

DR. INŻ. T. M. GOŁOGURSKI.



PRACA NARZĘDZI W ZIEMI

(STUDYUM TEORETYCZNE).



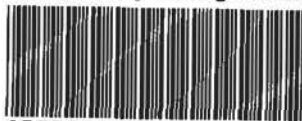
KRAKÓW

NAKŁADEM TOW. DLA POPIERANIA POLSKIEJ NAUKI ROLNICTWA
1911.



Osobne odbicie z Roczników nauk rolniczych Tom V.

Biblioteka Główna
Uniwersytetu Przyrodniczego w Lublinie



1000095402

Drukarnia Uniwersytetu Jagiell. pod zarządem J. Filipowskiego.

Dr. inż. Tadeusz Michał Gołogurski.

Praca narzędzi w ziemi.

(Studyum teoretyczne).

Teoria każdego narzędzia, mającego przy obróbce lub przeróbce jakiegoś materiału spełniać pewne czynności, możliwa jest tylko natenczas, jeśli się z góry przypuści wszechstronną znajomość materiału. Przydatność teorii do celów praktycznych zależy od tego, o ile przyjęcie takie odpowiada rzeczywistości, t. j. o ile rzeczywiście posiadamy znajomość materiału.

Konstruktor, pragnąc posłużyć się teorią, musi koniecznie posiadać daty uzyskane z doświadczeń i wprowadzać je w rachunek w postaci współczynników. Z drugiej jednakże strony muszą owe daty być przysposobione celowo tak, by użycie ich i posługiwanie się nimi było wogóle możliwe. W nauce o materiałach i o ich wytrzymałości utarły się pewne sposoby przedstawiania wyników doświadczeń nader dogodnie dla konstruktora, który ma nimi operować, a zarazem dopuszczające wzajemne porównywanie dat, uzupełnianie i kontrolę.

Materiał obrabiany przeciwstawia opór wgłębiającemu się wń narzędziu. Chcąc zatem rozpatrywać działanie narzędzia, musimy przedewszystkiem zająć się temi właściwościami obrabianego materiału, które wpływają na wielkość oporu, a mianowicie: mocą materiału i jego tarcie zewnętrznem i wewnętrznem. Te właściwości musimy znać i mieć je podane w należytej formie, jeśli teoria ma mieć znaczenie praktyczne i jeśli ma służyć konstruktorowi do orientacyi i do przedsięwzięcia odpowiednich obliczeń.

Narzędzia, służące do uprawy roli, zagłębione w ziemię, wykonują pod wpływem siły zewnętrznej pewne czynności, które

z punktu widzenia technologii mechanicznej mogą być dzieleniem materiału, zgniataniem, mieszaniem lub formowaniem. W każdym przypadku potrafimy odróżnić te czynności od siebie i osobno każdą z nich rozważać. Stąd też pochodzi niezmierna różnorodność punktów widzenia w teorii takich narzędzi. Może to być rozpatrywanie ruchu względnego materiału i narzędzia, może to być badanie tych zmian, jakie zajądą w położeniu cząstek obrabianego materiału, może to także być rozpatrywanie samej siły, potrzebnej do poruszania narzędzia. W rzeczywistości jednak dopiero rozpatrzenie tych wszystkich kwestyj prowadzi do ogólnej teorii narzędzia. Niedalekiem też od prawdy będzie twierdzenie, iż jedynie taka teoria może być dobra, która nie przeocza żadnego względu i nie pomija żadnej kwestyi, gdyż są one wszystkie związane ze sobą, a nawet stoją niekiedy do siebie w stosunku przyczyny i skutku. Jeśli przeto rozpatrujemy teorię pługa ze względu na sam ruch masy ziemi, czynimy źle z wielu przyczyn. Ani bowiem czynność pługa nie jest samem tylko odwracaniem skłhi, ani nie możemy przemilczać wpływu sił zewnętrznych na kształt toru, wzdłuż którego posuwa się materiał po powierzchni narzędzia, ani też nie możemy pomijać deformacyi ziemi i napięć, jakie powstają w materiale. Należy teorię pługa kierować tak, by ona uwzględniała i odwracanie i kruszenie i dawała wyjaśnienie co do wielkości napotykanego oporów.

Trudność polega na tem, że ziemia jako materiał jest niedostatecznie zbadana. Wynika to wprost z nadzwyczajnej różnorodności składu chemicznego i mechanicznego ziemi. Jest bowiem rzeczą niewątpliwą, że wpływ tych różnic, połączony z wpływem rozmaitego stanu zagęszczenia, różnej struktury, większego lub mniejszego stopnia wilgotności, objawia się na zewnątrz różnym stopniem zwężności ziemi, przyczepności do narzędzia i różnymi współczynnikami tarcia.

Znajomość materiału obecna nie jest wystarczająca i zapewne nie prędko nią będzie. Te jednak daty, które rozrzucone są po różnych publikacjach, pozwalają już na wysnuwanie pewnych wniosków i na niedwuznaczną orientację. Naturalnie będą się one z biegiem czasu uzupełniały, to też chodzi o to, aby uzupełniały się w pewien systematyczny sposób tak, by przedewszystkiem badania odnosiły się do rzeczy najpilniejszych, zaś daty były przedstawione w formie, przyjętej przez dzisiejszą naukę o wytrzymałości materiałów. Dlatego też w zestawieniach dat, odnoszących się zarówno do mocy ziemi jak i do tarcia, podajemy je w takiej formie, ażeby zastosowanie w rachunku nie wymagało wstępnego obliczania współczynników. Tablice dat, zebranych z różnych autorów i z własnych doświadczeń, zawierają wszystko, co można było na razie krytycznie opracować i zestawić. Wiele luk istniejących mogą dopiero uzupełnić przyszłe badania.

O ile materiał obrabiany znany dobrze, cała trudność teoretycznego rozpatrywania działania narzędzia spoczywa w znalezieniu formuły matematycznej, określającej nam ruch materiału względem narzędzia i opory, jakie narzędzie napotka w środowisku ziemnym. Te dwa momenty nader ważne dla konstruktora i niezbędne dla każdego, ktokolwiek chce naprawdę zdać sobie sprawę z działania narzędzia, wymagają jednak określenia kształtu poruszającej się powierzchni zapomocą równania i stąd wynika konieczność posługiwania się sposobami tymi, jakie nam daje w rękę geometria analityczna. Zawile związki, zachodzące pomiędzy kształtem powierzchni a wielkością oporów napotykanych, nie zawsze można przedstawić w postaci łatwych wzorów i nie raz potrzeba uciec się do sposobów przybliżonych, tembardziej mających rację bytu, że i znajomość materiału niedostateczna nie pozwala na zbyt wielką dokładność rachunku.

Ograniczamy się do kształtów najczęściej stosowanych przy budowie narzędzi i do tych zagadnień, które w obecnym stadium znajomości materiału możliwe są do rozpatrzenia. Wynika z tego, iż praca niniejsza nie obejmuje całokształtu mechanicznej technologii ziemi, a tylko część jej nieznaczną. Podzielono ją na dwie części, z których pierwsza traktuje o właściwościach materiału, druga zaś prowadzi do wyznaczenia wielkości oporów przy pracy niektórych narzędzi.

I. Tarcie ziemi.

Ważnym bardzo oporem przy mechanicznej uprawie gleby jest tarcie narzędzia o materiał ziemny. Zależć ono musi zawsze od wielkości ciśnienia normalnego, tudzież od wielkości współczynnika tarcia.

W nowoczesnej budowie narzędzi rolniczych nie używa się już drzewa jako materiału — przynajmniej o ile chodzi o samo narzędzie pracujące — byłoby więc niemal anachronizmem zbieranie dat, dotyczących się tarcia drzewa o ziemię i przywiązywanie do gro madzenia ich większej wagi. Nie chcemy przez to powiedzieć wcale, żeby te daty były zupełnie bezużyteczne, gdyż niekiedy rzeczy pozornie obojętne mogą mieć w zmienionych warunkach niezmiernie doniosłe znaczenie, chodzi nam jednak o usprawiedliwienie, dlaczego, mówiąc o tarcu narzędzia o ziemię, uwzględniamy jedynie tarcie żelaza i stali. Interesujący się kwestyą tarcia ziemi po drzewie znajdą wiele materiału w cytowanych tu dziełach.

O ile chodzi o ziemię naturalną, konieczne jest podanie chociażby tylko ich składu mechanicznego, jakkolwiek najlepiej byłoby

znać i skład chemiczny, gdyż obecność lub brak pewnych składników może deędydować i musi o wielkości współczynnika tarcia.

Prof. Zieliński ¹⁾ przeprowadzał badania z siedmioma gatunkami ziem naturalnych. Próby przeprowadzano w ten sposób, że ziemię okopano naokoło na gruncie, a po założeniu skrzyni odcięto i zesunięto ziemię na deskę. W ten sposób uzyskano pewność, że znaleziony współczynnik tarcia będzie bliski rzeczywistości. Zmieniając nachylenie skrzyni do poziomu o pewien kąt, dochodzono z wolna do takiej pozycyi, w której pryzmat żelazny z dobrze wygładzoną podstawą zsuwał się ruchem jednostajnym po równi pochyłej ziemi. Tangens kąta zmierzonego jest współczynnikiem tarcia. Następnie ustawiano skrzynię poziomo i obserwowano siłę potrzebną do poruszenia pryzmatu. Siła ta podzielona przez ciężar poruszany daje drugi współczynnik tarcia. Tak obliczone współczynniki zapomocą dwu różnych metod nie różniły się prawie od siebie i dlatego — idąc za prof. Zielińskim — podajemy ich średnie arytmetyczne.

TABLICA I.

L. porz.	Ziemia	S k ł a d					Stopień wilgocci 0/0	Współczynnik tarcia μ
		Piasek gruboziarn.	Piasek drobny	Gлина	Materye organ.	Woda hygrosc.		
1.	Piaszczysta	81.645	12.470	3.564	1.719	0.602	7.35	0.341
2.	Piaszczysta	48.775	33.440	14.975	2.057	0.753	10.80	0.357
3.	Piaszczysto-rędzinna	7.220	65.475	23.649	2.619	1.037	10.92	0.523
4.	Margiel piaszczysty	61.353	21.915	14.495	1.284	0.915	13.61	0.504
5.	Rędzinno-próchniczna	21.950	43.450	20.699	10.716	3.194	33.87 35.30	0.777 0.906
6.	Rędzinna	35.320	36.350	28.330	—	—	6.42	0.778
7.	Torf	—	—	—	75.385	13.604	57.52	0.873

Niedobrem jest w tych danych to, że współczynnik tarcia oznaczano dla ziem, posiadających różny stopień wilgotności. Niestety było to przy manipulowaniu z ziemią wziętą wprost z pola trudnem do uniknięcia. Tymczasem nie ulega wątpliwości, że przy różnych stopniach wilgotności istnieją różnice kątów tarcia. Widocznem to jest z prób przeprowadzonych z ziemią rędzinno-próchniczną (nr. 5),

¹⁾ Antoni Zieliński: Teorya pługa, obsypnika i brony. Warszawa 1884.

badaną przy dwu różnych stopniach wilgotności. Różnica w wielkości współczynnika jest bardzo znaczna i musi w rzeczywistości być brana w rachubę.

Odrzuć jest też widoczne, że współczynniki dla różnych ziem różnią się bardzo od siebie. Wskutek tego niemożliwem byłoby posługiwać się w obliczeniach jakąś średnią cyfrą, gdyż otrzymywalibyśmy wyniki zbyt dalekie od prawdy i tylko w bardzo dalekiem przybliżeniu prawdopodobne. Owszem: w każdym przypadku, gdzie chodzi o dokładniejsze liczenie, musi się wziąć pod uwagę rodzaj ziemi, z którą mamy do czynienia.

Zdawano sobie sprawę z tego już dawniej i zastanawiano się, jakie składniki zwiększają tarcie w ziemi, a jakie je obniżają. Wiele dat dotyczących się właśnie tej kwestyi obejmuje praca J. Schachbasiana¹⁾, który znalazł współczynniki tarcia podczas ruchu dla całego szeregu składników ziemi i dla ich sztucznych mieszanin.

Schachbasian posługiwał się w swoich badaniach następującą metodą:

Jeśli pryzmat stalowy porusza się po ziemi, to droga odbyta w czasie t będzie:

$$s = \frac{ct^2}{2},$$

gdzie c jest przyspieszeniem na równi pochyłej.

Z tego otrzymamy wzór na przyspieszenie:

$$c = \frac{2s}{t^2}.$$

Oznaczając przez P ciężar poruszający i przez G ciężar poruszany, możemy siłę wywołującą powyższe przyspieszenie określić jako różnicę: $P - G\varphi$. Masa obydwu ciężarów będzie $\frac{P+G}{g}$, gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Wobec tego przyspieszenia, jakiego dozna ta masa, będzie:

$$c = \frac{(P - G\varphi)g}{P + G}.$$

Z porównania obydwu znalezionych wyrażeń na c otrzymamy wzór:

$$\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P+G}{G} \cdot \frac{2s}{gt^2},$$

podług którego obliczano współczynniki.

¹⁾ Johanu Schachbasian: Untersuchungen über die Adhäsion und Reibung der Bodenarten an Holz und Eisen. (Forsch. auf d. Geb. d. Agrikultorphysik v. Dr. E. Wollny. B. XIII).

Badania Schachbasiana z piaskiem kwarcowym i wapiennym, z kaolinem, kwarcem i torfem prowadzone były w stanie suchym i w stanie miernie wilgotnym. Ugrupowano je w osobnej tabeli, wypisawszy cyfry z cytowanej rozprawy.

TABLICA II.
Spółczynniki Schachbasiana.

L. porz.	Rodzaj ziemi	Spółczynnik tarcia stali polerowanej o ziemię:		L. porz.	Rodzaj ziemi	Spółczynnik tarcia stali polerowanej o ziemię:	
		wilgot.	sucha			wilgot.	sucha
1.	Piasek kwarcowy	0.010—0.071 mm	0.8250	0.3830	13.	Piasek wapienny śred.	0.6345 0.3835
2.		0.071—0.114 „	0.4950	0.4125	14.	Gлина rozpylona	0.5310 0.4700
3.		0.114—0.171 „	0.4840	0.4220	15.	Gлина w gruzłach	0.4715 0.3565
4.		0.171—0.250 „	0.4445	0.4335	16.	Kaolin	0.4335 0.3320
5.		0.250—0.500 „	0.3540	—	17.	$\frac{2}{3}$ kaolinu + $\frac{1}{3}$ torfu	0.4495 0.3495
6.	Piasek wapienny	0.500—1.000 „	0.3475	—	18.	$\frac{1}{3}$ kaolinu + $\frac{2}{3}$ torfu	0.4850 0.3755
7.		1.000—2.000 „ średnio:	0.3295	—	19.	Torf	0.6547 0.3930
8.		0.010—2.000 „	0.5260	0.4445	20.	$\frac{2}{3}$ torfu + $\frac{1}{3}$ kwarcu	0.7305 0.3875
9.		0.010—0.071 „	0.7395	0.3495	21.	$\frac{1}{3}$ torfu + $\frac{2}{3}$ kwarcu	0.7930 0.3510
10.		0.071—0.114 „	0.7040	0.3990	22.	Kwarc	0.8250 0.3830
11.	Piasek kwarcowy	0.114—0.171 „	0.6850	0.4350	23.	$\frac{2}{3}$ kwarcu + $\frac{1}{3}$ kaol.	0.7780 0.3605
12.		0.171—0.250 „	0.5215	0.4465	24.	$\frac{1}{3}$ kwarcu + $\frac{2}{3}$ kaol	0.6025 0.3405

Cyfry te pokazują, że współczynnik tarcia wzrasta z ilością piasku kwarcowego w ziemi, rośnie również i z ilością torfu, jakkolwiek nie tak szybko, ale maleje ze wzrostem ilości kaolinu. Pokazuje się jednocześnie, że współczynnik tarcia ziemi wilgotnej o żelazo jest większy, niż ziemi suchej. To ostatnie prawidło przypomina dążenie pewnych konstruktorów do zmniejszenia tarcia pługa przez umieszczenie nad korpusem zbiornika z wodą, która by wyciekła na odkładnicę i niejako smarowała ją. Wobec dat zebranych tutaj wynikałoby, że usiłowania powyższe osiągnęłyby wręcz przeciwny skutek. Musimy jednakowoż zważyć, że ziemia na powierzchni

przekroju, t. j. właśnie na tej powierzchni, która ociera się o narzędzie, jest zagęszczona tak, że trudnooby przypuszczać, iż woda natychmiast w nią wsiąknie. Owszem znajdzie się ona przez czas pewien pomiędzy ocierającymi się powierzchniami i wskutek tego można będzie w danej chwili uzyskać pomniejszenie tarcia. A właśnie ta chwila wystarczy do przejścia skiby przez odkładnicę. Tak więc mimo pozornej sprzeczności można naprawdę uzyskać przez polewanie wodą zmniejszenie tarcia narzędzia o ziemię. Z drugiej strony musimy wziąć pod uwagę fakt, że tarcie musi mieć pewną maksymalną wartość w pewnym, dzisiaj jeszcze nieokreślonym stanie wilgoci. Wiemy tylko, że ziemia sucha posiada mniejsze współczynniki tarcia niż wilgotna, ale wiemy jednocześnie, że ziemia, posiadająca wilgotność maksymalną, musi mieć współczynniki mniejsze niż ziemia średnio wilgotna. Wobec tego przeto musimy przyjąć, iż w miarę jak ziemia ze stanu suchego przechodzi w stan coraz większego nasycenia wodą, musi współczynnik tarcia od jednego minimum przejść przez cały szereg wyższych wartości, aż osiągnie swoje drugie minimum przy największej wilgotności ziemi, a w tym czasie przejdzie także i tę swoją wartość, która stanowi jego największość. Być może, że i tutaj możnaby znaleźć pewne racje, któreby usprawiedliwiały wspomnianą powyżej propozycję obniżania oporów tarcia przez polewanie wodą.

Do naszych doraźnych celów potrzeba nam współczynników obserwowanych wobec 42% nasycenia wodą. Nie mając takich współczynników, musimy się zadowolić tem, co podają cytowani dwaj autorowie i używać ich dat do obliczeń, jakkolwiek możemy być pewni, iż rzeczywistość będzie inną nieco, aniżeli rezultat obliczeń zapomocą przybliżonej tylko wartości współczynnika.

Nierównie mniej dat pewnych jest co do wielkości tarcia wewnętrznego, powstającego przy ocieraniu się cząstek ziemi o siebie. Zjawiska tarcia wewnętrznego trudno często obserwować w stanie zupełnie czystym i wolnym od towarzyszących im objawów spójności. Te dwa bowiem rodzaje oporów są w przeważnej ilości przykładów związane ściśle ze sobą i tylko w rzadkich przypadkach występuje samo tarcie bez współudziału spójności.

Przy badaniu tych zjawisk można posługiwać się rozmaitemi metodami. Zależą one od tego, czy materiał znajduje się w strukturze ziarnistej, gruzelkowatej, czy zbitej. O ile badamy ziemię w strukturze ziarnistej, możemy usypywać z niej stożki, których rodzająca musi być nachylona do poziomu pod kątem tarcia. Mamy tu bowiem do czynienia z równią pochyłą i każda cząstka, znajdującą się na pobocznicy stożka, będzie podówczas w równowadze, skoro tylko kąt nachylenia rodzącej do poziomu będzie równy kątowi tarcia.

Druga metoda polega na tem, że napełnia się skrzynię mate-

ryałem ziemnym, a po ustawieniu jej na drugiej skrzyni nieruchomej mierzy się siłę potrzebną do przesunięcia. Ta metoda nie nadaje się do badania ziem w stanie ziarnistym, gdyż skrzynia górna wgłębia się w ziemię w dolnej skrzyni. Za to przydać się może do badania współczynników tarcia ziemi ubitej. Musimy jednakże uważać przytem, aby spójność nie mąciła nam wyników obserwacji.

Dwie dalsze metody polegają na jednoczesnem obserwowaniu spójności i tarcia. Jeśli umieścimy dwie skrzynie na sobie i wypełnimy je ziemią, to możemy, ciągnąc za sznur lub obciążając szalkę uczepioną do niego i przerzuconą przez blok, znaleźć wielkość oporu, jaki stawia ziemia przy przesunięciu skrzyń względem siebie. Opór zmierzony jest złożony z oporu tarcia i z oporu spójności. Jeśli jednak skrzynię ustawimy napowrót na dawnym miejscu i szalkę obciążymy, to okaże się, że opór przy przesuwaniu skrzyń będzie mniejszy, gdyż obejmuje tylko tarcie. Z różnicy obydwu pomiarów można naturalnie wnioskować o wielkości natężeń stycznych, jakie powstały w ścinanym przekroju materiału ziemnego, a więc można drogą obserwacji znaleźć obydwie te ważne czynniki.

Jest jeszcze jedna metoda, do której można dojść z rozważania warunków równowagi szkarpy, utworzonej z ziemi spoistej.

Jeżeli mianowicie mamy daną dowolną szkarpe, to może się ona utrzymać w równowadze, pomimo, że bardziej jest stroma, aniżeli stok naturalny. Przy danych warunkach co do rodzaju ziemi, jej struktury i wilgotności musi zawsze istnieć pewien maksymalny kąt nachylenia szkarpy do poziomu. Jednocześnie jednak musi istnieć zawsze i pewna wysokość stoku, przy której szkarpa jeszcze może się utrzymać w równowadze. Wzór na wysokość stoku, który można wyprowadzić z ogólnych warunków równowagi, jest:

$$h = \frac{2c \cos \varphi_1 \sin \alpha}{\sigma \sin^2 \frac{\alpha - \varphi_1}{2}},$$

gdzie c oznacza spójność na jednostkę powierzchni, φ_1 jest kątem tarcia wewnętrznego ziemi, α kątem nachylenia szkarpy, zaś σ ciężarem jednostki objętości ziemi.

Obliczając z tego wzoru spójność c dla dwu różnych wysokości h' i h'' , obserwowanych przy dwu nachyleniach szkarpy:

$$c = \frac{1}{2} \sigma h' \frac{\sin^2 \frac{\alpha' - \varphi_1}{2}}{\sin \alpha' \cos \varphi_1}; \quad c = \frac{1}{2} \sigma h'' \frac{\sin^2 \frac{\alpha'' - \varphi_1}{2}}{\sin \alpha'' \cos \varphi_1},$$

możemy z tych dwu równań ustawić trzecie:

$$h' \sin^2 \frac{\alpha' - \varphi_1}{2} \sin \alpha'' = h'' \sin^2 \frac{\alpha'' - \varphi_1}{2} \sin \alpha',$$

albo:

$$\sqrt{h' \sin \alpha''} \cdot \sin \frac{\alpha' - \varrho_1}{2} = \sqrt{h'' \sin \alpha'} \cdot \sin \frac{\alpha'' - \varrho_1}{2}.$$

Wstawiając wartość za $\sin \frac{\alpha' - \varrho_1}{2}$ i za $\sin \frac{\alpha'' - \varrho_1}{2}$, otrzymamy po uporządkowaniu równania:

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha'}{2} \sqrt{h' \sin \alpha''} - \sin \frac{\alpha''}{2} \sqrt{h'' \sin \alpha'}}{\cos \frac{\alpha'}{2} \sqrt{h' \sin \alpha''} - \cos \frac{\alpha''}{2} \sqrt{h'' \sin \alpha'}}.$$

W wyrażeniu po prawej stronie dzielimy licznik i mianownik przez $\sqrt{\sin \alpha' \sin \alpha''}$:

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha'}{2} \sqrt{\frac{h'}{\sin \alpha'}} - \sin \frac{\alpha''}{2} \sqrt{\frac{h''}{\sin \alpha''}}}{\cos \frac{\alpha'}{2} \sqrt{\frac{h'}{\sin \alpha'}} - \cos \frac{\alpha''}{2} \sqrt{\frac{h''}{\sin \alpha''}}}.$$

Po wstawieniu wartości na funkcyje $\frac{\alpha'}{2}$ i $\frac{\alpha''}{2}$ otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2} = \frac{\sqrt{h' \frac{1 - \cos \alpha'}{\sin \alpha'}} - \sqrt{h'' \frac{1 - \cos \alpha''}{\sin \alpha''}}}{\sqrt{h' \frac{1 + \cos \alpha'}{\sin \alpha'}} - \sqrt{h'' \frac{1 + \cos \alpha''}{\sin \alpha''}}}.$$

Ułamkowe wyrażenia pod znakiem pierwiastkowania możemy przekształcić:

$$\frac{1 - \cos \alpha'}{\sin \alpha'} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha'}{2}}{2 \sin \frac{\alpha'}{2} \cos \frac{\alpha'}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2},$$

$$\frac{1 + \cos \alpha'}{\sin \alpha'} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha'}{2}}{2 \sin \frac{\alpha'}{2} \cos \frac{\alpha'}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha'}{2}.$$

Wobec tego będzie:

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho}{2} = \frac{\sqrt{h' \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}} - \sqrt{h'' \operatorname{tg} \frac{\alpha''}{2}}}{\sqrt{h' \operatorname{ctg} \frac{\alpha'}{2}} - \sqrt{h'' \operatorname{ctg} \frac{\alpha''}{2}}}$$

Wprowadzając w rachunkach wysokość stoku pionowego h_0 , t. j. taką wysokość, przy której może się stok pionowy jeszcze utrzymać, dostaniemy po podstawieniu $\alpha' = 90^\circ$ i $h' = h_0$ wzór zmieniony, z którego łatwo już obliczyć kąt tarcia i współczynnik:

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho}{2} = \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{h_0} - \sqrt{h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}}$$

Wszystkich metod, o których wspomniano powyżej, używano do wyszukiwania współczynników tarcia wewnętrznego ziemi. Wielu bardzo autorów podaje daty, różniące się znacznie pomiędzy sobą, dlatego wskazane było zebranie ich i zestawienie ze sobą w tablicach, w których uwidoczniło się źródło, skąd cyfrę wzięto. Ponieważ jednak nie wszystkim autorom chodziło o podawanie współczynnika, a tylko przedewszystkiem o wynalezienie ważnego w robotach ziemnych nachylenia szkarpy do poziomu, musiano poobliczać odpowiednie współczynniki i uzupełnić w ten sposób tablice:

TABLICA III.

Współczynniki uzyskane drogą obserwacji kąta nachylenia szkarpy naturalnej do poziomu.

L. p.	Rodzaj ziemi	Kąt tarcia	Współczynnik tarcia wewn. ϕ	A u t o r
1.	Suchy mialki piasek	31°—	0.60086	Gadroy-Navier
	" " "	32°—	0.62487	Woltmann-Eytelwein
	" " "	35°30'	0.71329	Rondelet
	" " "	36°59'	0.75310	Martony
2.	Najlżejszy piasek	39°—	0.80978	Barlow-Navier
3.	Zwilżony piasek	24°—	0.44523	Eytelwein
4.	" " "	40°3'	0.84060	Martony
	Mokry piasek	41°51'	0.89568	"
5.	Sucha mialka ziemia z ogrodu .	37°—	0.75355	Woltmann-Eytelwein
6.	Zwilżona ziemia z ogrodu . .	27°—	0.50953	Eytelwein
7.	Zwykła ziemia sucha sproszk. .	46°50'	1.06613	Rondelet
8.	" " nieco zwilżona	54°—	1.37638	Rondelet

L. p.	Rodzaj ziemi	Kąt tarcia	Spółczynnik tarcia wewn. ψ	A n t o r
9.	Sucha mialka ziemia z wału .	39°19'	0·81898	Martony
10.	Zwilżona " " .	41°27'	0·88317	"
11.	Mokra " " .	34°28'	0·68643	"
12.	Glinka piaszczysta nieco wilg. .	39°—	0·80978	"
13.	Sucha glina mialka	45°—	1·00000	Woltmann-Eytelwein
14.	" " sproszkowana	40°—	0·83910	" "
	Glina	39°39'	0·82874	Martony
15.	Zwilżona glina	39°44'	0·83120	"
16.	Mokra glina	34°28'	0·68643	"
17.	Suchy mialki wapieni	50°—	1·19175	Woltmann-Eytelwein
18.	Szuter	36°—	0·72654	" "
19.	Szuter gruby nieco wilgotny .	40°45'	0·86166	Martony

TABLICA IV.

Spółczynniki obliczone przez Martonyego z pochylenia stołu, po którym zesuwa się blok ziemi.

L. porz.	Rodzaj ziemi	Kąt tarcia	Spółczynnik
1.	Sucha ubita ziemia z wału	37°—	0·75355
2.	Zwilżona " "	42°—	0·90040

TABLICA V.

Spółczynniki obliczone podług dat Martonyego jako iloraz oporu tarcia przez ciężar poruszany.

L. p.	Rodzaj ziemi	Kąt tarcia ρ_1	Spółczynnik ψ
1.	Ziemia z wału sucha i ubita . . .	33°33'	0·6633
2.	" " wilgotna	44°18'	0·9760
3.	Glina sucha zbita	41°25'	0·8821
4.	" wilgotna zbita	47°57'	1·1086
5.	" ubita z żwirem	42°3'	0·9018

Prócz tego obserwował Martony rzut poziomy szkarpy dla wysokości równej jednostce, otrzymując w ten sposób odwrotności współczynników tarcia, z których obliczono kąt odpowiedni.

TABLICA VI.

L. p.	Rodzaj ziemi	Kąt tarcia ρ_1	Odwrotność współ- czynnika $\frac{1}{\psi}$
1.	Ziemia z wału sypka nieco wilgot.	41°4'	1·148
2.	" " mokra	34°25'	1·460
3.	Piasek kwarcowy drobny suchy .	37°00'	1·327
4.	" " wilgotny	39°44'	1·203
5.	" " mokry	42°32'	1·116
6.	Gлина sypka sucha	39°40'	1·206
7.	" " wilgotna	39°40'	1·206
8.	" " mokra	38°40'	1·250
9.	Szuter gruby nieco wilgotny . .	40°45'	1·161

Ostatecznie podajemy tablicę podług Rebhanna i Otta:

TABLICA VII.

L. p.	Rodzaj ziemi	Kąt tarcia ρ_1	Spółczynnik ψ
1.	Ziemia uprawna sypka i sucha .	40°	0·839
2.	" " " wilgotna .	45°	1·000
3.	" " nasycona wodą .	30°	0·577
4.	" " sucha ubita . .	42°	0·900
5.	" " wilgotna ubita .	65°	2·145
6.	Gлина sypka sucha	40°	0·839
7.	" " wilgotna	45°	1·000
8.	" " nasycona wodą . .	30°	0·577
9.	" ubita sucha	42°	0·900
10.	" " wilgotna	70°	2·748
11.	Piasek suchy	35°	0·700
12.	" wilgotny	40°	0·839
13.	" nasycony wodą	30°	0·577

Zestawienia te wszystkie świadczą, że nie brakło usiłowań zbadania współczynników tarcia wewnętrznego ziemi. Nie tyle może chodziło badaczom o zużytkowanie tych cyfr do wyjaśnienia wielkości oporów przy narzędziach rolniczych, ile raczej o posunięcie naprzód teorii parcia ziemi i o praktyczne wskazówki co do nachylenia szkarp przy robotach ziemnych. Dlatego też w wielu danych tak mało właściwie jest powiedziane, bo nie są one związane z jednoczesnem bliższem i dokładniejszym oznaczeniem rodzaju ziemi, do której się odnoszą.

Wiele trudu zadał sobie F. Loewe, który w swej ciekawej książce ¹⁾ o tarciu i o spójności ziem dał dużo materiału doświadczalnego i z której zaczerpnęliśmy wiele dat, podanych za dawniejszymi autorami. Metoda jego polegała na obserwacji kątów nachylenia przy dwu wysokościach szkarpy. Według wzoru podobnego do tego, który podano wyżej, obliczał następnie kąt tarcia i spójność. Ponieważ wyniki nie zadowalały go, starał się znaleźć przybliżony kształt równania, z jakiegoby można obliczyć przypuszczalną wartość kąta tarcia. Wskutek tego podane przez niego końcowe daty, uzyskane drogą obliczeń, są wątpliwe. Prócz tego trzeba zauważyć, że Loewe używa wzoru, w którym zamiast kąta nachylenia szkarpy do poziomu, wprowadzono kąt, jaki szkarpa tworzy z pionem, t. j. kąt dopełniający. Wskutek tego i rezultat, t. j. obliczony kąt τ , nie będzie wcale kątem tarcia, a tylko jego dopełnieniem. Zauważamy to, by ostrzedz czytających przed pomyłką, o tyle łatwą, że autor wcale o tem nie wspomina i wcale rzeczywistego kąta tarcia nie oblicza.

Wzór, użyty w tym razie, możemy wyprowadzić z wzoru podanego poprzednio:

$$c = \frac{1}{2} \sigma h \frac{\sin^2 \frac{\alpha - \varrho_1}{2}}{\sin \alpha \cos \varrho_1},$$

kładąc $\alpha = 90 - \varepsilon$, $\varrho_1 = 90 - \tau$.

Otrzymamy ogólnie:

$$c = \frac{1}{2} \sigma h \frac{\sin^2 \frac{\tau - \varepsilon}{2}}{\sin \tau \cos \varepsilon}.$$

Mając dwie wartości kąta ε dla dwu różnych wysokości szkarpy h , możemy w analogiczny sposób, jak poprzednio, znaleźć:

$$\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} = \frac{\sqrt{h'' (\sec \varepsilon'' - 1)} - \sqrt{h' (\sec \varepsilon' - 1)}}{\sqrt{h'' (\sec \varepsilon'' + 1)} - \sqrt{h' (\sec \varepsilon' + 1)}}.$$

Z wielu dat wyjmujemy kilka i podajemy obliczone z nich c i ϱ_1 dla piasku o kilku różnych stopniach wilgotności, zauważając jednocześnie, że zawartość wody nie jest bynajmniej podawana w procentach pojemności wody, lecz w procentach ogólnego ciężaru zwilżonej ziemi.

¹⁾ Ferdinand Loewe: *Alte und neue Versuche über Reibung und Cohäsion der Erdarten*. München, 1872.

TABLICA VIII.

Zawartość wody w % wagi piasku	Kąt szkarpy natu- ralnej ρ_1	Śpółczynnik tarcia ψ	Spójność w g/cm^2 c
1.855	40°18'37''	0.84837	1.877
2.353	38°54'27''	0.80898	2.351
3.415	43°57'47''	0.96444	2.520
9.013	44°0' 19''	0.96587	3.669
9.995	44°51'14''	0.99491	3.942

Daty te wzięto jako średnie z wielu doświadczeń o rezultatach bardzo różniących się pomiędzy sobą. Nie ulega wątpliwości, że i inne poprzednio przytaczane cyfry są również obliczone jako średnie wielu obserwacji, dokonanych przez autorów, ale tylko Loewe dał oprócz opracowania także surowy materiał obserwacyjny, który można było przeliczyć. Uderza przedewszystkiem fakt, że Loewe prowadził doświadczenia z miarką ziemią, a nie przedsiębrał żadnych prób z ziemią ubitą, o jaką w większości przypadków nam chodzi. Tłómaczy się to zbyt wielkimi wysokościami szkarpy, które robią tę metodę w odniesieniu do badań laboratoryjnych, prowadzonych z ziemią zbitą, niemal nieużyteczną. Dość powiedzieć, że dla zwykłej ziemi zbitej wysokość szkarpy pionowej $h_0 = 1$ m do 2 m, dla gliny zbitej i ilu $h_0 = 2$ m do 4 m. Tak zatem teoretycznie pięknie pomyślana metoda napotyka na wielkie przeszkody w zastosowaniu.

Z dat, nagromadzonych przez Loewego, zużytkowano tutaj tylko te, które dają nam niejakię pojęcie o wpływie wilgotności na tarcie i na spójność piasku. Obraz ten należałoby jednak zaopatrzyć pewnem objaśnieniem. Wielce prawdopodobne jest, że niedokładność metody i błędy (może nawet przypadkowo wielkie) były przyczyną zbyt wysokiego ocenienia kąta tarcia w pierwszym, zbyt zaś niskiego oszacowania go w drugim wierszu tablicy. Wskutek tego otrzymuje się wrażenie, jakoby tarcie od pewnego minimum w stanie suchym podnosiło się do pewnego stopnia, ażeby następnie opaść i podnieść się znowu. Ponieważ zaś w stanie zupełnie mokrym piasek musi mieć mniejsze tarcie i spójność, aniżeli w stanie miernie wilgotnym, przeto musiałby mieć trzy minima, co jest wielce nieprawdopodobne. Wystarczy porównać daty podane w tablicy VII. ażeby przekonać się, że piasek średnio wilgotny posiada największe tarcie. Wprawdzie w tablicy VI i III podane daty zdawałyby się przeczyć temu, ale należy przyznać, że pojęcie „mokrej” ziemi niekoniecznie musi się pokrywać z pojęciem ziemi „nasyconej wodą”.

Trudno bez dokładnych dat urobić sobie należyte pojęcie o wpływie wilgotności na tarcie wewnętrzne ziemi, ale też można z pewnem prawdopodobieństwem przyjąć na razie hipotezę, iż tarcie, podobnie jak i spójność ziemi, posiada maximum przy średniej, nieznaney na razie wilgotności. Może się zdarzyć wprawdzie, że maxima tarcia wewnętrznego i spójności będą istnieć przy tem samem nasyceniu wodą, nie mamy jednakże obecnie tyle materiału doświadczalnego, ażeby módz stwierdzić, czy zbieżność maximów jest regułą i czy nie gra tu roli także skład mechaniczny i chemiczny ziemi.

II. Moc ziemi.

Pod działaniem sił zewnętrznych powstają w ciele nateżenia, które rosną tak długo, dopóki materiał nie ulegnie zerwaniu. Wielkość nateżeń zatem w chwili zerwania będzie nam mówić o wytrzymałości materiału. Badając je, musimy dla możności porównań odnosić je do wielkości przekroju i podawać, jak wielkie nateżenia, czy to styczne, czy też normalne w przekroju zerwanym przypadają na jednostkę tego przekroju.

Nateżenia maksymalne, podane na jednostkę przekroju, takie zatem, jakie istnieją w chwili zerwania materiału, nazywamy jego mocą. Najwygodniej będzie liczyć je przy badaniach wytrzymałości ziemi w gramach na 1 cm^2 .

Zależnie od tego, czy w danym przekroju przeważają nateżenia normalne doń, czy styczne i zależnie od kierunku nateżeń, różniamy różne moce materiału: 1) na zgniatanie; 2) na rozerwanie; 3) na ścinanie; 4) na zgięcie i 5) na skręcenie. Trzy pierwsze nazywają się mocami bezwzględными, ostatnie dwie są mocami względnymi.

Rzadko kiedy występują one w stanie czystym, z wyjątkiem może mocy przy zgniataniu, ale najczęściej spotykamy je jako moce złożone. W mechanicznej uprawie ziemi napotykamy je wszystkie, osobliwie przy działaniu pługa. Chcąc zatem zdać sobie sprawę z deformacyi, jakim ulega ziemia pod działaniem narzędzi i chcąc poznać bliżej źródło i wielkość oporów napotykanych przez narzędzie, musi się znać wprzód wszystkie rodzaje mocy ziemi.

Stan ziemi podczas uprawy może być nader różny. Zarówno stopień zbitości, jak i procent wilgotności, mogą w jednej i tej samej ziemi dać różne wyniki obserwacyi. Już sam fakt, że ze zmianą zawartości wody zmienia się również i tarcie wewnętrzne, sprawia, że można z góry przewidzieć analogiczne zmiany w mocy.

Badania mocy ziemi mają już swoją historję, zapoczątkowaną przez Schüblera. Cały szereg ludzi zajmował się żywo tą kwestyą,

wypracowując metody naukowe, mające na celu zbadanie wytrzymałości ziemi, względnie zaś oporów, jakie ziemia stawia wgłębiającemu się w nią narzędziu. Trudno byłoby przechodzić na tem miejscu cały historyczny rozwój tych metod, pragniemy tylko podać ważniejsze rezultaty znanych nam badań i w miarę możliwości zapłacić luki własnymi spostrzeżeniami. Nie wszędzie było to możliwe, gdyż n. p. moc ziemi na skręcanie zupełnie dotychczas badaniami przez nikogo nie objęta, czeka dopiero na zajęcie się nią i na wypracowanie metody jej badania. Zestawienia nasze musiały być sprowadzone do jednego i tego samego kształtu, wobec czego okazała się potrzeba przeliczenia zupełnego dat, podanych przez cytowanych poniżej autorów. Należało też uporządkować daty krytycznie, gdyż te, odnosząc się pozornie do rzeczy tych samych, mają niejednokrotnie zupełnie odmienne znaczenia i nie mogą być ze sobą nawet porównywane. Słowo *Kohäreszenz*, napotykanie u niemieckich autorów, oznacza niekiedy zupełnie różne moce, mające tyle tylko wspólnego, że są wogóle mocami. Nazwa ta sprawiła, że sprawa badania mocy ziemi, postawiona przez prof. Haberlandta ¹⁾ dość jasno i na właściwym gruncie, poczęła się gubić w nieodpowiednich niekiedy metodach i zużywać siły badaczy na gromadzenie dat nieprzydatnych do dalszego kontynuowania.

Prof. Haberlandt zajmował się tylko badaniem mocy ziemi przy zgniataciu i złamaniu, Heinrich ²⁾ usiłował pierwszy znaleźć wielkość mocy przy rozrywaniu ziemi, Dr. Piędzicki ³⁾ badał moc na zgniatacie, Martony i Loewe ⁴⁾ zajęli się mocą na ścinanie. Puchner ⁵⁾ już odbiegł od tego kierunku badania mocy niezłożonych i wprowadził za Schüblerem na nowo pojęcie oporu przy rozdzielaniu (*Trennungswiderstand*), które oznacza właściwie jedną z kombinacji mocy złożonej. Podobną drogą poszedł następnie i Dr. Bagger ⁶⁾.

Ponieważ z wyjątkiem Dra Loewego żaden z wymienionych autorów nie obrobił cyfr uzyskanych z obserwacji i nie odniósł ich do jednostki przekroju, a tylko podał surowy materiał, dlatego cyfry w naszych zestawieniach musiano dopiero z owych dat obliczyć.

¹⁾ F. Haberlandt: Über die Kohäreszenzverhältnisse verschiedener Bodenarten. (Vorsch. a. d. Gebiete d. Agrikulturphysik. Band I).

²⁾ R. Heinrich: Grundlagen zur Beurteilung der Ackerkrume. Wismar, 1882.

³⁾ Zygmunt Piędzicki: Untersuchungen über die Bindigkeit des Bodens. Merseburg, 1899.

⁴⁾ F. Loewe: o. c.

⁵⁾ H. Puchner: Untersuchungen über die Kohäreszenz der Bodenarten. (F. a. d. G. d. A. Band XII).

⁶⁾ Dr. Bagger: Einige Versuche über die Bindigkeit des Bodens etc. (Der Kulturtechniker 1907. Heft 1).

Nie wchodzą wcale w zakres niniejszej pracy badania, które tyczą się wpływu oddzielnych części składowych na moc ziemi. Dat odnośnych jest bardzo wiele, a odnaleźć je można w cytowanych powyżej pracach. Jedynie tylko wpływ wilgoci, jako czynnika zewnętrznego, musi nas zająć bliżej, tembardziej, iż dla mechanicznej uprawy roli jest to kwestya pierwszorzędno znaczenia. Szczupła ilość dat, odnoszących się do tego przedmiotu, nie wystarcza wprawdzie do wszechstronnego wyświetlenia kwestyi, ale zezwala już na pewne wyjaśnienie wpływu wilgotności na moc ziemi. Już w jednej z poprzedzających prac¹⁾ dotknęliśmy tej sprawy, tutaj należy jedynie pogląd tam wyrażony rozszerzyć i ugruntować.

