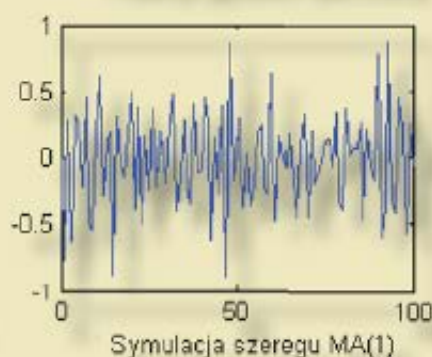
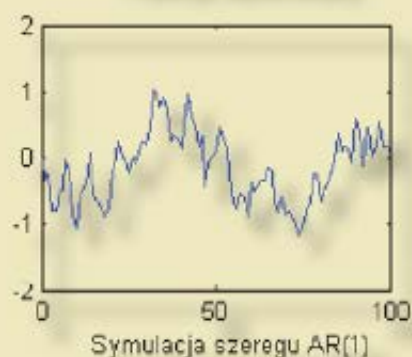
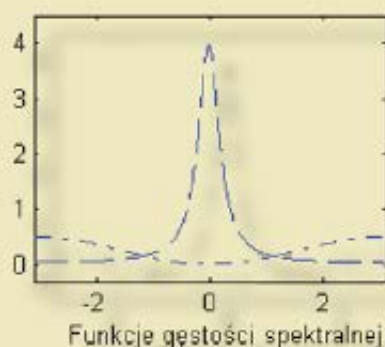
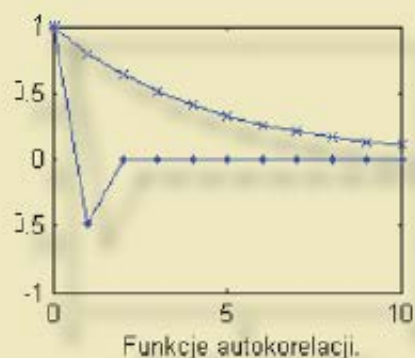




Edward Kozłowski

Analiza i identyfikacja szeregów czasowych



Analiza i identyfikacja szeregów czasowych

Monografie – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Zarządzania
ul. Nadbystrzycka 38
20-618 Lublin

Edward Kozłowski

Analiza i identyfikacja szeregów czasowych



Politechnika Lubelska
Lublin 2015

Recenzenci:

prof. dr hab. Witold Rzymowski

dr hab. Stanisław Gędek, prof. Politechniki Rzeszowskiej

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2015

ISBN: 978-83-7947-147-8

Wydawca: Politechnika Lubelska

ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej

Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej

ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin

tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl

www.biblioteka.pollub.pl

Druk: TOP Agencja Reklamowa Agnieszka Łuczak

www.agencjatop.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl

Nakład: 100 egz.

Spis treści

Wstęp	9
1 Matematyczne metody prognozowania	11
1.1 Szeregi czasowe	11
1.2 Etapy budowy modeli matematycznych	14
1.3 Matematyczne modele dynamiczne	15
2 Identyfikacja nielosowych składowych	23
2.1 Metody identyfikacji nielosowych składowych	23
2.2 Metody analityczne	24
2.2.1 Klasyczna metoda najmniejszych kwadratów	24
2.2.2 Identyfikacja trendu w szeregu czasowym	25
2.2.3 Identyfikacja funkcji wielomianowej w szeregu czasowym	27
2.2.4 Metoda największej wiarygodności	30
2.3 Metody algorytmiczne	34
2.3.1 Ruchoma średnia rzędu m	36
2.3.2 Metoda wykładniczych wag ruchomej średniej	39
2.3.3 Metoda wykładniczych wag ruchomej średniej dla przypadku "nieskończonej przeszłości"	43
2.4 Aproksymacja wielomianowa	45
2.4.1 Metoda różnicowa	45
2.4.2 Zastosowanie metody różnicowej	48
2.4.3 Wpływ metody różnicowej na składnik losowy	51

2.4.4	Metoda doboru stopnia wielomianu	53
2.5	Analiza wahań okresowych	56
2.5.1	Analiza trendów fazowych	57
2.5.2	Analiza harmoniczna	61
3	Identyfikacja składnika losowego	73
3.1	Badanie losowości	75
3.2	Badanie rozkładu składnika losowego	78
3.2.1	Weryfikacja hipotezy o zerowej wartości oczekiwanej składnika losowego	78
3.2.2	Weryfikacja hipotezy o wariancji składnika losowego .	80
3.2.3	Badanie normalności rozkładu szeregu reszt	81
3.3	Badanie korelacji składnika losowego	85
4	Stacjonarne szeregi czasowe	91
4.1	Własności stacjonarnych szeregów czasowych	92
4.2	Analiza korelacyjna	94
4.2.1	Funkcja autokowariancji	94
4.2.2	Funkcja autokorelacji	95
4.2.3	Macierze autokowariancji i autokorelacji	98
4.3	Analiza spektralna	105
4.3.1	Kowariancja a gęstość spektralna	105
4.3.2	Korelacja a gęstość spektralna	108
4.3.3	Spektralne przedstawienie stacjonarnych szeregów czasowych	110
4.3.4	Intensywność	111
5	Modele stacjonarnych szeregów czasowych	117
5.1	Zbieżność szeregów czasowych	117
5.2	Modele autoregresji AR(p)	121
5.2.1	Model autoregresji rzędu pierwszego	122
5.2.2	Model autoregresji rzędu drugiego	129
5.2.3	Model autoregresji rzędu p	134

5.3	Modele ruchomej średniej $MA(q)$	139
5.4	Modele autokorelacji i ruchomej średniej $ARMA$	148
5.5	Operatory przesunięcia	161
5.5.1	Problem jednoznaczności identyfikacji modeli $ARMA$.	161
5.5.2	Operatory F_+ i F_-	162
5.5.3	Sposoby redukcji modeli $ARMA$	165
6	Analiza stacjonarności szeregów czasowych	171
6.1	Modele niestacjonarne	171
6.2	Szeregi TS i DS	177
6.3	Test DF	187
6.4	Test ADF	190
6.5	Test $KPSS$	192
7	Niestacjonarne szeregi czasowe	195
7.1	Model $ARIMA(p, r, q)$	195
7.1.1	Własności modeli $ARIMA$	196
7.1.2	Transformacja modeli $ARIMA$	199
7.1.3	Identyfikacja modeli $ARIMA$	206
7.2	Szeregi warunkowo normalne	211
7.2.1	Model $ARCH$	213
7.2.2	Model $GARCH$	218
7.2.3	Model $RGARCH$	221
7.2.4	Model $EGARCH$	226
7.2.5	Model $TARCH$	229
7.2.6	Model $HARCH$	232
8	Filtracja ciągów warunkowo normalnych	237
8.1	Twierdzenie o korelacji normalnej	238
8.2	Równania filtracji liniowej	243
8.3	Zastosowanie równań filtracji liniowej...	250
8.3.1	Filtracja modeli $AR(p)$	250
8.3.2	Filtracja modeli $MA(q)$	253

8.3.3	Filtracja modeli ARMA(p,q) i ARIMA(p,r,q)	255
8.3.4	Filtracja modeli ARCH(p)	257
	Spis rysunków	262
	Indeks	265
	Bibliografia	267

Wstęp

Prognozowanie technicznych, fizycznych, ekonomicznych itp. systemów (obiektów, zjawisk) dynamicznych nie jest łatwe. W większości przypadków na zachowanie tych systemów dodatkowo wpływają czynniki losowe, które wywołują niepożądane zakłócenia trajektorii. Aby móc dokładnie prognozować badane zjawisko należy zbudować model opisujący jego zachowanie oraz dokonać identyfikacji parametrycznej na podstawie danych empirycznych pochodzących z poprzednich okresów. Prognoza szeregu czasowego polega nie tylko na oszacowaniu wielkości funkcji nielosowej (części deterministycznej) ale również na przewidywaniu zachowania zaburzeń zewnętrznych.

Do opisu zachowań systemów najczęściej używane są procesy stochastyczne. W języku greckim słowo $\sigma\tau\omicron\chi\omicron\varsigma$ oznacza cel, prognoza. Od niego pochodzi słowo $\sigma\tau\omicron\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\eta$ – sztuka przewidywania, prognozowania. Jako odpowiednik w języku łacińskim możemy uznać **Ars Conjectandi**. Dokładnie pod takim tytułem Jacob Bernoulli w 1713 r. opublikował swoją książkę z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa, gdzie między innymi znajduje się pierwsza wersja centralnego twierdzenia granicznego – prawo wielkich liczb.

Niniejsza książka przedstawia matematyczne podejście do analizy i identyfikacji szeregów czasowych. Identyfikację szeregów prowadzimy dwuetapowo: najpierw modelujemy i identyfikujemy część deterministyczną, a następnie składnik losowy. W pracy przedstawiono sposoby określenia zależności deterministycznych występujących w szeregach czasowych oraz metody identyfikacji zaburzeń zewnętrznych występujących w tych szere-

gach. W tym celu użyto analizy korelacyjnej i spektralnej. Za pomocą ruchomej średniej oraz metody wykładniczych wag ruchomej średniej pokazano możliwości częściowej eliminacji zaburzeń zewnętrznych w modelu, co pomaga w odgadnięciu postaci części deterministycznej. W pracy również przedstawiono metodę różnicową, za pomocą której możemy dobierać odpowiedni wielomian aproksymujący część deterministyczną. Do wyznaczenia estymatorów parametrów strukturalnych części deterministycznej szeregu czasowego zastosowano klasyczną metodę najmniejszych kwadratów.

Modelowanie i identyfikację zaburzeń zewnętrznych przeprowadzono wykorzystując metodę momentów oraz metodę największej wiarygodności. W książce podano własności szeregów stacjonarnych i niestacjonarnych oraz klasyczne metody weryfikacji stacjonarności oparte na testach Dickey-Fullera oraz testie Kwiatkowskiego-Phillipsa-Schmidta-Shina. Dodatkowo przedstawiono własności klasycznych szeregów stacjonarnych opisanych za pomocą modeli AR, MA, ARMA oraz własności szeregów niestacjonarnych opisanych za pomocą modeli ARIMA, ARCH, GARCH, TARCH, EGARCH itp. Do każdego z modeli podano algorytmy identyfikacji parametrycznej. Identyfikację procesów stacjonarnych oparto na zastosowaniu metody momentów, natomiast do identyfikacji modeli niestacjonarnych zastosowano metodę największej wiarygodności. Również przedstawiono zagadnienie filtracji szeregów gaussowskich (warunkowo gaussowskich) oraz wykorzystano je do estymacji parametrów modeli AR, MA, ARMA, ARIMA oraz modeli rodziny ARCH.

Materiał zawarty w pracy może być pomocny studentom, pracownikom naukowym oraz osobom, które dokonują identyfikacji zależności zachodzących w systemach technicznych, fizycznych, ekonomicznych itp. Autor zakłada, że czytelnik zna podstawowe zagadnienia z teorii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, dlatego nie są one omawiane w tej pracy.

Rozdział 1

Matematyczne metody prognozowania

1.1 Szeregi czasowe

Obserwując zachowanie pewnego zjawiska (procesu) technicznego, fizycznego, ekonomicznego itp. odczytujemy i notujemy jego wartości, tworząc tym samym bazę danych. Analizując wartości staramy się skonstruować model matematyczny (system), który możliwie dokładnie mógłby opisywać przebieg tego zjawiska. Najczęściej zachowanie systemu modelujemy za pomocą procesu stochastycznego z czasem dyskretnym, który nazywamy szeregiem czasowym. Podstawowe zadanie polega na identyfikacji nielosowych składowych oraz zaburzeń zewnętrznych występujących w szeregu.

W latach 80 ubiegłego stulecia analiza szeregów czasowych (ASC) była jednym z najbardziej rozwijających się działów rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. ASC, w oparciu o teoretyczne wyniki teorii procesów stochastycznych, stała się jednym z narzędzi statystyki matematycznej. Wykorzystuje się ją w różnorodnych badaniach fizycznych, technicznych, ekonomicznych, lingwistycznych, biologicznych, socjologicznych itp. W każdym z przypadków mamy do czynienia z obserwacją albo stochastycznego szeregu stacjonarnego albo szeregu różniącego się od stacjonarnego istnieniem czynników nielosowych (np. trendu, okresowości itd.)

W literaturze możemy zaobserwować dwa podstawowe podejścia do analizy szeregów czasowych. Pierwsze, związane z badaniem związków pomiędzy elementami szeregu, nazywane jest analizą korelacyjną szeregu czasowego. Fundamentem tego podejścia jest szacowanie funkcji korelacyjnych wykorzystujące metody parametryczne. Drugie podejście związane jest z analizą częstotliwościowych charakterystyk badanego szeregu oraz nazywane jest analizą spektralną szeregu czasowego, która wykorzystuje różnorodne techniki spektralne, asymptotyczne, funkcjonalne.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, natomiast $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definicja 1.1 Szeregiem czasowym $\{x_t\}_{t \in T}$ nazywamy proces stochastyczny z czasem dyskretnym.

W zależności od potrzeb będziemy dalej przyjmować $T = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{N}$ lub $T = \mathbb{N}_0$. Jeżeli $\{x_t\}_{t \in T}$ jest szeregiem czasowym, to dla każdego $t \in T$

$$x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

W teorii szeregów czasowych rozważane są zmienne losowe o wartościach zespolonych, wtedy dla każdego $t \in T$

$$x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C},$$

gdzie $\mathbb{C}$ oznacza zbiór liczb zespolonych. Przy ustalonym $\omega \in \Omega$ ciąg $\{x_t(\omega)\}_{t \in T}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych (zespolonych) nazywanym realizacją szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in T}$.

Definicja szeregu czasowego oparta jest na pojęciu zmiennej losowej x_t zależnej od parametru t (czasu). Wobec powyższego mamy do czynienia ze sparametryzowaną rodziną zmiennych losowych. Rozkłady tych zmiennych losowych, a w szczególności ich pierwsze i drugie momenty również mogą zależeć od czasu t . Zazwyczaj zakłada się, że odstępów pomiędzy t_i i t_{i+1} są jednakowe. Poniżej przyjmujemy $T = \mathbb{N}$.

Struktura i klasyfikacja podstawowych czynników

1. **Trend.** Czynnik kształtujący ogólną tendencję rozwojową. Praktycznie czynnik trendu opisywany jest za pomocą nielosowej funkcji $f_{tr}(t)$. W większości przypadków funkcja trendu jest funkcją liniową.
2. **Sezonowość.** Czynnik kształtujący okresowe wahania analizowanego zjawiska w ciągu roku. Wyniki działań czynników sezonowych modelujemy za pomocą nielosowej funkcji $\varphi(t)$. Do modelowania powyższej funkcji używane są zazwyczaj funkcje trygonometryczne;
3. **Cykliczność.** Czynnik kształtujący zmiany analizowanego zjawiska pod wpływem długoczasowych cykli o charakterze ekonomicznym, demograficznym lub astrofizycznym. Wyniki działań czynników cyklicznych opisujemy za pomocą funkcji nielosowej $\psi(t)$.
4. **Losowość.** Czynnik kształtujący wahania (fluktuacje) o charakterze losowym. Wyniki działań losowych czynników modelujemy za pomocą zmiennych losowych ε_t , $t = 1, 2, \dots$ (sparametryzowanej rodziny zmiennych losowych).

Oczywiście w szeregu czasowym nie zawsze uczestniczą wszystkie cztery czynniki. W niektórych przypadkach uczestniczą czynniki trendu, sezonowe i losowe, w niektórych cykliczne i losowe, a w niektórych tylko losowe. Jednak we wszystkich rozważanych przypadkach zakładamy istnienie czynników losowych. Zatem wartości szeregu czasowego w czasie t możemy przedstawić za pomocą wzoru

$$x_t = \lambda_1 f_{tr}(t) + \lambda_2 \varphi(t) + \lambda_3 \psi(t) + \varepsilon_t \quad \text{dla } t \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

gdzie

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i\text{-ty czynnik występuje w szeregu,} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wnioskowanie o istnieniu i -tego czynnika może być oparte na analizie istoty zadania (ma charakter aprioryczny, teoretyczny – w tym celu wykorzystujemy publikacje, ekspertyzy opracowane wcześniej) lub na podstawie analizy

statystycznej badanego szeregu (analizie trajektorii i własności badanego zjawiska).

5. **Trend stochastyczny.** Czynniki kształtujący dynamikę o charakterze losowym. W przypadku trendu stochastycznego własności dynamiczne szeregu zmieniają się w czasie. Trend stochastyczny w szeregu czasowym powstaje w wyniku integracji poprzednich zaburzeń. Stosując metodę różnicową eliminujemy trend stochastyczny otrzymując szereg w postaci kombinacji liniowej w/w czynników.

Głównym celem analizy szeregu czasowego jest identyfikacja modelu matematycznego opisującego zachowanie badanego zjawiska. Obserwując realizację szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in T}$ należy:

1. określić które z nielosowych funkcji $f_{tr}(t), \varphi(t), \psi(t)$ występują w modelu (1.1) (należy wyznaczyć wartości parametrów $\lambda_i, i = 1, 2, 3$) oraz dla każdego $\lambda_i = 1$ ustalić postać analityczną funkcji nielosowej;
2. skonstruować estymatory dla nielosowych funkcji występujących w szeregu czasowym (1.1);
3. dobrać model opisujący zachowanie funkcji losowej ε_t oraz dobrać estymatory parametrów rozkładu.

Realizacja zadań (1-3) jest podstawą do określenia krótko- i średnio-okresowych prognoz badanego zjawiska.

1.2 Etapy budowy modeli matematycznych

Modele matematyczne opisujące zachowanie zjawisk zawierają pewne parametry. Aby móc dokonać prognoz należy je wyestymować (oszacować) na podstawie danych z obserwacji. W praktyce ważne jest, aby korzystać z możliwie najmniejszej liczby parametrów. Jeżeli uwzględnimy w modelu zbyt małą liczbę parametrów, to nie uzyskamy prawidłowej zależności występującej w szeregu czasowym. Natomiast uwzględnienie w modelu zbyt

dużej liczby parametrów prowadzi do wzrostu wariancji prognoz (tym samym prognozy są mniej efektywne, trafne). Naszym celem jest otrzymanie modelu nie tylko adekwatnego ale i oszczędnego (modelu uwzględniającego parametry najistotniejsze).

Jeżeli rozumiemy mechanizm badanego zjawiska, to jego zachowanie możemy opisać za pomocą modelu matematycznego. Otrzymujemy wówczas model teoretyczny na podstawie dostępnej informacji. W wielu przypadkach do otrzymania modelu teoretycznego potrzebna jest pełna znajomość zjawiska. Jeżeli owej wiedzy w postaci publikacji (ekspertyz, opisów) nie posiadamy, to musimy szukać modelu empirycznego. W szczególności możemy korzystać z niekompletnej wiedzy teoretycznej, tym samym określamy pewną klasę możliwych modeli, które muszą być weryfikowane. Budowa i dobór odpowiedniego modelu przebiega w sposób następujący:

1. na podstawie dostępnej informacji dobieramy klasę modeli;
2. wybieramy model próbny;
3. dokonujemy identyfikacji modelu próbnego;
4. sprawdzamy za pomocą narzędzi statystyki matematycznej czy wybrany model jest poprawny (czy jest dobrze dopasowany do danych empirycznych). Jeżeli jest dobrze dopasowany to możemy go wykorzystać do prognoz. W przeciwnym razie, jeżeli zostanie wykryta niezgodność, to procedurę należy wykonać od nowa (identyfikacja, estymacja, sprawdzenie);
5. ostatecznym sprawdzianem jest weryfikacja empiryczna.

1.3 Matematyczne modele dynamiczne

Do opisu przebiegu zjawisk dość często wykorzystujemy modele matematyczne. Poniżej przedstawione zostaną modele deterministyczne i stochastyczne. Model, który pozwala dokładnie obliczyć wartość zmiennej zależnej w dowolnym momencie, nazywamy modelem deterministycznym. Na

większość zjawisk (finansowych, ekonomicznych, socjologicznych itd) mogą wpływać nieznane czynniki natury losowej. Owe czynniki powodują niemożność znalezienia modelu deterministycznego, umożliwiającego dokładne wyznaczenie przyszłego przebiegu zjawiska. Niemniej jednak można zbudować model, który pozwala wyznaczyć przyszłe wartości z prawdopodobieństwami. Takie modele nazywamy modelami stochastycznymi (probabilistycznymi). Przykłady poniżej pokazują zachowania systemów opisanych za pomocą modelu deterministycznego i modelu stochastycznego.

Przykład 1.1 (Model wartości kapitału) *Niech x_t oznacza wielkość kapitału w chwili $t \in \mathbb{N}_0$. Jeżeli $r > 0$ jest stopą zwrotu pozbawioną ryzyka, to zależności wielkości kapitału od stopy zwrotu możemy przedstawić wzorem*

$$\frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = r$$

lub

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t.$$

W takim razie wielkość kapitału którym dysponuje inwestor w chwili $t \in \mathbb{N}_0$, jeżeli w chwili $t = 0$ posiadał $x_0 = M$, jest dana wzorem (ciąg geometryczny)

$$x_t = M(1 + r)^t.$$

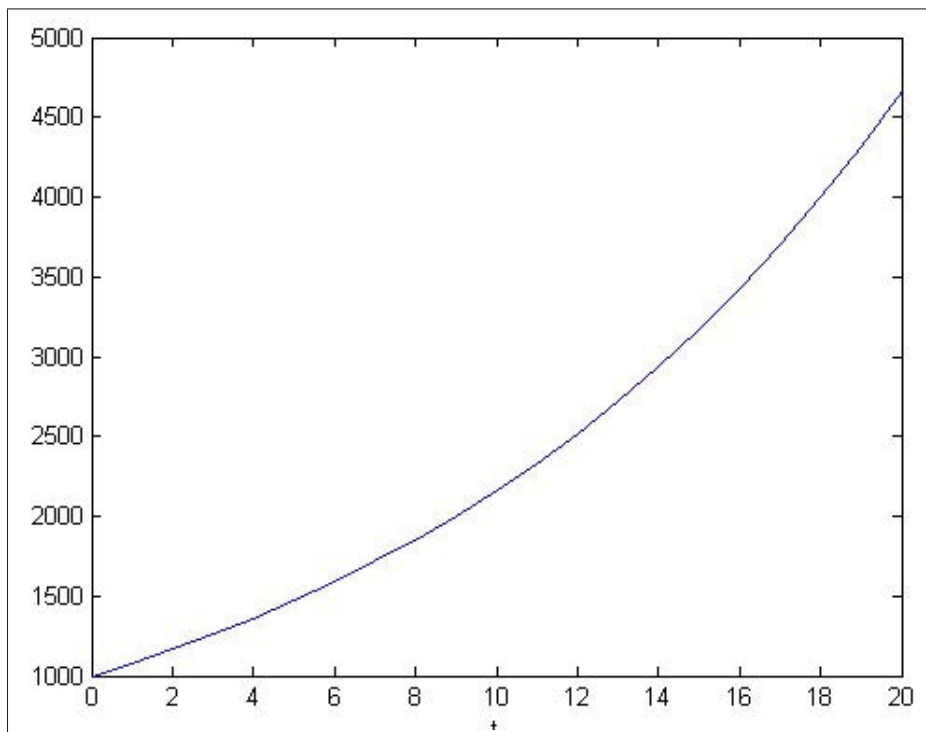
Rysunek 1.1 przedstawia wartość kapitału dla momentów $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ w przypadku, gdy wartość początkowa $M = 1000$ oraz stopa zwrotu jest stała i wynosi 8%.

W modelach stochastycznych, w odróżnieniu od modeli deterministycznych, przyszłe wartości szeregu czasowego możemy oszacować z pewnym błędem, natomiast nie potrafimy określić ich dokładnie.

Przykład 1.2 (Model autoregresji rzędu k) *Niech $\{x_t\}_{t \geq k}$ będzie ciągiem postaci*

$$x_t = \lambda_0 + \lambda_1 x_{t-1} + \dots + \lambda_k x_{t-k} + \varepsilon_t$$

z warunkiem początkowym $x_0, \dots, x_{k-1}$, gdzie $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ są parametrami modelu, natomiast $\{\varepsilon_t\}_{t \geq k}$ oznacza gaussowski biały szum – ciąg niezależnych



Rysunek 1.1: Wielkość kapitału w poszczególnych latach.

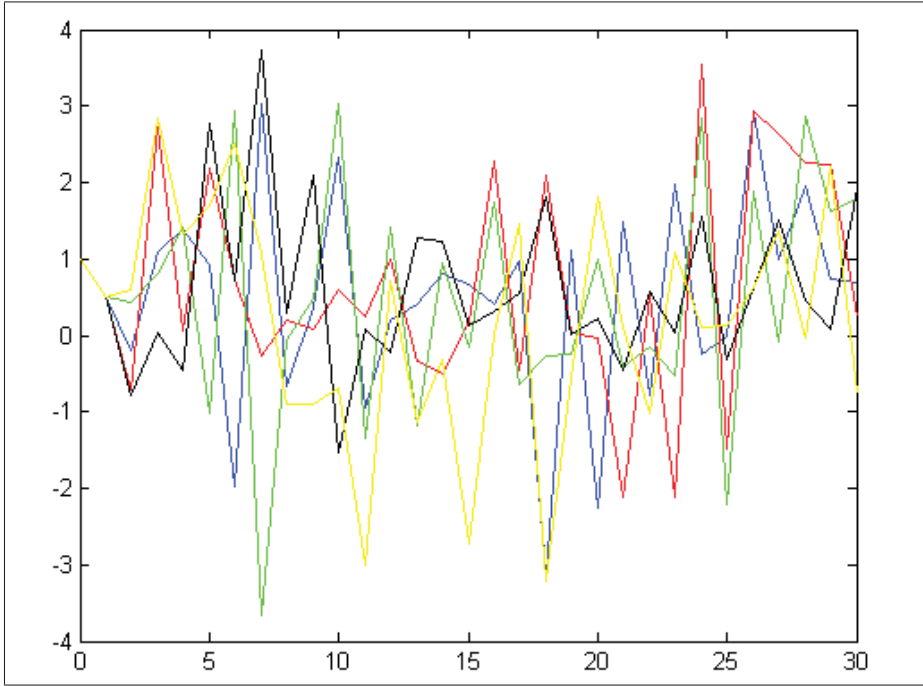
zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Dla warunku początkowego $x_0 = 1$, $x_1 = 0.5$ rysunek 1.2 przedstawia możliwe trajektorie modelu autoregresji rzędu 2 postaci

$$x_t = 0.5 - 0.2x_{t-1} + 0.3x_{t-2} + \varepsilon_t,$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in T}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 4)$, natomiast $T = \{2, \dots, 20\}$.

Przykład 1.3 Niech $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma^2)$ oraz zmienna losowa X_0 ma rozkład normalny $N(m_0, q_0^2)$. Zakładamy, że zmienne X_0 i $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ są stochastycznie niezależne oraz zmienne losowe $X_k, k \in \mathbb{N}$ są dane wzorem

$$X_k = X_{k-1} + \varepsilon_k.$$



Rysunek 1.2: Symulacje modelu AR(2).

