wytrzymałości ustalono na podstawie jednego parametru – określonej doświadczalnie wytrzymałości na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia. Natomiast wszystkie parametry stali zbrojeniowej przyjęto na podstawie wartości podanych w normie projektowania dostosowanych do wymogów bezpieczeństwa konstrukcji [86].

W pierwszej wersji rozwiązania numerycznego model betonu opisuje trójparametrowa powierzchnia graniczna interpretowana jako trójosiowa powierzchnia zniszczenia betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu i rozciąganiu zgodna z teorią Willama-Warnke oraz własna propozycja prawa ewolucji tej powierzchni w funkcji odkształcenia.

Właściwości materiałów konstrukcyjnych belki BP-1a określają następujące parametry modeli konstytutywnych:

BETON WYSOKIEJ WYTRZYMAŁOŚCI

- wytrzymałość na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia ustalona doświadczalnie przez Kamińską [55] f_c = 81,2 MPa,
- moduł sprężystości obliczony zgodnie ze wzorem Carasquillo oraz normą ACI 363 [3] $E_c = 3,32\sqrt{f_c} + 6,9$, E_c = 36817 MPa,

- wytrzymałość na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia obliczona zgodnie ze wzorem Carasquillo oraz normą ACI 363 [3] $f_t = 0,54\sqrt{f_c}$, f_t = 4,87 MPa,
- współczynnik Poissona ν_c = 0,15 [77],
- gęstość betonu ρ_c = 2600 kg/m^3,
- graniczne odkształcenia w fazie wzmocnienia sprężysto-plastycznego ε_{c1} = 6 ‰,
- graniczne odkształcenia w fazie osłabienia ε_{cu} = 12 ‰,
- parametr nośności na ścinanie dla rozwarcia rys β_t = 0,5, założony na podstawie własnych analiz numerycznych,
- parametr nośności na ścinanie dla zamknięcia się rys β_c = 0,99,

STAL ZBROJENIOWA

- moduł sprężystości dla prętów ϕ6 ze stali A-II, ϕ10 ze stali A-III E_s = 200 GPa,
- granica plastyczności dla prętów ϕ10 ze stali A-III f_y = 410 MPa, dla ϕ6 ze stali A-II f_y = 355 MPa,
- współczynnik Poissona ν_s = 0,3,
- gęstość stali ρ_s = 7800 kg/m^3,

STAL PŁYT PODPOROWYCH I PRZEKAZUJĄCYCH OBCIĄŻENIE

- moduł sprężystości E_s = 210 GPa,
- współczynnik Poissona ν_s = 0,3,
- gęstość stali ρ_s = 7800 kg/m^3.

W drugiej wersji rozwiązania numerycznego model betonu opisuje pięcioparametrowa powierzchnia graniczna betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu i rozciąganiu zgodna z teorią Willama-Warnke oraz własna propozycja prawa ewolucji tej powierzchni w funkcji odkształcenia. Właściwości materiałów konstrukcyjnych belki BP-1a określają oprócz wszystkich przedstawionych powyżej parametrów modeli konstytutywnych dodatkowe parametry opisujące powierzchnię graniczną betonu wysokiej wytrzymałości obliczone na podstawie wzorów przedstawionych w pracy Willama i Warnke [116]:

DODATKOWE PARAMETRY DLA BETONU WYSOKIEJ WYTRZYMAŁOŚCI

- wytrzymałość w stanie dwuosiowego ściskania $f_{cb} = 1,2f_c$,

f_{cb} = 97,4 MPa,

- wytrzymałość w stanie dwuosiowego ściskania nałożona dodatkowo w stanie naprężenia hydrostatycznego σ_h^a, $f_1 = 1,45 f_c$, f_1 = 117,7 MPa,
- wytrzymałość w stanie jednoosiowego ściskania nałożona dodatkowo w stanie naprężenia hydrostatycznego σ_h^a, $f_2 = 1,725 f_c$,

  f_2 = 140,1 MPa,
- stan naprężenia hydrostatycznego opisujący średni rozkład naprężeń normalnych $\sigma_h = 1,73 f_c$, σ_h = 140,5 MPa,
- mnożnik sztywności strefy rozciąganej w fazie zarysowania T_c = 1.

Natomiast modele materiałowe w wersji trzeciej rozwiązania numerycznego są identyczne z przedstawioną powyżej pierwszą propozycją rozwiązania numerycznego. Przy czym w pierwszych dwóch wariantach rozwiązania zastosowano metodę ustalania długości łuku Crisfielda. Natomiast w trzeciej propozycji rozwiązania wykorzystano metodę Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym.

Wszystkie obliczenia numeryczne wykonano dla sprężysto-idealnie plastycznego modelu stali zbrojeniowej oraz sprężysto-kruchego modelu betonu z osłabieniem przy rozciąganiu. Natomiast przy ściskaniu założono własną propozycję sprężysto-plastycznego modelu betonu z wytrzymałością resztkową równą 80 % i sztywność resztkową w zarysowanym lub zmiażdżonym skończonym elemencie materiału matrycy betonowej równą c_{stif} = 0,5. Dzięki uwzględnieniu zmiażdżenia betonu i nieliniowych efektów geometrycznych zarówno przy użyciu metody Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym, jak i metody Crisfielda ustalania długości łuku otrzymano znacznie lepszą zgodność wyników numerycznych i eksperymentalnych.

6.2. Analiza stanu zarysowania

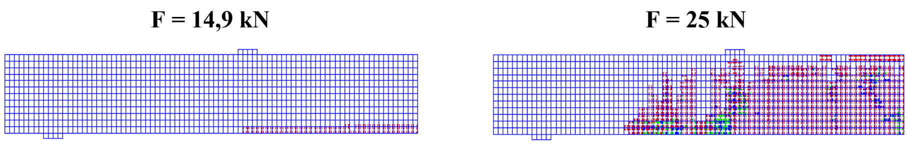
Na Rys. 6.1 prezentowane są mapy rys rozmytych dla różnych poziomów obciążenia otrzymane dla trzech propozycji rozwiązania numerycznego modelowej belki BP-1a. W pierwszym i trzecim rozwiązaniu numerycznym powierzchnia graniczna betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu i rozciąganiu jest opisana za pomocą trzech parametrów materiałowych. Zaś w drugim rozwiązaniu powierzchnię graniczną betonu charakteryzuje pięć parametrów. W obydwu rozwiązaniach metodą Crisfielda pierwsze rysy powstają na odcinku oddziaływania stałego momentu dla obciążenia rysującego F_{cr} = 14,9 kN, a więc prawie w tej samej chwili co w przypadku zarejestrowanej doświadczalnie wartości obciążenia rysującego równej

F_{cr} = 15 kN. Różnica pomiędzy obciążeniem rysującym obliczonym i doświadczalnym wynosi ok. 0,7 %. Natomiast w rozwiązaniu numerycznym metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym pierwsza rysa powstaje również na odcinku czystego zginania dla obciążenia F_{cr} = 15,2 kN, co stanowi ok. 2 % różnicy w porównaniu z rozwiązaniami numerycznymi metodą długości łuku.

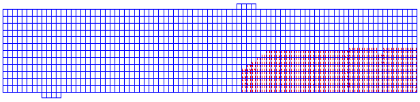
W pierwszych dwóch rozwiązaniach numerycznych rysy prostopadłe od zginania propagują się w obszarze działania stałego momentu do obciążenia równego 20 kN. W miarę jego dalszego przyrostu obszar zarysowany zwiększa się poziomo ku podporze. W trzecim rozwiązaniu procesy zarysowania przebiegają szybciej do chwili uplastycznienia zbrojenia. We wszystkich prezentowanych rozwiązaniach obserwuje się znaczny wzrost zarysowania belki dla obciążenia 25 kN po uplastycznieniu stali zbrojeniowej. Wyraźnie widoczne są rysy wywołane ściskaniem w strefie przyłożonego obciążenia i rysy od zmiażdżenia w strefie czystego zginania. W obydwu rozwiązaniach metodą Crisfielda otrzymano identyczne obrazy rys rozmytych aż do obciążenia 25 kN. W końcowych etapach obciążenia począwszy od 27 kN aż do chwili zniszczenia we wszystkich przypadkach zaobserwowano spotęgowanie procesów degradacji w strefie czystego zginania polegające na pojawieniu się nowych rys w płaszczyznach prostopadłych dotychczas niezarysowanych, którym równocześnie towarzyszy w przybliżeniu stały obszar rys w strefie przypodporowej.

W rozwiązaniach numerycznych stan graniczny nośności zarejestrowano kolejno dla wartości obciążeń F_u = 31,3 kN, F_u = 29,7 kN i F_u = 31,8 kN i zinterpretowano jako stan osiągany dla takiej wartości obciążenia, dla której jest obserwowany gwałtowny przyrost przemieszczenia przy małych przyrostach obciążenia w wyniku którego rozwiązania numeryczne nie są zbieżne. Chociaż w doświadczeniu Kamińskiej [55] nie zaobserwowano zniszczenia belki, to wyznaczona z warunku odkształceń wartość obciążenia maksymalnego F_u = 30 kN jest zbliżona do wartości obciążeń niszczących otrzymanych w trzech rozwiązaniach numerycznych.

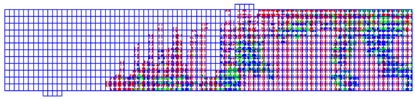
Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



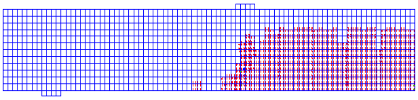
F = 13,3 kN



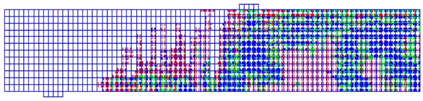
F = 27 kN



F = 21 kN

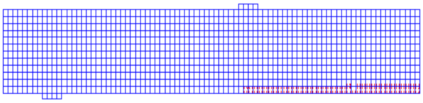


F = 31,3 kN

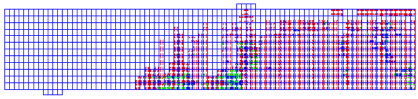


Pięcioparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])

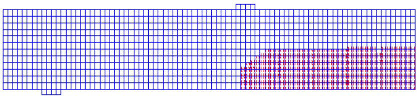
F = 14,9 kN



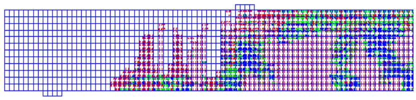
F = 25 kN



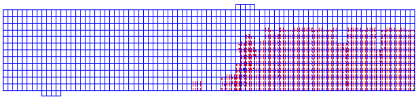
F = 13,3 kN



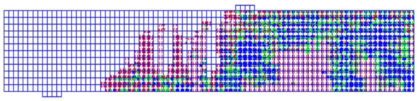
F = 27 kN



F = 21 kN

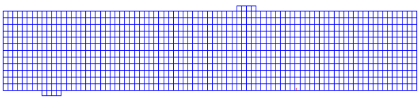


F = 29,7 kN

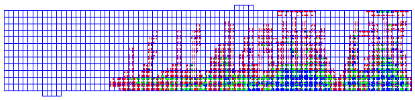


Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad])

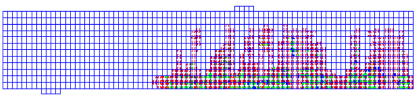
F = 15,2 kN



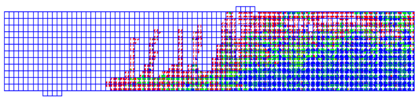
F = 25 kN



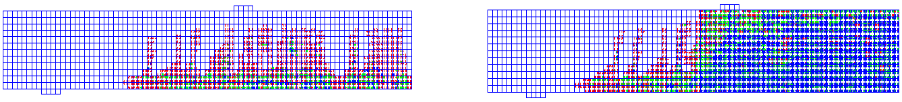
F = 18 kN



F = 27 kN

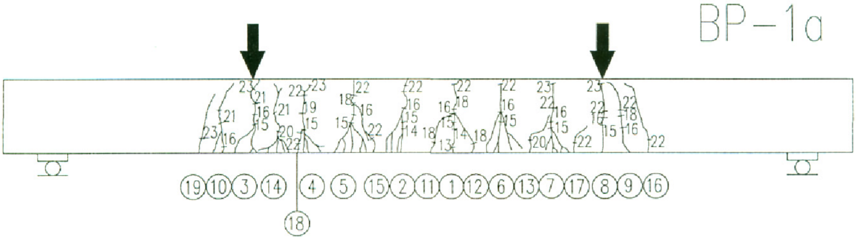


F = 21 kN **F = 31,8 kN**

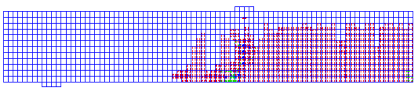


Rys. 6.1. Mapy rys rozmytych dla różnych poziomów obciążenia.

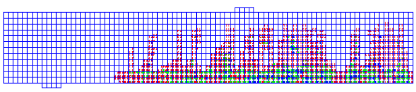
Na Rys. 6.2 porównano obraz rzeczywistego zarysowania całej belki BP-1a z obrazami numerycznymi rys rozmytych dla lewej połowy belki przy tym samym poziomie obciążenia $F = 23$ kN. Wszystkie otrzymane wyniki numeryczne obszarów zarysowanych są jakościowo zgodne, co do usytuowania, kierunku i koncentracji z wynikami doświadczalnymi. W przypadku rozwiązania numerycznego metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym zaobserwowano nieznacznie większe obszary rys rozmytych.