Ziemia, będąca w strukturze jednostajnie ziarnistej lub w strukturze gruzelkowej nasycona wodą, może znaleźć się pod wpływem sił zewnętrznych w nowym stanie ugrupowania cząstek i tworzyć grudę, bryły lub jednostajnie zbitą masę. Początkowy stan wilgotności może być różny i moc ziemi tuż po przejściu w inne ugrupowanie zależy od ilości wody, jaką ziemia posiada w danej chwili. Skorobyśmy narzędziem taką ziemię uprawili, to rezultatem byłoby pokruszenie jej w grudki i grudy, które z czasem, przy sprzyjających warunkach, traciłyby wilgoć, a wyschnięte przedstawiałyby ponownemu obrabianiu zupełnie inne opory. Wiemy z praktyki, iż ziemia zorana na mokro może stwardnieć przez wyschnięcie do tego stopnia, że wszelkie zabiegi, mające na celu rozdrobnienie grudy, będą bezskuteczne. Po orce, wykonanej w miernym stanie wilgotności, stwardnienie skiby nie idzie tak daleko. Widoczne jest z tego, iż moc wyschniętej ziemi zależy od wilgotności początkowej, t. j. tej, w jakiej ziemia znajdowała się w chwili formowania się grudy.

Co do wpływu procentu wilgoci w chwili formowania na moc ziemi, wykazały nasze badania, że moc ta rośnie w miarę zwiększania się wilgotności aż do pewnego stopnia, następnie zaś staje się mniejszą. Maximum mocy (obserwowanej jednakże tylko przy zgniataniu) leży prawdopodobnie dla wszystkich ziem przy nasyceniu około 40% pojemności wody. Już wówczas zwróciliśmy uwagę, że krzywa, przedstawiająca zależność mocy ziemi od stopnia wilgotności przy formowaniu i próbie, jest właściwie krzywą obejmującą wszystkie początkowe stany przy wysychaniu. Musimy sobie wyobrazić, że z każdego punktu takiej krzywej wychodzi nowa krzywa, przedstawiająca zmianę mocy ziemi w miarę wysychania materiału. Maxima tych krzywych zależy od rodzaju ziemi; położenie ich zatem jest zmienne. Niekiedy krzywa wznosi się stale ku górze, niekiedy po przejściu pewnej największej wartości funkcyi obniża się,

¹⁾ T. M. Gołogurski: Badania mocy ziemi przy zgniataniu. (Roczniki nauk rolniczych. Tom III).

niekiedy zaś maximum leży w początku krzywej, ta zaś stale kieruje się ku dołowi.

Uwagi te są potrzebne, ażeby przy podawaniu dat, pochodzących z różnych źródeł, rozróżniać te zjawiska, przy których objawił się już wpływ wysychania, od tych, które obserwowano w chwili formowania ziemi w grudki.

I. Moc bezwzględna ziemi.

A) Moc przy zgniataniu.

Wspomniane powyżej próby, wykonane z 30 ziemiami, były prowadzone przy 40% wilgotności. Daty zebrane podówczas wykazują, że moc ziemi zgniatanej waha się w dość szerokich granicach. Maksymalną moc posiadał il (531 g/cm²), minimalną piasek (28 g/cm²). Z tych wszystkich dat wyjmujemy siedm, które odnoszą się do próbek wziętych z Mydlnik z folwarku doświadczalnego Uniw. Jag., gdyż tych samych ziem zużyto do dalszych doświadczeń z deformacyami ziemi. Obok tego wzięto dodatkowo dwie ziemie z Płaszowa i piasek rzeczny z Mydlnik. W celu lepszego zorientowania się, do jakiego rodzaju ziem należy wyniki prób odnieść, podajemy skład mechaniczny użytego materiału i pojemność wody. Wszystkie te dane są uporządkowane dla przejrzystości według ilości najdrobniejszych cząstek zawartych w ziemi.

TABLICA IX.

L. p.	Miejscowość	Rodzaj warstw, z której wzięto próbkę	Ziarna o średnicy					Pojemność wody	U w a g a
			do 0·01 mm	0·01— 0·05	0·05— 0·10	0·10— 1·0	powyż. 1·0		
			w procentach suchej masy ziemi						
I.	Płaszów	gleba	42·75	41·69	10·98	4·46	0·12	45·9	od 0·10—0·25 2·51 0·25—0·50 1·31 0·50—1·00 0·64
II.	"	"	26·53	29·45	17·59	26·39	0·04	40·7	0·10—0·25 8·95 0·25—0·50 15·61 0·50—1·00 1·83
III.	Mydlniki	"	25·550	28·880	5·940	32·080	7·550	56·3	il
IV.	"	"	22·920	51·050	13·580	12·350	0·100	42·4	löss
V.	"	"	20·380	56·380	14·340	8·720	0·180	45·0	"
VI.	"	"	20·200	49·080	13·220	17·500	0·000	45·0	"
VII.	"	"	19·730	53·280	14·690	12·230	0·070	56·8	glinka
VIII.	"	podgl.	17·300	57·030	14·950	10·630	0·090	52·5	"
IX.	"	gleba	7·310	9·180	5·220	77·610	0·680	31·8	piasek
X.	"	piasek	nadrzeczny odsiany przez sito 1 mm						"

Ziemię uformowano w walce o średnicy 28 mm i długości 50 mm, następnie wysuszono na powietrzu i poddano zgniataniu. Poniżej podajemy rezultaty, wzięte z cytowanej już poprzednio pracy:

	Ziemia nr.						
	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
Moc na zgniatanie po wysuszeniu ziemi g/cm^2 .	12329	4012	1299	2089	1995	6220	1478

Pomijamy daty, podane przez Haberlandta dla dwunastu różnych ziem, gdyż nie wiemy, ani przy jakiej wilgotności próbki formowano, ani też nie znamy składu mechanicznego ziem, z którymi próbę wykonano. Prócz tego daty, podane przez Haberlandta, wydają się wobec dat naszych, a także i tych, które za Puchnerem na dalszem miejscu cytujemy, nieprawdopodobnie wysokie. Natomiast podajemy te wyniki prób Haberlandta, które odnoszą się do wzrastania mocy w miarę wysychania ziemi piaszczystej:

	Zawartość wody w % ciężaru					
	11·85	5·55	2·59	1·24	0·79	0·66
Moc przy zgniataniu g/cm^2 . .	853	1831	3267	5162	6791	9271

Prócz tego musimy wspomnieć szerzej o próbach Puchnera, który (podobnie jak Schachbasian przy oznaczaniu współczynników tarcia zewnętrznego) operował przeważnie piaskiem i ziemiami sztucznymi, złożonymi z próchnicy, kaolinu i kwarcu. Jakkolwiek można się sprzeczać co do celowości dalszego badania ziem sztucznie złożonych, niepodobna nie przyznać, że one w wielkim stopniu przyczyniły się do rozświetlenia wielu kwestyi i były koniecznym wstępem do badań ziem naturalnych z domieszkami coraz to większych procentów pewnych, zawartych już w nich składników, skonstatowanych przez mechaniczną i chemiczną analizę.

Należało je podnieść tutaj, gdyż wyjaśniają w pewnej mierze zmienność mocy przy wysychaniu ziemi i odnoszą się do wytrzymałości przy zgniataniu, o którą właśnie chodzi. Próby te wykonano w ten sposób, że ziemię, uformowaną w walce o 2 cm średnicy i 3 cm wysokości nasycano wodą, a następnie podsuszano do wilgotności odpowiadającej 80%, 60% i t. d. pojemności wody. Przy tych tedy datach należy pamiętać, że wysychanie odbywało się od krańcowej maksymalnej wilgotności, a nie jak w naszych próbach od 40% pojemności lub w próbach Haberlandta od 11·85% wagi :

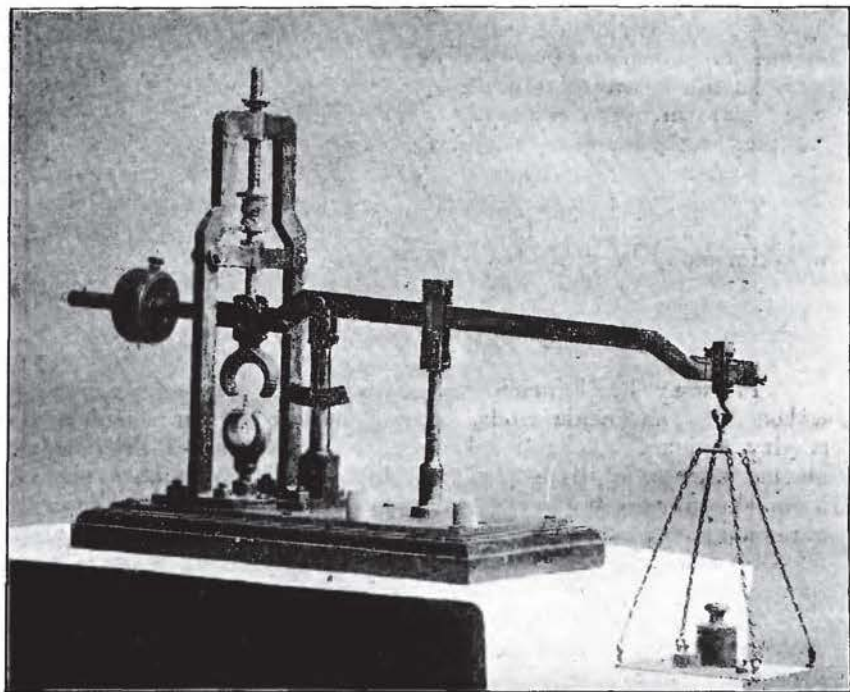
TABLICA X.

L. p.	Rodzaj ziemi	Względna wilgotność ziemi					
		80°/o	60°/o	40°/o	20°/o	0°/o	
		Moc przy zgniataniu g/cm²					
		O średnicy ziarn:					
I.	Piaszek kwarcowy	0.01—0.071 mm	1320	1402	1489	1211	247
II.		0.071—0.114 "	244	281	167	93	42
III.		0.114—0.171 "	109	88	61	36	22
IV.		0.171—0.250 "	71	40	27	19	2
V.		0.250—0.500 "	35	29	21	19	—
VI.		0.5—1.0 "	16	8	4	—	—
VII.		1.0—2.0 "	5	—	—	—	—
VIII.	od	0.01—2.0 "	151	304	462	289	25
IX.	Piaszek wapienny	0.01—0.071 "	655	812	995	1102	909
X.		0.071—0.114 "	255	297	342	292	273
XI.		0.114—0.171 "	167	199	220	167	140
XII.		0.171—0.250 "	85	116	178	149	121
XIII.		od	0.01—0.25 "	240	400	515	719
XIV.	Kaolin		—	4775	5411	6048	6685
XV.	$\frac{2}{3}$ kaolinu + $\frac{1}{3}$ kwarcu . . .		—	3183	3820	4457	5730
XVI.	$\frac{1}{3}$ kaolinu + $\frac{2}{3}$ kwarcu . . .		—	2712	3501	3183	3135
XVII.	Kwarc		477	577	700	637	223
XVIII.	$\frac{2}{3}$ kwarcu + $\frac{1}{3}$ humusu . . .		637	796	478	159	111
XIX.	$\frac{1}{3}$ kwarcu + $\frac{2}{3}$ humusu . . .		382	541	573	255	32
XX.	Humus		192	207	161	88	8
XXI.	$\frac{2}{3}$ humusu + $\frac{1}{3}$ kaolinu . . .		1369	1591	1750	1910	1114
XXII.	$\frac{1}{3}$ humusu + $\frac{2}{3}$ kaolinu . . .		—	3501	4138	5093	6048

Daty przytaczane uzyskano wprawdzie wszystkie jako wynik ostateczny wielu spostrzeżeń, pomimo to nie jest wcale wykluczone, iż noszą w sobie błędy, pochodzące z niedokładności instrumentów, jakimi czyniono pomiary. Aparaty, służące do próbnego zgniatania ziemi, są uader rozmaite. Przeważnie konstrukcyja ich oparta jest na zasadzie dźwigni, jak n. p. w przyrządzie Schüblera, w modyfikacyi jego wprowadzonej przez Piędzickiego lub w aparacie, użytym przez nas do doświadczeń. Puchner posługiwał się przyrządem,

w którym ciężar bezpośrednio działał na trzon pionowy-i na znajdującą się pod jego zakończeniem próbkę ziemi.

Dla uzupełnienia podajemy rysunek aparatu, którego opis znaleźć można w II tomie „Roczników nauk rolniczych“, a którego konstrukcja i działanie są łatwe do odgadnięcia z rysunku (ryc. 1).



Rycina 1.

Teoretycznie możnaby mu zarzucić, że ruchomy krążek dolny, na którym stoi próbny walec z ziemi, spoczywa swym trzonem na końcu dźwigni, poruszającym się po łuku. Wskutek tego następuje ślizganie się tych elementów po sobie i zmienna długość ramienia dźwigni. Ten zarzut jednakowoż ma tylko czysto teoretyczne znaczenie, gdyż drogi, jakie odbywa punkt podparcia, są tak drobne, że ich w rachubę poprostu brać niepodobna. Zresztą zawsze wyznaczono stałą aparatu i uwzględniono opory, zachodzące przy samym ruchu dźwigni i przy przesuwaniu się trzonu dolnej podstawki w swoim łożysku. Aparat użyty posiadał jedną wadę: był za słaby do próbowania spoistych ziem wyschniętych. Na ogół jednak ma-

nipulowanie z nim jest wygodniejsze, aniżeli z aparatem Puchnera, gdyż operuje się mniejszymi ciężarkami.

Tym to aparatem zmierzono moc na zgniatanie dziesięciu ziem próbnych i wyniki umieszczono we wspólnej tablicy.

Nieco szerzej potrzeba było omówić zgniatanie, już chociażby z tego powodu, że prób w tym kierunku było najwięcej i że tu można było podnieść niezmiernie ważną sprawę wysychania. Badań innych mocy jest daleko mniej, gdyż z jednej strony trudniejsze są one do skonstatowania, z drugiej zaś strony uważano je niesłusznie za mniej ważne, nie zdając sobie sprawy, że do zrozumienia mocy złożonej, jaka występuje przy działaniu narzędzi rolniczych lub przy wgłębianiu się korzenia rośliny w ziemię, konieczną jest znajomość mocy niezłożonych. Zadaniem naszym będzie przedstawienie w dalszym ciągu rezultatów dotychczasowych badań innych mocy tak, ażeby można było wysnuć pewne wnioski co do stosunku, w jakim stoją do siebie moce niezłożone.

B) Moc przy rozrywaniu.

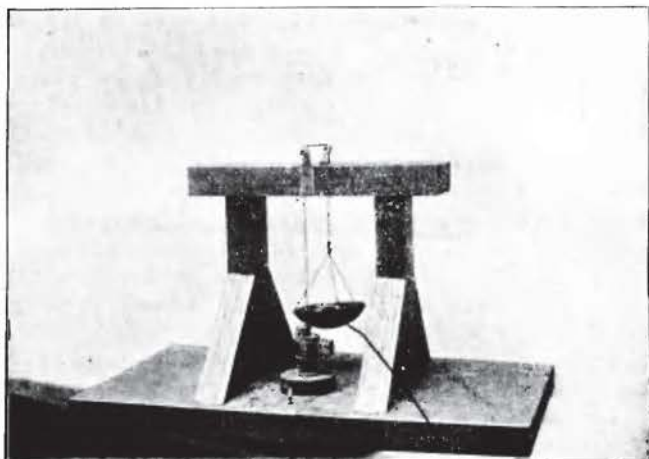
Pierwszy R. Heinrich badał moc ziemi na rozerwanie i to wobec 50% nasycenia wodą. Ziemię umieszczał on ściśniętą pomiędzy dwiema blachami żelaznymi o powierzchni 1 dm^2 . Górna blacha zawieszona była poziomo, dolną obciążano małym naczynkiem, do którego wsypywano piasek. Ciężar potrzebny do rozerwania ziemi podzielony przez powierzchnię przerwaną, dawał moc ziemi na rozerwanie. Metoda ta przydatna jest jedynie do badania ziem, których przyczepność do żelaza jest większa od mocy.

Przez nieporozumienie zapewne odnosi Mitscherlich ¹⁾ pewną część prób wykonanych przez prof. Haberlandta do mocy na rozerwanie. Uważać to należy za pomyłkę, gdyż walec z dowolnego wykonany materiału, podparty na obydwu końcach, a obciążony w środku nie rozrywa się, lecz łamie. Wprawdzie w przekrojach poprzecznych zginanej belki powstają natężenia normalne do przekroju, jednakże tylko w dolnej części belki ponad osią obojętną następują rozerwania włókien podłużnych, podczas gdy w górnej części muszą powstać zgniatania. A właśnie tego rodzaju natężenia nazywamy w nauce o wytrzymałości materiałów natężeniem przy zginaniu lub złamaniu.

Wobec tego, że metoda Heinricha może mieć bardzo szczupły zakres zastosowania, gdyż mało tylko ziem jest takich, któreby miały przyczepność do żelaza większą nad moc na rozerwanie, wydało się wskazane spróbować, czy sposoby, używane przy badaniu

¹⁾ Dr. A. Mitscherlich: Bodenkunde. Berlin, 1905.

innych materiałów, nie dałyby się z pewnemi modyfikacyami, odpowiadającemi naturze badanego materiału, zastosować przy badaniu mocy ziemi na rozerwanie. Skonstruowano zatem nowy aparat, który zapewne będzie można jeszcze z biegiem czasu ulepszyć (ryc. 2).



Rycina 2.

Konstrukcja przyrządu jest następująca:

Na podstawie drewnianej znajdują się dwa słupki związane poprzeczną belką u góry. W płaszczyźnie symetrii aparatu znajdują się dwa kółka z rowkami, przez które przerzucono cienki stalowy łańcuszek o bardzo drobnych ogniwach. Na jednym końcu uwieszona jest szalka na śrut, na drugim końcu, zwisającym od przedniej strony przyrządu, umocowany jest drobny haczyk, który zaczepia się o górne ujęcie walca próbnego.

Ziemia, uformowana w walec o 28 mm średnicy, jest od dołu umocowana w aparacie. Ujęcie to wyrobione walcowo posiada wyściółkę z gumy z wkładką płócienną i składa się z jednej połowy nieruchomej i drugiej przesuwalnej. Skoro walec próbny wycisnie się z rury metalowej uformowany należycie, stawia się go na krążek drewniany posiadający ściśle tę samą średnicę co i walec, a następnie wsuwa w stałą połowę ujęcia dolnego, poczem daje się od przodu drugą połowę wyściółki, zasuwając ruchomą połowę drewnianego ujęcia i ustala ją zapomocą śrubki. Górne ujęcie składa się z krążka drewnianego o średnicy próbowanego walca, z okładziny gumowej i pierścienia metalowego o sprężynowym zamknięciu. Krążek drewniany posiada ucho, w które zaczepia się haczyk od łańcuszka.

Działanie ujęć polega na wywołaniu tarcia pomiędzy ziemią a okładziną gumową. Ażeby jednak ani przysunięcie ruchomej połowy dolnego ujęcia, ani sprężynowa opaska w górnem ujęciu nie ścisnęła walca próbnego, użyto właśnie owych krążków drewnianych, które chronią walec od deformacyi przez ucisk z boku.

Manipulacya wymaga wiele zręczności, ażeby próbek nie uszkodzić, a także troskliwego ustawienia aparatu, ażeby ciągnięcie padało w oś matematyczną walca. Zaznaczymy też odrazu, że aparat nasz nie nadawał się do prób z piaskiem, gdyż ten deformował się nawet pod wpływem chwilowej zmiany położenia i pod wpływem nieznaczego ciężaru górnej nasady. Przy próbach dobrze jest postępować w następujący sposób: Walec próbny stawia się na odwrócony górny krążek drewniany, otacza się gumową okładziną tak, by guma stykała się z walcem na wysokość około 10 mm i zakłada się sprężystą metalową opaskę. Następnie odwraca się zręcznie cały walec o 180°, stawia na dolny krążek drewniany, wsuwa się w półkoliste stałe wyżłobienie, w którym znajduje się już połowa gumowej wyściółki. Po przysunięciu ruchomej połowy dolnego ujęcia zakłada się delikatnie haczyk zwisający na łańcuszku i obciąża się szalkę tak długo, aż nastąpi zerwanie materiału.

Jak wspomniano, aparat nasz nie nadawał się do badania mocy piasku, natomiast przy próbach, prowadzonych z resztą ziem, działał zupełnie zadowalniająco. Jedynie przy badaniu łu zaszła kilkakrotnie przeszkoda, gdyż okazało się, że wywołane tarcie było za małe wobec mocy ziemi i próbka wyslizgnęła się z ujęcia. Szerokość zastosowania możnaby zwiększyć, używając mocniejszego aparatu i szorstkiej okładziny gumowej ze względu na badania ziem zwięzłych, glinowej zaś lekkiej opaski na górnem ujęciu celem umożliwienia robienia doświadczeń i z piaskiem. Niewątpliwie są pewne usterki i w tej metodzie, że wspomnimy tylko o wielkiej łatwości uszkodzenia lub, co gorsze, osłabienia próbek. W każdym razie można za jej pomocą uzyskać daty przydatne do orientacyi, a nawet i do obliczeń.

Rezultaty prób z rozrywaniem ziemi powyższym aparatem umieszczono we wspólnej tablicy, zawierającej moce ziem próbowanych.

C) Moc ziemi przy ścinaniu.

Przy omawianiu tarcia wewnętrznego ziemi wspomniano już o dwu metodach, prowadzących do jednoczesnego poznania współczynnika tarcia i „spójności“, która tak pojęta, jest niezem innym jak tylko sumą nateżeń styecznych w przekroju ścinanym. Podając tedy tak obliczoną spójność na jednostkę przekroju, podajemy właściwie moc materiału na ścinanie.

Wzór na moc na ścinanie będzie:

$$c = \frac{1}{2} \gamma h \frac{\sin^2 \frac{\alpha - \varrho_1}{2}}{\sin \alpha \cos \varrho_1},$$

albo po rozwinięciu:

$$c = \frac{1}{2} \gamma h \frac{\left[\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\varrho_1}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varrho_1}{2} \right]^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left[\cos^2 \frac{\varrho_1}{2} - \sin^2 \frac{\varrho_1}{2} \right]}.$$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez $\cos^2 \frac{\varrho_1}{2}$

$$c = \frac{1}{2} \gamma h \frac{\left[\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2} \right]^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left[1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varrho_1}{2} \right]}.$$

Dzielimy następnie przez $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, a otrzymamy:

$$c = \frac{1}{2} \gamma h \frac{\left[\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2} \right]^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left[1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varrho_1}{2} \right]}.$$

Prawa strona równania zawiera ilości znane z obserwacji (α , h), tudzież $\operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2}$, które możemy obliczyć podaną przedtem metodą.

Wprowadzając w rachunek wysokość szkarpy pionowej, t. j. kładąc $h = h_0$. $\alpha = 90^\circ$, otrzymamy wzór:

$$c = \frac{1}{4} \gamma h_0 \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varrho_1}{2}}.$$

Doświadczenia Loewego przeczą po części prawdziwości powyższych wzorów, gdyż obserwowane przez niego wartości kąta tarcia wewnętrznego maleją w miarę, jak próba wykonywa się z większą wysokością szkarpy. Wskutek tego możnaby wnosić, iż współczynnik tarcia zależy od pochyłości usypanej szkarpy, co brzmi

nieprawdopodobnie. Tarcie bowiem może się zmieniać, ale współczynnik w granicach próby, t. j. przy jednakowym wsężdzie materyale i tych samych warunkach wilgotności, nie ma zupełnie powodu do zmiany. Sprzeczność tę wyjaśnić muszą dalsze badania tarcia wewnętrzznego i mocy, na razie konstatujemy tylko, iż ona istnieje.

Loewe obserwował wysokość szkarpy przy kątach nachylenia 90° , 85° , 80° , $77^\circ 30'$, 75° i 70° do poziomu. Do obliczenia kąta φ_1 podług wzoru potrzeba tylko dwu wysokości, zatem wartości na φ_1 możemy otrzymać w danym przypadku tyle, ile jest kombinacji drugiej klasy z ilości obserwowanych wysokości, t. j. 15. Im dalsza kombinacja, tem mniejsza wypada wartość na φ_1 . Różnice są tak rażące, że podczas gdy φ_1 obliczone z h_{90} i h_{85} wynosi $61^\circ 51' 55''$ (przy wilgotności 10% ciężaru ziemi), to φ_1 obliczone z $h_{77.5}$ i h_{75} wynosi zaledwie $4^\circ 43' 46''$.

Ponieważ ten stosunek powtarza się stale przy wszystkich seryach prób przeprowadzonych przez Loewego, nie można nawet podejrzewać błędu w eksperymentcie, ale należy przypuszczać, iż cyfry te zawierają w sobie ukryte jakieś prawo, które dopiero nowe badania zdołają może rozjaśnić. Wobec tak znacznych różnic w obliczaniu jednej i tej samej ilości uważa Loewe wzór za błędny. Stawia też inny wzór empiryczny, który daje zupełnie prawie jednakowe rezultaty. Co do uściłowań należy zaznaczyć, że Loewe idzie zadaleko. Wykonał on dziesięć seryi prób przy różnych wilgotnościach ziemi, powinien był zatem otrzymać dziesięć różnych wartości na kąt tarcia, który przecież zależy od ilości wody zawartej w ziemi. Właściwie więc, jeśli już chodziło o skonstruowanie empirycznego wzoru, było wskazane uzyskanie równości wyników liczenia w tej samej seryi spostrzeżeń. W ten sposób doprowadzonoby do tego, by wartości φ_1 w obrębie tej samej seryi nie różniły się tak rażąco, a nie zatartoby równocześnie ważnych różnic pomiędzy wielkościami φ_1 , należącemi do różnych seryi. Błąd polegał na tem, że Loewe sztucznie dobranym wzorem chciał koniecznie uzyskać te same wyniki przy różnych stopniach wilgotności.

Zasługą tego badacza było zwrócenie uwagi na niedostateczność wzoru, służącego do pośredniego obliczania mocy na ścinanie. Tem ważniejszy jest ten fakt, że n. p. ogólnie używana tablica Rebhanna i Otta jest obliczona w podobny sposób z dwu wysokości szkarpy, z których jedna jest pionowa. Wobec tego bezpośrednie wyznaczanie mocy na ścinanie jest rzeczą pierwszorzędną wagi, gdyż dopiero po nagromadzeniu odpowiedniej ilości pewnego materyału obserwacyjnego będzie można wzór sprawdzić ostatecznie.

Dat, podających wielkość mocy ziemi na ścinanie, uzyskano drogą spostrzeżeń dotychczas bardzo mało. Dlatego interesujące będzie przypatrzenie się tym cyfrom, które Martony uzyskał bezpośrednio z pomiaru. Jeśli umieścimy na sobie dwie skrzynie i na-

pełniny ziemią. to opór mierzony przy przesunięciu górnej skrzyni będzie pochodził od tarcia wewnętrznego i od spójności. Skoro jednakże pomiar skuteczny powtórnie po zerwaniu materiału, to rezultat będzie obejmował same tylko opory tarcia. Różnica obydwu pomiarów da nam żądany opór spójności, a po zredukowaniu go na jednostkę ścinanego przekroju, moc ziemi na ścinanie. Martony uważał rezultat drugiego pomiaru za samo tarcie wewnętrzne, jakkolwiek zdawał sobie zupełnie dobrze sprawę, iż cyfry otrzymywane w ten sposób, zawierają w sobie i inne opory. Co do mocy na ścinanie, to niewątpliwie cyfry uzyskane można uważać za zbliżone do prawdy, jakkolwiek samo przeprowadzenie doświadczenia było znanadto prymitywne i pomiar daleki od wymaganej precyzyjności. Podajemy daty zebrane przez Martonyego, przeliczone już na miarę metryczną:

	Ubita ziemia z wału		Ubita glina		Ubita glina piaszczysta	
	sucha	wilgotna	sucha	wilg.	sucha	wilgotna
Moc na ścinanie g/cm^2	54.3	56.1	52.5	93.4	86.1	

Loewe uzyskał dla piasku przy różnych stanach wilgotności moc na ścinanie od 1.88 do 3.94 g/cm^2 .

II. Moc względna ziemi.

Z mocy względnych można nieco powiedzieć jedynie o mocy przy zginaniu, gdyż skręcania nikt nie badał dotychczas. W cytowanej pracy Haberlandta, a także w pracy Puchnera znajdujemy pewną ilość dat, odnoszących się do mocy względnej. Haberlandt robił doświadczenia z walcami 2 *cm* średnicy i 10 *cm* długości. Podparte one były w dwu końcach tak, że pomiędzy podporami był odstęp mierzony w świetle 6 *cm*. Obciążenie umieszczone było w pośrodku długości walca. Puchner wykonywał analogiczne próby z walcami o długości 9 *cm* i średnicy 2 *cm*. Niestety nie podano niepodpartej długości walca.

Obydwaj autorowie ograniczyli się do podania surowych cyfr, oznaczających ciężar, który działa w środku długości walca i spowoduje jego złamanie. Ażeby móc przeliczyć te daty i odnieść je do jednostki przekroju, musimy wprzód obliczyć moment łamiący. Pod działaniem siły P i ciężaru własnego G powstaną dwa ciśnienia podporowe D_1 i D_2 , które możemy pomyśleć sobie w środku podparcia. Ponieważ znamy (w przykładzie Haberlandta) długość walca l_1 i światło podpór l_2 , przeto oddalenie ciśnień podporowych od siebie wyniesie $l = \frac{l_1 + l_2}{2}$. Wielkość ciśnienia podporowego będzie:

$$D_1 = D_2 = \frac{1}{2} (P + G).$$

Oznaczając przez $M_{\max}$ największy moment łamiący, który, jak wiadomo, będzie w środkowym przekroju, możemy napisać:

$$M_{\max} = D_1 \frac{l}{2} = \frac{1}{4} (P + G) l.$$

Przeciwdziałający temu momentowi moment oporu dla przekroju kołowego wynosi:

$$W \cdot \kappa_5 = \frac{d^3 \pi}{32} \sim 0.1 d^3 \kappa_5;$$

przyczem $W = \frac{d^3 \pi}{32}$ oznacza moduł przekroju, zaś κ_5 jest natężeniem przy złamaniu.

Podług dat Haberlanda wypada $l = 8$ cm. Ciężar $G = V\gamma = \frac{d^2 \pi}{4} l \cdot \gamma$. Po podstawieniu wartości $d = 2$, $l_1 = 10$, $\gamma \sim 2.5$ g (ciężar 1 cm ziemi), otrzymamy: $G = 78.57$ g. Moment oporu wyniesie w danym przykładzie $W\kappa_5 = 0.8 \kappa_5$.

Otrzymamy równanie:

$$M_{\max} = \frac{P + 78.57}{2} \cdot \frac{8}{2} = 0.8 \kappa_5.$$

Stąd:

$$\kappa_5 \sim \frac{P + 79}{0.4}.$$

Dla ziem wysuszonych, użytych przez Haberlanda, wypadają następujące moce na złamanie:

TABLICA XI.

L. p.	R o d z a j z i e m i	Moc na złamanie g/cm^2
I.	Gleba gliniasta bogata w próchnicę i wapno	23340
II.	Gлина (alluwium)	18215
III.	Gлина wapiasta	15340
IV.	Löss	8965
V.	Gлина żelazista	14340
VI.	Drobno piaszczysta ziemia (gnejs)	9590
VII.	Drobno piaszczysta ziemia (łupek)	9440
VIII.	Drobno piaszczysta gleba	6715
IX.	Piaszczysta ziemia (granit)	6697
X.	Torf	3090
XI.	Piasek żółtawy	4340
XII.	Grubo ziarnisty piasek	1965

Żałować wypada, że rachunek mógł być tylko przybliżony, gdyż autor nie podaje zupełnie ciężaru walców i w rachunku musiano wstawić ciężar przybliżony dla wszystkich ziem jednakowy. Także brak przeciwwagi, jaką stanowiłyby mogły daty innych autorów, stanowi słabą stronę powyższej tablicy. Puchnerowskie cyfry są w danym razie nie do użycia: nie można ich przeliczyć w podany sposób, gdyż nie znamy długości walca niepodpartej. Z drugiej strony należy stwierdzić, że i surowych dat obydwu autorów nie można zestawiać obok siebie, bo mogą odnosić się do całkiem odmiennych warunków.

Dla ilustracji wpływu wysychania na moc na złamanie podajemy wyniki prób, przedsięwziętych przez Haberlandta z ziemią nr. IX przy różnych stanach wilgotności:

Wilgotność w % pojemności wody	11.85	5.55	2.59	1.24	0.79	0.66
Moc na złamanie g/cm^2	260	1310	2125	5730	7330	7375

Tablicą powyższą zamykamy szereg dat, jakie należało przytoczyć dla wyjaśnienia sobie choć częściowego, jak wielką jest moc ziemi. Nie dotknięto tutaj wpływu rozmaitego składu mechanicznego i chemicznego na moc ziemi, kierując się tą myślą, że nie chodzi w danym razie o wykrycie przyczyn, które stanowią, iż jedna ziemia jest bardziej spoista niż druga i większy opór stawia deformującym ją narzędziom, ale jedynie o to, jak się dochodzi do poznania mocy niezłożonych danej dowolnej ziemi, jak wielkie są moce i jaki jest ich wzajemny stosunek.

Zestawienia nie obejmują wszystkich dat, znajdujących się w cytowanych pracach, gdyż znaczna ich ilość, jak n. p. wszystkie daty w pracy Z. Piędzickiego, Dra Baggera, tudzież wiele dat w pracach innych autorów odnosi się do wpływu oddzielnych składników ziemi na moc jej. Pominęto także i daty mniej ważne i mniej charakterystyczne lub takie, których niepodobna było zredukować na jednostkę powierzchni.

Jakkolwiek jednak wiele jest luk w naszych wiadomościach o mocy ziemi, wystarczą one do uzyskania pewnej orientacji przy następnem ocenianiu wielkości oporu podczas pracy narzędziami rolniczemi i będą mogły posłużyć nam przy wyznaczaniu kierunków, pod którymi cząstki materiału ziemnego, parte narzędziem, będą przesuwwały się względem siebie. Tu zatem styka się kwestya wielkości różnych mocy ze sprawą przebiegu deformacji w materiale ziemnym i wkracza w sferę zjawisk obserwowanych dotychczas na materiałach budowlanych, a nietraktowanych jeszcze wcale przez nikogo z badających fizyczne właściwości ziemi. Ażeby zatem sprawę przedstawić jasno, wyjdziemy ze zjawisk zaobserwowanych przy deformowaniu materiałów budowlanych.

III. Prawa Mohra i zastosowanie ich do ziemi.

Próbka dowolnego materyału, poddana działaniu sił zewnętrznych, ulega deformacji, która może być trwała, o ile natężenia powstałe w ciele, przekroczą granicę sprężystości. Zależnie od rodzaju natężenia, od kierunku jego i wielkości nastąpić mogą różne przesunięcia cząstek w materyale, ale zawsze muszą one być zgodne z naturą materyału i będą co do kierunku zawsze jednakie bez względu na wielkość natężenia, jeśli tylko kierunek natężeń się nie zmieni. Zgadza się to z ogólną zasadą deformacji, że podobne działania sił zewnętrznych muszą w takim samym materyale wywołać podobne do siebie deformacje.

Niedawno dopiero rozpoczęto badania nad tem, w jaki sposób układają się cząstki w natężanym materyale. Zauważono, że próbki poddane działaniu sił rozrywających je, zgniatających lub innych, okazywały na swej powierzchni zarysowaną drobną siatkę utworzoną przez ślady powierzchni (płaszczyzn), wzdłuż których dokonywały się przesunięcia cząstek materyału. Pierwszy Lüdgers w Dinglera „Polyt. Journal“ z r. 1860 zwrócił uwagę na prawidłowość przesunięć i na ślady powierzchni usuwiskowych (Gleitfläche). Dalsze badania, prowadzone przez niemieckie techniczne Staięce doświadczalne, pozwoliły nagromadzić dużo materyału obserwacyjnego. Najwięcej jednak faktów zebrał w swej książce L. Hartmann¹⁾.

Tego bogatego materyału, zebranego w ciągu kilku dziesiątków lat, użył prof. Dr. Otto Mohr²⁾ dla postawienia niewielu, ale bardzo ważnych prawideł, dotyczących się deformacji ciał. Posłużyły mu one także do postawienia ogromnie cennej hipotezy o związku wzajemnym różnych natężeń materyału i naukowego wytłómaczenia obserwowanych zjawisk. Prawa te powtarzamy za autorem:

1. Deformacje w ciałach jednorodnych obserwowane na granicy elastyczności nie odnoszą się do drobin ciała, ale polegają na tem, iż cząstki o skończonych wymiarach przesuwają się względem siebie, tworząc dwie grupy warstw usuwiskowych. Ślady tych warstw na powierzchni ciała tworzą charakterystyczne figury przesunięć.

2. Sąsiednie warstwy jednej i tej samej grupy są do siebie równoległe.

3. Obiedwie grupy warstw usuwiskowych krzyżują się pod kątem ω , którego wielkość zależy wyłącznie od właściwości materyału, a nie jest wcale zawisła od stanu natężeń w danym punkcie ciała.

¹⁾ L. Hartmann: Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. 1896.

²⁾ Dr. Ing. Otto Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin, 1906.

4. Jeśli natężenie nie zmienia kierunku, to położenie warstw usuwiskowych nie ulegnie zmianie, chociażby wielkość natężenia była zmienna.

5. Powierzchnie zerwania materiału bywają zgodne z warstwami usuwiskowymi.

Tych kilka praw, sformułowanych przez Mohra, tyczy się przede wszystkim zachowywania się materiałów budowlanych, a osobliwie metali, gdyż obserwacje prowadzone były tylko w tym zakresie. Nie ulega jednak wątpliwości, że mają one ogólniejsze znaczenie i że zakres ich można rozszerzyć i na inne materiały. Tak sądzi i cytowany autor, gdyż nie ogranicza swoich wniosków do pewnej kategorii ciał i tak bardzo różnych, lecz mówi wogóle o deformacji materiałów. Można też było z góry przypuszczać, że ziemia musi zachowywać się w podobny sposób, jeśli ją poddamy działaniu sił zewnętrznych. Takie jednakowoż uogólnienie miałoby cechę wielkiej dowolności. wymagało przeto całego szeregu doświadczeń, któreby ustaliły, czy uogólnienie jest w danym razie dopuszczalne.

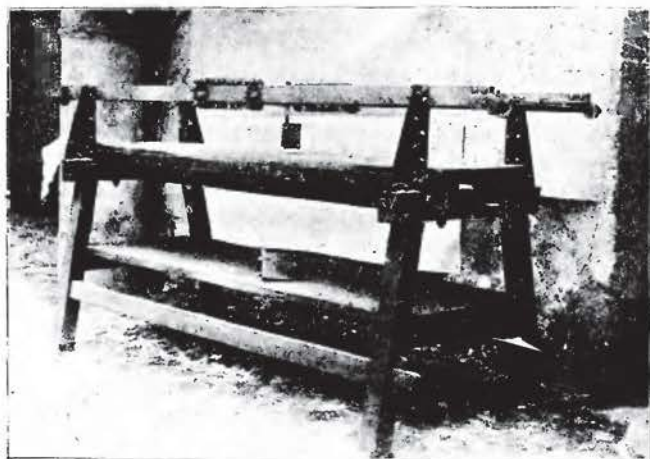
Eksperyment, o ile chodzi o metale, można bez trudu wykonać, wytrawiając kwasem ślady warstw usuwiskowych na wypolerowanej powierzchni ciała zdeformowanego. Do ziemi tej metody nie było można wprost przystosować i potrzeba było uciec się do innych sposobów. Mają one tę niedogodność, że nie uwidoczniają śladów i nie pozwalają ocenić grubości warstw usuwiskowych, a tylko pośrednio dają możność skonstatowania kierunku przesunięć.

Jakkolwiek jednak szczupły jest zakres obserwacji nad tworzeniem się powierzchni usuwiskowych, mają one niezmiernie ważne znaczenie dla konstrukcji narzędzi, służących do uprawy roli, gdyż stanowią dość pewny punkt wyjścia przy teoretycznem rozważaniu technologicznych procesów, jakie zachodzą przy pracy dowolnem narzędziem tej grupy.

Już przy zwyczajnem zgniataniu walca wyrobionego z ziemi można zauważyć i to daleko lepiej, aniżeli w próbach z innymi materiałami, że pęknięcia następują pod pewnym stałym kątem. Tworzą się przytem charakterystyczne dwa stożki zwrócone wierzchołkami ku sobie, przyczem podstawy próbnego walca są częstokroć kierownicami tych stożków. Prawidłowość jest bardziej widoczna przy próbach z ziemią, gdyż obserwacja jest ułatwiona z powodu natury materiału. Łatwo tu obnażyć stożki powstałe po pęknięciu i oddalić lekko już odłupane częściowo boki walca. Niewątpliwie zdarzają się i inne pęknięcia n. p. na ukos, ale po pierwsze: występują one rzadko przy operowaniu ziemią zwilżoną, po drugie zaś: zawierać zwykły z kierunkiem działania siły ten sam kąt charakterystyczny, jaki zwykł występować przy utworzeniu się stożków.

Ażeby mózdz mierzyć kąty usuwiskowe, niepodobna ograniczyć

się do próbných walców. Owszem: ponieważ chodzi o tak doniosłą rzecz jak praca technologiczna narzędzi przy uprawie roli, musiało się stworzyć w eksperymencie warunki zbliżone do tych, które zachodzą podczas pracy w rzeczywistości. Do tego celu posłużył aparat, którym można było badać kąty usuwiskowe, obserwować deformacyę ziemi i mierzyć opory przy pracy (ryc. 3).



Rycina 3.

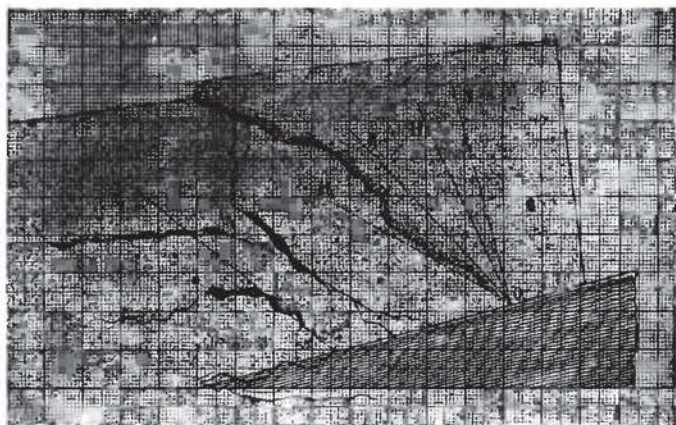
Przyrząd jest umieszczony na silnych kozłach, podpierających stół. Po dwu dłuższych bokach stołu znajdują się szyny o przekroju Γ , służące za tor dla wózka. Wózek toczy się na czterech zespołach kółek. Cztery zatem kółka spoczywają na górnej krawędzi kształtówki, cztery podchwytyją dolną krawędź, cztery zaś służą do bocznego prowadzenia wózka. są ustawione poziomo i toczą się po średniej krawędzi. W ten sposób wózek nie może się podnieść ku górze, ani opaść na dół, ani też doznać skręcenia w płaszczyźnie poziomej, lecz musi toczyć się po swoim torze.