Wykażemy, że dla dowolnego $k \geq 0$ zmienna losowa X_k ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m_k, q_k^2)$ (dla $k = 0$ wynika to z definicji). Funkcja gęstości dla zmiennej losowej X_{k+1} jest dana wzorem

$$f_{k+1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) f_{\varepsilon}(z - x) dx,$$

gdzie f_k jest funkcją gęstości zmiennych ε_k . Zatem

$$\begin{aligned} f_{k+1}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}q_k} \exp\left(-\frac{(x - m_k)^2}{2q_k^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z - x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma q_k} \exp\left(-\frac{(x - m_k)^2}{2q_k^2} - \frac{(z - x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\frac{(x - m_k)^2}{2q_k^2} + \frac{(z - x - m)^2}{2\sigma^2} = \frac{q_k^2 + \sigma^2}{2q_k^2\sigma^2} x^2 - 2\left(\frac{m_k}{2q_k^2} + \frac{z - m}{2\sigma^2}\right) x + \frac{m_k^2}{2q_k^2} + \frac{(z - m)^2}{2\sigma^2} \quad (1.2)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}}, \quad (1.3)$$

to korzystając ze wzorów (1.2) i (1.3) otrzymujemy

$$f_{k+1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + q_k^2}} \exp \left(-\frac{(z - (m_k + m))^2}{2(\sigma^2 + q_k^2)} \right).$$

Funkcja gęstości zmiennej losowej X_{k+1} dla $k \geq 0$ jest dana wzorem

$$f_{k+1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} q_{k+1}} \exp \left(-\frac{(z - m_{k+1})^2}{2q_{k+1}^2} \right),$$

gdzie

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= m_k + m = m_0 + (k+1)m, \\ q_{k+1}^2 &= q_k^2 + \sigma^2 = q_0^2 + (k+1)\sigma^2. \end{aligned}$$

Zatem dla dowolnego $k \geq 0$ zmienna losowa X_{k+1} ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m_0 + km, q_0^2 + k\sigma^2)$.

Dla $X_0 = 0$ oraz $m = 0$ powyższy przykład jest znany w literaturze jako model błędzenia losowego (patrz np. [1], [6], [51], [52], [57]).

Przykład 1.4 Niech $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(m, \sigma^2)$, zmienna losowa τ ma rozkład Poissone'a z parametrem intensywności $\lambda > 0$ oraz zmienna losowa X_τ jest dana wzorem

$$X_\tau = \sum_{k=0}^{\tau} X_k.$$

Poniżej wyznaczymy wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X_τ . Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X_τ jest dana wzorem

$$\varphi_{X_\tau}(s) = E e^{isX_\tau}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Z przykładu 1.3 wynika, że dla ustalonego $k \geq 0$ zmienna losowa $\sum_{t=0}^k X_t$ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(km, k\sigma^2)$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \varphi_{X_\tau}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} E \exp \left(is \sum_{t=0}^k X_t \right) P(\tau = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma}} e^{isx} e^{-\frac{(x-km)^2}{2k\sigma^2}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{iskm - \frac{k\sigma^2 s^2}{2}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\left(\lambda e^{ism - \frac{\sigma^2 s^2}{2}} \right)^k}{k!} = \exp \left(\lambda \left(e^{ism - \frac{\sigma^2 s^2}{2}} - 1 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Korzystając z własności funkcji charakterystycznej otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 EX_\tau &= \frac{\frac{\partial}{\partial s} \varphi_{X_\tau}(s) \Big|_{s=0}}{i} = \lambda m, \\
 EX_\tau^2 &= \frac{\frac{\partial^2}{\partial s^2} \varphi_{X_\tau}(s) \Big|_{s=0}}{i^2} = \lambda (m^2 + \sigma^2) + \lambda^2 m^2.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie wartość oczekiwana zmiennej losowej X_τ wynosi λm , natomiast jej wariancja jest równa

$$Var(X_\tau) = EX_\tau^2 - (EX_\tau)^2 = \lambda (m^2 + \sigma^2).$$

Modele stochastyczne mają dość szerokie zastosowanie w praktyce. Opisując zachowanie obiektów (systemów technicznych, ekonomicznych, socjologicznych itp.) za pomocą zmiennych losowych możemy przewidywać (szacować z prawdopodobieństwem) wartości tych systemów bądź wartości zależne od tych systemów. Proste przykłady poniżej pokazują zastosowanie modeli stochastycznych w ekonomii.

Przykład 1.5 *Przedsiębiorstwo produkuje towar oraz sprzedaje po ustalonej cenie $p > 0$. Popyt na towar jest podporządkowany rozkładowi log-normalnemu $LN(m, \sigma^2)$, gdzie $m > 0$, $0 < \sigma < \infty$. Funkcja kosztów jest liniowa $K(y) = k_0 + k_1 y$, gdzie y oznacza wielkość produkcji. Poniżej oszacujemy oczekiwany popyt na dobro oraz oczekiwany zysk ze sprzedaży przy założeniu, że wielkość produkcji jest równa wielkości sprzedaży.*

Niech zmienna losowa ξ reprezentuje popyt na dobro. Funkcja gęstości rozkładu log-normalnego $\mathbf{LN}(m, \sigma^2)$ jest dana wzorem

$$\gamma(x, m, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Oczekiwany popyt wynosi

$$E\xi = \int_0^{\infty} \frac{x}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Aby wyznaczyć powyższą całkę dokonujemy zamiany zmiennych

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x = e^y \\ dx = e^y dy \end{cases}.$$

Zatem oczekiwany popyt wynosi

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(y - \frac{(y - m)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2 - 2(m + \sigma^2)y + (m + \sigma^2)^2 - (m + \sigma^2)^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= e^{-\frac{m^2 - (m + \sigma^2)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - (m + \sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dy = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

Wobec powyższego oczekiwany zysk (przychód minus koszty) ze sprzedaży jest równy

$$E(p\xi - k_0 - k_1\xi) = (p - k_1)E\xi - k_0 = (p - k_1)e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} - k_0.$$

Przykład 1.6 Przedsiębiorstwo produkuje dobra niesubstytucyjne, które są sprzedawane po cenach $p_1 > 0$ i $p_2 > 0$ odpowiednio. Popyty na dobra są stochastycznie niezależne oraz podporządkowane rozkładowi Poissone'a z parametrami $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$. Funkcje kosztów są liniowe

$K(\xi_i) = k_{0i} + k_{1i}\xi_i$. Poniżej oszacujemy oczekiwane popyty oraz oczekiwany łączny zysk ze sprzedaży.

Niech $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ reprezentuje wektor popytów na dobra. Funkcja gęstości zmiennej losowej X dla rozkładu Poissona z parametrem λ ma postać

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_0.$$

Oczekiwany popyt dla dobra pierwszego:

$$E\xi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{(n-1)!} = \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^n}{n!} = \lambda_1.$$

Analogicznie $E\xi_2 = \lambda_2$. Ostatecznie oczekiwany popyt na dobra wynosi

$$E\xi = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ E\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

natomiast oczekiwany łączny zysk jest równy

$$\begin{aligned} E(p_1\xi_1 - K(\xi_1) + p_2\xi_2 - K(\xi_2)) &= p_1E\xi_1 - (k_{01} + k_{11}E\xi_1) + p_2E\xi_2 \\ &\quad - (k_{02} + k_{12}E\xi_2) = (p_1 - k_{11})\lambda_1 + (p_2 - k_{12})\lambda_2 - k_{01} - k_{02}. \end{aligned}$$

Rozdział 2

Identyfikacja nielosowych składowych

2.1 Metody identyfikacji nielosowych składowych

Identyfikacja szeregów czasowych $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci

$$x_t = f(t) + \varepsilon_t \quad \text{dla } t \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

polega na wyznaczeniu części deterministycznej $f(t)$ tego szeregu oraz określeniu zachowania składnika reszt ε_t dla $t \in \mathbb{N}$. Poniżej przedstawione zostaną sposoby identyfikacji i aproksymacji części deterministycznej szeregu (2.1). Metody wyznaczenia nielosowych składowych w badanym szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy podzielić na analityczne i algorytmiczne.

Metody analityczne wykorzystujemy w przypadku gdy znana jest postać funkcji nielosowej $f(t)$. Jeżeli stwierdziliśmy, że w analizowanym szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ występują nielosowe składowe (trendu $f_{tr}(t)$, sezonowa $\varphi(t)$, cykliczna $\psi(t)$), to część deterministyczną szeregu modelujemy za pomocą równania

$$\begin{aligned} f(t) &\stackrel{def}{=} f(t, \Theta) \stackrel{def}{=} \lambda_1 f_{tr}(t, \Theta_1) + \lambda_2 \varphi(t, \Theta_2) + \lambda_3 \psi(t, \Theta_3) \\ &\stackrel{def}{=} \lambda_1 f_{tr}(t) + \lambda_2 \varphi(t) + \lambda_3 \psi(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie $\Theta \stackrel{def}{=} (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \in \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \mathbb{R}^{k_3}$ jest wektorem nieznanych parametrów. Zadanie polega na wyznaczeniu estymatorów parametrów Θ funkcji $f(t, \Theta)$. Do predykcji części deterministycznej szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wybieramy wartości funkcji $f(t, \hat{\Theta})$, $t \in \mathbb{N}$ (tzn. nieznane parametry Θ zastępujemy estymatorami $\hat{\Theta}$).

Metody algorytmiczne wykorzystujemy wtedy, gdy postać funkcji nielosowej $f(t)$ nie jest znana. W takim przypadku zadanie polega na konstrukcji algorytmu oceny $\hat{f}(t)$ dla nieznanej funkcji $f(t)$ w dowolnej chwili czasowej t . Metody algorytmiczne są bardziej elastyczne. Niektóre z tych metod zostaną omówione poniżej.

2.2 Metody analityczne

Do identyfikacji parametrów deterministycznej części szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ najczęściej wykorzystuje się klasyczną metodę najmniejszych kwadratów (MNK) oraz metodę największej wiarygodności (MNW) (patrz [1], [13], [28], [43], [58], [59], [61]). W przypadku stosowania metody najmniejszych kwadratów szukamy takich estymatorów parametrów strukturalnych (wartości ocen nieznanymi parametrów) modelu aby suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami empirycznymi a teoretycznymi szeregu czasowego była jak najmniejsza. W przypadku stosowania metody największej wiarygodności szukamy takich ocen parametrów modelu aby iloczyn prawdopodobieństw realizacji elementów szeregu czasowego (w tym przypadku elementy szeregu czasowego występują jako zmienne losowe) był jak największy.

2.2.1 Klasyczna metoda najmniejszych kwadratów

Rozważmy model postaci

$$x_t = f(t, \Theta) + \varepsilon_t \quad \text{dla } t \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Na podstawie realizacji szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ należy

oszacować nieznane parametry Θ modelu (2.3). Kryterium, które zaproponował Gauss do pomiaru błędu estymacji jest kwadrat długości $\|\varepsilon\|^2 = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle$, gdzie $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$ jest wektorem odchyłeń wartości empirycznych zmiennej zależnej od wartości teoretycznych ($\varepsilon_t = x_t - f(t, \Theta)$ dla $t = 1, 2, \dots, N$). Zadanie polega na wyznaczeniu takich wartości $\Theta \in \mathbb{R}^k$ dla których

$$\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle \rightarrow \min.$$

Definicja 2.1 *Klasyczna metoda najmniejszych kwadratów (MNK) polega na wyznaczeniu wektora parametrów $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^k$ spełniającego warunek*

$$\sum_{t=1}^N \left(x_t - f(t, \hat{\Theta}) \right)^2 = \min_{\Theta \in \mathbb{R}^k} \sum_{t=1}^N (x_t - f(t, \Theta))^2. \quad (2.4)$$

Estymator $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^k$ uzyskany za pomocą MNK spełnia warunek

$$\bigwedge_{\Theta \in \mathbb{R}^k} \left\| x_t - f(t, \hat{\Theta}) \right\|^2 \leq \|x_t - f(t, \Theta)\|^2.$$

W modelu (2.3) jako zmienna niezależna występuje tylko zmienna czasowa t . Ocenę parametrów $\hat{\Theta}$ konstruowane są na podstawie obserwacji szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Opisując zachowanie szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ za pomocą modeli (2.3) można dobierać różnorodne postaci części deterministycznej $f(t, \Theta)$ (patrz [1], [13], [24], [43], [58], [61]).

2.2.2 Identyfikacja trendu w szeregu czasowym

Jeżeli w szeregu czasowym występuje tylko trend liniowy, to taki model możemy przedstawić w postaci

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t. \quad (2.5)$$

Wartości ocen $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1$ parametrów strukturalnych α_0, α_1 na podstawie obserwacji szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ postaci (2.5) otrzymujemy rozwiązując zadanie programowania kwadratowego

$$\min_{\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^N (x_t - \alpha_0 - \alpha_1 t)^2. \quad (2.6)$$

Różniczkując funkcję celu $F(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{t=1}^N (x_t - \alpha_0 - \alpha_1 t)^2$ względem zmiennych α_0, α_1 , otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha_0} F(\alpha_0, \alpha_1) = -2 \sum_{t=1}^N (x_t - \alpha_0 - \alpha_1 t), \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F(\alpha_0, \alpha_1) = -2 \sum_{t=1}^N t(x_t - \alpha_0 - \alpha_1 t). \end{cases}$$

Ponieważ $F(\alpha_0, \alpha_1)$ jest funkcją wypukłą, to rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^N x_t - N\alpha_0 - \alpha_1 \sum_{t=1}^N t = 0, \\ \sum_{t=1}^N tx_t - \alpha_0 \sum_{t=1}^N t - \alpha_1 \sum_{t=1}^N t^2 = 0 \end{cases}$$

jest jednocześnie rozwiązaniem problemu (2.6). Mnożąc obustronnie pierwsze równanie przez $-\sum_{t=1}^N t$, a drugie przez N oraz dodając je stronami otrzymujemy

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{N \sum_{t=1}^N tx_t - \sum_{t=1}^N x_t \sum_{t=1}^N t}{N \sum_{t=1}^N t^2 - \left(\sum_{t=1}^N t \right)^2}, \\ \alpha_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{t=1}^N x_t - \alpha_1 \sum_{t=1}^N t \right). \end{cases}$$

Oznaczając przez $\bar{x}$ średnią arytmetyczną realizacji szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ oraz przez $\bar{t}$ średnią arytmetyczną zmiennej czasowej t otrzymujemy

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\sum_{t=1}^N tx_t - N\bar{x}\bar{t}}{\sum_{t=1}^N t^2 - N\bar{t}^2}, \\ \alpha_0 = \bar{x} - \alpha_1 \bar{t}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Korzystając ze wzorów $\sum_{t=1}^N t = \frac{N(N+1)}{2}$ oraz $\sum_{t=1}^N t^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ warunek (2.7) możemy przedstawić w postaci

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{12 \sum_{t=1}^N tx_t - \frac{N(N+1)}{2} \bar{x}}{N(N^2-1)}, \\ \alpha_0 = \bar{x} - \alpha_1 \frac{N+1}{2}. \end{cases}$$

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (2.11)$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcję celu

$$f(\Theta) = \langle Y - X\Theta, Y - X\Theta \rangle, \quad \Theta \in \mathbb{R}^{p+1}.$$

Ponieważ $f(\cdot)$ jest funkcją wypukłą, to rozwiązanie układu równań $\nabla_{\Theta} f(\Theta) = \bar{0}$ (gdzie $\nabla_{\Theta} f(\Theta)$ oznacza gradient f w punkcie Θ , $\bar{0} \in \mathbb{R}^{p+1}$ – wektor zerowy) jest jednocześnie rozwiązaniem problemu

$$\min_{\Theta \in \mathbb{R}^{p+1}} f(\Theta).$$

Mamy

$$\nabla_{\Theta} f(\Theta) = 2X^T (X\Theta - Y),$$

więc $\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań $\nabla_{\Theta} f(\Theta) = \bar{0}$. ■

Podstawiając równanie obserwacyjne (2.10) do (2.11), otrzymujemy

$$\hat{\Theta} = \Theta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon. \quad (2.12)$$

Wobec powyższego wartość oczekiwana wektora nieznanymi parametrów Θ jest równa

$$E\Theta = \hat{\Theta} - (X^T X)^{-1} X^T E\varepsilon = \hat{\Theta},$$

co oznacza, że $\hat{\Theta}$ jest nieobciążonym estymatorem wektora nieznanymi parametrów Θ . Macierz kowariancji wektora nieznanymi parametrów Θ jest równa

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Theta, \Theta) &= E(\Theta - E\Theta)(\Theta - E\Theta)^T \\ &= E\left((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X (X^T X)^{-1}\right) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon \varepsilon^T) X (X^T X)^{-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, to

$$E(\varepsilon \varepsilon^T) = \sigma^2 I,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową. Ostatecznie otrzymujemy

$$\text{cov}(\Theta, \Theta) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}. \quad (2.13)$$

Wniosek 2.1 *W przypadku, gdy funkcja nielosowa $f(t, \Theta)$ jest funkcją nieliniową ze względu na parametry Θ , to możemy:*

1. *dokonać linearyzacji, a następnie oszacować nieznane parametry Θ za pomocą MNK,*
2. *funkcję nielosową $f(t, \Theta)$ przybliżyć wielomianem stopnia p ,*
3. *oszacować nieznane parametry Θ rozwiązując zadanie (2.4), wtedy warunek konieczny na istnienie ekstremum ma postać*

$$\sum_{t=1}^N (x_t - f(t, \Theta)) \nabla_{\Theta} f(t, \Theta) = 0. \quad (2.14)$$

W przypadku, gdy składniki losowe $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ są skorelowane, to do oszacowania parametrów Θ musimy zastosować uogólnioną MNK. Więcej na temat identyfikacji zależności wykładniczych, potęgowych, logarytmicznych, hiperbolicznych można znaleźć np. w [43], [61].

Uwzględnienie w modelu (2.3) zbędnych czynników (parametrów, predyktorów) prowadzi do wzrostu wariancji prognoz (nieefektywności estymatorów), natomiast brak analizy niezbędnych cech prowadzi do obciążoności estymatorów. Optymalny zbiór predyktorów dla modeli liniowych wyznaczamy za pomocą kryterium informacyjnego. W tym celu korzystamy z klasycznych kryteriów znanych w literaturze:

- kryterium Akaike (Akaike Information Criterion-*AIC*) (patrz np. [2], [4], [5], [13], [57], [59])

$$AIC = N \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 \right) + 2k,$$

- kryterium Schwarza *SIC* (patrz np. [48], [57], [59])

$$SIC = N \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 \right) + k \ln N,$$

- kryterium Hannana–Quinna (patrz np. [26])

$$HQC = N \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 \right) + 2k \ln(\ln N),$$

gdzie k oznacza liczbę nieznanymi parametrów w modelu.

2.2.4 Metoda największej wiarygodności

Poniżej przedstawiona zostanie kolejna metoda estymacji punktowej. Metoda największej wiarygodności (MNW) została zaproponowana przez R. Fishera oraz polega na analizie łącznego rozkładu prawdopodobieństwa próbek $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ (patrz [1], [13], [28], [31], [43], [51], [58], [59]).

Rozważmy model postaci

$$x_t = f(t, \Theta, \varepsilon_t) \quad \text{dla } t \in \mathbb{N}, \quad (2.15)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $p(\cdot, \lambda)$, natomiast $\lambda \in \mathbb{R}^n$ – wektorem nieznanym parametrów rozkładu ciągu zmiennych losowych $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Sposób identyfikacji parametrów $\Theta \in \mathbb{R}^k$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}^n$ za pomocą metody największej wiarygodności podaje twierdzenie poniżej.

Twierdzenie 2.2 *Jeżeli $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest realizacją szeregu postaci (2.15), funkcja $f_{t,\Theta}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, \Theta, \varepsilon)$ jest funkcją różnowartościową, $f_{t,\Theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz*

$$(\Theta, \lambda) \in \bigwedge_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n} \bigwedge_{1 \leq t \leq N} p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda) > 0,$$

gdzie $f^{-1}(x, t, \Theta) = f_{t,\Theta}^{-1}(x)$ i $k + n < N$, to estymatory nieznanymi parametrów $\Theta \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ uzyskane za pomocą MNW spełniają warunek

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^N \frac{\nabla_{\Theta} p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)}{p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)} = 0, \\ \sum_{t=1}^N \frac{\nabla_{\lambda} p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)}{p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Dowód. Niech $\varepsilon = f^{-1}(x, t, \Theta)$. Do oszacowania parametrów Θ, λ na podstawie obserwacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ korzystając z MNW należy najpierw skonstruować funkcję wiarygodności

$$L(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda) = \prod_{t=1}^N p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda). \quad (2.17)$$

Stosując MNW szukamy takich ocen nieznanymi parametrów Θ i λ , dla których funkcja wiarygodności osiąga wartość największą. Zatem zadanie ma postać

$$\max_{(\Theta, \lambda) \in \mathbb{R}^{k \times n}} L(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda).$$

Powyższe zadanie możemy sprowadzić do postaci równoważnej

$$\max_{(\Theta, \lambda) \in \mathbb{R}^{k \times n}} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda), \quad (2.18)$$

gdzie

$$\begin{aligned} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda) &= \ln(L(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda)) \\ &= \sum_{t=1}^N \ln p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \nabla_{\Theta} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda) = 0 \\ \nabla_{\lambda} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda) = 0 \end{cases}$$

otrzymujemy punkt, który spełnia warunek konieczny. Gradienty z funkcji wiarygodności $\nabla_{\Theta} l$ i $\nabla_{\lambda} l$ dane są wzorami

$$\begin{aligned} \nabla_{\Theta} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda) &= \sum_{t=1}^N \frac{\nabla_{\Theta} p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)}{p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)}, \\ \nabla_{\lambda} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \lambda) &= \sum_{t=1}^N \frac{\nabla_{\lambda} p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)}{p(f^{-1}(x_t, t, \Theta), \lambda)}. \end{aligned}$$

■

Przykład 2.1 Niech szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ będzie dany wzorem (2.3), gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Na podstawie obserwacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ korzystając z MNW zidentyfikujemy nieznanne parametry strukturalne $\Theta \in \mathbb{R}^k$ oraz odchylenie standardowe σ dla niezależnych zmiennych losowych $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$.

Zgodnie z równaniem (2.3) przyjmujemy

$$x_t = f_{t, \Theta}(\varepsilon) = f(t, \Theta) + \varepsilon,$$

zatem

$$f^{-1}(x, t, \Theta) = f_{t, \Theta}^{-1}(x) = x - f(t, \Theta).$$

Fukcja wiarygodności jest dana wzorem

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \Theta, \sigma) &= \prod_{t=1}^N \gamma(x_t - f(t, \Theta), \sigma) \\ &= \frac{1}{\sigma^N (2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N (x_t - f(t, \Theta))^2 \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

oznacza funkcję gęstości zmiennej losowej o rozkładzie $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Rozwiązując zadanie postaci

$$\max_{\Theta, \sigma} L(x_1, \dots, x_N; \Theta, \sigma)$$

lub zadanie równoważne

$$\max_{\Theta, \sigma} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \sigma),$$

gdzie

$$\begin{aligned} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \sigma) &= \ln(L(x_1, \dots, x_N; \Theta, \sigma)) \\ &= -N \ln(\sigma) - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N (x_t - f(t, \Theta))^2. \end{aligned}$$

otrzymujemy oceny parametrów Θ i σ . Gradienty $\nabla_{\Theta} l$ oraz $\nabla_{\sigma} l$ dla logarytmu z funkcji wiarygodności wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} \nabla_{\Theta} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \sigma) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - f(i, \Theta)) \nabla_{\Theta} f(i, \Theta), \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} l(x_1, \dots, x_N; \Theta, \sigma) &= -N \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N (x_i - f(i, \Theta))^2. \end{aligned}$$

Przyrównując je do zera otrzymujemy warunek konieczny na istnienie ekstremum

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^N (x_t - f(t, \Theta)) \nabla_{\Theta} f(t, \Theta) = 0, \\ -N \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{t=1}^N (x_t - f(t, \Theta))^2 = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Wniosek 2.2 Porównując (2.14) oraz (2.20) widzimy, że estymatory nieznanych parametrów Θ dla modelu (2.3) uzyskane za pomocą MNK i MNW są identyczne.

Wniosek 2.3 Z układu równań (2.20) wynika, że najlepszym estymatorem odchylenia standardowego jest

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(x_t - f(t, \hat{\Theta}) \right)^2},$$

gdzie $\hat{\Theta}$ jest estymatorem nieznanych parametrów w modelu (2.3).

Przykład 2.2 Rozważmy model

$$x_t = t^a \varepsilon_t \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.21)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie logarytmiczno-normalnym $LN(m, \sigma^2)$. Funkcja wiarygodności ma postać

$$L(x_1, \dots, x_N; a, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\prod_{t=1}^N \frac{t^a}{x_t} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{x_t}{t^a} - m \right)^2 \right),$$

natomiast

$$\begin{aligned} l(x_1, \dots, x_N; a, m, \sigma) &= \ln(L(x_1, \dots, x_N; a, m, \sigma)) \\ &= -N \ln(\sigma) - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \sum_{t=1}^N (a \ln t - \ln x_t) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N (\ln x_t - a \ln t - m)^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Rozwiązując zadanie

$$\max_{a, m, \sigma} l(x_1, \dots, x_N; a, m, \sigma)$$

otrzymujemy estymatory nieznanych parametrów a, m, σ . Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji $l(x_1, \dots, x_N; a, m, \sigma)$ ze względu na a, m, σ

$$\left\{ \begin{array}{l} -a \sum_{t=1}^N \ln t + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N (\ln x_t - a \ln t - m) \ln t = 0, \\ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N (\ln x_t - a \ln t - m) = 0, \\ -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{t=1}^N (\ln x_t - a \ln t - m)^2 = 0. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Z równania trzeciego powyższego układu równań otrzymujemy

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\ln x_t - a \ln t - m)^2. \quad (2.24)$$

Niech

$$g = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln x_t, \quad h = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln t, \quad s = \frac{g}{h}.$$

Z równania drugiego układu (2.23) wyznaczamy parametr a jako

$$a = \frac{g - m}{h}. \quad (2.25)$$

Podstawiając (2.24) oraz (2.25) do równania pierwszego układu (2.23) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (m - g) \sum_{t=1}^N \left(\ln x_t - s \ln t - m \left(1 - \frac{\ln t}{h} \right) \right)^2 \\ & + \sum_{t=1}^N \ln x_t \ln t - a \sum_{t=1}^N (\ln t)^2 - mNh = 0. \end{aligned}$$

Wyznaczając pierwiastki wielomianu stopnia trzeciego otrzymujemy wartości m spełniające warunek konieczny ekstremum funkcji (2.22), następnie z (2.24) oraz (2.25) wyznaczamy wartości a i σ odpowiednio. Otrzymane wyniki spełniają warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji $l(x_1, \dots, x_N; a, m, \sigma)$ postaci (2.22).

2.3 Metody algorytmiczne

Metody algorytmiczne zazwyczaj stosujemy w przypadku, gdy nie znamy postaci części deterministycznej. Przyjmujemy że szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest dany wzorem

$$x_t = f(t) + \varepsilon_t, \quad (2.26)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$.

Metody algorytmiczne polegają na konstrukcji estymatora części deterministycznej $f(t)$ poprzez zmniejszenie wpływu losowych fluktuacji w analizowanym szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. U podstaw tej metody leży prosta obserwacja: jeżeli wariancja niezależnych zmiennych losowych $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi σ^2 , to wariancja średniej elementów $x_{t-m}, x_{t-m+1}, \dots, x_t$ dla $t > m$ jest równa

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\frac{x_t + \dots + x_{t-m}}{m+1} \right) &= E \left(\frac{x_t + \dots + x_{t-m} - E(x_t + \dots + x_{t-m})}{m+1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{m+1} E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \dots + \varepsilon_{t-m})^2 = \frac{\sigma^2}{m+1} \end{aligned}$$

co powoduje zmniejszenie rozrzutu (wariancji) oraz wygładzanie trajektorii.