Trójparametrowa i pięcioparametrowa powierzchnia graniczna
(metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



Trójparametrowa powierzchnia graniczna
(metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad])

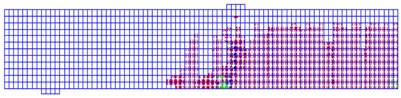


Rys. 6.2. Eksperymentalny i numeryczne obrazy zarysowania belki BP-1a dla siły F = 23 kN.

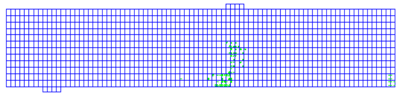
Na Rys. 6.3 przedstawiono porównanie map rys rozmytych w trzech płaszczyznach prostopadłych belki BP-1a z rozkładami naprężeń normalnych i stycznych przy tym samym poziomie obciążenia $F = 23$ kN.

Trójparametrowa i pięcioparametrowa powierzchnia graniczna
(metoda długości łuku Crisfielda [A-L])

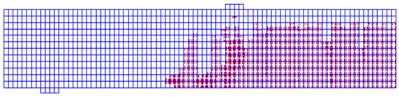
zarysowanie sumaryczne



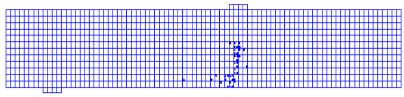
zarysowanie w płaszczyźnie yz



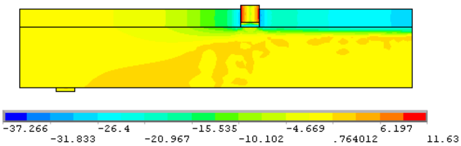
zarysowanie w płaszczyźnie xy



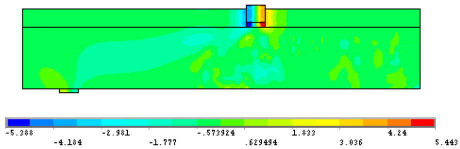
zarysowanie w płaszczyźnie xz



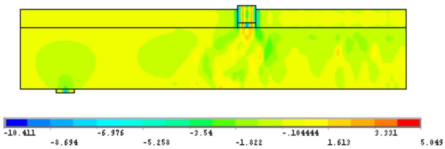
naprężenie normalne σ_x



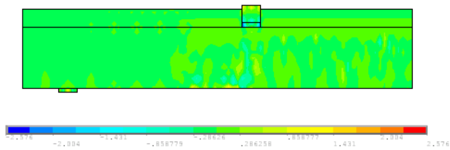
naprężenie styczne σ_{xy}



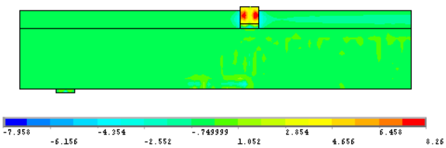
naprężenie normalne σ_y



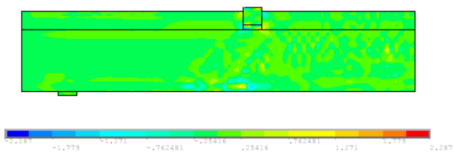
naprężenie styczne σ_{yz}



naprężenie normalne σ_z

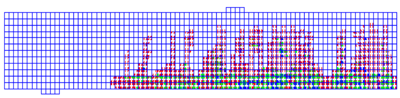


naprężenie styczne σ_{xz}

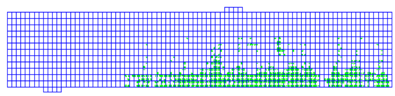


Trójparametrowa powierzchnia graniczna
(metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad])

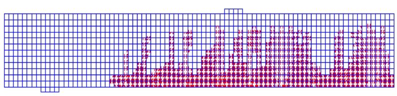
zarysowanie sumaryczne



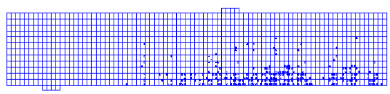
zarysowanie w płaszczyźnie yz

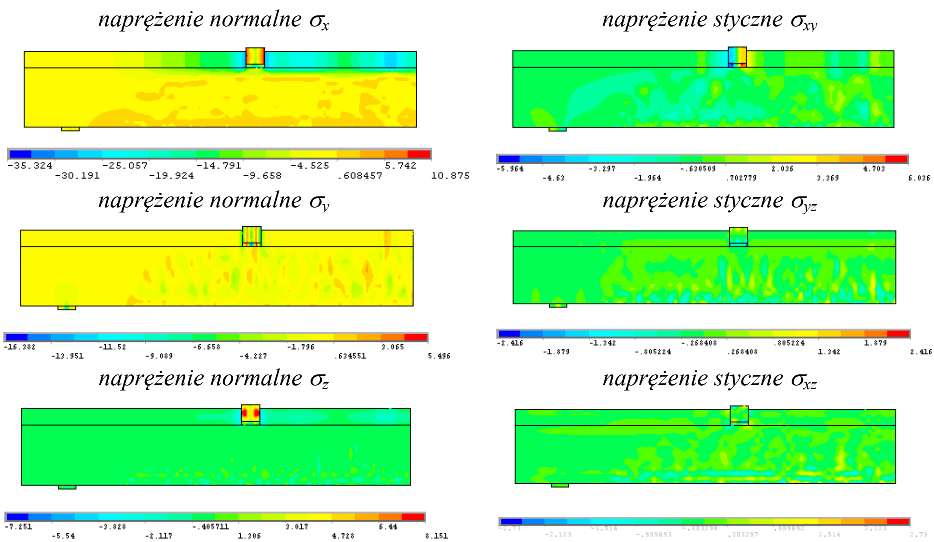


zarysowanie w płaszczyźnie xy



zarysowanie w płaszczyźnie xz





Rys. 6.3. Zestawienie map rys rozmytych w trzech płaszczyznach prostopadłych belki BP-1a i rozkładów naprężeń normalnych i stycznych dla siły F = 23 kN.

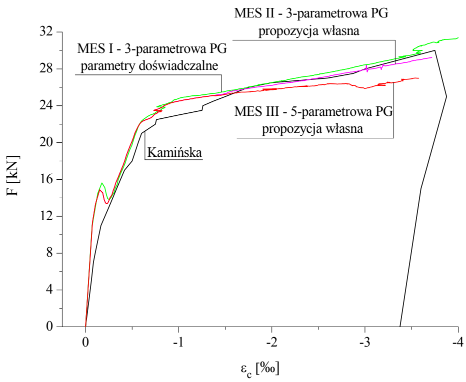
Numeryczne obrazy rys rozmytych uzyskane w rozwiązaniach metodą długości łuku Crisfielda najlepiej odzwierciedlają pod względem ilościowym rzeczywiste obszary zarysowania. Natomiast obrazy rys otrzymane w rozwiązaniu metodą Newtona-Raphsona charakteryzują się lepszym usytuowaniem i koncentracją. Doskonalsze obrazy rys w rozwiązaniach metodą Crisfielda można uzyskać poprzez redukcję minimalnego kroku przyrostu obciążenia, co równocześnie wiąże się ze znacznie wydłużonym czasem trwania obliczeń numerycznych. Niewątpliwie w tak przeprowadzonych obliczeniach nie zostaną pominięte niektóre fazy pracy zginanych belek żelbetowych, poprawiona będzie lokalizacja rys pierwotnych i powstaną mniejsze obszary rys rozmytych w poszczególnych etapach obciążenia.

6.3. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

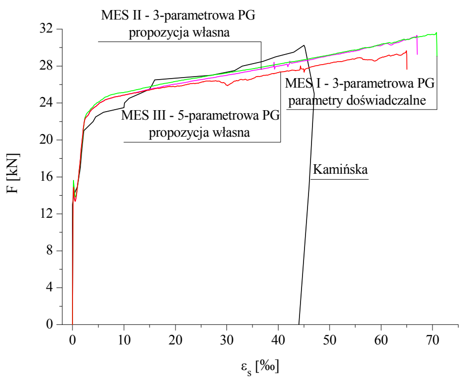
Do obserwacji zmian odkształcenia betonu w zależności od obciążenia przyjęto punkt na górnej krawędzi w przekroju środkowym belki BP-1a, natomiast do rejestracji zmian odkształcenia stali w zależności od obciążenia przyjęto punkt w miejscu usytuowania pręta podłużnego w strefie rozciąganej w przekroju środkowym belki, zgodnie z Rys. 4.2.

Na Rys. 6.4 przedstawiony jest rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu, a na Rys. 6.5 prezentowane są zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia F w środku modelu numerycznego i eksperymentalnej belki BP-1a. Wszystkie wykresy obciążenie-odkształcenie dla betonu i stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzują się zgodnym przebiegiem z krzywymi eksperymentalnymi. Pomiędzy wynikami numerycznymi otrzymanymi metodą Crisfielda a wynikami doświadczalnymi odkształcalności materiałów konstrukcyjnych zaobserwowano nieznaczne różnice w obszarze naprężeń niesprężystych. W chwili uplastycznienia zbrojenia rozciąganego wyraźnie widoczne jest załamanie wykresów. Na trzech wykresach otrzymanych w wyniku obliczeń numerycznych metodą Crisfielda widoczny jest charakterystyczny nieznaczny spadek obciążenia w chwili powstania pierwszych rys. Szczegółowe wyniki pierwszego rozwiązania metodą długości łuku Crisfielda (MES I) dla parametrów powierzchni granicznej betonu wyznaczonych doświadczalnie przez Kamińską [55] zaprezentowano w rozdziale 4.3.3.

W przypadku krzywych doświadczalnych, oznaczonych na Rys. 6.4-6.5 kolorem czarnym, przedstawiono gałęzie odciążenia elementu zarejestrowane po wyczerpaniu możliwości technicznych stanowiska badawczego.



Rys. 6.4. Porównanie rozwoju odkształceń w środku belki skrajnych włókien strefy ściskanej betonu.

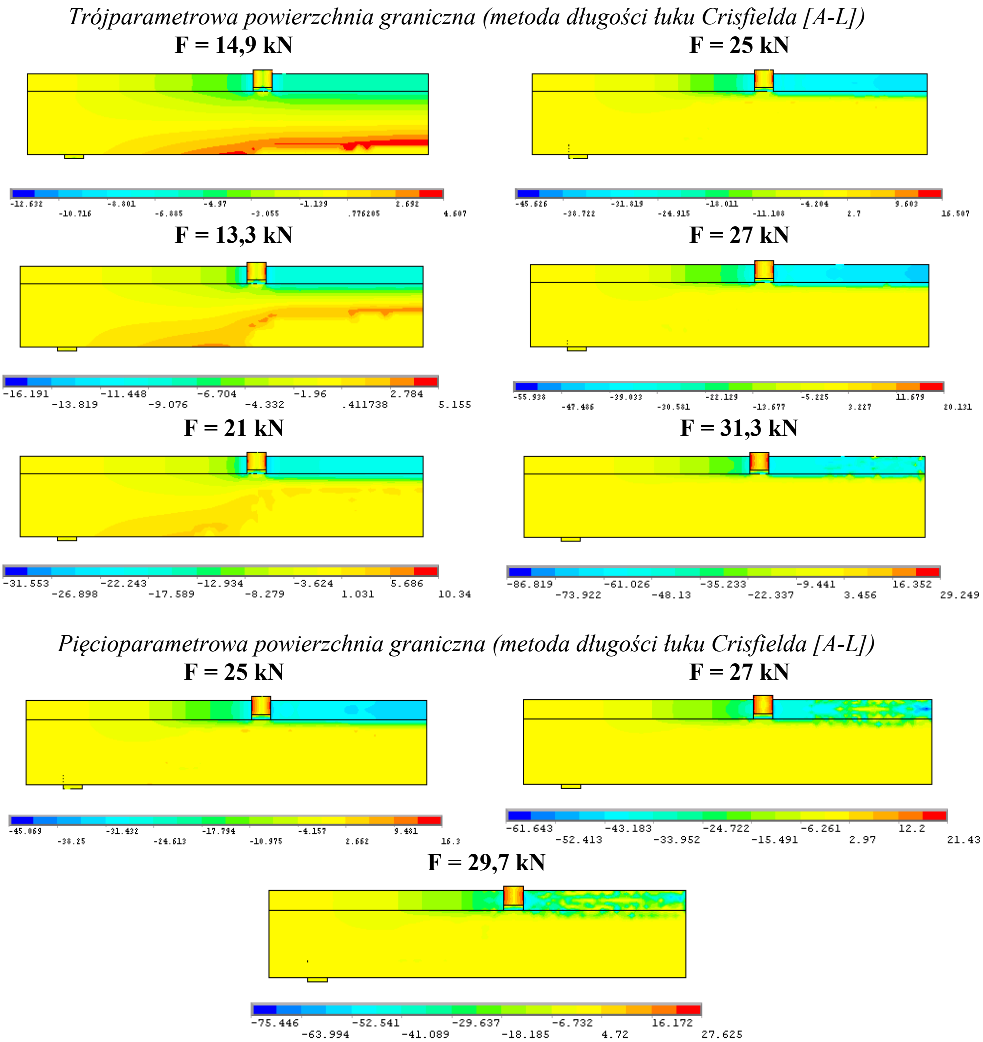


Rys. 6.5. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belki.

