

Przemysław Golewski

Tomasz Sadowski

***Zagadnienia z zakresu
Wytrzymałości Materiałów***

Ćwiczenia projektowe

Politechnika Lubelska

Lublin 2016

Spis treści

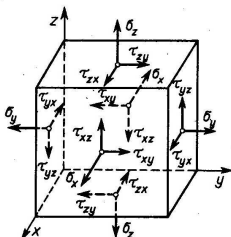
	Wstęp	3
1.	Oznaczenia i znakowanie	4
2.	Podstawowe wzory wytrzymałościowe dla różnych rodzajów obciążeń	5
3.	Prawo Hooke’a, liczba Poissona	6
4.	Rozwiązywanie zadań statycznie niewyznaczalnych	7
5.	Zagadnienie spiętrzenia naprężeń (wybrane przypadki)	8
6.	Momenty statyczne i momenty bezwładności pól figur płaskich	9
7.	Wyznaczenie momentu dewiacyjnego I_{xy} dla kątownika	11
8.	Momenty bezwładności, dewiacji względem osi centralnych (własnych) figur	12
9.	Naprężenia w belkach zginanych	14
10.	Metoda Clebscha	16
11.	Połączenia nitowe	18
12.	Połączenia klejowe	20
13.	Połączenia spawane	21
14.	Swobodne skręcanie prętów o przekrojach kołowych	23
15.	Swobodne skręcanie prętów o przekroju prostokątnym	24
16.	Swobodne skręcanie prętów cienkościennych o przekrojach otwartych	25
17.	Swobodne skręcanie prętów cienkościennych o przekrojach zamkniętych (wzory Bredta)	26
18.	Nacisk powierzchniowy. Wzory Bielajewa	27
19.	Zagadnienie wyboczenia	28
20.	Hipotezy wyężeniowe	31
21.	Mimośrodowe ściskanie	35
22.	Płaski (dwuosiowy) stan naprężenia	36
23.	Stan odkształcenia. Transformacja odkształceń w punkcie	39

24.	Związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami. Uogólnione prawo Hooke'a	40
25.	Mechanika pękania – pękanie kruche	41
26.	Twierdzenie Castigliana	43
27.	Twierdzenie (wzór) Maxwella-Mohra	44
28.	Równanie Laplace'a, naprężenia w zbiorniku walcowym	45
29.	Naprężenia w sprężynach śrubowych	46
30.	Zagadnienie uderzenia	46
31.	Płyty kołowsymetryczne	47
32.	Naprężenia w rurze grubościennej	48
33.	Wpływ otworów kołowych na rozkład naprężeń w tarczach (zagadnienie Kirscha)	48
34.	Siły niszczące nity zrywalne	49
35.	Przeliczanie jednostek naprężenia	50
36.	Wartości modułu Younga E i liczby Poissona ν dla niektórych materiałów	50
37.	Naprężenia dopuszczalne dla stali, staliwa i żeliwa	51
38.	Orientacyjne własności wytrzymałościowe niektórych gatunków drewna	53
39.	Orientacyjne własności tworzyw termoplastycznych	54
40.	Litery greckie	54
41.	Tabele kształtowników	55
	Literatura	60

Wstęp

Celem niniejszego opracowania było zgromadzenie jak największej ilości zagadnień przedmiotu Wytrzymałości Materiałów w niewielkiej broszurze, która ma stanowić pomoc przy rozwiązywaniu zadań rachunkowych oraz ćwiczeń projektowych. Opracowanie zawiera gotowe wzory, wskazówki konstrukcyjne oraz tabele. Jednak, aby w pełni zrozumieć dane zagadnienie, należy sięgnąć do literatury, której bogata ilość została podana na końcu opracowania. Znajomość samych wzorów w żadnym stopniu nie gwarantuje sukcesu w rozwiązywaniu zadań. Ich duża różnorodność oraz powiązanie poszczególnych zagadnień sprawia, że konieczne jest samodzielne przerabianie zadań zarówno tych, które pojawiły się na ćwiczeniach jak i znajdujących się w obszernych zbiorach zadań.

1. Oznaczenia i znakowania



Naprężenia normalne będziemy oznaczać przez σ , styczne przez τ .

Indeks przy σ oznacza oś, do której naprężenie normalne jest równoległe. Przy τ wprowadzamy dwa indeksy: pierwszy oznacza do jakiej osi jest prostopadła płaszczyzna działania naprężenia stycznego, drugi zaś – do jakiej osi naprężenie to jest równoległe.

Jeżeli normalna zewnętrzna do elementarnego pola i naprężenie styczne, występujące na nim, skierowane są w kierunkach jednoznakowych (różnoznakowych) osi, to takie naprężenie styczne uważać będziemy za dodatnie (ujemne).

Na wszystkich ścianach elementu występuje dziewięć naprężeń:

- trzy normalne: σ_x , σ_y , σ_z ,
- sześć stycznych: τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{yx} , τ_{zy} , τ_{xz} .

Te naprężenia nazywamy składowymi stanu naprężenia w danym punkcie.

2. Podstawowe wzory wytrzymałościowe dla różnych rodzajów obciążeń

Rodzaj obciążenia	Wzór ogólny
rozciąganie	$\sigma_r = \frac{F}{S} \leq k_r$
ściskanie	$\sigma_c = \frac{F}{S} \leq k_c$
ściskanie	$\tau_t = \frac{F}{S} \leq k_t$
zginanie	$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x} \leq k_g$
skręcanie	$\tau_s = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s$
nacisk powierzchniowy	$p = \frac{F}{S} \leq k_0$

gdzie:

F – siła [N],

S – pole przekroju [mm²],

M_g – moment gnący [Nm],

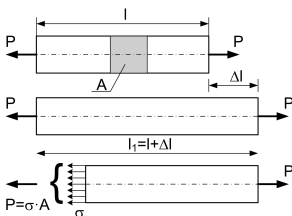
M_s – moment skręcający [Nm],

k – naprężenia dopuszczalne [MPa],

W_x – wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie [mm³],

W₀ – wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie [mm³],

3. Prawo Hooke'a, liczba Poissona



Δl – wydłużenie / skrócenie bezwzględne

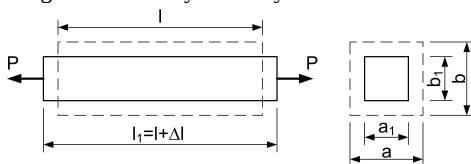
ε – wydłużenie / skrócenie względne

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \Delta l = l_1 - l$$

Pierwsza postać prawa Hooke'a $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Druga postać prawa Hooke'a $\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot A}$

E – współczynnik proporcjonalności, moduł Younga, dla danego materiału wyznaczany doświadczalnie.



odkształcenie podłużne $\varepsilon_{podl} = \frac{\Delta l}{l}$

$$\Delta a = a_1 - a$$

$$\Delta b = b_1 - b$$

odkształcenie poprzeczne $\varepsilon_{poprz} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$

Liczba Poissona $\nu = \left| \frac{\varepsilon_{poprz}}{\varepsilon_{podl}} \right|$

4. Rozwiązywanie zadań statycznie niewyznaczalnych

Gdy przyjęta zmiana długości pręta jest zgodna z danymi oraz założonymi wpływami, to uzyskuje ona znak plus (+), w przypadku przeciwnym minus (-).

Na początku rozwiązania zadania zakładamy przypuszczalne odkształcenie układu oraz zakładamy siły, wraz z kierunkami i zwrotami.

Gdy efekty działania poszczególnych założonych sił (tzn. odkształcenia wywołane przez nie) są zgodne z założonymi odkształceniami, to otrzymują one znak (+). Gdy zadane wpływy (siły, zmiany temperatury, błędy montażowe) wywołują odkształcenia zgodne z założonymi, to odkształcenia te uzyskują znak dodatni. W przeciwnych przypadkach, składowe odkształceń otrzymują znak minus (-).

Jeśli założyliśmy **wydłużenie pręta**, to odkształcenie uzyskuje znak

(+) gdy:

- siła w pręcie jest rozciągająca,
- pręt uległ ogrzaniu,
- pręt wykonano za długi

(-) gdy:

- siła w pręcie jest ściskająca,
- pręt uległ oziębieniu,
- pręt wykonano za krótki.

Jeżeli założyliśmy **skrócenie pręta**, to odkształcenie uzyska znak

(+) gdy:

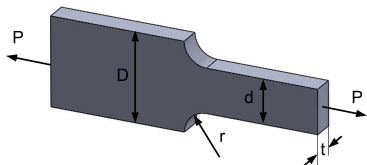
- siła w pręcie jest ściskająca,
- pręt uległ oziębieniu,
- pręt wykonano za krótki,

(-) gdy:

- siła w pręcie jest rozciągająca,
- pręt uległ ogrzaniu,
- pręt wykonano za długi.

5. Zagadnienie spiętrzenia naprężeń (wybrane przypadki)

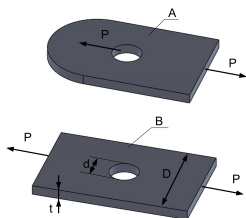
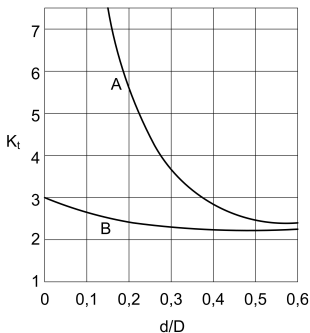
$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}}$$



$$K_t \approx B \left(\frac{r}{d} \right)^a$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{t \cdot d}$$

D/d	B	a
2,00	1,100	-0,321
1,50	1,077	-0,296
1,15	1,014	-0,239
1,05	0,998	-0,138
1,01	0,977	-0,107



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{(D-d) \cdot t}$$

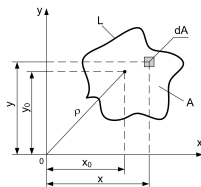
6. Momenty statyczne i momenty bezwładności pól figur płaskich

Momenty statyczne:

$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA$$

Położenie środka ciężkości:

$$x_0 = \frac{S_y}{A} \quad y_0 = \frac{S_x}{A}$$



Momenty bezwładności:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

Promienie bezwładności:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Dewiacyjny moment bezwładności, moment odśrodkowy lub moment zbieżności:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Biegunowy moment bezwładności:

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA \quad \text{lub} \quad I_0 = I_x + I_y$$