Konstrukcja estymatora części deterministycznej $f(t)$ elementów szeregu czasowego postaci (2.26) na podstawie realizacji $x_{t-m}, x_{t-m+1}, \dots, x_t$ polega na wyznaczeniu wielkości

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=0}^m w_k x_{t-k} \quad \text{dla } t > m, \quad (2.27)$$

gdzie wagi $w_0, w_1, \dots, w_m$ spełniają warunek $\sum_{k=0}^m w_k = 1$, $w_j \geq 0$ dla $j = 0, 1, \dots, m$. Powyższą metodę nazywamy ruchomą średnią (patrz np. [1], [33], [59], [61]). Wagi $w_0, w_1, \dots, w_m$ szacujemy za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Uwaga 2.1 Określając nielosową składową $f(t)$ w szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przy pomocy metody ruchomej średniej otrzymujemy estymator $\hat{f}(t)$, który w przybliżeniu opisuje zachowanie tej składowej w modelu (2.26).

Poniżej przedstawimy wpływ jaki wywiera metoda ruchomej średniej na składniki losowe w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Ponieważ zmienne losowe ε_t w równaniu (2.26) są nieskorelowane (niezależne), to

$$\begin{aligned} E\varepsilon_t &= 0, \\ E\varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau} &= \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0, & \text{dla } \tau \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Podczas identyfikacji funkcji nielosowej $f(t)$ za pomocą wzoru (2.27) otrzymamy estymator $\hat{f}(t)$, który ma składnik losowy postaci

$$\tilde{\varepsilon}_t = \sum_{k=0}^m w_k \varepsilon_{t-k} \quad \text{dla } t > m. \quad (2.28)$$

Łatwo widać, że wartość oczekiwana zaburzenia estymatora jest równa zero ($E\tilde{\varepsilon}_t = 0$, $t > m$). Kowariancja estymatora $\hat{f}(t)$ jest identyczna z kowariancją składnika losowego postaci (2.28). Ponieważ zmienne losowe ε_t , $t \in \mathbb{N}$ są nieskorelowane, to

$$\gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) \triangleq \text{cov}(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\varepsilon}_{t+\tau}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=\tau}^m w_k w_{k+\tau}, & \text{dla } 0 \leq \tau \leq m, \\ 0, & \text{dla } \tau > m. \end{cases} \quad (2.29)$$

Wariancja jest równa

$$D^2 \tilde{\varepsilon}_t = \gamma_{\tilde{\varepsilon}}(0) = \sigma^2 \sum_{k=0}^m w_k^2. \quad (2.30)$$

Funkcja autokorelacji dla losowej składowej $\tilde{\varepsilon}_t$ estymatora $\hat{f}(t)$ wynosi

$$r_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ \frac{\sum_{k=\tau}^m w_k w_{k-\tau}}{\sum_{k=0}^m w_k^2}, & \text{dla } 0 < \tau \leq m, \\ 0, & \text{dla } \tau > m. \end{cases} \quad (2.31)$$

Otrzymany szereg zaburzeń $\{\tilde{\varepsilon}_t\}_{t>m}$ ma niezerową funkcję autokowariancji dla $\tau = 0, 1, \dots, m$, natomiast dla $\tau > m$ wartości funkcji autokorelacji wynoszą zero. Również wariancja $\tilde{\varepsilon}_t$ jest mniejsza od σ^2 , co powoduje redukcję zaburzeń estymatora dla funkcji nielosowej $f(t)$ w szeregu postaci (2.26). Zatem otrzymany szereg $\{\hat{f}(t)\}_{t>m}$ jest *bardziej gładki* niż szereg wyjściowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.

2.3.1 Ruchoma średnia rzędu m

Estymator $\hat{f}(t)$, $t > m$ dla części deterministycznej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (2.26) konstruujemy na podstawie obserwacji szeregu

$x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-m}$ (patrz np. [1], [59], [61]). Wagi $w_0, w_1, \dots, w_m$ we wzorze (2.27) dobieramy tak aby wariancja składnika losowego $\tilde{\varepsilon}_t$, $t > m$ (patrz wzór (2.30)) była jak najmniejsza. Należy zatem znaleźć takie liczby

$$w_0 \geq 0, w_1 \geq 0, \dots, w_m \geq 0, \text{ gdzie } \sum_{k=0}^m w_k = 1$$

dla których suma

$$\sum_{k=0}^m w_k^2$$

przyjmuje najmniejszą wartość. Przyjmijmy

$$w_k = \frac{1}{m+1}, \quad 0 \leq k \leq m$$

oraz weźmy dowolne $v_0, v_1, \dots, v_m$ spełniające warunek

$$\sum_{k=0}^m v_k = 0.$$

Mamy

$$\sum_{k=0}^m (w_k + v_k) = \sum_{k=0}^m w_k + \sum_{k=0}^m v_k = 1 + 0 = 1$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (w_k + v_k)^2 &= \sum_{k=0}^m w_k^2 + 2 \sum_{k=0}^m w_k v_k + \sum_{k=0}^m v_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{2}{m+1} \sum_{k=0}^m v_k + \sum_{k=0}^m v_k^2 = \frac{1}{m+1} + \sum_{k=0}^m v_k^2 > \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

gdy istnieje $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ takie że $v_k \neq 0$. Stąd wynika, że wektor stałych wag

$$(w_0, w_1, \dots, w_m) = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, \dots, \frac{1}{m+1} \right) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

jest jedynym wektorem, dla którego wariancja składnika losowego $\tilde{\varepsilon}_t$, $t > m$ jest najmniejsza.

Uwaga 2.2 Wartości estymatora $\hat{f}(t)$, $t > m$ dla części deterministycznej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy wyznaczyć stosując klasyczną metodę najmniejszych kwadratów. Dla ustalonego $m+1 \leq t \leq N$ rozwiązując

zadanie

$$\min_{f(t) \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^m (x_{t-k} - f(t))^2 \quad (2.32)$$

otrzymujemy, że najlepszym estymatorem (w sensie średniokwadratowym) części deterministycznej szeregu (2.26) jest

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_{t-k}. \quad (2.33)$$

Wagi we wzorze (2.27) wynoszą $w_0 = w_1 = \dots = w_m = \frac{1}{m+1}$, natomiast wariancja i kowariancja estymatora (2.27) części deterministycznej szeregu (2.26) (wariancja i kowariancja $\tilde{\varepsilon}_t$) wynoszą

$$\begin{aligned} D^2 \tilde{\varepsilon}_t &= \sigma^2 \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m+1)^2} = \frac{\sigma^2}{m+1}, \\ \gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) &= \begin{cases} \sigma^2 \frac{m-\tau+1}{(m+1)^2}, & \text{dla } 0 \leq \tau \leq m, \\ 0, & \text{dla } \tau > m, \end{cases} \end{aligned}$$

a funkcja autokorelacji

$$r_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) = \begin{cases} \frac{m-\tau+1}{m+1}, & \text{dla } 0 \leq \tau \leq m, \\ 0, & \text{dla } \tau > m. \end{cases}$$

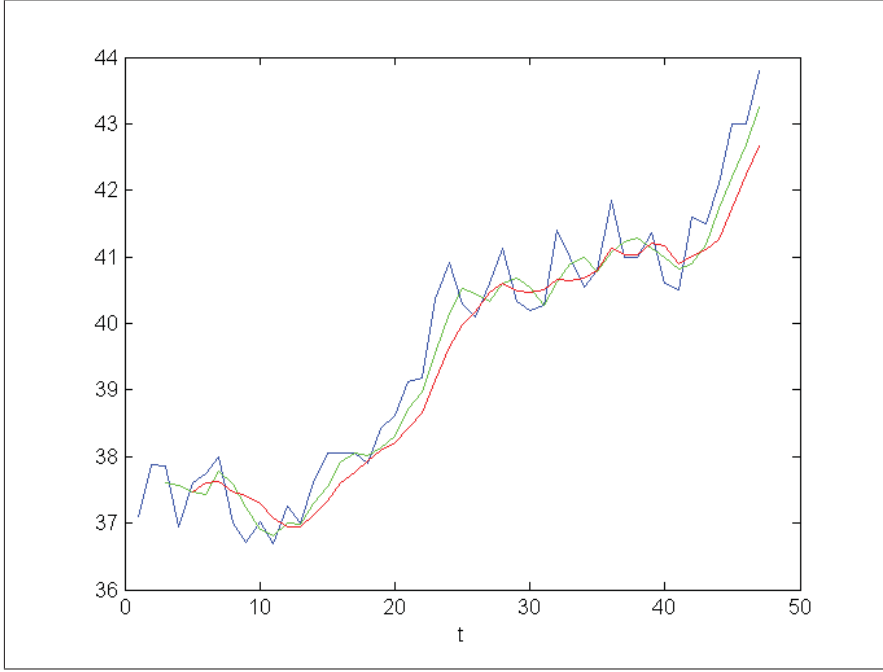
Przykład 2.3 Dla notowań cen akcji ORBIS SA z okresu 21/10/2014 – 30/12/2014¹ wyznaczymy estymatory części deterministycznej szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ postaci (2.26) jako ruchome średnie rzędu drugiego i czwartego.

Ruchome średnie rzędu 2 i 4 definiujemy wzorami

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(t) &= \frac{x_t + x_{t-1} + x_{t-2}}{3} \text{ dla } 3 \leq t \leq 47, \\ \hat{f}_4(t) &= \frac{x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + x_{t-4}}{5} \text{ dla } 5 \leq t \leq 47. \end{aligned}$$

Rysunek (2.1) przedstawia notowania cen akcji ORBIS SA z okresu 21/10/2014 – 30/12/2014 jako realizację szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ (krzywa granatowa) oraz ruchome średnie $\{\hat{f}_2(t)\}_{3 \leq t \leq 47}$ (krzywa zielona)

¹Dane pochodzą z <http://www.money.pl/gielda/archiwum/spolki/>



Rysunek 2.1: Realizacje szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ oraz ruchome średnie $\{\hat{f}_2(t)\}_{3 \leq t \leq 47}$ i $\{\hat{f}_4(t)\}_{5 \leq t \leq 47}$

i $\{\hat{f}_4(t)\}_{5 \leq t \leq 47}$ (krzywa czerwona). Bezpośrednio z rysunku widzimy, że dla ruchomej średniej rzędu drugiego wahania są zdecydowanie mniejsze niż dla szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$, natomiast dla ruchomej średniej rzędu 4 fluktuacje są jeszcze mniejsze niż dla ruchomej średniej rzędu drugiego.

2.3.2 Metoda wykładniczych wag ruchomej średniej

Estymator części deterministycznej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (2.26) skonstruowany za pomocą ruchomej średniej ma prostą konstrukcję, ale posiada również wady: realizacje $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-m}$ miały jednaki wpływ na wartości estymatora (mają takie same wagi) oraz podczas konstrukcji estymatora nie uwzględniamy całej historii analizowanego zjawiska (całego zbioru wartości $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$). Metoda zaproponowana przez Browna w pracy [10] eliminuje powyższe wady. W zadaniach, których dokonujemy prognoz za pomocą wygładzonej funkcji $\hat{f}(t)$ oraz wykorzystujemy

ją do ekstrapolacji przyszłości, wydaje się że "świeżym" danym powinniśmy przyporządkowywać większe wagi niż danym z odległej przeszłości. Metodę, która przypisuje większe wagi danym historycznym z niedalekiej przeszłości oraz uwzględnia całą historię zjawiska, nazywamy metodą wykładniczych wag ruchomej średniej (metodą wygładzania wykładniczego, metodą Browna) (patrz np. [1], [10], [61]).

Estymator $\hat{f}(t)$, $t \in \mathbb{N}$ części deterministycznej szeregu czasowego postaci (2.26) konstruujemy korzystając z MNK, z tym że kwadratowi różnic pomiędzy estymatorem $\hat{f}(t)$ a realizacją x_{t-k} dla $0 \leq k \leq t-1$ przypisujemy wagę η^k , gdzie parametr $0 < \eta < 1$ oznacza współczynnik "świeżości danych". Dla ustalonego $t \in \mathbb{N}$ estymator części deterministycznej $f(t)$ wyznaczamy rozwiązując zadanie postaci

$$\min_{f(t) \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k (x_{t-k} - f(t))^2. \quad (2.34)$$

Funkcja celu jest trójmianem kwadratowym względem zmiennej $f(t)$ oraz

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k (x_{t-k} - f(t))^2 &= \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k (x_{t-k}^2 - 2x_{t-k}f(t) + f^2(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k x_{t-k}^2 - 2f(t) \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k x_{t-k} + f^2(t) \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k x_{t-k}^2 - 2f(t) \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k x_{t-k} + f^2(t) \frac{1 - \eta^t}{1 - \eta}, \end{aligned}$$

więc jako estymator części deterministycznej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przyjmujemy

$$\hat{f}(t) = \frac{1 - \eta}{1 - \eta^t} \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k x_{t-k}, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (2.35)$$

Widzimy, że podczas konstrukcji estymatora $\hat{f}(t)$, $t \in \mathbb{N}$ uwzględniamy realizację $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ oraz wartościom x_{t-k} , $0 \leq k \leq t-1$ przypisujemy wagi $\frac{1-\eta}{1-\eta^t} \eta^k$.

Opisany wyżej estymator $\hat{f}(t)$, $t \in \mathbb{N}$ można wyznaczyć za pomocą

wzoru rekurencyjnego. Korzystając ze wzoru (2.35) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \frac{1-\eta}{1-\eta^t} \sum_{k=0}^{t-1} \eta^k x_{t-k} = \frac{1-\eta}{1-\eta^t} [x_t + \eta x_{t-1} + \eta^2 x_{t-2} + \dots + \eta^{t-1} x_1] \\ &= \frac{1-\eta}{1-\eta^t} [x_t + \eta (x_{t-1} + \eta x_{t-2} + \dots + \eta^{t-2} x_1)] \\ &= \frac{1-\eta}{1-\eta^t} \left[x_t + \eta \sum_{k=0}^{t-2} \eta^k x_{t-1-k} \right] = \frac{1-\eta}{1-\eta^t} \left[x_t + \eta \frac{1-\eta^{t-1}}{1-\eta} \hat{f}(t-1) \right].\end{aligned}$$

Wniosek 2.4 *Wzór rekurencyjny na wyznaczenie optymalnego estymatora funkcji niełosowej ma postać*

$$\hat{f}(t) = \frac{(1-\eta)x_t + \eta(1-\eta^{t-1})\hat{f}(t-1)}{1-\eta^t}, \quad \hat{f}(1) = x_1. \quad (2.36)$$

We wzorze (2.27) przyjmujemy $m = t - 1$ oraz wagi $w_k = \frac{1-\eta}{1-\eta^t} \eta^k$ dla $k = 0, 1, \dots, t - 1$. Wariancja losowej składowej $\tilde{\varepsilon}_t$ estymatora $\hat{f}(t)$ wynosi

$$D^2 \tilde{\varepsilon}_t = \sigma^2 \left(\frac{1-\eta}{1-\eta^t} \right)^2 \sum_{k=0}^{t-1} \eta^{2k} = \sigma^2 \frac{(1-\eta)^2}{(1-\eta^t)^2} \frac{1-\eta^{2t}}{1-\eta^2} = \sigma^2 \frac{(1-\eta)(1+\eta^t)}{(1+\eta)(1-\eta^t)},$$

natomiast kowariancja

$$\begin{aligned}\gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) &= \sigma^2 \left(\frac{1-\eta}{1-\eta^t} \right)^2 \sum_{k=0}^{t-1-\tau} \eta^k \eta^{k+\tau} = \\ &= \sigma^2 \eta^\tau \left(\frac{1-\eta}{1-\eta^t} \right)^2 \sum_{k=0}^{t-1-\tau} \eta^{2k} = \sigma^2 \eta^\tau \frac{(1-\eta)^2}{(1-\eta^t)^2} \frac{1-\eta^{2(t-\tau)}}{1-\eta^2},\end{aligned}$$

gdzie $0 \leq \tau \leq t - 1$. Funkcja autokorelacji dla szeregu $\{\tilde{\varepsilon}_t\}$ jest równa

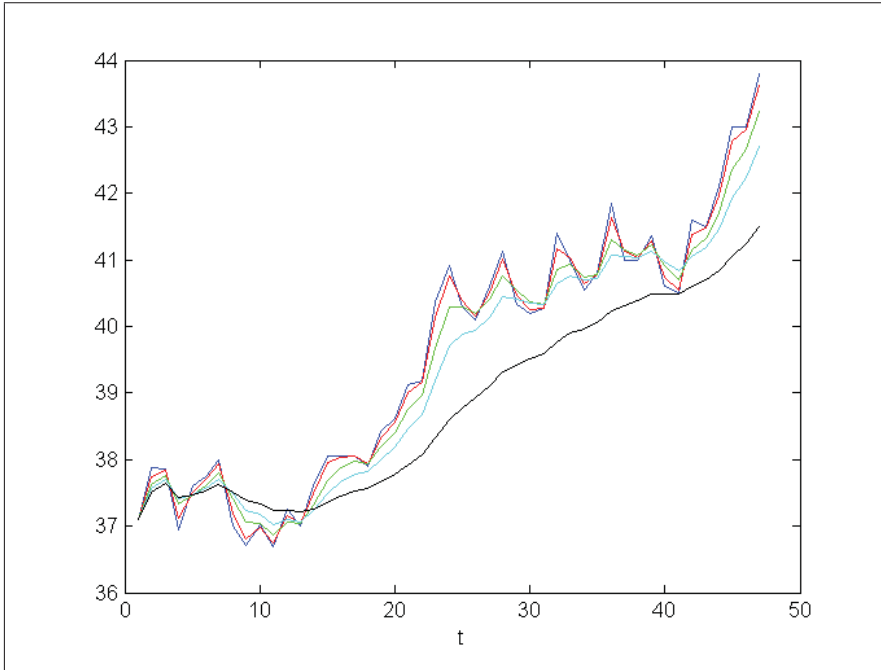
$$r_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) = \frac{\sum_{k=0}^{t-1-\tau} \eta^k \eta^{k+\tau}}{\sum_{k=0}^{t-1} \eta^{2k}} = \eta^\tau \frac{1-\eta^{2(t-\tau)}}{1-\eta^{2t}}, \quad 0 \leq \tau \leq t - 1.$$

Przykład 2.4 *Dla notowań cen akcji ORBIS SA z okresu 21/10/2014 – 30/12/2014² korzystając z metody wykładniczych wag ruchomej średniej dla*

²Dane pochodzą z <http://www.money.pl/gielda/archiwum/spolki/>

$\eta_1 = 0.2$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_3 = 0.7$, $\eta_4 = 0.9$ wyznaczmy estymatory części deterministycznej szeregu czasowego (2.26).

Rysunek (2.2) przedstawia realizację szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ (krzywa granatowa) oraz estymatory funkcji nielosowej $f(t)$ szeregu (2.26) uzyskane za pomocą metody wykładniczych wag ruchomej średniej. Na wykresie krzywa czerwona określa estymator części deterministycznej dla $\eta_1 = 0.2$, krzywa zielona – dla $\eta_2 = 0.5$, krzywa niebieska – dla $\eta_3 = 0.7$ oraz krzywa czarna – dla $\eta_4 = 0.9$. Bezpośrednio z rysunku widzimy, że wraz ze wzrostem współczynnika wag "świeżości danych" $0 < \eta < 1$ losowe fluktuacje w szeregu czasowym są dokładniej eliminowane (estymator części deterministycznej mniej naśladuje zaburzenia zewnętrzne w modelu (2.26)). Natomiast w przypadku, gdy współczynnik "świeżości danych" maleje, to wtedy estymator części deterministycznej dokładniej naśladuje zachowanie szeregu (2.26) wraz z zaburzeniami zewnętrznymi.



Rysunek 2.2: Szereg czasowy $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ oraz estymatory części deterministycznej szeregu czasowego otrzymane za pomocą metody wykładniczych wag ruchomej średniej dla $\eta_1 = 0.2$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_3 = 0.7$, $\eta_4 = 0.9$.

2.3.3 Metoda wykładniczych wag ruchomej średniej dla przypadku "nieskończonej przeszłości"

Jeżeli analizowany szereg czasowy $\{x_t\}_{t \geq 1}$ jest dość długi, to biorąc całą historię szeregu do identyfikacji części deterministycznej musimy się cofnąć dość daleko (horyzont przesunięcia w tym przypadku wynosi ∞). Tak jak poprzednio zakładamy, że większą wagę informacyjną posiadają "świeże" dane aniżeli dane z dalekiej przeszłości. Zatem większe wagi przyporządkowujemy "świeżym" wartościom szeregu niż oddalonym.

Estymator $f_\infty(t), t \in \mathbb{N}$ części deterministycznej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \geq 1}$ postaci (2.26) konstruujemy korzystając z MNK. Dla ustalonego $t \in \mathbb{N}$ estymator części deterministycznej $f(t)$ wyznaczamy rozwiązując zadanie postaci

$$\min_{f_\infty(t) \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k (x_{t-k} - f_\infty(t))^2, \quad (2.37)$$

gdzie $0 < \eta < 1$ oznacza współczynnik "świeżości danych". Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta^k = \frac{1}{1-\eta},$$

to

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta^k (x_{t-k} - f_\infty(t))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k x_{t-k}^2 - 2f_\infty(t) \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k x_{t-k} + f_\infty^2(t) \frac{1}{1-\eta},$$

więc jako estymator części deterministycznej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ dla przypadku nieskończonej przeszłości przyjmujemy

$$\hat{f}_\infty(t) = (1-\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k x_{t-k}. \quad (2.38)$$

We wzorze (2.27) przyjmujemy $m = \infty$ oraz wagi $w_k = (1-\eta)\eta^k$ dla $k = 0, 1, \dots$, natomiast wariancja i kowariancja losowej składowej $\tilde{\varepsilon}_t$ dla $\tau \in \mathbb{N}_0$ są równe:

$$\begin{aligned} D^2 \tilde{\varepsilon}_t &= \sigma^2 (1-\eta)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{2k} = \sigma^2 (1-\eta)^2 \frac{1}{1-\eta^2} = \sigma^2 \frac{(1-\eta)}{(1+\eta)}, \\ \gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) &= \sigma^2 (1-\eta)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \eta^{k+\tau} = \sigma^2 \eta^\tau (1-\eta)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{2k} = \sigma^2 \eta^\tau \frac{(1-\eta)}{(1+\eta)}. \end{aligned}$$

Funkcja autokorelacji jest dana wzorem

$$r_{\varepsilon}(\tau) = \eta^{\tau}, \quad \tau \in \mathbb{N}_0.$$

Wniosek 2.5 *Wzór rekurencyjny na wyznaczenie optymalnego estymatora funkcji nielosowej ma postać*

$$\hat{f}_{\infty}(t) = \eta \hat{f}_{\infty}(t-1) + (1-\eta)x_t, \quad \hat{f}_{\infty}(1) = x_1. \quad (2.39)$$

Wniosek 2.6 *Wzór (2.39) możemy bezpośrednio wyznaczyć z (2.36), w tym celu wystarczy wyznaczyć granicę dla $t \rightarrow \infty$.*

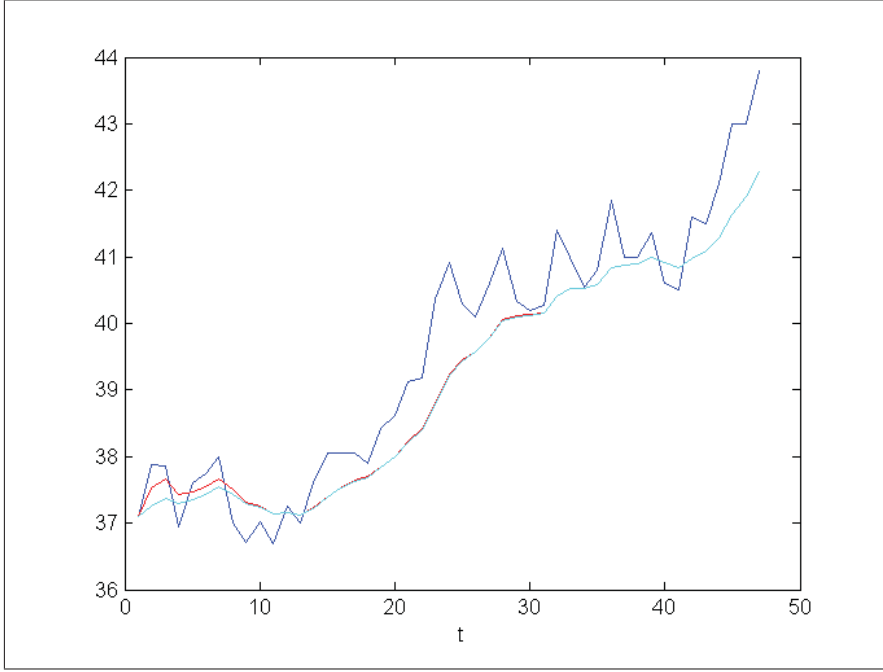
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{f}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1-\eta)x_t + \eta(1-\eta^{t-1})\hat{f}(t-1)}{1-\eta^t} \\ &= (1-\eta)x_t \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\eta^t} + \eta \hat{f}(t-1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-\eta^{t-1}}{1-\eta^t} = \hat{f}_{\infty}(t). \end{aligned}$$

Przykład 2.5 *Dla notowań cen akcji ORBIS SA z okresu 21/10/2014 – 30/12/2014³ korzystając z metod wykładniczych wag ruchomej średniej oraz wykładniczych wag ruchomej średniej dla nieskończonej przeszłości wyznaczmy estymatory części deterministycznej szeregu czasowego (2.26). Parametr "świeżości danych" $\eta = 0.8$*

Aby skonstruować estymatory części deterministycznej szeregu (2.26) korzystamy z (2.36) oraz (2.39). Rysunek (2.3) przedstawia realizację szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ (krzywa granatowa) oraz estymatory funkcji nielosowej $f(t)$ szeregu (2.26) uzyskane za pomocą wykładniczych wag $\{\hat{f}(t)\}_{1 \leq t \leq 47}$ (krzywa czerwona) oraz dla nieskończonej przeszłości $\{\hat{f}_{\infty}(t)\}_{1 \leq t \leq 47}$ (krzywa niebieska). Bezpośrednio z rysunku widzimy, że różnice między estymatorami są większe dla małych wartości t , natomiast wraz ze wzrostem t różnice maleją.