Na tych czterech systemach kółek spoczywa silnie związana belka, złożona z kilku prętów poziomych, do których zapomocą osobnego sprzęgu przymocowuje się stylisko nożowe. Użyto czterech noży do prób: dwa z nich były klinami o przekroju prostokątnym o kącie zaostrenia 15° i 20° , jeden był klinem równoramiennym o kącie zaostrenia 15° , jeden zaś przedstawiał płaszczyznę w najogólniejszym położeniu.

Pociąg wózka uskuteczniiono przez obciążania szalki zawieszanej na linewce, która jednym końcem umocowana była do wózka, drugim zaś przerzucona przez krążek, zwisała ze stołu aparatu.

Ziemię układano na stole i wyrównywano ją tak, że miała kształt graniastosłupa o podstawie prostokątnej, leżącego na jednej z większych ścian pobocznych. Stan ziemi starano się przytem utrzymać taki, jaki był przy próbach mocy, dodając do materiału ilość wody, odpowiadającą 40% nasycenia. Z utrzymaniem tego samego stanu zbitości, przy stosunkowo znacznej masie badanej ziemi, było nieco trudniej. Przeważnie kierowano się wrażeniem, jakiego doznawało się przy rozkruszaniu ziemi i formowaniu rękoma, jakkolwiek nie zaniedbano starania o proporcjonalność objętości ziemi suchej do objętości ziemi ugniecionej i zaformowanej, którą wobec regularnych kształtów bloku ziemi można było skutecznie zawsze skontrolować. Rugując w ten sposób w miarę możliwości różnice do równości warunków i otrzymać takie rezultaty, któreby bez wahania można porównywać i zestawiać z rezultatami badań mocy. Ważne bowiem było uzyskanie pewności, że zarówno spostrzeżenia dotyczące się kierunków usuwiskowych, jak i zapisane obserwacje mocy ziemi odnoszą się do tego samego materiału.

Główne próby wykonano z ilem (nr. III) i z piaskiem (nr. X). Patrz tablica X).



Rycina 4.

Celem dokładności przy mierzeniu przesunięć nanoszono na doskonale wyrównane trzy ściany, a to: górną, leżącą (od brzozy) i przednią (od czoła), siatkę kwadratową o podziale co 10 mm lub co 20 mm. Naniesienie uskuteczniiano sposobem hektograficznym i uzyskiwano takimiż sposobem po zdeformowaniu bryły odbitki

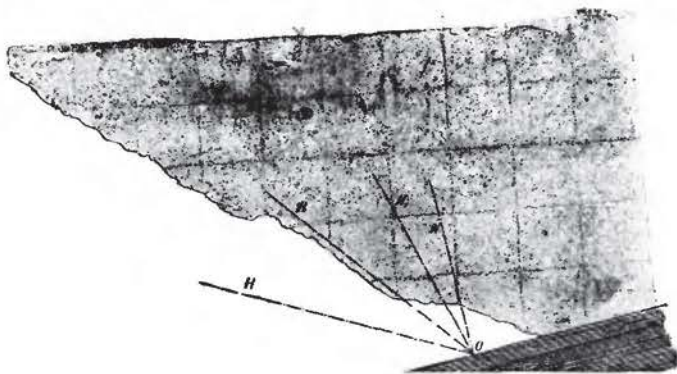
na papierze wprawdzie nie idealne, ale dość wyraźnie pozwalające na utrwalenie deformacji.

Prócz tego przenoszono kształt pęknięć na kalkę tak, że oba dwa zdjęcia mogły uzupełniać się wzajemnie. Z wielu doświadczeń przytaczamy jedynie cztery. Wybór padł na próby wykonane z piaskiem i z łem dlatego, że pierwszy łatwo pęka, drugi zaś wygodny jest przy sporządzaniu odbitek.

Doświadczenie I. Piasek, posiadający wilgotności 40% pojemności, ubito w grubej warstwie na stole opisanego aparatu i podcięto nożem o kącie zaostrenia 15° . Głębokość zanurzenia wynosiła 65 mm (ryc. 4).

Z figury, będącej dokładną kopią rzeczywistości, widać, że zaraz pierwsze pęknięcie wypadło pod kątem około 55° do pochyłonej ściany klina. Dalsze pęknięcia ciągnęły się przeważnie w kierunku równoległym do tej samej ściany, nie wychodząc jednakże z granic przekroju poprzecznego warstwy ziemi. Dopiero po odbyciu przez ostrze noża drogi 450 mm pojawiło się drugie całkowite pęknięcie nachylone do równi pochyłej pod kątem 51° .

Doświadczenie II. Il (nr. III), ubity przy wilgotności odpowiadającej 40% pojemności wody, podcięto tym samym nożem w głębokości 100 mm. Ażeby uwidocznić, jak odbywała się deformacja, naniesiono na ziemię, w podobny sposób jak poprzednio, siatkę kwadratową na ścianie bocznej, na której uwidoczniają się charakterystyczne pęknięcia.

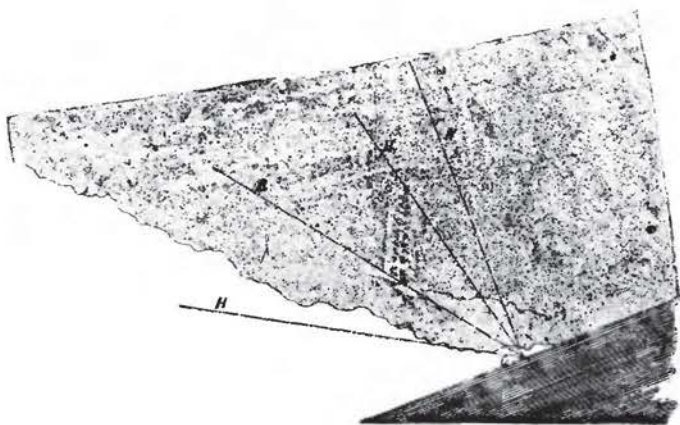


Rycina 5.

Jak widać z figury 5, zasadniczy kierunek pęknięcia jest zbliżony bardziej do zewnętrznego kierunku usuwiskowego.

Doświadczenie III. Głębokość warstwy tego samego łu, podciętej nożem, wynosiła 100 mm, ostrze klina 20° . Ziemia, jak

widać z figury. pękła pod takim samym w przybliżeniu kątem, jak w poprzednich doświadczeniach.



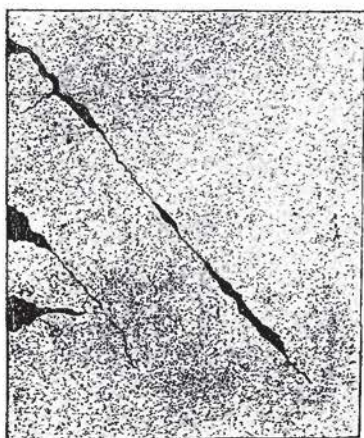
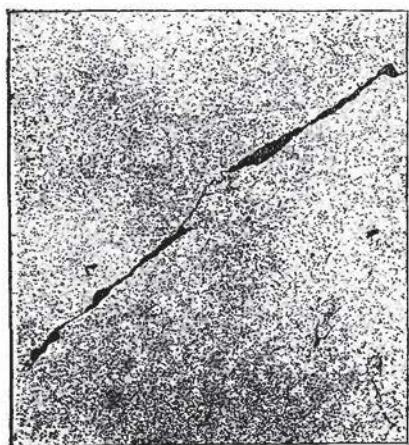
Rycina 6.

Doświadczenie IV. Pomimo zgodności wyników prób powyższych można było mieć niejakię wątpliwość, mianowicie co do zachowania się warstw wglębnych pod wpływem sił deformujących. Chodziło o pokazanie eksperymentalne, że przesunięcia wewnątrz bryły poddanej działaniu podcinającego ją klina są takie same, jak w warstwach skrajnych, obserwowanych w poprzednich doświadczeniach. Tembardziej dowód taki był konieczny, że nie rzadko musi narzędzie przy uprawie roli pracować pod powierzchnią ziemi w takich warunkach, w których ziemia nie może się swobodnie deformować, lecz napotyka przeszkody ze strony dalszych partyi okalającej ją ziemi. Nazwaćby można taki proces stłumionym. Zdarza się on zarówno przy podcinaniu skiby lemieszem, jak i przy odcinaniu jej krojem od calizny.

Ażeby oprócz przesunięć otrzymać i pęknięcia w warstwie głębszej, użyto do próby materiału słabszego, t. j. piasku. Nożowi nadano pozycję taką, że ostrze stało pionowo. Sam nóż wybrano w kształcie klina równoramiennego o długości ostrza 100 mm. Na wyrównanym poziomo grzbiecie bloku ziemi naniesiono hektograficznie siatkę kwadratową, a następnie przykryto ją cienką bibułą. Na to przyszła gruba warstwa osobno w skrzynce formierskiej ubitego piasku. W tem miejscu, którędy miał nóż przechodzić, przykrycie stanowiła tylko ta dodatkowa warstwa piasku. Po bokach natomiast tego wąskiego paska, wynoszącego niewiele więcej ponad grubość głowy klina, położono cienkie deseczki, na których umieszczono kilka metalowych obciążników.

W ten sposób oddzielono izolacją warstwę dolną od górnej, utrudniono sztucznem obciążeniem ewentualne wydłużanie się warstwy ziemi w kierunku pionowym i otrzymano w rezultacie deformacje widoczne tylko w płaszczyznach poziomych. Nóż, wpuszczony w środek ławy ubitej z piasku, był tak nastawiony, że przecinał ziemię tylko w dolnej warstwie na głębokość równą długości ostrza, t. j. na 100 mm. Skoro nóż wgłębił się w ziemię o tyle, że już stylisko dochodziło do niej, odbierano delikatnie materiał warstwy górnej na przestrzeni środkowej i torowano nożowi wolne przejście. Po przepuszczeniu noża przez całą szerokość ławy piaskowej, odkryto starannie warstwę dolną wraz z siatką odbitą na niej. Ponieważ jednak zdjęcie odbitki z piasku byłoby trudne i lękano się uszkodzić materiał, przeto po przypięciu kalki szpilkami odkopiwano na niej wiernie położenie punktów węzłowych siatki po deformacji, tudzież pęknięć, które pojawiły się w materiale po obydwu stronach przejścia.

Kierunek pęknięć jest tak charakterystyczny, że ani na chwilę nie można wątpić, że oznacza on równocześnie kierunek przesunięć wzdłuż płaszczyzn usuwiskowych.

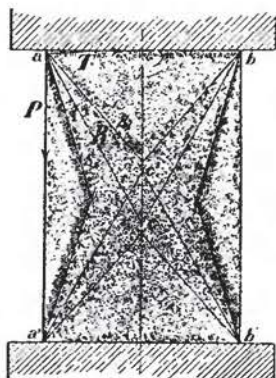


Rycina 7.

Tak więc drogą prób usiłowano stwierdzić, że prawa, postawiona przez Mohra, stosują się także i do ziemi. Ażeby jednak móż wyczytać więcej z otrzymanych reprodukcji przebiegu odkształceń, należy wprzód zaznajomić się z rachunkowym sposobem wyznaczania kierunków usuwiskowych, podanym przez tegoż autora.

W naszych próbach najwygodniej było oznaczać kąt, jaki two-

rzy kierunek usuwiskowy z pochyłą ścianą klina. Nie jest ten kąt wcale identyczny z kątem ω , o którym mowa w prawach Mohra, gdyż tamten kąt jest zawarty pomiędzy kierunkami śladów obydwu systemów warstw usuwiskowych. W każdym razie pomiędzy obydwoma kątami jest pewien związek, który później będziemy się starali rozświetlić. Wspomnieć należało o tem, gdyż przy obserwacji deformowanej ziemi nie możemy, tak jak u innych wielu materiałów, obserwować kąta ω bezpośrednio, ale tylko możemy go poznać z obserwacji kąta nachylenia kierunku usuwiskowego do płaszczyzny klina. Kąt ten nazywać będziemy stale przez θ .

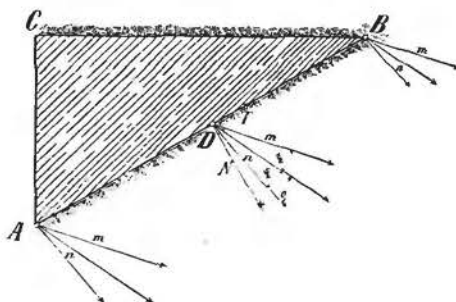


Rycina 8.

Związek wzajemny obydwu kątów znajdziemy stopniowo w sposób następujący:

Przy zwyczajnem zgniataniu walca (ryc. 8) przez siłę P działającą wzdłuż jego osi, występuje tarcie T na zetknięciu się płytki górnej i materiału ziemnego. Wskutek tego reakcja R będzie miała kierunek wypadkowy z ciśnienia normalnego i tarcia, to ostatnie zaś będzie zwrócone od zewnętrznego obwodu koła ku osi, gdyż walec, doznając skrócenia wzdłuż osi, musi się pogrubiać, a więc ziemia ma tendencję do rozsuwania się wzdłuż promieni. Na rysunku przedstawiono jako kierunki wypadkowe z P i T proste R , które wyprowadzone z punktów obwodowych górnej podstawy walca, utworzą stożek abc , względnie $a'b'c'$. Ponieważ siłą deformującą jest R , przeto kierunki usuwiskowe znajdziemy, odcinając po obydwu stronach kierunku R kąt $\frac{\omega}{2}$. Otrzymamy dwie pary stożków s_1s_1 i s_2s_2 , tak często obserwowanych na przełomach zgniatanych walcowych próbek.

Spróbujmy zastosować tę metodę do najprostszyc na razie elementów narzędzi, służących do uprawy roli. W tym celu weźmy pod uwagę przekrój poziomy kroju ustawionego ostrzem pionowo (ryc. 9). Niechaj trójkąt ABC porusza się w ziemi w kierunku CB . Ziemia stawia opór N normalny do płaszczyzny AB , a zatem takie samo będzie i ciśnienie klina na ziemię. Oprócz tego działa na ziemię tarcie w kierunku od A do B . Możemy przyjąć, że ciśnienie normalne jednostkowe będzie równe na całej długości kroju. Twierdzenie to będzie trafne, o ile chodzi o niezbyt głębokie zanurzenia narzędzia w ziemi, lub — jak w danym razie — o warunki, zachodzące w cieniuchnej warstwie ziemi, wykrojonej dwiema pozio-



Rycina 9

meni płaszczyznami z ogólnej masy. W tych bowiem granicach szczupłych możemy śmiało uważać materiał jako zupełnie jednorodny. W każdym tedy punkcie płaszczyzny AB będzie działać takie samo ciśnienie normalne i objawi się takie samo tarcie. Kierunek tarcia musi być tu wręcz przeciwny spodziewanemu przesunięciu ziemi względem płaszczyzny AB . Obie te siły złożone razem dadzą ciśnienie R . Jeśli od kierunku R odetniemy w każdym punkcie

kąty $\frac{\omega}{2}$ w obie strony, otrzymamy dwa systemy płaszczyzn usuwiskowych, uwidoczniomych w poziomym przekroju jako kierunki m i n . Wzdłuż nich następują przesunięcia cząstek, wzdłuż nich prawdopodobnie nastąpiłoby zerwanie materiału, gdyby ten był ograniczony, a nie stanowił olbrzymiej masy, którą praktycznie biorąc, można w porównaniu do narzędzia uważać za nieskończenie wielką.

Skoro krój ustawimy pod pewnym kątem do poziomu, zadanie przenosi się do geometrii przestrzennej. Tak samo rzecz się ma i z lemieszem. W obydwu przypadkach jednak — jak to pokażemy w dalszym ciągu — można wyznaczyć z góry kierunki płaszczyzn usuwiskowych.

Co do kąta θ , o który nam chodzi, będzie on miał dwojaką wartość:

$$\theta_1 = 90 + \varphi + \frac{\omega}{2},$$

$$\theta_2 = 90 + \varphi - \frac{\omega}{2}.$$

Ogólnie napiszemy:

$$\theta = 90 + \varphi \pm \frac{\omega}{2},$$

z czego wynika:

$$\pm \omega = 2 |\theta - \varphi| - 180^\circ.$$

Nie zawsze atoli możemy posługiwać się tym wzorem, gdyż nie zawsze mamy dane wartości na obserwowany kąt θ i na kąt tarcia φ . Dlatego też pożądane będzie w wielu przypadkach wprowadzenie wzoru Mohra na wielkość kąta usuwiskowego ¹⁾.

Jak wiadomo z praw sformułowanych przez tegoż autora, przesuwanie się warstw i zerwanie materiału zależą muszą od stanu napięć w tych właśnie powierzchniach, w których owo przesuwanie się lub zerwanie się ukaże. Jeśli też chodzi o granicę elastyczności lub moc materiału, to musimy brać pod uwagę napięcia styczne i normalne w powierzchniach usuwiskowych i na przełomach, przerwach i pęknięciach materiału.

Znając moc materiału na ciągnięcie (α_1) i na zginięcie (α_2), możemy wyprowadzić wzory na inne moce: na ścinanie i na skręcanie, a także wyznaczyć wielkość kąta ω .

Wzory te, postawione przez Mohra, są:

Dla mocy na ścinanie:

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2},$$

dla mocy na skręcanie:

$$\alpha_4 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

dla kąta zawartego pomiędzy sprzężonymi kierunkami usuwiskowymi:

$$\cos \omega = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1},$$

¹⁾ Dr. Ing. Otto Mohr: o. c.

przyczem zauważymy, że w cytowanych wzorach wprowadzono odmiennie oznaczenia, a mianowicie moc na ścinanie oznaczono przez κ_3 , na skręcanie przez κ_4 , a nie odwrotnie jak jest w oryginalnych wzorach. Wyprowadzenie i uzasadnienie wzorów znaleźć można w cytowanym dziele Mohra. Streszczenia subtelnych wywodów nie można podać, gdyż wypadłoby chyba całą rozprawę przepisać, nie chcąc uronić ani jednego ogniwa z całego rozumowania.

Wzory te okazały niezwykłą zgodność z obserwacyjnym materiałem, jakim Mohr rozporządzał, naszym zadaniem było sprawdzenie ich w odniesieniu do niezbadanego materiału ziemnego. W tym też celu przeprowadzono badania nad mocą ziemi przy zgniataaniu i rozrywaniu i szerzej omówiono zarówno wielkość tych mocy, jak i metody, wiodące do ich poznania.

Kierując rzecz napowrót do doświadczeń omówionych poprzednio, musimy porównać kierunek szczelin z kierunkiem, obliczonym podług wzoru Mohra. W ten sposób uzyskamy pewne wskazówki, czy obie metody poznania kąta ω prowadzą do tych samych rezultatów.

Przyjmijmy w tym celu dla ilu współczynnik tarcia po żelazie $f = 0.778$, co odpowiada kątowi tarcia $\varrho = 37^\circ 53'$. Ponieważ drogą prób znaleziono dla ilu $\kappa_1 = 98 \text{ g/cm}^2$, zaś $\kappa_2 = 531 \text{ g/cm}^2$, przeto $\cos \omega = 46^\circ 30'$. Odłożywszy po obydwu stronach kierunku reakcji R kąt $\frac{\omega}{2} = 23^\circ 15'$, otrzymamy spodziewane kierunki przesunięć. Na

odbicie, uzyskanej z doświadczenia II (ryc. 5), uwidoczniło oba dwa kierunki usuwiskowe i kierunek R . Jak rysunek wskazuje, zbliża się kierunek pęknięcia do bardziej pochyłego kierunku usuwiskowego.

Kierunek przełomu rzeczywistego nie jest prosty, lecz przedstawia się na rysunku jako linia wielokrotnie pozałamywana, główny zarys jednak, czyli: idealna wyrównana linia zbliża się bardzo do prostej oznaczonej na figurze AH_1 i przedstawiającej właśnie zewnętrzny kierunek usuwiskowy.

Nie należy też sobie wyobrażać, jakoby cała masa ziemi musiała pękać w jednym z dwu kierunków usuwiskowych. Materiał bowiem, rozkładając się na warstwy i usuwając się w dwu kierunkach, musi przerywać się raz wzdłuż jednej, raz znowu wzdłuż drugiej sąsiedniej płaszczyzny usuwiskowej. Wskutek tego posiada niekiedy pęknięcie liczne załomy, w których można odnaleźć charakterystyczne kierunki usuwiskowe. Musimy też zgodnie z rzeczywistością przyjąć, że linia pęknięcia jest linią łamaną, złożoną z elementów równoległych do odpowiadających sobie kierunków przesuwania. Ażeby to uwydatnić na odbitkach przedstawiających pęknięcia, naniesiono kierunek reakcji i kierunki obydwu płaszczyzn usuwiskowych, obliczone podług wzoru Mohra. Schody załomów za-

leżeć będą od grubości warstw usuwiskowych, przesuwających się po sobie. Gdyby materiał był jednorodny i gdyby spójność ziemi była naprawdę w każdym miejscu ta sama, musielibyśmy niewątpliwie dostać nadzwyczaj regularnie pozałamywane szczeliny. Przyrodzone właściwości ziemi są jednak dalekie od tego i musimy się zadowolić, jeśli zdołamy oznaczyć z góry przybliżony chociażby tylko kierunek pęknięcia. To właśnie umożliwia zastosowanie teorii Mohra.

Można jeszcze kwestyę postawić inaczej i zapytać, do którego z kierunków usuwiskowych będzie bardziej zbliżone pęknięcie. Doświadczenia, przeprowadzone z ziemią zgniataną, pokazały, iż pęknięcia są możliwe i zdarzają się w obu dwu kierunkach. Skoro jednakże przyjrzymy się bliżej tworzeniu się stożków w zgniatanych próbnym walcach, to dostrzeżemy, iż pęknięcia właśnie idą wzdłuż kierunków zewnętrznych, bardziej zbliżonych do pionu, a zatem wzdłuż kierunków więcej zbliżających się do kierunku siły pociągowej. Ta ostatnia zasada powtarza się we wszystkich próbach, o których przedtem wspomniano: pęknięcia zbliżają się z reguły do kierunku usuwiskowego, ustawionego bardziej pochyło względem kierunku ruchu.

TABLICA XII.

Ziemia nr.	Moc bezwzględna			Moc względna na skręcanie	Kąt ω
	na zgniatanie	na rozerwanie	na ścinanie		
	g/cm^2	g/cm^2	g/cm^2	g/cm^2	
I.	465	89	102	75	47°15'
II.	439	81	94	68	46°30'
III.	531	98	114	83	46°30'
IV.	318	74	77	60	51°30'
V.	294	73	72	56	53°00'
VI.	485	58	84	52	38°10'
VII.	461	72	91	62	43°8'
VIII.	349	46	63	41	39°54'

W odbitkach, uzyskanych z doświadczeń, uwidoczniło oba kierunki usuwiskowe (ryc. 4, 5, 6). Doświadczenia te są przez to charakterystyczne, że załomy, pochodzące z pęknięć wstecznych, występują bardziej wyraziście. Pomimo to główny kierunek pęk-

nięcia bardziej zbliżony jest do prostej H , aniżeli do prostej H_1 tak, że i w tych przykładach zjawisko nie odbiega od ogólnej zasady.

Ponieważ podobna prawidłowość istnieje zarówno przy deformowaniu ilu, jak i przy deformowaniu piasku, o czym świadczą ogromnie regularne pęknięcia uzyskane w doświadczeniu, możemy przyjąć, że wzory Mohra dają wogóle rezultaty dość bliskie rzeczywistości. Poniżej podano w tablicy obserwowane i poobliczane moce ośmiu ziem użytych przy próbach, tych samych ziem, dla których podano przedtem wynik analizy mechanicznej.

Przechodząc po kolei kolumny zestawienia, zauważamy, że moc na zginięcie i na rozerwanie obserwowano bezpośrednio. Dwie dalsze moce: na ścinanie i skręcanie obliczono według wzorów Mohra, które przynajmniej co do mocy na ścinanie dają wyniki wiarygodne. Co do tego wystarczy spojrzeć na daty, które zacytowaliśmy za Martonym, ażeby uznać, iż wzór zasługuje na zaufanie. Naturalnie dzisiaj nie można jeszcze z całą stanowczością oświadczyć się za lub przeciw teorii Mohra i należy postępować oględnie, dopóki bezpośrednie doświadczenia nie pozwolą na wypowiedzenie stanowczego sądu. Co do wzoru na moc na skręcenie, to brak nawet tej słabej orientacji, jaką mieć można przy ocenie poprzedniego wzoru. W braku wszelkich innych danych, musimy w razie potrzeby posłużyć się i tym wzorem. Usprawiedliwieniem może tu być wzgląd, że wzór ten wyprowadzony z tych samych założeń, co poprzedni, posiadać musi tem samem to samo prawdopodobieństwo; drugą rzeczą, przemawiającą za prawdziwością wzoru jest fakt, iż dla innych materiałów, badanych przez Mohra, okazał się niezłym.

Ostatnia kolumna zawiera wartości kątów ω , jak pokazano na kilku przykładach, bardzo zbliżone do rzeczywistości. Dwie drogi prowadzą do poznania tego kąta, ale najoględniej będzie zawsze sprawdzać wartości za ich pomocą otrzymane. W ten sposób zawsze będziemy mogli uważać kąt ω , a za nim i kąt ϕ za znany.

Osobliwą wagę posiada ostatni wzór Mohra, pozwalający obliczyć wielkość kąta zawartego pomiędzy sprzężonymi ze sobą kierunkami usuwiskowymi. Kąt ten bowiem niezmiernie jest ważny dla oceny deformacji ziemi pod działaniem sił zewnętrznych, a także i przy rozpatrywaniu wielkości oporów, napotykaných przez narzędzie prujące ziemię. Teoria Mohra sięga zasadniczych podstaw technologii obróbki materiałów. Dotychczas bowiem nie brano pod uwagę, iż każdy materiał ma swoje charakterystyczne kierunki usuwiskowe, zależne od materiału, lecz owszem uczono, iż kąt, pod którym pęka materiał, wcale nie zależy od rodzaju materiału, a jedynie od kąta cięcia. Podobne teoretycznie wyprowadzone twierdzenie znaleźć można w podręczniku Weisbacha¹⁾. Dopiero nauka

¹⁾ Weisbach: Teoretische Mechanik.

Mohra, eparta na rezultatach doświadczeń, zdołała uzasadnić to, co odczuwano, ale czemu przeczył wywód teoretyczny: że rodzaj materiału wpływać musi na kierunek usuwiskowy.

Nasze niedokładne metody badania mocy ustąpią zapewne z biegiem czasu metodom bardziej precyzyjnym i miejsce naszych niedoskonałych przyrządów zajmą podobne do tych, jakie widzieć można po stacyach doświadczalnych, badających moc materiałów budowlanych. Wtedy będzie można zapewne dokładniej wyznaczać wielkości kątów usuwiskowych.

Naszym zadaniem było zwrócenie uwagi na kąty usuwiskowe, gdyż stanowią one niezmiernie dogodny punkt wyjścia przy roztrząsaniu teoretycznem zagadnień z technologii mechanicznej ziemi. O ile bowiem chodzi o teorię dowolnego narzędzia w mechaniczny sposób obrabiającego lub przerabiającego dany materiał, konieczne jest zdanie sobie sprawy, jak się materiał zachowa w czasie procesu technologicznego. Dopiero na takiej realnej podstawie ugruntowana teoria może stać się bliską ideału rzeczywistości. Dzisiejsze wiadomości nasze o ziemi są tak szczupłe, znajomość materiału tak skąpa, że musimy poprzestać chociażby tylko na przybliżonych sposobach wyznaczania kątów usuwiskowych.

IV. Analityczne wyznaczanie kierunku usuwiskowego.

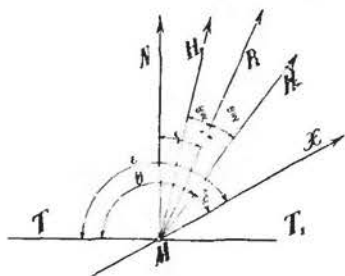
Teoria, postawiona przez Mohra, daje możliwość znalezienia rachunkiem wielkość kąta usuwiskowego, a przez to pozwala na wyznaczenie tych kierunków, w których będą *maxima nateżeń* stycznych i w których najprawdopodobniej będą szły powierzchnie rozłamów. Pokazaliśmy już, jak powstają szczeliny pomiędzy zerwanym materiałem a calizną wskutek działania nateżeń, wywołanych w materiale przez siły zewnętrzne i wiemy, iż kierunki elementów przelomu możemy znaleźć rachunkiem, skoro znamy tylko dwie moce bezwzględne na rozerwanie i na zgniatanie.

Wiemy także, że można obserwacją samą dojść do znajomości omawianych kierunków. Dwie te drogi: pośrednia i bezpośrednia pozwalają nam na to, że możemy uważać kąt ω za dany dla dowolnego rodzaju ziemi. Użytek z niego możemy jednakże zrobić dopiero wtedy, gdy znamy także kąt tarcia materiału ziemnego o narzędzie, t. j. wogóle o powierzchnię odbywającą ruch w środowisku ziemnem, a także gdy znamy kierunek *spodziewanego przesunięcia* względnego powierzchni i materiału. Tylko wtedy bowiem możemy naprawdę powiedzieć, jakie nachylenie będzie posiadał kierunek przesunięcia względem płaszczyzny stycznej, przesuniętej przez dowolny punkt krzywej powierzchni. Ponieważ jednak niewygodnie

byłoby odnosić ten kąt nachylenia do płaszczyzny stycznej, której położenie jest zmienne, musimy odnieść je do osi i to najlepiej do tej, wzdłuż której powierzchnia pruje ziemię.

Rozpatrzmy najpierw przykład ruchu postępowego dowolnej krzywej powierzchni, poruszającej się wzdłuż linii prostej. Najwygodniej będzie przyjąć kierunek ruchu za oś XX^{ω} , prostopadłą do niej w płaszczyźnie rysunku za oś ZZ^{ω} , zaś oś YY^{ω} przyjąć prostopadłą do obydwu osi poprzednich.

Każdy punkt zanurzonej w ziemi powierzchni będzie znosił ciśnienie środowiska, w którym odbywa się ruch, przyczem kierunek pierwotny ciśnienia będzie normalny do powierzchni (ryc. 10). W danym punkcie, leżącym na powierzchni, wyznaczmy płaszczyznę styczną i wystawimy prostą normalną N i prostą równoległą do kierunku ruchu, t. j. do osi XX^{ω} . Skoro przez te dwie proste przesuniemy płaszczyznę normalną, przetnie ona płaszczyznę styczną wzdłuż prostej stycznej TT_1 , oznaczającej nam kierunek elementu toru, po którym w danym punkcie posunie się ziemia względem krzywej powierzchni. Wzdłuż tego kierunku działa tarcie, które złożone z ciśnieniem normalnym da reakcję R .



Rycina 10.

Odcinając po obydwu stronach prostej R połowę kąta usuwiskowego $\frac{\omega}{2}$, otrzymamy wyznaczone kierunki przesunięć międzycząsteczkowych H i H_1 .

Najważniejszym dla naszych celów jest kierunek H , gdyż doświadczenie uczy, że pęknięcia właśnie następują najczęściej wzdłuż tego kierunku, jakkolwiek i pęknięcia wsteczne H_1 , lub też pośrednie o kierunku zmiennym, złożonym z elementów H i H_1 , nie są wykluczone. Ponieważ nam chodzi ostatecznie o znalezienie warunków równowagi pomiędzy siłami zewnętrznymi a napięciami wewnątrz materiału, musimy brać pod uwagę napięcia końcowe w płaszczyźnie, w której zerwania najwięcej można się spodziewać.

Tych parę słów wystarczy na razie dla uzasadnienia, dla czego główną uwagę zwracamy na kierunek H , nazywając go kierunkiem usuwiskowym głównym, zaś kierunek H_1 kierunkiem z poprzednim sprężonym.

Ażeby wyznaczyć kąt nachylenia kierunku H do osi XX^{ω} zapomocą znanych ilości φ i ω , możemy napisać na podstawie wzoru $\delta = \varepsilon - \Theta$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \cos \Theta - \sin \Theta \cos \varepsilon$$

$$\cos \delta = \cos \varepsilon \cos \Theta + \sin \varepsilon \sin \Theta,$$

gdzie $\theta = 90 + \varphi + \frac{\omega}{2}$, zaś ε jest kątem nachylenia stycznej TT_1 do osi XX^{out} .

Musimy znać zatem kąt nachylenia stycznej TT_1 do osi XX^{out} , t. j. wyrazić $\sin \varepsilon$ i $\cos \varepsilon$ jako funkcyę spółrzędnych danej powierzchni.

Przystępując do ogólnego rozwiązania tego zagadnienia, przyjmujemy, iż równanie powierzchni poruszającej się z prędkością v wzdłuż osi XX^{out} , będzie:

$$X = f(y, z) + vt.$$

Wobec tego płaszczyzna styczna w punkcie (x, y, z) danej powierzchni mieć będzie równanie:

$$(X - x) - (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} - (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \dots \quad 1)$$

prosta zaś normalna:

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad \dots \quad 2)$$

Prostą MX możemy określić równaniem $Y = y, Z = z$, lub też w postaci:

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{0} = \frac{Z - z}{0}. \quad \dots \quad 3)$$

Jeśli, jak to wyżej wspomniano, przesuniemy płaszczyznę normalną przez proste określone równaniami 2 i 3, otrzymamy jej równanie w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\partial f}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

czyli:

$$\begin{vmatrix} Y - y & Z - z \\ -\frac{\partial f}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

W innej formie przedstawione to równanie będzie:

$$(Y - y) \frac{\partial f}{\partial z} - (Z - z) \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad \dots \quad 5)$$

Styczna TT_1 , o której kąt nachylenia ε do osi XX^{wo} nam chodzi, jest przekrojem płaszczyzny stycznej (1) i normalnej (5).

Pomnóżmy pierwsze z tych równań przez $\frac{\partial f}{\partial z}$, drugie przez $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial z} - (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - (Z - z) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 = 0,$$

$$(Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - (Z - z) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Dodając te równania do siebie, otrzymamy:

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial z} - (Z - z) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] = 0,$$

czyli

$$Z - z = (X - x) \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}.$$

Z równania (5) mamy:

$$Y - y = (Z - z) \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

po wstawieniu zaś za $Z - z$ dopiero co znalezionej wartości, otrzymamy:

$$Y - y = (X - x) \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}.$$

Możemy zatem napisać równanie stycznej TT_1 w postaci:

$$\frac{X - x}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad \dots \quad 6)$$

Z osią XX^{00} , względnie zaś z prostą MX , zawiera ona kąt rozwarty ε , którego dostawę możemy łatwo wyznaczyć:

$$\cos \varepsilon = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Możemy ten wzór przekształcić na inny:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]}}, \\ \cos \varepsilon &= - \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned}$$

zaś

$$\sin \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Wstawiając te wartości w równania na $\sin \delta$ i $\cos \delta$, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{\cos \Theta + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \sin \Theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos \delta &= \frac{-\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \cos \Theta + \sin \Theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \text{I a.}$$

Jeśliby równanie było dane w postaci uwikłanej $F(x + vt, y, z) = 0$, wówczas miejsce wyrażeń $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$ zajmą wyrażenia:

$$-\frac{\frac{\partial F'}{\partial y}}{\frac{\partial F'}{\partial x}}, \quad -\frac{\frac{\partial F'}{\partial z}}{\frac{\partial F'}{\partial x}},$$

Wtedy też wzory nasze przekształcą się na inne:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} \cos \Theta + \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} \cdot \sin \Theta}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos \delta &= \frac{-\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} \cos \Theta + \frac{\partial F'}{\partial x} \sin \Theta}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \text{I b.}$$

Wszędzie w wyprowadzonych wzorach umieszczono kąt Θ , który dla każdej ziemi z osobna należy wyznaczyć. Zamiast kąta Θ możemy jednak wprowadzić w rachunek kąt ω i ϱ , uwzględniając, że $\Theta = 90 + \varrho + \frac{\omega}{2}$.

Rozwiniemy wyrażenia:

$$\sin \Theta = \cos \varrho \cos \frac{\omega}{2} - \sin \varrho \sin \frac{\omega}{2},$$

$$\cos \Theta = -\sin \varrho \cdot \cos \frac{\omega}{2} - \cos \varrho \sin \frac{\omega}{2}.$$

Idąc jeszcze dalej za teorią Mohra, wyrazić możemy kąt ω przez moc na ściskanie i rozerwanie α_2 i α_1 .

Wiemy, że

$$\cos \omega = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}.$$

więc

$$\cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_1}},$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}}.$$

Do tego możemy jeszcze wprowadzić współczynnik tarcia materiału ziemnego o powierzchnię, kładąc $\varphi = \operatorname{tg} \varrho$.

Otrzymamy po podstawieniu:

$$\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \sqrt{\frac{z_2}{z_2+z_1}} - \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \sqrt{\frac{z_1}{z_2+z_1}},$$

$$\cos \Theta = -\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \sqrt{\frac{z_2}{z_2+z_1}} - \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \sqrt{\frac{z_1}{z_2+z_1}}.$$

W pewnych razach, gdy nie znamy wartości mocy jakiejś ziemi, lecz tylko stosunek ich wzajemny $\frac{z_1}{z_2} = \lambda$, możemy użyć przeznaczonych stosownie wzorów:

$$\sin \Theta = \frac{1 - \varphi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+\varphi^2)(1+\lambda)}},$$

$$\cos \Theta = -\frac{\sqrt{\lambda} + \varphi}{\sqrt{(1+\varphi^2)(1+\lambda)}}.$$

Nie wprowadziliśmy wartości $\sin \Theta$ i $\cos \Theta$ w rachunek, chcąc uniknąć niepotrzebnego pomnażania liczeń, a także i z tego względu, że różne są sposoby, wiedące do poznania kąta, jaki kierunek usuwiskowy tworzy ze styczną krzywej powierzchni. Chcieliśmy także nasze wyprowadzenia uniezależnić w pewnej mierze od wzorów postawionych przez Mohra i umożliwić stosowanie teorii wtedy, kiedy kąt Θ znamy jedynie z obserwacji, lub też kiedy, opierając się na prawdopodobieństwie, przyjmujemy z góry jakąś wartość przybliżoną na kąt Θ . A jeśli w rozważaniach naszych sądzimy, że nie należy przypuszczać zerwania materiału w kierunku usuwiskowym głównym, lecz w kierunku pośrednim pomiędzy kierunkami usuwiskowymi sprzężonymi n. p. w kierunku reakcji R , wystarczy kąt Θ zamienić na $90 + \varphi$ i wprowadzić w rachunek.

Tych kilka uwag ma na celu usunięcie skrupułów w tych razach, gdzie wzory Mohra, a nawet cała jego teoria wydałyby się nieodpowiednie.

V. Deformacje w zgniatanej ziemi.

Tarcie cząstek w materiale ziemnym nie jest ilością stałą, gdyż zależy od rozmieszczenia cząstek i wzajemnego ich ugrupowania. Drobne ziarna i blaszki mogą mieć przeróżne kształty i mniej lub więcej ściśle przylegając do siebie, mogą wywoływać za każdym razem inne opory tarcia. Musimy zatem ustalić, jak przy

obróbce ziemi należałoby brać tarcie pod uwagę. Skoro ziemia jest dana, możemy uchwycić dwa główne momenty, wpływające na zmianę tarcia wewnętrznego: wilgotność i zagęszczenie materiału. Różnych natomiast ugrupowań niepodobna brać pod uwagę, chyba o tyle, że rozróżnimy tarcie w materiale o strukturze ziarnistej, gruzelkowej lub zbitej. Że zmienna zawartość wody wpływa na tarcie, pokazano już poprzednio na rezultatach niektórych prób dotychczas wykonanych. Rzecz ta została skonstatowana, zależności jednak wzajemnej zjawisk nie znamy. Brano także pod uwagę zbitość i rozmaitość struktury i wyznaczano odpowiednie współczynniki tarcia. Ze wszystkich tych obserwacji wynika, że współczynnik tarcia wewnętrznego dla tego samego materiału ziemnego jest zmienny i posiada zapewne swoją maksymalną wartość przy pewnych warunkach. Możemy rzecz znakomicie uprościć, uważając strukturę i wilgotność za dane wraz z rodzajem ziemi. Nie pozostają one wprawdzie stalemi przez cały ciąg trwania jakiegokolwiek mechaniczno-technologicznego procesu, ale dla praktycznych celów możemy je wciągnąć w rachunek jako stałe, bez obawy popełnienia większego błędu. Przy takim założeniu może się zatem zmieniać tylko zagęszczenie, które polega na zbliżeniu cząstek do siebie, wywołaniu większego ich przylegania i które zmieniając ułożenie cząstek, wpływa niezawodnie na wielkość współczynnika tarcia wewnętrznego.

Ale wiadomo, że tarcie nie jest jedynym oporem, jaki napotykają siły zewnętrzne, usiłujące wywołać odkształcenie i zmienić wzajemne położenie cząstek. Istnieje jeszcze i spójność w rozumieniu nacisków przeciwdziałających sile zewnętrznej i utrzymujących cząstki w związku ze sobą. Stosunek tych dwu oporów do siebie jest różnym w różnych materiałach i stanowi charakterystykę ich zachowania się pod wpływem sił zewnętrznych. Jeśli ciało jakiegokolwiek ma tarcie wewnętrzne większe nad spójność, wtedy nie może nastąpić deformacja, gdyż zanim się ona dokona i zanim cząstki przesuną się, już materiał będzie zerwany. Do takich materiałów kruchych należy i ziemia dobrze wysuszona. Jeśli jednakże tarcie wewnętrzne jest mniejsze aniżeli spójność, to materiał odkształca się przed zerwaniem i okazuje plastyczność.

Uwzględnijmy wpływ zmienności tarcia i wyobraźmy sobie w tym celu próbkę ziemi poddawaną zgniataniu. Tarcie wewnętrzne rośnie w miarę jak zwiększa się obciążenie materiału, t. j. jak wzrasta siła zewnętrzna zgniatająca. Pod jej wpływem bowiem cząstki ziemi zbliżają się ku sobie, a niekiedy i tracą pewną część wilgotności, co wszystko składa się na zmianę wielkości tarcia. Wogóle możemy powiedzieć, że tarcie rośnie, osiąga po pewnym czasie swoje maximum. Wtedy też kończy się okres deformacyjny i ciało zachowuje się jak kruche. Możemy też uważać na podstawie

obserwacyi, że ziemia należy właśnie do tej drugiej kategorii materiałów z tem zastrzeżeniem, że przez wysychanie zmienia się tarcie wewnętrzne i może się stać większe jak spójność cząstek. To przetłómaczone na język potoczny daje nam pojęcie kruchości wysuszonej ziemi i niejakiej plastyczności jej w stanie wilgotnym.

Ażeby głębiej wniknąć w istotę deformacyi przy ziemiach, musimy wziąć pod uwagę inne materiały. Uczynić to należy, by nie pozostawiać pewnych niedomówień, któreby dwojako lub fałszywie można tłómaczyć.