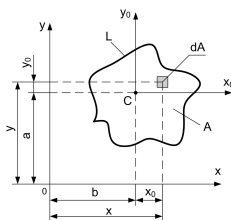
Równoległe przesunięcie osi, twierdzenie Steinera

W przypadku gdy początek układu współrzędnych x_0, y_0 jest środkiem ciężkości figury:

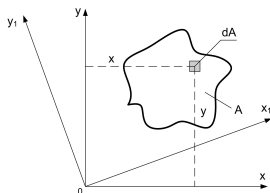
$$I_x = I_{x0} + a^2 A$$

$$I_y = I_{y0} + b^2 A$$

$$I_{xy} = I_{x0y0} + abA$$



Zależności pomiędzy momentami bezwładności i momentami dewiacji względem osi obróconych.



$$I_{x1} = 0,5(I_x + I_y) + 0,5(I_x - I_y)\cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{y1} = 0,5(I_x + I_y) - 0,5(I_x - I_y)\cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

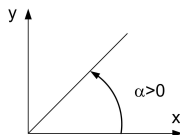
$$I_{x1y1} = 0,5(I_x - I_y)\sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

Główne osie bezwładności, główne momenty bezwładności:

$$I_1 = I_{\max} = 0,5(I_x + I_y) + 0,5\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_2 = I_{\min} = 0,5(I_x + I_y) - 0,5\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\tan \alpha_{gl} = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$



W zorientowaniu się co do położenia osi głównych pomocne są następujące wskazówki:

- jeśli $I_x > I_y$ to α_{gl} jest kątem między osią x i osią $I_{\max}$,
- jeśli $I_x < I_y$ to α_{gl} jest kątem między osią x i osią $I_{\min}$

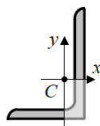
7. Wyznaczenie momentu dewiacyjnego I_{xy} dla kątownika

W tablicach, do projektowania konstrukcji stalowych, nie są podane wartości momentów dewiacyjnych, których znajomość jest nieodzowna do wyznaczenia głównych centralnych momentów bezwładności oraz kierunków głównych, dla rozpatrywanego przekroju złożonego. W celu wyznaczenia momentu dewiacyjnego skorzystamy ze wzorów na główne momenty bezwładności i po odjęciu ich stronami uzyskamy:

$$I_1 - I_2 = 2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

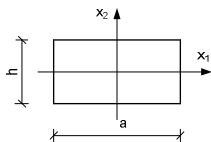
W tablicach, do projektowania konstrukcji stalowych, kierunek maksymalnego momentu bezwładności oznaczony jest przez ξ , natomiast kierunek minimalnego momentu bezwładności oznaczony jest przez η . Uwzględniając to i przekształcając otrzymamy wzór:

$$I_{xy} = \pm \sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2}$$



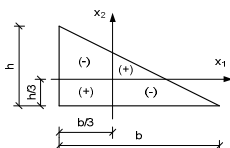
Znak momentu dewiacyjnego zależy od położenia kątownika nierównoramiennego w stosunku do układu osi centralnych xy . W rozpatrywanym przypadku w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, w których iloczyn współrzędnych $x \cdot y$ jest dodatni, znajduje się większa część pola figury (na powyższym rysunku są to ciemniejsze fragmenty figury).

8. Momenty bezwładności, dewiacji, względem osi centralnych (własnych) figur



$$J_{x_1} = \frac{a \cdot h^3}{12} \quad J_{x_2} = \frac{h \cdot a^3}{12}$$

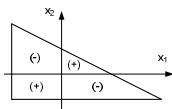
$D_{x_1 x_2} = 0$, ponieważ osie x_1, x_2 są osiami symetrii prostokąta



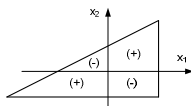
$$J_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad J_{x_2} = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

$$D_{x_1 x_2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

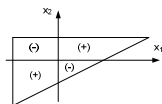
Znak we wzorze na dewiację zależy od położenia trójkąta tzn. czy więcej jest obszarów w trójkącie, w których iloczyn współrzędnych $x_1 \cdot x_2$ jest (+) czy w których iloczyn $x_1 \cdot x_2$ jest (-).



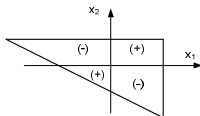
$$D_{x_1 x_2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$



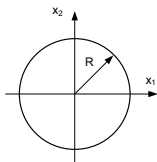
$$D_{x_1 x_2} = +\frac{b^2 h^2}{72}$$



$$D_{x_1 x_2} = +\frac{b^2 h^2}{72}$$

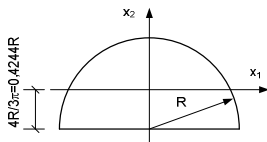


$$D_{x_1 x_2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$



$$J_{x_1} = J_{x_2} = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$$

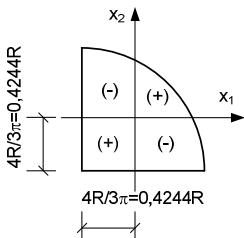
$$D_{x_1 x_2} = 0$$



$$J_{x_1} = 0.1098 \cdot R^4$$

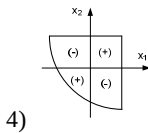
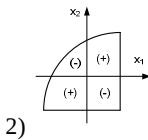
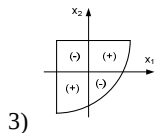
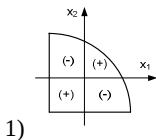
$$J_{x_2} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} = 0.3927 \cdot R^4$$

$D_{x_1 x_2} = 0$ (oś x_2 jest osią symetrii)



$$J_{x_1} = J_{x_2} = 0.0549 \cdot R^4$$

$$D_{x_1 x_2} = -0.0165 \cdot R^4$$



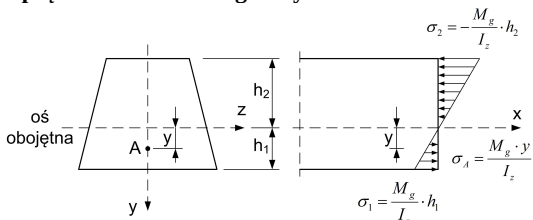
dla 1) i 4)

$$D_{x_1 x_2} = -0.0165 \cdot R^4$$

dla 2) i 3)

$$D_{x_1 x_2} = +0.0165 \cdot R^4$$

9. Naprężenia w belkach zginanych



Naprężenia normalne w dowolnym włóknie A odległym o y od osi obojętnej, obliczamy ze wzoru:

$$\sigma_A = \frac{M_g \cdot y}{I_z}$$

gdzie: M_g – moment zginający w danym przekroju poprzecznym, y – odległość punktu A od osi obojętnej, I_z – moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi obojętnej.

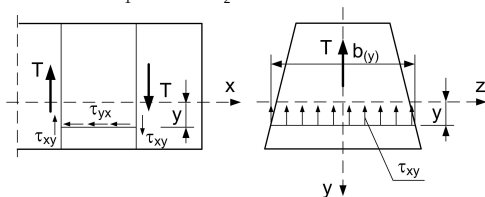
Naprężenia σ przyjmują wartości ekstremalne σ_1 , σ_2 w skrajnych włóknach.

$$\sigma_1 = \frac{M_g}{I_z} \cdot h_1 = \frac{M}{W_1}$$

$$\sigma_2 = -\frac{M_g}{I_z} \cdot h_2 = -\frac{M}{W_2}$$

przy czym $W_1 = \frac{I_z}{h_1}$ $W_2 = \frac{I_z}{h_2}$

są wskaźnikami wytrzymałości przekroju na zginanie.



Naprężenia styczne w warstewkach belki równoległych do warstwy obojętnej obliczamy ze wzoru (wzór Żurawskiego):

$$\tau_{yx} = \frac{T \cdot S_z^{y-y}}{I_z \cdot b_{(y)}}$$

gdzie:

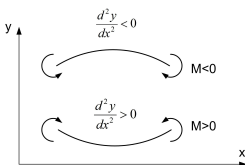
- T – siła poprzeczna w danym przekroju poprzecznym belki,
- τ_{yx} – średnie naprężenia styczne w przekrojach belki równoległych do warstwy obojętnej (zerowej),
- I_z – moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi obojętnej,
- S_z – moment statyczny względem osi obojętnej tej części przekroju poprzecznego, która zawarta jest między współrzędnymi y i $y_{\max}$ odmierzanymi od osi obojętnej pokrywającej się z osią z,
- $b_{(y)}$ – szerokość przekroju poprzecznego belki na poziomie określonym współrzędną y.

10. Metoda Clebscha

Wyznaczanie przemieszczeń w belkach zginanych – metoda całkowania równania różniczkowego linii ugięcia.

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki o stałej sztywności, poddanej czystemu zginaniu ($T=0$) ma postać:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$



Całkując powyższe równanie wyznaczmy funkcję kąta przekrojów poprzecznych

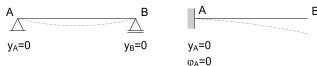
$$EI \frac{dy}{dx} = EI \cdot \varphi = \int M(x) dx + C$$

Po ponownym scałkowaniu otrzymujemy równanie linii ugięcia

$$EI = \int \left[\int M(x) dx \right] dx + Cx + D$$

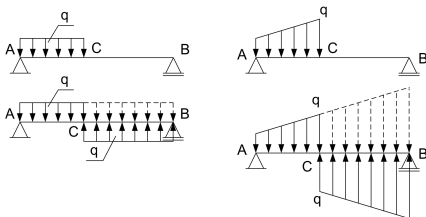
C i D są stałymi całkowania, które można wyznaczyć z warunków brzegowych oraz z warunku ciągłości osi odkształconej.

Warunki brzegowe dla belek prostych



Reguły przy zapisywaniu wyrażenia na moment zginający i przy jego całkowaniu:

1. Początek układu współrzędnych przyjmujemy w jednym z końców belki.
2. Jeżeli obciążenia ciągle kończy się w określonym punkcie belki, konieczne jest przedłużenie go do końca belki z jednoczesnym dodaniem równoważnego obciążenia ze zwrotem przeciwnym.



Funkcję $M(x)$ zapisuje się od razu dla całej belki w ten sposób, by można było zaznaczyć, gdzie kończy się wyrażenie określające moment zginający w danym przedziale (w dalszej części czynimy to za pomocą kresek pionowych z odpowiednimi indeksami). Przy obliczaniu ugięcia lub kąta obrotu w danym przekroju **wykorzystujemy równanie tylko do kreski** oznaczającej koniec przedziału, w którym znajduje się ten przekrój.