Rysunek (2.4) przedstawia natomiast wartości bezwzględne różnic pomiędzy estymatorami uzyskanymi za pomocą metod wykładniczych wag ruchomej średniej oraz wykładniczych wag ruchomej średniej dla nieskończonej

³Dane pochodzą z <http://www.money.pl/gielda/archiwum/spolki/>



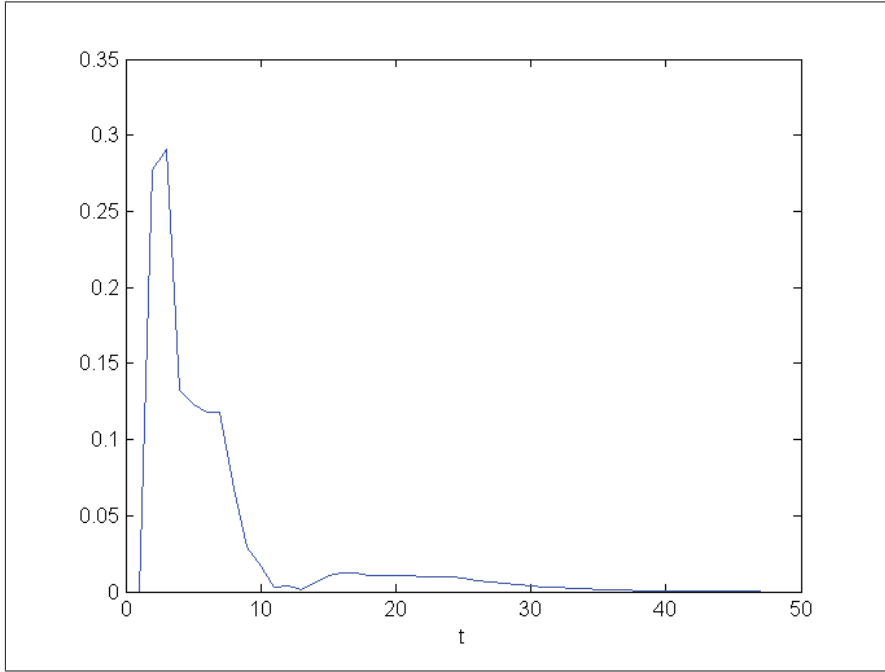
Rysunek 2.3: Szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \{1, \dots, 30\}}$ oraz ruchome średnie $\hat{f}(t)$ i $\hat{f}_\infty(t)$ uzyskane za pomocą wykładniczych wag dla $\eta = 0.8$.

przeszłości $\left\{ \left| \hat{f}(t) - \hat{f}_\infty(t) \right| \right\}_{2 \leq t \leq 47}$. Dla $t = 1$ z definicji w/w estymatorów mamy $\hat{f}(1) = \hat{f}_\infty(1) = x_1$. W rozważanym przypadku dla $t \geq 8$ powyższe różnice są mniejsze od $\frac{1}{10}$, natomiast jeżeli $\eta = 0.2$ to różnice są mniejsze od $\frac{1}{10}$ już dla $t \geq 3$.

2.4 Aproksymacja wielomianowa

2.4.1 Metoda różnicowa

W przypadku gdy nie znamy postaci funkcji nielosowej $f(t)$ w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (2.26), to czasami część deterministyczną możemy przybliżać (aproksymować) za pomocą funkcji wielomianowej. Do wyznaczenia stopnia wielomianu aproksymującego funkcję nielosową wykorzystujemy metodę różnicową, która polega na analizie kolejnych różnic elementów szeregu czasowego (patrz np. [1], [6], [25], [59]).



Rysunek 2.4: Różnice pomiędzy estymatorami wyznaczonymi za pomocą metody wykładniczych wag ruchomej średniej.

Rozważmy szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (2.26), gdzie funkcja nielosowa $f(t)$ jest wielomianem stopnia p . Operator różnicowy Δ definiujemy w sposób następujący

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} \text{ dla } t = 2, 3, \dots, \quad (2.40)$$

.....

$$\begin{aligned} \Delta^k x_t &= \Delta \left(\Delta^{k-1} x_t \right) \\ &= \Delta^{k-1} x_t - \Delta^{k-1} x_{t-1} \text{ dla } t = k+1, k+2, \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Twierdzenie 2.3 Dla operatora różnicowego rzędu $k \in \mathbb{N}$ postaci (2.40)–(2.41) spełniona jest równość

$$\Delta^k x_t = \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j x_{t-j} \text{ dla } t = k+1, k+2, \dots \quad (2.42)$$

gdzie $C_k^j = \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$, $0 \leq j \leq k$, $0! = 1$.

Dowód. Wzór (2.42) udowodnimy za pomocą indukcji matematycznej. Z definicji operatora różnicowego (2.40)–(2.41) dla $k = 1$ mamy

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = C_1^0 (-1)^0 x_t + C_1^1 (-1)^1 x_{t-1} = \Delta^1 x_t,$$

zatem wzór (2.42) jest prawdziwy dla $k = 1$. Załóżmy, że wzór (2.42) jest prawdziwy dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Udowodnimy, że (2.42) jest prawdziwy również dla $k + 1$. Z definicji operatora różnicowego (patrz (2.40)–(2.41)) mamy

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} x_t &= \Delta \left(\Delta^k x_t \right) = \Delta^k x_t - \Delta^k x_{t-1} \\ &= \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j x_{t-j} - \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j x_{t-j-1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j x_{t-j} &= C_k^0 (-1)^0 x_t + \sum_{j=1}^k C_k^j (-1)^j x_{t-j} \\ &= x_t + \sum_{j=1}^k C_k^j (-1)^j x_{t-j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j x_{t-j-1} &= \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j (-1)^j x_{t-j-1} + C_k^k (-1)^k x_{t-k-1} \\ &= \sum_{j=1}^k C_k^{j-1} (-1)^{j-1} x_{t-j} + (-1)^k x_{t-(k+1)}. \end{aligned}$$

Wobec powyższego

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} x_t &= x_t + \sum_{j=1}^k \left(C_k^j (-1)^j - C_k^{j-1} (-1)^{j-1} \right) x_{t-j} - (-1)^k x_{t-(k+1)} \\ &= x_t + \sum_{j=1}^k \left(C_k^j + C_k^{j-1} \right) (-1)^j x_{t-j} + (-1)^{k+1} x_{t-(k+1)}. \quad (2.43) \end{aligned}$$

Dla każdego $j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ mamy

$$\begin{aligned}
 C_k^j + C_k^{j-1} &= \frac{k!}{j!(k-j)!} + \frac{k!}{(j-1)!(k-(j-1))!} \\
 &= \frac{k!(k+1-j)}{j!(k+1-j)!} + \frac{k!j}{j!(k+1-j)!} \\
 &= \frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!} = C_{k+1}^j.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Również prawdą jest, że

$$C_k^0 = C_{k+1}^0 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1. \tag{2.45}$$

Podstawiając (2.44)–(2.45) do (2.43) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \Delta^{k+1}x_t &= C_{k+1}^0 (-1)^0 x_t + \sum_{j=1}^k C_{k+1}^j (-1)^j x_{t-j} + C_{k+1}^{k+1} (-1)^{k+1} x_{t-(k+1)} \\
 &= \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j (-1)^j x_{t-j}.
 \end{aligned}$$

■

2.4.2 Zastosowanie metody różnicowej

Poniżej przedstawimy zastosowanie operatora różnicowego Δ . Zobaczmy również, że jeżeli część deterministyczna szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest wielomianem stopnia $p \in \mathbb{N}$, to stosując operator różnicowy Δ możemy obniżyć stopień wielomianu o jeden. Natomiast stosując wielokrotnie operator różnicowy Δ możemy całkowicie wyeliminować nielosową składową w szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.

- Załóżmy, że szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest dany równaniem

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t, \tag{2.46}$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. W rozważanym przypadku część deterministyczna jest wielomianem stopnia pierwszego (część nielosowa określa trend w szeregu czasowym). Stosując operator różnicowy otrzymujemy

$$\Delta x_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t - (\alpha_0 + \alpha_1 (t-1) + \varepsilon_{t-1}) = \alpha_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}.$$

Kolejny raz stosując operator różnicowy otrzymamy

$$\Delta^2 x_t = \Delta(\Delta x_t) = \alpha_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - (\alpha_1 + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}.$$

Widzimy, że jeżeli funkcja nielosowa $f(t)$ jest funkcją liniową (wielomianem stopnia $p = 1$), to szereg różnic rzędu drugiego $\{\Delta^2 x_t\}_{t \geq 3}$ nie zawiera już nielosowej składowej, a zatem różnice rzędu drugiego $\{\Delta^2 x_t\}_{t \geq 3}$ są zmiennymi losowymi, które są określone jako kombinacje liniowe zaburzeń zewnętrznych szeregu (2.46):

$$\Delta^2 x_t = \tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} \quad (2.47)$$

lub

$$\Delta^2 x_t = \sum_{j=0}^2 C_2^j (-1)^j \varepsilon_{t-j}.$$

- Załóżmy, że szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest dany równaniem (część deterministyczna jest wielomianem stopnia drugiego)

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \varepsilon_t, \quad (2.48)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Stosując operator różnicowy stopnia pierwszego otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \varepsilon_t - (\alpha_0 + \alpha_1 (t-1) + \alpha_2 (t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_2 t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}. \end{aligned}$$

Różnice stopnia drugiego są równe

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_t &= \Delta(\Delta x_t) = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_2 t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \\ &\quad - (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_2 (t-1) + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = 2\alpha_2 + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}. \end{aligned}$$

Natomiast różnice stopnia trzeciego są równe

$$\begin{aligned} \Delta^3 x_t &= \Delta(\Delta^2 x_t) = 2\alpha_2 + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} \\ &\quad - (2\alpha_2 + \varepsilon_{t-1} - 2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3}) = \varepsilon_t - 3\varepsilon_{t-1} + 3\varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3} \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że jeżeli funkcja nielosowa $f(t)$ jest wielomianem stopnia $p = 2$, to szereg różnic rzędu trzeciego $\{\Delta^3 x_t\}_{t \geq 4}$ nie zawiera już nielosowej składowej. Różnice rzędu trzeciego są zmiennymi losowymi, które są kombinacją liniową zaburzeń zewnętrznych szeregu czasowego (2.48)

$$\Delta^3 x_t = \tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - 3\varepsilon_{t-1} + 3\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} \quad (2.49)$$

lub

$$\Delta^3 x_t = \sum_{j=0}^3 C_3^j (-1)^j \varepsilon_{t-j}.$$

- Załóżmy, że część deterministyczna szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest wielomianem stopnia $p \in \mathbb{N}$

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_p t^p + \varepsilon_t, \quad (2.50)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Stosując operator różnicowy pierwszego rzędu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_p t^p + \varepsilon_t - \\ &\quad (\alpha_0 + \alpha_1 (t-1) + \dots + \alpha_p (t-1)^p + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \alpha_1 [t - (t-1)] + \alpha_2 \left[t^2 - \sum_{j=0}^2 C_2^j (-1)^j t^{2-j} \right] + \dots \\ &\quad + \alpha_p \left[t^p - \sum_{j=0}^p C_p^j (-1)^j t^{p-j} \right] + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= \alpha_1 + \alpha_2 \sum_{j=1}^2 C_2^j (-1)^{j-1} t^{2-j} + \dots \\ &\quad + \alpha_p \sum_{j=1}^p C_p^j (-1)^{j-1} t^{p-j} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \\ &= \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j C_j^j (-1)^{j-1} \right] + \left[\sum_{j=2}^p \alpha_j C_j^{j-1} (-1)^{j-1-1} \right] t + \dots \\ &\quad + \alpha_p C_p^1 (-1)^{1-1} t^{p-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}. \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$\Delta x_t = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 t + \dots + \alpha_{p-1}^1 t^{p-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_0^1 &= \sum_{j=1}^p \alpha_j C_j^j (-1)^{j-1}, \\ \alpha_1^1 &= \sum_{j=2}^p \alpha_j C_j^{j-1} (-1)^{j-2}, \\ &\dots\dots \\ \alpha_{p-1}^1 &= \alpha_p C_p^1. \end{aligned}$$

Widzimy, że po zastosowaniu jednego operatora różnicowego stopień wielomianu obniżył się o jeden (czyli Δx_t zawiera już wielomian stopnia $p-1$). Stosując operator różnicowy Δ za każdym razem obniżamy stopień wielomianu o jeden. Ostatecznie, jeżeli funkcja nielosowa $f(t)$ jest wielomianem stopnia $p \in \mathbb{N}$, to szereg różnic rzędu $p+1$ (szereg $\{\Delta^{p+1} x_t\}_{t \geq p+2}$) nie zawiera nielosowej składowej i jest kombinacją liniową zaburzeń zewnętrznych szeregu (2.50):

$$\Delta^{p+1} x_t = \tilde{\varepsilon}_t = \sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j (-1)^j \varepsilon_{t-j}.$$

Wniosek 2.7 *Jeżeli w analizowanym szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (2.50) nielosowa składowa jest wielomianem stopnia p , to stosując $p+1$ razy operator różnicowy Δ (tzn. $\{\Delta^{p+1} x_t\}$) eliminujemy całkowicie nielosową składową z szeregu. Otrzymany szereg różnic $\{\Delta^{p+1} x_t\}_{t \geq p+2}$ jest kombinacją liniową szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.*

2.4.3 Wpływ metody różnicowej na składnik losowy

Powyżej pokazano, że jeżeli część deterministyczna szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest wielomianem, to stosując wielokrotnie operator różnicowy Δ możemy wyeliminować nielosową składową w tym szeregu. Natomiast zadanie, które musimy zazwyczaj wykonać, polega na odgadnięciu stopnia wielomianu

aproxymującego część deterministyczną w tym szeregu. Aby móc odgadnąć stopień wielomianu, należy najpierw określić pewne własności szeregów różnic $\{\Delta^p x_t\}_{t \geq p+1}$ $p \in \mathbb{N}$.

Założmy, że reszty w szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (2.26) są niezależne oraz mają rozkład normalny $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$ (tzn. $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$), zatem

$$E\varepsilon_t = 0, \quad (2.51)$$

$$E\varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0, & \text{dla } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Pewne własności operatora różnicowego przedstawia

Lemat 2.1 *Rozważmy szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci*

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_p t^p + \varepsilon_t, \quad (2.53)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$, wtedy:

a.

$$\Delta^{p+1} x_t = \sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j (-1)^j \varepsilon_{t-j}, \quad (2.54)$$

b.

$$E \Delta^{p+1} x_t = 0, \quad (2.55)$$

c.

$$D^2 (\Delta^{p+1} x_t) = \sigma^2 C_{2(p+1)}^{p+1}. \quad (2.56)$$

Dowód. a). Stosując $p+1$ razy operator różnicowy otrzymujemy wzór (2.55) (patrz przykłady powyżej).

b). Ze wzoru (2.55) oraz własności wartości oczekiwanej otrzymujemy

$$E \Delta^{p+1} x_t = E \left(\sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j (-1)^j \varepsilon_{t-j} \right) = \sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j (-1)^j E \varepsilon_{t-j} = 0.$$

c). Ponieważ

$$\begin{aligned} D^2 (\Delta^{p+1} x_t) &= E \left(\sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j (-1)^j \varepsilon_{t-j} \right)^2 \\ &= E \left(\sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i=0}^{p+1} C_{p+1}^j C_{p+1}^i (-1)^{j+i} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j} \right) \end{aligned}$$

oraz $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, to otrzymujemy

$$D^2 (\Delta^{p+1} x_t) = \sum_{j=0}^{p+1} \left[C_{p+1}^j (-1)^j \right]^2 E \varepsilon_{t-j}^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{p+1} \left(C_{p+1}^j \right)^2 = \sigma^2 C_{2(p+1)}^{p+1},$$

gdych

$$(C_k^0)^2 + (C_k^1)^2 + \dots + (C_k^{k-1})^2 + (C_k^k)^2 = C_{2k}^k.$$

■

Wniosek 2.8 *Jeżeli część deterministyczna w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (2.26) jest wielomianem stopnia $p \in \mathbb{N}$, to w wyniku zastosowania metody różnicowej $p+1$ razy otrzymujemy szereg różnic $\{\Delta^{p+1} x_t\}_{t \leq p+2}$ elementy którego są kombinacjami liniowymi szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Otrzymany szereg różnic ma wartość średnią zero oraz wariancję $\sigma^2 C_{2(p+1)}^{p+1}$.*

2.4.4 Metoda doboru stopnia wielomianu

Przypomnijmy pewne własności zmiennych losowych. Niech $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ będą wartościami (realizacjami) osiągniętymi przez zmienną losową ζ . Jeżeli $E\zeta = 0$, to estymator wariancji zmiennej losowej ζ określamy wzorem

$$\hat{\sigma}_\zeta^2 = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^k \zeta_j^2. \quad (2.57)$$

Natomiast jeżeli $E\zeta \neq 0$, to estymator wariancji zmiennej losowej ζ jest dany wzorem

$$\hat{\sigma}_\zeta^2 = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \zeta_j^2 - \left(\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \zeta_j \right)^2. \quad (2.58)$$

Niech szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ będzie określony równaniem (2.53). Elementy szeregu różnic $\{\Delta^k x_t\}_{t \geq k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ mają następujące własności:

1. Dla $k < p + 1$ elementy szeregu różnic $\{\Delta^k x_t\}_{t \geq k+1}$ są określone jako suma pewnego wielomianu stopnia $p - k$ oraz kombinacji liniowej zmiennych losowych $\varepsilon_{t-k}, \dots, \varepsilon_k$. Zatem

$$E \Delta^k x_t \neq 0, \quad t \geq k + 1.$$

2. Dla $k \geq p + 1$ wartość oczekiwana i wariancja elementów szeregu $\{\Delta^k x_t\}_{t \geq k+1}$ wynoszą odpowiednio:

$$E \Delta^k x_t = 0 \quad \text{oraz} \quad \hat{\sigma}_k^2 = \frac{D^2 [\Delta^k x_t]}{C_{2k}^k}, \quad t \geq k + 1.$$

Zasada doboru stopnia wielomianu aproksymującego

Kolejno dla $k = 1, 2, \dots$ wyznaczamy szeregi różnic $\{\Delta^k x_t\}_{t \geq k+1}$ oraz szacujemy wartości średnie i kwadratowe wariacje różnic:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{N - k} \sum_{t=k+1}^N \Delta^k x_t, \quad (2.59)$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\sum_{t=k+1}^N (\Delta^k x_t)^2}{(N - k) C_{2k}^k}. \quad (2.60)$$

Następnie analizujemy zależności wielkości $\hat{m}_k$ i $\hat{\sigma}_k^2$ od k . Zgodnie z uwagą (patrz (2.57)-(2.58)), wielkość $\hat{\sigma}_k^2$ będzie zachowywała tendencję malejącą dopóki wielkość k nie osiągnie poziomu $p + 1$ (dla $k \leq p$ część deterministyczna elementów szeregu $\{\Delta^k x_t\}_{t \geq k+1}$ jest wielomianem stopnia $p - k$ oraz $E \Delta^k x_t \neq 0$). Od pewnego momentu $k^* = p + 1$ wielkości $\hat{m}_k$ ewaluują dookoła poziomu zerowego, natomiast wielkości $\hat{\sigma}_k^2$ ewaluują dookoła poziomu różnego od zera. Moment k^* , od którego wartości średnie różnic $\hat{m}_k$ są blisko zera, a wielkości $\hat{\sigma}_k^2$ zaczynają się stabilizować, określa nam

stopień wielomianu zawyżony o jeden, tzn. część deterministyczną szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ należy przybliżać wielomianem stopnia $p = k^* - 1$.

Uwaga 2.1 Stabilizacja kwadratowych wariacji różnic $\hat{\sigma}_k^2$ postaci (2.60) od momentu $k^* = p+1$ nie oznacza, że szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ma postać (2.50) (składa się z wielomianu stopnia p plus składnik losowy), a jedynie sugeruje, że część deterministyczną szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ można aproksymować za pomocą wielomianu stopnia p .

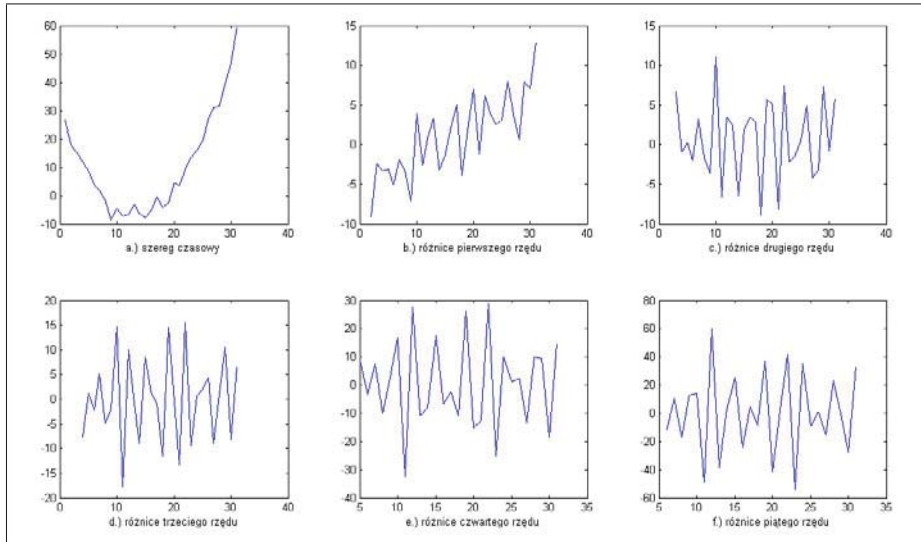
Przykład 2.6 Dla realizacji szeregu 26.75, 17.67, 15.26, 11.94, 8.82, 3.74, 1.89, -1.56, -8.66, -4.7, -7.32, -6.49, -3.22, -6.46, -7.75, -5.49, -0.47, -4.33, -2.49, 4.47, 3.25, 9.4, 13.42, 16, 19.13, 27.12, 30.97, 31.62, 39.53, 46.62, 59.5 wyznaczymy stopień wielomianu aproksymującego część deterministyczną szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.

Rysunek (2.5) przedstawia zachowanie realizację szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 31}$ oraz wartości szeregów różnic $\{\Delta x_t\}_{2 \leq t \leq 31}$, $\{\Delta^2 x_t\}_{3 \leq t \leq 31}$, $\{\Delta^3 x_t\}_{4 \leq t \leq 31}$, $\{\Delta^4 x_t\}_{5 \leq t \leq 31}$, $\{\Delta^5 x_t\}_{6 \leq t \leq 31}$. Z wykresów widzimy, że różnice rzędów trzeciego, czwartego i piątego ewaluują dookoła poziomu zerowego.

Na rysunku (2.5) również widzimy, że amplituda wahań elementów szeregu różnic $\{\Delta^4 x_t\}_{5 \leq t \leq 31}$ i $\{\Delta^5 x_t\}_{6 \leq t \leq 31}$ jest zdecydowanie większa niż $\{\Delta^3 x_t\}_{4 \leq t \leq 31}$ (poprzez konstrukcję kolejnych różnic wyeliminowane zostały części deterministyczne, natomiast elementy szeregów $\{\Delta^4 x_t\}_{5 \leq t \leq 31}$ i $\{\Delta^5 x_t\}_{6 \leq t \leq 31}$ powstają jako kombinacje liniowe elementów szeregu $\{\Delta^3 x_t\}_{4 \leq t \leq 31}$). Tabela poniżej przedstawia wartości oczekiwane różnic oraz kwadratowe wariacje.

k	1	2	3	4	5
$\hat{m}_k$	1.0917	0.75724	-0.031429	0.52556	0.23077
$\hat{\sigma}_k^2$	25.7806	4.1896	1.2396	0.28994	0.054657

Moment stabilizacji kwadratowych wariacji różnic wynosi $k^* = 3$ (wartość średnia $\hat{m}_3$ elementów szeregu różnic $\{\Delta^3 x_t\}_{4 \leq t \leq 31}$ jest bliska zero oraz od momentu $k^* = 3$ kwadratowe wariacje różnic zaczynają się stabilizować). Zatem część deterministyczną szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ należy przybliżać wielomianem stopnia drugiego.



Rysunek 2.5: Szereg $\{x_t\}_{t \in \{1, 2, \dots, 31\}}$ oraz różnice rzędu $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

2.5 Analiza wahań okresowych

W szeregach czasowych $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, oprócz trendu lub dynamiki opisywanej za pomocą funkcji deterministycznych, mogą występować wahania okresowe. Taki szereg po m jednostkach czasu wykazuje podobne własności, innymi słowy znajduje się w tej samej fazie cyklu. W niektórych przypadkach badane zjawisko może podlegać kilku rodzajom wahań (np. sezonowym i koniunkturalnym), w takim przypadku należy w szeregu uwzględnić więcej niż jeden okres.

Poniżej zostaną omówione dwie metody identyfikacji wahań: analiza trendów fazowych oraz analiza harmoniczna. Pierwsza z nich polega na wydzieleniu m -podszeregów z pierwotnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, gdzie każdy z nich odpowiada określonej fazie w waniach periodycznych, a następnie identyfikacji każdego z tych podszeregów. Natomiast analiza harmoniczna oparta jest na założeniu, że szereg jest zbudowany z fal sinusowych i kosinusowych (harmonik) o różnych częstotliwościach. Do identyfikacji harmonik wykorzystana zostanie metoda interpolacji trygonometrycznej.

2.5.1 Analiza trendów fazowych

Analiza trendów fazowych polega na oszacowaniu parametrów funkcji deterministycznych dla poszczególnych faz cyklu (dla każdej fazy cyklu wydzielamy podszereg oraz go identyfikujemy) (patrz np. [61]). Do identyfikacji parametrów funkcji deterministycznych najczęściej wykorzystujemy metodę najmniejszych kwadratów.

Przyjmijmy, że w analizowanym szeregu czasowym $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ istnieje m -faz (najczęściej przyjmujemy $m = 4$ do analizy kwartalnych zachowań zjawiska lub $m = 12$ do analizy miesięcznych zachowań) oraz $N = Tm$. Bzdany szereg $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ dzielimy na m podszeregów $\{x_k^1\}_{1 \leq k \leq T}$, $\{x_k^2\}_{1 \leq k \leq T}$, ..., $\{x_k^m\}_{1 \leq k \leq T}$, gdzie

$$\begin{aligned} \{x_k^1\}_{1 \leq k \leq T} &= \{x_1, x_{m+1}, x_{2m+1}, \dots, x_{(T-1)m+1}\}, \\ \{x_k^2\}_{1 \leq k \leq T} &= \{x_2, x_{m+2}, x_{2m+2}, \dots, x_{(T-1)m+2}\}, \\ &\dots \\ \{x_k^m\}_{1 \leq k \leq T} &= \{x_m, x_{2m}, x_{3m}, \dots, x_{Tm}\}. \end{aligned}$$

Dla każdego z tych podszeregów konstruujemy trendy fazowe – modele postaci:

$$\begin{aligned} x_k^1 &= f_1(k, \Theta_1) + \varepsilon_k^1, \\ x_k^2 &= f_2(k, \Theta_2) + \varepsilon_k^2, \\ &\dots \\ x_k^m &= f_m(k, \Theta_m) + \varepsilon_k^m, \end{aligned}$$

dla $1 \leq k \leq T$, gdzie dla $i = 1, 2, \dots, m$ funkcje deterministyczne $f_i(t, \Theta)$ określają wewnętrzną dynamikę w każdym z podszeregów $\{x_k^i\}_{1 \leq k \leq T}$, natomiast $\{\varepsilon_k^i\}_{1 \leq k \leq T}$ są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma_i^2)$. Następnie dokonujemy identyfikacji parametrycznej, gdzie oceny parametrów $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ wyznaczamy za pomocą MNK, natomiast estymatory odchyłeń standardowych wyznaczamy jako (obciążone

oceny tych parametrów)

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\varepsilon_k^i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Po identyfikacji szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy przedstawić w postaci

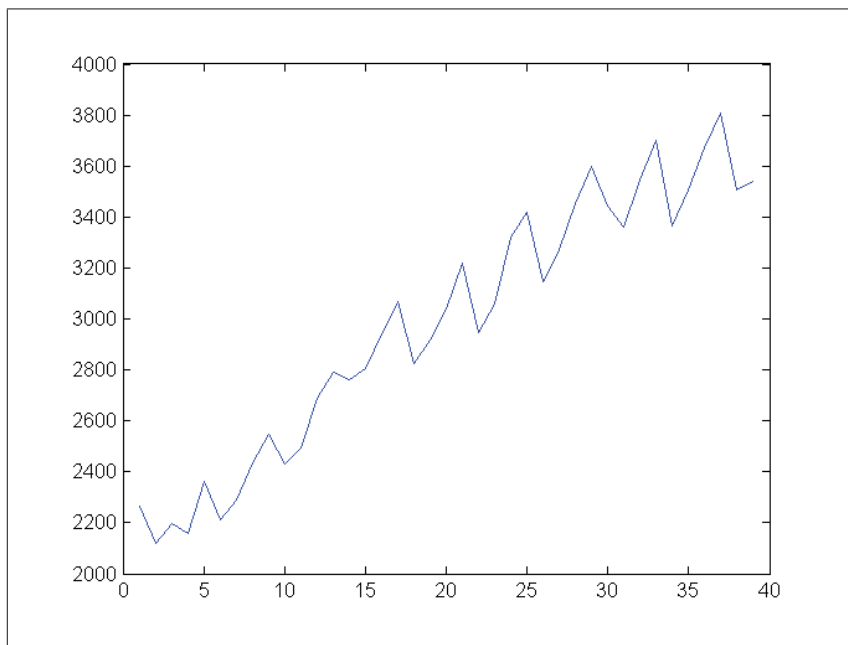
$$x_t = \begin{cases} f_1 \left(\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1, \hat{\Theta}_1 \right) + \varepsilon_{\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1}^1 & , \text{ gdy } \mathbf{mod}(t, m) = 1, \\ f_2 \left(\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1, \hat{\Theta}_2 \right) + \varepsilon_{\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1}^2 & , \text{ gdy } \mathbf{mod}(t, m) = 2, \\ \dots\dots\dots & \\ f_{m-1} \left(\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1, \hat{\Theta}_{m-1} \right) + \varepsilon_{\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor + 1}^{m-1} & , \text{ gdy } \mathbf{mod}(t, m) = m - 1, \\ f_m \left(\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor, \hat{\Theta}_m \right) + \varepsilon_{\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor}^m & , \text{ gdy } \mathbf{mod}(t, m) = 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

gdzie $\left\lfloor \frac{t}{m} \right\rfloor$ oznacza część całkowitą z dzielenia t przez m , natomiast $\mathbf{mod}(t, m)$ oznacza resztę z dzielenia t przez m .