Na Rys. 6.6-6.11 zaprezentowano zmienność stref niesprężystego zachowania betonu w zależności od poziomu obciążenia zewnętrznego. W kolejności przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ oraz naprężeń stycznych $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ z uwagi na symetrię elementu dla lewej połowy analizowanej belki BP-1a ilustrujące zmiany jej stanu wytężenia przy kolejnych poziomach obciążenia zewnętrznego F. Otrzymane wartości naprężeń normalnych i stycznych przedstawione na rysunkach w postaci legendy są wyrażone w MPa. Na wszystkich rysunkach wyeksponowano różnice występujące w rozkładach naprężeń na końcowych etapach obciążenia w obydwu rozwiązaniach numerycznych metodą Crisfielda wynikające z liczby parametrów opisujących powierzchnię graniczną betonu.

Na Rys. 6.6 przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_x dla lewej połowy belki. Poniżej obciążenia F = 14,9 kN obserwuje się rozkład naprężeń charakterystyczny dla zakresu sprężystej pracy belki. Z kolei na poziomie powyższego obciążenia powstały pierwsze procesy plastyczne w betonie i wzdłuż zbrojenia głównego wąski obszar betonu zarysowanego na odcinku oddziaływania stałego momentu. W pozostałej części belki beton pracuje w zakresie sprężystym zarówno na ściskanie jak i rozciąganie.

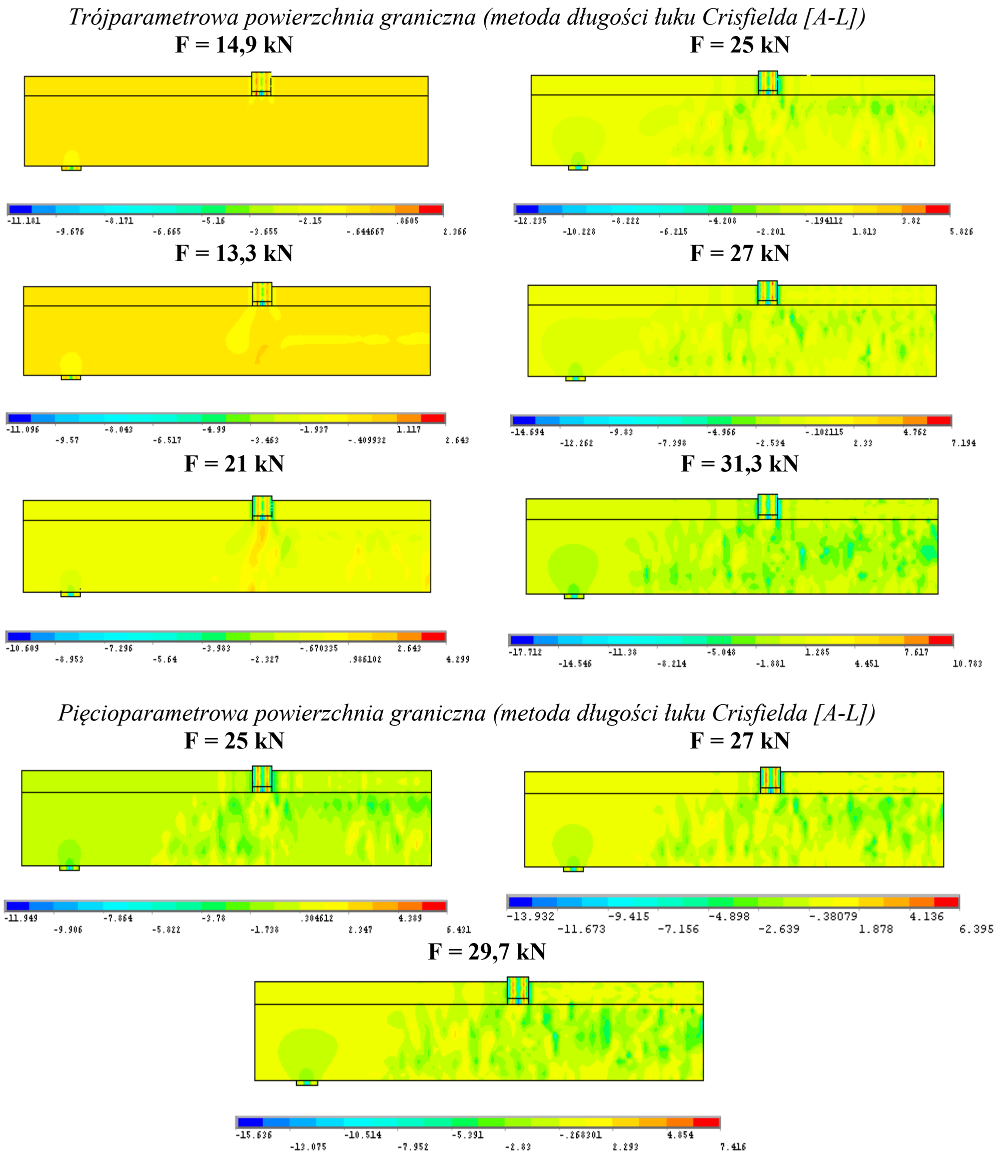
Dalszy proces obciążenia powoduje, iż beton w strefie czystego zginania ulega gwałtownym procesom zarysowania, co wywołuje chwilowy spadek siły do wartości F = 13,3 kN. Obszary naprężeń odpowiadające obszarom rys rozmytych są regularne. Jednocześnie wraz ze wzrostem obciążenia można obserwować zbliżanie się osi obojętnej do skrajnych włókien ściskanych. Przy poziomie obciążenia F = 21 kN obszar uplastycznienia betonu rozciąganego jest mniejszy. Charakterystyczny dla rozkładu jest falisty przebieg osi obojętnej i stopniowo malejące obszary uplastycznienia betonu rozciąganego. Z kolei dla obciążenia F = 25 kN w fazie uplastycznienia zbrojenia obserwuje się rozwój procesów miażdżenia w strefie uplastycznienia betonu ściskanego. Dla wartości obciążenia F_u = 31,3 kN w przypadku trójparametrowej powierzchni granicznej nastąpiło przekroczenie poziomu nośności belki i konstrukcja ulega lokalnemu zniszczeniu poprzez zmiażdżenie betonu w strefie ściskanej przekroju. Natomiast w przypadku pięcioparametrowej powierzchni granicznej przekroczenie poziomu nośności belki i lokalne zmiażdżenie betonu nastąpiło nieco wcześniej, bo dla poziomu obciążenia F_u = 29,7 kN. W momencie zniszczenia oś obojętna w obydwu rozwiązaniach zajmuje położenie bardzo bliskie krawędzi ściskanej. Rysy przecinają tu niemal cały przekrój. Szczególnie gwałtowny rozwój procesów miażdżenia betonu ściskanego jest widoczny w rozwiązaniu otrzymanym dla przypadku pięcioparametrowej powierzchni granicznej.



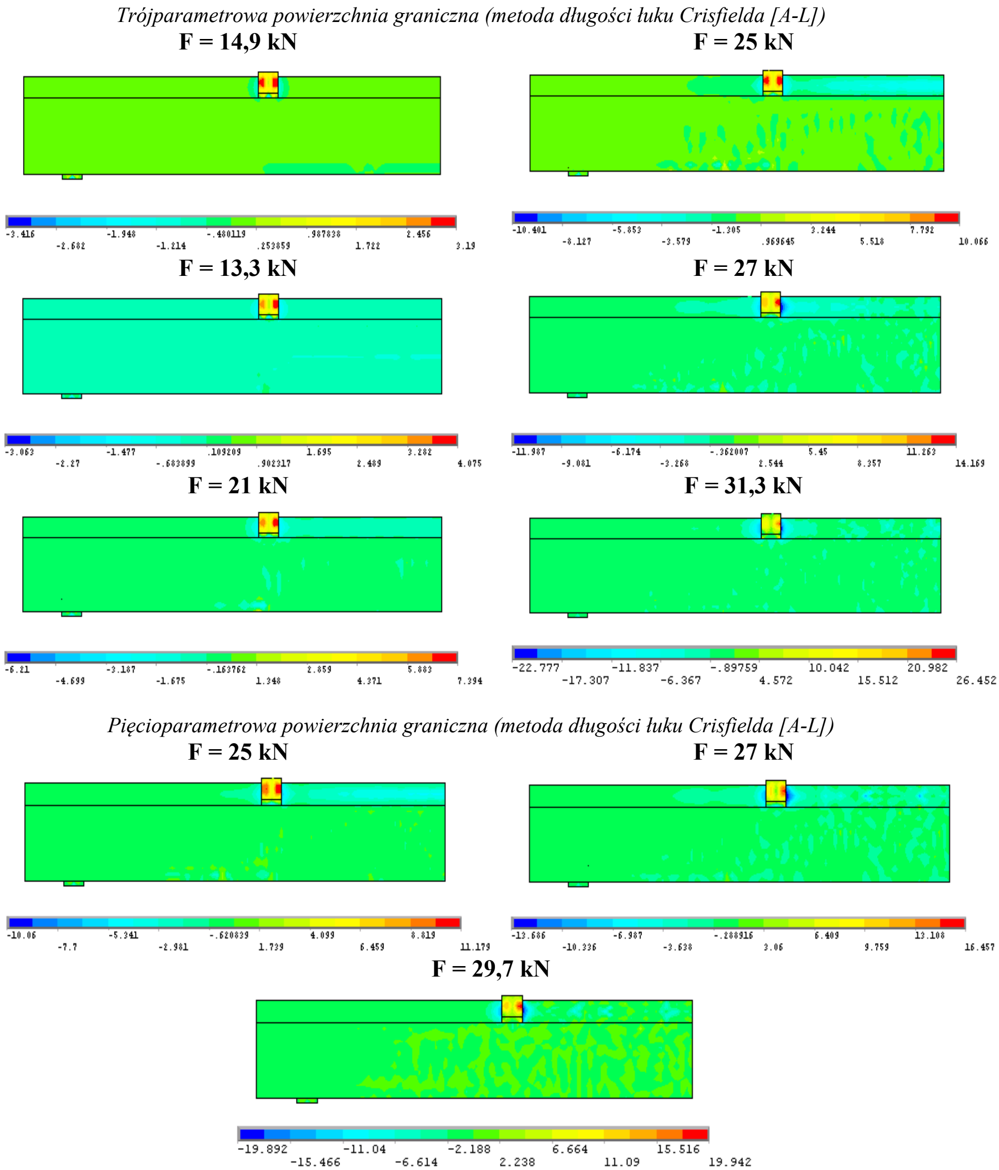
Rys. 6.6. Rozkład naprężeń normalnych σ_x dla różnych poziomów obciążenia.

Na Rys. 6.7 i 6.8 przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_y i σ_z dla połowy elementu. Na Rys. 6.7 zaobserwowano rozwój obszarów normalnych naprężeń ściskających σ_y nad podporą i w strefie przyłożonego obciążenia, a naprężeń rozciągających σ_y w środku belki w zakresie obciążenia od F = 14,9 kN aż do F = 25 kN. Uplastycznienie stali zbrojeniowej w obydwu rozwiązaniach wywołuje większe naprężenia w skrajnych włóknach ściskanych w osi belki. W końcowych etapach obciążenia po uplastycznieniu stali zbrojeniowej zaobserwowano dalszy wzrost wartości naprężeń ściskających

σ_y w obszarach nad podporą, w strefie przyłożonego obciążenia oraz w ściskanej części belki na długości odcinka czystego zginania. Z kolei w obydwu rozwiązaniach numerycznych naprężenia ściskające σ_z rozwijają się w skrajnych włóknach betonu ściskanego pomiędzy siłami skupionymi w końcowych etapach obciążenia.