3. Jeżeli a_i są współrzędnymi punktów przyłożenia sił skupionych P_i lub początków obciążenia ciągłego q_i to w wyrażeniach na $M(x)$ typu $P_i(x-a_i)$ lub $q_i \frac{(x-a_i)^2}{2}$ nie

należy rozwijać, przy całkowaniu, wyrażeń w nawiasie.

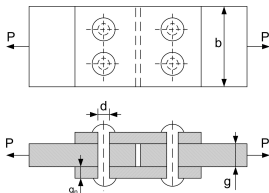
Całkowanie prowadzi się wg. schematu

$$\int (x-a_i)^n dx = \frac{(x-a_i)^{n+1}}{n+1} + C$$

Moment skupiony M całkujemy względem zmiennej $(x-a_i)$, gdzie a_i jest współrzędną punktu przyłożenia M . Stąd też w funkcji $M(x)$ wyraz ten zapisujemy w postaci $M(x-a_i)^0$.

4. Stałe całkowania umieszczamy na początku prawej strony równań dla kąta obrotu i ugięcia belki.

11. Połączenia nitowe



n – liczba nitów,
 m – liczba przekrojów ścinanych w nicie
 n' – liczba nitów w obliczanym, niebezpiecznym przekroju blachy

1) Warunek na ścinanie nitów

$$\tau_t = \frac{P}{n \cdot m \cdot F_t} = \frac{P}{n \cdot m \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq k_t$$

2) Warunek na naciski powierzchniowe

$$\sigma_d = \frac{P}{n \cdot F_d} = \frac{P}{n \cdot d \cdot g} \leq k_d$$

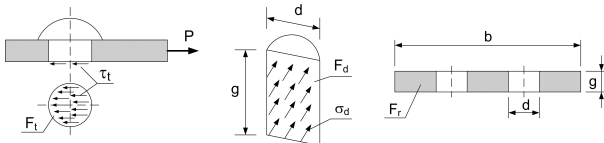
3) Warunek na rozciąganie płaskowników w przekroju niebezpiecznym, osłabionym otworami na nity

$$\sigma_r = \frac{P}{F_r} = \frac{P}{b \cdot g - n' \cdot d \cdot g} \leq k_r$$

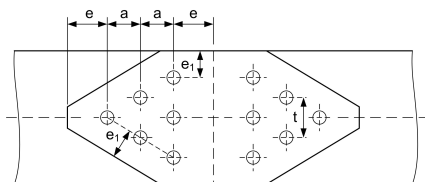
F_t – przekrój poprzeczny nita,

F_d – przekrój średnicowy nita,

F_r – przekrój osłabiony otworami na nity



Kształtowanie połączeń nitowych

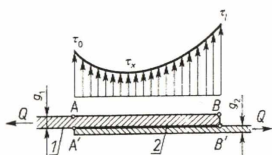


Wymiar		Symbol wymiaru	Wartość wymiaru
podziałka	poł. zakładkowe	t	(3 - 5) d
	poł. nakładkowe		(4 - 7) d
odległość rzędów nitów		a	(0,6 - 0,8)t lub (2 - 3)d
odl. skrajnych nitów od krawędzi	blach	e	(1,5 - 2,5) d
	nakładek	e ₁	(1,5 - 2,5) d
odl. krawędzi ścięcia od osi nitów		e ₂	(1,5 - 2) d

Wskazówki konstrukcyjne:

- grubość nakładek jednostronnych powinna wynosić $g_n > 1,1g$, zaś każdej nakładki dwustronnej $g_n > 0,65g$; przy spełnieniu tego założenia można nie sprawdzać wytrzymałości nakładek na rozciąganie;
- w najbardziej obciążonym przekroju blachy, tzn. w skrajnym rzędzie nitów, należy umieszczać – w miarę możliwości – tylko 1 nit, co umożliwia zminimalizowanie osłabienia blachy;
- zgodnie z PN w szwach wielorzędowych stosuje się maksymalnie 5 rzędów nitów lub 5 nitów (w kierunku działania obciążenia);
- każdy element mocuje się co najmniej dwoma nitami;
- naroża pasów i nakładek ścina się ukośnie w celu uniknięcia ich odginania oraz powstawania szczelin sprzyjających korozji.

12. Połączenia klejowe



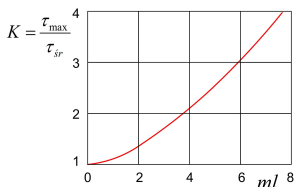
Maksymalne obciążenie (także odkształcenie względne części 1) występuje w punkcie A i stopniowo malejąc osiąga w punkcie B wartość równą zero.

Dla blach z tych samych materiałów ($E_1=E_2$), przy jednakowych szerokościach ($b_1=b_2$) i równych grubościach ($g_1=g_2$) naprężenia tnące wyznaczamy ze wzoru:

$$\tau_{\max} = K \tau_{sr}$$

gdzie: $\tau_{sr} = \frac{Q}{bl}$ jest średnim naprężeniem tnącym, natomiast

K współczynnikiem spiętrzenia naprężeń.



współczynnik m

$$m = \sqrt{\frac{G}{a} \left(\frac{1}{g_1 E_1} + \frac{1}{g_2 E_2} \right)}$$

Przykładowe dane materiałowe w [MPa] (Hysol 3430):

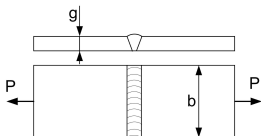
E	k_r	k_c	k_t^*	k_t^{**}
3210	36	65	22	3

* stal węglowa poddana obróbce strumieniowo-ściernej

** GRP (żywica poliestrowa wzmocniona włóknem szklanym)

13. Połączenia spawane

Spoiny czołowe



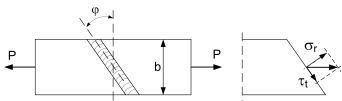
Wymiary spoin czołowych przyjmuje się równe przekrojom geometrycznemu części spawanej o mniejszym przekroju.

Początek i koniec długości spoiny, czyli tzw. kratery, są najsłabszymi miejscami w spoinie, zatem uwzględniając długość dwóch kraterów, przyjmuje się rzeczywistą długość spoiny:
 $l = b - 2a$

Warunek wytrzymałościowy przyjmie postać:

$$\sigma_r = \frac{P}{g \cdot l} \leq k'_r$$

Spoiny czołowe mogą być także wykonane jako ukośne w celu lepszego wykorzystania materiału blach.



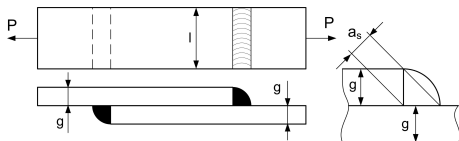
W spoinie wystąpią zatem naprężenia normalne σ_r i styczne τ_t .

Wartość tych naprężeń wyznaczamy ze wzorów:

$$\sigma_r = \frac{N}{g \cdot l} = \frac{P}{b \cdot g} \cos^2 \varphi \leq k'_r \quad \tau_t = \frac{T}{g \cdot l} = \frac{1}{2} \frac{F}{b \cdot g} \sin 2\varphi \leq k'_t$$

Spoiny pachwinowe

Spoiny pachwinowe stosuje się przy łączeniu części konstrukcji nie leżących w jednej płaszczyźnie, przy czym uważamy, że spoiny takie mają w przybliżeniu kształt graniastosłupów trójkątnych.



Z rysunku wynika, że $a = \frac{g}{\sqrt{2}} \approx 0,7g$

W rozpatrywanym przypadku warunek wytrzymałościowy przyjmie postać:

$$\tau = \frac{P}{2al} \leq k_t$$

Naprężenia dopuszczalne

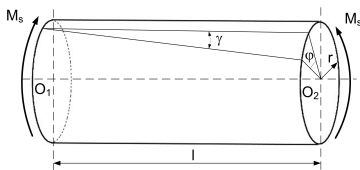
Mniejszą wartość spoin uwzględnia się w obliczeniach przez obniżenie wartości naprężeń dopuszczalnych przyjmowanych dla materiału części łączonych

$$k' = z \cdot k$$

k – naprężenia dopuszczalne dla materiału części łączonych,
 k' – naprężenia dopuszczalne dla spoiny,
 z – współczynnik wytrzymałości spoiny

spoiny	rodzaj obciążenia	z
czołowa	rozciąganie	0,8
	ściskanie	1,0
	zginanie	0,9
	ścinięcie	0,65
pachwinowa	wszystkie rodzaje obciążeń	0,65

14. Swobodne skręcanie prętów o przekrojach kołowych



φ – względny kąt skręcenia,

γ – kąt odkształcenia postaciowego

W przekrojach skręcanych prętów występują tylko naprężenia styczne τ , których wartość jest proporcjonalna do odległości r punktu przekroju od osi pręta.

$$\tau_r = \frac{M_s \cdot r}{I_0}$$

Maksymalne naprężenia występują we włóknach skrajnych. Warunek wytrzymałościowy ma postać:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s$$

$$W_0 = \frac{I_0}{r_{\max}}$$

W_0 – wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie [mm^3], I_0 – biegunowy moment bezwładności [mm^4]

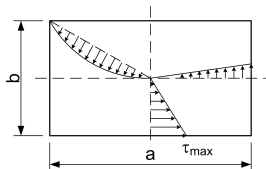
Wartość względnego kąta skręcenia zależy od obciążenia i sztywności pręta

$$\varphi = \frac{M_s}{G \cdot I_0} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] \quad \varphi = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot I_0} [\text{rad}]$$

l – długość pręta, G – moduł Kirchoffa

Wartość kąta skręcenia może być ograniczona wymaganiami konstrukcyjnymi: $\varphi_{\max} \leq \varphi_{\text{dop}}$

15. Swobodne skręcanie prętów o przekroju prostokątnym



Największe naprężenia styczne występują w połowie dłuższego boku i wyrażają się wzorem

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s}$$

$W_s = \alpha \cdot a \cdot b^2$, W_s – zastępczy wskaźnik wytrzymałości

Kąt skręcenia:
$$\varphi = \frac{M_s}{I_s \cdot G} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] \quad \varphi = \frac{M_s \cdot l}{I_s \cdot G} [\text{rad}]$$

I_s – zastępczy biegunowy moment $I_s = \beta \cdot a \cdot b^3$

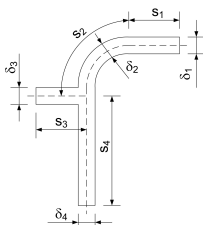
Naprężenia w połowie krótszego boku określone są wzorem:

$$\tau = \gamma \cdot \tau_{\max}$$

α , β , γ odczytujemy z tabeli w zależności od stosunku długości boków

a/b	α	β	γ
1	0,208	0,141	1
1,5	0,231	0,196	0,859
2	0,246	0,229	0,795
2,5	0,258	0,249	0,774
3	0,267	0,263	0,753
4	0,282	0,281	0,745
6	0,299		0,743
8	0,307		0,742
10	0,313		0,742
∞	0,333		0,742

16. Swobodne skręcanie prętów cienkościennych o przekrojach otwartych



Im mniejszy jest promień krzywizny w narożach wewnętrznych, tym większy jest poziom naprężeń lokalnych. Aby ich uniknąć należy zaokrąglić przejścia pomiędzy poszczególnymi segmentami.