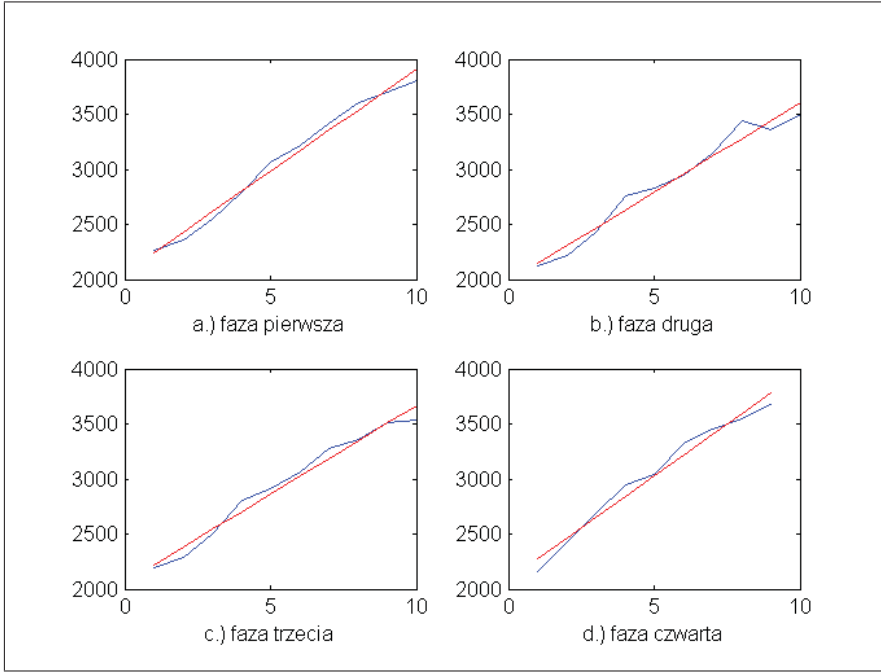
Przykład 2.7 *Przeciętne miesięczne wynagrodzenia brutto w gminach większych województwa lubelskiego w okresie 1Q2005 – 3Q2014 kształtowało się następująco 2266.83, 2118.9, 2198.67, 2160.06, 2361.4, 2213.98, 2289.54, 2433.85, 2549.1, 2432.61, 2494.13, 2687.14, 2791.31, 2761.78, 2802.99, 2943.02, 3068.69, 2826.9, 2915.96, 3036.72, 3218.19, 2945.22, 3058.89, 3321.69, 3420.32, 3144.48, 3273.75, 3450.6, 3600.84, 3441.94, 3361.49, 3547.3, 3698.55, 3363.64, 3508.07, 3673.52, 3809.44, 3504.6, 3539.44⁴. Dokonamy identyfikacji kwartalnych trendów fazowych w szeregu czasowym.*

Widzimy, że realizacja szeregu czasowego przedstawionego na rysunku (2.6) zawiera wahania okresowe. Okres składa się z czterech faz (pomiarów kwartalne, z rysunku również widać że "górkę i dołki" powtarzają się co cztery chwile czasowe), dlatego realizację $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 39}$ rozbijamy na cztery podciągi, które reprezentują cztery różne fazy w analizowanym szeregu.

⁴Dane Głównego Urzędu Statystycznego.

Rysunek 2.6: Szereg czasowy $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 39}$.

k	x_k^1	x_k^2	x_k^3	x_k^4
1	2266,83	2118,90	2198,67	2160,06
2	2361,40	2213,98	2289,54	2433,85
3	2549,10	2432,61	2494,13	2687,14
4	2791,31	2761,78	2802,99	2943,02
5	3068,69	2826,90	2915,96	3036,72
6	3218,19	2945,22	3058,89	3321,69
7	3420,32	3144,48	3273,75	3450,60
8	3600,84	3441,94	3361,49	3547,30
9	3698,55	3363,64	3508,07	3673,52
10	3809,44	3504,60	3539,44	–



Rysunek 2.7: Szeregi $\{x_t^m\}_{1 \leq t \leq 10}$ dla $m = 1, 2, 3, 4$ wraz z trendami.

Z rysunku 2.7 wynika, że każdy z podszeregów zawiera w sobie trend liniowy, dlatego przyjmujemy

$$\begin{cases} x_k^1 = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 k + \varepsilon_k^1 & \text{dla } 1 \leq k \leq 10, \\ x_k^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 k + \varepsilon_k^2 & \text{dla } 1 \leq k \leq 10, \\ x_k^3 = \alpha_0^3 + \alpha_1^3 k + \varepsilon_k^3 & \text{dla } 1 \leq k \leq 10, \\ x_k^4 = \alpha_0^4 + \alpha_1^4 k + \varepsilon_k^4 & \text{dla } 1 \leq k \leq 9, \end{cases} \quad (2.62)$$

gdzie $\{\varepsilon_k^i\}_{1 \leq k \leq 10}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ reprezentują ciągi nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma_i^2)$.

Rysunek 2.7 przedstawia podszeregi czasowe (krzywe granatowe) reprezentujące kolejne fazy w szeregu wyjściowym $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 39}$. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów wyznaczamy parametry dla każdego równania z układu (2.62). Rysunek 2.7 dodatkowo przedstawia linie trendów (proste zaznaczone kolorem czerwonym) dla każdego z podszeregów. Po identyfikacji parametrycznej szereg czasowy $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 39}$ możemy przedstawić w postaci

$$x_t = \begin{cases} 2060.508 + 185.0835 \left(\left[\frac{t}{4} \right] + 1 \right) + \varepsilon_{\left[\frac{t}{4} \right] + 1}^1, & \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 1 \\ 1981.0053 + 162.6181 \left(\left[\frac{t}{4} \right] + 1 \right) + \varepsilon_{\left[\frac{t}{4} \right] + 1}^2, & \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 2 \\ 2061.338 + 160.5373 \left(\left[\frac{t}{4} \right] + 1 \right) + \varepsilon_{\left[\frac{t}{4} \right] + 1}^3, & \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 3 \\ 2086.5628 + 188.3297 \left[\frac{t}{4} \right] + \varepsilon_{\left[\frac{t}{4} \right] + 1}^4, & \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 0 \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon_t^1 \sim N(0, 61.3981^2)$, $\varepsilon_t^2 \sim N(0, 0.84.8097^2)$, $\varepsilon_t^3 \sim N(0, 70.4525^2)$, $\varepsilon_t^4 \sim N(0, 76.7001^2)$.

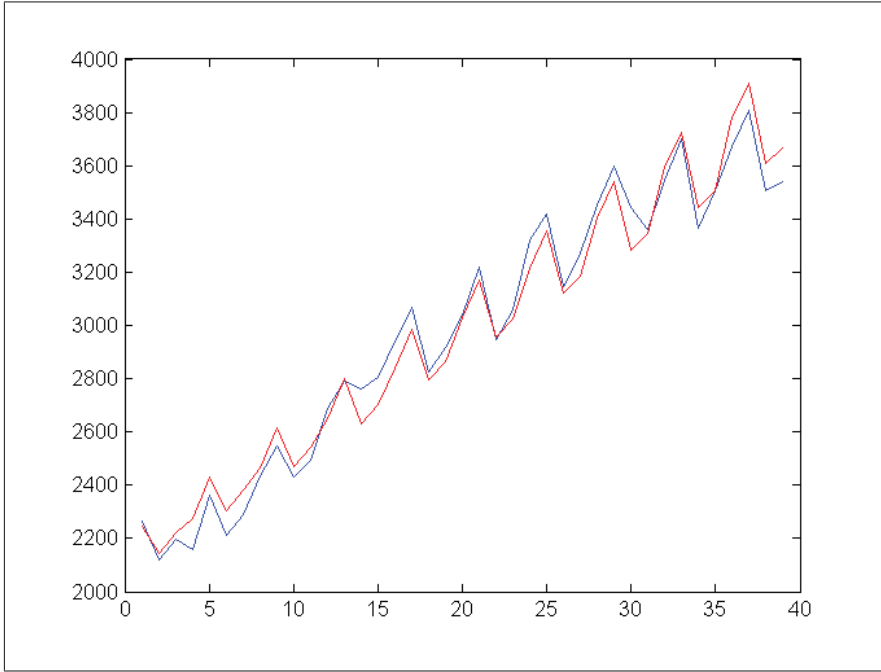
Rysunek 2.8 natomiast przedstawia zachowanie szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 39}$ (krzywa granatowa) oraz części deterministycznej $\{\hat{x}_t\}_{1 \leq t \leq 39}$ (krzywa czerwona) danej wzorem

$$\hat{x}_t = \begin{cases} 2060.508 + 185.0835 \left(\left[\frac{t}{4} \right] + 1 \right) & , \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 1, \\ 1981.0053 + 162.6181 \left(\left[\frac{t}{4} \right] + 1 \right) & , \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 2, \\ 2061.338 + 160.5373 \left(\left[\frac{t}{4} \right] + 1 \right) & , \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 3, \\ 2086.5628 + 188.3297 \left[\frac{t}{4} \right] & , \text{gdy } \mathbf{mod}(t, 4) = 0. \end{cases}$$

2.5.2 Analiza harmoniczna

Inne podejście do analizy zjawisk okresowych polega na założeniu, że szereg czasowy jest zbudowany z fal sinusowych i kosinusowych o różnych częstotliwościach (patrz [6], [25], [59], [61]). Funkcje sinusowe i kosinusowe występujące w części deterministycznej szeregu czasowego nazywamy harmonikami. Poniżej rozważamy szereg, z którego zostały wyeliminowane różnego rodzaju funkcje trendu, wielomianowe itp., natomiast wahania okresowe nadal w nim występują. Do identyfikacji szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ używamy metod interpolacji trygonometrycznej (patrz np. [23]), a dokładniej dokonujemy rozwinięcia w szereg Fouriera. Analizowany szereg czasowy przedstawiamy w postaci

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^T \left(\alpha_k \cos \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) + \beta_k \sin \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) \right) + \varepsilon_t, \quad (2.63)$$



Rysunek 2.8: Wartości empiryczne i teoretyczne szeregu czasowego.

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Identyfikując szereg czasowy postaci (2.63) na podstawie realizacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ przyjmujemy, że wielkość T spełnia nierówność $T \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza część całkowitą.

Aby skonstruować estymatory parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_T, \beta_T$ przypomnimy pewne własności funkcji sinus i kosinus oraz estymacji parametrycznej za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Lemat 2.2 *Jeżeli $X_1, \dots, X_q \in \mathbb{R}^N$ są wektorami niezerowymi i wzajemnie prostopadłymi (macierz $X = (X_1, \dots, X_q) \in \mathbb{R}^{N \times q}$), to dla każdego $Y \in \mathbb{R}^N$*

$$\begin{aligned} \min_{(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q} \left\| Y - \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\|^2 &= \min_{(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q} \sum_{t=1}^N \left(Y_t - \sum_{i=1}^q \beta_i X_{ti} \right)^2 \\ &= \sum_{t=1}^N \left(Y_t - \sum_{i=1}^q \hat{\beta}_i X_{ti} \right)^2 = \|Y\|^2 - \sum_{i=1}^q \hat{\beta}_i^2 \|X_i\|^2, \end{aligned} \quad (2.64)$$

gdzie

$$\hat{\beta}_i = \frac{\langle Y, X_i \rangle}{\|X_i\|^2}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Dowód. Dla $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q$ mamy

$$\begin{aligned} \left\| Y - \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\|^2 &= \|Y\|^2 - 2 \left\langle Y, \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\rangle + \left\| \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\|^2 \\ &= \|Y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^q \beta_i \langle Y, X_i \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^q \beta_i X_i, \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\rangle \\ &= \|Y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^q \beta_i \langle Y, X_i \rangle + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \beta_i \beta_j \langle X_i, X_j \rangle. \end{aligned}$$

Ponieważ $X_1, \dots, X_q \in \mathbb{R}^N$ są wektorami niezerowymi i wzajemnie prostopadłymi, to dla $i \neq j$ mamy $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ oraz

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \beta_i \beta_j \langle X_i, X_j \rangle = \sum_{i=1}^q \beta_i^2 \langle X_i, X_i \rangle = \sum_{i=1}^q \beta_i^2 \|X_i\|^2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \left\| Y - \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\|^2 &= \|Y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^q \beta_i \langle Y, X_i \rangle + \sum_{i=1}^q \beta_i^2 \|X_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{q} \|Y\|^2 - 2\beta_i \langle Y, X_i \rangle + \beta_i^2 \|X_i\|^2 \right). \end{aligned}$$

Wobec powyższego

$$\min_{(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q} \left\| Y - \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^q \min_{\beta_i \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{q} \|Y\|^2 - 2\beta_i \langle Y, X_i \rangle + \beta_i^2 \|X_i\|^2 \right), \quad (2.65)$$

gdzie dla każdego $i = 1, 2, \dots, q$

$$w_i(\beta) = \frac{1}{q} \|Y\|^2 - 2\beta \langle Y, X_i \rangle + \beta^2 \|X_i\|^2, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (2.66)$$

jest trójmianem kwadratowym. Zatem dla każdego $i = 1, 2, \dots, q$

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}} w_i(\beta) = w_i(\hat{\beta}_i), \quad \text{gdzie } \hat{\beta}_i = \frac{\langle Y, X_i \rangle}{\|X_i\|^2} \quad (2.67)$$

oraz

$$\begin{aligned} w_i(\hat{\beta}_i) &= \frac{1}{q} \|Y\|^2 - 2 \frac{\langle Y, X_i \rangle}{\|X_i\|^2} \langle Y, X_i \rangle + \left(\frac{\langle Y, X_i \rangle}{\|X_i\|^2} \right)^2 \|X_i\|^2 \quad (2.68) \\ &= \frac{1}{q} \|Y\|^2 - \frac{\langle Y, X_i \rangle^2}{\|X_i\|^2} = \frac{1}{q} \|Y\|^2 - \hat{\beta}_i^2 \|X_i\|^2. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.66)–(2.68) do (2.65) otrzymujemy

$$\min_{(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q} \left\| Y - \sum_{i=1}^q \beta_i X_i \right\|^2 = \|Y\|^2 - \sum_{i=1}^q \frac{\langle Y, X_i \rangle^2}{\|X_i\|^2} = \|Y\|^2 - \sum_{i=1}^q \hat{\beta}_i^2 \|X_i\|^2.$$

■

Lemat 2.3 Dla każdego $\omega \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych) spełnione są następujące równości

$$\sum_{k=1}^n \sin k\omega = \frac{\cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{(2n+1)\omega}{2}}{2 \sin \frac{\omega}{2}}, \quad (2.69)$$

$$\sum_{k=1}^n \cos k\omega = \frac{\sin \frac{(2n+1)\omega}{2} - \sin \frac{\omega}{2}}{2 \sin \frac{\omega}{2}}. \quad (2.70)$$

Dowód. Udowodnimy wzór (2.69). Dowód wzoru (2.70) jest podobny. Ustalmy dowolne $\omega \in \mathbb{R}$ spełniające żądany warunek $\omega \neq 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Do dowodu wykorzystamy znaną tożsamość

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Dla $n = 1$ mamy

$$2 \sin \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^1 \sin k\omega = 2 \sin \frac{\omega}{2} \sin \omega = \cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{3\omega}{2},$$

zatem

$$\sin \omega = \frac{\cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{3\omega}{2}}{2 \sin \frac{\omega}{2}}.$$

Jeżeli $n > 1$, to

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^n \sin k\omega &= \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{\omega}{2} \sin k\omega \\ &= \sum_{k=1}^n \cos \left(k\omega - \frac{\omega}{2} \right) - \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{\omega}{2} + k\omega \right), \end{aligned} \quad (2.71)$$

natomiast

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \cos\left(k\omega - \frac{\omega}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sum_{k=2}^n \cos\left(k\omega - \frac{\omega}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(k\omega + \frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}\quad (2.72)$$

Korzystając ze wzorów (2.72) i (2.71) otrzymujemy równość

$$2 \sin \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^n \sin k\omega = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos\left(n\omega + \frac{\omega}{2}\right),$$

która dowodzi wzoru (2.69). ■

Lemat 2.4 *Niech $C_1^n(k)$ i $S_1^n(k)$ będą n -elementowymi wektorami (ciągami) postaci*

$$\begin{aligned}C_1^n(k) &= \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) \right\}_{1 \leq t \leq n}, \quad 0 \leq k \leq T, \quad k \in \mathbb{N}, \\ S_1^n(k) &= \left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) \right\}_{1 \leq t \leq n}, \quad 1 \leq k \leq T, \quad k \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

gdzie $T, n \in \mathbb{N}$ oraz $n > 1$, $T \leq \frac{n}{2}$, wtedy:

- wszystkie wektory $C_1^n(k)$ i $S_1^n(k)$ są wzajemnie prostopadłe,
- dla każdego k mają miejsce równości

$$\begin{aligned}\|C_1^n(k)\|^2 &= \sum_{t=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dla } 0 < k < \frac{n}{2}, \\ n, & \text{dla } k = 0 \text{ lub } k = \frac{n}{2}, \end{cases} \\ \|S_1^n(k)\|^2 &= \sum_{t=1}^n \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dla } 0 < k < \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{dla } k = 0 \text{ lub } k = \frac{n}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Dowód. a. Do dowodu wykorzystany zostanie lemat 2.3 oraz znane tożsamości trygonometryczne:

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)), \quad (2.73)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \quad (2.74)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)). \quad (2.75)$$

Ustalmy dowolne $j, k \in \mathbb{N}$ spełniające warunki $0 \leq j \leq T$, $0 \leq k \leq T$. Korzystając z lematu 2.3 oraz tożsamości (2.73) dowiedzimy prostopadłości wektorów $C_1^n(j)$ i $S_1^n(k)$.

Jeżeli $j \neq k$, to ze wzoru (2.73) otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle C_1^n(j), S_1^n(k) \rangle &= \sum_{t=1}^n \cos\left(\frac{2\pi}{n}jt\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(j+k)t\right) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(k-j)t\right) \end{aligned}$$

oraz (patrz lemat 2.3)

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(j+k)t\right) &= \frac{\cos\frac{(j+k)\pi}{n} - \cos\frac{(2n+1)(j+k)\pi}{n}}{2 \sin\frac{(j+k)\pi}{n}}, \\ \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(k-j)t\right) &= \frac{\cos\frac{(j-k)\pi}{n} - \cos\frac{(2n+1)(j-k)\pi}{n}}{2 \sin\frac{(j-k)\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{(2n+1)(j+k)\pi}{n} &= 2(j+k)\pi + \frac{(j+k)\pi}{n}, \\ \frac{(2n+1)(j-k)\pi}{n} &= 2(j-k)\pi + \frac{(j-k)\pi}{n}, \end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned} \cos\frac{(2n+1)(j+k)\pi}{n} &= \cos\frac{(j+k)\pi}{n} \\ \cos\frac{(2n+1)(j-k)\pi}{n} &= \cos\frac{(j-k)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \langle C_1^n(j), S_1^n(k) \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(j+k)t\right) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(j-k)t\right) \\ &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli natomiast $j = k$, to

$$\langle C_1^n(j), S_1^n(k) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(j+k)t\right) = \frac{1}{2}0 = 0.$$

W sposób analogiczny, korzystając z tożsamości (2.74) i (2.75), można dowieść prostopadłości wektorów $C_1^n(j)$, $C_1^n(k)$ oraz $S_1^n(j)$, $S_1^n(k)$ dla $j \neq k$.

b. Do dowodu wykorzystany zostanie lemat 2.3 i kolejne tożsamości trygonometryczne:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha, \quad (2.76)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha. \quad (2.77)$$

Jeżeli $0 < k < \frac{n}{2}$, to z tożsamości (2.76) oraz lematu 2.3 otrzymamy

$$\begin{aligned} \|C_1^n(k)\|^2 &= \sum_{t=1}^n \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) = \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{n}kt\right) \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \cos \frac{4\pi}{n}kt = \frac{n}{2} + \frac{\sin \frac{(2n+1)4\pi k}{2n} - \sin \frac{2\pi k}{n}}{2 \sin \frac{2\pi k}{n}} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Jeżeli $k = 0$, to

$$\|C_1^n(0)\|^2 = \sum_{t=1}^n \cos^2(0) = \sum_{t=1}^n 1 = n,$$

natomiast jeżeli $k = \frac{n}{2}$, to również

$$\left\|C_1^n\left(\frac{n}{2}\right)\right\|^2 = \sum_{t=1}^n \cos^2(\pi t) = \sum_{t=1}^n ((-1)^t)^2 = n.$$

Dla wektora $S_1^n(k)$ jeżeli $0 < k < \frac{n}{2}$, to z tożsamości (2.77) oraz lematu 2.3 otrzymamy

$$\begin{aligned} \|S_1^n(k)\|^2 &= \sum_{t=1}^n \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) = \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{n}kt\right) \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \cos \frac{4\pi}{n}kt = \frac{n}{2} - \frac{\sin \frac{(2n+1)4\pi k}{2n} - \sin \frac{2\pi k}{n}}{2 \sin \frac{2\pi k}{n}} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Jeżeli $k = 0$, to

$$\|S_1^n(0)\|^2 = \sum_{t=1}^n \sin^2(0) = 0,$$

natomiast jeżeli $k = \frac{n}{2}$, to również

$$\left\|S_1^n\left(\frac{n}{2}\right)\right\|^2 = \sum_{t=1}^n \sin^2(\pi t) = 0.$$

■

Z lematów 2.2 i 2.4 wynika twierdzenie pokazujące sposób szacowania parametrów strukturalnych modelu (2.63).

Twierdzenie 2.4 *Niech dana będzie realizacja szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Estymatory nieznanych parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_T, \beta_T$ modelu (2.63) używane za pomocą metody najmniejszych kwadratów są dane wzorami:*

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t, \quad (2.78)$$

oraz

$$\hat{\alpha}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \cos\left(\frac{2\pi}{N} kt\right), \quad (2.79)$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \sin\left(\frac{2\pi}{N} kt\right), \quad (2.80)$$

dla $k = 1, 2, \dots, T < \left[\frac{N}{2}\right]$, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą. Kwadrat długości ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$

$$\varepsilon_t = x_t - \hat{\alpha}_0 - \sum_{k=1}^T \left(\hat{\alpha}_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kt\right) + \hat{\beta}_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kt\right) \right)$$

jest dany wzorem

$$\left\| \{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N} \right\|^2 = \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^N x_t^2 - N\hat{\alpha}_0^2 - \frac{N}{2} \sum_{k=1}^T \left(\hat{\alpha}_k^2 + \hat{\beta}_k^2 \right).$$

Dowód twierdzenia 2.4 wynika bezpośrednio z lematów 2.2 i 2.4.

Wniosek 2.9 *Jeżeli N jest liczbą parzystą oraz $T = \frac{N}{2}$, to (patrz wzory (2.79)-(2.80)) estymatory parametrów α_T i β_T są równe:*

$$\hat{\alpha}_T = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t \cos(\pi t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (-1)^t x_t, \quad (2.81)$$

$$\hat{\beta}_T = 0. \quad (2.82)$$

Kwadrat długości ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ wynosi

$$\left\| \{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N} \right\|^2 = \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^N x_t^2 - N(\hat{\alpha}_0^2 + \hat{\alpha}_T^2) - \frac{N}{2} \sum_{k=1}^{T-1} (\hat{\alpha}_k^2 + \hat{\beta}_k^2).$$

Dla każdej harmoniki wyznaczamy amplitudę, prędkość kątową oraz przesunięcie fazowe:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k \quad (\text{prędkość kątowa}),$$

$$A_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (\text{amplituda}),$$

$$\phi_k = \frac{\varphi_k}{\omega_k} \quad (\text{przesunięcie fazowe}),$$

gdzie

$$\cos \varphi_k = \frac{\beta_k}{A_k}, \quad \sin \varphi_k = \frac{\alpha_k}{A_k}$$

dla $k = 1, 2, \dots, T$. Wtedy szereg czasowy (2.63) możemy przedstawić w postaci

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^T A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + \varepsilon_t, \quad (2.83)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$.

Liczba harmonik wzrasta wraz ze wzrostem liczebności próby (liczebności obserwacji szeregu czasowego). Do prognozowania w modelu (2.83) nie zawsze uwzględniamy wszystkie harmoniki, wybieramy tylko te, których udział w wyjaśnieniu zachowania szeregu czasowego jest największy. Zazwyczaj wybiera się harmoniki o większych amplitudach.