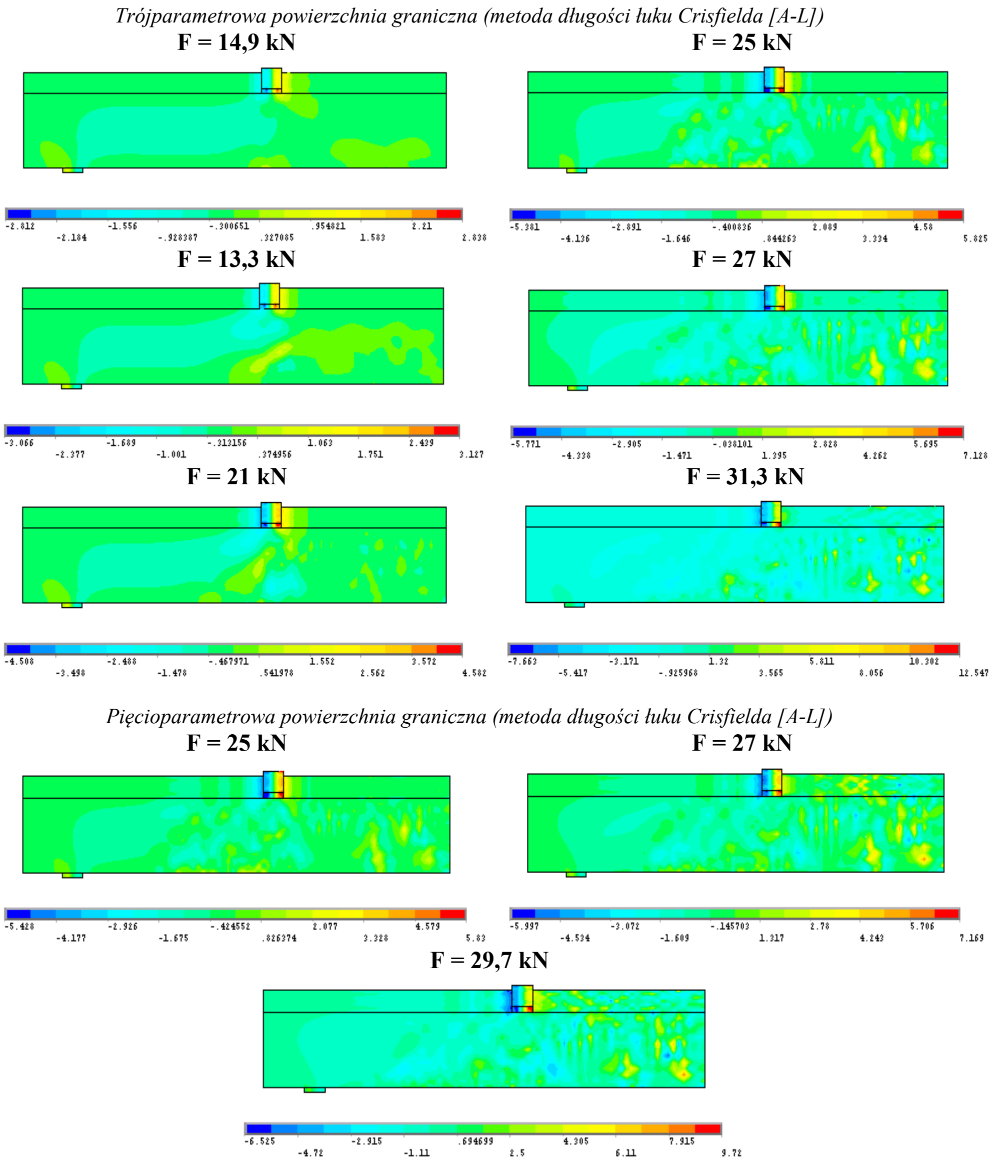
Rys. 6.7. Rozkład naprężeń normalnych σ_y dla różnych poziomów obciążenia.



Rys. 6.8. Rozkład naprężeń normalnych σ_z dla różnych poziomów obciążenia.

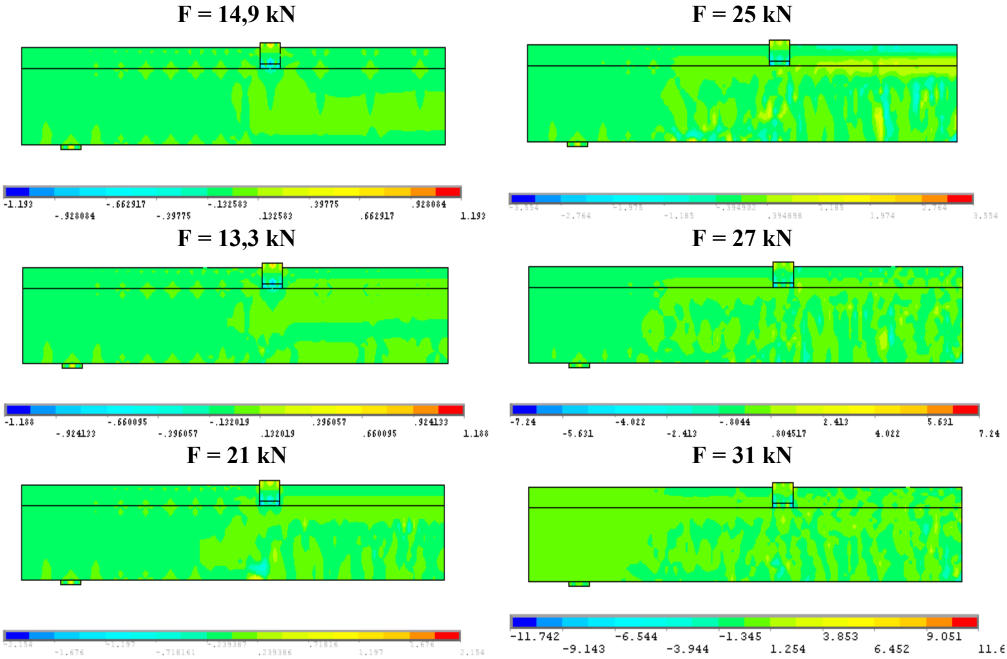
Rozkłady naprężeń stycznych $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$, dla ½ belki BP-1a, w zależności od poziomu obciążenia zewnętrznego F dla rozwiązań numerycznych metodą Crisfielda przedstawiono na Rys. 6.9-6.11. Rozwój naprężeń stycznych w trzech płaszczyznach prostopadłych jest zgodny z obszarem rys rozmytych. Rozciągające naprężenia normalne σ_x i ściskające naprężenia styczne

σ_{xy} wyznaczają ukośny kierunek naprężeń głównych i decydują o powstaniu w płaszczyźnie prostopadłej rys ukośnych w strefach przypodporowych. Z kolei rozciągające naprężenia styczne σ_{yz} i σ_{xz} przyczyniają się do rozwoju zarysowania betonu w strefie oddziaływania stałego momentu na odcinku czystego zginania i w poziomie zbrojenia głównego na długości belki.

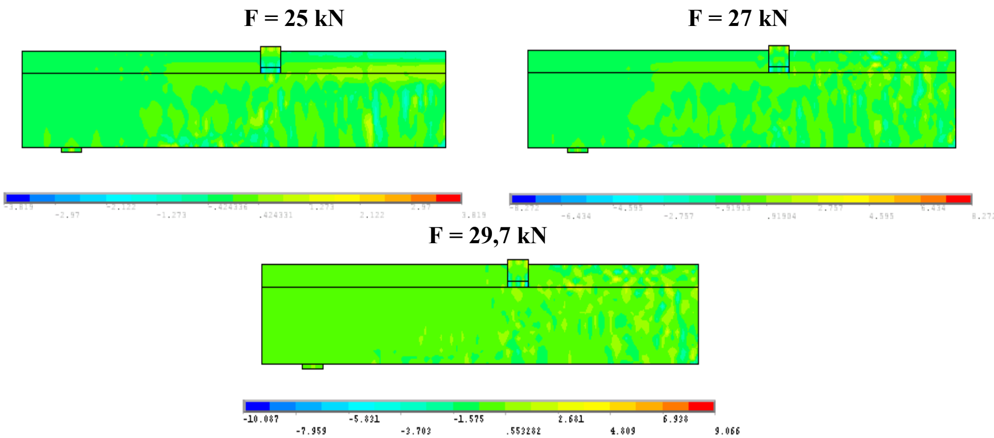


Rys. 6.9. Rozkład naprężeń stycznych σ_{xy} dla różnych poziomów obciążenia.

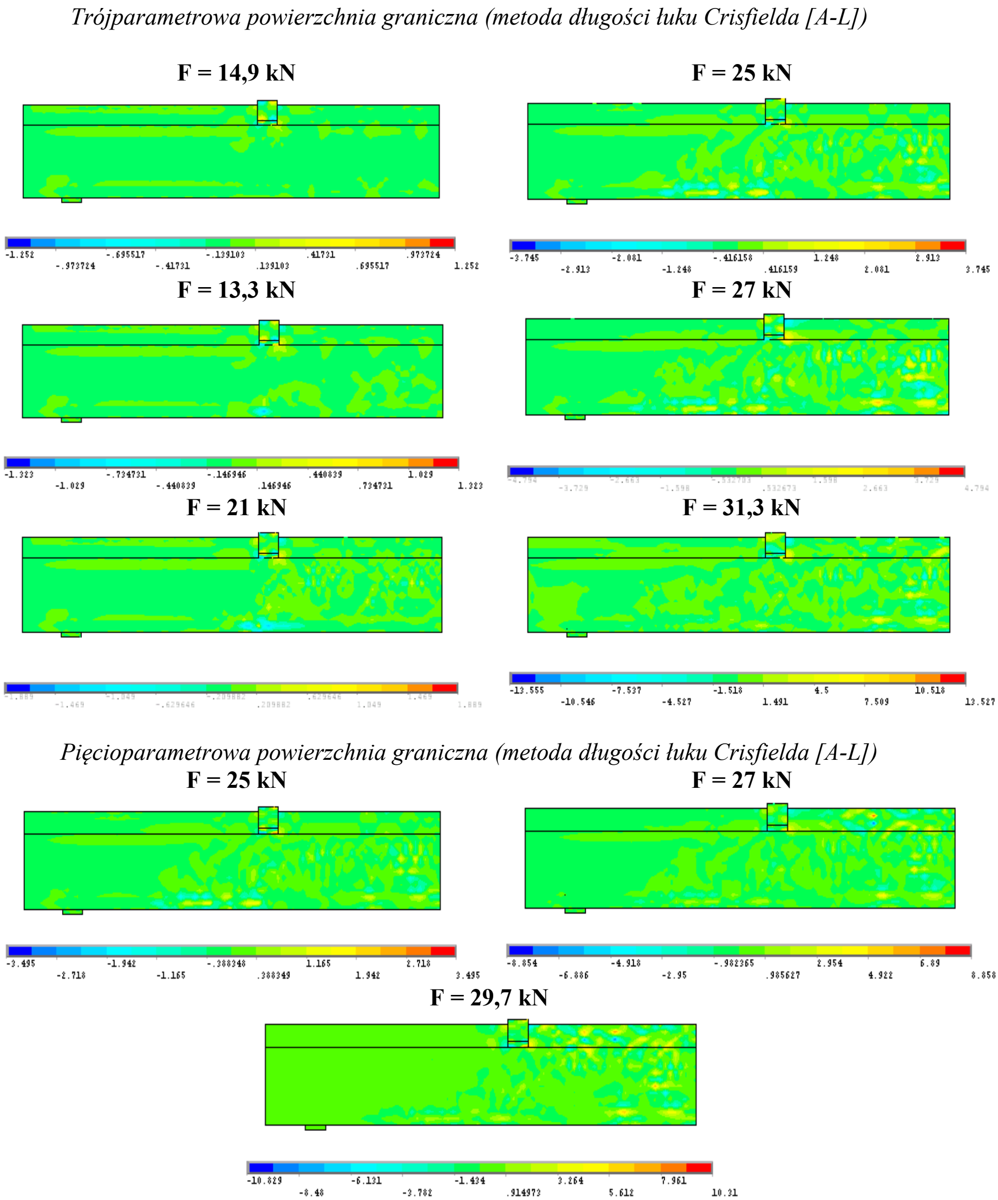
Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



Pięcioparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])

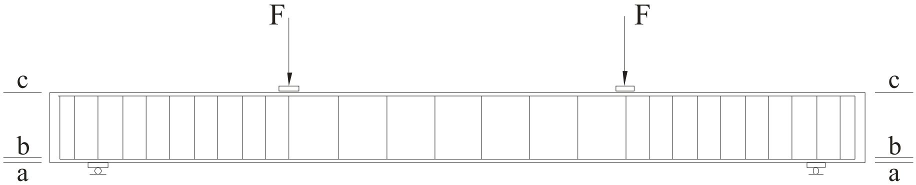


Rys. 6.10. Rozkład naprężeń stycznych σ_{yz} dla różnych poziomów obciążenia.



Rys. 6.11. Rozkład naprężeń stycznych σ_{xz} dla różnych poziomów obciążenia.

Na Rys. 6.12 przedstawiono usytuowanie przekrojów, w których zobrazowano rozkłady naprężeń normalnych σ_x w materiale matrycy betonowej i stali zbrojeniowej. Z uwagi na symetrię konstrukcji prezentowane wyniki dotyczą lewej połowy analizowanej belki BP-1a.

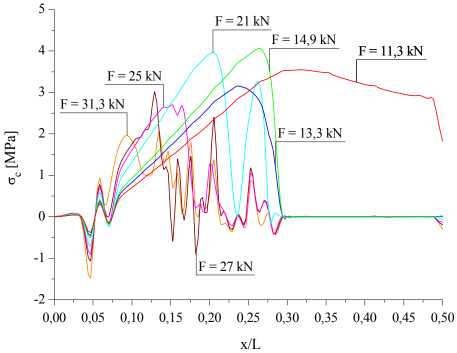


Rys. 6.12. Schemat usytuowania przekrojów obserwacji stanu naprężenia.

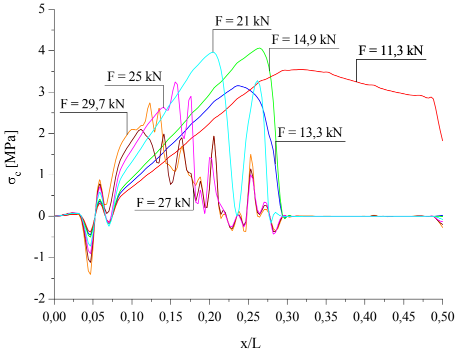
W pierwszej grupie rysunków przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_c w materiale matrycy betonowej na długości elementu.