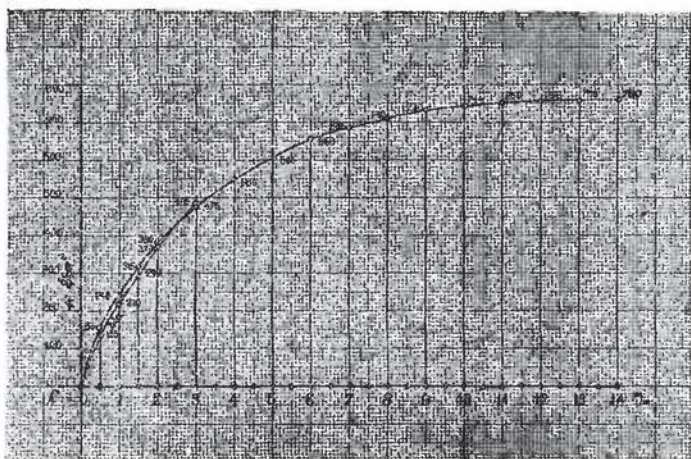
Otóż pomiędzy materiałami budowlanymi są niektóre, jak ołów lub cyna, posiadające w wysokim stopniu zdolność do trwałych deformacyi. Próbką ołowiu, poddana działaniu sił odkształcających, będzie początkowo ulegała deformacyi sprężystej, a dopiero, skoro natężenia przekroczą granicę elastyczności, odkształcenia uzyskane będą trwałe. Gdybyśmy porównali ołów ze stalą, zobaczylibyśmy, że pierwszy posiada małe bardzo odkształcenia elastyczne, wielkie zaś odkształcenia trwałe; stal natomiast zachowuje się zupełnie odwrotnie, gdyż przeważają w niej odkształcenia sprężyste, trwałe zaś są nader małe. W jednym i drugim metalu pojawiają się zawsze najpierw deformacje sprężyste, po nich zaś następują dopiero trwałe. Toż samo dotyczy i wszelkich innych materiałów z wyjątkiem tych, w których najpierw następuje zagęszczenie materiału, mające wszelkie cechy deformacyi trwałej.

Ziemia, poddana działaniu sił zewnętrznych, będzie zatem zachowywała się nader rozmaicie, zależnie od tego, czy normalne natężenia narażonego na zerwanie przekroju są zwrócone ku niemu, czy od niego, t. j. czy następuje zgniatanie, czy rozerwanie. Tylko bowiem przy zgniataniu możliwe jest zagęszczenie materiału; przy rozrywaniu nie może ono nastąpić, a raczej: przy rozerwaniu należałoby spodziewać się rozrzedzenia, gdyby tylko materiał był podatny do tego, lub też przewężenia poprzecznego przy materiałach ciągliwych. Wobec tego przy rozrywaniu ziemia musi się zachowywać tak, jak inne ciała, przy zgniataniu zaś dopiero wtedy nabiera właściwości innych ciał, kiedy nastąpi już zagęszczenie materiału.

W cytowanej już pracy o mocy ziemi przy zgniataniu podaliśmy dla trzech ziem dyagramy odkształceń, z których można nieco wnioskować o różnicach, jakie zachodzą pomiędzy deformacyami różnych ziem. Ziemie ilaste (ił mydlnicki i ziemia ilasta o 45% węgla wapnia) mają bardzo długi okres płynności, można je zatem uważać za materiały plastyczne, natomiast löss (nr. VI) nie posiada tej właściwości i okazuje się kruchym.

Te trzy dyagramy są jedynym materiałem, jakim rozporządzamy, wystarczają jednakże do oryentacyi, jak ziemie zachowują się pod wpływem jakiegoś narzędzia, które ją zgniata. Ważne są

one dla obliczania pracy, jaka zachodzi przy deformacyi. Znając w każdej chwili siłę działającą i skrócenie, względnie zaś wydłużenie całkowite lub jednostkowe, możemy obliczyć pracę deformacyi. Praca w tym przypadku będzie sumą iloczynów z sił w danej chwili działających i odkształceń, jakim ciało uległo pod ich wpływem. W dyagramie będzie się praca wyrażała jako powierzchnia zawarta pomiędzy krzywą odkształceń, osią odciętych i uważaną rzędną, przyczem najczęściej granicę trzecią stanowi rzędna, oznaczająca natężenie w chwili zerwania, gdyż najczęściej chodzi o całą pracę deformacyi aż do zerwania materiału.



Rycina 11.

Dyagramy, o których mowa, wyglądem swoim wcale nie różnią się zasadniczo od dyagramu dowolnego materiału i to są właściwe dyagramy odkształceń. Skoro jednak do prób użylibyśmy materiału nieugięzionego, dostalibyśmy wykres nieco odmienny, w którym możnaby zauważyć cztery główne okresy. Pierwszym okresem byłoby zagęszczanie, przy którym stosunkowo małym przyrostom natężeń odpowiadają znaczne zmiany długości. Na wykresie byłaby to krzywa bardzo pochyłona ku osi XX^{osc} . Dwa następne okresy obejmują odkształcenia sprężyste, przyczem w pierwszym z nich (bardzo krótkim niekiedy) odkształcenia są proporcjonalne do natężeń. Tu krzywa odkształceń stanowi linię prostą. Cały ten drugi okres zowie się okresem proporcjonalności i kończy się t. zw. granicą proporcjonalności. W okresie trzecim coraz więcej przybiera odkształceń trwałych, mimo to jednak przeważają odkształ-

cenia sprężyste. Czwarty okres, zwany okresem płynności, przedstawia się na wykresie jako krzywa zbliżająca się kierunkiem do kierunku osi XX^{dr} .

Tę sprawę uważaliśmy za stosowne wyjaśnić, by należyście odróżnić dwa bardzo na pozór podobne okresy deformacji ciał, podlegających zagęszczeniu: okres zagęszczania i okres płynności.

Z powyższego krótkiego przedstawienia rzeczy widoczna, że narzędzia w ziemi muszą wykonać najpierw deformację, której wielkość będzie zależała od stanu wilgotności i od początkowej wielkości tarcia wewnętrznego. Im mniejsze to ostatnie, tem wstępny okres deformacyjny będzie trwał dłużej, dopóki tarcie nie osiągnie swojego maximum. Co do wpływu wilgotności, należy tu wszystko uwzględnić, co było powiedziane o mocy ziemi przy różnych stanach początkowych wilgoci i o wpływie wysychania na nią.

Wychodząc zatem z pewnego stanu początkowego, będziemy mieli wraz z ubywaniem wilgotności, podnoszenie się tarcia wewnętrznego, które występuje przy deformacji. Skoro jednakże weźmiemy pod uwagę różne stany początkowe, to niewątpliwie przy tym samym stanie zbitości będziemy posiadali jakieś maximum tarcia, odpowiadające pewnemu stanowi nasycenia.

Uprawa mechaniczna gleby ma do czynienia z ziemią w stanach początkowych, w stanach po wyschnięciu i w stanach po zwilgnciu wysuszonego materiału. Za stan początkowy w uprawie musimy n. p. uważać ten, w jakim ziemia znajduje się podczas orki, gruberowania lub pogłębiania; za stan po wysuszeniu ten, w jakim n. p. znajduje się ziemia podczas bronowania lub walcowania. Przy rozpatrywanych przez nas działaniach części składowych pługa, musimy zawsze mieć na myśli pewien stan wilgotności początkowej.

Wielkość tarcia wewnętrznego ziemi w danym stanie wilgotności ziemi będzie, jak powiedziano, zmienna ze względu na rozmaitą zbitość materiału, a więc zmienna w dowolnym okresie deformacyjnym. Będzie też posiadała pewne maximum, którego wielkość absolutna może być zmienna ze względu na różne stany wilgotności. Wobec zmienności maksymalnego tarcia musimy dojść do tego, iż będzie ono posiadało znowu swoją największość, co przy braniu pod uwagę stanów początkowych wilgotności będzie prawdopodobnie przy 40% nasycenia wodą. Ustalenie maximum-maximorum tarcia wewnętrznego nie przesądza sprawy, jakoby właśnie wtedy był okres deformacyjny najdłuższy, gdyż będzie on zależny od początkowej zbitości materiału i będzie, jak już powiedziano wyżej, stać doń w odwrotnym stosunku. Dochodzimy zatem do tego, że ziemia będzie miała tarcie maksymalne po uzyskaniu pewnego stopnia zbitości, ale to maximum będzie róż-

zne dla różnych wilgotności tej samej ziemi. Największe maximum może być przy 40% nasycenia wodą.

Jeżeli ciało jest o nieznacznych wymiarach, jak to się dzieje w próbach mocy, to wtedy łatwo obliczyć pracę, znając skrócenie jednostkowe i siłę działającą na jednostkę przekroju. Inaczej jednakże przedstawi się sprawa, skoro przejdziemy do warunków, jakie przeważnie istnieją przy uprawie roli. Tu mamy często do czynienia z calizną, której wielkość w porównaniu z narzędziem może być uważana za nieskończenie wielką. Musimy zatem szukać sposobów określenia i ograniczenia tej sfery, na którą rozciąga się deformacya. Weźmy najprostszy przykład: zgniatanie. Skoro walec ciężki idzie po polu, ugniatą jego powierzchnię i zagęszcza górną warstwę ziemi. Podobnie, gdy ciężar budowli jest znaczny, budynek osiada się i zapada nieco głębiej. Działanie tu jest dłuższe, aniżeli przy użyciu narzędzi, efekt jednakże i proces technologiczny podobny do poprzedniego.

W obydwu przykładach istnieje lokalne obniżenie się terenu, musiały zatem nastąpić skrócenia w kierunku pionowym i wydłużenia w płaszczyźnie poziomej. Obiedwie te zmiany długości musimy zawsze odnieść do pierwotnego stanu przed zgniataniem. Łatwiej to uskutecznić dla zmiany w kierunku wysokości, gdyż obniżenie terenu można zmierzyć bezpośrednio. W kierunku poprzecznym nie widać tych różnic, gdyż nie mamy żadnej osi lub płaszczyzny stałej, któraby mogła służyć w podobny sposób jak poziom porównawczy. Chcąc pośrednio dojść do poznania zmian, zachodzących w zgniatanej ziemi, należy wyjść z ogólnie zaobserwowanego faktu, iż działanie walca, utłaczającego ziemię, ujawnia się tylko na małą stosunkowo głębokość. Warstwy górne ulegną wedle obserwacji największym odkształceniom, te zaś będą maleć w miarę wzrostu uważanej głębokości, aż na koniec dla pewnej głębokości staną się zerem lub tak znikomą wielkością, iż jej w rachunek brać niepodobna.

Przeprowadzono następujące dwa doświadczenia, które dają możność rozjaśnienia pewnego tej zawilej sprawy.

Doświadczenie A. Uformowano na stole aparatu blok ziemi i podcięto go nożem, naniósłszy poprzednio od czoła siatkę 20-milimetrową. Ziemia użyta była ilem (nr. III), kąt cięcia wynosił 20°. Ponieważ jedna strona była dla rozszerzenia poprzecznego zupełnie wolna, przeto rozszerzenie to wystąpiło swobodnie i po zerwaniu materiału boki prostokątów poziome mierzyły po 20·5 mm. Głębokość zanurzenia wynosiła pierwotnie 120 mm. Po zdeformowaniu równe przedtem wysokości kwadratów podziałki przybrały, licząc od dołu, następujące wartości:

10·0, 16·5, 19·0, 19·0, 19·5, 19·5 mm.

Cała długość zatem po skróceniu była 103.5 mm , wobec czego skrócenie całkowite wynosiło 16.5 mm .

Odejmując każdą z tych cyfr od 20, otrzymamy skrócenie całkowite dla wysokości każdego kwadratu:

$$10.0, 3.5, 1.0, 1.0, 0.5, 0.5\text{ mm}.$$

Dzieląc zaś różnice przez 20, otrzymamy szereg przedstawiający średnie skrócenia jednostkowe dla poszczególnych wysokości kwadratów:

$$0.500, 0.175, 0.050, 0.050, 0.025, 0.025.$$

Szereg ten zawiera w sobie prawidło, które możemy sformułować następująco:

Ziemia pod wpływem ściskania deformuje się w ten sposób, iż największe skrócenia jednostkowe znajdują się najbliżej powierzchni zetknięcia ziemi z narzędziem; im dalej od zetknięcia, tem skrócenie jednostkowe jest mniejsze.

Doświadczenie B. Przez warstwę iltu, tworzącą silną ławę na poprzek aparatu, przepuszczono nóż pionowy o przekroju równoramiennym i kącie zaostrenia 15° . Przytem zapobieżono deformacyom w kierunku pionowym przez sztuczne obciążenie górnej podstawy bloku. Skoro po przejściu zdjęto kopię zdeformowanej siatki na górnej powierzchni, okazało się, że w kierunku ruchu powstały wydłużenia, w kierunku zaś poprzecznym do niego skrócenia boków siatki. Długości boków skróconych pomierzone, były:

$$15.0, 17.0, 18.0, 19.0, 19.5, 20.0.$$

Skrócenia całkowite wynosiły zatem:

$$5.0, 3.0, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0.0,$$

zaś średnie skrócenia jednostkowe:

$$0.25, 0.15, 0.10, 0.075, 0.050, 0.025, 0.000.$$

Z tego również widoczna, iż prawo powyżej wyrażone jest prawdziwe. Co więcej: zarówno skrócenia całkowite jak i jednostkowe muszą dążyć do wartości granicznej i osiągać ją w punkcie, który przy całej deformacyi nie zmienił w ciele swego pierwotnego położenia.

Jeśli w naszym doświadczeniu uwzględnimy, że punkt w odległości 120 mm od osi już się nie poruszył, to skrócenie całkowite na tej przestrzeni wyniesie 13 mm .

Nie można nie zauważyć tu ogromnie charakterystycznej analogii pomiędzy deformacją a ruchem zmiennym opóźnionym. Szereg

bowiem, utworzony ze skróceń całkowitych, można uważać za szereg wielkości dróg, jakie cząstki ziemi odbędą w następujących po sobie warstwach.

Spróbujmy przedstawić szereg, któryby był analogiczny do dróg, odbytych w 1, 2, 3 i t. d. elementach czasu. Będzie to szereg:

$$5.0, 8.0, 10.0, 11.5, 12.5, 13.0,$$

przedstawiający skrócenia (licząc od narzędzia) w 1, 2, 3 i t. d. warstwach, czyli na odległości 20, 40 i t. d. *mm*.

Oznaczmy przez l takie skrócenie, zaś przez t (analogicznie do czasu) oddalenie uważanej warstwy od osi i wyrażmy związek pomiędzy temi ilościami zapomocą wzoru. Będzie to wogóle równanie drugiego stopnia:

$$l = at^2 + \beta t.$$

Wstawiając odpowiednie wartości $t = 20, 40$ i t. d., zaś $l = 5.0, 8.0$ i t. d., możemy dostać szereg równań, które prowadzą nas do wyznaczenia stałych równania.

Równanie końcowe dla danego przykładu będzie:

$$l = -0.00111 t^2 + 0.239 t.$$

Obliczając z niego dla danych t wartości l , otrzymamy:

$$\text{dla } t = 20, 40, 60, 80, 100, 120,$$

$$, \quad l = 4.2, 7.8, 10.3, 12.0, 12.8, 12.7,$$

jako wartości wyrównane.

Szereg ten ma znaczenie dla nas od $t=0$ do $t=t_{\max}$. Ażeby znaleźć górną granicę, przyrównamy pierwszą pochodną $\frac{dl}{dt}$ do zera:

$$\frac{dl}{dt} = -0.00222 t + 0.239 = 0.$$

Zatem $t_{\max}$, do którego wolno nam w danym wypadku posłużyć się krzywą wyrównania, jest:

$$t_{\max} = 107.7 \text{ mm.}$$

W takiej zatem odległości od osi niema śladów deformacji.

Dalsze analogie są również ciekawe. Pochodna $\frac{dl}{dt}$, którą można porównać z prędkością, jest niczem innem jak stosunkiem nieskończenie małej zmiany skrócenia do takiejże zmiany oddalenia od osi. Jest to uogólnienie pojęcia skrócenia jednostkowego, które zazwyczaj brane jest przeciętnie jako stałe, a które wcale stałym nie jest.

Przyrost skrócenia jednostkowego wyrazimy drugą pochodną, która z powodu, iż równanie wyrównujące obserwacye było drugiego stopnia, wypadnie stała i wynosić będzie:

$$\frac{d^2l}{dt^2} = 0.0222 \text{ mm.}$$

Wstawiając w równanie wyrównujące $t = 107.7 \text{ mm}$, otrzymamy:

$$l_{\max} = 13.9 \text{ mm.}$$

Ponieważ odkształcenie wstępne musi być połączone z zagęszczeniem materiału, przeto wywoła ono i zmiany gęstości w ciele, jakie — według założenia — było pierwotnie jednostajnie gęstem. Jeślibyśmy ciało rozłożyli na nieskończoną ilość warstewek równoległych do siebie i normalnie ustawionych do kierunku, w którym następuje zagęszczanie, zobaczymy, że w miarę jak skrócenia jednostkowe maleją, zmniejszają się także i przyrosty gęstości. Po zakończeniu deformacyi będziemy zatem mieli największą gęstość tuż przy nożu, najmniejszą zaś, t. j. równą pierwotnej gęstości, znajdziemy w oddaleniu $t_{\max}$ od osi noża.

Tą drogą moglibyśmy otrzymać nowe związki pomiędzy uważaną głębokością (dalekością) a gęstością, względnie ciężarem gatunkowym w danem miejscu.

Rzucamy tę myśl mimochodem, zaznaczając jej ważność dla teorii ugniatania walcami i dla zmian warunków wilgotności, jakie jest skutkiem wałowania. Dla naszych obecnych celów badanie gruntowne tej kwestyi jest zbyteczne, gdyż chodzi nam jedynie o wielkość deformacyi; ciężar zdeformowanej bryły pomimo lokalnych zmian w gęstości musi pozostać takim, jakim był przed deformacją. Do dalszych bowiem naszych dociekań musimy, oprócz kierunku pęknięć, znać także wielkość deformacyi i ciężar ziemi, która podlega odkształceniom.

Stosując to do pługa lub do innego narzędzia, które zanurzone w ziemi przesuwają cząstki ziemi względem siebie, musimy poznać wielkość odkształceń i ciężar tych brył ziemi, które stanowią odkształconą skibę. Nie możemy powiedzieć, jakoby kwestya miejscowych zagęszczeń materiału i wielkość ciężarów gatunkowych w dowolnym punkcie skiby była nam obojętna, gdyż ta okoliczność wpływa na kruszenie się ziemi, w każdym razie jednak w porównaniu z poprzednimi będzie to tylko kwestya drugorzędna.

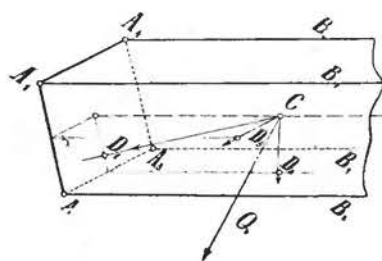
W rozumowaniach powyższych pominięto zupełnie kwestyę wielkości siły zewnętrznej, jakiej potrzeba do wywołania pewnej deformacyi. Ponieważ rozpatrujemy tutaj deformacye przy zgniataniu, możemy posłużyć się skutecznie dyagramem odkształceń, z którego zawsze możemy znaleźć, jak wielka siła zewnętrzna po-

rzebna jest do wywołania pewnego skrócenia zgniatanej warstwy. Nie można jednak zapominać, iż zwykle dyagramy nie odpowiadają ściśle tym warunkom, w jakich dokonywa się deformacja w ziemi. Jak bowiem już poprzednio zaznaczyliśmy, proces deformacji będzie w rzeczywistości słumionym. Rzeczą przyszłości będzie uzyskanie takich dyagramów odkształceń, w których byłby uwzględniony wpływ otoczenia, hamujący swobodę rozszerzenia poprzecznego.

Mając do dyspozycji nietylko dyagramy otrzymane przy zgniataniu, lecz także i przy innych rodzajach nateżeń, możemy łatwo z dyagramu odkształceń obliczyć zarówno wielkość nateżenia w chwili zerwania materiału, jak i wielkość pracy potrzebnej do całkowitej lub częściowej deformacji.

VI. Objętość i ciężar deformowanej bryły ziemi.

Narzędzie dowolne, poruszając się w ziemi, oddziaływa w każdym momencie na pewną masę ziemi, której wielkość zależy od kierunków usuwiskowych, a więc też i od kształtu powierzchni narzędzia.



Rycina 12.

Bryłę ziemi, okoloną z boków głównymi kierunkami usuwiskowymi, wychodzącymi z obrysów narzędzia, odciętą od dołu powierzchnią narzędzia i ograniczoną od góry płaszczyzną terenu nazwiemy partą bryły ziemi. Będzie ona pokrywała się zupełnie ze sferą działania narzędzia. Ażeby oznaczyć jej wielkość, musimy wyjść z ogólnego zupełnie przypadku, w którym mamy do czynienia z dowolną krzywą powierzchnią.

Obierzmy w płaszczyźnie stycznej (ryc. 12) w okolicy punktu A elementarny kwadracik $A_1A_2A_3A_4$ tak, by bok A_1A_2 leżał na przecięciu płaszczyzny stycznej i płaszczyzny normalnej, równoległej do osi XX^{an} .

Z dwu zatem równań:

$$(X-x) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial F}{\partial y} + (Z-z) \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$(Y-y) \frac{\partial F}{\partial z} - (Z-z) \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

z których pierwsze przedstawia płaszczyznę styczną, drugie zaś płaszczyznę normalną, otrzymamy równanie krawędzi A_1A_2 . Mnożąc

pierwsze z tych równań przez $\frac{\partial F}{\partial y}$, a drugie przez $\frac{\partial F}{\partial z}$ i dodając obadwa równania do siebie, następnie zaś mnożąc pierwsze przez $\frac{\partial F}{\partial z}$, a drugie przez $\frac{\partial F}{\partial y}$ i odejmując od siebie, uzyskamy:

$$(X-x) \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F'}{\partial y} + (Y-y) \left[\left(\frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] = 0,$$

$$(X-x) \frac{\partial F'}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + (Z-z) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z} \right)^2 \right] = 0,$$

albo w formie symetrycznej:

$$\frac{X-x}{\left[\left(\frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right]} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial F'}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F'}{\partial z}}$$

równanie boku A_1A_2 .

Dwa inne boki A_1A_4 i A_2A_3 są do siebie równoległe, stoją prostopadłe do boku A_1A_2 i leżą na płaszczyźnie stycznej. Te warunki wystarczają do znalezienia ich równań.

Ogólne równanie prostej:

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n}$$

musi spełniać warunek prostopadłości do A_1A_2 ,

$$l \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z} \right)^2 \right] - m \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F'}{\partial y} - n \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F'}{\partial z} = 0$$

i warunek leżenia w płaszczyźnie stycznej:

$$l \frac{\partial F'}{\partial x} + m \frac{\partial F'}{\partial y} + n \frac{\partial F'}{\partial z} = 0.$$

Mnożąc ostatnie równanie przez $\frac{\partial F}{\partial x}$ i dodając do poprzedniego, otrzymamy:

$$l \left[\left(\frac{\partial F'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \text{ a więc } l = 0.$$

Wynika z tego, że i

$$m \frac{\partial F'}{\partial y} + n \frac{\partial F'}{\partial z} = 0.$$

Kładąc tedy $l = 0$, $m = -\frac{\partial F'}{\partial z}$, $n = \frac{\partial F'}{\partial y}$, otrzymamy równanie boku A_1A_4 w postaci:

$$\frac{X-x}{0} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial F'}{\partial z}} = \frac{Z-z}{-\frac{\partial F'}{\partial y}}.$$

Wykreślmy z wierzchołków kwadratu proste A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 i A_4B_4 równoległe do siebie i nachylone do osi XX^{onc} pod kątem δ . Otrzymamy w ten sposób ograniczony pryzmat elementarny, niejako włókno wycięte z materiału ziemnego, które może przy ruchu narzędzia przesuwać się względem włókien sąsiednich.

Równanie boku A_1B_1 znajdziemy, biorąc pod uwagę, że leży on w płaszczyźnie normalnej i jest nachylony do normalnej pod kątem $NA_1B_1 = \theta - 90^\circ$.

Mamy równanie prostej:

$$\frac{X-x}{\cos \alpha} = \frac{Y-y}{\cos \beta} = \frac{Z-z}{\cos \gamma}$$

i równanie płaszczyzny normalnej przesuniętej przez prostą normalną równoległą do kierunku ruchu:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F'}{\partial x} & \frac{\partial F'}{\partial y} & \frac{\partial F'}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

z których wynika, że

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial F'}{\partial x} & \frac{\partial F'}{\partial y} & \frac{\partial F'}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Z rozwinięcia wyznacznika otrzymamy:

$$\frac{\cos \beta}{\frac{\partial F'}{\partial y}} = \frac{\cos \gamma}{\frac{\partial F'}{\partial z}} = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}}.$$

Oznaczając

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = K,$$

otrzymamy:

$$\cos \beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{K} \sin \alpha.$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{K} \sin \alpha.$$

Ale my znamy kąt α ; jest on tym samym kątem, któryśmy przedtem oznaczyli jako δ . Wobec tego równanie krawędzi A_1B_1 będzie:

$$\frac{X-x}{K \cos \delta} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdot \sin \delta = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \cdot \sin \delta.$$

Dostawy zaś kierunkowe:

$$\cos \alpha = \cos \delta,$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{K} \cdot \sin \delta,$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{K} \sin \delta.$$

Mając znane równania krawędzi, możemy obliczyć objętość elementarnego pryzmatu i jego ciężar (ryc. 13). Podstawę obraliśmy dowolnie, zatem objętość musi być proporcjonalna do wysokości pryzmacika.

Przyjmijmy płaszczyznę poziomą PP_1 w odległości t od płaszczyzny rzutów XY i uważajmy ją za górne ograniczenie terenu. Spółrzędna z przydłużona przebije tę płaszczyznę w punkcie K , zaś krawędź AB przebije ją w punkcie B . Z uwagi, że $z \perp PP_1$ trójkąt AKB jest prostokątny i istnieje musi związek:

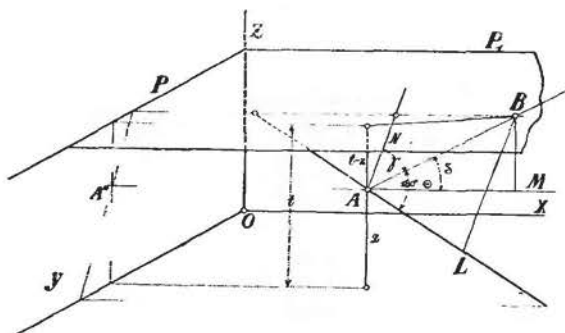
$$AB = \frac{AK}{\cos \gamma}.$$

Wiemy jednak, że

$$AK = t - z,$$

zaś

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{K} \cdot \sin \delta.$$



Rycina 13.

Po podstawieniu wartości, otrzymamy:

$$AB = (t - z) \frac{K}{\frac{\partial F}{\partial z}} \cdot \sin \delta.$$

Wykreślmy z punktu B prostopadłą BL do stycznej, to z trójkąta prostokątnego ABL otrzymamy:

$$BL = s = AB \sin (180 - \Theta),$$

czyli

$$s = (t - z) \frac{K}{\frac{\partial F}{\partial z}} \cdot \frac{\sin \Theta}{\sin \delta}.$$

Ciężar jednego pryzmacika znajdziemy z wzoru:

$$dQ = \sigma (t - z) \frac{K}{\frac{\partial F}{\partial z}} \cdot \frac{\sin \Theta}{\sin \delta} \cdot dF.$$

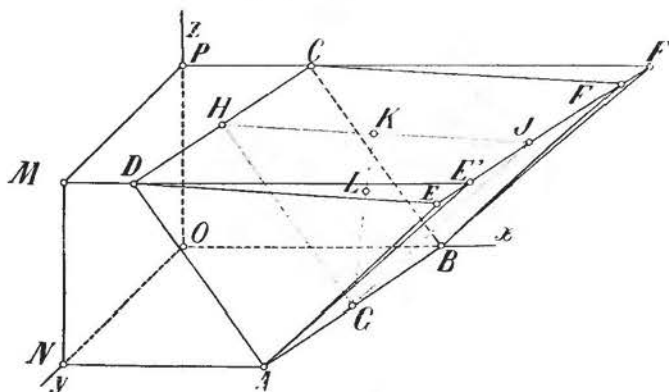
Ażeby oznaczyć wielkość całkowitej bryły ziemi deformowanej przez narzędzie, nie zawsze można posłużyć się wzorem wypływającym z poprzedniego:

$$Q = \sigma \int (t - z) \frac{K \sin \Theta}{\frac{\partial F}{\partial z} \sin \delta} \cdot dF.$$

Wiemy bowiem, że kierunki usuwiskowe główne wykreślone we wszystkich punktach danej powierzchni, a zatem i słupki materialne, pomyślane na elementach powierzchni w sposób podany powyżej, muszą się krzyżować ze sobą, jeśli powierzchnia jest wklęsłą stroną zwróconą ku materiałowi deformowanemu, zaś odchyłać się, jeśli powierzchnia jest wypukłą. Wskutek tego wzór nie da wcale objętości, ani ciężaru bryły i rezultat będzie w pierwszym przypadku większy, w drugim zaś przy powierzchniach wypukłych mniejszy od rzeczywistej objętości. Wogóle wzór ten można zastosować tylko w tym razie, gdy mamy do czynienia z ruchomą płaszczyzną. Tylko wtedy bowiem kierunki usuwiskowe wyprowadzone ze wszystkich punktów będą do siebie równoległe, słupki zaś wypełnią całą bryłę deformowaną.

Przykład I. (Płaszczyzna). Niechaj równanie płaszczyzny ruchomej (ryc. 14) $ABDC$ będzie:

$$x = ay + bz + c.$$



Rycina 14.

Krawędź AB otrzymamy, kładąc $z = 0$

$$x = ay + c.$$

Jeśli przez każdy punkt tej prostej pomyślimy sobie wykreślony kierunek usuwiskowy, to otrzymamy płaszczyznę $AEBF$, jako płaszczyznę przesuniętą przez proste:

$$x = ay + c, z = 0$$

$$\frac{X-x}{K_1 \cos \delta} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y} \sin \delta} = \frac{Z-z}{-\frac{\partial f}{\partial z} \sin \delta},$$

$$\text{gdzie } K_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Niechaj punkt wspólny pomiędzy kierownicą i rodzącą będzie w danej chwili x_0, y_0, z_0 .

Drugie to równanie przekształcimy, wprowadzając kąt pomocniczy α_1 i kładąc

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{K_1} = \cos \alpha_1.$$

Wtedy wypadnie:

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{K_1} \sin \alpha_1,$$

zaś równanie nasze przybierze kształt:

$$\frac{X-x_0}{\cos \delta} = \frac{Y-y_0}{\cos \alpha_1 \sin \delta} = \frac{Z-z}{\sin \alpha_1 \sin \delta},$$

przyczem następniki stosunków są wprost dostawami kierunkowymi.

Równanie śladu płaszczyzny będzie $X-x_0 = a(Y-y_0)$, albo w formie symetrycznej:

$$\frac{X-x_0}{a} = \frac{Y-y}{1} = \frac{Z-z}{0}$$

o dostawach kierunkowych

$$\cos \lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}; \quad \cos \mu = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}; \quad \cos \nu = 0.$$

Płaszczyznę, przesuniętą przez te dwie proste, wyrazimy wyznacznikiem:

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ \cos \lambda & \cos \mu & \cos \nu \\ \cos \delta & \cos \alpha_1 \sin \delta & \sin \alpha_1 \sin \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwiązaniu wyznacznika i podstawieniu wartości za dostawy kątów λ , μ , ν , otrzymamy:

$$(X - x_0) - (Y - y_0) a - \frac{(Z - z_0)(\cos \delta - a \cos \alpha_1 \sin \delta)}{\sin \alpha_1 \sin \delta} = 0.$$

Ażebym wyrugować współrzędne punktu x_0 , y_0 , z_0 , wstawimy w powyższe równanie $x_0 = ay_0 + c$, $z_0 = 0$, wskutek czego przekształci się ono na inne:

$$X = ay + \frac{z(\cos \delta - a \cos \alpha_1 \sin \delta)}{\sin \alpha_1 \sin \delta} + c$$

Oznaczmy objętość bryły:

$$ABF'CDE' = V$$

$$V_1 = AB'F'PONME'$$

$$V_2 = ABCPONMD$$

i szukajmy objętości $V = V_1 - V_2$.

Przedewszystkiem jednak musimy zmienić równanie płaszczyzny usuwiskowej, podstawiając wartości za funkcyje kątów δ i α_1 . W tym celu z równania płaszczyzny $x = ay + bz + c$ musimy znaleźć pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = b.$$

$$\text{Zatem: } K_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad M_1 = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Znajdziemy:

$$\sin \varepsilon = \frac{1}{M_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos \varepsilon = -\frac{K_1}{M_1} = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

Ponieważ zaś

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \cos \Theta - \cos \varepsilon \sin \Theta,$$

$$\cos \delta = \cos \varepsilon \cos \Theta + \sin \varepsilon \sin \Theta,$$

przeto po podstawieniu otrzymamy:

$$\sin \delta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \cos \Theta + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \sin \Theta$$

$$\cos \delta = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \cos \Theta + \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \sin \Theta.$$

Z drugiej strony

$$\sin \kappa_1 = -\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos \kappa_1 = -\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Po wprowadzeniu tych podstawień i uporządkowaniu równania otrzymamy równanie płaszczyzny usuwiskowej:

$$x = ay + z \frac{b^2 \cos \Theta - (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta}{b (\cos \Theta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta)} + c,$$

albo w skróconej formie:

$$x = ay + nz + c.$$

Objętość znajdziemy jako całkę w granicach od $y=0$, $z=0$ do $y=\eta$, $z=h$:

$$V_1 = \int_0^\eta \int_0^h X dydz = \int_0^\eta \int_0^h (ay + nz + c) dydz =$$

$$= a \int_0^\eta \int_0^h y dydz + n \int_0^\eta \int_0^h z dydz + c \int_0^\eta \int_0^h dydz,$$

czyli po zcałkowaniu i podstawieniu granic:

$$V_1 = \frac{a\eta^2 h}{2} + \frac{n\eta h^2}{2} + c\eta h.$$

W podobny sposób znajdziemy:

$$V_2 = \int_0^\eta \int_0^h (ay + bz + c) dydz = \frac{a\eta h^2}{2} + \frac{b\eta h^2}{2} + c\eta h.$$

Z różnicy $V = V_1 - V_2$ obliczymy żadaną objętość bryły ziemi partej narzędziem:

$$V = (n - b) \frac{\eta h^2}{2},$$

albo po podstawieniu wartości za n :

$$V = \frac{\eta h^2}{2b} \cdot \frac{(1 + a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta}{\cos \Theta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta}.$$

Oznaczając ciężar jednostki objętości ziemi przez σ , otrzymamy ciężar:

$$Q = \frac{\eta h^2 \sigma}{2b} \cdot \frac{(1 + a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta}{\cos \Theta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta}.$$

W obliczeniu powyższem popełniono rozmyślnie błąd, przemilczając, że bryła ziemi, parta narzędziem, właściwie nie będzie identyczną z tą bryłą, którą obliczono. Jeśli bowiem z punktów końcowych AB wykreślimy proste, oznaczające kierunek usuwiskowy AE i BF , to nie będą one leżały na płaszczyznach granicznych: $Y = 0$ i $Y = \eta = 0$. Możemy jednak udowodnić, że obie bryły są równe pod względem objętości:

$$ABFCDE = ABF'CDE'.$$

Napiszemy to równanie inaczej:

$$ABF'CDE' + AE'DE = ABFCDE + BF'CF.$$

Wobec tego wystarczy udowodnić, że obadwa czworościany dodatkowe posiadają również równe objętości:

$$AE'DE = BF'CF.$$

Przedewszystkiem zauważymy, że $AD \parallel BC$ i $AE \parallel BF$, wobec czego $ADE \parallel BCF$, zaś $DE \parallel CF$.

Ponieważ także $DC \parallel EF$ a $DE' \parallel CF'$, przeto mamy relację:

$$DE \neq CF, DE' \neq CF.$$

Dodając do tego warunek, że

$$\sphericalangle EDE' = \sphericalangle FCF',$$

otrzymamy w rezultacie dowód, że

$$\Delta DEE' \cong \Delta CFF'.$$

Jeśli te trójkąty będziemy uważali za podstawy ostrosłupów dodatkowych, których wysokością wspólną jest głębokość zanurzenia h , otrzymamy równość:

$$DEE' \cdot \frac{h}{3} = CFF' \cdot \frac{h}{3},$$

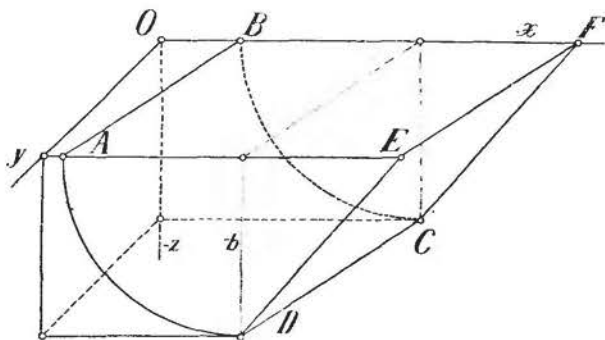
czyli

$$AE'DE = BF'CF.$$

Widzimy zatem, że cyfrowy wynik zawsze będzie ten sam, czy obliczymy objętość bryły wciągniętej przedtem w rachunek, czy też objętość ziemi partej rzeczywiście przez płaszczyznę ruchomą i że wzór, wyprowadzony przez nas powyżej, jest słuszny.

Przykład II. (Walec eliptyczny). Mając narzędzie kształtu walca drugiego stopnia (ryc. 15) stycznego do płaszczyzny poziomej rzutów, możemy określić rodzącą walca równaniem:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$



Rycina 15.

Zmienimy układ współrzędnych z $O(xyz)$ na $O(x_1y_1z_1)$ przyjmując, że nowa oś XX^{ow} będzie prostopadłą do kierunku rodzącej walca, nowa oś YY^{ow} będzie do rodzącej walca równoległą, oś zaś ZZ^{ow} pozostanie w pierwotnym położeniu. Innymi słowy: przetransformujemy układ współrzędnych, obracając dokoła osi ZZ^{ow} o kąt φ .

Pomiędzy współrzędnymi obydwu systemów będą istniały związki:

$$x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

$$y_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Załóżmy, że równanie normalnego przekroju walca będzie krzywą drugiego stopnia o równaniu:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(z-b)^2}{b^2} = 1,$$

to równanie walca, odniesione do pierwotnego układu, będzie:

$$\frac{(x \cos \varphi + y \sin \varphi - p)^2}{a^2} + \frac{(z-b)^2}{b^2} = 1.$$

Jeśli przyjmiemy, że oś będzie leżeć w płaszczyźnie poziomej rzutów, otrzymamy równanie:

$$\frac{(x \cos \varphi + y \sin \varphi - p)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

- albo też:

$$x = -y \operatorname{tg} \varphi + p \sec \varphi + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - z^2}.$$

Z tego równania znajdziemy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{a}{b} \sec \varphi \frac{z}{\sqrt{b^2 - z^2}}.$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę warstwę ograniczoną dwiema płaszczyznami poziomymi $z = -h_1$ i $z = -h_2$, przyczem $h_2 > h_1$, to przekrój powierzchni płaszczyzną $z = -h_2$ będzie:

$$x = -y \operatorname{tg} \varphi + p \sec \varphi + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2}.$$

Dla punktów leżących na tej rodzącej walca wartości pochodnych przybiorą wartość:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{a}{b} \sec \varphi \frac{h_2}{\sqrt{b^2 - h_2^2}}.$$

Obliczymy elementa pomocnicze:

$$K_1 = \frac{\sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2}}{b \cos \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2}},$$

$$M_1 = \frac{\sqrt{b^4 - b^2 h_2^2 + a^2 h_2^2}}{b \cos \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2}},$$

$$\sin \varepsilon = \frac{b \cos \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2}}{\sqrt{b^4 - b^2 h_2^2 + a^2 h_2^2}}, \quad \cos \varepsilon = -\sqrt{\frac{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2}{b^4 - b^2 h_2^2 + a^2 h_2^2}},$$

$$\sin \alpha_1 = - \frac{a h_2}{\sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2}},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{b \sin \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2}}{\sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2}},$$

$$\sin \delta = \frac{b \cos \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} \cos \Theta + \sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2} \sin \Theta}{\sqrt{b^4 - b^2 h_2^2 + a^2 h_2^2}},$$

$$\cos \delta = \frac{-\sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2} \cos \Theta + b \cos \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} \sin \Theta}{\sqrt{b^4 - b^2 h_2^2 + a^2 h_2^2}}.$$

Z równania kierunku usuwiskowego:

$$\frac{X - x_0}{\cos \delta} = \frac{Y - y_0}{\sin \delta \cos \alpha} = \frac{Z - z_0}{\sin \delta \sin \alpha}$$

i z równania kierownicy:

$$x = -y \operatorname{tg} \varphi + p \sec \varphi + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2},$$

przekształconego na:

$$\frac{X - x_0}{- \operatorname{tg} \varphi} = \frac{Y - y_0}{1} = \frac{Z - z_0}{0},$$

znajdziemy równanie płaszczyzny przesuniętej przez te dwie proste:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \cos \delta & \sin \delta \cos \alpha & \sin \delta \sin \alpha \\ - \operatorname{tg} \varphi & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

albo:

$$(X - x_0) + (Y - y_0) \operatorname{tg} \varphi - (Z - z_0) \frac{\cos \delta + \operatorname{tg} \varphi \sin \delta \cos \alpha}{\sin \delta \sin \alpha} = 0.$$

Podstawimy wartości za wyrażenia pomocnicze i otrzymamy:

$$\frac{(X - x_0) + (Y - y_0) \operatorname{tg} \varphi - (Z - z_0)}{a^2 h_2^2 \cos \varphi \cos \Theta - \sqrt{b^2 h_2^2} \sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2} \sin \Theta} = 0.$$

$$a h_2^2 \cos^2 \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} \cos \Theta + a h_2 \cos \varphi \sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2} \sin \Theta$$

W celu wyrugowania współrzędnych punktu x_0, y_0, z_0 należy podstawić:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -y_0 \operatorname{tg} \varphi + p \sec \varphi + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2}, \\
 X + Y \operatorname{tg} \varphi - \\
 - Z \frac{a^2 h_2^2 \cos \varphi \cos \Theta - b \sqrt{b^2 - h_2^2} \sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2 \sin \Theta}}{ab h_2^2 \cos^2 \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} \cos \Theta + a h_2 \cos \varphi \sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2 \sin \Theta}} - \\
 - p \sec \varphi - \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} - \\
 - h_2 \frac{a^2 h_2^2 \cos \varphi \cos \Theta - b \sqrt{b^2 - h_2^2} \sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2 \sin \Theta}}{ab h_2^2 \sqrt{b^2 - h_2^2} \cos^2 \varphi \cos \Theta + a h_2 \cos \varphi \sqrt{b^4 \sin^2 \varphi - b^2 h_2^2 \sin^2 \varphi + a^2 h_2^2 \sin \Theta}} = 0,
 \end{aligned}$$

albo w skróceniu:

$$X + Y \operatorname{tg} \varphi - zn - p \sec \varphi - \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} - h_2 n = 0.$$

Znajdziemy objętość:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 - V_2 = \\
 &= \int_0^\eta \int_{-h_2}^{-h_1} (-y \operatorname{tg} \varphi + zn + p \sec \varphi + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} + h_2 n) dy dz - \\
 &\quad - \int_0^\eta \int_{-h_2}^{-h_1} (-y \operatorname{tg} \varphi + p \sec \varphi + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - z^2}) dy dz = \\
 &= \int_0^\eta \int_{-h_2}^{-h_1} (zn + h_2 n + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} - \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - z^2}) dy dz.
 \end{aligned}$$

Ponieważ zaś:

$$\int \int \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - z^2} dy dz = \frac{a}{2b} \sec \varphi y z \sqrt{b^2 - z^2} + \frac{aby}{2} \sec \varphi \arcsin \frac{z}{b},$$

przeto:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^\eta \int_{-h_2}^{-h_1} \left(\frac{nyz^2}{2} + h_2 nyz + \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} yz - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a}{2b} \sec \varphi yz \sqrt{b^2 - z^2} - \frac{aby}{2} \sec \varphi \arcsin \frac{z}{b} \right) = \\
 &= \frac{\eta}{2} \left\{ n(h_1^2 - h_2^2) - 2h_2 n(h_1 - h_2) - 2 \frac{a}{b} \sec \varphi \sqrt{b^2 - h_2^2} (h_1 - h_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a}{b} \sec \varphi h_1 \sqrt{b^2 - h_1^2} - \frac{a}{b} \sec \varphi h_2 \sqrt{b^2 - h_2^2} - \right. \\
 &\quad \left. - ab \sec \varphi \left[\arcsin \left(-\frac{h_1}{b} \right) - \arcsin \left(-\frac{h_2}{b} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Ponieważ zaś $\arcsin(-\alpha) = \pi + \arcsin \alpha$, napiszemy po uporządkowaniu:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\eta}{2} \left\{ n(h_1 - h_2)^2 + \frac{a}{b} \sec \varphi (h_1 \sqrt{b^2 - h_1^2} - 2h_1 \sqrt{b^2 - h_2^2} + \right. \\
 &\quad \left. + h_2 \sqrt{b^2 - h_2^2}) + ab \sec \varphi \left(\arcsin \frac{h_1}{b} - \arcsin \frac{h_2}{b} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Dla walca kołowego będzie:

$$\begin{aligned}
 V_{\pi} &= \frac{\eta}{2} \left\{ n(h_1 - h_2)^2 + \sec \varphi (h_1 \sqrt{r^2 - h_1^2} - 2h_1 \sqrt{r^2 - h_2^2} + \right. \\
 &\quad \left. + h_2 \sqrt{r^2 - h_2^2}) - r^2 \sec \varphi \left(\arcsin \frac{h_1}{r} - \arcsin \frac{h_2}{r} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Jeszcze bardziej uprościć się wzory, jeśli położymy $h_2 = b$, względnie $h_2 = r$; otrzymamy wtedy:

$$V = \frac{\eta}{2} \left\{ n(h - b)^2 + \frac{a}{b} \sec \varphi h \sqrt{b^2 - h^2} + ab \sec \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{h}{b} \right) \right\}.$$

a dla walca kołowego:

$$V_{\pi} = \frac{\eta}{2} \left\{ n(h - r)^2 + \sec \varphi h \sqrt{r^2 - h^2} + r^2 \sec \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{h}{r} \right) \right\},$$

przyczem we wzorach na przekrój kołowy wypadnie $n = \cotg \varphi$.