Maksymalne naprężenia:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s \delta_{\max}}{I_s}$$

$$I_s = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3$$

$\delta_{\max}$ – jest największą grubością segmentu prostokątnego w obrębie przekroju,

I_s – zastępczy biegunowy moment.

Kąt skręcenia:

$$\varphi = \frac{M_s}{I_s \cdot G} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{I_s \cdot G} [\text{rad}]$$

W celu lepszego przybliżenia wartości I_s dla całego przekroju, wprowadza się dodatkowy współczynnik λ .

$$I_s = \frac{\lambda}{3} \sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3$$

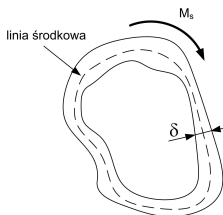
$\lambda=1$ – kątownik,

$\lambda=1,2$ – dwuteownik,

$\lambda=1,3$ – teownik,

$\lambda=1,12$ – ceownik

17. Swobodne skręcanie prętów cienkościennych o przekrojach zamkniętych (wzory Bredta)



A_0 – jest całkowitym polem obszaru zawartego w obrębie linii środkowej profilu cienkościennego,

$\delta_{\min}$ – jest najmniejszą grubością pręta.

Maksymalne naprężenia –

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2 \cdot A_0 \cdot \delta_{\min}}$$

Kąt skręcenia –

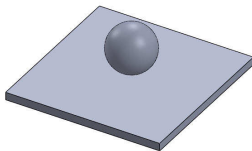
$$\varphi = \frac{M_s}{4 \cdot G \cdot A_0^2} \int_s \frac{ds}{\delta} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

dla $\delta = \text{const.}$ – $\varphi = \frac{M_s \cdot s}{4 \cdot G \cdot A_0^2 \cdot \delta} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$ s – długość linii środkowej

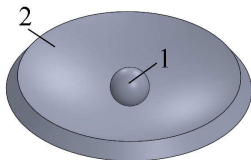
18. Nacisk powierzchniowy. Wzory Bielajewa



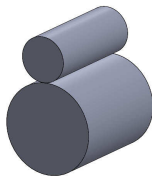
$$\sigma_{red} = 0,2333 \sqrt{PE^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2} \leq k_r$$



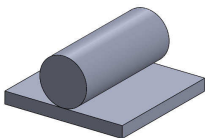
$$\sigma_{red} = 0,2333 \sqrt{\frac{PE^2}{r_1^2}} \leq k_r$$



$$\sigma_{red} = 0,2333 \sqrt{PE^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2} \leq k_r$$



$$\sigma_{red} = 0,241 \sqrt{\frac{PE}{l} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \leq k_r$$



$$\sigma_{red} = 0,241 \sqrt{\frac{PE}{lr_1}} \leq k_r$$

P – siła dociskająca,
E – moduł Younga,
l – długość powierzchni styku.

19. Zagadnienie wyboczenia

1. Wyboczenie sprężyste – wzór Eulera.

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_w^2} \quad , \quad \sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{s^2} \quad , \quad s = \frac{l_w}{i_{\min}}$$

gdzie:

P_{kr} – siła krytyczna [N],

σ_{kr} – naprężenia krytyczne [MPa],

E – moduł Younga [GPa],

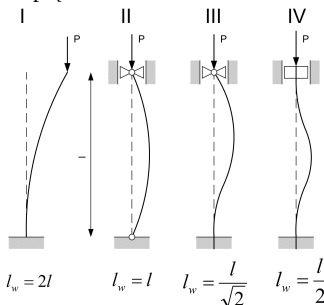
$I_{\min}$ – minimalny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta [cm^4],

s – smukłość [-],

l_w – długość wyboczeniowa [m],

$i_{\min}$ – minimalny promień bezwładności przekroju [cm].

Długość wyboczeniowa – jest to długość półfali sinusoidy jaką tworzy oś pręta po odkształceniu i jest zależna od sposobu zamocowania pręta.



Zakres stosowalności wzoru Eulera – smukłość graniczna.

$$s > s_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}$$

R_H – granica stosowalności prawa Hooke’a [MPa].

Dla stali konstrukcyjnej, dla której $E=210\text{GPa}$ i granica proporcjonalności 200MPa – 300MPa otrzymamy $s_{gr}=100 - 80$.

2. Wyboczenie sprężysto plastyczne (gdzie $s < s_{gr}$).

a) wzór Tetmajera – Jasińskiego:

$$\sigma_{kr} = a - bs$$

a, b – stałe wzoru Tetmajera – Jasińskiego.

$$a = R_e \quad , \quad b = \frac{R_e - R_H}{s_{gr}} \quad ,$$

R_e – granica plastyczności [MPa].

b) wzór Johnsona – Ostenfelda:

$$\sigma_{kr} = a - bs^2$$

a, b – stałe wzoru Johnsona – Ostenfelda.

$$a = R_e \quad , \quad b = \frac{R_H}{\pi^2} \cdot \frac{R_e - R_H}{E} \quad .$$

Dla prętów krótkich, o smukłościach mniejszych od 25, obliczeń na wyboczenie nie przeprowadza się stosując warunek wytrzymałości na ściskanie.

3. Obliczenia techniczne na wyboczenie.

Metoda ta pozwala przeprowadzić obliczenia tak, jak na ściskanie, uwzględniając wyboczenie współczynnikiem β .

$$\frac{P}{A} \leq \beta \cdot k_c$$

β oznacza współczynnik proporcjonalności mniejszy od jedności i zależny od smukłości pręta i rodzaju materiału. Wartość tego współczynnika podaje tabela (wyciąg z normy).

Smukłość s	S235JR	C50	Drewno	Żeliwo
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,98	0,98	0,99	0,97
20	0,95	0,95	0,97	0,91
30	0,92	0,92	0,93	0,81
40	0,89	0,88	0,87	0,69
50	0,85	0,83	0,80	0,57
60	0,80	0,77	0,71	0,44
70	0,74	0,69	0,60	0,34
80	0,68	0,60	0,48	0,26
90	0,62	0,50	0,38	0,20
100	0,55	0,41	0,31	0,16
110	0,48	0,35	0,25	
120	0,42	0,30	0,22	
130	0,37	0,26	0,18	
140	0,32	0,23	0,16	
150	0,28	0,20	0,14	
160	0,25	0,18	0,12	
170	0,22	0,16	0,11	
180	0,20	0,14	0,10	
190	0,18	0,12	0,09	
200	0,16	0,11	0,08	
210	0,14	0,10	0,07	
220	0,13	0,09		

20. Hipotezy wyężeniowe

1. Hipoteza Galileusza, Clebscha, Rankine'a [σ_{extr}]

Miarę wyężenia materiału jest największa wartość napężenia normalnego.

$$\max\left(\sigma_I, -\frac{\sigma_{III}}{z}\right) \leq k_r \quad \text{gdzie} \quad z = \frac{k_c}{k_r}$$

Hipoteza ta nie uwzględnia wpływu pozostałych dwóch napężeń głównych, przez co na ogół nie jest zgodna z doświadczeniem. Znajduje ona jednak zastosowanie w praktyce inżynierskiej, w szczególnych przypadkach stanu napężenia, dla niektórych gatunków żeliwa.

2. Hipoteza Coulomba-Tresci-Guesta [τ_{max}]

Miarę wyężenia materiału jest największe napężenie ścinające:

$$\sigma_I - \sigma_{III} \leq k_r$$

Praktyczne zastosowanie odnosi się wyłącznie do materiałów sprężysto-plastycznych (ciągliwych), do których należą przede wszystkim stal konstrukcyjna i metale kolorowe oraz ich stopy. Hipoteza ta nie może być jednak stosowana do materiałów kruchych, jak żeliwo, kamień, cegła, beton itp.

3. Hipoteza Saint-Venanta [ϵ_{extr}]

Miarę wyężenia materiału jest największe odkształcenie podłużne:

$$\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \leq k_r \quad , \quad -[\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})] \leq k_c$$

Hipoteza ta może być stosowana wyłącznie do materiałów kruchych, jak np. żeliwo maszynowe i staliwo.

4. Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego [Φ_f]

Miarą wyłączenia materiału jest krańcowa wartość energii odkształcenia postaciowego.

a) w układzie kierunków dowolnych

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \leq k_r$$

b) w układzie kierunków głównych

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq k_r$$

Hipoteza ta ma zastosowanie do materiałów sprężysto-plastycznych.

5. Hipoteza Burzyńskiego [ω_1, ω_2]

Miarą wyłączenia materiału jest suma energii postaciowej i pewnej części energii objętościowej. Udział procentowy tej ostatniej zależy od stanu naprężenia i właściwości indywidualnych materiału:

a) w zakresie I: $-\sqrt{2} \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq 0$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\omega_2}{z} \leq k_r$$

b) w zakresie II: $-\sqrt{2} \geq \frac{\omega_2}{\omega_1} \geq -\infty$ oraz $+\sqrt{2} \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq +\infty$

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{z+1}{z} \omega_2 + \frac{3}{2} \frac{(z-1)}{z} \omega_1 \leq k_r$$

c) w zakresie III: $0 \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq +\sqrt{2}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\omega_2}{z} + 3 \frac{z-1}{z} \omega_1 \leq k_r$$

Oczywiście warunki te należy odpowiednio rozpisać, wyrażając ogólnie oba niezmienniki przez składowe stanu naprężenia np. za pomocą wzorów:

$$\omega_1 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Hipoteza ta ma zastosowanie zarówno dla materiałów sprężysto – plastycznych jak i kruchych.