Uwaga 2.3 Model (2.63) przedstawia wahania okresowe dookoła stałego poziomu α_0 . Jeżeli w szeregu czasowym oprócz wahań okresowych występują inne czynniki nielosowe (trendu, wielomianowe, wykładnicze itp.), to szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przedstawiamy w postaci

$$x_t = f(t) + \sum_{k=1}^T \left(\alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kt\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kt\right) \right) + \varepsilon_t,$$

gdzie f oznacza część deterministyczną szeregu, natomiast $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Na podstawie realizacji szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ najpierw wydzielamy nielosową składową $f(t)$ oraz definiujemy szereg $\{\tilde{x}_t\}_{1 \leq t \leq N}$, gdzie $\tilde{x}_t = x_t - \hat{f}(t)$ dla

$t = 1, 2, \dots, N$, $\hat{f}(t)$ oznacza estymator nielosowej składowej $f(t)$. Następnie na podstawie realizacji $\{\tilde{x}_t\}_{1 \leq t \leq N}$ dokonujemy identyfikacji poszczególnych harmonik szeregu postaci

$$\tilde{x}_t = \sum_{k=1}^T \left(\alpha_k \cos \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) + \beta_k \sin \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) \right) + \varepsilon_t, \quad (2.84)$$

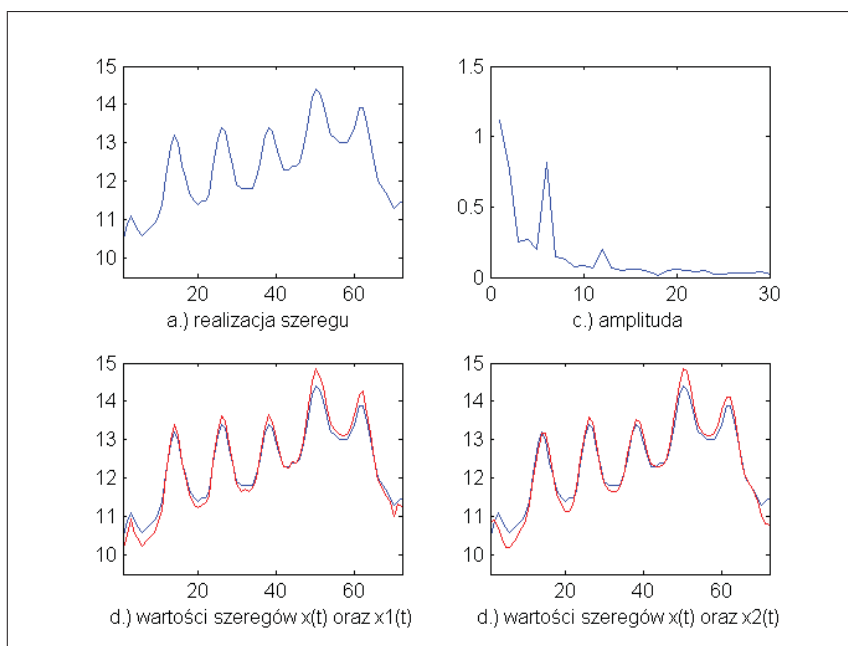
który już oscyluje dookoła poziomu zerowego.

Przykład 2.8 Stopa bezrobocia w Polsce od stycznia 2009 do grudnia 2014 kształtowała się następująco 10.4, 10.9, 11.1, 10.9, 10.7, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9, 11.1, 11.4, 12.1, 12.9, 13.2, 13, 12.4, 12.1, 11.7, 11.5, 11.4, 11.5, 11.5, 11.7, 12.4, 13.1, 13.4, 13.3, 12.8, 12.4, 11.9, 11.8, 11.8, 11.8, 11.8, 12.1, 12.5, 13.2, 13.4, 13.3, 12.9, 12.6, 12.3, 12.3, 12.4, 12.4, 12.5, 12.9, 13.4, 14.2, 14.4, 14.3, 14, 13.6, 13.2, 13.1, 13, 13, 13, 13.2, 13.4, 13.9, 13.9, 13.5, 13, 12.5, 12, 11.8, 11.7, 11.5, 11.3, 11.4, 11.5⁵. Na podstawie realizacji szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 72}$ dokonamy identyfikacji wahań okresowych.

Rysunek 2.9.a przedstawia stopę bezrobocia w Polsce w okresie od stycznia 2009 do grudnia 2014. Liczba obserwacji $N = 72$. Do identyfikacji obieramy liczbę harmonicznnych składowych szeregu na przykład $T = 30 \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Korzystając ze wzorów (2.79)-(2.80) identyfikujemy poszczególne harmoniki dla szeregu postaci (2.63). Estymator stałej α_0 jest równy $\hat{\alpha}_0 = 12.3556$, natomiast tabela poniżej przedstawia wartości estymatorów współczynników α_k i β_k kolejnych harmonik oraz wartości amplitud A_k dla $k = 1, 2, \dots, 30$. Rysunek 2.9.b przedstawia wartości amplitud $\{A_k\}_{1 \leq k \leq T}$.

⁵Dane Głównego Urzędu Statystycznego.

k	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	A_k	t	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	A_k
1	-0.6347	-0.9186	1.1166	16	0.0291	-0.0519	0.0595
2	-0.7165	-0.2753	0.7676	17	0.0254	-0.0329	0.0416
3	-0.2382	-0.0932	0.2558	18	0.0100	0.0100	0.0141
4	-0.1176	-0.2421	0.2692	19	0.0160	-0.0469	0.0496
5	0.0204	-0.1954	0.1964	20	0.0419	-0.0410	0.0586
6	0.3280	0.7474	0.8162	21	0.0433	-0.0214	0.0483
7	-0.0673	-0.1324	0.1486	22	0.0262	-0.0305	0.0402
8	-0.0241	-0.1298	0.1320	23	0.0271	-0.0385	0.0471
9	-0.0259	-0.0748	0.0792	24	0.0033	-0.0231	0.0233
10	0.0128	-0.0851	0.0860	25	0.0257	0.0011	0.0258
11	0.0366	-0.0570	0.0677	26	0.0202	-0.0227	0.0304
12	-0.1200	0.1559	0.1967	27	0.0259	-0.0148	0.0298
13	0.0042	-0.0623	0.0624	28	0.0257	-0.0067	0.0266
14	0.0009	-0.04780	0.0480	29	0.0337	-0.0282	0.0439
15	0.0253	-0.0525	0.0583	30	0.0220	0.0026	0.0222



Rysunek 2.9: Identyfikacja wahań okresowych.

Wykres 2.9.c przedstawia wartości obserwacji szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 72}$ (krzywa granatowa) oraz wartości części deterministycznej szeregu postaci (2.63), tzn. wartości szeregu $\{\hat{x}_t^1\}_{1 \leq t \leq 72}$ (krzywa czerwona), gdzie

$$\hat{x}_t^1 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{30} \left(\hat{\alpha}_k \cos \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) + \hat{\beta}_k \sin \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) \right).$$

Wykres 2.9.d przedstawia wartości obserwacji szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 72}$ (krzywa granatowa) oraz wartości szeregu $\{\hat{x}_t^2\}_{1 \leq t \leq 72}$ (krzywa czerwona), który uwzględnia tylko harmoniki o amplitudach powyżej 0.1, tzn.

$$\hat{x}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{k \in S} \left(\hat{\alpha}_k \cos \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) + \hat{\beta}_k \sin \left(\frac{2\pi}{N} kt \right) \right),$$

gdzie $S = \{k : 1 \leq k \leq T, A_k > 0.1\} = \{1, 2, \dots, 8, 12\}$. Widzimy, że realizacje szeregów $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 72}$ i $\{\hat{x}_t^1\}_{1 \leq t \leq 72}$ oraz $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 72}$ i $\{\hat{x}_t^2\}_{1 \leq t \leq 72}$ praktycznie się pokrywają. Po dokonaniu analizy harmonicznej szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy przedstawić w postaci

$$x_t = \hat{x}_t^1 + \varepsilon_t^1$$

lub postaci

$$x_t = \hat{x}_t^2 + \varepsilon_t^2,$$

gdzie wariancja elementów ciągu reszt $\{\varepsilon_t^1\}_{1 \leq t \leq 72}$ wynosi 0.2007^2 , natomiast wariancja elementów ciągu reszt $\{\varepsilon_t^2\}_{1 \leq t \leq 72}$ wynosi 0.2397^2 .

Identyfikacja szeregów reszt (analiza własności dynamicznych, modelowanie i estymacja parametryczna wybranych modeli) zostaną omówione w kolejnych rozdziałach tej książki.

Rozdział 3

Identyfikacja składnika losowego

Analiza szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ na podstawie obserwacji ciągu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ polega na wyznaczeniu zarówno części deterministycznej jak i części losowej występujących w tym szeregu. Identyfikacja jest złożonym, wieloetapowym procesem (próbą) przedstawienia szeregu czasowego w postaci

$$x_t = f(t) + \varepsilon_t \quad \text{dla } t \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

gdzie $f(t), t \in \mathbb{N}$ oznacza część deterministyczną, natomiast $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zmiennych losowych. Niewątpliwie główne zadanie polega na określeniu części nielosowej $f(t)$ oraz przedstawieniu jej w postaci kombinacji liniowej funkcji trendu $f_{tr}(t)$, sezonowej $\varphi(t)$ i cyklicznej $\psi(t)$:

$$f(t) = \lambda_1 t_{tr}(t) + \lambda_2 \varphi(t) + \lambda_3 \psi(t).$$

Do dokonania predykcji badanego zjawiska na podstawie realizacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ należy nie tylko dobrać (wyznaczyć) funkcję nielosową, ale również zidentyfikować zachowanie zaburzeń zewnętrznych w tym szeregu. Po wyznaczeniu części nielosowej $f(t)$ przeprowadza się dokładną analizę części losowej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (3.1). Identyfikację składnika losowego dokonuje się na podstawie realizacji ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$, które wyznaczamy

ze wzoru

$$\varepsilon_t = x_t - f(t) \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

Nie ulega wątpliwości, że zaburzenia zewnętrzne w modelu (3.1) rzutują na zachowanie całego szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Poznane wcześniej metody identyfikacji części deterministycznej $f(t)$ nie gwarantują, że otrzymany ciąg reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ spełnia założenie losowości. Nieprawidłowa konstrukcja estymatora funkcji $f(t)$ (zły dobór postaci tej funkcji, nieskuteczna metoda identyfikacji, istnienie zależności pomiędzy elementami szeregu reszt - w pewnym sensie istnienie wewnętrznej dynamiki zaburzeń zewnętrznych) powoduje, że elementy szeregu reszt nie spełniają postulatu losowości. Dlatego pierwszym krokiem po otrzymaniu ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest:

1. sprawdzenie losowości w zachowaniu elementów szeregu reszt (należy zweryfikować czy realizacja $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ zachowuje się w sposób losowy);
2. wyznaczenie typu i parametrów rozkładu elementów szeregu reszt ;
3. zbadanie istnienia korelacji pomiędzy elementami szeregu reszt (należy zbadać czy elementy szeregu reszt są niezależne).

Poniżej zostaną przedstawione podstawowe testy dotyczące identyfikacji składnika losowego. Do identyfikacji zaburzeń zewnętrznych postaci (3.2) posłużymy się następującymi narzędziami: test serii Stevensa, weryfikacja hipotez odnośnie wartości średniej i wariancji, weryfikacja hipotezy o normalności rozkładu składnika losowego (test Kołmogorowa–Smirnowa). Do odgadnięcia postaci zaburzeń zewnętrznych w modelu (3.1) weryfikujemy hipotezy o skorelowaniu elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. W przypadku, gdy elementy szeregu reszt są ze sobą nieskorelowane, to zaburzenia zewnętrzne w równaniu (3.1) modelujemy za pomocą niezależnych zmiennych losowych. W przypadku, gdy elementy szeregu reszt są ze sobą skorelowane, to zaburzenia wewnętrzne modelujemy za pomocą kombinacji liniowej zmiennych losowych (np. modele autoregresji, ruchomej średniej). Więcej na temat identyfikacji składnika losowego można znaleźć w podstawowych pozycjach literatury ze statystyki matematycznej (patrz np. [1], [28], [30], [31], [47]) oraz ekonometrii (patrz np. [13], [24], [43], [58]).

Uwaga 3.1 W dalszej części książki rozważamy szeregi reszt oscylujące dookoła poziomu zero. Jeżeli dla realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ wartość średnia reszt jest różna od zera, to należy przeprowadzić test o zerowej wartości oczekiwanej (zostanie przedstawiony w rozdziale 3.2) lub dokonać modyfikacji części deterministycznej w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. W przypadku, gdy wartość średnia reszt istotnie różni się od zera, to szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ modyfikujemy w sposób następujący: część deterministyczną $\tilde{f}(\cdot)$ przedstawiamy w postaci

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \bar{\mu}_\varepsilon,$$

gdzie

$$\bar{\mu}_\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t.$$

Następnie wyznaczamy ciąg reszt $\{\tilde{\varepsilon}_t\}_{1 \leq t \leq N}$, gdzie $\tilde{\varepsilon}_t = x_t - \tilde{f}_t(t)$ dla $1 \leq t \leq N$, który oscyluje dookoła poziomu zero.

3.1 Badanie losowości

Aby upewnić się, że elementy ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ spełniają postulat losowości próby, przeprowadzamy test serii Stevensa (patrz np. [31], [43]). Weryfikacja hipotezy o losowości reszt w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ polega na stwierdzeniu, że elementy szeregu (3.2) ewaluują w sposób losowy. Do przeprowadzenia testu losowości na poziomie istotności α konstruujemy hipotezę roboczą

H_0 : brak w szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ nielosowej składowej, elementy szeregu reszt ewaluują w sposób losowy dookoła zera

wobec hipotezy alternatywnej

H_1 : w analizowanym szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ istnieje nielosowa składowa lub elementy szeregu reszt mają wewnętrzną dynamikę.

Dla ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ najpierw obliczamy liczbę serii S .

Serią dodatnią nazywamy każdy podciąg $\{\varepsilon_t\}_{p \leq t \leq q}$, $1 \leq p \leq q \leq N$ spełniający warunki:

- wszystkie liczby ε_t , gdzie $p \leq t \leq q$, są nieujemne i przynajmniej jedna z nich jest dodatnia;
- jeżeli $p > 1$, to $\varepsilon_{p-1} < 0$, a jeżeli $q < N$, to $\varepsilon_{q+1} < 0$.

Serią ujemną nazywamy każdy podciąg $\{\varepsilon_t\}_{p \leq t \leq q}$, $1 \leq p \leq q \leq N$ spełniający warunki:

- wszystkie liczby ε_t , gdzie $p \leq t \leq q$, są niedodatnie i przynajmniej jedna z nich jest ujemna;
- jeżeli $p > 1$, to $\varepsilon_{p-1} > 0$, a jeżeli $q < N$, to $\varepsilon_{q+1} > 0$.

Suma liczb serii dodatnich i serii ujemnych jest liczbą serii w ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Następnie wyznaczamy liczbę reszt dodatnich n_1 i liczbę reszt ujemnych n_2 (elementy zerowe pomijamy!).

- Dla $n_1 \leq 20$ i $n_2 \leq 20$ na poziomie istotności α odczytujemy dwie krytyczne liczby serii S_* i S^* , tzn. z tablic dla testu serii odczytujemy wartości krytyczne dla kwantyli rzędu $\frac{\alpha}{2}$ i $1 - \frac{\alpha}{2}$, gdzie

$$\begin{aligned} S_* &= S\left(\frac{\alpha}{2}, n_1, n_2\right) = S\left(\frac{\alpha}{2}, n_2, n_1\right), \\ S^* &= S\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1, n_2\right) = S\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_2, n_1\right). \end{aligned}$$

Jeżeli $S_* < S < S^*$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 (w analizowanym szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ nie ma funkcji nielosowej). Przyjmujemy wtedy, że zaburzenia zewnętrzne ε_t mają charakter losowy. Jeżeli natomiast $S \leq S_*$ lub $S^* \leq S$, to hipotezę H_0 należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 . W tym przypadku przyjmujemy, że w analizowanym szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ istnieje nielosowa składowa lub elementy szeregu reszt mają wewnętrzną dynamikę (istnieje pewna zależność, funkcja, model, za pomocą którego należy opisywać zachowanie reszt).

- Dla $n_1 > 20$ lub $n_2 > 20$ rozkład zmiennej losowej S dąży asymptotycznie do rozkładu normalnego $N(m, \sigma^2)$ oraz estymatory wartości

średniej i wariancji zmiennej losowej S są dane wzorami

$$\hat{m} = \frac{2n_1n_2}{N} + 1, \quad (3.3)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - N)}{(N-1)N^2}. \quad (3.4)$$

Statystyka

$$U = \frac{S - \hat{m}}{\hat{\sigma}} \quad (3.5)$$

ma rozkład normalny $N(0, 1)$. Na poziomie istotności α z tablic dla rozkładu normalnego $N(0, 1)$ wyznaczamy wartość statystyki krytycznej $u^* = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ (kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$), gdzie F oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0, 1)$ (dla rozkładu normalnego $N(0, 1)$ spełnione są zależności $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} F(-x) = 1 - F(x)$ oraz $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} F^{-1}(1 - x) = -F^{-1}(x)$). Jeżeli $-u^* < U < u^*$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 oraz przyjmujemy, że elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ zachowują się w sposób losowy. Jeżeli $U \geq u^*$ lub $U \leq -u^*$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 . W tym przypadku przyjmujemy, że w analizowanym szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ istnieje nielosowa składowa lub elementy szeregu reszt mają wewnętrzną dynamikę.

Przykład 3.1 Dana jest realizacja szeregu reszt $-1.5, 0, -0.5, -1.4, 1, 1.8, 0.1, -0.7, -0.4, 1.6$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zbadamy losowość w zachowaniu elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ konstruujemy hipotezę roboczą

H_0 : elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$ zachowują się w sposób losowy

oraz hipotezę alternatywną

H_1 : elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$ zawierają nielosowe składowe
lub posiadają wewnętrzną dynamikę.

Widzimy, że w analizowanym szeregu występują cztery serie $S = 4$, które określamy jako:

- $I - \quad -1.5, 0, -0.5, -1.4;$
 $II - \quad 1, 1.8, 0.1;$
 $III - \quad -0.7, -0.4;$
 $IV - \quad 1.6 .$

Liczba elementów dodatnich $n_1 = 4$, natomiast liczba elementów ujemnych $n_2 = 5$. Z tablic dla testu serii odczytujemy kwantyle rzędu 0.05 oraz 0.95, które wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} S_* &= S(0.05; 4; 5) = S(0.05; 5; 4) = 2, \\ S^* &= S(0.95; 4; 5) = S(0.95; 5; 4) = 8. \end{aligned}$$

Ponieważ $S_* < S < S^*$, to na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 . Wobec powyższego przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$ zachowują się w sposób losowy.

3.2 Badanie rozkładu składnika losowego

Jeżeli stwierdziliśmy, że szereg reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ zachowuje się w sposób losowy dookoła poziomu zero, to przechodzimy do weryfikacji hipotez dotyczących typu i parametrów rozkładu elementów szeregu reszt. Poniżej przedstawione zostaną testy istotności dla wartości średniej i wariancji składnika losowego w modelu (3.1) oraz test normalności rozkładu elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.

3.2.1 Weryfikacja hipotezy o zerowej wartości oczekiwanej składnika losowego

Po wydzieleniu z ciągu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ części deterministycznej nie zawsze otrzymujemy ciąg reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ o wartości średniej równej zero. Zgodnie z uwagą 3.1 możemy dokonać modyfikacji części deterministycznej szeregu czasowego postaci (3.1). W przypadku, gdy wartość średnia ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ nieistotnie się różni od zera, to część deterministyczną możemy

pozostawić bez zmian. Aby upewnić się, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ oscylują dookoła poziomu zero, należy przeprowadzić test o zerowej wartości oczekiwanej składnika losowego.

Poniżej zakładamy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mają rozkład normalny. Na poziomie istotności α tworzymy hipotezę roboczą

$$H_0 : \quad \begin{array}{l} \mu_\varepsilon = 0 \text{ (wartość oczekiwana elementów szeregu reszt} \\ \text{wynosi zero lub nieistotnie się różni od zera)} \end{array}$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1 : \quad \begin{array}{l} \mu_\varepsilon \neq 0 \text{ (wartość oczekiwana elementów szeregu reszt} \\ \text{istotnie różni się od zera)}. \end{array}$$

Do weryfikacji hipotez stosujemy test oparty na statystyce

$$T = \frac{\hat{\mu}_\varepsilon}{\hat{S}_\varepsilon} \sqrt{N-1}, \quad (3.6)$$

która ma rozkład t-Studenta o $(N-1)$ stopniach swobody, gdzie wartości $\hat{\mu}_\varepsilon$ i $\hat{\sigma}_\varepsilon$ dla ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ wyznaczamy ze wzorów

$$\hat{\mu}_\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t, \quad (3.7)$$

$$\hat{S}_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (\varepsilon_t - \hat{\mu}_\varepsilon)^2}. \quad (3.8)$$

Na poziomie istotności α z tablic dla rozkładu t-Studenta wyznaczamy kwantyle rzędu $\frac{\alpha}{2}$ oraz $1 - \frac{\alpha}{2}$. Niech $T^* = T^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}, N-1)$ oznacza kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ dla rozkładu t-Studenta o $N-1$ stopniach swobody. Z własności rozkładu t-Studenta wynika, że kwantyl rzędu $\frac{\alpha}{2}$ jest równy $-T^* = T^{-1}(\frac{\alpha}{2}, N-1)$.

Jeżeli $-T^* < T < T^*$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 oraz przyjmujemy, że wartość oczekiwana elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi zero lub nieistotnie różni się od zera. W przypadku gdy $T \in (-\infty, -T^*] \cup [T^*, \infty)$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 .

W tym przypadku przyjmujemy, że wartość oczekiwana elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ istotnie się różni od zera (być może źle została dobrana funkcja nielosowa w modelu (3.1)).

Powyższy test można przeprowadzić dla dowolnej wartości oczekiwanej różnej od zera, z tym że należy zmodyfikować statystykę testową (3.6) (patrz np. [30], [31], [47]).

3.2.2 Weryfikacja hipotezy o wariancji składnika losowego

Analogicznie jak w przypadku weryfikacji hipotezy dotyczącej zerowej wartości średniej elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przedstawiony zostanie test dotyczący weryfikacji hipotezy o wariancji składnika losowego. Test istotności dla wariancji (odchylenia standardowego) elementów szeregu reszt przeprowadzamy w sposób następujący. Zakładamy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mają rozkład normalny (patrz np. [30], [31], [47]). Na poziomie istotności α konstruujemy hipotezę roboczą

$$H_0 : \begin{array}{l} \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ (wariancja elementów szeregu reszt} \\ \text{wynosi } \sigma_0^2 \text{ lub nieistotnie się różni od } \sigma_0^2) \end{array}$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1 : \begin{array}{l} \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (wariancja elementów szeregu reszt} \\ \text{istotnie różni się od } \sigma_0^2). \end{array}$$

- Dla ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$, gdzie $N \leq 50$, statystyka

$$\chi^2 = \frac{N\hat{S}^2}{\sigma_0^2}$$

ma rozkład χ^2 (chi-kwadrat) o $N - 1$ stopniach swobody, gdzie estymator wariancji wyznaczamy ze wzoru

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\varepsilon_t - \hat{\mu}_\varepsilon)^2.$$

Z tablic rozkładu χ^2 odczytujemy kwantyle rzędu $\frac{\alpha}{2}$ i $1 - \frac{\alpha}{2}$ oraz oznaczamy je przez $\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, N - 1\right)$, $\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 1\right)$ odpowiednio. Jeżeli

$\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, N-1\right) < \chi^2 < \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N-1\right)$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 , zatem przyjmujemy, że wariancja elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi σ_0^2 lub nieistotnie różni się od σ_0^2 . W przypadku, gdy $\chi^2 \in \left(0, \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, N-1\right)\right] \cup \left[\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N-1\right), +\infty\right)$, to hipotezę roboczą H_0 odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 oraz przyjmujemy, że wariancja elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ istotnie różni się od wartości σ_0^2 .

- Dla ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$, gdzie $N > 50$, statystyka

$$\sqrt{2 \frac{N \hat{S}^2}{\sigma_0^2}} = \frac{\hat{S}}{\sigma} \sqrt{2N}$$

ma rozkład normalny $\mathbf{N}(\sqrt{2N-3}, 1)$, natomiast statystyka zstandaryzowana

$$U = \frac{\hat{S}}{\sigma} \sqrt{2N} - \sqrt{2N-3}$$

ma rozkład $\mathbf{N}(0, 1)$. Z tablic dla rozkładu normalnego $\mathbf{N}(0, 1)$ wyznaczamy kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$, który oznaczamy przez $u^* = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, gdzie F – dystrybuenta rozkładu $\mathbf{N}(0, 1)$.

Jeżeli $-u^* < U < u^*$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 , zatem przyjmujemy, że wariancja elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi σ_0^2 lub nieistotnie się różni od σ_0^2 . Jeżeli $U \in (-\infty, -u^*] \cup [u^*, \infty)$, to hipotezę roboczą H_0 odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 oraz przyjmujemy, że wariancja elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ istotnie różni się od wartości σ_0^2 .

3.2.3 Badanie normalności rozkładu szeregu reszt

Analizując elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ należy również zbadać rozkład zaburzeń występujący w modelu (3.1). W większości przypadków sprawdzamy, czy zaburzenia zewnętrzne występujące w modelu (3.1) mają rozkład normalny. Do badania normalności rozkładu możemy zastosować

ogólne testy zgodności np. test χ^2 Pearsona, test Kołmogorowa–Smirnowa, test Cramera von Misesa, test Watsona, test Andersona–Darlinga lub testy służące wyłącznie testowaniu hipotez, że rozkład badanej cechy jest rozkładem normalnym, np. test Shapiro–Wilka, test Lillieforsa, test Eppsa–Pulleya (patrz np. [31], [43], [47], [58]). Do badania normalności rozkładu elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ posłużymy się testem Kołmogorowa–Smirnowa, który może być również zastosowany do analizy innych rozkładów ciągłych. Na poziomie istotności α konstruujemy hipotezę roboczą

$$H_0 : \text{elementy szeregu reszt } \{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}} \text{ mają rozkład } \mathbf{N}(0, \sigma^2)$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1 : \text{elementy szeregu reszt } \{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}} \text{ mają inny rozkład.}$$

Uwaga 3.2 *Po pozytywnej weryfikacji testu istotności dla wariancji, jako odchylenie standardowe σ obieramy ustaloną wielkość σ_0 (patrz rozdz. 3.2.2). W przypadku, gdy test dla wariancji nie był przeprowadzany, to przyjmujemy, że odchylenie standardowe σ jest równe estymatorowi, który dla ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ wyznaczamy ze wzoru*

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2}$$

Powyższe hipotezy weryfikujemy w sposób następujący:

1. Porządkujemy niemalejąco ciąg reszt $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$, tym sposobem otrzymujemy permutację postaci

$$\varepsilon_{(1)} \leq \varepsilon_{(2)} \leq \dots \leq \varepsilon_{(N)}.$$

2. Obliczamy różnice

$$\frac{t}{N} - F(\varepsilon_{(t)}) \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu normalnego $\mathbf{N}(0, \sigma)$ oraz wyznaczamy

$$d^+ = \max_{t \in \{1, 2, \dots, N\}} \left| \frac{t}{N} - F(\varepsilon_{(t)}) \right|.$$

3. Obliczamy różnice

$$F(\varepsilon_{(t)}) - \frac{t-1}{N}, \text{ dla } t = 1, 2, \dots, N$$

oraz wyznaczamy

$$d^- = \max_{t \in \{1, 2, \dots, N\}} \left| F(\varepsilon_{(t)}) - \frac{t-1}{N} \right|.$$

4. Przyjmujemy

$$d_N = \max \{d^-, d^+\}.$$

5. Dla liczebności $N \leq 100$ z tablic rozkładu Kołmogorowa wyznaczamy wartość krytyczną statystyki $d_N(1-\alpha)$. Jeżeli $d_N < d_N(1-\alpha)$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Przyjmujemy wtedy, że zaburzenia zewnętrzne w równaniu (3.1) mają rozkład normalny $N(0, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$. Jeżeli $d_N \geq d_N(1-\alpha)$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 oraz przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mają inny rozkład, różny od rozkładu normalnego.

W przypadku gdy liczebność próbki $N > 100$, to posługujemy się rozkładem granicznym Kołmogorowa

$$P(\sqrt{N}d_N \geq d_{1-\alpha}) = \alpha.$$

Wartość krytyczną $d_{1-\alpha}$ dla rozkładu granicznego odczytujemy z tablicy

$1 - \alpha$	0.9	0.95	0.975
$d_{1-\alpha}$	1.224	1.354	1.628

Jeżeli $\sqrt{N}d_N < d_{1-\alpha}$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Przyjmujemy wtedy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mają rozkład normalny $N(0, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$. Jeżeli $\sqrt{N}d_N \geq d_{1-\alpha}$, to hipotezę roboczą H_0 odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 oraz przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mają inny rozkład, różny od rozkładu normalnego.