Przykład III. (Powierzchnia śrubowa). Powierzchnię śrubową mamy daną równaniem $x = a \operatorname{arctg} \frac{z}{y}$.

Tworząca powierzchni usuwiskowej ma równanie:

$$\frac{X - x_0}{\cos \delta} = \frac{Y - y_0}{\cos \alpha \sin \delta} = \frac{Z - z_0}{\sin \alpha \sin \delta}.$$

Z ogólnego równania powierzchni obliczymy pochodne cząstkowe i wartości ich wzdłuż krzywej przecięcia się powierzchni z płaszczyzną $Z = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{az}{y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{ay}{y^2 + z^2},$$

otrzymamy wobec tego:

$$df = a \frac{ydz - zdy}{y^2 + z^2},$$

a zatem:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{z=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{a}{y}.$$

W następstwie tego będzie: $K = \frac{a}{y}$; $M = \frac{1}{y} \sqrt{a^2 + y^2}$;

$$\cos \alpha = 0, \quad \sin \alpha = -1, \quad \sin \varepsilon = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}};$$

$$\cos \varepsilon = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}; \quad \sin \delta = \frac{y \cos \Theta + a \sin \Theta}{\sqrt{a^2 + y^2}};$$

$$\cos \delta = \frac{y \sin \Theta - a \cos \Theta}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

Równanie tworzącej będzie:

$$\frac{X - x_0}{\cos \delta} = \frac{Y - y_0}{0} = -\frac{Z - z_0}{-\sin \delta}.$$

Jednak dla punktu leżącego na kierownicy wartości współrzędnych będą:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = y, \quad z_0 = 0,$$

zaś równanie tworzącej:

$$\frac{X}{\cos \delta} = \frac{Y - y}{0} = -\frac{Z}{\sin \delta},$$

albo w innej formie:

$$Z = -X \operatorname{tg} \delta = \frac{y \cos \Theta + a \sin \Theta}{a \cos \Theta - y \sin \Theta} X,$$

$$Y = y.$$

Z tego otrzymamy równanie powierzchni usuwiskowej:

$$X = Z \frac{a \cos \Theta - Y \sin \Theta}{a \sin \Theta + Y \cos \Theta}.$$

Ażeby obliczyć objętość deformowanej bryły ziemi, ustawimy najpierw wzór:

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^\eta \int_0^h Z \frac{a \cos \Theta - Y \sin \Theta}{a \sin \Theta + Y \cos \Theta} dY \cdot dZ = \\ &= \frac{h^2}{2} \int_0^\eta \frac{a \cos \Theta - Y \sin \Theta}{a \sin \Theta + Y \cos \Theta} \cdot dY = \\ &= \frac{h^2}{2} \int_0^\eta \left(\frac{a \cos \Theta - Y \sin \Theta}{a \sin \Theta + Y \cos \Theta} + \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} - \operatorname{tg} \Theta \right) dY = \\ &= \frac{h^2}{2} \int_0^\eta \frac{a}{(a \sin \Theta + Y \cos \Theta) \cos \Theta} dY - \frac{h^2}{2} \int_0^\eta a \operatorname{tg} \Theta dY = \\ &= \frac{ah^2}{2 \cos^2 \Theta} \int_0^\eta \frac{\cos^2 \Theta}{Y \cos^2 \Theta + a \sin \Theta \cos \Theta} dY - \frac{1}{2} ah^2 \eta \operatorname{tg} \Theta = \\ &= \frac{ah^2}{2 \cos^2 \Theta} \log (\eta \cos^2 \Theta + a \sin \Theta \cos \Theta) - \frac{1}{2} ah^2 \eta \operatorname{tg} \Theta = \\ &= \frac{ah^2}{2 \cos^2 \Theta} [\log a \sin \Theta \cos \Theta (\eta \cotg \Theta + 1) - \eta \sin \Theta \cos \Theta]. \end{aligned}$$

Podobnie obliczymy:

$$V_2 = a \int_0^{\eta} \int_0^h \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} dy \cdot dz.$$

Rozwiążemy najpierw całkę:

$$\int \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} dz = I \text{ przy stałym } y.$$

Całkując przez części, otrzymamy:

$$\begin{aligned} I &= z \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} - \int z d \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} \right) = \\ &= z \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} - \int z \frac{d \left(\frac{z}{y} \right)}{1 + \left(\frac{z}{y} \right)^2} = \\ &= z \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} - \int \frac{zy}{y^2 + z^2} dz = \\ &= z \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} - \frac{y}{2} \int \frac{2z dz}{y^2 + z^2} = \\ &= z \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} - \frac{y}{2} \log(y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Po podstawieniu granic otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_0^h \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{y} \cdot dz &= h \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{y} - \frac{y}{2} \log(y^2 + h^2) + \frac{y}{2} \log y^2 = \\ &= h \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{y} - \frac{y}{2} \log \frac{y^2 + h^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} V_2 &= a \int_0^{\eta} \left(h \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{y} - \frac{y}{2} \log \frac{y^2 + h^2}{y^2} \right) dy = \\ &= a \int_0^{\eta} h \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{y} dy - a \int_0^{\eta} \frac{y}{2} \log \frac{y^2 + h^2}{y^2} dy. \end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$I_1 = \int_0^{\eta} h \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h}{y} dy, \text{ zaś}$$

$$I_2 = \int_0^{\eta} \frac{y}{2} \log \frac{y^2 + h^2}{y^2} dy.$$

Biorąc $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h}{y}$, możemy napisać $\operatorname{tg} x = \frac{h}{y}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{y}{h}$,

albo $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{y}{h}$.

Stąd wynika:

$$\frac{\pi}{2} - x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{h}, \quad x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{h}$$

i ostatecznie:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\eta} h \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{h} \right) dy = \frac{h\eta\pi}{2} - \int_0^{\eta} h \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{h} dy = \frac{h\eta\pi}{2} - \\ &\quad - h\eta \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{2} \log (h^2 + \eta^2) - \frac{h^2}{2} \log \eta^2 = \\ &= \frac{h\eta\pi}{2} - h\eta \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{2} \log \frac{h^2 + \eta^2}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Pozostaje do obliczenia:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\eta} \frac{y}{2} \log \frac{y^2 + h^2}{y^2} dy = \frac{1}{4} \int_0^{\eta} 2y \log \frac{y^2 + h^2}{y^2} dy = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\eta} \log (y^2 + h^2) \cdot 2y dy - \frac{1}{4} \int_0^{\eta} \log y^2 \cdot 2y dy = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\eta} \log (y^2 + h^2) \cdot d(y^2 + h^2) - \frac{1}{4} \int_0^{\eta} \log y^2 \cdot d(y^2). \end{aligned}$$

Ponieważ zaś

$$\int \log x \cdot dx = x (\log x - 1),$$

przeto możemy napisać:

$$I_2 = \int_0^{\eta} \left[\frac{1}{4} (y^2 + h^2) \log (y^2 + h^2) - \frac{1}{4} (y^2 + h^2) - \frac{1}{4} y \log y^2 + \frac{1}{4} y^2 \right].$$

Po podstawieniu zaś granic:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4} (\eta^2 + h^2) \log (\eta^2 + h^2) - \frac{1}{4} h^2 \log h^2 - \frac{1}{4} (\eta^2 + h^2) + \frac{1}{4} h^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta^2 \log \eta^2 + \frac{1}{4} \eta^2 = \\ &= \frac{1}{4} (\eta^2 + h^2) \log (\eta^2 + h^2) - \frac{1}{4} h^2 \log h^2 - \frac{1}{4} \eta^2 \log \eta^2 = \\ &= \frac{1}{4} \eta^2 \log \frac{h^2 + \eta^2}{\eta^2} + \frac{1}{4} h^2 \log \frac{h^2 + \eta^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Wobec tego:

$$V_2 = a \left\{ \frac{h \eta \pi}{2} - h \eta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{2} \log \frac{h^2 + \eta^2}{\eta^2} - \frac{\eta^2}{4} \log \frac{h^2 + \eta^2}{\eta^2} - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{4} \log \frac{h^2 + \eta^2}{h^2} \right\},$$

albo z uwagi, że $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{h} = \operatorname{arctg} \frac{h}{\eta}$.

$$V_2 = a \left\{ h \eta \operatorname{arctg} \frac{h}{\eta} + \frac{2h^2 - \eta^2}{4} \cdot \log \frac{h^2 + \eta^2}{\eta^2} - \frac{h^2}{4} \log \frac{h^2 + \eta^2}{h^2} \right\}.$$

Ostatecznie z pomocą wzoru $V = V_1 - V_2$ znajdziemy objętość deformowanej bryły.

Postępowanie prawidłowe przy obliczaniu objętości możemy streścić następująco:

Mając daną powierzchnię zapomocą równania $x = f(yz)$, znajdujemy przedewszystkiem przekrój z płaszczyzną poziomą, stanowiącą dno wyjętej brzozy. Równanie $x = f(yz)$ przedstawia kierownicę powierzchni usuwiskowej, rodzącą zaś znajdziemy jako kierunek usuwiskowy z równania:

$$\frac{X - x_0}{\cos \delta} = \frac{Y - y_0}{\cos \alpha \sin \delta} = \frac{Z - z_0}{\sin \alpha \sin \delta}.$$

Ponieważ we wszystkich następnikach tych stosunków są pochodne cząstkowe $f'_{(y)}$ i $f'_{(z)}$, należy je znaleźć z równania danej powierzchni i wstawić wartości pochodnych dla $z = \zeta$ w odpowiednie wzory na $\cos \delta$, $\sin \delta$, $\cos \alpha_1$ i $\sin \alpha_1$. Z dwu równań: kierownicy i rodzącej znajdziemy kształt powierzchni usuwiskowej $x_2 = \varphi(yz)$. A następnie rozwiązując całkę

$$V = \int_0^{\eta} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (x_2 - x_1) dy dz,$$

znajdziemy szukaną objętość.

Metoda ta ogólna dozna uproszczeń, jeśli chodzi o powierzchnie walcowe o osiach równoległych do płaszczyzny poziomej. Wtedy bowiem podobnie jak dla płaszczyzny będzie powierzchnia usuwiskowa płaszczyzną. Także i w tych razach, gdy $\xi_2 = 0$, wzory wypadną prostsze i łatwiejsze do liczenia.

Z obliczonej objętości możemy, mnożąc ją przez ciężar jednostkowy, obliczyć ciężar bryły, który możemy pomyśleć sobie skupiony w geometrycznym środku ciężkości bryły. Ważnem jest tedy obok obliczenia ciężaru także i wyznaczenie środka ciężkości deformowanej bryły ziemi. Nie zawsze jest to możebne zapomocą tych środków, jakimi rozporządza elementarna analiza i wobec tego musimy ograniczyć się do podania ogólnego sposobu.

Biorąc pod uwagę moment statyczny elementu objętości kolejno względem trzech płaszczyzn rzutów XY , XZ , YZ , możemy oznaczyć przez x_1 y_1 z_1 współrzędne powierzchni usuwiskowej, zaś przez x_2 y_2 z_2 współrzędne powierzchni narzędzia.

Znajdziemy momenty statyczne:

$$M_{(xy)} = Vz_0 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{h_1}^{h_2} z_1 x_1 dy dz - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{h_1}^{h_2} z_2 x_2 dy dz,$$

$$M_{(xz)} = Vy_0 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{h_1}^{h_2} y_1 x_1 dy dz - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{h_1}^{h_2} y_2 x_2 dy dz,$$

$$M_{(yz)} = Vx_0 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_1^2}{2} dy dz - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_2^2}{2} dy dz.$$

Z tych relacji można obliczyć najpierw momenty statyczne, a następnie, znając wielkość V , znaleźć współrzędne środka ciężkości.

Możliwe to jest naturalnie tylko wtedy, gdy umiemy obliczyć całkę, napisaną po prawej stronie równania. Spółrzędne środka ciężkości będą:

$$x_0 = \frac{M_{(yz)}}{V}; \quad y_0 = \frac{M_{(xz)}}{V}; \quad z_0 = \frac{M_{(xy)}}{V}.$$

Wzory te możliwe są do użycia jedynie wtedy, gdy różnica objętości wprowadzonych w rachunek daje rzeczywistą bryłę deformowaną. Wiemy jednakże, że właściwa bryła deformowana jest skośnie skierowana do kierunku ruchu. Używając wprost wzorów poprzednich, wyznaczylibyśmy (ryc. 14) zamiast środka ciężkości bryły rzeczywistej $ABCDEF$ środek ciężkości równej wprawdzie, ale inaczej położonej bryły $ABCE'F'$. Zaradzić temu mogłoby wprowadzenie w grę dwu płaszczyzn usuwiskowych bocznych ADE i BCF , to jednak skomplikowałoby wzory. O ile chodzi o płaszczyznę, byłoby to jeszcze łatwe do uskutecznienia, przy powierzchniach krzywych wymagałoby szukania bardzo zawiłych równań powierzchni granicznych bocznych.

Dlatego podamy jedynie prostą metodę wyznaczania środka ciężkości bryły partej ruchomą płaszczyzną. W tym celu zauważymy, że bryła ta jest graniastosłupem trójsiecznym o podstawie ADE . Dzieląc cały graniastosłup na warstwy równoległe do podstawy, możemy w każdej wyrstwie oznaczyć środek ciężkości. Wszystkie one będą leżały na prostej równoległej do krawędzi graniastosłupa.

Płaszczyzna dana równaniem:

$$x = ay + bz + c,$$

ograniczona jest dwiema płaszczyznami rzutów XY i XZ , tudzież płaszczyznami $y = \eta$, $z = h$.

Przekrój płaszczyzny danej z płaszczyzną $y = \eta$, da nam krawędź AD , której równanie będzie:

$$x = a\eta + bz + c, \quad y = \eta.$$

Stąd możemy obliczyć wartość x dla punktów A i B ; otrzymamy:

$$x_1 = a\eta + c, \quad x_2 = a\eta + bh + c.$$

Podobnie znajdziemy równanie krawędzi BC

$$y = 0, \quad x = bz + c$$

i wartości: $x_1 = c$ dla punktu B , $x_2 = bh + c$ dla punktu C .

Teraz już możemy z łatwością wyznaczyć współrzędne wierzchołków:

$$A \begin{Bmatrix} a\eta + c \\ \eta \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad B \begin{Bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad C \begin{Bmatrix} bh + c \\ 0 \\ h \end{Bmatrix}, \quad D \begin{Bmatrix} a\eta + bh + c \\ \eta \\ h \end{Bmatrix}.$$

Ponieważ środek ciężkości graniastosłupa będzie leżał w średnim przekroju, przeto współrzędne punktów G i H będą:

$$G \begin{Bmatrix} \frac{a\eta + 2c}{2} \\ \eta \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad H \begin{Bmatrix} \frac{a\eta + 2bh + 2c}{2} \\ \eta \\ 2 \\ h \end{Bmatrix}.$$

Ażeby znaleźć współrzędne punktu I , wyprowadzimy z punktu C prostą, mającą kierunek linii usuwiskowych. Równanie takiej prostej będzie:

$$\frac{X - x_1}{\cos \delta} = \frac{Y - y_1}{\sin \delta \cos z} = \frac{Z - z_1}{\sin \delta \sin z}.$$

Wstawiając za x_1 y_1 z_1 współrzędne punktu G , otrzymamy równanie prostej GI :

$$\frac{X - \frac{a\eta + 2c}{2}}{\cos \delta} = \frac{Y - \frac{\eta}{2}}{\sin \delta \cos z} = \frac{Z}{\sin \delta \sin z}.$$

Punkt I uważamy za punkt przebicia prostej z płaszczyzną $Z = h$. Współrzędne tego punktu będą:

$$I \begin{Bmatrix} \frac{h \cos \delta}{\sin \delta \sin z} + \frac{a\eta + 2c}{2} \\ \frac{h \cos z}{\sin z} + \frac{\eta}{2} \\ h \end{Bmatrix}.$$

Środek ciężkości, jak wiadomo, znajdziemy łącząc wierzchołek G z środkiem podstawy HI , t. j. prowadząc linię GK i szukając

punktu leżącego w $\frac{1}{3}$ wysokości, licząc od podstawy. Spółrzędne punktu G znamy, spółrzędne zaś punktu K znajdziemy ze spółrzędnych H i I :

$$K \left\{ \begin{array}{l} \frac{h \cos \delta}{2 \sin \delta \sin \kappa} + \frac{bh}{2} + \frac{a\eta + 2c}{2} \\ \frac{h \cos \kappa}{2 \sin \kappa} + \frac{\eta}{2} \\ h \end{array} \right.$$

Z kolei znajdziemy równanie prostej GK jako prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty:

$$\frac{x - \frac{a\eta + 2c}{2}}{\frac{h \cos \delta}{2 \sin \delta \cos \kappa} + \frac{bh}{2}} = \frac{y - \frac{\eta}{2}}{\frac{h \cos \kappa}{2 \sin \kappa}} = \frac{z}{h}.$$

Na tej prostej leży środek ciężkości, drugim zaś miejscem geometrycznym będzie płaszczyzna $z = \frac{2}{3} h$. Spółrzędne punktu przebiecia będą zarazem spółrzędnymi środka ciężkości:

$$x_0 = \frac{1}{3} h \cotg \delta \operatorname{cosec} \kappa + \frac{1}{3} bh + \frac{1}{2} a\eta + c,$$

$$y_0 = \frac{1}{3} h \cotg \kappa + \frac{1}{2} \eta,$$

$$z_0 = \frac{2}{3} h.$$

Zauważymy odrazu, że przy ograniczeniu materiału ziemnego płaszczyzną $y = \eta$, odpadnie z rachunku czworościan $ADEE'$, co naturalnie wpłynie na położenie środka ciężkości w ten sposób, że przesunie się on równolegle do EE' o odległość $\frac{EE'}{3}$. Jeślibyśmy zaniechali tego, będzie można mówić tylko o przybliżonem wyznaczeniu środka ciężkości.

VII. Elementarny pryzmat ziemi.

Weźmy pod uwagę ten sam elementarny pryzmat, o którym poprzednio była mowa (ryc. 12). Będzie on wspierał się na sásie-

dnich, analogicznie pomyślanych pryzmatach i cisnął na nie swoim ciężarem. Wskutek tego w trzech ścianach $A_1A_2A_3A_4$, $A_2B_2B_3A_3$ i $A_1B_1B_2A_2$ istnieć będą ciśnienia podporowe. Znajdziemy je. rozkładając ciężar pryzmatu Q na trzy składowe, z których każda będzie normalna, do jednej z wymienionych płaszczyzn.

Zanim jednakże przystąpimy do samego rozkładu siły Q , musimy wyjaśnić sprawę wielkości kątów krawędziowych w trójszcien-
nem narożu C utworzonym przez kierunki sił składowych, które dla krótkości oznaczymy przez D_1 , D_2 i D_3 .

Przesuńmy przez proste CD_1 i CD_2 płaszczyznę E , to ponieważ te proste z założenia są prostopadłe do płaszczyzn danych, przeto i nowa płaszczyzna pomocnicza będzie do tychże płaszczyzn prostopadła. Wynika z tego bezpośrednio, iż $E \perp A_2A_3$, jako do krawędzi przecięcia dwu płaszczyzn prostopadłych do trzeciej.

Tymczasem płaszczyzna $A_1B_1B_2A_2$, jako normalna do powierzchni, musi być prostopadła do płaszczyzny stycznej $A_1A_2A_3A_4$. Ponieważ zaś prosta A_2A_3 leży w płaszczyźnie stycznej i jest do krawędzi przecięcia się płaszczyzn normalnej i stycznej, t. j. do A_1A_2 prostopadła skierowana, musi istnieć warunek: $A_2A_3 \perp A_1B_1B_2A_2$. To prowadzi nas do konkluzji, że

$$A_1B_1B_2A_2 // E.$$

Wobec tego:

$$\sphericalangle D_1CD_2 = 180 - A_1A_2B_2 = \Theta.$$

Ponieważ zaś $CD_3 \perp A_1B_1B_2A_2$, $A_1B_1B_2A_2 // E$, przeto $CD_3 \perp E$. Z tego wynika, że:

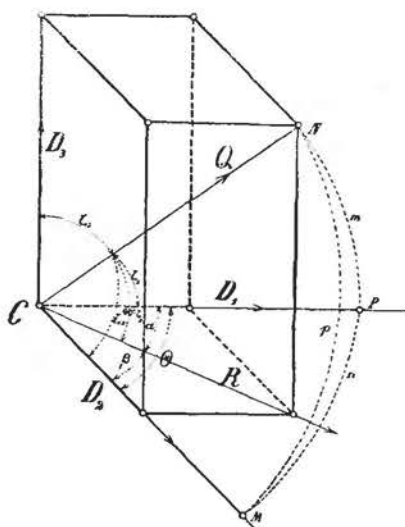
$$\sphericalangle D_1CD_3 = \sphericalangle D_2CD_3 = 90^\circ.$$

Mając w ten sposób wyznaczone kąty płaskie w narożu, możemy przystąpić do rozkładu siły. W tym celu wykreślimy równoległoscian sił, w którym pionowo działający ciężar Q będzie przekątnią (ryc. 16). Oznaczmy kąty nachylenia Q do jego składowych przez ζ_1 , ζ_2 i ζ_3 . Jeśli przez kierunki D_3 i Q przeprowadzimy płaszczyznę, to otrzymamy dwie składowe:

$$D_3 = Q \cos \zeta_3,$$

$$R = Q \sin \zeta_3.$$

Ażeby następnie rozłożyć siłę R na składowe D_1 i D_2 , musimy wprzód znaleźć kąty nachylenia α i β . Zatoczywszy z punktu



Rycina 16.

C kulę o promieniu równym jednostki, znajdziemy z prostokątnego trójkąta sferycznego:

$$\cos \zeta_2 = \cos (90 - \zeta_3) \cos \beta = \sin \zeta_3 \cos \beta.$$

Z tego:

$$\cos \beta = \frac{\cos \zeta_2}{\sin \zeta_3}.$$

W analogiczny sposób można wyprowadzić, że:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \zeta_1}{\sin \zeta_3}.$$

Z twierdzenia wstaw wynika:

$$R : D_1 = \sin (180 - \theta) : \sin \beta,$$

$$R : D_2 = \sin (180 - \theta) : \sin \alpha.$$

Podstawiając w tych proporcjach wartości:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\sin^2 \zeta_3 - \cos^2 \zeta_1}}{\sin \zeta_3},$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{\sin^2 \zeta_3 - \cos^2 \zeta_2}}{\sin \zeta_3},$$

otrzymamy:

$$D_1 = R \frac{\sqrt{\sin^2 \zeta_3 - \cos^2 \zeta_2}}{\sin \zeta_3 \sin \Theta},$$

$$D_2 = R \frac{\sqrt{\sin^2 \zeta_3 - \cos^2 \zeta_1}}{\sin \zeta_3 \sin \Theta}.$$

Po podstawieniu wartości za R , otrzymamy ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= Q \frac{\sqrt{\sin^2 \zeta_3 - \cos^2 \zeta_2}}{\sin \Theta}, \\ D_2 &= Q \frac{\sqrt{\sin^2 \zeta_3 - \cos^2 \zeta_1}}{\sin \Theta}, \\ D_3 &= Q \cos \zeta_3. \end{aligned} \right\} \text{III a.}$$

Jeśli siła Q pada w płaszczyznę E , t. j. jeśli $\angle \zeta_3 = 90^\circ$, przybiorą wzory postać:

$$D_1 = Q \frac{\sin \zeta_2}{\sin \Theta},$$

$$D_2 = Q \frac{\sin \zeta_1}{\sin \Theta},$$

$$D_3 = 0.$$

Wzory te uproszczone podaje za Leibnitzem Wittenbauer w swoim zbiorze zadań z technicznej mechaniki ¹⁾.

Chodzi teraz o zastąpienie funkcji kątów ζ_1 , ζ_2 i ζ_3 wyrażeniami, utworzonymi z pochodnych funkcji $F(xyz) = 0$.

Oznaczmy, jak poprzednio, współrzędne środka ciężkości przez x_0 y_0 z_0 , to kierunek D_1 jako prostopadły do płaszczyzny stycznej musi mieć równanie:

¹⁾ Ferdinand Wittenbauer: Aufgaben aus der technischen Mechanik. Berlin, 1907. Band I, p. 13.

$$\frac{X-x_0}{\frac{\partial F'}{\partial x}} = \frac{Y-y_0}{\frac{\partial F'}{\partial y}} = \frac{Z-z_0}{\frac{\partial F'}{\partial z}}.$$

Kąt ξ_1 jest kątem, jaki tworzy kierunek D_1 z kierunkiem Q czyli z osią ZZ'' , więc:

$$\cos \xi_1 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}}.$$

Równanie kierunku D_2 znajdziemy w następujący sposób. Przez prostą A_1A_4 , której równanie jest:

$$\frac{X-x}{0} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial F'}{\partial z}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F'}{\partial y}},$$

i przez prostą A_1B_1 o równaniu:

$$\frac{X-x}{x \cos \delta} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F'}{\partial y} \sin \delta} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F'}{\partial z} \sin \delta}$$

przesuniemy płaszczyznę.

Dostawy kierunkowe prostej A_1A_4 są:

$$\cos \lambda = 0, \quad \cos \mu = -\frac{\frac{\partial F'}{\partial z}}{K}, \quad \cos \nu = \frac{\frac{\partial F'}{\partial y}}{K},$$

dostawy zaś kierunkowe prostej A_1B_1 są:

$$\cos \lambda_1 = \cos \delta, \quad \cos \mu_1 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial y} \sin \delta}{K}, \quad \cos \nu_1 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial z} \sin \delta}{K}.$$

Wartości te wstawimy w równanie płaszczyzny przesuniętej:

$$x \begin{vmatrix} \cos \mu & \cos \nu \\ \cos \mu_1 & \cos \nu_1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \cos \nu & \cos \lambda \\ \cos \nu_1 & \cos \lambda_1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} \cos \lambda & \cos \mu \\ \cos \lambda_1 & \cos \mu_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Otrzymamy po wykonaniu działań:

$$x \frac{\sin \delta}{K^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] + y \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\cos \delta}{K} + z \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\cos \delta}{K} = 0.$$

Ale

$$K^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2,$$

więc:

$$x \sin \delta + y \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\cos \delta}{K} + z \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\cos \delta}{K} = 0,$$

albo:

$$x K \operatorname{tg} \delta + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Z tego znajdziemy równania śladów przesuniętej płaszczyzny a mianowicie:

$$x K \operatorname{tg} \delta + z \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

albo w innej postaci:

$$x = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{K \operatorname{tg} \delta} z,$$

$$y = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}} z.$$

Jeśli prosta D_2 ma być prostopadła do przesuniętej płaszczyzny, to rzuty jej muszą być prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny. Równania rzutów prostej D_2 będą:

$$X - x_0 = n (Z - z_0),$$

$$Y - y_0 = m (Z - z_0).$$

Z warunku zaś prostopadłości wynika, że

$$n = \frac{K \operatorname{tg} \delta}{\frac{\partial F'}{\partial z}}, \quad m = \frac{\frac{\partial F'}{\partial y}}{\frac{\partial F'}{\partial z}}.$$

Równanie zatem prostej D_2 będzie:

$$\begin{aligned} X - x_0 &= \frac{K \operatorname{tg} \delta}{\frac{\partial F'}{\partial z}} (Z - z_0), \\ Y - y_0 &= \frac{\frac{\partial F'}{\partial y}}{\frac{\partial F'}{\partial z}} (Z - z_0), \end{aligned}$$

lub w formie symetrycznej:

$$\frac{X - x_0}{K \operatorname{tg} \delta} = \frac{Y - y_0}{\frac{\partial F'}{\partial y}} = \frac{Z - z_0}{\frac{\partial F'}{\partial z}}.$$

Oznaczmy kąt nachylenia kierunku D_2 do osi układu przez ξ_2 , η_2 i ζ_2 , to będzie istnieć związek:

$$\frac{\cos \xi_2}{K \operatorname{tg} \delta} = \frac{\cos \eta_2}{\frac{\partial F'}{\partial y}} = \frac{\cos \zeta_2}{\frac{\partial F'}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{K^2 \operatorname{tg}^2 \delta + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\cos \delta}{K}.$$

Zatem będzie:

$$\cos \xi_2 = \sin \delta, \quad \cos \eta_2 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial y} \cos \delta}{K}, \quad \cos \zeta_2 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial z} \cos \delta}{K}.$$

Ostatecznie dla wyznaczenia dostaw kierunkowych dla prostej D_3 zauważymy, iż prosta ta jest prostopadła do normalnej płaszczyzny $A_1 B_1 B_2 A_2$, a przeto równoległa do prostej $A_1 A_4$, musi więc posiadać dostawy kierunkowe takie, jak i ta prosta:

$$\cos \xi_3 = 0, \quad \cos \eta_3 = -\frac{\frac{\partial F'}{\partial z}}{K}, \quad \cos \zeta_3 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial y}}{K}.$$

Jeśli wartości wynalezione dla funkcyi kątów ξ wstawimy we wzory I, otrzymamy składowe ciężaru przedstawione jako funkcyę współrzędnych powierzchni danej $F(xyz) = 0$.

Otrzymamy mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= -Q \frac{\partial F'}{K} \frac{\sin \delta}{\sin \Theta}, \\ D_2 &= -Q \frac{\partial F'}{K} \cdot \frac{\partial F'}{M} \cdot \frac{1}{\sin \Theta}, \\ D_3 &= -Q \frac{\partial F'}{K} \cdot \end{aligned} \right\} \text{IIIb.}$$

Wprowadzamy dla wygody odmienne zachowanie i użyjemy pomocniczego kąta z . Kładąc:

$$\frac{\partial F'}{K} = \sin z, \text{ otrzymamy } \frac{\partial F'}{K} = \cos z.$$

Ponadto musimy zauważyć, że kąt nachylenia normalnej do osi XX^{aw} wyrazi się wzorem:

$$\cos \xi_1 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial F'}{\partial x}}{M}.$$

Ponieważ z drugiej strony kąt $\xi = \varepsilon - 90_0$, gdzie ε oznacza kąt zawarty pomiędzy styczną a dodatnim kierunkiem osi XX^{aw} , mamy relację $\cos \xi = \sin \varepsilon$.

Wobec tego

$$\frac{\frac{\partial F'}{\partial x}}{M} = \sin \varepsilon.$$

Podstawiając te wyrażenia, otrzymamy:

$$D_1 = -Q \frac{\sin \delta}{\sin \Theta} \cdot \cos z,$$

$$D_2 = - Q \frac{1}{\sin \Theta} \cos \varkappa \sin \varepsilon,$$

$$D_3 = - Q \sin \varkappa.$$

Albo w najpierwotniejszej formie, po uwzględnieniu, że $\delta = \varepsilon - \Theta$,

$$\text{zaś } \cos \varepsilon = - \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}},$$

otrzymamy:

$$D_1 = \frac{Q \left[\frac{\partial F'}{\partial x} \cos \Theta + \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} \sin \Theta \right] \frac{\partial F'}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} \cdot \sin \Theta},$$

$$\text{III c. } D_2 = \frac{Q \frac{\partial F'}{\partial z} \frac{\partial F'}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} \cdot \sin \Theta},$$

$$D_3 = \frac{Q \frac{\partial F'}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}}.$$

Albo też:

$$D_1 = \frac{Q \left[\frac{\partial F'}{\partial x} \cos \Theta + K \sin \Theta \right] \frac{\partial F'}{\partial z}}{KM \sin \Theta},$$

$$D_2 = \frac{Q \frac{\partial F'}{\partial x} \cdot \frac{\partial F'}{\partial z}}{K M \sin \Theta},$$

$$D_3 = \frac{Q \frac{\partial F'}{\partial y}}{K}.$$

Jeśli krzywa powierzchnia jest dana równaniem:

$$x = f(y, z),$$

możemy podstawić w powyższych wzorach, jak również i innych wyprowadzonych poprzednio:

$$\frac{\partial F'}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F'}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F'}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z}. \quad 1)$$

Wobec tego będzie:

$$\sin \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$K_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

$$M_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

$$\sin \alpha_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{K_1}, \quad \cos \alpha_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{K_1}.$$

Wzory na składowe siły ciężkości będą:

$$\text{III d. } \left\{ \begin{aligned} D_1 &= \frac{Q \left[\cos \Theta + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \sin \Theta \right] \frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \sin \Theta}, \\ D_2 &= \frac{Q \frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \sin \Theta}, \\ D_3 &= \frac{Q \frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Mając równanie $x = f(y, z)$, możemy napisać $F(x, y, z) = x - f(y, z) = 0$, skąd otrzymamy powyższe podstawienia.

Albo też:

$$D_1 = \frac{Q [\cos \Theta + K_1 \sin \Theta] \frac{\partial f}{\partial z}}{K_1 M_1 \sin \Theta},$$

$$D_2 = \frac{Q \frac{\partial f}{\partial z}}{K_1 M_1 \sin \Theta},$$

$$D_3 = \frac{Q \frac{\partial f}{\partial y}}{K_1}.$$

Kąty nachylenia znaleźć możemy z odpowiednich równań kierunków D_1 , D_2 i D_3 . Zatem otrzymamy:

$$\cos \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}; \quad \cos \eta_1 = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos \zeta_1 = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos \xi_2 = \sin \delta; \quad \cos \eta_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \cos \delta}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

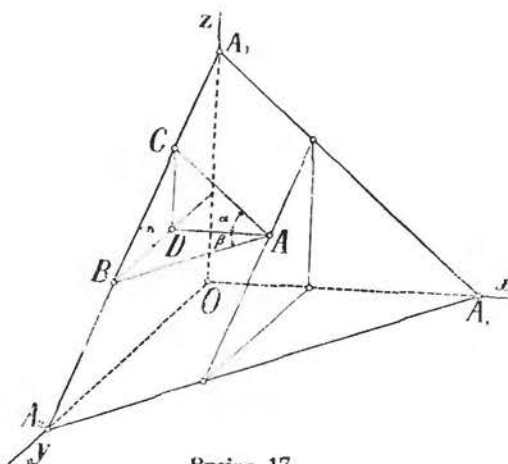
$$\cos \zeta_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \cos \delta}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos \xi_3 = 0; \quad \cos \eta_3 = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos \zeta_3 = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia znaczenie geometryczne pomocniczego kąta κ .

Mamy dane równanie $x = f(y, z)$, określające krzywą powierzchnię, na której leży punkt $A(x, y, z)$. Jeśli w tym punkcie przyłożymy płaszczyznę styczną do powierzchni, oznaczoną na rysunku (ryc. 17) jako płaszczyzna $A_1A_2A_3$, a następnie przekroimy



Rycina 17.

obadwa te utwory płaszczyzną $Y - y = 0$ i płaszczyzną $Z - z = 0$, otrzymamy dwie krzywe przekroju i dwie ich styczne AC i AB . Jak widać z rysunku:

$$\operatorname{tg} \angle BAX = -\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$\operatorname{tg} \angle CAX = -\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę kąty spełniające się z poprzednim do 180° , to otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{BD}{AD},$$

$$\operatorname{tg} CAD = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{CD}{AD}.$$

Dzieląc obie równości przez siebie, otrzymamy:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Ponieważ zaś wedle przyjętego znakowania:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \operatorname{tg} z,$$

przeto możemy napisać:

$$\operatorname{tg} z = \frac{CD}{BD}.$$

Wobec tego widzimy, że kąt $z = CBD$ jest kątem, jaki zawiera ślad płaszczyzny stycznej na płaszczyźnie rzutów YZ z osią YY^{00} .

Mimowoli figura ta przypomina pracę prof. Gorjaczkina i jego wyjaśnianie działania pługa ¹⁾. Prof. Gorjaczkin uczy, że w każdym punkcie krzywej powierzchni pługa możemy pomyśleć sobie trzy kliny, których jednoczesne działanie daje ten sam efekt, jaki wywołuje krzywa powierzchnia pługa obserwowana w danym punkcie. Pierwszy klin ma kąt cięcia $\alpha = \angle CAD$, drugi $\beta = BAD$, trzeci zaś $z = CBD$. Trzy czynności, wykonywane przez pług: podeinanie skiby, odsuwanie na bok i odwracanie, można wykonać także trzema owymi klinami. Pierwszy o kącie cięcia α podeina i podnosi ziemię, drugi o kącie cięcia β odsuwa ją ku brózdzie, trzeci nakoniec, nachylony pod kątem z , odwraca skibę na bok.

Kąty zaostrenia klinów byłyby stałe tylko wtedy, gdybyśmy mieli do czynienia z płaszczyzną; przy krzywych powierzchniach muszą być one zmienne.

¹⁾ W. Gorjaczkin: Oczerki sielskochoziajstwiennych maszin i orudij. S. Petersburg, 1906.

W naszych wywodach doszliśmy do tych samych kątów i pokazaliśmy, jak od jednego z nich zależą składowe siły ciężkości poruszanej bryły ziemi. Podobnie moglibyśmy wprowadzić w rachunek dwa inne kąty α i β i wtedy wzory nasze przekształciłyby się na inne. Wystarczy w tym celu użyć podstawień:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Przykład I. (Płaszczyzna). A) Mając dane równanie płaszczyzny w formie: $x = ay + bz + c$, możemy znaleźć pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial y} = a$, $\frac{\partial f}{\partial z} = b$.