Szczególnie ważny technicznie jest przypadek **płaskiego stanu naprężenia**, określony następującymi parametrami:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = \sigma_y = 0, \quad \sigma_x = \sigma \neq 0, \quad \tau_{xy} = \tau \neq 0$$

Taki stan naprężenia występuje dla: zginania ze ścinaniem oraz zginania ze skręcaniem. Warunki bezpieczeństwa zapiszemy w postaci:

1. Według hipotezy Galileusza, Clebscha, Rankine'a [σ_{extr}]:

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_r \quad -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_c$$

2. Według hipotezy Coulomba – Tresca – Guesta [τ_{max}]:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_r$$

3. Według hipotezy Saint - Venanta [ϵ_{extr}]:

$$\frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_r \quad -\frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_c$$

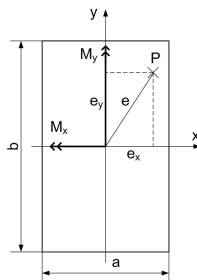
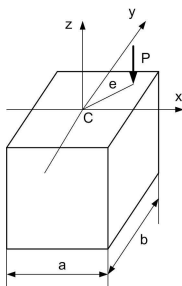
4. Według hipotezy Hubera – Misesa – Hencky'ego [ϕ_f]:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq k_r$$

5. Według hipotezy Burzyńskiego [ω_1, ω_2]:

$$\frac{z+1}{2z}\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} + \frac{z-1}{2z}\sigma \leq k_r$$

21. Mimośrodowe ściskanie



Wykorzystując zasadę superpozycji obliczamy naprężenia wypadkowe jako sumę algebraiczną naprężeń od wymienionych obciążeń:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} \quad \text{gdzie:} \quad M_y = P \cdot e_x, \quad M_x = P \cdot e_y$$

x, y – współrzędne dowolnego punktu w obrębie przekroju poprzecznego pręta.

Osie x oraz y – są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju.

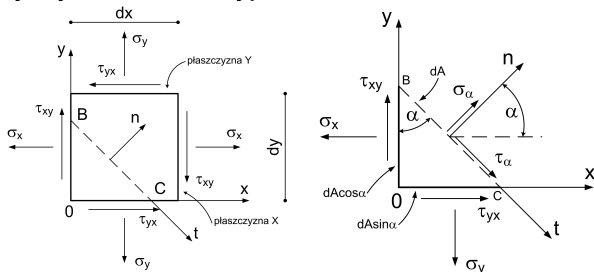
W powyższym wzorze, jeżeli będziemy przestrzegać ustaleń umowy znakowania sił podłużnych (plus dla siły rozciągającej, minus dla ściskającej) oraz tego, że (e_x, e_y) i (x, y) oznaczają współrzędne punktów, w przyjętym układzie odniesienia, to znaki naprężeń będą zgodne z ich umową znakowania.

Dla przypadku jak na rysunku otrzymamy:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M_y \cdot x}{I_y} - \frac{M_x \cdot y}{I_x}$$

22. Płaski (dwuosiowy) stan naprężenia

Płaskim lub dwuosiowym stanem naprężenia, nazywamy taki stan, w którym wszystkie składowe stanu naprężenia w jednym kierunku znikają.



$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

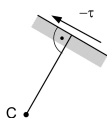
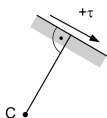
Naprężenia główne w płaskim stanie naprężenia

Naprężenia główne, w danym punkcie, to ekstremalne wartości naprężeń normalnych w nim występujących. Działają one na dwóch do siebie prostopadłych płaszczyznach przekroju (płaszczyznach głównych), na których naprężenia styczne są równe zero.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

α_1 – kąt jaki tworzy płaszczyzna, w której działają maksymalne lub minimalne naprężenia normalne z osiami podstawowego układu współrzędnych x i y .

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



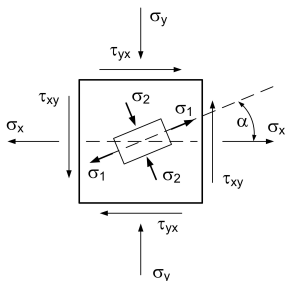
Dodatni zwrot naprężenia ścinającego jest zgodny z kierunkiem wskazówek zegara względem środka elementu.

Poszczególne kroki służące skonstruowaniu koła Mohra dla elementu znajdującego się w płaskim stanie naprężenia są następujące:

1. Zlokalizować środek C koła Mohra w punkcie o współrzędnych $\sigma = \sigma_{sr} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ (wzdłuż osi naprężeń normalnych) oraz $\tau = 0$. Dogodnie jest przyjąć, że $\sigma_x > \sigma_y$.
2. Zaznaczyć punkt A , będący punktem na okręgu reprezentującym płaszczyznę X elementu ($\alpha = 0$), odkładając $\sigma = \sigma_x$ oraz $\tau = \tau_{xy}$.
3. Zaznaczyć punkt B , reprezentujący płaszczyznę Y elementu ($\alpha = 90^\circ$). Współrzędnymi tego punktu są $\sigma = \sigma_y$ oraz $\tau = -\tau_{xy}$ ponieważ przy obrocie o $\alpha = 90^\circ$ naprężeniem normalnym jest σ_y , a naprężenie styczne zmienia znak. Linia AB przechodzi przez środek C koła Mohra.

4. Wykreślić koło ze środka C o promieniu równym odcinkowi CA.

Przykład. Dla płaskiego stanu naprężenia określonego przez:
 $\sigma_x=80\text{MPa}$, $\sigma_y=-40\text{MPa}$, $\tau_{xy}=-60\text{MPa}$, $\tau_{yx}=60\text{MPa}$, wyznaczyć
 analitycznie oraz wykreślić: koło naprężzeń, kierunki główne i
 naprężenia główne.



Rozwiązanie analityczne:

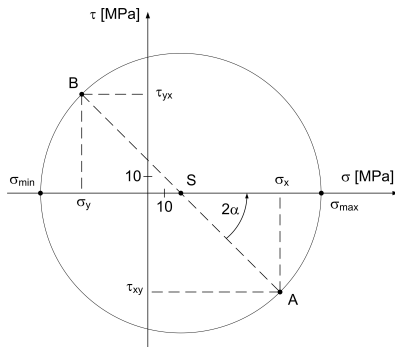
$$\sigma_{\max}=104,8\text{MPa},$$

$$\sigma_{\min}=-64,8\text{MPa},$$

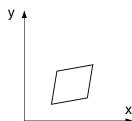
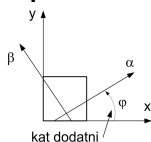
$$\alpha=22,5^\circ$$

środek koła Mohra

$$\sigma_{\text{śr}}=20\text{MPa}.$$



23. Stan odkształcenia. Transformacja odkształceń w punkcie



Równania transformacyjne dla odkształceń wyprowadzone dla PSO są również ważne dla przypadku gdy $\epsilon_z \neq 0$.

Równanie transformacyjne dla odkształcenia wzdłużnego w przypadku dwuwymiarowym ma postać:

$$\epsilon_{\alpha} = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

lub po wykorzystaniu tożsamości trygonometrycznych

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi$$

Równanie transformacyjne dla kąta odkształcenia postaciowego:

$$\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\varphi$$

Odkształcenia główne występują we wzajemnie prostopadłych kierunkach $\tan 2\varphi_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$ wyznaczonych z podanego równania:

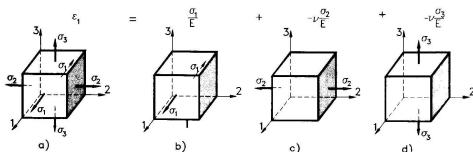
Wartości odkształceń głównych wyznaczamy z zależności:

$$\epsilon_{1,2} = \epsilon_{\max, \min} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Największy kąt odkształcenia postaciowego (w płaszczyźnie xy) jest określony zależnością:

$$\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

24. Związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami. Uogólnione prawo Hooke'a



Odształcenia wzdłużne w poszczególnych kierunkach wyniosą:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań ze względu na odkształcenia otrzymamy:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

W trójwymiarowym stanie naprężenia prawo Hooke'a dla ścinania można uogólnić do postaci:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Dla płaskiego stanu naprężeń: $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ mamy:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Po odwróceniu powyższego układu równań otrzymamy:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad \tau_{xy} = \gamma_{xy} G$$

25. Mechanika pękania – pękanie kruche

Odporność na pękanie K_{Ic} :

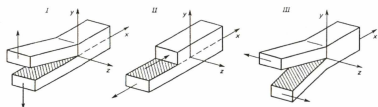
$$K_{Ic} = \sigma_{kr} \sqrt{\pi l_{kr}} = \sqrt{2E\gamma_{kr}}$$

l_{kr} – krytyczna długość szczeliny,

γ_{kr} – krytyczna energia powierzchniowa.

Odporność na pękanie K_{Ic} , spotykana również pod nazwą wytrzymałości na pękanie, jest charakterystyczną wielkością materiałową wyrażoną w $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Powszechnie używa się zapisu K_{Ic} , co oznacza odporność na pękanie w płaskim stanie odkształcenia w najczęściej spotykanym przypadku obciążenia, do którego odnosi się wskaźnik I.

Trzy podstawowe przypadki rozwoju pęknięć.



G – współczynnika wyzwala energii potencjalnej, prędkością intensywności wyzwala energii potencjalnej

$$\begin{array}{cc}
 \text{PSO} & \text{PSN} \\
 G_c = (1 - \nu^2) \frac{K_c^2}{E} & G_c = \frac{K_c^2}{E} = 2\gamma_{kr} = \frac{\sigma_{kr}^2 \pi d_{kr}}{E}
 \end{array}$$

Metody liniowej mechaniki pęknięcia nadają się przede wszystkim do oceny wytrzymałości dużych konstrukcji stalowych, urządzeń transportowych i energetycznych, zbiorników i rurociągów.