Na Rys. 6.13 zilustrowano rozkłady naprężeń normalnych σ_c w przekroju *a-a*. Natomiast na Rys. 6.14 przedstawiono zmienność naprężeń σ_c w przekroju *c-c*.

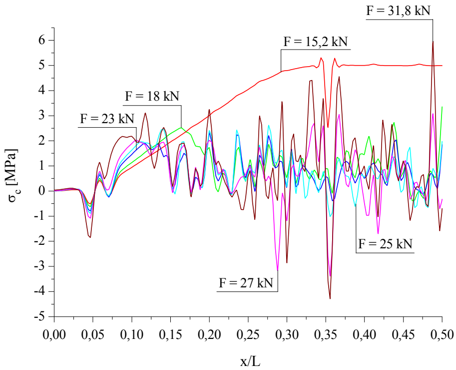
Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



Pięcioparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])

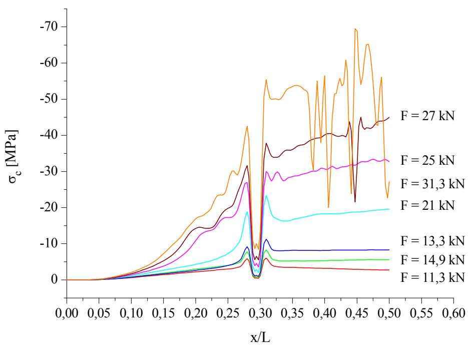


Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad])

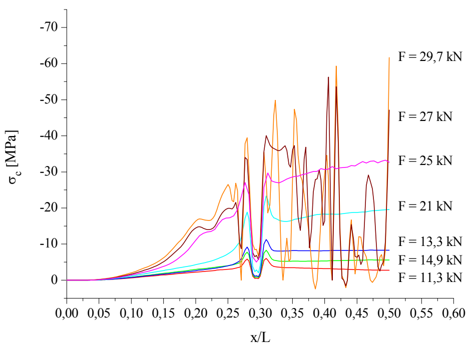


Rys. 6.13. Rozkład naprężeń normalnych σ_x w materiale matrycy betonowej w przekroju *a-a* dla różnych poziomów obciążenia.

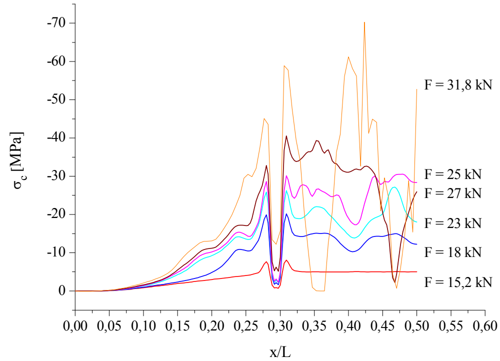
Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



Pięcioparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



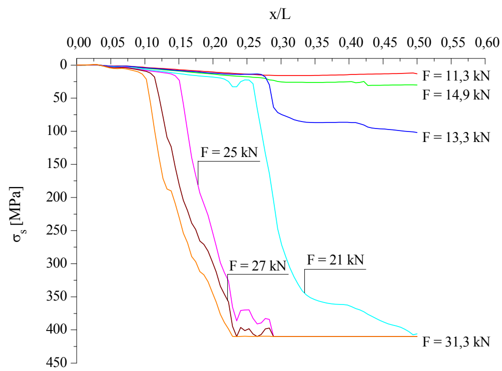
Trójparametrowa powierzchnia graniczna
(metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad])



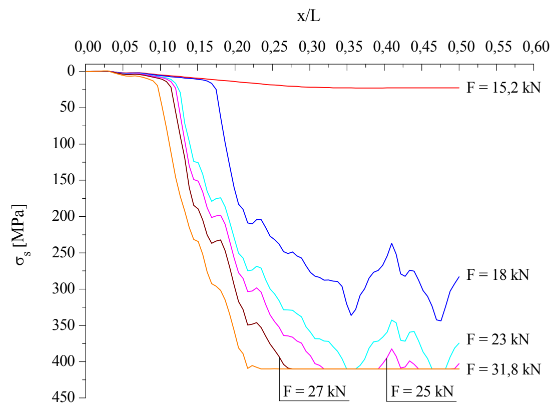
Rys. 6.14. Rozkład naprężeń normalnych σ_x w materiale matrycy betonowej w przekroju *c-c* dla różnych poziomów obciążenia.

Następna grupa ilustracji dotyczy graficznego zobrazowania zmienności naprężenia w zbrojeniu głównym w przekroju *b-b* w zależności od obciążenia zewnętrznego F. Na Rys. 6.15 przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_s w pręcie podłużnym.

Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



Trójparametrowa powierzchnia graniczna
(metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad])



Rys. 6.15. Rozkład naprężeń normalnych σ_s w zbrojeniu głównym w przekroju *b-b* dla różnych poziomów obciążenia.

Z uwagi na fakt, że rozkłady naprężeń normalnych σ_s w zbrojeniu głównym w przekroju *b-b* otrzymane w obydwu rozwiązaniach metodą długości łuku Crisfielda były do siebie bardzo zbliżone, na Rys. 6.15 zaprezentowano zmienność naprężeń w pręcie podłużnym dla pierwszego wariantu rozwiązania numerycznego.

W podsumowaniu przedstawionych wyników można stwierdzić, że najbardziej prawdopodobny obraz rzeczywistej pracy żelbetowych elementów zginanych, jakościowo zgodny z obrazem procesów zachodzących podczas pracy belki żelbetowej przedstawionym m.in. w pracy Szechińskiego [106], uzyskano metodą Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym, co jest ściśle związane z lepszym zlokalizowaniem i skoncentrowaniem rozmytych obszarów zarysowanych w tym rozwiązaniu. Założenie bardzo małego, stałego przyrostu obciążenia w fazie nieliniowego zachowania elementu decyduje o zawężeniu obszaru zarysowanego. Najbardziej istotny w uzyskanych wynikach numerycznych (N-R ad) jest fakt, że rozkłady naprężeń w betonie i zbrojeniu głównym nie są regularne i charakteryzują się skokowymi zmianami w miejscach powstania rys. W okolicach rys naprężenia wzrastają, a pomiędzy rysami maleją. Zgodnie ze zmianami naprężeń zmienia się również położenie osi obojętnej w przekroju wzdłuż osi belki, co z kolei powoduje gwałtowne zmiany w rozkładzie sztywności na długości elementu w miejscach powstania rys. Stwierdzenia te mogą być podstawą do tworzenia teoretycznych opisów deformacji belek żelbetowych.

6.4. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

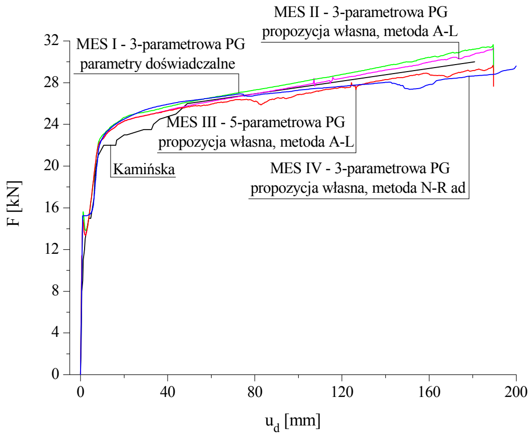
Obserwowany na Rys. 6.16 przebieg zmian zależności obciążenie-przemieszczenie punktu centralnego na dolnej krawędzi belki $(F - u_d)$ ma charakter niemonotoniczny wynikający z założonego modelu zachowania betonu opisującego osłabienie materiału w procesie deformacji i z zastosowania metod numerycznych pozwalających na uzyskanie kompletnej ścieżki rozwiązania wykazującej lokalne spadki sztywności i globalne osłabienie konstrukcji. Badania belek żelbetowych wykonanych z betonu o wysokiej wytrzymałości przeprowadzone w ostatnich latach m.in. przez Rashida i Mansura [88] dowodzą, że skutki pęknięć belki w strefie rozciąganej nie są kompensowane przez sprężyste właściwości stali i plastyczność betonu w strefie ściskanej. W związku z powyższym powstają efekty osłabienia, które są obserwowane na krzywej zależności ugięcia od obciążenia w postaci gwałtownych spadków obciążenia.

W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu nieco większą sztywnością charakteryzuje się belka modelowa, gdyż w modelu materiałowym matrycy betonowej pominięto istnienie mikrorys, jak również różnicę pomiędzy wartością modułu betonu przy rozciąganiu i ściskaniu. Faza uplastycznienia prętów zbrojeniowych opisana jest na wykresie obciążenie-przemieszczenie przez nagłe zmniejszenie sztywności belki. W rozwiązaniach numerycznych stan graniczny nośności zarejestrowano odpowiednio dla wartości obciążeń $F_u = 31{,}3$ kN, $F_u = 29{,}7$ kN i $F_u = 31{,}8$ kN. Chociaż w doświadczeniu Kamińskiej [55] nie zaobserwowano zniszczenia belki, gdyż uniemożliwiły je zbyt duże ugięcia belki osiągające 200 mm w połowie elementu wyczerpujące możliwości techniczne stanowiska badawczego, to wyznaczona z warunku odkształceń wartość obciążenia maksymalnego $F_u = 30$ kN jest zgodna z wartościami obciążenia niszczącego otrzymanymi we wszystkich rozwiązaniach numerycznych. Graniczne ugięcia w środku belki o rozpiętości w świetle podpór 3 m zarejestrowane w rozwiązaniach numerycznych są odpowiednio równe 189,6 mm, 189,6 mm i 199,9 mm. Natomiast wartość ugięcia zarejestrowana w doświadczeniu jest równa 180,9 mm.

Wyniki numeryczne uzyskane dla belek żelbetowych są zgodne z wynikami otrzymanymi dla belek doświadczalnych. Uzyskane wyniki numeryczne poparte wynikami eksperymentalnymi potwierdzają fakt, że kruchość betonów o wysokiej wytrzymałości w belkach zginanych jest mocno ograniczona przez bardzo dobrą współpracę betonu i zbrojenia. Wyraźna korelacja wyników doświadczalnych i numerycznych zależy od odpowiedniego zadania dokładnych liniowych i nieliniowych właściwości materiałowych.

Porównanie zależności przemieszczeń pionowych punktów w przekroju środkowym na górnej u_g i dolnej krawędzi belki u_d w zależności od obciążenia

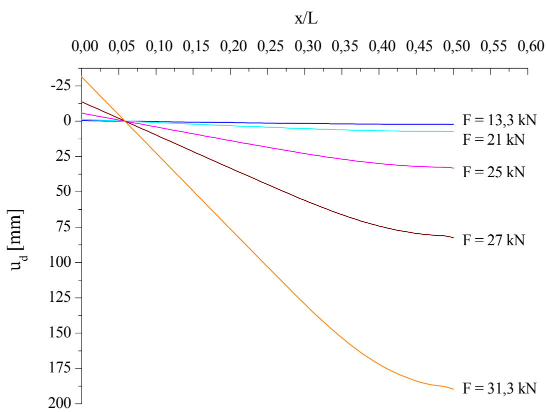
F wskazuje na znaną współzależność, że przemieszczenia pionowe na górnej krawędzi belki są w przybliżeniu równe przemieszczeniom pionowym na dolnej krawędzi elementu.



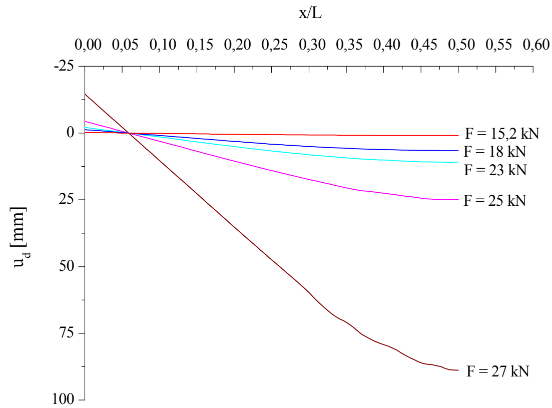
Rys. 6.16. Zestawienie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki BP-1a od obciążenia uzyskanych różnymi metodami numerycznymi.

Na Rys. 6.17 przedstawiono rozkłady przemieszczeń pionowych u_d dolnej krawędzi belki dla różnych poziomów obciążenia elementu. W obydwu rozwiązaniach numerycznych metodą długości łuku Crisfielda uzyskano bardzo zbliżone wartości przemieszczeń pionowych u_d. Dlatego też na Rys. 6.17 zaprezentowano zmienność przemieszczeń dolnej krawędzi belki tylko dla pierwszego wariantu rozwiązania numerycznego.

Trójparametrowa powierzchnia graniczna (metoda długości łuku Crisfielda [A-L])



Trójparametrowa powierzchnia graniczna
(metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad])



Rys. 6.17. Rozkłady przemieszczeń pionowych dolnej krawędzi belki.

Porównano również rozkłady przemieszczeń pionowych górnej i dolnej krawędzi belki w połowie jej długości dla poziomu obciążenia zewnętrznego F odpowiadającego statycznej nośności belki w rozwiązaniu numerycznym. W wyniku wykonanych analiz stwierdzono prawie równomierne przemieszczenia górnych i dolnych krawędzi elementu.