Wtedy otrzymamy:

$$D_1 = \frac{Q [\cos \Theta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta] b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta},$$

$$D_2 = \frac{Q b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} \sin \Theta},$$

$$D_3 = \frac{Q a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Kierunki oznaczymy równaniami:

$$\cos \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \cos \eta_1 = \frac{-a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \cos \zeta_1 = \frac{-b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos \xi_2 = \sin \delta, \quad \cos \eta_2 = \frac{a \cos \delta}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \zeta_2 = \frac{b \cos \delta}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \xi_3 = 0, \quad \cos \eta_3 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \zeta_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

B) Jeśli płaszczyzna jest dana równaniem:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

wtedy znajdziemy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = C.$$

Podstawiawszy to w odpowiednie wzory, otrzymamy:

$$D_1 = \frac{Q |A \cos \Theta + \sqrt{B^2 + C^2} \sin \Theta| C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{B^2 + C^2} \sin \Theta}.$$

$$D_2 = \frac{Q AC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{B^2 + C^2} \sin \Theta},$$

$$D_3 = \frac{QB}{\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

o kierunkach wyznaczonych wzorami:

$$\cos \xi_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \eta_1 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \zeta_1 = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos \xi_2 = \sin \delta, \quad \cos \eta_2 = \frac{B \cos \delta}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \quad \cos \zeta_2 = \frac{C \cos \delta}{\sqrt{B^2 + C^2}};$$

$$\cos \xi_3 = 0, \quad \cos \eta_3 = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \quad \cos \zeta_3 = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

Przykład II. (Powierzchnia walcowa). Mając daną powierzchnię walcową równaniem:

$$\frac{(x \cos \varphi + y \sin \varphi - p)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

znajdziemy:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = \frac{a}{b} \sqrt{-z^2 + b^2}.$$

$$x = (p + \frac{a}{b} \sqrt{-z^2 + b^2}) \sec \varphi - y \tan \varphi = f(yz).$$

Pochodne cząstkowe będą:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\tan \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{a}{b} \frac{z \sec \varphi}{\sqrt{-z^2 + b^2}}.$$

Pomocnicze elementy K_1 i M_1 obliczymy z wzorów:

$$K_1 = \sqrt{\frac{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2(b^2 - z^2)}}, \text{ gdzie } c^2 = a^2 - b^2,$$

$$M_1 = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{z^2 c^2 + b^4}{b^2(b^2 - z^2)}}.$$

a następnie znajdziemy składowe ciężaru Q :

$$D_1 = - \frac{Qa [b \sqrt{b^2 - z^2} \cos \Theta + \sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \sin \Theta]}{\sqrt{b^4 + z^2 c^2} \cdot \sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \sin \Theta},$$

$$D_2 = - \frac{Qaz}{\sqrt{b^4 + z^2 c^2} \cdot \sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \sin \Theta},$$

$$D_3 = - \frac{Qb \operatorname{tg} \varphi \sqrt{b^2 - z^2}}{\sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Kierunki składowych obliczymy z wzorów:

$$\cos \xi_1 = b \cos \varphi \sqrt{\frac{b^2 - z^2}{z^2 c^2 + b^4}}; \quad \cos \eta_1 = -b \sin \varphi \sqrt{\frac{b^2 - z^2}{z^2 c^2 + b^4}};$$

$$\cos \xi_1 = - \frac{az}{\sqrt{z^2 c^2 + b^4}},$$

$$\cos \xi_2 = \sin \delta; \quad \cos \eta_2 = \frac{-\operatorname{tg} \varphi \sqrt{b^2(b^2 - z^2)} \cdot \cos \delta}{\sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

$$\cos \zeta = \frac{-az \cos \delta}{\cos \varphi \sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

$$\cos \xi_3 = 0; \quad \cos \eta_3 = \frac{az}{\cos \varphi \sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

$$\cos \zeta_3 = \frac{-\operatorname{tg} \varphi \sqrt{b^2(b^2 - z^2)}}{\sqrt{z^2(c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2) + b^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Dla walca kołowego mamy $a^2 = b^2 = r^2$, $c^2 = 0$, otrzymamy przeto składowe:

$$D_1 = - \frac{Q [\sqrt{r^2 - z^2} \cos \Theta + \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2} \cdot \sin \Theta]}{r^2 \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2} \cdot \sin \Theta},$$

$$D_2 = - \frac{Qz}{r^2 \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2} \sin \Theta},$$

$$D_3 = - \frac{Q \operatorname{tg} \varphi \sqrt{r^2 - z^2}}{\sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2}}$$

i ich dostawy kierunkowe:

$$\cos \xi_1 = \frac{\cos \varphi}{r} \sqrt{r^2 - z^2}; \quad \cos \eta_1 = \frac{\sin \varphi}{r} \sqrt{r^2 - z^2}; \quad \cos \zeta_1 = - \frac{z}{r};$$

$$\cos \xi_2 = \sin \delta; \quad \cos \eta_2 = - \frac{\sqrt{r^2 - z^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \delta}{\sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2}};$$

$$\cos \zeta_2 = \frac{-z \cos \delta}{\cos \varphi \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2}};$$

$$\cos \xi_3 = 0; \quad \cos \eta_3 = \frac{z}{\cos \varphi \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2}}; \quad \cos \zeta_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi \sqrt{r^2 - z^2}}{\sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + z^2}}.$$

Przykład III. (Czasza kulista). Weźmiemy pod uwagę równanie kuli o współrzędnych środka $x = \xi$, $y = 0$, $z = r$, zatem ogólne równanie się kuli przedstawi się w postaci:

$$(x - \xi)^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2.$$

Pochodne cząstkowe będą:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - \xi), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - r),$$

Podstawiając te wartości w równanie na składowe ciężaru Q , otrzymamy:

$$D_1 = \frac{Q [(x - \xi) \cos \Theta + \sqrt{y^2 + (z - r)^2} \sin \Theta] (z - r)}{r \sqrt{y^2 + (z - r)^2} \cdot \sin \Theta},$$

$$D_2 = \frac{Q (x - \xi) (z - r)}{\sqrt{y^2 + (z - r)^2} \cdot \sin \Theta},$$

$$D_3 = \frac{Q y}{\sqrt{y^2 + (z - r)^2}}.$$

Dostawy kierunkowe obliczymy z wzorów:

$$\cos \xi_1 = \frac{x - \xi}{r}; \quad \cos \eta_1 = \frac{y}{r}; \quad \cos \zeta_1 = \frac{z - r}{r}.$$

$$\cos \xi_2 = \sin \delta; \quad \cos \eta_2 = \frac{y \cos \delta}{\sqrt{y^2 + (z - r)^2}}; \quad \cos \zeta_2 = \frac{(z - r) \cos \delta}{\sqrt{y^2 + (z - r)^2}},$$

$$\cos \xi_3 = 0; \quad \cos \eta_3 = \frac{z - r}{\sqrt{y^2 + (z - r)^2}}; \quad \cos \zeta_3 = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (z - r)^2}}.$$

Przykład IV. (Powierzchnia śrubowa). Dla powierzchni śrubowej, danej równaniem:

$$x = a \operatorname{arctg} \frac{z}{y}.$$

znajdziemy:

$$dx = \frac{ad \left(\frac{z}{y} \right)}{1 + \frac{z^2}{y^2}} = a \cdot \frac{ydz - zdy}{y^2 + z^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{az}{y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{ay}{y^2 + z^2}; \quad K_1 = \frac{a}{\sqrt{y^2 + z^2}}; \quad M_1 = \sqrt{\frac{a^2 + y^2 + z^2}{y^2 + z^2}}$$

Składowe siły Q będą:

$$D_1 = \frac{Qy [\cos \Theta \sqrt{y^2 + z^2} + a \sin \Theta]}{\sqrt{y^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2 + a^2} \cdot \sin \Theta},$$

$$D_2 = \frac{Qy}{\sqrt{y^2 + z^2 + a^2} \sin \Theta},$$

$$D_3 = \frac{Qz}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Dostawy kierunkowe składowych:

$$\cos \xi_1 = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{y^2 + z^2 + a^2}}; \quad \cos \eta_1 = \frac{az}{\sqrt{(y^2 + z^2 + a^2)(y^2 + z^2)}};$$

$$\cos \zeta_1 = -\frac{ay}{\sqrt{(y^2 + z^2 + a^2)(y^2 + z^2)}};$$

$$\cos \xi_2 = \sin \delta; \quad \cos \eta_2 = -\frac{z \cos \delta}{\sqrt{y^2 + z^2}}; \quad \cos \zeta_2 = \frac{y \cos \delta}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$\cos \xi_3 = 0; \quad \cos \eta_3 = -\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}; \quad \cos \zeta_3 = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Równania, wyprowadzone powyżej, można uważać za zasadnicze, odnoszące się do ruchu powierzchni krzywej w środowisku ziemnym. Obejmują one przypadek ogólny wyznaczenia ciśnień podporowych w narożu trójsięciennym.

VIII. Opór wgniatańia ziemi.

Dowolne narzędzie, zagłębione w ziemię, pozostaje pod wpływem siły zewnętrznej P , która działa w pionowej płaszczyźnie ruchu równoległej do rzutni pionowej XZ . Oprócz tej siły działa ciężar własny narzędzia G , tudzież wypadkowa ze wszystkich oporów W , jakie narzędzie napotyka w środowisku ziemnym.

Ponieważ wielkość W jest zmienna, przeto i siła pociągowa P musi się zmieniać ciągle. To też musimy rozpatrywać kolejno następujące po sobie fazy pracy technologicznej narzędzia. Przypatrując się bowiem procesowi technologicznemu uprawy ziemi, różnimy z łatwością dwa główne okresy powtarzające się po sobie w stałym następstwie. Pierwszy okres obejmuje odcięcie skiby, przyczem tę nazwę rozumiemy jak najszerszej, odnosząc ją do każdej masy ziemi, oddzielonej narzędziem od calizny. Pojęcie skiby w technologii mechanicznej ziemi odpowiada pojęciu wióra w technologii metalu i drzewa i oznacza wogóle część materiału odjętą ostrzem narzędziem od powierzchni obrabianej. W czasie odcinania wnika narzędzie w ziemię, zmieniając wzajemne położenie cząstek, które usuwają się, robiąc miejsce dla przejścia narzędzia. Bryła zatem ziemi ulega odkształceniom tylko o tyle, o ile materiał zostanie wgnieciony w dalsze warstwy przez odcinające narzędzie, lub też przez nieznaczną zmianę położenia odciętej już masy. Przy kroju i przy lemieszu ten pierwszy okres będzie zawierał w sobie tylko wgnięcie w caliznę takiej masy ziemi, jaką wyprzeć zdoła poruszające się narzędzie. Jednakowoż już przy bardzo płytkich podorywkach można skonstatować zmianę położenia odciętej masy. Pochodzi to stąd, że w cienką warstwę ziemi nie można wcisnąć tyle materiału, ile go wyprze lemiesz, czyli innemi słowy spójność warstwy o nieznaczonej grubości będzie zawsze mniejsza, aniżeli ciśnienie, potrzebne do wgnięcia materiału. Wskutek tego skiba roz-

kruszy się i dopiero w takim stanie przechodzi na dalsze punkty swojego toru na powierzchni narzędzia.

Drugi okres pracy narzędzia obejmuje zmianę położenia odciętej bryły ziemi. Ponieważ ta przedstawia się w kształcie belki utwierdzonej stałe na jednym swoim końcu, przeto narzędzie, zmieniając położenie jej w przestrzeni, musi belkę ową zginać i skręcać, czyli wogóle odkształcać. Stąd też drugi okres może nosić nazwę okresu deformacyjnego.

Ale i w ciągu tego samego okresu suma oporów nie jest stałą i nie można mówić o pewnej stałej sile pociągowej, któraby te opory przewyżczała, gdyż ta stosuje się ściśle do wielkości napotykanym oporów i musi być z nimi zawsze w równowadze.

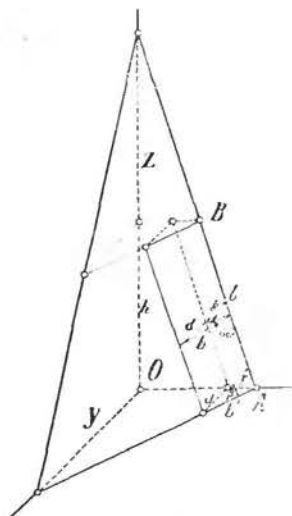
Ażby zrozumieć pierwszy okres musimy cofnąć się wstecz i przypomnieć to, co powiedziano o kierunkach usuwiskowych w materiale. Jeśli powierzchnia jaka ciśnie na materiał ziemny, wtedy koniecznem jest znalezienie kierunku oddziaływania. Ponieważ przy zgniataniu, względnie zaś przy wgniataniu materiału z jednych warstw w dalsze, wchodzi w grę i tarcie, dlatego przy działaniu siły zewnętrznej normalnem do płaszczyzny zetknięcia, jak to jest przy próbach ze zgniataniem ziemi, a także i przy ugniataniu roli walcem, zadanie może być nieoznaczone. Bez tarcia kierunek normalny byłby kierunkiem oddziaływania. Skoro wciągniemy w rachunek tarcie, nie możemy tu z góry powiedzieć, w jakim kierunku nastąpi przesunięcie względne materiału po płaszczyźnie. Wszystkie możliwe przesunięcia na płaszczyźnie będą przesunięciami przygotowanymi.

Jeśli jednakże działanie siły będzie skośnie skierowane do płaszczyzny zetknięcia i jeśli wiemy, że narzędzie pójdzie rzeczywiście w kierunku wskazanym przez nią, to możemy w danym punkcie płaszczyzny znaleźć i kierunek spodziewanego przesunięcia materiału. Przesuwając bowiem przez normalną wystawioną w danym punkcie płaszczyzny i przez prostą równoległą do kierunku ruchu płaszczyznę normalną, możemy znaleźć krawędź przecięcia się jej z daną płaszczyzną i ta wskaże nam chwilowy tor punktu. Kierunek ruchu będzie zwrócony ku górze, będzie to zatem ruch wstępujący (o ile tylko płaszczyzna jest wstecz pochylona). Ciśnienie normalne płaszczyzny na materiał będzie zwrócone ku górze (rys. 18), kierunek zaś tarcia w dół wzdłuż długości równi pochyłej, utworzonej przez wspomnianą krawędź przecięcia się obydwu płaszczyzn. Kierunek reakcyi M wypadkowy z kierunku normalnego i stycznego, będzie zwrócony ku górze i będzie zawierać z kierunkiem ruchu kąt ostry. Przy ukośnej płaszczyźnie ruchomej mamy zatem jednoznacznie podany kierunek ciśnienia. Ponieważ materiał rozsuwa się partjami w dwu kierunkach usuwiskowych sprzężonych, a kierunek oddziaływania połowi kąt zawarty pomiędzy kierunkami

każdy z punktów płaszczyzny AB znajduje się w innym stadium zgniatania. Podczas gdy punkt A zaczyna swą drogę, punkt B już ją zakończył.

Opory przeciwko zgniataniu będą zatem równe powierzchni zgniatającej, pomnożonej przez średnie normalne natężenie w materiale.

$$W_1 = F \varepsilon_m.$$



Rycina 19.

Oznaczmy (rys. 19) przez b szerokość ostrza, przez l długość kroju zanurzoną, to nie uwzględniając praktykowanego zaokrąglenia grzbietu kroju przy samym dole, możemy przyjąć:

$$F' = lb.$$

Ale

$$l = \frac{h}{\sin \gamma}, \text{ zaś } b = \frac{d}{\sin \alpha},$$

gdzie h oznacza wielkość zanurzenia, γ jest kątem nachylenia ostrza kroju do poziomu, d drubością grzbietu kroju, kąt zaś α jest kątem cięcia kroju.

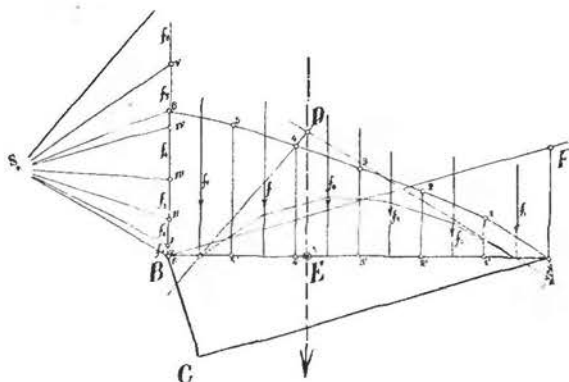
Będzie zatem:

$$F' = \frac{hd}{\sin \alpha \sin \gamma},$$

a także:

$$W_1 = \frac{hd}{\sin \alpha \sin \gamma} \varepsilon_m.$$

Tutaj konieczne jest dokładniejsze wyjaśnienie, dotyczące się ilości ε_m . Jak powiedziano, będzie to średnie ciśnienie normalne, napotykane przez ruchomą płaszczyznę i liczone na jednostkę. Jeśli weźmiemy pod uwagę (rys. 19) klin wgniatany w ziemię, to zobaczymy, że klin ten ma zawsze przed sobą trójkątny pryzmat ziemi, który stanowi jego sferę działania (ABM). W każdym punkcie długości AB będzie panowało odmienne ciśnienie, zależnie od tego, jak daleko postąpiła deformacja. Tuż przy punkcie A rozpoczyna się dopiero zginięcie i normalne ciśnienie będzie zerem. Ciśnienie to wzrasta w miarę postępu deformacji i na końcu przy punkcie B osiągnie swoje maximum równe mocy na zginięcie ε_2 . Gdyby istniała proporcjonalność natężeń normalnych do wielkości odkształceń, to natężenie jednostkowe w dowolnym punkcie byłoby odwrotnie proporcjonalne do tej długości normalnej, jaka leży na polu



Rycina 20.

kłina, n. p. w punkcie K , byłyby natężenie $\varepsilon = LK \cdot \alpha$, gdzie α oznacza współczynnik proporcjonalności.

Przy zachodzącym tu jednak procesie technologicznym natężenia normalne przechodzą daleko poza granicę proporcjonalności, wskutek czego jedynym sposobem, jaki istnieje, jest posłużenie się dyagramem odkształceń. Nie będzie i to metoda ścisła, gdyż popełnimy niewątpliwie pewien błąd, przenosząc obserwacje odkształceń dokonywane na małych próbkach na zjawiska, zachodzące w zwartej masie ziemi, mimo to jednak rezultat nie odbiegnie daleko od rzeczywistości. Metoda jest następująca:

Weźmiemy pod uwagę przekrój kroju zapomocą płaszczyzny przechodzącej przez prostą normalną i przez prostą równoległą do kierunku ruchu (NX') i dyagram odkształceń dla dowolnej danej

ziemi uzyskany przy jej zgniataniu (ryc. 11 i ryc. 20). Postaramy się nakreślić nowy dyagram dla odkształceń pod wpływem kroju przy skróceniu włókien materiału o długość AF' . Ciśnienia wzdłuż boku AB zmieniają się zupełnie tak, jak to wskazuje dyagram, możemy zatem, dzieląc podstawę dyagramu odkształceń i bok AB na równą ilość części, oznaczyć w odpowiadających sobie punktach natężenia wzięte z dyagramu. Otrzymany dyagram będzie miał jednak zupełnie inne znaczenie, aniżeli dyagram pierwotny i podobieństwo ich będzie czysto tylko formalne. W pierwotnym bowiem dyagramie powierzchnia oznacza pracę odkształcenia, tutaj zaś oznacza nam ciśnienie wypadkowe na bok AB . Uzasadnimy to w następujący sposób: Naniesione ciśnienia, wzięte z dyagramu odkształceń, oznaczają nam wzdłuż długości boku AB zmienne ciśnienia normalne, których wielkość zawisa od dalekości wykonanego już skrócenia. Ciśnienia te jednostkowe, pomnożone przez element długości, dają nam ciśnienie na ten element wywierane. Biorąc na długości AB odcinki równej długości, będziemy niezawodnie mieli ciśnienia jednostkowe zmienne w obrębie nawet jednej podziałki, możemy jednak zastąpić je ciśnieniem średnim, które będzie równo działało na całej długości. Postąpienie takie, o ile chodzi o znalezienie wielkości i kierunku ciśnienia wypadkowego, jest bardzo użyteczne. Jeśli oznaczymy przez Δh element długości boku, a przez $p_1, p_2 \dots p_n$ ciśnienia jednostkowe w punktach podziału, to bez żadnego dowodzenia wiemy, iż suma powierzchni elementarnych dyagramu będzie przedstawiać się wypadkową.

Ażeby graficznie wyznaczyć środek ciśnienia, zastosujemy metodę wieloboku sznurowego. Podzieliwszy długość AB na dowolną ilość części i poprowadziwszy rzędne dyagramu, obliczymy w dowolny sposób powierzchnię każdej elementarnej figury. Cyfry uzyskane w ten sposób muszą dać po zesumowaniu całkowite ciśnienie wypadkowe na bok AB . Umieścimy w środku ciężkości każdej elementarnej powierzchni siłę proporcjonalną do powierzchni, to otrzymamy szereg sił równoległych do siebie $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, które cisną na bok AB . Na odcinku $0-VI$ odetniemy je po kolei, a obrawszy dowolny biegun S , wykreślimy wielobok sił, a następnie równoległe do oddzielnych promieni wielobok sznurowy. Jak wiadomo z zasad graficznej statyki, przetną się skrajne boki wieloboku sznurowego w punkcie, przez który musi przechodzić wypadkowa sił działających. Kierunek jej musi wobec równoległości wszystkich ciśnień być taki sam, jak wszystkich składowych. Jeśli przeto znajdziemy punkt przecięcia D i przezeń wykreślimy prostą równoległą do kierunku ciśnień, to otrzymamy w rezultacie punkt E , w którym będzie znajdował się środek ciśnienia deformowanego materiału na bok AB .

Wielkość siły wypadkowej możemy określić zatem jako ilo-

czyn powierzchni przez ciśnienie średnie, gdyż zawsze istnieć będzie warunek

$$W = l \kappa_m,$$

gdzie W oznacza ciśnienie wypadkowe, l oznacza długość boku AB , względnie zaś powierzchnię jednostki bieżącej kroju, zaś κ_m oznacza ciśnienie średnie. To ostatnie możemy znaleźć zawsze wprost z dyagramu odkształceń dzieląc powierzchnię dyagramu przez podstawę, lub też, jeśli byłoby to wygodniej, z relacji $\kappa_m = \frac{\Sigma(f)}{l}$.

Ażeby rozwiązać zagadnienie, musimy ustawić równanie kroju, jako płaszczyzny, przechodzącej (ryc. 19) przez proste b i l . Równania prostych, przechodzących przez wspólny punkt $A(c, 0, 0)$, będą:

$$b = \frac{X - c}{1} = \frac{Y - 0}{-\operatorname{tg} \beta} = \frac{Z - 0}{0},$$

$$l = \frac{x - c}{1} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{-\operatorname{tg} \gamma}.$$

Równanie zatem płaszczyzny kroju otrzyma kształt:

$$\begin{vmatrix} x - c & y & z \\ 1 & -\operatorname{tg} \beta & 0 \\ 1 & 0 & -\operatorname{tg} \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

albo:

$$(x - c) \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + y \operatorname{tg} \gamma + z \operatorname{tg} \beta = 0.$$

Dzieląc równanie przez współczynnik $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$, otrzymamy po ustawieniu:

$$x = -y \operatorname{cotg} \beta - z \operatorname{cotg} \gamma + c,$$

albo z uwagi, że $\operatorname{cotg} \beta = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin \gamma}$,

$$x = -\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin \gamma} y - \operatorname{cotg} \gamma z + c.$$

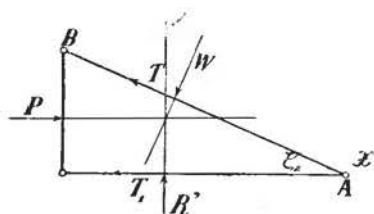
Przekrój tej płaszczyzny wykonany płaszczyzną przechodzącą przez normalną w danym punkcie i przez prostą równoległą do osi XX_{os} , będzie miał równanie:

$$\frac{X - x}{K^2} = \frac{Y - y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-\frac{\partial f}{\partial z}}$$

o dostawach kierunkowych:

$$\cos \xi_2 = \frac{K}{M}; \quad \cos \eta_2 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{KM}; \quad \cos \zeta_2 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{KM}.$$

Materyał będzie przesuwiał się po płaszczyźnie wzdłuż powyższej prostej i w ten sposób będziemy mogli uważać ruch punktu materyalnego jako ruch po równi pochyłej, posiadającej kąt nachylenia do osi XX^{00} , t. j. do kierunku ruchu ξ_2 . Inaczej mówiąc:



Rycina 21.

zastąpimy działanie kroju działaniem klina o kącie zaostrenia ξ_2 , który jest zarazem kątem cięcia. Na ten klin będzie działać siła zewnętrzna P w kierunku poziomym i opór przeciwko zgniataniu W normalny do powierzchni skośnej klina. Do tych sił musimy dodać koniecz-
nie oddziaływanie toru narzę-

dzia R' , ażeby uzyskać możność równowagi. W obydwu ścianach kroju będą działać tarcia $T = W\varphi$, względnie zaś $R'\varphi$.

Ustawimy równanie równowagi (ryc. 21):

$$P = W \sin \xi_2 + R\varphi + T \cos \xi_2^1),$$

$$R = W \cos \xi_2 - T \sin \xi_2.$$

Stąd:

$$P = W \sin \xi_2 + W\varphi \cos \xi_2 + W\varphi \cos \xi_2 - W\varphi^2 \sin \xi_2,$$

albo:

$$P = W(\sin \xi_2 + 2\varphi \cos \xi_2 - \varphi^2 \sin \xi_2).$$

Poprzednio znaleźliśmy dla kroju:

$$\cos \xi_2 = \frac{K}{M}, \text{ wobec czego } \sin \xi_2 = \frac{1}{M}.$$

Ponieważ zaś w danym przypadku

$$x = -\frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma} y - z \cotg \gamma + c, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\cotg \gamma.$$

¹⁾ Porównaj: Dr. Julius Weisbach: Lehrbuch der theoretischen Mechanik. Braunschweig, 1896.

przeto:

$$K = \sqrt{\frac{\cotg^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} + \cotg^2 \gamma} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} =$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma},$$

$$M = \sqrt{1 + K^2} = \frac{1}{\sin \alpha \sin \gamma}.$$

Zatem otrzymamy:

$$\cos \xi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}; \quad \sin \xi_2 = \sin \alpha \sin \gamma.$$

Podstawiając te ilości na wzór na P , otrzymamy:

$$P = W(\sin \alpha \sin \gamma + 2\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} - \varphi^2 \sin \alpha \sin \gamma),$$

albo:

$$P = W \{ (1 - \varphi^2) \sin \alpha \sin \gamma + 2\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \}.$$

Jeśli w tym wzorze podstawimy wartość za

$$W = \frac{hd}{\sin \alpha \sin \gamma} \kappa_m,$$

otrzymamy:

$$P = hd \left\{ (1 - \varphi^2) + \frac{2}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} \kappa_m.$$

Ten wzór służyć może jednocześnie do obliczenia pracy. Mnożąc obie strony równania przez drogę s , otrzymamy wielkość. Jeśli jednakże droga będzie równa jedności, wtedy możemy napisać wprost wzór na pracę deformacyjną na drodze narzędzia równej jedności:

$$A_1 = ha \left\{ 1 - \varphi^2 + \frac{2\varphi}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} \kappa_m,$$

przyczem musimy zawsze pamiętać, iż strona prawa równania będzie posiadała dymensję $kg \times cm$, $kg \times dm$, $kg \times m$ i t. d.

Drugim oporem, jaki napotka narzędzie, będzie opór ostrza. Określimy go jako sumę nateżeń stycznych, powstających w ściśniętym przekroju, powiększonych o tarcie ostrza.

Oznaczmy jak poprzednio przez h głębokość zanurzenia, przez l długość ostrza, przez γ kąt nachylenia ostrza do poziomu. Gdyby

ostrze ustawione było prostopadle do kierunku ruchu, t. j. gdyby istniał warunek $\gamma = 90^\circ$, wtedy opór ostrza byłby równy iloczynowi $h\tau$, gdzie τ oznacza natężenie styczne w ścinanym przekroju. Natężenia te oczywiście musiałyby przeciwdziałać usiłowanemu ruchowi narzędzia, byłyby więc równoległe do kierunku ruchu, ale w stronę przeciwną skierowane. Skoro jednak ostrze jest pochylone, wtedy każde natężenie jednostkowe rozłoży się, jak na równi pochyłej, na dwie składowe: normalną do ostrza τ_1 i styczną do niego s_1 . Otrzymamy następujące relacje:

$$s_1 = \tau \cos \gamma, \quad \tau_1 = \tau \sin \gamma,$$

oprócz tego zaś tarcie na ostrzu:

$$T = \tau_1 \varphi = \varphi \tau \sin \gamma.$$

Opór działający w kierunku przeciwnym ruchowi narzędzia będzie:

$$w = \tau_1 \sin \gamma + \delta_1 \cos \gamma + \tau_1 \varphi \cos \gamma.$$

Podstawiając odpowiednie wartości, otrzymamy:

$$w = \tau \sin^2 \gamma + \tau \cos^2 \gamma + \tau \varphi \sin \gamma \cos \gamma,$$

albo:

$$w = \tau + \tau \varphi \sin \gamma \cos \gamma.$$

Ten opór jednostkowy rozłożony jest na całej długości ostrza, sumując go zatem, otrzymamy opór całkowity:

$$W_2 = w l = w \frac{h}{\sin \gamma},$$

albo:

$$W_2 = h \frac{1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} \cdot \tau.$$

Ponieważ zaś przy ścinaniu nastąpić musi zerwanie materiału, wskutek czego τ musi dojść do wielkości równej mocy danego materiału na ścinanie τ_3 , przeto napiszemy jako wzór ostateczny:

$$W_2 = h \frac{1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} \tau_3.$$

Pracę na jednostkę drogi narzędzia wyrazimy analogicznie do poprzedniego wzoru:

$$A_1 = h \frac{1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} \tau_3.$$

Obadwa opory P_1 i W_2 działają równolegle do siebie i są w tę samą stronę skierowane. Łączny zatem opór kroju wyniesie:

$$(P_1 + W_2),$$

albo wielkość siły pociągowej:

$$P = hd \left\{ 1 - \varphi^2 + \frac{2\varphi}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} \kappa_m + \\ + h \frac{1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} \kappa_3.$$

Przykład: Dany krój nożowy, którego przekrój normalny do ostrza jest trójkątem prostokątnym. Dłuższa przyprostokątnia niechaj wynosi 80 mm, kąt zaostrenia $\alpha = 15^\circ$, kąt pochylenia ostrza do terenu $\gamma = 60^\circ$; obliczyć opory, jakie napotka krój w ziemi, jeśli głębokość zanurzenia wyniesie 150 mm, ziemia zaś jest zwięzłą łąską, dla której mamy dany dyagram odkształceń przy zgniataniu, daną moc na ścinanie $\kappa_3 = 102 \text{ g/cm}^2$ i współczynnik tarcia ziemi o żelazo $\varphi = 0.750$.

Z danych ilości obliczymy grubość grzbietu kroju $d = 21.4 \text{ mm}$, z dyagramu zaś po splanimetrowaniu otrzymamy (ryc. 12) powierzchnię dyagramu $F' = 84.6 \text{ cm}^2$. Dzieląc tę ilość przez długość podstawy dyagramu 14.0 cm, otrzymamy rzędną 6.04 cm jako wysokość prostokąta, którego podstawa jest równa podstawie dyagramu, zaś powierzchnia ma się równać jej powierzchni. Ponieważ w wykresie przyjęto podziałkę dla siły 1 mm = 10 g/cm², przeto wartość rzędnej wynosi:

$$\kappa_m = 604 \text{ g/cm}^2.$$

Podstawiając wartości we wzór na P_1 , otrzymamy:

$$P_1 = 134.932 \text{ kg}.$$

Podobnie znajdziemy z odpowiedniego wzoru opór ostrza:

$$W_2 = 2.340 \text{ kg}.$$

Razem zatem siła pociągowa w danych warunkach wyniesie:

$$P = 137.372 \text{ kg}.$$

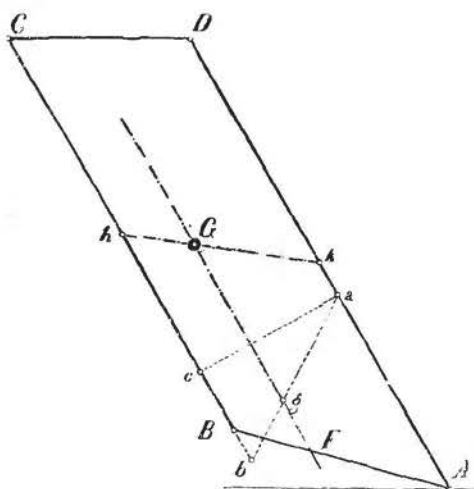
Wynik ten rachunkowy nie odbiega od dat, podanych z obserwacji przez Gasparina ¹⁾:

¹⁾ L. Paul Lázár: Geräte und Maschinen zur Boden und Pflanzenkultur. Leipzig, 1885.

Rodzaj ziemi	Siła pociągowa w <i>kg</i> przy zanurzeniu		
	75 mm	150 mm	190 mm
Średnia uprawna ziemia.	16·25	41·25	66·25
Nieco sucha ziemia . .	46·25	106·25	159·62
Sucha przerośnięta ziemia	62·75	155·25	410·62

Dla wyznaczenia punktu zaczepienia wypadkowego oporu nie podajemy analitycznego rozwiązania, nie przesądzając czy ono jest możliwe, ograniczamy się do podania łatwego graficznego sposobu. W tym celu nakreślmy pracującą ścianę zanurzonego w ziemi kroju (ryc. 22).

Jak wiadomo, wzdłuż każdej z prostych równoległych do AB (przy założeniu jednakowych wszędzie właściwości materiału ziem-



Rycina 22.

nego) będą stałe ciśnienia normalne jednostkowe: najmniejsze, bo równe zeru, wzdłuż krawędzi AD , największe zaś wzdłuż krawędzi BC , równe mocy na zgniatanie. Jeślibyśmy te ciśnienia, równoległe do siebie, sumowali wzdłuż prostych równoległych do AD , otrzymalibyśmy szereg częściowych wypadkowych zaczepiających w punktach, które połowią owe proste równoległe.

Prosta, łącząca wszystkie punkty połowiące (hk), musi być jednym miejscem geometrycznym punktu przyłożenia oporów do kroju.

Drugie miejsce geometryczne znajdziemy z następującego rozważania:

Jeśli weźmiemy pod uwagę dowolny przekrój kroju n. p. AB , to spostrzeżemy, że ze wspomnianych już poprzednio powodów będą ciśnienia normalne do płaszczyzny kroju wzrastać, począwszy od zera aż do ciśnienia jednostkowego równego mocy ziemi na zgniatanie. Wzrastanie to idzie od początku A do punktu B i odbywa się w tem samem porządku co i w zwyczajnym dyagramie odkształceń przy zgniataniu. Przeniesiemy omówionym już poprzednio sposobem dyagram na zredukowaną podstawę $\bar{A}\bar{B}$, a następnie znajdziemy punkt F , w którym będzie zaczepiało normalne ciśnienie działające na AB . Gdybyśmy tak samo postąpili z przekrojem hk lub CD , otrzymalibyśmy szereg punktów leżących oczywiście na jednej prostej. Ta prosta posiada jednak właściwość, że jest miejscem geometrycznym wszystkich punktów zaczepienia ciśnień normalnych, panujących wzdłuż równoległych przekrojów. Wszystkie cząstkowe wypadkowe ciśnienia muszą mieć swoją wypadkową, która również będzie musiała mieć punkt zaczepienia na prostej FG . Tak więc FG musi być szukanem drugim miejscem geometrycznym punktu zaczepienia wypadkowego ciśnienia normalnego na krój, punktem zaś tym jest przecięcie się obydwu miejsc geometrycznych, t. j. punkt G .

Mając dany zatem dyagram odkształceń, możemy odrazu na nim znaleźć wypadkowe ciśnienie i punkt przecięcia z podstawą dyagramu, przyczem naturalnie dyagram będziemy w tej chwili uważali jako pochodny i nie będziemy odnosić do niego właściwości dyagramu odkształceń. Wypadkowa podzieli nam podstawę na dwa odcinki, jeśli zatem dowolny przekrój płaszczyzny pracującej ab podzielimy w stosunku tych odcinków, a więc w stosunku $ag:bg$, a następnie przez punkt podziału g wykreślimy równoległą do ostrza AD , otrzymamy tak samo, jak poprzednio, środek oporu w punkcie G .

Ażeby wyznaczyć wielkość oporów lemiesza, który możemy sobie pomyśleć na razie w formie trapezu $ABCD$, posłużymy się wzorami wyprowadzonymi dla kroju z tem zastrzeżeniem, że znaki tam wprowadzone będą miały po części odmienne nieco znaczenie. I tak: normalny kąt cięcia α pozostanie i tutaj w tem samem znaczeniu, kąt γ oznaczać będzie nachylenie ostrza do osi XX^{ac} ; zamiast głębokości zanurzenia wprowadzimy tutaj szerokość roboczą konstrukcyjną b , d pozostanie bez zmiany grubością grzbietu, względnie wzniesieniem ponad dno brzozy. Tak przerobiony wzór na wielkość siły pociągowej będzie miał wygląd:

$$P = bd \left\{ 1 - \varphi^2 + \frac{2\varphi}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} z_m + b \frac{1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} z_3.$$

IX. Dyskusya równania siły pociągowej dla kroju i lemiesza.

$$\text{IV)... } P = bd \left\{ 1 - \varphi^2 + \frac{2\varphi}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} z_m + \\ + b \frac{1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} z_3.$$

Równanie, znalezione na wielkość siły pociągowej, wykazuje, że opory wzrastają z głębokością i z szerokością roboczą. Ponieważ zaś wymiar d jest w zależności od kąta cięcia, przeto i ten będzie w miarę swego wzrastania wymagał coraz znaczniejszej siły pociągowej. Są to rzeczy zresztą ogólnie znane, że opór będzie zależał od kąta cięcia, od grubości grzbietu kroju i od głębokości zanurzenia. Inaczej jest z wpływem kąta nachylenia ostrza do poziomu γ . U wielu autorów można napotkać wprost twierdzenie, jakoby od wielkości tego kąta nie zależała zupełnie wielkość oporów¹⁾. Jeśli zechcemy rozpatrzyć wzajemną zależność tych dwu ilości, musimy uwzględnić znaczenie praktyczne pochylenia kroju do terenu. Zmniejszając nachylenie przy pozostawieniu jednoczesnem stałej głębokości zanurzenia, zwiększamy linię ostrza zagłębionego w materyale, a jednocześnie zwiększamy kubaturę wypieranej ziemi. Wskutek tego niezawodnie musimy otrzymać w rezultacie i większe opory. Inaczej przedstawi się sprawa, jeśli zapytamy, jak wpływa nachylenie kroju na wielkość oporów, jeśli wielkość powierzchni zanurzonej kroju, a więc i kubatura wypartej ziemi jest stała.

Najwygodniej przy tem rozpatrywaniu wyjść będzie z wzoru:

$$P = hd \left\{ 1 - \varphi^2 + \frac{2\varphi}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} z_m + h \frac{1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} z_3.$$

Napiszemy ten wzór inaczej:

$$P = \frac{h}{\sin \gamma} d \left\{ (1 - \varphi^2) \sin \gamma + \frac{2\varphi}{\sin \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} z_m + \\ + \frac{h}{\sin \gamma} (1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma) z_3.$$

Ponieważ według założenia $\frac{h}{\sin \gamma} = l =$ ilości stałej, przeto napiszemy:

¹⁾ Zieliński l. c.

$$P = l d \left\{ (1 - \varphi^2) \sin \gamma + \frac{2 \varphi}{\sin \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right\} x_m + l (1 + \varphi \sin \gamma \cos \gamma) x_3.$$

Położmy $\gamma = 90^\circ$, a otrzymamy:

$$P = l d \{ (1 - \varphi^2 + 2 \varphi \cotg \alpha) x_m + l x_3 \}.$$

W przykładzie przerobionym poprzednio znaleźliśmy $P = 137.4$ kg, jeśli te same wartości wstawimy we wzór ostatni, uwzględniając, że stała $l = \frac{15}{\sin 60} = 17.3$ cm, otrzymamy $P_{90} = 162.1$ kg potrzebnej siły pociągowej.

Widzimy zatem, że w takim zrozumieniu wzięte skośne ustawienie kroju wywoływa obniżenie oporów. Już praktyka okazała to dowodnie, że nachylenie kroju i skierowanie go końcem ostrza w stronę działania siły pociągowej redukuje opory. Tu znaleźliśmy cyfrowe potwierdzenie tego faktu, które jednakże wymaga pewnych dopowiedzeń, czem się zjawisko powyższe tłumaczy. Ukos ustawienia kroju wpływa niewątpliwie na kierunek normalnej do płaszczyzny i na kierunek tej krawędzi, którą otrzymamy, przekrawując daną płaszczyznę płaszczyzną normalną równoległą do kierunku ruchu. Jak pokazano już poprzednio:

$$\sin \xi_2 = \sin \alpha \sin \gamma,$$

z czego wynika, że kąt zawarty pomiędzy wspomnianą krawędzią, która równocześnie będzie torem cząstki ziemi, znajdującej się w danym punkcie na płaszczyźnie a pomiędzy osią AX^{ac} , t. j. kierunkiem ruchu, zależy od pochylenia kroju: rośnie z nim i wraz z jego ubytkiem maleje. A właśnie przy cięciu ten kąt jest najważniejszy, bo on jest właściwym kątem cięcia i nie dziw, że gdy on się zmniejszy, zmaleć muszą opory. Niektórzy autorowie nie uznają zupełnie wpływu skośnego ustawienia noża przy pługu, jakkolwiek jest on oczywistym i w technologii mechanicznej metalu i drzewa właściwie zmniejszeniem kąta cięcia tłumaczy się wielką łatwość cięcia przy cięciu ciągnionem. Nasz przykład, wzięty z rolnictwa, stoi na rozdrożu pomiędzy dwoma skrajnymi rodzajami cięcia. Jeden z nich byłby wtedy, gdyby siła działała normalnie do ostrza i wgniatała je w materiał; wtedy opory byłyby maksymalne. Minimum otrzymamy, dając nożowi ruch styczny do ostrza. Ustawienie kroju i lemiesza względem siły pociągowej i kierunku ruchu zajmuje miejsce pośrednie. Nie można mówić wprawdzie przy ich działaniu na ziemię o cięciu ciągnionem, lecz niewątpliwie jest, że proces technologiczny zbliża się do tej granicy w miarę, jak bardziej pochyło ustawiamy krój i wypuszczamy naprzód koniec lemiesza.

Zachodzą jednakowoż w rzeczywistości wypadki, w których cięcie ciągnięte występuje zupełnie wyraźnie w działaniu kroju i lemiesza. Dzieje się to wtedy, gdy w ziemi jest dużo cząstek roślinnych, które, napotkane przez ostrze narzędzia, przesuwają się ku górze i przerzynają się na niem. Ten wzgląd był może najbardziej decydujący, dlatego praktyczni konstruktorowie wprowadzili skośne ustawienie kroju. Gdyby bowiem resztki roślinne nie przesunęły się i nie przecięły, musiałyby iść wraz z zanurzonym nożem przez środowisko ziemne i zwiększać w ten sposób opory. Bo owinięcie takie kroju lub lemiesza nie znaczy nic innego, jak tylko zwiększenie kąta cięcia.

Ale z drugiej strony pochylanie musi mieć również swoją praktyczną granicę. Po pierwsze nie można zbyt pochyłać kroju, bo cząstki roślinne wobec słabszego ciśnienia normalnego na ostrze nie mogłyby się przerznąć, a tylko przesuwałyby się po niem. Po drugie nie można zapominać, z jakim warunkiem związane jest zmniejszanie oporów. Istnieje ono bowiem przy zachowaniu tej samej, czynnej długości ostrza. Nie jest to powiedziane zupełnie ściśle i raczej należałoby określić ten warunek jako zachowanie tej samej powierzchni czynnej lub zachowanie tej samej kubatury wypartej i wgniecionej ziemi, ale różnica cyfrowa jest tutaj nieznaczna i możemy śmiało przyjąć tamto określenie.

Przyjęcie stałej długości ostrza a zmiennego kąta nachylenia prowadzi do uzyskania różnych głębokości pracy kroju. Ponieważ zaś głębokość orki mamy daną, to za każdorazową zmianą nachylenia kroju musi zmieniać się i oddalenie końca kroju od dna brzozy. Możemy, oznaczając przez t głębokość orki, napisać, że wzniesienie końca kroju ponad linię płozu wyniesie:

$$a = t - l \sin \gamma.$$

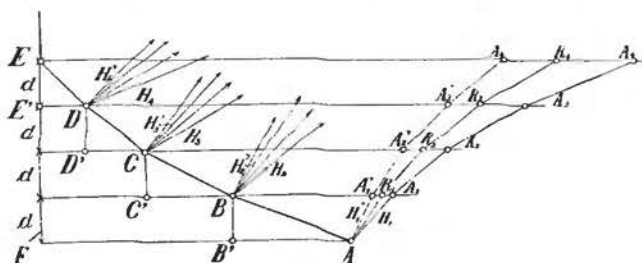
Im większy kąt nachylenia, tem mniejszy będzie ten odstęp, który następnie musi być ścięty bokiem lemiesza lub odkładnicy. Wskutek oddalenia musi też pozostała warstwa ziemi być odcięta w gorszych daleko warunkach, bo kąt cięcia będzie tam daleko znaczniejszy, aniżeli przy kroju, a to prowadzi do wzmożenia oporów.

Najprostszy przykład noża, podcinającego ziemię, stanowi pogłębiacz płaski. Narzędzie takie będzie klinem prostym, którego ostrze stoi prostopadle do kierunku ruchu. Podcięcie jednak z powodu wielkiego wzniesienia narzędzia, t. j. grubości grzbietu wciśkanego w ziemię klina łączy się z kwestyą rozkruszania ziemi i dlatego wymaga osobnego rozpatrzenia.

Przejdźmy od płaszczyzny pochylonej do powierzchni krzywych będzie powierzchnia złożona z elementów płaszczyzn, która stanowi system równi pochyłych, nachylonych pod różnymi kątami do poziomu, system klinów o różnych kątach cięcia pozornych (nor-

malnych) i różnych kątach cięcia rzeczywistego (wskutek skośnego ustawienia krawędzi tnących do kierunku ruchu).