Orientacyjne wartości odporności na pęknięcie K_{Ic}

Materiał	R_e lub R_{02} MPa	K_{Ic} $\text{MPa} \cdot \text{m}^{0,5}$
Stal St3 normalizowana	240	25
Stal stopowa AISI 4340 (0,4% C, 0,7%Mn, 0,8%Cr, 0,25% Mo, 1,9% Ni) ulepszona cieplnie	1500	38
Stal stopowa o 0,03% C, 0,2% Al., 8% Co, 5% Mo, 18% Ni, 0,6% Ti ulepszona cieplnie	2000	78
Stal 40HN ulepszona cieplnie	800	65
Stal na zbiorniki ciśnieniowe A533 (0,25% C, do 1,5% Mn, do 0,7% Ni, do 0,6% Mo)	350	120
Stal reaktorowa A533B (USA)	480	210
Stal na zbiorniki ciśnieniowe A308B (USA)	465	120
Stal żaroodporna (0,02% C, 18% Ni)	1700	76
Stop aluminium AlCuMg	450	27
Stop aluminium AlZnMgCu	500	29
Stop tytanu Ti6Al4V	900	84

26. Twierdzenie Castigliana

Do obliczania odkształceń układów sprężystych można korzystać z twierdzenia Castigliana, wyrażającego związek między: całkowitą energią potencjalną układu V , uogólnioną siłą P_i oraz uogólnioną współrzędną u_i w miejscu przyłożenia tej siły

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = u_i = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_i}{E_i A_i} \frac{\partial N_i}{\partial P_i} ds_i + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{\alpha_i T_i}{G_i A_i} \frac{\partial T_i}{\partial P_i} ds_i + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{g_i}}{E_i J_i} \frac{\partial M_{g_i}}{\partial P_i} ds_i + \sum_{i=1}^n \frac{M_{s_i}}{G_i J_{0_i}} \frac{\partial M_{s_i}}{\partial P_i} ds_i$$

Uogólnioną współrzędną odpowiadającą danej uogólnionej sile, nazywa się takie odkształcenie, które pomnożone przez tę siłę daje pracę tej siły.

Aby wyznaczyć, na podstawie twierdzenia Castigliana, przemieszczenie w odpowiednim miejscu i kierunku musi w interesującym nas miejscu działać, odpowiadająca poszukiwanemu przemieszczeniu, **uogólniona siła**. Jeżeli brakuje takiej siły, należy:

- przyłożyć **fikcyjną siłę** dodatkową F_d , uwzględniając dodatkowe siły wewnętrzne przez nią spowodowane,
- obliczyć energię potencjalną,
- wykonać różniczkowanie,
- a następnie podstawić rzeczywistą jej wartość tzn. przyjąć $F_d=0$.

27. Twierdzenie (wzór) Maxwella-Mohra

Do obliczeń przemieszczeń można wykorzystać także twierdzenie Maxwella – Mohra, którego postać wynika z założenia, że $F_d=1$, wówczas ugięcie wynosi:

$$u_i = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_i N'_i}{E_i A_i} ds_i + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i T_i T'_i}{G_i A_i} ds_i + \sum_{i=1}^n \frac{M_{g_i} M'_{g_i}}{E_i J_i} ds_i + \sum_{i=1}^n \frac{M_{s_i} M'_{s_i}}{G_i J_{0_i}} ds_i$$

gdzie: N'_i , T'_i , M'_{g_i} , M'_{s_i} – siły wewnętrzne w przedziale i-tym spowodowane działaniem odpowiedniej siły dodatkowej równej jedności.

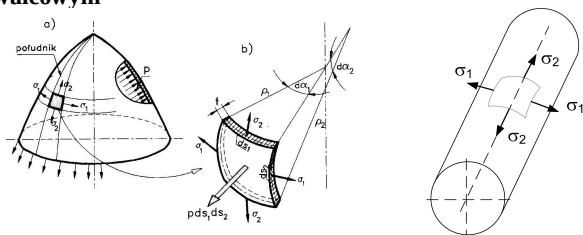
Należy wyznaczyć więc przebiegi sił wewnętrznych dla rzeczywistego obciążenia i dla obciążenia odpowiednią siłą jednostkową oraz obliczyć powyższe całki (zwane całkami Maxwella – Mohra).

Wzór Maxwella-Mohra różni się od twierdzenia Castigliano jedynie tym, że pochodne:

$$\frac{\partial N_i}{\partial P_i}, \frac{\partial T_i}{\partial P_i}, \frac{\partial M_{g_i}}{\partial P_i}, \frac{\partial M_{s_i}}{\partial P_i}$$

zostały tu zinterpretowane jako siły wewnętrzne N'_i , T'_i , M'_{g_i} , M'_{s_i} spowodowane przez siłę $F_d=1$, przyłożoną w punkcie, którego przemieszczenia poszukujemy.

28. Równanie Laplace'a, naprężenia w zbiorniku walcowym



σ_1 – naprężenia rozciągające w kierunku obwodowym,
 σ_2 – naprężenia rozciągające w kierunku południkowym (wzdłużnym)
 t – grubość ścianki zbiornika,
 ρ_1, ρ_2 – promienie krzywizn powłoki w kierunku obwodowym i południkowym w rozważanym punkcie,
 p – ciśnienie wewnętrzne.

Równanie Laplace'a
$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{t}$$

Zbiornik walcowy

Naprężenia rozciągające obwodowe i wzdłużne w części walcowej zbiornika są równe

$$\sigma_1 = \frac{p \cdot R}{t_1} \quad \sigma_2 = \frac{p \cdot R}{2t_1}$$

Naprężenia w części kulistej

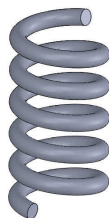
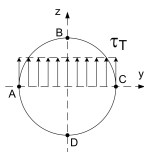
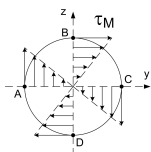
$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{p \cdot R}{2t_2}$$

Naprężenia zredukowane HMM

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

R – promień zbiornika, t_1, t_2 – grubość ścianki części walcowej i kulistej.

29. Naprężenia w sprężynach śrubowych



Maksymalne naprężenia:

$$\tau_{\max} = \tau_M + \tau_T = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right)$$

Ugięcie sprężyny

$$f = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}$$

gdzie: P – osiowa siła obciążająca,

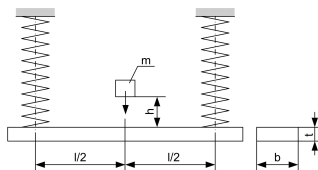
D – średnica nawinięcia, d – średnica drutu, n – ilość zwoi, G – moduł Kirchoffa

30. Zagadnienie uderzenia

Współczynnik dynamiczny:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$$

δ_{st} – przemieszczenie statyczne, h – wysokość.



Przemieszczenie f_d , naprężenia normalne σ_d i styczne τ_d wywołane uderem:

$$f_d = K_d \cdot f_{st}$$

$$\sigma_d = K_d \cdot \sigma_{st}$$

$$\tau_d = K_d \cdot \tau_{st}$$

f_{st} , σ_{st} , τ_{st} – przemieszczenie statyczne, naprężenia normalne i styczne wywołane statycznym oddziaływaniem obciążenia.

31. Płyty kołowsymetryczne

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{T(r)}{D}$$

D – sztywność płytowa ,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Równanie dotyczy każdej płyty okrągłej, obciążonej osiowo-symetrycznie, przy czym siłę tnącą $T(r)$ przypadającą na jednostkę obwodu krążka o promieniu r , wyciętego w myśli ze środkowej części płyty, wyznaczamy z warunków równowagi danej płyty.

Dla małych ugięć –

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}$$

Moment gnący promieniowy M_r –

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right)$$

Moment gnący styczny M_t –

$$M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

Maksymalne wartości naprężeń –

$$\sigma_r^{\max} = \pm \frac{6M_r}{h^2} \quad \sigma_t^{\max} = \pm \frac{6M_t}{h^2}$$

32. Naprężenia w rurze grubościennej

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{\vartheta} = -\frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}$$

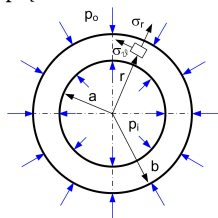
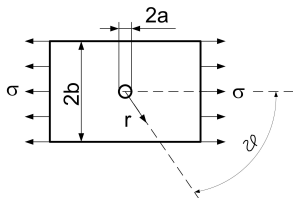
33. Wpływ otworów kołowych na rozkład naprężeń w tarczach (zagadnienie Kirscha)

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\vartheta$$

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\vartheta$$

$$\tau_{r\vartheta} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\vartheta$$

σ_r – naprężenia promieniowe, σ_{ϑ} – naprężenia obwodowe.



34. Siły niszczące nity zrywalne

Ofertę handlową nitów zrywalnych można uzyskać pod adresem: <http://carbonsteel.pl/oferta/nity-zrywalne/>

Nity zrywalne aluminiowe (Al Mg 3,5):

średnica [mm]	zakres grubości [mm]	siła niszcząca (rozciąganie) [N]	siła niszcząca (ściananie) [N]
2,4	0,5 – 9	440	350
3	2 – 15	880	640
3,2	0,5 – 15	950	680
3,4	0,5 – 17	1100	750
4	0,5 – 26,5	1850	1300
4,8	0,5 – 46	2950	2170
6	2 – 35	4350	2730
6,4	2 – 35	6190	3700
7,8	4 – 20	9600	6630

Nity zrywalne stalowe:

średnica [mm]	zakres grubości [mm]	siła niszcząca (rozciąganie) [N]	siła niszcząca (ściananie) [N]
3	0,5 – 9	1240	980
3,2	0,5 – 9	1590	1220
4	0,5 – 26	2800	1900
4,8	0,5 – 26	3600	2800
6	4 – 25	5690	4850
6,4	4 – 25	6490	5160

35. Przeliczanie jednostek naprężenia

	Pa	kPa	MPa	$\frac{kN}{cm^2}$	GPa
$\frac{N}{m^2}$	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-9}
$\frac{kN}{m^2}$	10^3	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}
$\frac{N}{mm^2}$	10^6	10^3	1	10^{-1}	10^{-3}
$\frac{kN}{cm^2}$	10^7	10^4	10	1	10^{-2}
$\frac{kN}{mm^2}$	10^9	10^6	10^3	10^2	1