W podsumowaniu można stwierdzić, że zastosowanie metody przyrostowo-iteracyjnej długości łuku Crisfielda daje możliwość uzyskania kompletnej ścieżki obciążenie-ugięcie z zarówno lokalnym, jak i globalnym osłabieniem konstrukcji. Ponadto algorytm charakteryzuje duża efektywność, a zmienny krok przyrostu obciążenia i prawidłowo dobrane parametry długości łuku gwarantują znaczne skrócenie czasu obliczeń numerycznych, a przy tym uzyskanie bardzo dokładnego rozwiązania. Przydatność stosowania metody długości łuku zweryfikowano na przestrzennym modelu belki żelbetowej przy uwzględnieniu osłabienia odkształceniowego betonu przy ściskaniu i rozciąganiu. Metoda ta może być szczególnie atrakcyjna dla projektantów w sytuacjach, gdy wymagane jest dokładne ustalenie ugięcia elementu dla zadanego obciążenia. Z drugiej strony lepsze wyniki numeryczne w zakresie lokalizacji i koncentracji rys otrzymujemy przy zastosowaniu metody Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym.

7. WNIOSKI Z DOŚWIADCZEŃ NUMERYCZNYCH

7.1. Wnioski dotyczące analizy zachowania belek żelbetowych

1. Obliczenia numeryczne wykonano dla sprężysto-idealnie plastycznego modelu stali zbrojeniowej oraz sprężysto-kruchego modelu betonu z osłabieniem przy rozciąganiu. Natomiast przy ściskaniu wykorzystano autorską propozycję sprężysto-plastycznego modelu betonu z wytrzymałością resztkową.
2. W analizach belek żelbetowych zarejestrowane doświadczalnie początkowe zarysowanie betonu, uplastycznienie stali i nośność graniczną porównano z własnymi wynikami obliczeń numerycznych. Uzyskane wyniki numeryczne są bardzo wrażliwe na wartości modułu sprężystości betonu i granicy plastyczności stali zbrojeniowej.
3. Zachowanie numerycznych modeli belek żelbetowych opisywane zależnością obciążenie-ugięcie w środku rozpiętości wskazuje na dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi w całym zakresie obciążenia. Lepszą zgodność wyników uzyskano dla belek o niskim stopniu zbrojenia. Z eksperymentów numerycznych przeprowadzonych dla belek żelbetowych wynika zależność wytężenia konstrukcji od stopnia zbrojenia i sposobu jego rozkładu w materiale matrycy betonowej w całym zakresie pracy konstrukcji.
4. Modele materiałowe opisane zależnościami obciążenie-odkształcenie betonu w strefie ściskanej w środku rozpiętości oraz obciążenie-odkształcenie stali zbrojeniowej w środku rozpiętości charakteryzują się bardzo dobrą zgodnością z wynikami doświadczalnymi.
5. We wszystkich przypadkach różnice pomiędzy obciążeniami granicznymi uzyskanymi obliczeniach numerycznych a wynikami doświadczalnymi nie przekraczają 5%. Mniejszy rozrzut wyników jest charakterystyczny dla belek o niskim stopniu zbrojenia rozwiązywanych metodą długości łuku Crisfielda.
6. Numeryczne modele belek charakteryzują się nieznacznie większą sztywnością od belek doświadczalnych. Większa sztywność numerycznego modelu belki jest najprawdopodobniej wywołana przez kilka czynników, m.in.: (1) homogeniczność modelu konstytutywnego betonu nie uwzględniającego wszystkich efektów fizycznych związanych z procesami mikrozarysowania i rozwoju dyslokacji w płaszczyznach styku ziaren kruszywa i stwardniałego zaczynu cementowego, (2) założenie idealnej przyczepności pomiędzy betonem i stalą zbrojeniową w modelu numerycznym belki w węzłach wspólnych siatki podziału elementów materiału matrycy betonowej i stali zbrojeniowej, nie uwzględnienie efektu klockującego w prętach stalowych, przyczepności w styku, poślizgu zbrojenia.

7. W przedstawionych zestawieniach rzeczywistych obrazów zarysowania belek żelbetowych z numerycznymi obrazami rys rozmytych przy tych samych poziomach obciążenia obserwowana jest bardzo dobra zgodność wyników. Schematy zarysowania uzyskane w rozwiązaniu numerycznym jakościowo dobrze odpowiadają opisom mechanizmu zniszczenia w belkach doświadczalnych.
8. Model rysy rozmytej jest odpowiednim modelem numerycznym dla obrazowania mechanizmu zniszczenia zginanych belek żelbetowych w strefach zarysowania i miażdżenia. Ponadto jest szczególnie atrakcyjny dla projektantów w sytuacji, gdy wymagane jest dokładne ustalenie ugięcia elementu konstrukcyjnego dla zadanego obciążenia.

7.2. Wnioski dotyczące modelowania belek żelbetowych

1. W modelowaniu belek żelbetowych powinny być stosowane uproszczenia zapewniające efektywność uzyskania rozwiązania: (1) wykorzystanie symetrii elementów konstrukcyjnych, (2) lokalizowanie elementów skończonych stali zbrojeniowej zgodnie z siatką podziału elementów skończonych materiału matrycy betonowej.
2. Modelowanie płyt stalowych w miejscach podparcia i przyłożenia obciążeń skupionych odzwierciedla warunki rzeczywiste i jest podstawowym czynnikiem zapewniającym zgodności wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi.
3. Modele numeryczne elementów żelbetowych uwzględniające fizyczne nieliniowości materiałów są podatne na numeryczne niestabilności rozwiązania. W każdym elemencie skończonym może powstać stan zarysowania lub zmiażdżenia w ośmiu punktach numerycznego całkowania na trzech kierunkach prostopadłych. W tych przypadkach w elemencie zmiażdżonym lub zarysowanym w kierunku prostopadłym do płaszczyzny powstania rysy jest wprowadzony parametr sztywności c_{stif} o małej wartości w celu zachowania równowagi numerycznej w elemencie skończonym.
4. Rząd rozwiązania odpowiada analizie dużych odkształceń. W wyniku uwzględnienia nieliniowych efektów geometrycznych w belkach żelbetowych otrzymano lepszą zgodność wyników numerycznych z doświadczalnymi, wyraźnie dostrzegalną w fazie po uplastycznieniu stali zbrojeniowej.
5. W początkowym etapie modelowania należy ustalić sposób podziału na elementy skończone i zbadać zbieżność rozwiązania. W analizach nieliniowego zachowania numerycznych modeli konstrukcji żelbetowych zbyt drobna siatka może powodować numeryczne niestabilności. Z drugiej jednak strony przyjęcie zbyt dużej siatki może skutkować uzyskaniem

niedokładnych wyników. W betonie, w chwili powstania rysy lub grupy rys ich długość w wielu przypadkach jest większa od maksymalnego wymiaru kruszywa, na co zwrócono uwagę w pracy Shaha i in. [93]. W związku z powyższym, wymiary elementu skończonego materiału matrycy betonowej powinny być co najmniej dwa, trzy razy większe od maksymalnego wymiaru ziarna kruszywa w celu uzyskania poprawnego i realnego modelu zarysowania rozmytego. Fakt ten został potwierdzony w pracach Barzegara i in. [10, 11], Isenberga [52] oraz Shaha i in. [93]. W belce eksperymentalnej z betonu zwykłego Buckhouse [18] maksymalny wymiar ziarna kruszywa wynosił 24 mm, a wymiary elementu skończonego materiału matrycy betonowej w numerycznym modelu belki przyjęto jako równe 38 mm × 32 mm × 30 mm. Z kolei w belkach eksperymentalnych z betonu o wysokiej wytrzymałości Kamińskiej [55] maksymalny wymiar kruszywa wynosił 8 mm, natomiast wymiary skończonych elementów z betonu przyjęto równe 20 mm x 25 mm x 25 mm.

6. W analizie nieliniowego zachowania belek żelbetowych należy przyjąć parametr wzmacniający zarysowany element betonowy po zarysowaniu. Dla rys zamkniętych wartość przyjętego parametru powinna być nieznacznie mniejsza lub równa 1, a dla rys otwartych wg Barzegara i in. [10, 11], Isenberga [52], Kachlakeva i in. [54] powinna być dobrana z przedziału od 0,05 do 0,25. W wyniku wielu analiz numerycznych zastosowano większą wartość równą 0,5, dla której uzyskano wyniki zbieżne z wynikami doświadczalnymi.
7. W obliczeniach do rozwiązywania zagadnień niesprężystych wykorzystano różne metody numeryczne. Trudności w otrzymaniu rozwiązania zbieżnego obserwowano przy sterowaniu obciążeniem i założeniu zbyt dużych przyrostów obciążenia. Pozytywnie zweryfikowano przydatność zastosowania metody długości łuku w analizach przestrzennych modeli belek żelbetowych przy uwzględnieniu osłabienia odkształceniowego konstrukcji przy ściskaniu i zesztywnienia przy rozciąganiu. Uzyskano kompletne ścieżki obciążenie-przemieszczenie wykazujące potwierdzone doświadczalnie lokalne osłabienie konstrukcji żelbetowej. Otrzymany ciągliwy opis zniszczenia belek żelbetowych jest charakterystyczny przy stopniu zbrojenia nie przekraczającym 1,5 %. Kruchy charakter zniszczenia obserwowany jest dla belek żelbetowych z betonów o wysokiej wytrzymałości o wysokim stopniu zbrojenia [88].
8. W analizie nieliniowego zachowania modelu konstrukcji żelbetowej tolerancje w kryterium zbieżności powinny być określane z należytą uwagą. Wartości tolerancji w kryterium obciążenia i przemieszczenia powinny być zwiększane w zależności od zakresu fazy niesprężystego odkształcenia w celu uzyskania zbieżności rozwiązania.

9. W analizie nieliniowego zachowania belki żelbetowej, obciążenie całkowite przyłożone w modelu powinno być podzielone na określoną liczbę małych przyrostów obciążenia, szczególnie w najbardziej krytycznych fazach pracy belki żelbetowej, np. takich jak powstawanie zarysowania betonu, pojawienie się uplastycznienia stali zbrojeniowej, osiąganie granicznej nośności belki żelbetowej. Zastosowanie odpowiedniej, zmiennej wartości przyrostu obciążenia w poszczególnych fazach pracy belki zapewnia zbieżność rozwiązania i umożliwia skrócenie czasu obliczeń numerycznych.

8. ZAKOŃCZENIE

W pracy dokonano oceny efektywności metody elementów skończonych w analizach nieliniowego zachowania belek żelbetowych modelowanych jako przestrzenne elementy konstrukcyjne bez wprowadzania uproszczeń wynikających z założeń technicznej teorii konstrukcji belkowych.

Podstawowym celem pracy było modelowanie procesów statycznego odkształcania prostokątnych belek żelbetowych z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych betonu i stali zbrojeniowej oraz nieliniowości geometrycznych. Uzyskanie rozwiązań wymagało przeprowadzenia rozważań w zakresie modelowania niesprężystych właściwości materiałów i modelowania odkształcania przestrzennego ustroju belek żelbetowych.

Metoda analizy wytężenia układu konstrukcyjnego została opracowana z wykorzystaniem zasad metody elementów skończonych. Zaproponowano sposób uwzględnienia współpracy prętów zbrojenia i matrycy betonowej. W elementach zastosowano model rysy rozmytej i równocześnie uwzględniono zarysowanie betonu oraz modelowanie zbrojenia w sposób dyskretny. Rozwiązanie statycznych układów równań podstawowych metody elementów skończonych przeprowadzono na podstawie quasi-newtonowskich metod numerycznych. Metody te były już stosowane w numerycznych analizach konstrukcji żelbetowych, lecz nie zostały efektywnie zweryfikowane i ugruntowane dla przestrzennych modeli elementów żelbetowych, w których dominującym efektem wpływającym na zniszczenie jest efekt zmiażdżenia betonu przy ściskaniu oraz zesztywnienia przy rozciąganiu. Przydatność stosowania metody długości łuku Crisfielda zweryfikowano na przestrzennych modelach belek żelbetowych o zróżnicowanym stopniu zbrojenia przy uwzględnieniu osłabienia odkształceniowego betonu przy ściskaniu i rozciąganiu. Zastosowanie metody długości łuku umożliwia ponadto wygenerowanie kompletnej zależności obciążenie-przemieszczenie elementu żelbetowego, w pełnym zakresie do fazy zniszczenia włącznie.

Praca zawiera szczegółowe wyniki rozwiązań numerycznych. Na przykładach belek żelbetowych z betonu zwykłego i z betonu o wysokiej wytrzymałości obciążonych statycznie przedstawiono porównania wyników teoretycznych z wynikami doświadczalnymi. Porównania uzyskanych wyników wskazują na poprawność przyjętych założeń odnośnie modeli odkształcania betonu i stali oraz metody numerycznej do rozwiązywania nieliniowych równań równowagi. Modelowe belki żelbetowe dokładnie odzwierciedlają nieliniową odpowiedź zginanych elementów w całym zakresie obciążenia aż do ich zniszczenia.