Ażeby uchwycić zasadę, wedle której odbywa się przesuwanie się cząstek, musimy wyjść od najprostszej formy klina. Przesuwanie się materiału pod wpływem klina omówiono już poprzednio, tutaj należy to rozciągnąć to na klin złożony. Weźmy w tym celu pod uwagę klin złożony z płaszczyzn (ryc. 23) AB , BC , CD i DE i znając kąt θ zawarty pomiędzy płaszczyzną a kierunkiem usuwiskowym, wykreślmy dla każdej partii kierunek H_1 , H_2 , H_3 , $H_4 \dots$



Rycina 23.

kierunki te nie będą naturalnie równoległe, gdyż i kąty nachylenia równi pochyłych α_1 , α_2 , α_3 , $\alpha_4 \dots$ względnie zaś ich kąty spełniające ε_1 , ε_2 , ε_3 , $\varepsilon_4 \dots$ nie są równe. Pytanie jest: w jakim kierunku przesunie się punkt A po przejściu klina AEF . Z rysunku widoczna, że biorąc pierwszy tylko (zewnątrzny) kierunek usuwiskowy pod uwagę, pierwszy klin ABB' przesunie punkt A do A_1 , drugi klin BCC' wykona przesunięcie równoległe do kierunku H_2 , zatem punkt A pod jego wpływem znajdzie się w A_2 . Dwa kliny następnie popchną go jeszcze do A_3 i przesuną ostatecznie w A_4 . W rezultacie zatem, z uwagi na kierunek usuwiskowy zewnętrzny, punkt A przeszedłby w materiale drogę po łamanym torze $AA_1A_2A_3A_4 \dots$. Jednakże działa tu i kierunek usuwiskowy wewnętrzny, gdyż punkt A będzie przesuwiał się kolejno raz wzdłuż jednego, raz wzdłuż drugiego kierunku usuwiskowego. Tak więc otrzymamy drugi tor $AA'_1A'_2A'_3 \dots$ złożony z wewnętrznych kierunków usuwiskowych. Jak już poprzednio wyprowadziliśmy, ruch złożony cząstki materialnej pchanej klinem, musi odbywać się wzdłuż linii łamanej symetrycznie rozmieszczonej po obydwu stronach toru łamanego $AR_1R_2R_3R_4 \dots$. Pozorny zatem kierunek przesunięcia cząstki A zmieni się wzdłuż tej linii środkującej, którą otrzymamy z kierunków ciśnienia ruchomego klina na ziemię. Kąt nachylenia zmiennego kierunku R do osi XX^{loc} uważanej jako kierunek ruchu wyrazi się relacją:

$$\delta_1 = \varepsilon - (90 + \varphi).$$

Tymczasem:

$$\alpha = 180 - \varepsilon, \quad \varepsilon = 180 - \alpha,$$

przeto:

$$\delta_1 = 180 - \alpha - (90 + \varrho) = 90^\circ - (\alpha + \varrho).$$

Dalekość deformacyi w dowolnej brana warstwie, będzie:

$$AR_1 = \frac{d}{\sin \delta_1} = \frac{d}{\cos (\alpha + \varrho)} = \frac{d}{\cos (180 - \varepsilon + \varrho)},$$

albo:

$$s = \frac{d}{\cos [180 - (\varepsilon - \varrho)]} = \frac{d}{-\cos (\varepsilon - \varrho)}.$$

Rozwijając to wyrażenie, otrzymamy:

$$s = - \frac{d}{\cos \varepsilon \cos \varrho + \sin \varepsilon \sin \varrho}.$$

Uwzględniając zaś, że $\sin \varrho = \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$, $\cos \varrho = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$,

$\sin \varepsilon = \frac{1}{M}$, $\cos \varepsilon = -\frac{K}{M}$, otrzymamy po uporządkowaniu:

$$s = \frac{M \sqrt{1 + \varphi^2}}{K - \varphi} d.$$

Skoro przejdziemy do powierzchni walcowych o osi poziomej, możemy napisać:

$$ds = \frac{M \sqrt{1 + \varphi^2}}{K - \varphi} dz,$$

po zcałkowaniu zaś będzie długość łuku AR_4 wynosić:

$$s = \sqrt{1 + \varphi^2} \int \frac{M}{K - \varphi} dz.$$

W rozpatrywanym przykładzie zrobiliśmy założenie, że ostrze będzie stało prostopadle do kierunku ruchu. Przy ukośnem ustawieniu ostrza względem osi XX^{oe} musimy wziąć pod uwagę, że kąt cięcia rzeczywisty będzie zmienny i kierunek reakcyi rozmaity, wskutek czego tor punktu A będzie krzywą przestrzenną. Kierunki

reakcyi, wykreślone dla dowolnej rodzącej walca, będą tworzyć płaszczyznę. Tak samo otrzymamy odpowiednie dwie płaszczyzny usuwiskowe sprzężone, kreśląc z każdego punktu rodzącej walca obadwa kierunki usuwiskowe. Biorąc tylko pod uwagę płaszczyzny przesunięć średnich w kierunku oddziaływania R , otrzymamy system płaszczyzn wyprowadzonych przez proste równoległe rodzące, wskutek czego muszą się przecinać wzajemnie podług linii prostych do siebie równoległych.

Widoczne jest zatem, że powierzchnia obwijająca te płaszczyzny, musi być walcem osi równoległą do osi narzędzia ustawionym. Gdyby ciśnienie przenosiło się po kierunkach normalnych, wtedy ten walec graniczny byłby linią prostą. Wynikają z tego dwie rzeczy: Po pierwsze przy powierzchniach walcowych nie będzie można, licząc ściśle, odnosić kubatury ziemi partei narzędziem do płaszczyzny usuwiskowej wyprowadzonej od ostrza, lecz należałoby brać bryłę ograniczoną od czoła powierzchnią walcową, obwijającą płaszczyzny usuwiskowe zewnętrzne. Po drugie — a właśnie na tem miejscu jest to szczególnie ważne — kierunki przesunięć będą się krzyżować, warstwy zaś brane wzdłuż płaszczyzn usuwiskowych, albo też wzdłuż płaszczyzn oddziaływania muszą się wzajem przenikać, co prowadzi do lokalnych zagęszczeń materiału ziemnego właśnie na powierzchni granicznej. Ażeby uniknąć wzrastających wskutek zagęszczeń oporów, musimy konstrukcyę tak prowadzić, by obszar wgniatanego materiału nie sięgał zbyt daleko i obejmował jak najmniejszą ilość przecięć płaszczyzn oddziaływań.

Jeśliśmy zamiast wklęsłej wzięli powierzchnię wypukłą, wtedy kierunki oddziaływań musiałyby iść rozbieżnie wśród materiału ziemnego i nie byłoby żadnych zagęszczeń, lecz owszem jak najintensywniejsze rozkruszenie. Zarówno zatem walec, jak i każda inna krzywa powierzchnia, mająca z jednej strony wypukłość, z drugiej zaś wklęsłość, da nam rozmaitą pracę zależnie od tego, którą stroną jest zwrócona ku materiałowi.

Najważniejszym z tego, co powiedziano powyżej, jest skonstatowanie konieczności unikania zbyt wklęsłych powierzchni przy konstruowaniu narzędzi całkowicie zanurzonych w ziemi podczas pracy i mających za zadanie podciągnięcie warstwy ziemi. W razie użycia takich powierzchni musimy też z konieczności dawać promienie krzywizny jak największe i zbliżać się niekiedy niezmiernie do kształtów płaskich, byle tylko uniknąć lokalnych zagęszczeń ziemi. Jest w mocy konstruktora dobrać krzywiznę tak do zamierzanej głębokości zanurzenia, by kierunki wypadkowych przesunięć cząstek ziemi nie przecinały się wogóle w obrębie zanurzenia.

Praktyka doszła już do zrozumienia tego stanu rzeczy i stąd pochodzą owe, nieco tylko wklęsłe a niekiedy niemal zupełnie płaskie lemiesze przy pługach i także płaskie powierzchnie przy po-

głębiaczach, a nawet wypukłe przy łapach przeróżnych kultywatorów.

Korzystając z tego, możemy śmiało bez obawy popełnienia rażącego błędu traktować płaszczyznę usuwiskową braną od ostrza jako wystarczająco dokładne ograniczenie bryły deformowanej ziemi. Samą natomiast powierzchnię, o ile chodzi o znalezienie oporów wgniatanego klinem materiału, możemy w granicach dozwolonego błędu traktować jako płaszczyznę. Tam jednakże, gdzie wzniesienie klina jest znaczniejsze, promienie krzywizny małe a głębokość dość znaczna. tam — zastrzegamy to wyraźnie — uproszczenie takie jest niedopuszczalne. W praktykowanych konstrukcjach można użyć podobnego ułatwienia jedynie przy lemieszu.

Chcąc postawić sprawę zupełnie ogólnie i nie chcąc się zadowolić przybliżeniem tylko oznaczeniem ciśnienia wypadkowego z normalnych ciśnień na powierzchnię, musimy zwrócić się do innej metody, którą będzie można wstecz zastosować do omówionej teorii kroju i lemiesza, a także i do dowolnie określonego kształtu powierzchni z tem jednakże ważnem zastrzeżeniem, na który osobliwy nacisk położyć wypada, że powierzchnie będą pracować wypukłą swoją stroną. względnie zaś (przy powierzchniach wklęsłych) promienie krzywizny będą tak znaczne, by, o ile można, żadne z przecięć się kierunków oddziaływań nie znalazło się na obszarze deformowanej ziemi. Ta sama droga doprowadzi nas do wzorów, które pozwolą wycenić wielkość oporów i w takiej miążkiej ziemi, dla której opory spójności są znikome i w których tylko tarcie wewnętrzne stanowi główne opory. Będzie to podstawa teorii przykrywadeł, mających za zadanie miążką ziemią przykrywać położone na roli nasienie. Wskutek ogólniejszego postawienia kwestyi będzie ona doskonalsza aniżeli ta, jaką można znaleźć w jednej z prac dawniej publikowanych ¹⁾. Jako narzędzia pracujące w ziemi, muszą i przykrywadła być traktowane razem z innemi narzędziami, służącemi do wywołania deformacyi w ziemi.

X. Ogólne wzory dla powierzchni poruszającej się w środowisku ziemnem.

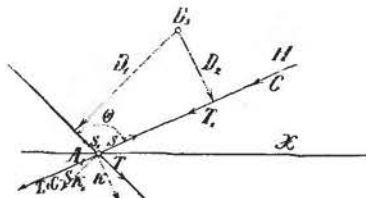
Wyobraźmy sobie przymacik, który podstawą swoją kwadratową opiera się na elemencie poruszanej powierzchni, dwiema zaś bocznemi ścianami ciąży na dwu sąsiednich przymacikach. Już poprzednio pokazano (ryc. 12), jak można rozłożyć ciężar Q na trzy

¹⁾ T. M. Gołogurski: Maszyny i narzędzia służące do uprawy ziemniaków. Roczniki nauk rolniczych, Tom I.

składowe, skierowane normalnie do trzech wspomnianych ścian pryzmatu. Obecnie musimy znaleźć, jak wielkie opory będą działać na narzędzie przy przesuwaniu pryzmacika wzdłuż jego krawędzi. W tym celu musimy uprzytomnić sobie, że kierunek x oznacza kierunek ruchu narzędzia, zaś A_2A_1 kierunek, w którym punkt materialny A_2 przesunie się po powierzchni.

Nieznane na razie ciśnienie normalne działa na element powierzchni i wywołuje tarcie, działające na powierzchnię w kierunku od A_1 do A_2 . To tarcie musi oddziaływać jak ciśnienie pomiędzy sąsiadującymi ze sobą pryzmacikami, stykającymi się wzdłuż ściany $A_2A_3B_3B_2$.

Wykonajmy przekrój przez kierunki D_1 i D_2 , to w płaszczyźnie przekroju znajdzie się element toru, po którym nastąpi przesunięcie względne materiału po powierzchni i kierunek usuwiskowy H (ryc. 24). Tarcie T , działające na materiał, będzie się starało materiał ziemny zepchnąć ku dołowi. Rozłożymy je na składowe idące w dwu kierunkach: jednym, padającym w kierunek usuwiskowy H , i w drugim normalnym do niego. Jak widać z rysunku, $\angle HAT = 180 - \Theta$, wobec czego:



Rycina 24.

$$S = -T \cos \Theta, \quad K = T \sin \Theta.$$

W płaszczyźnie $A_2B_2B_3A_3$ mamy zatem ciśnienie normalne:

$$N_2 = D_2 + K = D_2 + T \sin \Theta.$$

Powstały skutek tego opór tarcia, działający pomiędzy ocierającymi się pryzmacikami w kierunku HA , musimy pomniejszyć zatem o ilość S i wtedy otrzymamy opory w ścianie $A_2B_2B_3A_3$:

$$W_2 = [D_2 + T \sin \Theta] \psi + T \cos \Theta,$$

gdzie ψ jest współczynnikiem tarcia wewnętrznego ziemi.

W drugiej ścianie $A_1B_1B_2A_2$ mamy tylko ciśnienie normalne D_3 , które wywoła opór tarcia:

$$W_3 = D_3 \psi.$$

Oprócz tego będzie istnieć we wszystkich ścianach opór spójności, który oznaczmy przez C .

Wszystkie te trzy opory będą zgodnie skierowane i będą działać równolegle do kierunku H . Wypadkowa ich $W_2 + W_3 + C$

musi rozłożyć się na dwie składowe: jedną równoległą do A_1A_2 , drugą zaś normalną do płaszczyzny $A_1A_2A_3A_4$. Otrzymamy składową styczną:

$$S_1 = -(W_2 + W_3 + C) \cos \Theta$$

i składową normalną:

$$K_1 = (W_2 + W_3 + C) \sin \Theta.$$

W rezultacie zatem będziemy mieli siłę normalną cisnącą na podstawie $A_1A_2A_3A_4$:

$$N = D_1 + (W_2 + W_3 + C) \sin \Theta.$$

Podstawiając wartości za W_2 i W_3 , otrzymamy:

$$N = D_1 + (D_2 + T \sin \Theta) \psi \sin \Theta + T \sin \Theta \cos \Theta + D_3 \psi \sin \Theta + C \sin \Theta.$$

Zamiast T możemy wprowadzić iloczyn $N\varphi$:

$$N = D_1 + D_2 \psi \sin \Theta + N\varphi \psi \sin^2 \Theta + N\varphi \sin \Theta \cos \Theta + D_3 \psi \sin \Theta + C \sin \Theta.$$

Stąd:

$$N = \frac{D_1 + D_2 \psi \sin \Theta + D_3 \psi \sin \Theta + C \sin \Theta}{1 - \varphi \psi \sin^2 \Theta - \varphi \sin \Theta \cos \Theta}.$$

Jeśli w tym wzorze ogólnym położymy $\Theta = 90^\circ$, otrzymamy:

$$N = \frac{D_1 + D_2 \psi + D_3 \psi + C}{1 - \varphi \psi}.$$

W osobliwych przypadkach, jako to dla poruszającej się w ziemi płaszczyzny równoległej do osi YY^{ow} lub dla walca, którego oś jest równoległa do osi YY^{ow} , będzie $D_3 = 0$. Wtedy też wzór ogólny przybierze postać:

$$N = \frac{D_1 + D_2 \psi \sin \Theta + C \sin \Theta}{1 - \varphi \psi \sin^2 \Theta - \varphi \sin \Theta \cos \Theta}.$$

Jeśli by obadwa warunki zaszyły, t. j. $\Theta = 90^\circ$ i $D_3 = 0$, wtedy:

$$N = \frac{D_1 + D_2 \psi + C}{1 - \varphi \psi}.$$

Należy zwrócić uwagę, iż wzór ten pod pewnemi założeniami można przekształcić na inny, wyprowadzony dla klina przez J. Weis-

bacha ¹⁾. Jeśliby mianowicie kierunek działania ciężaru Q był identyczny z kierunkiem D_1 , wtedy składowe $D_2 = 0$, zaś $D_1 = Q$. Tylko wtedy zatem moglibyśmy napisać:

$$N = \frac{Q}{1 - \varphi\psi},$$

co następnie może przejść we wzór:

$$N = \frac{Q(1 + \varphi\psi)}{1 - \varphi^2\psi^2},$$

a pod założeniem, że wartość $\varphi^2\psi^2$ jest nader mała, we wzór:

$$N = Q(1 + \varphi\psi).$$

W danym razie postąpienie takie nie jest wskazane, gdyż w rozpatrywanym przez nas procesie technologicznym $\Theta > \frac{\pi}{2}$, zaś iloczyn kwadratów $\varphi^2\psi^2$ nie zawsze jest znikomo mały. Poza tem przyjęcie, jakoby kierunek działania ciężaru Q i kierunek reakcyi D_1 był ten sam, jest oczywiście fałszywe, gdyż mógłby znaleźć chyba zastosowanie tylko przy klinie, którego kąt zaostrenia i cięcia jest zerem.

Ziemia usuwa się nietylko w kierunku H , lecz także i w kierunku usuwiskowym sprzężonym H' . Każda cząstka tyle razy podlega przesunięciu w kierunku H , ile w kierunku H' . Możemy przyjąć, iż w każdej cząstce czasu połowa materiału porusza się w jednym, połowa zaś w drugim kierunku. Ciśnienie normalne zatem musi się zmieniać w granicach od N do N' . Dla ułatwienia przyjmujemy, iż cały materiał stale będzie się przesuwał w kierunku reakcyi R . Wzory wyprowadzone dla kierunku usuwiskowego głównego można przekształcić i dla kierunku R , biorąc pod uwagę, że wtedy $\Theta = 90 + \varphi$, gdzie φ jest kątem tarcia ziemi o materiał narzędzia. Otrzymamy zatem $\sin \Theta = \cos \varphi$, $\cos \Theta = -\sin \varphi$, z uwagi zaś, że $\tan \varphi = \varphi$, będzie:

$$\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}, \quad \cos \Theta = -\frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}}.$$

Podstawimy to we wzorze ogólnym:

$$N = \frac{D_1(1 + \varphi^2) + (D_2\psi + D_3\psi + C)\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi}.$$

¹⁾ Dr. Julius Weisbach: Lehrbuch d. theoretischen Mechanik.

Wstawiając we wzory III c. wartości za $\sin \Theta$ i $\cos \Theta$, otrzymamy w skróconej formie dla elementarnego pryzmacyka:

$$D_1 = dQ \frac{K - \varphi \frac{\partial F}{\partial x}}{KM} \cdot \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$D_2 = dQ \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \sqrt{1 + \varphi^2}}{KM},$$

$$D_3 = dQ \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{K}.$$

Wobec tego:

$$N = \int dQ \frac{(1 + \varphi^2) \frac{\partial F}{\partial z} \left\{ K - \varphi \frac{\partial F}{\partial x} + \psi \frac{\partial F}{\partial z} \right\} + M \frac{\partial F}{\partial y} \psi \sqrt{1 + \varphi^2}}{KM(1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi)} + \\ + \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} C.$$

Podstawmy tutaj znaną już poprzednio wartość:

$$dQ = \sigma(t - z) \frac{K \sin \Theta}{\frac{\partial F}{\partial z} \sin \delta} \cdot dF,$$

uwzględniając, że

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \delta} = \frac{\cos \varphi}{\frac{\partial F}{\partial x} \sin \varphi + \frac{K}{M} \cos \varphi} = \frac{M}{K - \frac{\partial F}{\partial x} \varphi},$$

zaś

$$dF = \frac{dydz}{\cos(NX)} = \frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x}} dydz,$$

t. j. kładąc:

$$dQ = \sigma(t - z) \frac{KM^2}{\left(K - \frac{\partial F}{\partial x} \varphi\right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z}} dydz.$$

Otrzymamy:

$$N = \int \left[\sigma(t-z) \frac{1+\varphi^2}{1+2\varphi^2-\varphi\psi} \frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x}} dydz + \sigma(t-z) \frac{(1+\varphi^2)\psi}{1+2\varphi^2-\varphi\psi} \cdot \right. \\ \left. \frac{M}{\left(K - \frac{\partial F}{\partial x} \varphi\right)} dydz + \sigma(t-z) \frac{\psi \sqrt{1+\varphi^2}}{1+2\varphi^2-\varphi\psi} \cdot \right. \\ \left. \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \left(K - \frac{\partial F}{\partial x} \varphi\right)} dydz \right] + \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{1+2\varphi^2-\varphi\psi} C.$$

W każdym elemencie powierzchni będziemy mieli dwa opory: ciśnienie normalne i tarcie, które wraz z siłą zewnętrzną, działającą na narzędzie, tudzież z dodatkowymi reakcyami, odpowiadającymi warunkom nieswobodnego ruchu narzędzia, muszą dawać trzy siły wypadkowe w kierunku trzech osi układu równe zeru. Oznaczając przez α, β, γ kąty nachylenia siły zewnętrznej do osi układu, przez ξ_1, η_1, ζ_1 kąty nachylenia normalnej, zaś przez ξ_2, η_2, ζ_2 także kąty kierunku tarcia, otrzymamy następujące trzy równania równowagi:

$$\begin{aligned} X &= P \cos \alpha - N \cos \xi_1 - T \cos \xi_2 = 0, \\ Y &= P \cos \beta + R_y - N \cos \eta_1 - T \cos \eta_2 = 0, \\ Z &= P \cos \gamma + R_z - N \cos \zeta_1 - T \cos \zeta_2 = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ dla nas najważniejsze jest na razie równanie pierwsze, odnoszące się do kierunku ruchu i ponieważ w obecnym naszym rozumowaniu możemy brać pod uwagę siłę zewnętrzną równoległą do kierunku ruchu, względnie zaś rozpatrywać działanie samej tylko składowej padającej w ten kierunek, przeto możemy napisać w danym razie:

$$X = P_x - N \cos \xi_1 - T \cos \xi_2 = 0.$$

lub też:

$$P_x = N \{ \cos \xi_1 + \varphi \cos \xi_2 \}.$$

Sumując wszystkie poziome siły P_x w granicach zakreślonych wymiarami narzędzia, otrzymamy:

$$P = f(\cos \xi_1 + \varphi \cos \xi_2) N.$$

Wiemy jednak, że:

$$\cos \xi_1 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial x}}{M}, \text{ zaś } \cos \xi_2 = \frac{K}{M},$$

zatem:

$$\cos \xi_1 + \varphi \cos \xi_2 = \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{M}.$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy:

$$\begin{aligned} P = & \int \int \sigma \frac{1 + \varphi^2}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \cdot \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{\frac{\partial F'}{\partial x}} (t - z) dydz + \\ & + \int \int \sigma \frac{\psi(1 + \varphi^2)}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{K - \frac{\partial F'}{\partial x} \varphi} (t - z) dydz + \\ & + \int \int \sigma \frac{\psi \sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \frac{\frac{\partial F'}{\partial y}}{\frac{\partial F'}{\partial x} \cdot \frac{\partial F'}{\partial z}} \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{K - \frac{\partial F'}{\partial x} \varphi} (t - z) M dydz + \\ & + \int \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \cdot C \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{M}. \end{aligned}$$

Oznaczmy dla krótkości:

$$\int \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \cdot \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{M} \cdot C = A.$$

W niektórych przypadkach możemy ten wyraz pominąć, jeśli ziemia jest pokruszona miarko i jeśli bez obawy popełnienia znaczniejszego błędu będziemy mogli uważać, że $C=0$. Wzoru takiego uproszczonego będziemy mogli użyć co najwyżej dla obliczenia oporu przykrywań, ale dla większości przykładów, w których spójność ziemi odgrywa znaczną, ba nawet główną rolę, po-

dobne uproszczenie byłoby niedopuszczalne. Wyrażenie oznaczone przez A oznacza nam widocznie siłę zużytą na pokonanie spójności w przeciwieństwie do poprzednich członów, które uwzględniają tylko ciężar partej bryły ziemi i opory tarcia tak zewnętrznego jako też i wewnętrznego. Siła przeznaczona do zniesienia spójności cząstek C musi być tak wielką, by doprowadziła ciało do stanu takiego, w jakim się znajduje podczas zerwania materiału. Połóżmy ją równą średniej mocy na zgniatanie dla słupa ziemi o przekroju równym powierzchni poruszającej się w ziemi. Wtedy w rzeczywistości będzie każdemu elementowi powierzchni dF' odpowiadać pryzmacik ziemi. Wszystkie pryzmaty razem wzięte nie koniecznie muszą wypełnić przestrzeń zajętą przez natężany materiał, chociaż niekiedy mogą ją i przepelnić. Pierwszy przypadek zajdzie przy powierzchniach wypukłych, drugi przy powierzchniach wklęsłych.

Kładąc tedy:

$$C = \alpha_m dF'.$$

i uwzględniając, że

$$dF' = \frac{dydz}{\cos(NX)} = \frac{M}{\frac{\partial F'}{\partial x}} dydz,$$

otrzymamy:

$$A = \iint \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \cdot \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{\frac{\partial F'}{\partial x} - \alpha_m} dydz.$$

Ostateczny wzór będzie:

$$\begin{aligned} P = \sigma \frac{1 + \varphi^2}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} & \left\{ \iint \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{\frac{\partial F'}{\partial x}} (t - z) dydz + \right. \\ & + \iint \psi \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{K - \frac{\partial F'}{\partial x} \varphi} (t - z) dydz + \\ & \left. + \iint \frac{\psi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \cdot \frac{\frac{\partial F'}{\partial y}}{\frac{\partial F'}{\partial x}} \cdot \frac{\frac{\partial F'}{\partial x} + \varphi K}{K - \frac{\partial F'}{\partial x} \varphi} M(t - z) dydz \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{1+2\varphi^2-\varphi\psi} \kappa_m \iint \frac{\partial F}{\partial x} + \varphi K \frac{\partial F}{\partial x} dydz. \quad \dots \text{V.a)}$$

Przykład I: Obliczyć opory dla kroju przy 15 cm zanurzenia. Dane są wymiary kroju jak w przykładzie poprzednio przełączonym.

Wyjdziemy w obliczeniu naszym z równania płaszczyzny kroju:

$$x = -\frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma} y - \cotg \gamma z + c.$$

Obliczymy:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\cotg \gamma; \quad M = \frac{1}{\sin \alpha \sin \gamma};$$

$$K = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \gamma}}{\sin \alpha \sin \gamma}.$$

Wzór na siłę pociagową P przekształcimy, gdyż równanie płaszczyzny mamy dane w postaci $x = f(yz)$, a nie $F(xyz) = 0$.

Po odpowiedniem przerobieniu będzie:

$$\begin{aligned} P = \sigma \frac{1+\varphi^2}{1+2\varphi^2-\varphi\psi} \left\{ \iint (1+\varphi K)(t-z) dydz + \right. \\ \left. + \iint \psi \frac{1+\varphi K}{K-\varphi} (t-z) dydz + \right. \\ \left. + \iint \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1+\varphi K}{K-\varphi} M(t-z) dydz + \right. \\ \left. + \iint \frac{1}{\sigma \sqrt{1+\varphi^2}} (1+\varphi K) \kappa_2 dydz \right\} \quad \dots \text{V.b)} \end{aligned}$$

Dla płaszczyzny wszystkie pochodne, jakoteż elementy pomocnicze M i K są stałe, pozostanie przeto tylko do rozwiązania całka:

$$\int_0^b \int_0^t (t-z) dydz = \frac{t^2 b}{2} \text{ i całka } \int_0^b \int_0^t dydz = bt.$$

Ostatecznie zatem dla płaszczyzny otrzymamy równanie:

$$P = \sigma(1 + \varphi K) \frac{1 + \varphi^2}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \frac{bt^2}{2} \left\{ 1 + \frac{\psi}{K - \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y} M}{\frac{\partial f}{\partial z} K - \varphi} \right\} + \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} (1 + \varphi K) bt z_2.$$

Podstawiając w tym wzorze wartości dla $\alpha = 15^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\sigma = 1.9 \text{ g/cm}^3$, $z_2 = z_m = 604 \text{ g/cm}^2$, otrzymamy:

$$P = 47.145 \text{ kg} + 75.102 \text{ kg} = 122.25 \text{ kg}.$$

Wynik ten niedaleko odbiegający od uzyskanego poprzednią przybliżoną metodą, według której otrzymaliśmy 137.4 kg jest o tyle ciekawy, że za pomocą niego możemy osobno obliczyć opory powstałe wskutek działania ciężaru poruszanej ziemi, osobno zaś opory spójności. Ponadto wzór ten daje jasny obraz, jak siła pociągowa wzrasta ze wzrostem głębokości zanurzania.

Obliczając dla danej szerokości roboczej, t. j. dla danej grubości kroju ($b = 2.14 \text{ cm}$) wartość współczynnika przy t^2 i przy t , otrzymamy równanie:

$$P = 0.20935 t^2 + 5.0068 t.$$

Z tego wzoru możemy obliczyć dla danych wymiarów i dla danego pochylenia kroju:

$$\begin{array}{lll} \text{dla } t = & 7.5 \text{ cm} & 15.0 \text{ cm} & 19.0 \text{ cm} \\ \text{siłę pociagową } P = & 49.3 \text{ kg} & 122.25 \text{ kg} & 170.7 \text{ kg}. \end{array}$$

Wyniki te zbliżają się niezmiernie do dat uzyskanych przez Gasparina, które zacytowaliśmy poprzednio.

Przykład II. Obliczyć opór lemiesza płaskiego, jeśli szerokość lemiesza wynosi 10 cm , szerokość robocza konstrukcyjna 25 cm , kąt cięcia 20° , kąt ustawienia do kierunku siły pociągowej 45° , wszystkie zaś dane odnoszące się do właściwości ziemi są takie jak w poprzednich przykładach.

Ażeby móc posłużyć się wzorem użytym w pierwszym przykładzie, musimy zmienić układ o tyle, iż zamienimy ze sobą osi YY^{ow} i ZZ^{ow} . Wtedy możemy wprost podstawiać wartości i otrzymamy:

$$P = 0.177756 t^2 + 11.294 t.$$

Kładąc zamiast znaku t znak b , oznaczający zazwyczaj szerokość konstrukcyjną lemiesza, otrzymamy równanie dla danego narzędzia i danej ziemi:

$$P = 0.177756 b^2 + 11.294 b.$$

Dla $b = 25$ cm, obliczone P będzie wynosić:

$$P = 74.065 + 188.240 + 262.3 \text{ kg.}$$

Cyfra ta, jakkolwiek wysoka, nie wychodzi poza granice spotykane w pługach.

Prof. A. Wüst¹⁾ liczy dla ziem ciężkich 10–17 kg na 1 cm szerokości roboczej lemiesza. Odpowiada to w naszym przykładzie 250 kg – 425 kg.

Zmieniając w danych szerokość brzeszczota z 10 cm na 15 cm, otrzymamy wzniesienie ponad dno brzoźdy znaczniejsze i wskutek tego opory podskoczą na 393.4 kg.

Jeśli byśmy zastosowali metodę uproszczoną podaną pierwszej, otrzymalibyśmy jako rezultat rachunku 353.6 kg, który mógłby w razie potrzeby służyć jako pierwsze przybliżenie dla orientacji w wielkości oporów danego lemiesza.

XI. Tor cząstki ziemi po powierzchni narzędzia.

Poprzednie rozumowania mają rację jedynie wtedy, gdy narzędzie zewsząd okolone grubą warstwą ziemi, działa jedynie, wciśkając materiał ziemny w sąsiednie warstwy, nie naruszając jednocześnie równowagi warstw dalszych i nie zmieniając ich położenia. Tak działa zawsze krój przy pługu, tak do pewnego stopnia działa także i lemiesz zanurzony dostatecznie głęboko w ziemię. Jedynie tylko pierwsze narzędzie możemy obserwować w pracy samo dla siebie, gdyż już działanie lemiesza łączy się z działaniem odkładnicy i stąd nie występuje nigdy w czystej formie. Wogóle — należy wyznać — oddzielne traktowanie lemiesza i odkładnicy może mieć znaczenie tylko formalne, wynikające z tego, że obadwa te elementy konstruuje się osobno: przy rozpatrywaniu pracy narzędzia pod względem technologicznym, należy ujmować lemiesz i odkładnicę jako całość. Wobec tego, biorąc ogólnie, pierwsza czynność oddzielenia skiby od dna brzoźdy przypada w udziale dolnej partii powierzchni pracującej. W miarę jak narzędzie posuwa się naprzód, musi i materiał odbywać ruch względem niej. Skiba będzie podnosić się ku górze, odchylać w bok i odwracać. Wszystkie te czynności ściśle warunkowane są kształtem powierzchni ruchomej. Cząstka materialna, leżąca na powierzchni, posuwa się po niej

¹⁾ A. Wüst, Landwirtsch. Maschinenkunde. Berlin, 1889.

ruchem względnym i opisuje tor, którego kształt zależy od rodzaju powierzchni i od kierunku działania siły pociągowej. Ponieważ ruch narzędzia przyjmujemy przystolinijny, w kierunku osi XX^{00} , więc na ruch względny materiału może wpłynąć tylko pozioma składowa siły pociągowej. W rozważaniach zatem kształtu toru będziemy mówili zawsze tylko o sile pociągowej poziomej i z reguły działającej w kierunku ruchu, t. j. równoległe do osi XX^{00} .

Cząstka ziemi, spoczywająca na powierzchni określonej równaniem: $x = f(y, z)$, pozostaje pod działaniem siły P równoległej do płaszczyzny XY . Wprowadzając w rachunek warunki nieswobodnego ruchu pod postacią reakcji, działającej na punkt materialny i skierowanej wzdłuż całego toru normalnie do powierzchni, wprowadzając następnie dostawy kierunkowe siły zewnętrznej P i ciśnienia normalnego N , a to:

$$\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu, \cos \lambda_1, \cos \eta_1, \cos \nu_1,$$

możemy obidwie siły rozłożyć na składowe w kierunku trzech osi układu, a następnie odpowiednie składowe zsumować razem, uwzględniając ich kierunek. W ten sposób otrzymamy trzy siły, które razem złożone, dałyby jedną wypadkową. Każda z nich X, Y, Z nada cząstce pewne przyspieszenie zależne od masy cząstki. Możemy zatem napisać:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = -P \cos \lambda + N \cos \lambda_1$$

$$Y = m \frac{d^2y}{dt^2} = P \cos \mu + N \cos \mu_1$$

$$Z = m \frac{d^2z}{dt^2} = N \cos \nu_1.$$

Dostawy kierunkowe siły zewnętrznej P zależą od przyjęcia i możemy je uważać za stałe, natomiast dostawy kierunkowe reakcji N możemy wyrazić, jak poprzednio, za pomocą pochodnych cząstkowych funkcji $x = f(y, z)$. Podstawimy przeto:

$$\cos \lambda_1 = \frac{1}{M}, \quad \cos \mu_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{M}, \quad \cos \nu_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{M}.$$

Otrzymamy trzy równania ruchu:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -P \cos \lambda + \frac{1}{M} N,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = P \cos \omega + \frac{\partial f}{\partial y} N,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial z} N.$$

Całkując dwukrotnie te równania, możemy otrzymać trzy równania nowe, wyrażające związek pomiędzy czasem t , a współrzędnymi toru. Po wyrugowaniu następnie czasu dojdzie możemy do równania toru. Zarazem zaznaczymy, że najogólniejszy wygląd tych równań byłby:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= P \cos \lambda + \frac{1}{M} N, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= P \cos \mu + \frac{\partial f}{\partial y} N, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= P \cos \nu + \frac{\partial f}{\partial z} N, \end{aligned} \right\} \text{VI)}$$

przyczem siła P jest wypadkową ze wszystkich sił zewnętrznych, jakie działają na cząstkę ziemi.

Najprostszym przykładem będzie ruch niewolny cząstki poruszającej się po płaszczyźnie określonej równaniem:

$$x = ay + bz + c$$

pod wpływem siły P , działającej wzdłuż osi XX^{00} .

Obliczymy:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = b, \quad M = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Wyrażenia zatem wszystkie po prawej stronie równań ruchu zawierają tylko ilości stałe i możemy napisać ogólnie:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = p, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = q, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = r.$$

Po dwukrotnem zcałkowaniu otrzymamy:

$$x = \frac{pt^2}{2} + c_1 t + c'_1,$$

$$y = \frac{qt^2}{2} + c_2 t + c'_2,$$

$$z = \frac{rt^2}{2} + c_3 t + c'_3.$$

Stałe c'_1 , c'_2 i c'_3 oznaczają drogę przebytą przez cząstkę ziemi przed początkiem obserwowanego czasu, stałe zaś c_1 , c_2 i c_3 oznaczają prędkości początkowe w kierunkach trzech osi. Wszystkie te ilości możemy położyć równe zeru, gdyż takimi one są w chwili, gdy cząstka ziemi wstępuje na powierzchnię. Wskutek tego równania przybiorą postać:

$$x = \frac{pt^2}{2}, \quad y = \frac{qt^2}{4}, \quad z = \frac{rt^2}{2},$$

albo:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Podstawimy wartości za stałe p , q , r :

$$\frac{x}{P \cos \lambda + \frac{1}{M} N} = \frac{y}{\frac{a}{M} N} = \frac{z}{\frac{b}{M} N},$$

albo:

$$x \frac{a}{M} N = y (P \cos \lambda + \frac{1}{M} N),$$

$$x \frac{b}{M} N = z (P \cos \lambda + \frac{1}{M} N).$$

Stąd wyrugujemy reakcję N :

$$N = \frac{-y P \cos \lambda}{y \frac{1}{M} - x \frac{a}{M}} = \frac{-z P \cos \lambda}{z \frac{1}{M} - x \frac{b}{M}},$$

albo:

$$\frac{y}{y - ax} = \frac{z}{z - bx}.$$

Do tego równania dołączymy dane równanie płaszczyzny

$$x = ay + bz + c$$

i rugując raz y , zaś drugi raz z , otrzymamy dwa równania rzutów toru na płaszczyzny XZ i XY .

Równania te będą:

$$ax - (a^2 + b^2)y - ac = 0$$

$$bx - (a^2 + b^2)z - bc = 0,$$

albo w formie symetrycznej:

$$\frac{x - x_1}{a^2 + b^2} = \frac{y - y_1}{a} = \frac{z - z_1}{b}.$$

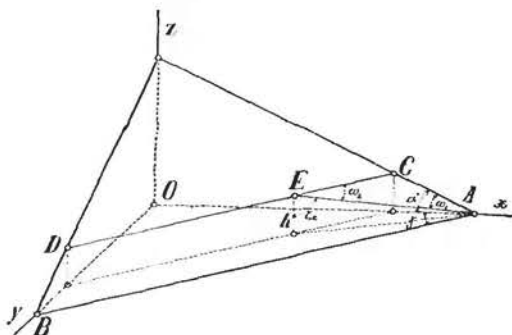
Znajdziemy dostawy kierunkowe toru:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \xi_2}{a^2 + b^2} = \frac{\cos \eta_2}{a} = \frac{\cos \zeta_2}{b} &= \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 + a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \frac{1}{KM}. \end{aligned}$$

Otrzymamy zatem:

$$\cos \xi_2 = \frac{K}{M}; \quad \cos \eta_2 = \frac{a}{KM}; \quad \cos \zeta_2 = \frac{b}{KM}.$$

Tor punktu jest linią prostą, w danych tutaj warunkach wznoszącą się ku górze i odchylającą się od płaszczyzny XZ



Rycina 25.

(ryc. 25). Fakt ten sprawia, że nie cała powierzchnia lemiesza będzie czynna i cząstka ziemi, znajdująca się początkowo w punkcie A ,

nie pójdzie ku C , lecz znajdzie się w punkcie E . Odchylenie CE zależy niewątpliwie od wzniesienia lemiesza h . Ażeby je obliczyć, postąpimy w następujący sposób: Z danego równania płaszczyzny, podstawiając $y = 0$, znajdziemy równanie śladu AC w postaci:

$$x = bz - c.$$

lub też:

$$\frac{x - x_1}{b} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{1}$$

i obliczymy dostawy kierunkowe:

$$\cos \lambda_1 = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}; \quad \cos \mu_1 = 0; \quad \cos \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Podobnie dla krawędzi AB wyrażonej równaniem:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{1} = \frac{z - 0}{0},$$

otrzymamy:

$$\cos \lambda_2 = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}; \quad \cos \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}; \quad \cos \nu_2 = 0.$$

Znając przytem dostawy kierunkowe toru, obliczymy kąt $CAE = \omega_1$:

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 &= \frac{K}{M} \cdot \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{b}{KM \sqrt{1 + b^2}} = \frac{b}{M \sqrt{1 + b^2}} \left\{ K + \frac{1}{K} \right\} = \\ &= \frac{b}{M \sqrt{1 + b^2}} \cdot \frac{1 + K^2}{K}. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś $1 + K^2 = M^2$, będzie przeto:

$$\cos \omega_1 = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} \cdot \frac{M}{K},$$

z czego łatwo obliczyć, że

$$\sin \omega_1 = \frac{a}{K \sqrt{1 + b^2}}.$$

W taki sam sposób obliczymy kąt $CEA = BAE = \omega_2$. Mianowicie:

$$\cos \omega_2 = \frac{K}{M} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{a}{KM \sqrt{1 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot \frac{M}{K}.$$

Stąd:

$$\sin \omega_2 = \frac{b}{K \sqrt{1 + a^2}}.$$

Z trójkąta ACE mamy:

$$AC : CE = \sin \omega_2 : \sin \omega_1,$$

czyli:

$$CE = AC \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2}.$$

Podstawimy wartości w tem równaniu:

$$CE = AC \frac{a \sqrt{1 + a^2}}{b \sqrt{1 + b^2}},$$

ale jak widać z figury:

$$AC = \frac{h}{\cos \nu_1} = h \sqrt{1 + b^2}.$$

Wobec tego:

$$CE = h \cdot \frac{a}{b} \sqrt{1 + a^2}.$$

Wprowadzając wyprowadzone już poprzednio równanie płaszczyny tnącej poziomo w postaci:

$$x = -\cotg \gamma y - \frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma} z + c,$$

t. j. podstawiając:

$$a = -\cotg \gamma, \quad b = -\frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma},$$

otrzymamy:

$$n = CE = h \frac{\cos \gamma}{\cotg \alpha} \sqrt{1 + \cotg^2 \gamma} = h \frac{\cotg \gamma}{\cotg \alpha}.$$

kładąc dodatkowo $h = s \sin \alpha$, gdzie s oznacza normalną szerokość noża, otrzymamy:

$$n = s \frac{\cos \gamma}{\cotg \alpha}.$$

Cheąc, ażeby cząstka ziemi od końca lemiesza szła jego krawędzią, nie robiąc wypustki w postaci trójkąta ACE , czyli inaczej:

chcąc ażeby cały lemiesz był efektywnym, musimy przydłużyć ostrze o długość znaną n , t. j. wpuszczyć lemiesz w pole.

Przykład: Dany lemiesz o kącie normalnym cięcia $\alpha = 20^\circ$ nachylony do kierunku ruchu pod kątem $\gamma = 45^\circ$ i posiadający szerokość brzeszczota 80 mm i 100 mm; obliczyć wpuszczenie w rolę n .

Odpowiedź: Z rachunku wypada $n = 20.589$ mm, zatem w zao-
krągleniu $n = 21$ mm zaś dla $s = 100$ mm wypada $n = 26$ mm.

Wpuszczenie ostrza lemiesza w pole wpływa w pierwszej linii na to, że cały lemiesz dźwiga skibę, a nie pozostaje żadna wolna część lemiesza, na którejby nie leżały tory dolnej krawędzi skiby. W ten sposób wyjęcie skiby jest zupełnie prawidłowe.