36. Wartości modułu Younga E i liczby Poissona ν dla niektórych materiałów

materiał	E [GPa]	ν [-]
guma	0,01 – 0,1	0,5
stop glinu (aluminium)	67 – 74	0,32 – 0,35
stal	200 – 210	0,25 – 0,3
żeliwo szare	60 – 140	0,23 – 0,27
beton	18 – 42	0,16 – 0,2
drewno dębowe wzdłuż wł.	11 – 12,5	0,045 – 0,065
szkło organiczne	1,9 – 2,8	0,34 – 0,27
szkło potasowe	60 – 65	0,16 – 0,18
wapień	20 – 70	0,2 – 0,3

37. Naprężenia dopuszczalne dla stali, staliwa i żeliwa

Stal niestopowa konstrukcyjna ogólnego przeznaczenia:

Znak stali stary / nowy	R _m min. [MPa]	R _e min. [MPa]	Naprężenia dopuszczalne [MPa]		
			k _r	k _g	k _s
St0S / S185	320	195	100	120	65
St3S / S235JR	380	235	120	145	75
St4S / S275	440	275	130	155	85
St5 / E295	490	295	145	170	90
St6 / E335	590	335	160	195	105
St7 / E360	690	365	175	210	115

Stal niestopowa do utwardzania powierzchniowego i ulepszania cieplnego (stan N – normalizowany):

Znak stali stary / nowy	R _m min. [MPa]	R _e min. [MPa]	Naprężenia dopuszczalne [MPa]		
			k _r	k _g	k _s
10 / C10E	335	205	105	125	65
15 / C15E	375	225	115	140	75
20 / C22	410	245	125	150	80
25 / C25	450	275	140	170	90
35 / C35	530	315	155	185	100
45 / C45	600	355	170	205	110
55 / C55	650	380	185	225	120

Stal niestopowa do utwardzania powierzchniowego i ulepszenia cieplnego (stan H – nawęglanie i hartowanie):

Znak stali stary / nowy	R _m min. [MPa]	R _e min. [MPa]	Napężenia dopuszczalne [MPa]		
			k _r	k _g	k _s
10 / C10E	410	245	125	150	80
15 / C15E	490	295	150	180	95
20 / C22	540	335	180	215	115

Stal niestopowa do utwardzania powierzchniowego i ulepszenia cieplnego (stan T – ulepszenie cieplne (hartowanie i wysokie odpuszczanie):

Znak stali stary / nowy	R _m min. [MPa]	R _e min. [MPa]	Napężenia dopuszczalne [MPa]		
			k _r	k _g	k _s
25 / C25	500	320	150	180	95
35 / C35	600	380	180	215	115
45 / C45	650	430	200	240	130
55 / C55	750	490	225	270	145

Staliwo węglowe konstrukcyjne:

Oznaczenie stare / nowe	R _m min. [MPa]	R _e min. [MPa]	Napężenia dopusz- czalne [MPa]		
			k _r	k _g	k _s
L400 / 200-400	400	250	125	150	80
L450 / 230-450	450	260	130	155	83
L500 / 270-480	500	320	150	185	95
L600 / 360-600	600	360	170	205	110
L650 / 380-650	650	380	180	215	115

Żeliwo szare:

Oznaczenie stare / nowe	R _m min. [MPa]	R _g śr. [MPa]	Napężenia dopuszczalne [MPa]			
			k _r	k _g	k _s	k _c
ZL 150 / EN-GJL-150	150	300	45	70	55	145
ZL 200 / EN-JIL1030	200	360	55	85	70	195
ZL 250 / EN-JIL1040	250	420	70	115	90	245
ZL 300 / EN-JIL1050	300	480	85	130	105	290
ZL 350 / EN-JIL1060	350	540	100	145	115	340

38. Orientacyjne własności wytrzymałościowe niektórych gatunków drewna

Gatunek drewna	Średnia wytrzymałość [MPa]				
	na ścinanie		na rozciąganie		na zgina- nie
	wzdłuż włókien	w poprzek włókien	wzdłuż włókien	w poprzek włókien	
Akacja	59	13	148	4,3	120
Brzoza	43		137	7	125
Buk	53	9	135	7	105
Dąb	47	11	90	4	93
Grab	66		107		107
Jesion	47	11	104	7	99
Lipa	44	9,5	85		90
Olcha	40	6,5		2	85
Sosna	43,5	7,5	104	3	78
Topola	30	2,7	77		55
Wiąz	41	10	80	3,9	72

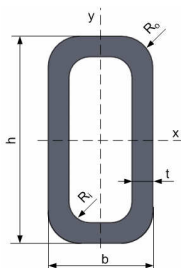
39. Orientacyjne własności tworzyw termoplastycznych

Rodzaj tworzywa	Średnia wytrzymałość [MPa]	
	na rozciąganie	na zginanie
polietylen niskiej gęstości	10 – 32	7 – 10
polietylen dużej gęstości	10 – 32	29 – 39
PVC na płyty	49 – 59	78 – 118
PVC na rury	49 – 59	78 – 118
polistyren o własnościach przeciętnych	49	98
polistyren wysokoudarowy	37	78,5
kopolimer ABS	34 – 51	-
poliamid PA6	39	49
polimetakrylanmetylu	59 – 69	98 – 113
poliwęglan tłoczywo podstawowe	64	93
poliwęglan wzmocniony	98	206

40. Litery greckie

A α	alfa		N ν	ni
B β β̄	beta		Ξ ξ	ksi
Γ γ	gamma		Ο ο	omikron
Δ δ	delta		Π π ϖ	pi
Ε ε ε̇	epsilon		Ρ ρ ϱ ϱ̇	ro
Z ζ	dzeta		Σ σ	sigma
H η	eta		Τ τ	tau
Θ θ Θ ϑ	teta		Υ υ Υ̇	ipsilon
I ι ι̇	jota		Φ φ φ̇	fi
K κ κ̇	kappa		Χ χ	chi
Λ λ	lambda		Ψ ψ	psi
M μ	mi		Ω ω	omega

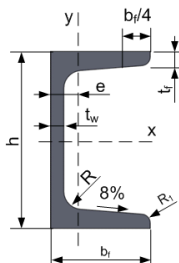
41. Tabele kształtowników



KSZTAŁTOWNIKI ZAMKNIĘTE
PROSTOKĄTNE WYKONANE NA
GORĄCO

wg PN-EN 10210-2:2000

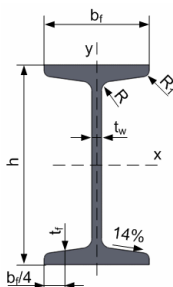
Wyróżnik oznaczenia	Wymiary			Pole przekroju	Momenty bezwładności		Wskaźniki wytrzymałości		
	h	b	t		A	I _x	I _y	W _x	W _y
	[mm]				[cm ²]	[cm ⁴]		[cm ³]	
50x30x4	50	30	4	5,59	16,5	7,08	6,60	4,72	
60x40x4	60	40		7,19	32,8	17,0	10,9	8,52	
80x40x4	80	40		8,79	68,2	22,2	17,1	11,1	
90x50x4	90	50		10,4	107	41,9	23,8	16,8	
100x50x4	100	50		11,2	140	46,2	27,9	18,5	
100x60x4	100	60		12,0	158	70,5	31,6	23,5	
120x60x4	120	60		13,6	249	83,1	41,5	27,7	
120x80x4	120	80		15,2	303	161	50,4	40,2	
140x80x4	140	80		16,8	441	184	62,9	46,0	
150x100x4	150	100		19,2	607	324	81,0	64,8	
160x80x4	160	80		18,4	612	207	76,5	51,7	
180x100x4	180	100		21,6	945	379	105	75,9	
200x100x4	200	100		23,2	1223	416	122	83,2	



CEOWNIKI ZWYKŁE

wg PN-86/H-93403, DIN
1026-1:2000

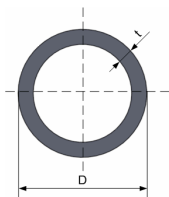
Oznacz.	Wymiary					Pole prze.	Momenty bezwładności		Wskaźniki wytrzymałości	
	h	b _f	t _w	t _f	e	A	I _x	I _y	W _x	W _y
	[mm]				[cm]	[cm ²]	[cm ⁴]		[cm ³]	
40	40	20	5,0	5,0	0,65	3,51	7,26	1,06	3,63	0,78
50	50	38	5,0	7,0	1,37	7,12	26,4	9,12	10,6	3,75
65	65	42	5,5	7,5	1,42	9,03	57,5	14,1	17,7	5,07
80	80	45	6,0	8,0	1,45	11,0	106	19,4	26,5	6,36
100	100	50	6,0	8,5	1,55	13,5	206	29,3	41,2	8,49
120	120	55	7,0	9,0	1,60	17,0	364	43,2	60,7	11,1
140	140	60	7,0	10,0	1,75	20,4	605	62,7	86,4	14,8
160	160	65	7,5	10,5	1,84	24,0	925	85,3	116	18,3
180	180	70	8,0	11,0	1,92	28,0	1350	114	150	22,4
200	200	75	8,5	11,5	2,01	32,2	1910	148	191	27,0
220	220	80	9,0	12,5	2,14	37,4	2690	197	245	33,6
240	240	85	9,5	13,0	2,23	42,3	3600	248	300	39,6
260	260	90	10,0	14,0	2,36	48,3	4820	317	371	47,7
280	280	95	10,0	15,0	2,53	53,3	6280	399	448	57,2
300	300	100	10,0	16,0	2,70	58,8	8030	495	535	67,8
320	320	100	14,0	17,5	2,60	75,8	10870	597	679	80,6
350	350	100	14,0	16,0	2,40	77,3	12840	570	734	75,0
380	380	102	13,5	16,0	2,38	80,4	15760	615	829	78,7
400	400	110	14,0	18,0	2,65	91,5	20350	846	1020	102,0