W pracy przeprowadzono dyskusję problemów numerycznego modelowania zachowania konstrukcji żelbetowych z uwzględnieniem osłabienia materiałowego. Udowodniono, że znajomość wartości wytrzymałości betonu na ściskanie wystarcza do ustalenia kompletu danych materiałowych niezbędnych do przeprowadzenia obliczeń w nieliniowym modelu numerycznym i podano propozycję takiego rozwiązania dla belki żelbetowej o niskim stopniu zbrojenia z betonu o wysokiej wytrzymałości. Korelacja wyników doświadczalnych i numerycznych wyraźnie zależy od odpowiedniego zadania dokładnych liniowych i nieliniowych właściwości materiałowych.

Przyjęcie do rozważań sprężysto-plastycznego modelu odkształcenia betonu z uwzględnieniem osłabienia materiałowego i współpracy betonu z prętami zbrojenia oraz dokładny opis oddziaływania podpór umożliwia precyzyjne modelowanie zachowania belek żelbetowych w procesie przyrostowego obciążenia. Bardzo dobra zgodność wyników uzyskanych rozwiązań z wynikami badań doświadczalnych świadczy o poprawności zbudowanego modelu obliczeniowego. Tego typu symulacje przyczyniają się do redukcji kosztów związanych z przeprowadzeniem badań doświadczalnych poprzez efektywniejsze planowanie eksperymentów i możliwość ograniczenia liczby elementów konstrukcyjnych. Umożliwiają analizę złożonych zagadnień zachowania konstrukcji żelbetowych w całym zakresie odkształcenia od zakresu liniowo-sprężystego, przez fazy niesprężystego odkształcenia w obszarach naprężeń rozciągających powodujących stany początkowego i zaawansowanego zarysowania, a w obszarach naprężeń ściskających powodujących zmiażdżenie betonu, prowadzące do zniszczenia elementów konstrukcyjnych.

Uzyskane wyniki i wnioski z przeprowadzonych analiz mogą być podstawą do dalszych badań teoretycznych szczególnie w zakresie modelowania procesów niszczenia matrycy betonowej w elementach żelbetowych.

BIBLIOGRAFIA

1. ACI COMMITTEE 318, *Building Code Requirements for Structural Concrete*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan (2002).
2. AÏTCIN P.C., *Trwały wysokowartościowy beton – sztuka i wiedza*, Konferencja Beton na progu nowego millennium, Polski Cement, Kraków (2000).
3. AÏTCIN P.C., *High-Performance Concrete,* E & FN SPON (1998).
4. AJDUKIEWICZ A., *Konstrukcyjne betony cementowe nowych generacji,* Inżynieria i Budownictwo, 9, s. 496-502 (1998).
5. ARGYRIS J.H., FAUST G., SZIMMAT J., WARNKE E.P, WILLAM K.J., *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy obciążeń niszczących trójwymiarowe konstrukcje żelbetowe,* Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej, Ossolineum (1976).
6. ASHOUR S.A., *Effect of Compressive Strength and Tensile Reinforcement Ratio on Flexural Behaviour of High-Strength Concrete Beams,* Engineering Structures, Vol. 22, Nr 5, s. 413-423 (2000).
7. BALTOZ J.L., DHATT G., *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, s. 1262-1266 (1979).
8. BANGASH M. Y. H., *Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications*, Elsevier Science Publishers Ltd., London, England (1989).
9. BARBOSA A.F., RIBEIRO G.O., *Analysis of reinforced concrete structures using ANSYS nonlinear concrete model*, Computational Mechanics, Barcelona, Spain, s. 1-7 (1998).
10. BARZEGAR F., MADDIPUDI S., *Generating reinforcement in FE modelling of concrete structures,* Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineering, 120(5), s. 1656-1662 (1994).
11. BARZEGAR F., MADDIPUDI S., SRINIVAS, *Three-Dimensional Modeling of Concrete Structures. I: Plain Concrete, II: Reinforced Concrete,* Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineering, 123(10), s. 1339-1356 (1997).
12. BATHE K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey (1996).
13. BELLENI P.X., CHULYA A., *An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations,* Computers and Structures, 26, s. 99-110 (1987).
14. BERGAN P.G., HORRIGMOE G., KRAKELAND B., SOREIDE T.H., *Solution techniques for nonlinear finite element problems,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, s. 1677-1696 (1978).

15. BERNARDI S., MESUREUR B., RIVVILON PH., *Cracking of Reinforced High-Strength Concrete Structures,* Proc. 5th International Symposium on Utilization of High Strength / High Performance Concrete, Sandefjord, Norway, Vol. I, s. 147-153 (June 1999).
16. BONET J., WOOD R.D., *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis,* Cambridge University Press (1997).
17. BORKOWSKI A., BURCZYŃSKI T., DEMKOWICZ L., DEMS K., GRABACKI J., GUTKOWSKI W., KĄCZKOWSKI Z., KLEIBER M., KRUSZEWSKI J., MRÓZ Z., ORKISZ J., WASZCZYSZYN Z., *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych,* Mechanika Techniczna, tom XI, PWN, Warszawa (1995).
18. BUCKHOUSE E.R., *External Flexural Reinforcement of Existing Reinforced Concrete Beams Using Bolted Steel Channels,* Marquette University, Milwaukee, Wisconsin (1997).
19. BUYUKOZTURK O., *Nonlinear analysis of reinforced concrete structures,* Computers and Structures, Nr 7, s. 149-156 (1977).
20. CARINO N.J., SLATE F.O., *Limiting tensile strain criterion for failure of concrete,* Journal of the American Concrete Institute, 73, Nr 3, s. 160-165 (1976).
21. CARREIRA D.J., CHU K.-H., *Stress-strain relationship for plain concrete in compression*, Journal of the American Concrete Institute, 82, Nr 6, s. 797-804 (1985).
22. CHEN A.C.T., CHEN W.F., *Constitutive Relations for Concrete,* Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineering, Vol. 101, Nr EM4, s. 465-481 (August 1975).
23. CHEN W.F., *Concrete plasticity: macro- and microapproaches*, International Journal of Mechanical Sciences, 35, Nr 12, s. 1097-1109 (1993).
24. CICHORSKI W., *Modelowanie nieliniowego zachowania tarcz żelbetowych obciążonych statycznie i dynamicznie*, Rozprawa doktorska, WAT, Warszawa (1997).
25. COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, *CEB-FIP Model Code 1990,* Bulletin d'Information, Nr 213/214, Lausanne (May 1993).
26. COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, *High Performance Concrete. Recommended to the Model Code 90. Research Need,* Bulletin d'Information, Nr 228 (1995).
27. COOK R.D., *Finite Element Modeling for Stress Analysis,* University of Wisconsin, Madison, John Wiley & Sons, Inc. (1995).
28. CRISFIELD M.A., *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through,* Computer and Structures, 13, s. 55-62 (1981).
29. CRISFIELD M.A., *An arc-length method including line searches and accelerations,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, s. 1269-1289 (1983).

30. CRISFIELD M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures,* John Wiley & Sons, Inc. (2000).
31. CRISFIELD M.A., *Variable Step-Length for Nonlinear Structural Analysis,* Report 1049, Transport and Road Research Lab., Crowthorne, England (1982).
32. DESAYI P., KRISHNAN S., *Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete,* Journal of the American Concrete Institute, 61, s. 345-350 (March 1964).
33. DEUTSCHE NORM DIN 1045-1, *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion* (1997).
34. EGGERT, G.M., DAWSON, P.R., MATHUR K.K., *An Adaptive Descent Method for Nonlinear Viscoplasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 31, s. 1031-1054 (1991).
35. EUROCODE 2: DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES, *Part 1: General rules and rules for buildings,* (July 1999).
36. FABBROCINO G., PECCE M., *Experimental Analysis of Influence of Flexure-Shear Interaction on the Rotation Capacity of HPC Beams,* Proc. 5th International Symposium on Utilization of High Strength / High Performance Concrete, Sandefjord, Norway, Vol. I, s. 243-252 (June 1999).
37. FAHERTY K.F., *An Analysis of a Reinforced and a Prestressed Concrete Beam by Finite Element Method,* Doctorate's Thesis, University of Iowa, Iowa City (1972).
38. FANNING P., *Nonlinear Models of Reinforced and Post-tensioned Concrete Beams,* Electronic Journal of Structural Engineering, Nr 2, University College Dublin, s. 111-119 (2001).
39. FORDE B.W.R., STIEMER S.F., *Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis,* Computers and Structures, 27, s. 625-630 (1987).
40. FOSTER S., *An application of the arc-length method involving concrete cracking,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33, s. 269-285 (1992).
41. GALLOWAY J.W., HARDING H.M., *Elastic module of a lean and a pavement quality concrete under uniaxial tension and compression,* Materials and Structures, 9, Nr 49, s. 13-18 (1976).
42. GAMBAROVA P.G., *High-performance concrete: a review of the results obtained in Milan within the national project 1997-1999 "The safety of HPC structures",* Studies and Research, Vol. 22, s. 121-140 (2001).
43. GAMBAROVA P.G., PLIZZARI G.A., ROSATI O.P., RUSSO G., CORONELLI D., *Bond of Reinforcement in Concrete. Chapter 1: Bond Mechanics Including Pull-out and Splitting Failures,* FIB - Fédération Internationale du Béton, Bulletin Nr 10, Convener Ralejs Tepfers, s. 1-93 (2000).

44. GANIJEW G.A., KISSIUK W.N., *K obosnowanju usłowija procznosti bietona,* Bieton i Żelazobeton, Nr 12 (1962) i Nr 2 (1965).
45. GERE J.M., TIMOSHENKO S.P., *Mechanics of Materials,* PWS Publishing Company, Boston, Massachusetts (1997).
46. GODYCKI-ĆWIRKO T., *Mechanika betonu,* Arkady, Warszawa (1982).
47. GOMES H.M., AWRUCH A.M., *Some aspects on three-dimensional numerical modelling of reinforced concrete structures using the finite element method,* Advances in Engineering Software, 32, s. 257-277 (2001).
48. HEMMATY Y., DEROECK G., VANDEWALLE L., *Parametric Study of RC Corner Joints Subjected to Positive Bending Moment by Nonlinear FE Model,* Proceedings of the ANSYS Conference, Vol. 2, Pittsburgh, Pennsylvania (June 1992).
49. HEMMATY Y., *Modelling of the Shear Force Transferred Between Cracks in Reinforced and Fibre Reinforced Concrete Structures*, Proceedings of the ANSYS Conference, Vol. 1, Pittsburgh, Pennsylvania (August 1998).
50. HOFSTETTER G., MANG H.A., *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures,* Fundamentals and Advances in the Engineering Sciences, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1995).
51. HSU T.T.C., SLATE F.O, STURMAN G.M., WINTER G., *Microcracking of plain concrete and the shape of the stress-strain curve,* Journal of the American Concrete Institute, 60, s. 209-224 (February 1963).
52. ISENBERG J., *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II,* American Society of Civil Engineering, New York (1993).
53. JAIN S.C., KENNEDY J.B., *Yield Criterion for Reinforced Concrete Slabs,* Journal of Structural Division, American Society of Civil Engineering, Nr 100, ST3, s. 631-644 (1974).
54. KACHLAKEV D.I., MILLER T., YIM S., CHANSAWAT K., POTSIUK T., *Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened with FRP Laminates,* California Polytechnic State University (May 2001).
55. KAMIŃSKA M.E., *Doświadczalne badania żelbetowych elementów prętowych z betonu wysokiej wytrzymałości,* KILiW, PAN, Łódź (1999).
56. KAMIŃSKA M.E., *High-strength Concrete and steel interaction in RC members,* Cement and Concrete Composites, 24, s. 281-295 (2002).
57. KASZYŃSKA M., *BWW: Możliwości, cechy, zastosowania,* XVII Ogólnopolska Konferencja Pracy Projektanta Konstrukcji, s. 1-26, Ustroń (luty 2002).
58. KLEIBER M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum,* Wyd. PAN, Warszawa-Poznań (1985).
59. KLISIŃSKI M., *Degradacja i odkształcenia plastyczne betonu,* Prace IPPT PAN, 38, Warszawa (1984).
60. KOBIAK J., STACHURSKI W., *Konstrukcje żelbetowe.* Arkady, Warszawa, T. I (1984), T. II (1987), T. III (1989), T. IV (1991).