Uwaga 3.3 Zaburzenie zewnętrzne w modelu (3.1) możemy modelować za pomocą rozkładu $\mathbf{N}(0, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$ dopiero po pozytywnej weryfikacji testów: losowości; istotności dla zerowej wartości średniej, jeżeli średnia z próby jest różna od zera; istotności dla wariancji, jeżeli przyjęta wartość wariancji jest różna od estymatora uzyskanego na podstawie realizacji ciągu reszt; testu zgodności z rozkładem normalnym elementów szeregu reszt.

Przykład 3.2 Dany jest ciąg reszt -1.5, 0, -0.5, -1.4, 1, 1.8, 0.1, -0.7, -0.4, 1.6 (patrz przykład 3.1). Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikujemy hipotezę o normalności rozkładu ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$.

Widzimy, że wartość średnia elementów ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$ wynosi zero, natomiast estymator wariancji $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 1.192$, a estymator odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{1.192} \approx 1.091788$ (testów istotności dla wartości średniej i wariancji nie przeprowadzamy, ponieważ przyjmujemy wartości estymatorów). Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ konstruujemy hipotezę roboczą:

$$H_0 : \text{elementy szeregu reszt mają rozkład normalny } \mathbf{N}(0; 1.192)$$

wobec hipotezy alternatywnej:

$$H_1 : \text{elementy szeregu reszt mają inny rozkład.}$$

Wyniki obliczeń przedstawia tabela poniżej, gdzie F oznacza dystrybuantę rozkładu $\mathbf{N}(0; 1)$.

t	ε_t	$\varepsilon_{(t)}$	$F\left(\frac{\varepsilon_{(t)}}{\hat{\sigma}_\varepsilon}\right)$	$\frac{t}{N}$	$\left \frac{t}{N} - F\left(\frac{\varepsilon_{(t)}}{\hat{\sigma}_\varepsilon}\right)\right $	$\frac{t-1}{N}$	$\left \frac{t-1}{N} - F\left(\frac{\varepsilon_{(t)}}{\hat{\sigma}_\varepsilon}\right)\right $
1	-1.5	-1.5	0.0863	0.1	0.0137	0	0.0863
2	0	-1.4	0.1016	0.2	0.0984	0.1	0.0016
3	-0.5	-0.7	0.2623	0.3	0.0377	0.2	0.0623
4	-1.4	-0.5	0.3247	0.4	0.0753	0.3	0.0247
5	1	-0.4	0.3581	0.5	0.1419	0.4	0.0419
6	1.8	0	0.5	0.6	0.1	0.5	0
7	0.1	0.1	0.5362	0.7	0.1638	0.6	0.0638
8	-0.7	1	0.8183	0.8	0.0183	0.7	0.1183
9	-0.4	1.6	0.9271	0.9	0.0271	0.8	0.1271
10	1.6	1.8	0.9491	1.0	0.0509	0.9	0.0491
				max	0.1638	max	0.1271

Wyznaczamy $d^+ = 0.1638$ i $d^- = 0.1271$, zatem $d_{10} = 0.1638$. Z tablic rozkładu Kolmogorowa odczytujemy kwantyl rzędu 0.9 dla próby 10 elementowej, który jest równy $d_{10}(0.9) = 0.369$. Ponieważ $d_{10} < d_{10}(0.9)$, to na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . W tym przypadku możemy przyjąć, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0; 1.192)$.

3.3 Badanie korelacji składnika losowego

Do określenia relacji (związków) pomiędzy elementami szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przeprowadzamy testy istotności dla współczynników korelacji. Weryfikacja hipotez statystycznych dotycząca współczynników korelacji pozwala stwierdzić, czy istnieją zależności pomiędzy elementami szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, czy też nie (patrz np. [1], [31], [43]). W przypadku stwierdzenia braku korelacji pomiędzy ε_t i $\varepsilon_{t+\tau}$ przy przesunięciach czasowych $\tau = 1, 2, \dots, k$ zaburzenia zewnętrzne w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (3.1) należy modelować ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Jeżeli stwierdzimy, że istnieje korelacja pomiędzy elementami szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przy przesunięciu $\tau \geq 1$, to do opisu składnika losowego w szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (3.1) należy dobrać odpowiedni model uwzględniający relacje pomiędzy elementami szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Takie modele szczegółowo zostaną omówione w rozdziale 5.

Poniżej przedstawiony zostanie sposób weryfikacji istnienia związków pomiędzy elementami szeregu reszt na podstawie realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Na poziomie istotności α dla przesunięć czasowych $\tau = 1, 2, \dots, k$, gdzie $k \leq \left[\frac{N}{4}\right]$, a $[\]$ oznacza część całkowitą. Tworzymy hipotezy robocze

$$H_0 : R_\tau = 0 \quad (\text{brak korelacji przy przesunięciu } \tau)$$

wobec hipotez alternatywnych

$$H_1 : R_\tau \neq 0 \quad (\text{istnieje korelacja przy przesunięciu } \tau).$$

Estymator współczynnika korelacji R_τ dla $\tau = 1, 2, 3, \dots, k$ jest dany wzorem

$$\hat{r}_\tau = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} \varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau}}{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2} = \frac{N \sum_{t=1}^{N-\tau} \varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau}}{(N-\tau) \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2}. \quad (3.9)$$

- Dla liczebności $N \geq 3 + \tau$ statystyka

$$T_\tau = \frac{\hat{r}_\tau}{\sqrt{1 - \hat{r}_\tau^2}} \sqrt{N - 2 - \tau} \quad (3.10)$$

ma rozkład t-Studenta o $(N - 2 - \tau)$ stopniach swobody. Na poziomie istotności α odczytujemy wartość statystyki krytycznej $T_\tau^* = T^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2 - \tau\right)$, gdzie $T^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2 - \tau\right)$ jest kwantylem rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu t-Studenta o $N - 2 - \tau$ stopniach swobody. W przypadku gdy dla każdego $1 \leq \tau \leq k$ zachodzi nierówność $-T_\tau^* < T_\tau < T_\tau^*$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotez roboczych H_0 oraz przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są nieskorelowane (niezależne). Jeżeli istnieje takie przesunięcie czasowe $\tau \geq 1$, dla którego $T_\tau \in (-\infty, -T_\tau^*] \cup [T_\tau^*, \infty)$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 , zatem przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przy przesunięciu czasowym τ są skorelowane (istnieje związek pomiędzy elementami ε_t i $\varepsilon_{t+\tau}$).

- Dla liczebności $N \geq 100 + \tau$ rozkład graniczny statystyki

$$U_\tau = \frac{\hat{r}_\tau}{\sqrt{1 - \hat{r}_\tau^2}} \sqrt{N} \quad (3.11)$$

jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Na poziomie istotności α odczytujemy wartość krytyczną $u^* = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, gdzie F jest dystrybuantą rozkładu normalnego $\mathbf{N}(0, 1)$. W przypadku gdy dla każdego $1 \leq \tau \leq k$ mamy $-u^* < U_\tau < u^*$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotez roboczych H_0 , zatem przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są nieskorelowane (niezależne). Jeżeli istnieje takie przesunięcie czasowe τ dla którego

$U_\tau \in (-\infty, -u^*] \cup [u^*, \infty)$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 . W tym przypadku przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przy przesunięciu czasowym τ są skorelowane (istnieje związek pomiędzy elementami ε_t i $\varepsilon_{t+\tau}$).

Wniosek 3.1 *Jeżeli stwierdzimy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ przy przesunięciach czasowych $1 \leq \tau \leq k$ są nieskorelowane, to przyjmujemy, że zaburzenia zewnętrzne w modelu (3.1) są niezależnymi zmiennymi losowymi. Jeżeli natomiast dla pewnego przesunięcia czasowego $1 \leq \tau \leq k$ stwierdzimy, że współczynnik korelacji istotnie różni się od zera, to zaburzenia zewnętrzne w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (3.1) należy opisać za pomocą modelu uwzględniającego relacje pomiędzy elementami w szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ (np. za pomocą kombinacji liniowej zmiennych losowych opóźnionych w czasie, patrz rozdz. 5).*

Przykład 3.3 *Dla ciągu reszt 4.94, 2.53, -2.83, 1.32, 0.52, 3.27, 0.45, -0.42, 3.45, -0.67, -2.29, -2.32, 0.64, -1.36, -1.97, 0.2, -3.56, 0.4, -4.35, -3.8, 2.1, 0.75, 1.03, -0.41, 1.68, 1.68, -2.07, 0.22, 3.92, 0.77, -0.15, -4.18, 1.93, 2.86, -3.81, 2.96, 0.68, 2.16, -1.92, 1.03, 0.12, -6.25, 4.32, 1.92, -1.99, -2.31, -3.15, -3.84, 4.34, 1.46 na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikujemy hipotezy o braku korelacji przy przesunięciach czasowych $\tau = 1, 2, \dots, 9$.*

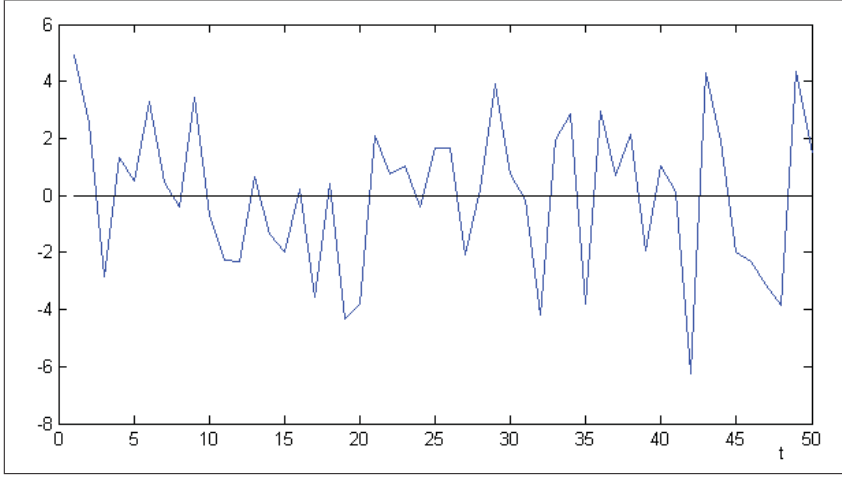
Rysunek 3.1 przedstawia zachowanie ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$. Ze wzoru (3.7) wynika, że estymator wartości średniej elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ jest równy zero. Dla przesunięć $\tau = 1, 2, \dots, 9$ na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ tworzymy hipotezy robocze

$$H_0 : R_\tau = 0 \quad (\text{brak korelacji przy przesunięciu } \tau)$$

wobec hipotez alternatywnych

$$H_1 : R_\tau \neq 0 \quad (\text{istnieje korelacja przy przesunięciu } \tau).$$

Wartości estymatorów współczynników korelacji r_τ oraz statystyk T_τ , $1 \leq \tau \leq 9$ obliczamy korzystając ze wzorów (3.9) - (3.10). Wartości kry-



Rysunek 3.1: Realizacje szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$.

tyczne $T_\tau^* = T^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2 - \tau\right)$, $1 \leq \tau \leq 9$ odczytujemy z tablic statystycznych. Tabela poniżej podaje wartości estymatorów współczynników korelacji $\hat{r}_\tau$, wartości statystyk T_τ oraz wartości krytyczne tych statystyk T_τ^* dla $\tau = 1, 2, \dots, 9$.

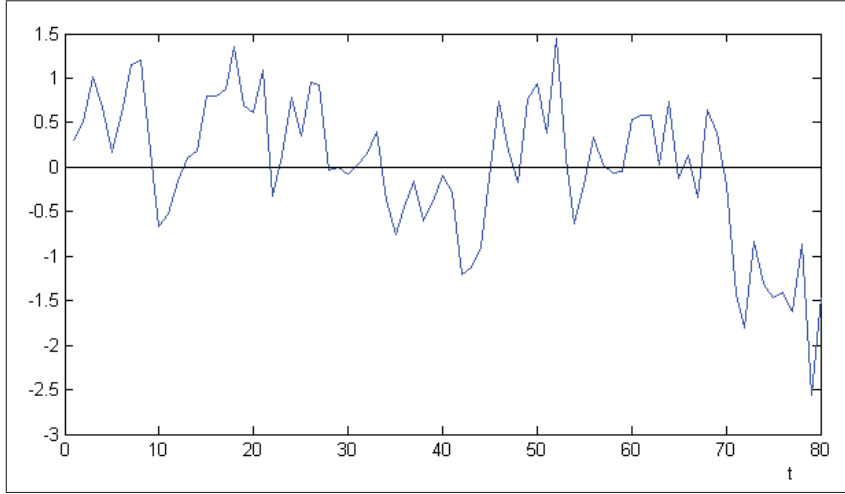
τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{r}_\tau$	-0.059	-0.178	0.096	-0.007	0.144	-0.118	0.153	0.025	-0.129
T_τ	-0.401	-1.229	0.644	-0.048	0.956	-0.770	0.989	0.155	-0.810
T_τ^*	1.678	1.679	1.679	1.68	1.681	1.682	1.683	1.684	1.685

Dla każdego $1 \leq \tau \leq 9$ spełniona jest nierówność $-T_\tau^* < T_\tau < T_\tau^*$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotez roboczych H_0 . Możemy zatem przyjąć, że elementy tego szeregu są niezależne.

Przykład 3.4 Dany jest ciąg reszt 0.3, 0.5, 1.01, 0.68, 0.17, 0.6, 1.16, 1.2, 0.32, -0.66, -0.52, -0.16, 0.1, 0.18, 0.8, 0.8, 0.88, 1.36, 0.69, 0.61, 1.09, -0.33, 0.14, 0.79, 0.35, 0.95, 0.92, -0.04, 0, -0.08, 0.03, 0.15, 0.4, -0.38, -0.75, -0.45, -0.15, -0.6, -0.39, -0.1, -0.28, -1.2, -1.13, -0.89, -0.11, 0.73, 0.19, -0.17, 0.77, 0.93, 0.39, 1.45, 0.11, -0.63, -0.2, 0.33, 0.03, -0.06, -0.05, 0.54, 0.58, 0.59, 0.03, 0.73, -0.13, 0.13, -0.34, 0.65, 0.38, -0.2, -1.42, -1.8, -0.84, -1.31, -1.47, -1.4, -1.62, -0.87, -2.56, -1.45.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zbadamy istnienie korelacji pomiędzy elementami szeregu dla przesunięć $\tau = 1, 2, \dots, 9$.

Rysunek 3.2 przedstawia zachowanie ciągu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 80}$. Korzystając ze



Rysunek 3.2: Realizacje szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 80}$.

wzoru (3.7) obliczamy estymator wartości średniej szeregu reszt, który wynosi $\hat{\mu} = 0$. Zatem szereg oscyluje dookoła poziomu zero. Dla przesunięć $\tau = 1, 2, \dots, 9$ na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ tworzymy hipotezy robocze

$$H_0 : R_\tau = 0 \quad (\text{brak korelacji przy przesunięciu } \tau)$$

wobec hipotez alternatywnych

$$H_1 : R_\tau \neq 0 \quad (\text{istnieje korelacja przy przesunięciu } \tau).$$

Wartości $\hat{r}_\tau$, T_τ oraz wartości krytyczne $T_\tau^* = T^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2 - \tau)$ dla $\tau = 1, 2, \dots, 9$ podane są w tabeli poniżej.

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{r}_\tau$	0.702	0.495	0.435	0.363	0.320	0.258	0.144	0.108	0.052
T_τ	8.646	4.964	4.179	3.346	2.881	2.264	1.223	0.910	0.435
T_τ^*	1.665	1.665	1.665	1.666	1.666	1.666	1.667	1.667	1.667

Widzimy, że nie dla wszystkich $\tau \in \{1, 2, \dots, 9\}$ nierówność $-T_\tau^* < T_\tau < T_\tau^*$ jest spełniona (tzn. dla $1 \leq \tau \leq 6$ mamy $T_\tau \geq T_\tau^*$). Zatem dla przesunięć

czasowych $\tau \in \{1, 2, \dots, 6\}$ na poziomie istotności 0.1 odrzucamy hipotezy robocze H_0 na korzyść hipotez alternatywnych H_1 . Wobec powyższego przyjmujemy, że elementy szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są skorelowane (nie są niezależne, ponieważ istnieją związki pomiędzy elementami ε_t i $\varepsilon_{t+\tau}$ dla $\tau = 1, 2, \dots, 6$).

Rozdział 4

Stacjonarne szeregi czasowe

Szeregi czasowe są dość często używane do modelowania zjawisk technicznych, ekonomicznych, fizycznych itp. W szczególności, ciąg reszt modelu ekonometrycznego można uznać za jedną z (wielu możliwych) realizacji pewnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in T}$, gdzie $T \subset \mathbb{Z}$. Ogólnie szeregi czasowe dzielimy na stacjonarne i niestacjonarne. Dla stacjonarnych szeregów czasowych własności probabilistyczne pozostają bez zmian przy zmianie początku układu współrzędnych ze względu na zmienną czasową. Oznacza to, że przy przesunięciu czasowym własności statyczne i dynamiczne takiego szeregu są niezmiennicze. Można powiedzieć, że stacjonarne szeregi czasowe znajdują się w stanie równowagi statycznej. Szeregi, które zawierają na przykład trend deterministyczny bądź stochastyczny, sezonowość lub cykliczność, są szeregami niestacjonarnymi.

W tym rozdziale rozważane będą tylko szeregi stacjonarne. Omówione zostaną dwie metody badania własności szeregów stacjonarnych: analiza korelacyjna i analiza spektralna. Analiza korelacyjna polega na wykrywaniu związków pomiędzy elementami szeregu poprzez wyznaczenie współczynników korelacji, które pokazują siłę tego związku. Analiza spektralna natomiast określa z jaką częstotliwością zachodzące zjawiska są powtarzane.

4.1 Własności stacjonarnych szeregów czasowych

Stacjonarne szeregi czasowe to są szeregi, które nie zmieniają swoich własności dynamicznych przy przesunięciu czasowym. Poniżej przedstawione zostaną definicje szeregów stacjonarnych oraz ich podstawowe własności. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 4.1 Szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ nazywamy ściśle stacjonarnym (stacjonarnym w węższym sensie), jeżeli dla każdego $m \in \mathbb{N}$, dowolnych $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ oraz każdego $\tau \in \mathbb{Z}$ łączne rozkłady prawdopodobieństwa m elementowych ciągów losowych

$$\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}\} \text{ i } \{x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_m+\tau}\}$$

są identyczne.

Innymi słowy, szereg $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ściśle stacjonarny, jeżeli jego własności dynamiczne nie ulegają zmianie przy przesunięciu czasowym $\tau \in \mathbb{Z}$.

Uwaga 4.1 Jeżeli szereg czasowy jest stacjonarny, to wartości średnie elementów tego szeregu oraz odchylenia standardowe od wartości średnich są stałe.

Uwaga 4.2 Wszystkie szeregi czasowe postaci (2.1) o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych zawierające nielosowe składowe zależne od chwili czasowej t (tzn. część deterministyczna nie jest stała oraz zawiera np. czynnik trendu, sezonowości, koniunkturalny) są niestacjonarne.

Z założenia ścisłej stacjonarności szeregu czasowego wynika, że rozkłady zmiennych losowych x_t , $t \in \mathbb{Z}$ są identyczne, nie zależą od momentu t . Zatem od t również nie zależą podstawowe charakterystyki rozkładów – wartość średnia i wariancja. Elementy stacjonarnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ mają stałą wartość średnią

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{Z}} Ex_t = \mu, \quad (4.1)$$

oraz stałą wariancję

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{Z}} \text{Var}(x_t) = E(x_t - \mu)^2 = \sigma^2. \quad (4.2)$$

Wartość μ określa poziom dookoła którego oscyluje szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, natomiast wielkość σ określa rozrzut wartości elementów szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ względem poziomu μ . Ponieważ rozkłady zmiennych losowych x_t są jednakowe dla wszystkich $t \in \mathbb{Z}$, to podstawowe charakterystyki szeregu mogą być oszacowane na podstawie wielkości obserwacji $x_1, x_2, \dots, x_N$ (realizacji szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$). Przyjmujemy, że estymatorem wartości średniej elementów szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t. \quad (4.3)$$

Natomiast estymatorem wariancji elementów szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_t - \hat{\mu})^2. \quad (4.4)$$

Definicja 4.2 Szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, elementy którego mają skończone drugie momenty ($Ex_t^2 < \infty$ dla $t \in \mathbb{Z}$), nazywamy słabo stacjonarnym (stacjonarnym w szerszym sensie) jeżeli spełnione są następujące warunki:

- $Ex_t = \mu = \text{const}$ dla $t \in \mathbb{Z}$,
- dla każdego $t \in \mathbb{Z}$ i dowolnego $\tau \in \mathbb{Z}$ spełniona jest równość

$$\text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = \text{cov}(x_0, x_\tau).$$

Dla szeregu słabo stacjonarnego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ drugi moment każdej zmiennej losowej x_t jest skończony, zmienne x_t mają identyczną wartość oczekiwaną oraz kowariancja pomiędzy zmiennymi x_t i $x_{t+\tau}$ zależy tylko od przesunięcia τ i nie zależy od t .

Z definicji stacjonarności wynika, że jeżeli $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest szeregiem ściśle stacjonarnym oraz $Ex_t^2 < \infty$ dla $t \in \mathbb{Z}$, to $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest szeregiem słabo stacjonarnym. Stwierdzenie odwrotne nie jest na ogół prawdziwe. Wyjątek stanowią szeregi gaussowskie (sparametryzowana rodzina zmiennych losowych

o rozkładach normalnych), ponieważ są one całkowicie scharakteryzowane przez momenty pierwszego i drugiego rzędu. Zatem, jeżeli szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest słabo stacjonarny oraz zmienne losowe x_t mają ten sam rozkład normalny $N(m, \sigma^2)$, to $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest szeregiem ściśle stacjonarnym.

4.2 Analiza korelacyjna

4.2.1 Funkcja autokowariancji

Niech $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie szeregiem stacjonarnym o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych. Zwrot szereg stacjonarny oznacza szereg stacjonarny słabo (w szerszym sensie). Kowariancja dwóch dowolnych zmiennych losowych x_t i $x_{t+\tau}$ zależy tylko od wielkości przesunięcia τ i nie zależy od chwili t . Dla dowolnego $\tau \in \mathbb{Z}$ kowariancję pomiędzy elementami x_t oraz $x_{t+\tau}$ określamy wzorem

$$\gamma_\tau = \text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = E(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu). \quad (4.5)$$

Powyższą funkcję γ_τ , $\tau \in \mathbb{Z}$ nazywamy autokowariancją.

Oczywitem jest, że dla $\tau = 0$ otrzymujemy wariancję elementów szeregu czasowego

$$\gamma_0 = \sigma^2 = E(x_t - \mu)^2.$$

Funkcja autokowariancji γ_τ określa istnienie związku pomiędzy elementami szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ przy przesunięciu czasowym τ , tzn. nierówność $\gamma_\tau \neq 0$ oznacza istnienie związku pomiędzy elementami x_t i $x_{t+\tau}$, natomiast jeżeli $\gamma_\tau = 0$, to elementy szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ odległe o τ chwil czasowych są nieskorelowane.

Ogólnie dla stacjonarnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych ($x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{Z}$) kowariancja pomiędzy zmiennymi losowymi x_t oraz $x_{t+\tau}$ nie zależy od chwili t oraz funkcja autokowariancji $\gamma_\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją parzystą

$$\gamma_\tau = \text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = \text{cov}(x_{s-\tau}, x_s) = \gamma_{-\tau}.$$

Natomiast dla stacjonarnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach w zbiorze liczb zespolonych ($x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, t \in \mathbb{Z}$) funkcja autokowariancji $\gamma_\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ spełnia równość

$$\gamma_\tau = E(x_t - \mu) \overline{(x_{t+\tau} - \mu)} = \overline{\gamma_{-\tau}}.$$

Własności funkcji autokowariancji γ_τ :

1. $\gamma_0 = \sigma^2$,
2. $\bigwedge_{\tau \in \mathbb{Z}} \gamma_\tau = \gamma_{-\tau}$ (w przypadku zespolonym $\gamma_\tau = \overline{\gamma_{-\tau}}$),
3. $\bigwedge_{\tau \in \mathbb{Z}} |\gamma_\tau| \leq \gamma_0$.

W praktyce wystarcza wyznaczenie funkcji γ_τ dla dodatnich argumentów. Wartości funkcji autokowariancji γ_τ na podstawie realizacji szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych szacujemy za pomocą wzoru

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_\tau &= \frac{1}{N-\tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} (x_t - \hat{\mu})(x_{t+\tau} - \hat{\mu}) \\ &= \frac{1}{N-\tau} \sum_{t=\tau+1}^N (x_t - \hat{\mu})(x_{t-\tau} - \hat{\mu}) = \hat{\gamma}_{-\tau} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dla $\tau \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, gdzie estymator wartości średniej $\hat{\mu}$ wyznaczamy ze wzoru (4.3). Wartości funkcji autokowariancji dla przesunięć ujemnych są wykorzystywane do odtworzenia danych, które uprzednio zostały utracone (np. zniszczone na skutek zdarzeń losowych).

4.2.2 Funkcja autokorelacji

Funkcja autokowariancji $\gamma_\tau, \tau \in \mathbb{Z}$ określa istnienie związku pomiędzy elementami szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ przy przesunięciu czasowym τ , natomiast nie pokazuje siły związku (relacji) pomiędzy elementami x_t i $x_{t+\tau}$. Siłę (stopień) zależności pomiędzy elementami x_t i $x_{t+\tau}$ mierzymy współczynnikiem korelacji $r_\tau, \tau \in \mathbb{Z}$. Ponieważ wariancja elementów szeregu stacjonarnego jest stała

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{Z}} E(x_t - \mu)^2 = \gamma_0,$$

to dla każdego $t \in \mathbb{Z}$ i każdego $\tau \in \mathbb{Z}$ przyjmujemy

$$r_\tau = \frac{E(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu)}{E(x_{t+\tau} - \mu)^2} = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}. \quad (4.7)$$

Dla stacjonarnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ również funkcja autokorelacji r_τ jest funkcją parzystą. Jeżeli $x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dla $t \in \mathbb{Z}$, to spełniona jest równość

$$r_\tau = r_{-\tau} \text{ dla } \tau \in \mathbb{Z}.$$

Jeżeli natomiast $x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dla $t \in \mathbb{Z}$, to

$$r_\tau = \overline{r_{-\tau}} \text{ dla } \tau \in \mathbb{Z}.$$

Wartość współczynnika r_τ jest miarą związku pomiędzy elementami tego samego szeregu czasowego, dlatego nazywamy go współczynnikiem autokorelacji. Im większy jest moduł współczynnika r_τ , tym związek pomiędzy elementami szeregu czasowego x_t i $x_{t+\tau}$ jest silniejszy. Jeżeli $r_\tau = 0$, to elementy szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ odległe o τ chwil czasowych są nieskorelowane. Funkcję r_τ nazywamy funkcją autokorelacji, natomiast wykres tej funkcji nazywamy korelogramem.

Własności funkcji autokorelacji r_τ .

1. $r_0 = 1$,
2. $r_\tau = r_{-\tau}$ (w przypadku zespolonym $r_\tau = \overline{r_{-\tau}}$),
3. $|r_\tau| \leq 1$.