DWUTEOWNIKI ZWYKŁE

wg PN-91/H-93407, DIN 1025-1:1995

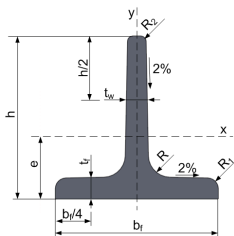
Oznaczn.	Wymiary				Pole prze.	Momenty bezwładności		Wskaźniki wytrzymałości	
	h	b _f	t _w	t _f	A	I _x	I _y	W _x	W _y
	[mm]				[cm ²]	[cm ⁴]		[cm ³]	
80	80	42	3,9	5,9	7,57	77,8	6,29	19,5	3,00
100	100	50	4,5	6,8	10,6	171	12,2	34,2	4,88
120	120	58	5,1	7,7	14,2	328	21,5	54,7	7,41
140	140	66	5,7	8,6	18,2	573	35,2	81,9	10,7
160	160	74	6,3	9,5	22,8	935	54,7	117	14,8
180	180	82	6,9	10,4	27,9	1450	81,3	161	19,8
200	200	90	7,5	11,3	33,4	2140	117	214	26,0
220	220	98	8,1	12,2	39,5	3060	162	278	33,1
240	240	106	8,7	13,1	46,1	4250	221	354	41,7
260	260	113	9,4	14,1	53,3	5740	288	442	51,0
300	300	125	10,8	16,2	69,0	9800	451	653	72,2
340	340	137	12,2	18,3	86,7	15700	674	923	98,4
360	360	143	13,0	19,5	97,0	19610	818	1090	114
400	400	155	14,4	21,6	118	29210	1160	1460	149
450	450	170	16,2	24,3	147	45850	1730	2040	203
500	500	185	18,0	27,0	179	68740	2480	2750	268
550	550	200	19,0	30,0	212	99180	3490	3610	349
600	600	215	21,6	32,4	254	139000	4670	4630	434



KSZTAŁTOWNIKI ZAMKNIĘTE OKRĄGLE

bez szwu wg PN-EN 10210:2:2000

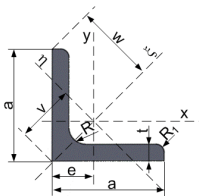
Wymiary		Pole przekroju	Moment bezwładności
D	t	A	I
[mm]		[cm ²]	[cm ⁴]
42,4	5	5,87	10,5
60,3	8	13,1	46
82,5	10	22,8	152
101,6	12,5	35	354



TEOWNIKI RÓWNORAMIENNE WYSOKIE T

wg PN-EN 10055:1999

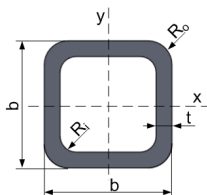
Oznaczenie T	Wymiary						Pole przekroju	Momenty bezwładności	
	h=b _f	t _w =t _f	R	R ₁	R ₂	e	A	I _x	I _y
	[mm]					[cm]	[cm ²]	[cm ⁴]	
30	30	4	4	2	1	0,850	2,26	1,72	0,870
40	40	5	5	2	1	1,12	3,77	5,28	2,58
50	50	6	6	3	1,5	1,39	5,66	12,1	6,06
60	60	7	7	3,5	2	1,66	7,94	23,8	12,2



KĄTOWNIKI RÓWNORAMIENNE L

wg PN-EN 10056-1:2000

Oznaczn.	Wymiary							Pole przekr.	Momenty bezwładności		
	a	t	R	R _i	e	w	v	A	I _x =I _y	I _ξ	I _η
	[mm]				[cm]			[cm ²]	[cm ⁴]		
40x40x6	40	6	6	3	1,20	2,83	1,70	4,48	6,31	9,97	2,65
60x60x8	60	8	8	4	1,77	4,24	2,50	9,03	29,2	46,1	12,2
80x80x10	80	10	10	5	2,34	5,66	3,30	15,1	87,5	139	36,4
100x100x12	100	12	12	6	2,90	7,07	4,11	22,7	207	328	85,7



KSZTAŁTOWNIKI ZAMKNIĘTE KWADRATOWE WYKONANE NA GORĄCO

wg PN-EN 10210-2:2000

Wyróżnik oznaczenia	Wymiary				Pole przekroju	Moment bezwładności
	b	t	R _o	R _i	A	I _x =I _y
	[mm]				[cm ²]	[cm ⁴]
40x40x5	40	5	7,5	5	6,73	13,4
60x60x8	60	8	12	8	16	69,7
80x80x8	80	8	12	8	22,4	189
100x100x10	100	10	15	10	34,9	462

Literatura:

Podręczniki:

- Wytrzymałość materiałów, Michał E. Niezgodziński, Tadeusz Niezgodziński, 2004, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, Jerzy Zielnica, 1996, wyd. Pol. Poz.
- Wytrzymałość materiałów, Marek Zakrzewski, Jerzy Zawadzki, 1983, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, Przemysław Jastrzębski, Jerzy Mutermilch, Wiktor Orłowski, 1974, Arkady,
- Wytrzymałość materiałów, Zbigniew Brzoska, 1979, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, A. Jakubowicz, Z. Orłowski, 1972, WNT,
- Wytrzymałość materiałów, Janina Gubrynowiczowa, 1968, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, M. M. Bielajew, 1956, wyd. MON,
- Wytrzymałość materiałów, Adam Bodnar, 2004, wyd. Pol. Krak.
- Wytrzymałość materiałów, Eugeniusz Bielewicz, Andrzej Chudzikiewicz, 1984, wyd. Pol. Gd.
- Statyka i wytrzymałość materiałów, Jerzy Rzyśko, 1970, PWN,
- Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności, Janusz Walczak, 1973, PWN,
- Stereomechanika techniczna, Maksymilian Tytus Huber, 1958, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, R. Kurowski, M. E. Niezgodziński, 1959, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, Stefan Piechnik, 1999, wyd. Pol. Krak.
- Wytrzymałość materiałów dla wydziału włókienniczego, Jan Szmelter, 1966, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, Zygmunt Konarzewski, 1971, wyd. Pol. Waw.
- Wytrzymałość materiałów, Stefan Błażewski, 1954, PWT,
- Wytrzymałość materiałów, Zenobiusz Klembowski, 1951, PZWS,
- Krótki kurs wytrzymałości materiałów, Roman Bąk, 1991, wyd. Pol. Śl.
- Wytrzymałość materiałów, Ryszard Łączkowski, 1996, wyd. Pol. Gd.
- Nauka o Wytrzymałości materiałów, P. Stephan, tłum. niem. red. I. Radziszewskiego, 1914,
- Mechanika materiałów i konstrukcji, t. 1 i 2, Pr. zbior. Red. Marka Bijak-Zochowskiego, 2013, wyd. Pol. Waw.

Zbiory zadań:

- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, R. Kurowski, Z. Parszewski, 1962, PWN,
- Wytrzymałość materiałów, zarys teorii, przykłady, zadania*, Praca zbiorowa pod redakcją K. Wrześniowskiego, 1985, wyd. Pol. Poz.
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, Ferdynand Twardosz, 1983, wyd. Pol. Poz.
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, Praca zbiorowa pod redakcją Krzysztofa Gołasia Jerzego Osińskiego, 2001, wyd. Pol. Waw.
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, Jan Grabowski, Anna Iwanczewska, 1997, wyd. Pol. Waw.
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, Michał Mateja, Marek Bartoszek, Jerzy Piłśniak, Piotr Szczepaniak, 2013, wyd. Pol. Śl.
- Wytrzymałość materiałów zbiór zadań*, Marian Ostwald, 2012, wyd. Pol. Poz.
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, M. Banasiak, K. Grossman, M. Trombski, 2012, PWN,
- Zarys wytrzymałości materiałów z przykładami obliczeń*, Pod redakcją Witolda Biały, 2007,
- Wytrzymałość materiałów przykłady i zadania*, Jerzy Lipka, Henryk Głowacki, Maciej Mantorski, Jan Olszewski, 1973, wyd. Pol. Waw.
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, Ryszard Piskorski, Kazimierz Trębaczki, 1985, wyd. Pol. Gd.
- Zbiór zadań ze statyki i wytrzymałości materiałów*, Tadeusz Rajfert, Jerzy Rżysko, 1974, PWN,
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów cz. 1 i 2*, Janina Gubrynowiczowa, 1965,
- Wytrzymałość materiałów, przykłady i zadania*, W. Orłowski, L. Słowański, 1963, Arkady,
- Metodyczny zbiór z wytrzymałości materiałów*, Praca zbiorowa pod redakcją Walerego Szuścika i Jerzego Kuczyńskiego, 2000, wyd. Pol. Śl.
- Ćwiczenia z wybranych zagadnień wytrzymałości materiałów*, Lech Jakliński, 1999, wyd. Pol. Waw.
- Zbiór zadań ze statyki z wytrzymałością materiałów*, Jerzy Kowalski, 1971, wyd. Pol. Poz.
- Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, Praca zbiorowa pod redakcją Mariana Janusza, 1975, PWN,
- Zadania z podstaw kształtowania elementów konstrukcji*, Cyprian Komorzycki, Przemysław Golewski, Tomasz Sadowski, 2011, wyd. Pol. Lub.

Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów, Praca zbiorowa pod redakcją Witolda Bogdaszewskiego, 1991, wyd. Pol. Św.

Zadania z wytrzymałości materiałów, Michał E. Niezgodziński, Tadeusz Niezgodziński, 2000, WNT,

Wytrzymałość materiałów w zadaniach, Krzysztof Magnacki, Waław Szc, 1987, PWN,

Wytrzymałość materiałów – Ćw. część 1 i 2, Grażyna Anna Palczak, 1991 – 1993, wyd. Pol. Wr.

Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów i statyki, Wiesław Zach, 1965, wyd. Pol. Waw.

Zadania z teorii naprężeń, wyboczenia i drgań, Witold Wierzbicki, 1958, PWN,

Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów, Rainer Pietrasik, 1984, wyd. Ar. Wr.

Zbiór zadań z mechaniki i wytrzymałości materiałów dla automatyków, E. Czogała, K. Respondek, B. Skalmierski, A. Talikowski, 1974, PWN,

Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów t. I i II, Danuta Albińska, Janusz Walczak, 1981, wyd. Pol. Kr.

Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów, Juliusz Bratborski, Jerzy Czarnecki, Włodzimierz Dębski, Andrzej Turno, 1952, PWN,

Pozostałe:

Historia wytrzymałości materiałów, S. P. Timoshenko, 1966, Arkady,

Wzory wykresy i tablice wytrzymałościowe, M. E. Niezgodziński, T. Niezgodziński, 2012, WNT,

Przykłady zadań z wytrzymałości materiałów z zastosowaniem programu Mathcad, Maciej Major, Izabela, Major, 2003, W. Pol. Cz.

Wytrzymałość przemysłowych naczyń ciśnieniowych, Zenobiusz Klembowski, 1960, PWT,

Tablice do projektowania konstrukcji metalowych, Władysław Bogucki, Mikołaj Żyburtowicz, 2005, Arkady,

Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej, Maksymilian Tytus Huber, 1948, SIMP,