Drugą korzyścią jest przesunięcie punktu przyłożenia oporów w stronę calizny i zapewnienie pługowi większej stałości równowagi w pochodzie.

Ten drugi fakt uznaje i Blomeyer¹⁾, pisząc że „można dopuścić nieznaczne wpuszczenie, gdyż pług lepiej utrzymuje się w swoim kierunku“. Nie uznaje jednak racjonalności takiego konstruowania lemiesza, mówiąc, że „przy dobrze zbudowanych i dobrze zaprzężonych pługach jest to nie konieczne, a nawet teoretycznie błędne“.

Z naszego wywodu o torze punktu masy, poruszającego się po lemieszu, wynika coś wręcz przeciwnego, a mianowicie racjonalność nieznacznego wpuszczenia lemiesza w pole. Praktyczni konstruktorowie doszli na drodze długoletnich prób i porównań do tego kształtu lemieszy, któryśmy starali się na tem miejscu teoretycznie uzasadnić.

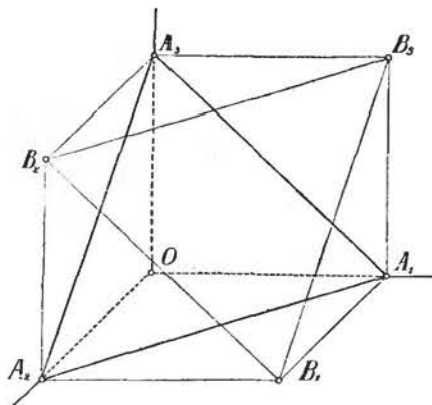
Ruch ziemi po odkładnicy, czy też wogóle po powierzchni krzywej narzędzia można rozłożyć w każdym punkcie na ruch po trzech równocześnie działających klinach. Płaszczyznę bowiem styczną w dowolnym punkcie powierzchni krzywej przyłożoną można w jej działaniu, jak już poprzednio wspomniano, zastąpić trzema płaszczyznami klinów. Metodę tę, tłómaczącą w poglądowy sposób działania odkładnicy, wprowadził prof. Gorjaczkin²⁾ i z tej metody wyjdziemy w dalszych rozumowaniach. Już poprzednio wspomnieliśmy o niej, na tem miejscu jednak należy wzmiankę rozszerzyć w odniesieniu do ruchu ziemi po odkładnicy.

Płaszczyzna poruszająca się w środowisku ziemnym tworzy trzy charakterystyczne kąty zawarte pomiędzy jej śladami a osiami układu, kąty α , β , κ (ryc. 26). Uzupełniając figurę, uzyskamy trzy kliny o nachyleniu α , β i κ . I tak: pierwszy klin $A_1B_1A_2B_2A_3O$ ma ostrze ustawione do poziomu pod kątem α , drugi klin

¹⁾ Dr. A. Blomeyer: Die mechanische Bearbeitung des Bodens. Leipzig u. Berlin, 1879.

²⁾ W. P. Gorjaczkin: Pługi. St. Petersburg 1906.

$A_1A_2B_2B_3A_3O$ ustawiony pod kątem β do płaszczyzny pionowej ruchu, trzeci zaś klin $A_1B_1A_2A_3OB_3$ nachylony pod kątem α do poziomu. Każdy z nich spełnia inną funkcję: pierwszy podnosi ziemię ku górze, drugi przesuwają ziemię na bok, trzeci obraca w płaszczyźnie normalnej do kierunku ruchu. Zatem decydujące dla wykonywania tych czynności są wspomniane kąty. Od ich zmiany zależy bowiem typ odkładnicy. Jeśli zmienia się tylko kąt α , dwa zaś inne pozostają te same otrzymamy powierzchnię walcową. Jeśli



Rycina 26.

kąt α zmienia się proporcjonalnie do drogi mierzonej wzdłuż osi XX^{osc} , otrzymamy powierzchnię śrubową. Wogóle z wielkości kątów rzeczonym i z prawidła, w jaki kąty owe zmieniają się ze zmianą współrzędnych, możemy wnioskować o tem, czy powierzchnia odkładnicy działa krusząco, czy też odwraca jednocześnie ziemię i która z tych czynności przeważa.

Znając równanie powierzchni krzywej $x = f(y, z)$ i płaszczyznę stycznej do niej, możemy znaleźć równania śladów na wszystkich trzech płaszczyznach rzutów:

$$z - z_1 = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} (x - x_1), \quad \text{na płaszczyźnie } y = y_1,$$

$$y - y_1 = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} (x - x_1), \quad \text{na płaszczyźnie } z = z_1,$$

$$z - z_1 = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} (y - y_1), \text{ na płaszczyźnie } x = x_1.$$

Widzimy zatem, że wielkość kątów charakterystycznych znajdziemy łatwo dla dowolnej powierzchni w dowolnym jej punkcie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \operatorname{tg} \kappa = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

N. p. dla płaszczyzny $x = ay + bz + c$ otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{a}, \quad \operatorname{tg} \kappa = - \frac{a}{b}.$$

Dla walca kołowego:

$$x = -y \operatorname{tg} \varphi + \xi \sec \varphi + \sec \varphi \sqrt{r^2 - (z - r)^2},$$

będzie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varphi \frac{\sqrt{r^2 - (z - r)^2}}{-(z - r)}; \quad \operatorname{tg} \beta = - \cotg \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \kappa = \sin \varphi \frac{\sqrt{r^2 - (z - r)^2}}{(z - r)}.$$

Powyższy sposób przedstawienia, jakkolwiek niezwykle obrazowy, nie jest jednakże ścisły. Ażeby to pokazać, weźmiemy pod uwagę powierzchnię walcową i dwa punkty materyalne, spoczywające początkowo na ostrzu lemiesza. Obadwa punkty, poruszając się po walcu poziomym, muszą zakreślać równocześnie takie same tory, wskutek czego podczas całego procesu linia sztywna, łącząca oba punkty, musi zajmować kolejno położenia wszystkich rodzących walca. Będzie tu zatem zachodzić podnoszenie materyału i przesunięcie go w bok, odwracania wcale nie będzie. Tymczasem z wyprowadzonych wzorów na styczne kątów charakterystycznych wynikałoby, że tylko $\operatorname{tg} \alpha = f(z)$ i $\operatorname{tg} \kappa = \varphi(z)$, zaś $\operatorname{tg} \beta = \text{const.}$ t. j. że istnieć będzie stopniowe podnoszenie i skręcanie, przesunięcie zaś będzie ilością stałą niezależną wcale od wielkości rzędnej z .

Nieporozumienie wynikło prawdopodobnie z rozpatrywania

pracy odkładnicą śrubową. Jeśli wogóle weźmiemy pod uwagę powierzchnię prostokreślną, to wtedy, zgodnie z rzeczywistością, musimy przyjąć za zasadę, że krawędź przyzmatu ziemi pomyślana wzdłuż tej rodzącej powierzchni, która leży w płaszczyźnie poziomej, będzie zajmować kolejno wszystkie położenia rodzącej. Przy powierzchni śrubowej będzie zatem krawędź przyzmatu ziemi obracać się stopniowo dokoła osi powierzchni. Tu będzie typowe odwracanie skiby, równoczesne z podniesieniem i odchyleniem w bok.

Skoro jednakże tę samą zasadę równoległości do rodzącej powierzchni zastosujemy przy walcu, nie możemy wcale dojść do pojęcia odwracania skiby. Że tak jest w istocie, świadczy i fakt, że konstruktorowie praktyczni, chcąc wywołać w odkładnicach cylindrycznych i odwracanie skiby, muszą koniecznie odkładnicę wyginać w kształt przybliżony do powierzchni śrubowej.

Druga przyczyna nieporozumienia tkwi gdzieindziej. Przy rozpatrywaniu odwracania skiby odkładnicą śrubową teoria brała pod uwagę powierzchnię śrubową o rodzącej prostopadłej do osi. Wskutek tego skiba odwracała się szerokością swoją i można było uważać, że szerokość skiby niezdeformowana zajmuje kolejno wszystkie pozycje rodzącej. Skoro mamy do czynienia z płaszczyzną, to zobaczymy, że krawędź podcięta, a więc równoległa do ostrza, porusza się po płaszczyźnie stale równoległe do pierwotnego swego położenia. Tak samo i po powierzchni walcowej poziomej, będzie zawsze lemiuszem podcięta krawędź skiby posuwać się od jednej rodzącej do następnych i stale będzie równoległa do niej. Tylko ten kierunek uważany w skibie nie ulegnie deformacji. Między innymi także dowolna prosta równoległa do szerokości roboczej musi zostać wygięta. Przy rozpatrywaniu ruchu po powierzchni możemy obserwować i oceniać ruch tylko takich elementów, które nie ulegają deformacji.

Stosując tę zasadę do odkładnic prostokreślnych, będziemy uważali za charakterystyczny ruch prostej, równoległej do rodzącej powierzchni. Prosta taka w powierzchni śrubowej o rodzącej prostopadłej do osi będzie naturalnie pierwotnie identyczna z szerokością skiby. Wogóle też będzie ona taką dla wszystkich powierzchni prostokreślnych, dla których jedną kierownicą jest płaszczyzna prostopadła do kierunku ruchu, t. j. w przyjętem naszym znakowaniu płaszczyzna YZ , dwie zaś inne kierownice są dowolne. Przy zachowaniu równoległości do tej płaszczyzny może prosta tworząca, względnie zaś prosta sztywna pomyślana w skibie, zajmować rozmaite położenia, w których będzie pod różnymi kątami nachylona do płaszczyzny poziomej rzutów. Tu zatem możemy mówić o odwracaniu skiby. Jeżeli, jak to jest i przy walcu poziomym, kierownicą będzie płaszczyzna pozioma rzutów, wtedy krawędź

skiby będzie zawsze tworzyć ten sam kąt z tą płaszczyzną i o obracaniu jej niema mowy.

Nie można też stosować bez zastrzeżeń metody proponowanej przez prof. Garjaczkina, gdyż prowadzić ona może do takich sprzeczności, jakie pokazaliśmy na powierzchni walcowej, której profil równoległy do płaszczyzny YZ wykazuje zmienne kąty α , a które mimoto nie jest zdolna do odwracania skiby. Odwrócenie bowiem zapomocą powierzchni walcowej możliwe byłoby jedynie wtedy, gdyby walec nie ograniczał się jak w rzeczywistej konstrukcyi do dolnej wklęsłej ćwiartki powierzchni walcowej, ale przekraczał $z_{\max}$, t. j. obejmował i ćwiartkę drugą.

Przytoczone przykłady pozwolą nam na zupełnie ogólne postawienie kryteriów, służących do oceny, którą z trzech głównych czynności zdolna jest wykonać dawa powierzchnia użyta jako odkładnica przy pługu.

W tym celu wyobraźmy sobie powierzchnię prostokreślną ustawioną tak, iż jedna z rodzących leży w płaszczyźnie poziomej rzutów i stanowi ostrze lemiesza. Pod względem praktycznym przyjęcie takie nie narusza zupełnie prawdziwości wysnutych wniosków. Gdybyśmy bowiem pozostawili lemiesz poza obrębem naszych wywodów, to wtedy moglibyśmy zawsze jeszcze przyjąć jedną pierwszą rodzącą powierzchni odkładnicy poziomo ustawioną, a następnie transformując odpowiednio układ spólrzędnych, postawić kwestyę tak, jak powyżej zaznaczono.

Weźmy następnie pod uwagę sztywną linię, która łączy szeregi punktów materialnych, leżących na początku ruchu na ostrzu lemiesza. Punkty tej prostej będą odbywały ruch podwójnie nieswobodny. Jednym warunkiem nieswobody jest konieczność posuwania się po powierzchni, drugim sztywność uważanej prostej, a więc stały odstęp wzajemny punktów prostej i niezmienna jej długość. Przy posuwaniu się prostej po powierzchni musi ona zajmować kolejno położenia wszystkich rodzących, inaczej bowiem prosta nie leżałaby w całej swej długości na powierzchni i ta zużywałaby się nierównomiernie. Ażeby znaleźć synchroniczne położenia wszystkich punktów linii sztywnej na powierzchni, najlepiej określić analitycznie, czy też graficznie tor środka ciężkości owej prostej po powierzchni, następnie zaś na odpowiedniej rodzącej oznaczyć położenie końców prostej. Naturalnie możemy też, posługując się tą samą metodą, oznaczyć każdorazowe położenie linii oznaczającej prostą pierwotnie szerokość skiby.

Wszędzie tu przyjmujemy odkładnicę prostokreślną, jako najbardziej nadającą się do transportowania skiby. Już z uwag poprzednio przytoczonych wynika bezsprzecznie, że używanie innych powierzchni aniżeli prostokreślne nie jest wskazaniem. Praktyczne próby przeprowadzone przez prof. Gorjaczkina potwierdzają to

w zupełności¹⁾. Próbuując pługi z nieobtartą jeszcze farbą na odkładnicy, otrzymano na nich różnego kształtu obrazy, pochodzące z obtarcia jednych, zaś z zalepienia ziemią miejsc drugich i przez porównanie przekonano się, że przyczyną wadliwej pracy jest „odstąpienie od form prostokreślnych”.

Z uwagi tedy na ważność powierzchni prostokreślnych poświęćmy im słów kilka:

Weźmiemy przytem pod uwagę powierzchnie prostokreślne, których rodząca jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów, dwie zaś kierownice są umieszczone w płaszczyznach równoległych do siebie i mają równania:

$$1) \quad y = 0, \quad x = f(z);$$

$$2) \quad y = b, \quad x = \varphi(z).$$

Prosta rodząca musi zawsze mieć jeden punkt wspólny z jedną kierownicą, drugi zaś z drugą i ma równanie:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad z = z_1 = z_2,$$

przyczem $x_1 y_1 z_1$ są współrzędnymi punktu na jednej kierownicy, $x_2 y_2 z_2$ na drugiej.

Spółrzędne te muszą sprawdzać i równania kierownic, otrzymamy przeto:

$$y_1 = 0, \quad x_1 = f(z),$$

$$y_2 = b, \quad x = \varphi(z).$$

Podstawiawszy to w równanie prostej rodzącej, dostaniemy:

$$\frac{y}{b} = \frac{x - f(z)}{\varphi(z) - f(z)},$$

jako ogólne równanie cylindroida.

Równanie to może przejść w inne w następujących przypadkach:

A) Jeśli obiedwie kierownice są takie same i równania ich różnią się jedynie ilością stałą:

$$1) \quad y = 0, \quad x = f(z);$$

$$4) \quad y = b, \quad x = \varphi(z) = l, \quad \text{gdzie } l = b \cot \gamma,$$

²⁾ W. P. Gorjaczkin: „Ispytanie sielsko-chazajstwiennych maszin i orudij pri Moskowskiom s.-ch. Institutie w 1909 g”. (Izwestija biuro po s.-ch. miechanikie).

otrzymamy:

$$\frac{y}{b} = \frac{x - f(z)}{l},$$

jako równanie walca

B) Jeśli jedna kierownica jest dowolną krzywą w płaszczyźnie $y = -b$ równoległej do płaszczyzny rzutów XX' , druga zaś jest osią ZZ'' , jeśli więc będzie:

$$1) \quad y = 0, \quad x = 0;$$

$$2) \quad y = -b, \quad x = \varphi(z).$$

otrzymamy:

$$-\frac{y}{b} = \frac{x}{\varphi(z)},$$

jako równanie konoidu.

Biorąc kierownice tak, by koniec lemiesza leżał w osi XX'' , ustawimy równania kierownic:

$$1) \quad y = b, \quad x = 0,$$

$$2) \quad y = 0, \quad x = \varphi(z)$$

i dostaniemy równanie konoidu w postaci:

$$\frac{y - b}{b} = \frac{x}{\varphi(z)},$$

albo:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{\varphi(z)} + 1.$$

C) Jeśli jedną kierownicą jest oś ZZ'' , drugą zaś dowolna prosta nachylona do płaszczyzny XY , jeśli zatem będzie:

$$1) \quad y = 0, \quad x = 0,$$

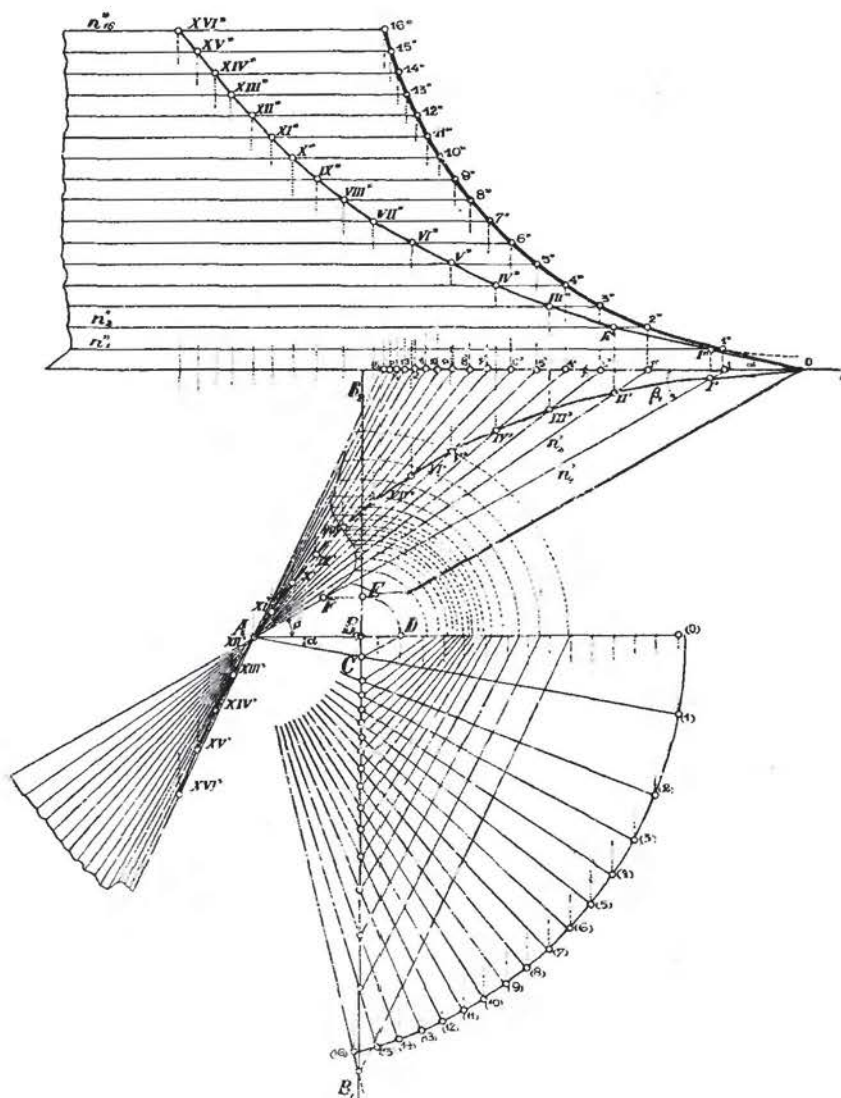
$$2) \quad y = az + \alpha, \quad x = bz + \beta,$$

otrzymamy równanie paraboloidy hyperbolicznej:

$$\frac{y}{az + \alpha} = \frac{x}{bz + \beta}.$$

Analityczna metoda wyznaczania toru cząstki ziemi po odkładnicy jest żmudna, przeto możemy użyć tutaj metody wykreślnej. Konstrukcję przeprowadzimy dla konoidu, którego rodząca jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów, jedna kierownica K_1

jest łukiem kołowym i leży w płaszczyźnie pionowej rzutów, druga zaś kierownica K_2 jest prostą pionową (ryc. 26).



Rycina 27.

Przeprowadzając w równych odległościach Δh płaszczyzny pomocnicze równoległe do płaszczyzny rzutów poziomej, możemy

uzyskać szereg przekrojów prostoliniowych wzdłuż rodzących konoidu ($n_1, n_2, n_3, \dots$).

Wiemy, że płaszczyzna styczna do powierzchni da nam ślady nachylone pod charakterystycznymi kątami do odpowiednich osi. Z uwagi zatem, że

$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \operatorname{tg} \beta, \quad \text{zaś} \quad \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

możemy napisać:

$$\begin{aligned} dl &= \frac{\partial f}{\partial z} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \cdot dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} dz = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha} dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\sin \beta} dz. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę skończone Δh , otrzymamy w przybliżeniu:

$$\Delta l = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\sin \beta} \Delta h.$$

Ażeby dla każdego przyrostu wysokości Δh znaleźć odpowiednie kąty α i β , musimy wykreślić płaszczyznę styczną. Korzystamy jednakże z tego, że powierzchnia taka musi zawierać w sobie rodzącą konoidu i prostą styczną do kierownicy K_1 . Ponieważ zaś pierwsza z tych prostych leży w płaszczyźnie pionowej rzutów, druga zaś jest równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, przeto ślad poziomy płaszczyzny stycznej będzie równoległy do rzutu poziomego rodzącej, zaś ślad pionowy będzie równoległy do stycznej kierownicy K_1'' . Wobec tego, że nam chodzi tylko o kąty nachylenia tych śladów, a nie o nie same, wystarczy zauważyć, że dla płaszczyzny stycznej wzdłuż rodzącej n_1 , będzie kąt α_1 zawarty pomiędzy osią a styczną w punkcie A'' , kąt zaś β_1 będzie zawarty pomiędzy osią a rzutem n' .

Mając znane dla szeregu przekrojów kąty α i β , możemy skonstruować wyrażenie na Δl w następujący sposób. Kreślimy z dowolnego punktu dwa pęki promieni zawierających z prostą OX kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$, tudzież $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_n$. Dla konoidu najlepiej obrać w tym celu punkt A .

Jeśli w odległości $\Delta h = AB$ wykreślimy prostą normalną, wtedy długość AB odcięta na prostopadłej promieniem $A(1)$ będzie:

$BC = \Delta h \operatorname{tg} \alpha$. Wykreśliwszy z punktu C równoległą do promienia AI' , otrzymamy:

$$\sphericalangle CDB = \beta_1, \text{ wobec czego:}$$

$$BD = BC \cotg \beta = \Delta h \operatorname{tg} \alpha \cdot \cotg \beta.$$

Odrzucając łukiem $BE = BD$, a następnie po wykreśleniu prostej $EF' = AO$, możemy napisać, że:

$$AF' = \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cotg \beta}{\sin \beta} \cdot \Delta h = \Delta l.$$

W ten sposób możemy dla każdej pary promieni znaleźć odpowiedni przyrost Δl .

Dyagram powyższy możemy dla dokładności przy bardzo małych Δh wykonać w odpowiednio dobranej skali, a następnie przebieś uzyskane długości na rzuty poziome rodzących, odcinając na n'_1 długość $1'I' = \frac{AF'}{m} = \Delta l_1$, na n'_2 długość $2'II' = \Delta l_1 + \Delta l_2$ i t. d.

Łącząc odpowiednie punkty, otrzymamy krzywą $0, I' II' \dots$ rzut poziomy toru punktu A , z którego zapomocą odpionowania znajdziemy łatwo i rzut pionowy $0I'' II'' \dots$.

Dla odładnicy walcowej konstrukcja jeszcze bardziej uprości się, gdyż kąt β jest stały.

XII. Zakończenie.

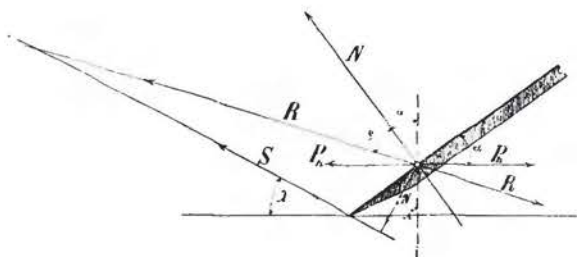
Już przy rozpatrywaniu podcinania ziemi lemieszem zauważyliśmy, że nie zawsze uda się wgnieść cały materiał wyparty przez nóż w warstwy sąsiednie, gdyż przy nieznacznym zanurzeniu narzędzia w ziemi może nastąpić zerwanie materiału. Skiba bowiem podcięta, odbywając przepisana swoją drogę po lemieszu i odkładnicy, musi się odkształcać i jest narażona na złamanie, ścinanie i skręcanie. Jeśli też deformacja przekroczy swoje przyrodzone granice, musi materiał uleść zerwaniu i tem prędzej przyjdzie do zerwania, im cieńszą jest zbierana warstwa ziemi, t. j. im mniejsze jest zanurzenie narzędzia.

Rozpatrzmy warunki równowagi w takiej cienkiej warstwie deformowanej przez nóż AB o kącie cięcia α (ryc. 28).

Siła zewnętrzna P wywoła ciśnienie normalne N i tarcie narzędzia o ziemię T , które złożone z ciśnieniem normalnem da nam reakcję R nachyloną do normalnej pod kątem φ .

Wielkość reakcyi znajdziemy z następującego rozważania:

Zarówno narzędzie na ziemię, jak i ziemia na narzędzie ciśnie z siłą R . Biorąc pod uwagę ciśnienie na narzędzie, możemy rozłożyć je na siłę poziomą P_h i na siłę pionową P_v . Ponieważ jednak ruch narzędzia jest nieswobodny, więc siła pionowa znieść



Rycina 28.

się musi oporem toru, a tylko siła pozioma P_h (nie licząc ewentualnego tarcia powstałego z ciśnienia P_v) będzie wchodzić w rachubę. Możemy też napisać, że:

$$R = \frac{P_h}{\cos \beta} = \frac{P_h}{\cos (90 - \alpha - \varphi)} = \frac{P_h}{\sin (\alpha + \varphi)}.$$

Wiadomo nam jednak z obserwacji, że materiał ziemny pęka pod działaniem narzędzia. Oznaczmy kąt, jaki zawiera pęknięcie z poziomem przez λ i rozłożmy siłę R , która działa na ziemię na dwie składowe normalną N' i równoległą do płaszczyzny usuwiskowej S .

Jak z figury widać, jest $\sphericalangle(PN') = 180 - (\alpha - \varphi - \lambda)$, zaś $\sphericalangle(RS) = 90^\circ - \sphericalangle(RN') = (\alpha + \varphi + \lambda) - 90^\circ$, przyczem kąt $\sphericalangle(RS)$ jest zawsze ostrym; kąt $\alpha + \varphi + \lambda$ rozwartym, wobec tego muszą istnieć relacje:

$$S = R \sin (\alpha + \varphi + \lambda),$$

$$N' = R \cos (\alpha + \varphi + \lambda).$$

Znajdziemy też siłę ścinającą materiał:

$$K = S + N'\psi,$$

gdzie $\psi = \operatorname{tg} \varphi_1$ jest współczynnikiem tarcia wewnętrznego.

Inaczej:

$$K = R [\sin (\alpha + \varphi + \lambda) + \cos (\alpha + \varphi + \lambda) \operatorname{tg} \varphi_1].$$

Oznaczmy szerokość skiby przez b , zanurzenie zaś narzędzia przez t . Wyniknie z tego, że powierzchnia ścinana:

$$F = \frac{bt}{\sin \gamma}.$$

Przy ścinaniu powstać muszą naturalnie natężenia styczne τ , które zesumowane razem dadzą siłę równoważącą się z siłą ścinającą. Otrzymamy tedy:

$$K = F\tau,$$

albo:

$$R [\sin (\alpha + \varphi + \lambda) + \cos (\alpha + \varphi + \lambda) \operatorname{tg} \varphi_1] = \frac{bt}{\sin \lambda} \tau.$$

Przekrój, w którym nastąpi zerwanie, nie jest wprawdzie ściśle oznaczony, gdyż kąt λ jest nieoznaczony, ale mimo to możemy położenie jego znaleźć, wychodząc z zapatrywania, że będzie to przekrój, w którym będzie:

$$t_{\max} = \tau_3.$$

Rozwiążemy równanie powyższe ze względu na τ :

$$\tau = \frac{R}{bt} [\sin (\alpha + \varphi + \lambda) + \cos (\alpha + \varphi + \lambda) \operatorname{tg} \varphi_1] \sin \lambda$$

i położymy pierwszą pochodną $\frac{d\tau}{d\lambda} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{R}{bt} [\cos (\alpha + \varphi + \lambda) - \sin (\alpha + \varphi + \lambda) \operatorname{tg} \varphi_1] \sin \lambda + \\ + \frac{R}{bt} [\sin (\alpha + \varphi + \lambda) + \cos (\alpha + \varphi + \lambda) \operatorname{tg} \varphi_1] \cos \lambda = 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd dla $\tau_{\max} = \tau_3$:

$$\text{czyli:} \quad -\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} (\alpha + \varphi + 2\lambda),$$

$$\pi - \varphi_1 = \alpha + \varphi + 2\lambda,$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \varphi + \varphi_1}{2}$$

$$\text{i} \quad \alpha + \varphi + \lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \varphi - \varphi_1}{2}.$$

Po podstawieniu otrzymamy wielkość siły ścinającej:

$$K = R \left[\cos \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} + \sin \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} \operatorname{tg} \varrho_1 \right] = \frac{bt}{\cos \frac{\alpha + \varrho + \varrho_1}{2}} \kappa_3.$$

Stąd:

$$R = \frac{bt}{\cos \frac{\alpha + \varrho + \varrho_1}{2} \left[\cos \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} + \sin \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} \operatorname{tg} \varrho_1 \right]} \kappa_3,$$

a także:

$$P_h = bt \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \frac{\alpha + \varrho + \varrho_1}{2} \left[\cos \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} + \sin \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} \operatorname{tg} \varrho_1 \right]} \kappa_3.$$

Ponieważ zaś:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} - \sin \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} \operatorname{tg} \varrho_1 &= \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} \cos \varrho_1 - \sin \frac{\alpha + \varrho - \varrho_1}{2} \sin \varrho_1}{\cos \varrho_1} = \frac{\cos \frac{\alpha + \varrho + \varrho_1}{2}}{\cos \varrho_1}, \end{aligned}$$

przeto otrzymamy po podstawieniu wzór ostateczny:

$$P_h = bt \frac{\sin(\alpha + \varrho) \cos \varrho_1}{\cos^2 \frac{\alpha + \varrho + \varrho_1}{2}} \kappa_3,$$

Chcąc ten wzór zastosować i do lemieszy skośnie ustawionych względem osi YY^{ow} , musimy pamiętać, iż kąt α oznacza nam tutaj kąt nachylenia toru do osi XX^{ow} . Ponieważ zaś $\cos \xi_2 = \frac{K}{M}$, zaś $\sin \xi_2 = \frac{1}{M}$, przeto możemy funkcję kąta α wyrazić stałymi równania płaszczyzny:

$$x = ay + bz + c.$$

W tym też celu zamiast przekształcać nasze równanie, musimy obliczyć osobno wielkość kąta α i wstawić go w równanie. Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia stosunek wzajemny oporu przy podcinaniu, który obliczyliśmy poprzednio, do tego oporu, który

znaleźliśmy obecnie. Już poprzednio zaznaczyliśmy, że opory przez wgniatacie mogą istnieć jedynie wtedy, gdy zanurzenie jest wielkie; tu dodamy jeszcze pewną uwagę. Pracę technologiczną, jak uczy obserwacja, należy przy lemieszu rozdzielić na dwie fazy. Pierwszą jest podcinanie i wgniecenie materiału na pewną grubość, drugą zniszczenie spójności przez ścięcie, jak w danym przykładzie, lub też przez ewentualne złamanie. Na razie ograniczamy się jedynie do ścinania i będziemy obserwowali proces pracy lemiesza. Z początku opór w płaszczyźnie usuwiskowej jest równy zeru i dopiero w miarę wnikania ostrza w ziemię powstają natężenia styczne i rosną do pewnego maximum, które istnieć musi tuż przed samem zerwaniem materiału. Kierunek płaszczyzny usuwiskowej wcale nie zawiśł od głębokości zanurzenia, natomiast zależy od niej wielkość powierzchni ścinanej. gdyż wiemy, że $F = \frac{bt}{\sin \lambda}$. Im głębiej zatem idzie narzędzie, tem znaczniejszą jest moc na ścinanie warstwy ziemi, tem dalej zatem i chwila, w której natężenia osiągną swoje maximum. Wskutek tego przy większych zanurzeniach może ostrze dalej posunąć się w materiale i więcej zbić ziemi, wgniatając ją w dalsze warstwy. Pytanie zachodzi, jak daleko posunie się ostrze lemiesza przy danem zanurzeniu, aż do chwili pęknięcia materiału. W chwili granicznej musi niewątpliwie siła zewnętrzna wciskająca lemiesz być tak wielka, jak opory spójności w płaszczyźnie usuwiskowej.

Wiemy z poprzedzającego, że siła poruszająca lemiesz wynosi:

$$P = \sigma(1 + \varphi K) \frac{1 + \varphi^2}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \cdot \frac{b^2 h}{2} \left\{ 1 + \frac{\psi}{K - \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \frac{M}{K - \varphi} \right\} + \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} (1 + \varphi K) bh \kappa_2,$$

czyli w skróceniu:

$$P = A \cdot \frac{b^2 h}{2} + Bbh \kappa_2.$$

Ta siła musi być równa tej, jakiej potrzeba do zerwania materiału, t. j. w skróceniu:

$$P = P_h = Cbt \kappa_2.$$

A zatem:

$$A \frac{b^2 h}{2} + B b h x_2 = C b t x_2,$$

czyli:

$$h = \frac{C t x_2}{A \frac{b}{2} + B x_2}.$$

Widzimy zatem, że przy znnurzeniu t możliwem jest wciśnięcie materiału na głębokość h , przyczem droga lemiesza aż do pierwszego głównego pęknięcia wynosi:

$$S = h \cotg \xi_2.$$

Przykład. Dany lemiesz płaski o wysokości bocznej 10 *cm* zajmujący 25 *cm* szerokości roboczej konstrukcyjnej, dany kąt cięcia 20° i kąt nastawienia do kierunku siły pociągowej 45° . Lemiesz pracuje w ziemi o warunkach fizycznych wymienionych w poprzednich przykładach.

Obliczymy podług wzoru po odpowiednich podstawieniach.

$$P = 76.69 h,$$

a zatem:

$$h = \frac{1}{76.69} b t \frac{\sin(\xi_2 + \varphi) \cos \varphi_1}{\cos^2 \frac{\xi_2 + \varphi + \varphi_1}{2}} x_3.$$

Przyjmijemy $\varphi = 0.750$, co odpowiada w przybliżeniu wartości $\varphi = 36^\circ 52' 11''$, $\psi = 1.000$, t. j. $\varphi_1 = 45^\circ$ i obliczymy kąt $\xi_2 = \alpha = 13^\circ 59' 43'$. Otrzymamy $\xi_2 + \varphi = 50^\circ 52'$, $\xi_2 + \varphi + \varphi_1 = 95^\circ 52'$.

Obliczymy tedy:

$$h = 0.040576 t.$$

Wynika z tego, że ziemię można wcisnąć w dalsze warstwy dość znacznie, zanim nastąpi ścięcie materiału i to wciśnięcie może w ziemi wziętej za przykład dojść i do 4% głębokości.

Przypuśćmy, że głębokość zanurzenia wynosi 20 *cm*, to h będzie wynosić zaledwie 0.8 *cm*.

Wobec tego liczenie oporów lemiesza i idącej za tuż za niem odkładnicy t. j. całego narzędzia przedstawia się następująco:

Obliczamy

$$P_n = C b t x_3,$$

następnie zaś obrachowujemy:

$$h = 0.040576 \text{ t.}$$

Droga odbyta przez ten czas przez narzędzie wyniesie:

$$s = h \cotg \xi_2.$$

Przykład wzorowy. Obliczyć opory kroju i lemiesza przy nachyleniu ostrza lemiesza do kierunku ruchu 45° , jeśli kąt cięcia normalny wynosi przy płaskim lemieszu 20° , szerokość robocza konstrukcyjna 30 cm , głębokość orki 20 cm , krój ma kąt cięcia 15° , pochylenie do poziomu 60° , szerokość brzeszczota 6 cm . Ziemia jest łosem dla którego znaleziono względnie obliczono: moc na zgniatanie $\alpha_2 = 485 \text{ g/cm}^2$, moc na ścinanie (z wzoru Mohra) $\alpha_3 = 85 \text{ g/cm}^2$, współczynnik tarcia zewnętrznego i żelazo $\varphi = 0.60$ (kąt tarcia $\varphi = 30^\circ 58'$), współczynnik tarcia wewnętrznego $\psi = 0.88371$ (kąt tarcia $\psi = 41^\circ 27'$), ciężar jednego cm^3 wynosi $\sigma = 1.8 \text{ g}$.

I. Krój. Równanie płaszczyzny kroju:

$$x = - \frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma} y - \cotg \gamma z + c,$$

$$x = - 4.3094 y - 0.57735 z + c.$$

Obliczymy elementa pomocnicze:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - 4.3094, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.57735, \quad K = 4.3479, \quad M = 4.4614,$$

a następnie wstawimy je w równanie ogólne:

$$P = \sigma (1 + \varphi K) \frac{1 + \varphi^2}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} \cdot \frac{bt^2}{2} \left\{ 1 + \frac{\psi}{K - \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \frac{M}{K - \varphi} \right\} + \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{1 + 2\varphi^2 - \varphi\psi} (1 + \varphi K) bt \alpha_2.$$

Z dyagramu odształceń przy zgniataniu danej ziemi (ryc. 12) po splanimetrowaniu powierzchni dyagramu i podzieleniu jej przez podstawę, otrzymamy natężenie średnie:

$$\alpha_2 = \alpha_m = 280 \text{ g/cm}^2.$$

Następnie możemy obliczyć dla danego przykładu:

$$P = 51.1664 \text{ kg},$$

albo w zaokrągleniu:

$$P = 51.2 \text{ kg}$$

II. Lemiesz. Siłę pociągową obliczymy podług wzoru:

$$P_h = bt \frac{\sin(\alpha + \varrho) \cos \varrho_1}{\cos^2 \frac{\alpha + \varrho + \varrho_1}{2}} z_3,$$

kładąc zamiast kąta α rzeczywisty kąt cięcia ξ_2 .

Równanie lemieszki możemy napisać w takiej samej postaci jak równanie kroju, zmieniając tylko układ o tyle, że oś YY^{oc} stanie się osią ZZ^{oc} i naodwrot. Będzie zatem:

$$x = -\cotg \gamma y - \frac{\cotg \alpha}{\sin \gamma} z + c,$$

gdzie α jest normalnym kątem cięcia.

Obliczone stąd:

$$\sin \xi_2 = \frac{1}{M} = \sin \alpha \sin \gamma.$$

Wobec tego dla danego przykładu otrzymamy:

$$\xi_2 = 14^\circ.$$

Obliczona siła pociągowa wyniesie:

$$P_h = 50.8496 \text{ kg}.$$

Razem opór kroju i lemieszki wyniesie:

$$P = 102 \text{ kg}.$$

Niewątpliwie już przy początkowym podniesieniu materiału przez lemieszki pługa muszą pojawić się i inne nateżenia prócz nateżeń stycznych, którym wyłącznie daliśmy wyraz w poprzednim rozdziale. Skiba będzie narażana na złamanie, a w dalszym ciągu i na skręcanie. Co więcej: wyginanie odciętej skiby musi iść jednocześnie w dwu kierunkach, gdyż podniesieniu ku górze towarzyszy nawet w najprostszym przypadku, kiedy mamy do czynienia

nia z płaszczyzną, także wygięcie boczne ku brózdzie. Tak więc musimy przy rozpatrywaniu oporów odkładnicy uwzględnić deformację złożoną, a zarazem wciągnąć w rachunek i opory tarcia. Niestety materiał doświadczalny, jakim rozporządzamy w danej chwili, nie obejmuje wcale badań mocy ziemi na złamanie, ani też na skręcenie; nie można zatem w obecnej chwili myśleć o rozwiązywaniu dalszych problemów z teoretycznej technologii mechanicznej ziemi.

Rozporządzając skąpym materiałem doświadczalnym z zakresu mocy ziemi, mogliśmy jedynie oświetlać te procesy technologiczne, które można było poprzeć i skontrolować rachunkiem cyfrowym. Zakres tych procesów jednakże jest wielki, gdyż obejmuje on pracę niemal wszystkich narzędzi. Wzory wyprowadzone przez nas mogą też znaleźć szerokie zastosowanie przy rozpatrywaniu pracy niemal każdego narzędzia, które służyć ma do mechanicznej uprawy roli i którego zadaniem jest zmiana położenia wzajemnego cząstek ziemi.

O ile narzędzie pracować ma w ziemi złożonej z luźnych grudek, o ile zatem materiał ziemny możemy uważać za ciało pozabawione spójności, posłużą nam wzory ogólne, w których opuścimy członów zawierające moc materiału. Te wzory mogą nam oddać usługę przy rozpatrywaniu pracy przykrywadeł. Dalsze wzory obejmujące opory wgniatania materiału, mają zastosowanie przy obliczaniu oporów kroju, a częściowo lemiesza, pogłębiacza lub też łapy kultywatora. Możemy z nich obliczyć, jaką jest największa dopuszczalna głębokość zanurzenia, jeśli ma nastąpić zerwanie spójności materiału, możemy też stawiając zagadnienia w różny sposób odnaleźć z wyprowadzonych wzorów i pewne wskazania konstrukcyjne. Jakkolwiek dla zwięzłości i ułatwienia rachunku przyjmowaliśmy rodzącą powierzchnię prostokreślnych zawsze poziomo, nie uszczupla to zakresu naszych wywodów, gdyż zawsze możemy układ przetransformować tak, ażeby owa rodząca wypadła poziomo, a dopiero wtedy zastosować wzory. Kształty jednakże powierzchni spotyka się rozmaite, nie tylko prostokreślne, jakkolwiek z doświadczeń prof. Gorjaczkina wynika niedwuznacznie, iż tylko one nadają się do konstrukcji narzędzi pracujących w ziemi. W takich przypadkach jednak możemy również posłużyć się temi samymi metodami i postępując w analogiczny sposób, znaleźć drogę do obliczania oporów.

Nauka o kacie usuwiskowym oparta na wywodach Mohra i poparta doświadczeniami przedsiębranymi z ziemią, pozwoli nam zawsze wyznaczyć kierunki usuwiskowe, idące od konturów narzędzia i zdać sobie sprawę z szerokości roboczej, jaką obejmuje dane narzędzie. Stąd wynikną też i wskazówki co do celowej rozstawy łap kultywatora takiej, by cała szerokość robocza narzędzia uległa



rozkruszeniu; wynikną także i wymiary rzeczywiste szerokości roboczej pługa większej, aniżeli szerokość konstrukcyjna. Jednem słowem: posłuży nam nauka o kącie usuwiskowym zarówno do zrozumienia wielu zawitych procesów technologicznych w mechanicznej uprawie ziemi, jak i do uzyskania pewnych wytycznych w konstrukcyi.

Nie rozwiązywaliśmy wszystkich wymienionych zagadnień, gdyż nie chodziło nam wcale o stworzenie wyczerpującego podręcznika teoryi narzędzi do uprawy roli, a tylko o wskazanie metody, jaką posłużyć się można przy rozpatrywaniu pracy narzędzi i obliczaniu oporów, jakie narzędzie napotyka przy ruchu w ziemi. Nie wyczerpuje ona wszystkich problemów, zachodzących przy mechanicznej technologii ziemi, nie na wszystkie pytania daje odpowiedź, ale stanowić może punkt wyjścia dalszych badań, idących w kierunku stworzenia użytecznej teoryi narzędzi.