61. KUCZYŃSKI W., *Kontynualna teoria zginania żelbetu,* PWN, Warszawa (1971).
62. LAM W.F., MORLEY C.T., *Arc-length method for passing limit points in structural calculation,* Journal of Structural Engineering, 118(1), s. 169-185 (1992).
63. LAMBOTTE H., TAERWE L.R., *Deflection and Cracking of High Strength Concrete Beams and Slabs,* High-Strength Concrete, Second International Symposium, SP-121, W.T. Hester, ed., American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, s. 109-128 (1990).
64. LARRARD F., SAINT-DIZIER E., BOULAY C., *Comportement post-rupture de béton à hautes ou très hautes performances armé en compression*, Bulletin Liaison Laboratories Ponts et Chaussées, 179, s. 11-20 (May-June 1992).
65. LIN C.-H., LING F.-S., HWANG C.-L., *Flexural Behaviour of High Strength Fly Ash Concrete Beams,* Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 15, Nr 1, Taiwan, s. 85-92 (1992)
66. LIN C.-H., SCORDELIS A.C., *Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form*, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineering, 101(ST3), s. 523-538 (March 1975).
67. LYNDON F.D., BALENDRAN R.V., *Some observations on elastic properties of plain concrete,* Cement and Concrete Research, 16, Nr 3, s. 314-324 (1986).
68. ŁAPKO A., *Projektowanie konstrukcji żelbetowych wg Eurocode 2 i PN-B-03264:1999,* Arkady, Warszawa (2001).
69. MAJEWSKI S., *Mechanika betonu konstrukcyjnego w ujęciu sprężysto-plastycznym,* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice (2003).
70. MAJORAMA C.E., SALOMONI V.A., SCHREFLER B.A., *A constitutive relationship for high performance and ultra high performance concrete,* The Euro-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures, Badgastein, Austria, 1, s. 203-208 (March-April 1998).
71. MANSUR M.A., CHIN M.S., WEE T.H., *Flexural Behaviour of High-Strength Concrete Beams,* ACI Structural Journal, Vol. 94, Nr 6, s. 663-674 (November-December 1997).
72. MATHER B., *What do we need to know about the response of plain concrete and its matrix to combined loadings?* Proceedings 1st Conference on the Behavior of Structural Concrete Subjected to Combined Loadings, West Virginia University, s. 7-9 (1969).
73. MCNEICE A.M., *Elastic-Plastic Bending of Plates and Slabs by Finite Element Method,* Ph. D. Thesis, London University (1967).
74. MEMON B.A., SU X., *Arc-length technique for nonlinear finite element analysis,* Journal of Zhejiang University SCIENCE, Nr 5, s. 618-628 (2004).

75. MINDESS S., YOUNG J.F., *Concrete*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1981).
76. MOAVENI S., *Finite Element Analysis. Theory and Application with Ansys,* Prentice Hall, New Jersey (1999).
77. NEVILLE A.M., *Właściwości betonu*, Wydanie czwarte, Kraków, Polski Cement (2000).
78. NGO D., SCORDELIS A.C., *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams,* Journal of the American Concrete Institute, 64(3), s. 152-163 (1967).
79. NILSON A.H., *Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method,* Journal of the American Concrete Institute, 65(9), s. 757-766 (1968).
80. OLSEN N.H., KRENCHEL H., SHAH S.P., *Mechanical properties of high strength concrete,* IABSE Symposium, Concrete Structures for the Future, Paris-Versailles, s. 395-400 (1987).
81. OTTOSEN N.S., *A failure criterion for concrete*, Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineering, 103, EM 4, s. 527-535 (1997).
82. PAMIN I., *Enhanced numerical modeling of reinforced concrete,* XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, 3, Poznań, s. 1053-1060 (May 1997).
83. PAMIN I., WINNICKI A., *Gradient-enhanced modeling of crack band width and crack spacing in reinforced concrete,* 3rd International Conference on Analytical Models and New Concepts in Mechanics of Concrete Structures, Wrocław-Świeradów Zdrój, s. 217-222 (June 1999).
84. PECCE M., FABBROCINO G., *Plastic Rotation Capacity of Beams in Normal and High-Performance Concrete,* ACI Structural Journal, s. 290-296 (March-April 1999).
85. PENDYALA R., MENDIS P., PATNAIKUNI I., *Full-Range Behavior of High-Strength Concrete Flexural Members: Comparison of Ductility Parameter of High and Normal-Strength Concrete Members,* ACI Structural Journal, Vol. 93, Nr 1, s. 30-35 (January-February 1996).
86. PN-B-03264, *Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie,* (grudzień 2002).
87. RAMM E., *Strategies for Tracing the Nonlinear Response near Limit Points,* Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer, New York (1981).
88. RASHID M.A., MANSUR M.A., *Reinforced High-Strength Concrete Beams in Flexure,* ACI Structural Journal, Vol. 102, Nr 3, s. 462-471 (May-June 2005).
89. RAY S.S., *Reinforced Concrete. Analysis and Design,* Blackwell Science Ltd. (1995).

90. RIKS E., *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems,* International Journal of Solids and Structures*,* 15, s. 529-551 (1979).
91. SARKER S., ADWAN O., MUNDAY J.G.L., *High Strength Concrete: An Investigation of the Flexural Behaviour of High Strength RC Beams,* The Structural Engineer, Vol. 75, Nr 7, s. 115-121 (1997).
92. SHAH S.P., SANKAR R., *Internal Cracking and Strain-Softening Response of Concrete under Uniaxial Compression,* ACI Materials Journal, Nr 84, s. 200-212 (1987).
93. SHAH S.P., SWARTZ S.E., OUYANG C., *Fracture Mechanics of Concrete,* John Wiley & Sons, Inc., New York (1995).
94. SMADI M.M., SLATE F.O., *Microcracking of high and normal strength concretes under short- and long-term loadings*, ACI Materials Journal, 86, Nr 2, s. 117-127 (1989).
95. SMARZEWSKI P., STOLARSKI A., *Badanie i wyznaczanie naprężeń przyczepności betonu do stali zbrojeniowej,* Biuletyn WAT, Vol. LVI, Nr 1, s. 7-24 (2007).
96. SMARZEWSKI P., STOLARSKI A.: *Modelowanie zachowania niesprężystej belki żelbetowej.* Biuletyn WAT, Vol. LVI, Nr 2, s. 147-166 (2007).
97. SMARZEWSKI P.: *Numeryczna analiza niesprężystej belki żelbetowej,* Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Budownictwo z.109, s. 363-370 (2006).
98. SPIEGEL L., LIMBRUNNER G.F., *Reinforced Concrete Design,* 4th ed. Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New York (1998).
99. STAROSOLSKI W., *Konstrukcje żelbetowe według PN-B-03264:2002,* T. I-II, PWN, Warszawa (2003).
100. STOLARSKI A., CICHORSKI W., *Modelowanie statycznego i dynamicznego zachowania niesprężystych tarcz żelbetowych,* Studia z Zakresu Inżynierii, 51, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Warszawa (2002).
101. STOLARSKI A., *Dynamic Strength Criterion for Concrete,* Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineering, Vol. 130, Nr 12, s. 1428-1435 (December 2004).
102. STOLARSKI A., *Model dynamicznego odkształcenia betonu,* Archiwum Inżynierii Lądowej, T. 37, Z. 3-4, s. 405-447 (1991).
103. SUIDAN M., SCHNOBRICH W.C., *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete*, Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineering, ST10, s. 2109-2122 (October 1973).
104. SUWALSKI L., *Teoria betonu i żelbetu. Budownictwo Betonowe, Tom II,* Arkady, Warszawa (1964).

105. SZARLIŃSKI J., WINNICKI A., PODLEŚ K., *Konstrukcje z betonu w płaskich stanach. Komputerowe wspomaganie analizy i projektowania,* Politechnika Krakowska, Kraków (2002).
106. SZECHIŃSKI M., *Ugięcia długotrwale obciążonych belek żelbetowych. Studium porównawcze,* Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2000).
107. TAERWE L.R., *Brittleness versus Ductility of High Strength Concrete,* Structural Engineering Journal, 4, s. 40-45 (1991).
108. TAGNON G., URSELLA P., COPPETTI G., *Design and Properties of Concretes with Strength over 1500 kgf/cm^2,* ACI Journal, Proceedings, Vol. 77, Nr 3, s. 171-178 (May-June 1980).
109. TAVAREZ F.A., *Simulation of Behavior of Composite Grid Reinforced Concrete Beams Using Explicit Finite Element Methods,* University of Wisconsin, Madison (2001).
110. UZUMERI S.M., BASSET R., *Behaviors of High Strength Concrete Members,* International Symposium on Utilization of High Strength Concrete, Stavanger, Norway, s. 237-248 (June 1987).
111. WASZCZYSZYN Z., *Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures,* Computers and Structures, 17(1), s. 13-24 (1983).
112. WASZCZYSZYN Z., PABISEK E., PAMIN J., RADWAŃSKA M., *Nonlinear analysis of a RC cooling tower with geometrical imperfection and a technological cut-out,* Engineering Structures, 22, s. 480-489 (2000).
113. WEISS W.J., GULER K., SHAH S.P., *An Experimental Investigation to Determine the Influence of Size on the Flexural Behavior of High Strength Reinforced Concrete Beams,* Proc. 5th International Symposium on Utilization of High Strength / High Performance Concrete, Sandefjord, Norway, Vol. I, s. 709-718 (June 1999).
114. WEMPNER G.A., *Discrete approximation related to nonlinear theories of solids,* International Journal of Solids and Structures, 7, s. 1581-1599 (1971).
115. WILLAM K.J, TANABE T.A., *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures,* American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan (2001).
116. WILLAM K.J., WARNKE E.P., *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete,* Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, ISMES, Bergamo, Italy (1975).
117. WOJEWÓDZKI W., JEMIOŁO S., LEWIŃSKI P.M., SZWED A., *O relacjach konstytutywnych modelujących własności mechaniczne betonu,* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa (1995).
118. WOLANSKI B.S., *Flexural Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Using Finite Element Analysis,* Master's Thesis, Milwaukee, Wisconsin (May 2004).

119. ZIENKIEWICZ O.C., *Metoda elementów skończonych,* Arkady, Warszawa (1972).
120. ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The Finite Element Method, Fifth Edition,* Butterworth Heinemann (2000).

SUMMARY

MODELLING OF STATIC BEHAVIOUR OF INELASTIC REINFORCED HIGH-STRENGTH CONCRETE BEAMS

In recent years, progressing knowledge and capabilities of computer software and hardware has increased possibilities of using nonlinear analyses of reinforced concrete structures with regard to different the elastic-plastic materials properties: concrete and reinforcement steel, real reinforcement configuration, the joint-action of both materials and the simulation of the mechanism of failure structural members. Specific properties of high-strength concrete are inducing to the need of realizing not only experimental tests but also theoretical analyses from the range of the constitutive models of the materials properties, in the peculiarity modelling of behaviour of reinforced high-strength concrete members as well as mechanisms effort and failure analyses of the reinforced high-strength concrete structures.

Reinforced high-strength concrete beams treated as the material composing concrete strengthened with the discrete model of steel bars at the concrete matrix material are an object of the thesis.

The basic purpose of the paper is the modelling mechanism of failure reinforced concrete beams under static load, static deformation processes of the reinforced high-strength concrete beams with regard to the physical nonlinearities of the structural materials (i.e. concrete and reinforcement steel).

The outline of the thesis is including dissertations concerning modelling inelastic properties of materials, modelling of deformation processes of the spatial structural members – reinforced high-strength concrete beams, and preparing the numerical solutions.

Analysis of the high rate deformation processes requires taking into consideration the static material properties. The criterion Willam and Warnke was applied for failure of concrete. Simplified own proposal uniaxial stress-strain relationship for normal and high-strength concrete was applied in the numerical solutions. In compression, the range of linear-elastic for concrete was enabled the determination of the reinforcement ratio of the structure and the strength of concrete. Above linear-elastic region the stress increases linearly up to the maximum compressive strength. After it reaches the maximum compressive strength, the curve linearly descends into a softening region to 80 % of the maximum compressive strength at an ultimate strain. Strain at the ultimate compressive strength equals 6 ‰, and ultimate strain equals 12 ‰. In tension, the stress-strain curve for concrete is approximately linearly elastic up to the maximum tensile strength. After this point, the concrete cracks and the strength decreases because of brittle cracking. The effect of the stiffening was taken into consideration through establishing the linear descent the maximum tensile strength to zero. The steel for the finite element models was assumed in most

cases to be an elastic-perfectly plastic material and identical in tension and compression.

The method of the structure system effort analysis was developed using the finite element method. The hypothesis of reinforcement steel bars and the concrete matrix material joint-action was proposed. The arc-length method is used in combination with Newton-Raphson method to trace the complete response in load-deformation space. The Crisfield method has been successfully applied for the analysis of reinforced concrete beams. The method can be effectively applied to the static deformation mechanism analysis of the various reinforced concrete members under complex stress states.

The paper contains the detailed results of the numerical solutions. The comparative analysis of the own results with experimental results was presented for the examples of the reinforced high-strength concrete beams under static load. The comparison of the obtained results indicates on the correctness of the assumptions and constitutive models of the high-strength concrete and reinforcement steel, and also on the effectiveness of the method of solution. Numerical results of smeared crack patterns are qualitatively agreeable, as for the localization, the direction and the concentration with experimental results. The development of strain for extreme concrete fibers of the compression zone and the development of strain for longitudinal reinforcement have excellent agreement in the most presented cases. The full nonlinear load-deformation at midspan response of the model produced compares well with the experimental response. To sum up Crisfield arc-length solution should be particularly attractive to designers when they are required to accurately predict the deflection of a reinforced concrete system, for a given load, in addition to its ultimate strength. On the other hand better numerical results in the range of the localization and the concentration cracks are received at applying Newton-Raphson iterative solution with adaptive descent. The load-deflection relationships for the flexure beams from the experimental dates and the finite element analyses are in good agreement up to failure. In all cases differences between the final loads for the models and the ultimate loads for the experimental results are less than 5%. The dedicated smeared crack model is an appropriate numerical model for capturing the flexural modes of failure of reinforced concrete systems. The good agreement between experimental and analyzed results are reported for three-dimensional modelling of reinforced concrete beams for strain softening in compression and the effect of the stiffening in tension.