Wobec powyższego widzimy, że wystarczy wyznaczyć funkcję autokorelacji dla argumentów nieujemnych $\tau \in \mathbb{N}_0$. Poniżej rozważamy stacjonarne szeregi czasowe $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, $x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dla $t \in \mathbb{Z}$. Wartości funkcji autokorelacji r_τ na podstawie realizacji $\{x_t\}_{0 \leq t \leq N}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych wyznaczamy za pomocą wzoru

$$\hat{r}_\tau = \frac{N \sum_{t=1}^{N-\tau} (x_t - \hat{\mu})(x_{t+\tau} - \hat{\mu})}{(N - \tau) \sum_{t=1}^N (x_t - \hat{\mu})^2} = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0}, \quad (4.8)$$

gdzie $\tau \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, natomiast estymator wartości średniej $\hat{\mu}$ wyznaczamy za pomocą wzoru (4.3).

Uwaga 4.3 Dla dużych przesunięć czasowych τ relacje pomiędzy elementami szeregu czasowego x_t i $x_{t+\tau}$ są dość słabe, tzn. elementy bardziej oddalone są mniej ze sobą skorelowane (w większości przypadków występuje tendencja do zanikania związku, relacji pomiędzy elementami wraz ze wzrostem przesunięcia czasowego). Wobec powyższego uwzględniamy zależności pomiędzy elementami szeregu czasowego tylko do pewnego momentu τ^* , powyżej którego wartości funkcji autokorelacji w przybliżeniu są równe zero. Tym samym pomijamy związki pomiędzy elementami szeregu czasowego przy przesunięciach $\tau \geq \tau^*$, tzn. przyjmujemy $\bigwedge_{\tau \geq \tau^*} r_\tau \equiv 0$.

Uwaga 4.4 W praktyce, aby uchwycić związki oraz dynamikę wewnętrzną w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ na podstawie realizacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ najczęściej szacujemy wartości funkcji autokorelacji i autokowariancji dla przesunięć $0, 1, 2, \dots, \left[\frac{N}{4}\right]$, gdzie $[\cdot]$ – oznacza część całkowitą.

Uwaga 4.5 Dla stacjonarnych szeregów czasowych $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych wartości błędów estymatorów dla funkcji autokorelacji r_τ podane zostały przez Bartlett'a (patrz [6], [7]). Jeżeli elementy szeregu czasowego mają rozkład normalny (tzn. $x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ oraz x_t ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m, \sigma^2)$ dla każdego $t \in \mathbb{N}$), to wariancję współczynników korelacji dla $\tau \in \mathbb{N}$ wyznaczamy ze wzoru

$$\text{Var}(r_\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=-N+1}^{N-1} \{\hat{r}_i^2 + \hat{r}_{i+\tau}\hat{r}_{i-\tau} - 4\hat{r}_\tau\hat{r}_i\hat{r}_{i-\tau} + 2\hat{r}_i^2\hat{r}_\tau^2\}, \quad (4.9)$$

gdzie $r_\tau = r_{-\tau}$. Odchylenie standardowe współczynników autokorelacji jest dane wzorem

$$S_{r_\tau} = \sqrt{\text{Var}(r_\tau)}, \quad \tau \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Powyższe parametry są pomocne przy wyborze modelu dla szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.

4.2.3 Macierze autokowariancji i autokorelacji

Dla stacjonarnych szeregów czasowych $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych macierze autokowariancji Γ_m i autokorelacji P_m rzędu $m \in \mathbb{N}$ definiujemy wzorami:

$$\Gamma_m = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{m-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{m-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{m-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{m-1} & \gamma_{m-2} & \gamma_{m-3} & \dots & \gamma_0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{m-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{m-2} \\ r_2 & r_1 & 1 & \dots & r_{m-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m-1} & r_{m-2} & r_{m-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Ponieważ $\gamma_0 = \sigma^2$, to ze wzoru (4.7) wynika równość

$$P_m = \frac{1}{\sigma^2} \Gamma_m.$$

Lemat 4.1 *Jeżeli $\det(\Gamma_m) \neq 0$ lub $\det(P_m) \neq 0$, to macierze autokorelacji $P_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i autokowariancji $\Gamma_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ są dodatnio określone.*

Dowód. Macierze autokorelacji P_m i autokowariancji Γ_m są symetryczne. Niech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie wektorem losowym takim, że macierz kowariancji wektora losowego X jest równa Γ_m (tzn. $\text{cov}(X, X) = \Gamma_m$). Wtedy istnieje taka macierz $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ oraz wektor losowy $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ współrzędne którego są stochastycznie niezależne oraz $X = AY$. Macierz kowariancji $B = \text{cov}(Y, Y)$ wektora losowego Y jest macierzą diagonalną, a zatem dodatnio określoną. Wwartości na głównej przekątnej odpowiadają wartościom wariancji elementów wektora losowego Y . Wobec powyższego macierz Γ_m możemy przedstawić w postaci

$$\Gamma_m = \text{cov}(X, X) = \text{cov}(AY, AY) = A \text{cov}(Y, Y) A^T = ABA^T.$$

Wtedy, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^m$ oraz $x \neq 0$ mamy

$$x_m^T \Gamma x = x^T A B A^T x = \left(B^{\frac{1}{2}} A^T x \right)^T B^{\frac{1}{2}} A^T x = \left\| B^{\frac{1}{2}} A^T x \right\|^2 > 0,$$

gdzie $B^{\frac{1}{2}}$ oznacza macierz diagonalną, dla której elementy na głównej przekątnej odpowiadają wartościom odchylenia standardowego wektora losowego Y . Dodatnią określoność macierzy autokowariancji P_m udowodnimy podobnie. ■

Macierzy autokowariancji Γ_m i autokorelacji P_m najczęściej używamy do konstrukcji rozkładów łącznych m elementów $x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1}$ szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Przykład 4.1 Niech $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Wyznamy funkcję autokowariancji i autokorelacji dla szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci

$$x_t = 3 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}.$$

Pokażemy, że szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ściśle stacjonarny. Podamy macierz autokorelacji P_4 .

Z własności wartości oczekiwanej wynika, że

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{N}} E x_t = 3,$$

a dla każdego $\tau \in \mathbb{N}_0$ mamy

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= \text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+\tau} + \varepsilon_{t+\tau-1}) = \\ &= E\varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau} + E\varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau-1} + E\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+\tau} + E\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+\tau-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$, to

$$\gamma_\tau = \begin{cases} 2, & \text{dla } \tau = 0, \\ 1, & \text{dla } \tau = 1, \\ 0, & \text{dla } \tau \geq 2. \end{cases}$$

Widzimy, że szereg $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest stacjonarny w szerszym sensie (słabo), ponieważ wartość oczekiwana elementów szeregu jest stała oraz kowariancja pomiędzy elementami szeregu zależy tylko od przesunięcia $\tau \geq 0$. Dodatkowo szereg $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest procesem gaussowskim (elementy szeregu powstają jako kombinacje liniowe zmiennych losowych o rozkładzie normalnym). Wobec powyższego analizowany szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest również ściśle stacjonarnym.

Funkcja autokorelacji i macierz autokorelacji P_4 dane są wzorami:

$$r_\tau = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0.5, & \text{dla } \tau = 1, \\ 0, & \text{dla } \tau \geq 2, \end{cases}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 4.2 Załóżmy, że X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$ oraz $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych, a $\mathbb{C}$ oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych. Dla każdego $t \in \mathbb{Z}$ definiujemy

$$\xi_t = X\psi(t).$$

Poniżej wyznaczymy dla jakich funkcji $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ szereg $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ spełnia warunek stacjonarności oraz podamy funkcje autokowariancji i autokorelacji szeregu $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$ wartość oczekiwana elementów szeregu czasowego $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest równa

$$E\xi_t = \psi(t) EX = 0,$$

natomiast autokowariancja przy przesunięciu czasowym $\tau \in \mathbb{Z}$ jest równa

$$\gamma_\tau = \text{cov}(\xi_t, \xi_{t+\tau}) = E\xi_t \overline{\xi_{t+\tau}} = \sigma^2 \psi(t) \overline{\psi(t+\tau)}.$$

Jeżeli szereg jest stacjonarny, to funkcja kowariancji zależy tylko od przesunięcia czasowego $\tau \in \mathbb{Z}$, natomiast nie zależy od chwili $t \in \mathbb{Z}$. Zatem musi być spełniony warunek

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{Z}} \psi(t) \overline{\psi(t + \tau)} = \psi(0) \overline{\psi(\tau)}. \quad (4.13)$$

Jeżeli $\psi(0) = 0$, to z warunku (4.13) wynika, że (wystarczy podstawić $\tau = 0$)

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 = 0, \quad t \in \mathbb{Z}$$

i w rezultacie

$$\xi_t = 0, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Jeżeli natomiast $\psi(0) \neq 0$, to z warunku (4.13) otrzymujemy

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 > 0, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ warunek (4.13) powinien być spełniony dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$ (również dla $t = 1$), to otrzymujemy

$$\frac{\overline{\psi(\tau + 1)}}{\overline{\psi(\tau)}} = \frac{\psi(0)}{\psi(1)}.$$

Zatem

$$\psi(\tau + 1) = \frac{\overline{\psi(0)}}{\overline{\psi(1)}} \psi(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \psi(\tau), \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{C}.$$

Wynika stąd, że funkcja nielosowa $\psi(t)$ jest postaci

$$\psi(t) = \psi(0) \alpha^t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Przyjmijmy

$$\alpha = |\alpha| e^{i\omega} = |\alpha| (\cos \omega + i \sin \omega), \quad \text{gdzie } \omega \in [-\pi, \pi).$$

Wariancja elementów szeregu czasowego $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest równa

$$\gamma_0 = \text{cov}(\xi_t, \xi_t) = E \xi_t \overline{\xi_{t+\tau}} = \sigma^2 \psi(t) \overline{\psi(t)} = \sigma^2 |\psi(0)|^2 |\alpha|^{2t}.$$

Dla stacjonarnych szeregów czasowych wariancja nie zależy od t (jest stała), więc musi być $|\alpha| = 1$. Zatem elementy szeregu czasowego $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są dane wzorem

$$\xi(t) = X \psi(0) e^{i\omega t}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \omega \in [-\pi, \pi).$$

Wartości funkcji autokowariancji i autokorelacji dla $\tau \in \mathbb{Z}$ są równe odpowiednio

$$\begin{aligned}\gamma_\tau &= E\xi_t \overline{\xi_{t+\tau}} = \sigma^2 |\psi(0)|^2 e^{i\omega t} e^{-i\omega(t+\tau)} = \sigma^2 |\psi(0)|^2 e^{-i\omega\tau}, \\ r_\tau &= e^{-i\omega\tau}.\end{aligned}$$

Definicja 4.3 Niech $X_1, X_2, \dots, X_N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych $\mathbf{N}(0, \sigma_t^2)$ odpowiednio. Załóżmy, że

$$-\pi \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N < \pi$$

i dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ zdefiniujemy

$$\xi_n = \sum_{k=1}^N X_k e^{i\omega_k n}. \quad (4.14)$$

Szereg $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ nazywamy szeregiem prawie okresowym.

Lemat 4.2 Szereg czasowy prawie okresowy postaci (4.14) jest stacjonarny oraz funkcje autokowariancji γ_τ i autokorelacji r_τ dla $\tau \in \mathbb{Z}$ są dane wzorami

$$\gamma_\tau = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{-i\omega_k \tau}, \quad (4.15)$$

$$r_\tau = \frac{\sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{-i\omega_k \tau}}{\sum_{k=1}^N \sigma_k^2}. \quad (4.16)$$

Dowód. Ponieważ $X_1, X_2, \dots, X_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych $\mathbf{N}(0, \sigma_t^2)$ dla $0 \leq t \leq N$, to $EX_t = 0$ dla dowolnego $1 \leq t \leq N$ oraz

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Ze wzoru (4.14) dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ i każdego $\tau \in \mathbb{Z}$ mamy

$$E\xi_n = \sum_{k=1}^N e^{i\omega_k n} EX_k = 0$$

oraz

$$\begin{aligned}\gamma_\tau &= \text{cov}(\xi_n, \xi_{n+\tau}) = E \left[\left(\sum_{k=1}^N e^{i\omega_k n} X_k \right) \overline{\sum_{k=1}^N e^{i\omega_k (n+\tau)} X_k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N e^{i\omega_k n} \overline{e^{i\omega_l (n+\tau)}} E[X_k X_l] = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{-i\omega_k \tau}.\end{aligned}$$

Widzimy, że kowariancja γ_τ zależy tylko od przesunięcia τ , zatem szereg czasowy prawie okresowy $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest słabo stacjonarny. Ponieważ elementy szeregu czasowego $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ są kombinacjami liniowymi zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, zatem szereg czasowy prawie okresowy $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest stacjonarny ściśle. Z definicji funkcji autokorelacji otrzymujemy (4.16).

■

Przykład 4.3 Na podstawie notowań cen pszenicy w okresie 7.10.2014 – 16.12.2014 ⁶ wyznaczmy wartości funkcji autokowariancji i autokorelacji dla przesunięć $0 \leq \tau \leq 10$ oraz narysujemy korelogram. Dodatkowo, na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zbadamy istotność współczynników korelacji (istnienie związku) dla przesunięć $\tau = 1, 2, \dots, 10$ pomiędzy elementami szeregu opisującego zachowanie cen pszenicy.

Rysunek 4.1 przedstawia wartości cen notowań pszenicy w okresie 7.10.2014 – 16.12.2014. Wartość średnia $\hat{\mu}$ oraz wartości funkcji autokowariancji $\hat{\gamma}_\tau$ i autokorelacji $\hat{r}_\tau$ szeregu $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ wyznaczamy za pomocą wzorów (4.3), (4.6) i (4.8). Wartość średnia $\hat{\mu} = 546.4932$ oraz wariancja $\hat{\gamma}_0 = 1189$. Wartości $\hat{\gamma}_\tau$ i $\hat{r}_\tau$ dla $\tau = 1, \dots, 10$ są podane w tabeli poniżej.

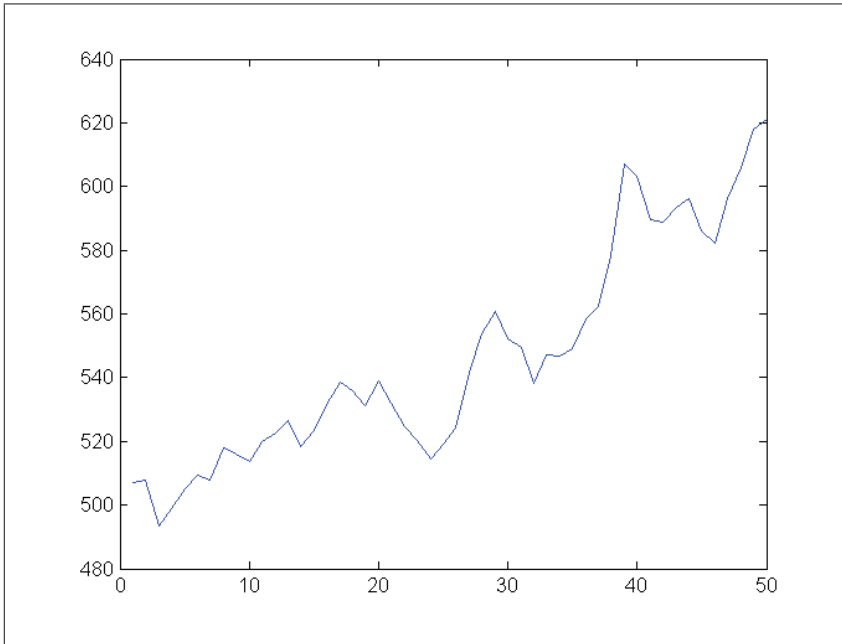
τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\gamma}_\tau$	1102.1	995.5	896.2	820.8	772.4	724.1	669.8	643.5	619.1	572.6
$\hat{r}_\tau$	0.927	0.837	0.754	0.690	0.647	0.609	0.563	0.541	0.521	0.482

Rysunek 4.2 przedstawia korelogram.

Dla przesunięć $\tau = 1, 2, \dots, 10$ na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ tworzymy hipotezy robocze

$$H_0 : R_\tau = 0 \quad (\text{brak korelacji przy przesunięciu } \tau)$$

⁶ <http://www.biznesradar.pl/notowania-histeryczne/WHEAT-PSZENICA>



Rysunek 4.1: Ceny pszenicy w okresie 7.10.2014 – 16.12.2014.

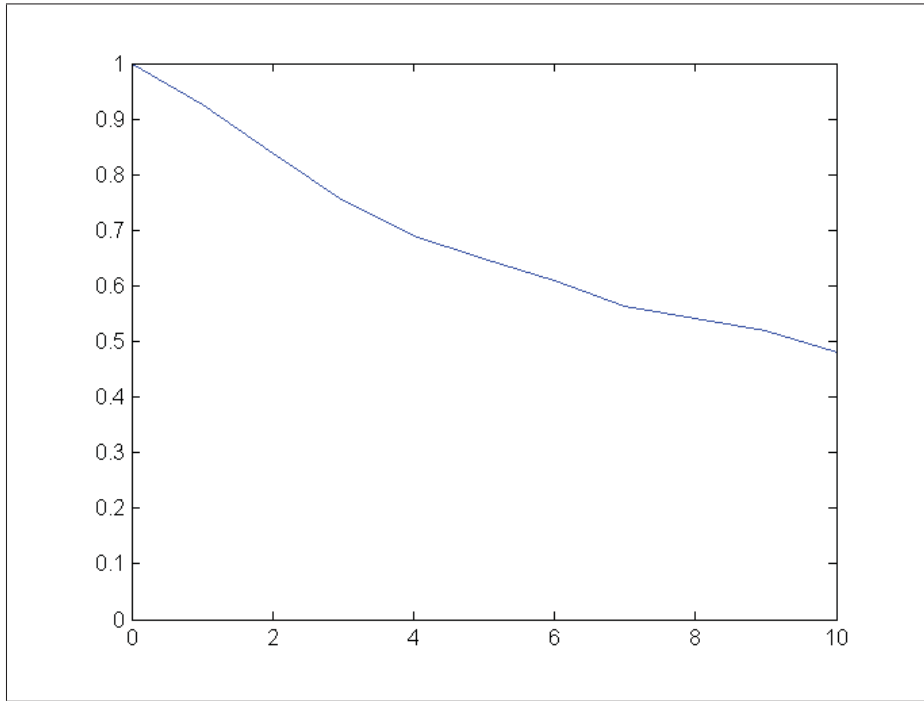
wobec hipotez alternatywnych

$$H_1 : R_\tau \neq 0 \quad (\text{istnieje korelacja przy przesunięciu } \tau).$$

Wartości statystyk T_τ , $1 \leq \tau \leq 10$ obliczamy korzystając ze wzoru (3.10). Wartości krytyczne $T_\tau^* = T^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2 - \tau \right)$, $1 \leq \tau \leq 10$ odczytujemy z tablic statystycznych. Tabela poniżej podaje wartości statystyk T_τ oraz wartości krytyczne tych statystyk T_τ^* dla $\tau = 1, 2, \dots, 10$.

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_τ	16.93	10.39	7.693	6.329	5.603	4.976	4.365	4.070	3.809	3.387
T_τ^*	1.678	1.679	1.679	1.680	1.681	1.682	1.683	1.684	1.685	1.686

Widzimy, że dla każdego $\tau \in \{1, 2, \dots, 10\}$ spełniona jest nierówność $T_\tau \geq T_\tau^*$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ dla przesunięć $\tau = 1, 2, \dots, 10$ należy odrzucić hipotezy robocze na korzyść hipotez alternatywnych. Zatem na podstawie realizacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ wnioskujemy, że istnieje korelacja (związki) pomiędzy elementami szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.



Rysunek 4.2: Wartości funkcji autokorelacji.

4.3 Analiza spektralna

Innym sposobem badania szeregów czasowych jest analiza spektralna. Nie ulega wątpliwości, że analiza korelacyjna jest prostszym narzędziem stosowanym do badania własności szeregów czasowych, niemniej jednak analiza spektralna udziela odpowiedzi na pytanie z jaką częstotliwością zachodzące zjawiska są powtarzane. Poniżej zobaczymy, że funkcje kowariancji i korelacji są powiązane z gęstością spektralną. Narzędzia analizy korelacyjnej i spektralnej uzupełniają się nawzajem.

4.3.1 Kowariancja a gęstość spektralna

Oprócz funkcji kowariancji do opisu własności szeregu czasowego wykorzystujemy funkcję spektralną oraz funkcję gęstości spektralnej. Zależność pomiędzy funkcją spektralną a funkcją kowariancji podaje twierdzenie poniżej. Niech $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie szeregiem czasowym o wartościach w zbiorze

liczb zespolonych ($x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dla $t \in \mathbb{Z}$). Zakładamy, że szereg $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest stacjonarny słabo (w szerszym sensie) oraz wartość oczekiwana elementów tego szeregu jest równa zero.

Twierdzenie 4.1 (Herglotza) *Niech γ_τ , $\tau \in \mathbb{Z}$ będzie funkcją autokowariancji słabo stacjonarnego szeregu czasowego. Istnieje wtedy dokładnie jedna, prawostronnie ciągła i niemalejąca funkcja $F : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$ spełniająca warunki: $F(-\pi) = 0$ oraz*

$$\gamma_\tau = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega) \quad \text{dla } \tau \in \mathbb{Z}. \quad (4.17)$$

Całkę we wzorze (4.17) rozumiemy jako całkę Lebesgue’a–Stieltjesa. Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć np. w [11], [51].

Funkcję $F(\cdot)$ nazywamy funkcją spektralną szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, natomiast jej argument $\omega \in [-\pi, \pi]$ nazywamy prędkością kątową.

Uwaga 4.6 *Dla szeregu prawie okresowego $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ postaci (4.14) funkcja spektralna F jest dana wzorem:*

$$F(\omega) = \sum_{k: \omega_k \leq \omega} \sigma_k^2 \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (4.18)$$

Funkcja F jest stała w każdym z przedziałów

$$[-\pi, \omega_1), [\omega_1, \omega_2), \dots, [\omega_{N-1}, \omega_N), [\omega_N, \pi)$$

oraz

$$\begin{aligned} F(\omega_1) - \lim_{\omega \uparrow \omega_1} F(\omega) &= \sigma_1^2, \quad \text{gdy } -\pi < \omega_1, \\ F(\omega_k) - \lim_{\omega \uparrow \omega_k} F(\omega) &= \sigma_k^2, \quad \text{gdy } k = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Funkcja F postaci (4.18) nie jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue’a. Funkcja autokowariancji γ_τ , $\tau \in \mathbb{Z}$ postaci (4.15) dla szeregu prawie okresowego $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest dana wzorem (4.17).

Jeżeli dla dowolnego $\omega \in [-\pi, \pi]$ funkcję spektralną F możemy przedstawić w postaci

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(\nu) d\nu,$$

to funkcję f nazywamy gęstością spektralną szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Ponieważ funkcja F jest funkcją niemalejącą, zatem $f(\nu) \geq 0$, dla $\nu \in [-\pi, \pi]$ (powyższą własność zobaczymy podczas analizy intensywności). Ze wzoru (4.17) otrzymujemy

$$\gamma_\tau = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} f(\omega) d\omega, \quad \text{dla } \tau \in \mathbb{Z}. \quad (4.19)$$

Jeżeli $f \in L^2[-\pi, \pi]$ to rozwijając f w szereg Fouriera otrzymujemy

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} e^{-i\omega\tau} \gamma_\tau. \quad (4.20)$$

Widzimy zatem, że wartości funkcji autokowariancji γ_τ dla $\tau \in \mathbb{Z}$ równe są współczynnikom szeregu Fouriera dla funkcji f . Odwrotnie jeżeli $\sum_{\tau} |\gamma_\tau| < \infty$, to dla dowolnego $\omega \in [-\pi, \pi]$ szereg Fouriera ze współczynnikami γ_τ jest zbieżny do funkcji gęstości spektralnej szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (patrz np. [23]).

Wniosek 4.1 *Ze wzoru (4.19) wynika, że wariancja elementów szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ wynosi*

$$\gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega = F(\pi).$$

W praktyce zazwyczaj mamy do czynienia z funkcją autokowariancji o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych. Zależność pomiędzy funkcją autokowariancji γ_τ a funkcją gęstości spektralnej podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2 *Jeżeli dla $n \in \mathbb{N}_0$ funkcja autokowariancji γ_n przyjmuje wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, to funkcja gęstości spektralnej $f(\omega)$,*

$\omega \in [-\pi, \pi]$ jest postaci

$$f(\omega) = \frac{\gamma_0}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\pi} \cos n\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos n\omega \right]. \quad (4.21)$$

Dowód. W przypadku, gdy funkcja autokowariancji γ_n , $n \geq 0$ jest funkcją rzeczywistą (pamiętamy że spełniony jest warunek parzystości $\gamma_n = \gamma_{-n}$ dla $n \geq 0$), to ze wzoru (4.20) wynika, że funkcja gęstości spektralnej jest parzysta. Jeżeli $f \in L^2[-\pi, \pi]$ jest funkcją parzystą, to

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega, \quad (4.22)$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega) \cos n\omega d\omega \text{ dla } n \in \mathbb{N}_0.$$

Ponieważ

$$\cos n\omega = \frac{1}{2} (e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}) \text{ dla } n \in \mathbb{N}_0,$$

to dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ ze wzoru (4.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega n} f(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^0 e^{i\omega n} f(\omega) d\omega + \int_0^{\pi} e^{i\omega n} f(\omega) d\omega \\ &= \int_0^{\pi} e^{-i\omega n} f(-\omega) d\omega + \int_0^{\pi} e^{i\omega n} f(\omega) d\omega = \int_0^{\pi} (e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}) f(\omega) d\omega \\ &= 2 \int_0^{\pi} f(\omega) \cos n\omega d\omega = \pi a_n. \end{aligned}$$

Podstawiając $a_n = \frac{\gamma_n}{\pi}$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ do wzoru (4.22) otrzymujemy tezę. ■

4.3.2 Korelacja a gęstość spektralna

Z zależności funkcji autokowariancji i autokorelacji $\gamma_\tau = \gamma_0 r_\tau$, $\tau \in \mathbb{Z}$ wynika, że funkcję gęstości spektralnej $f(\omega)$, $\omega \in [-\pi, \pi]$ możemy przedstawić w jednej z poniższych postaci:

1. w przypadku zespolonym

$$f(\omega) = \frac{\gamma_0}{2\pi} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} e^{-i\omega\tau} r_\tau, \quad (4.23)$$

2. w przypadku rzeczywistym

$$f(\omega) = \frac{\gamma_0}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} r_\tau \cos n\omega \right]. \quad (4.24)$$

Wniosek 4.2 Znając postać funkcji gęstości spektralnej $f(\omega)$, $\omega \in [-\pi, \pi]$ zawsze możemy znaleźć funkcję autokowariancji γ_τ jak również możemy wyznaczyć funkcję autokorelacji r_τ . W przypadku, gdy funkcja gęstości spektralnej przyjmuje wartości ze zbioru liczb zespolonych, to korzystamy ze wzoru (4.19). Natomiast w przypadku gdy funkcja gęstości spektralnej przyjmuje wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, to korzystamy ze wzoru

$$\gamma_n = 2 \int_0^\pi f(\omega) \cos n\omega d\omega \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.25)$$

Odwrotnie, znając postać funkcji autokowariancji γ_τ lub autokorelacji r_τ możemy określić funkcję gęstości spektralnej $f(\omega)$, $\omega \in [-\pi, \pi]$. W tym celu korzystamy ze wzorów (4.20)-(4.21) lub ze wzorów (4.23)-(4.24)

Ponieważ $\cos$ jest funkcją o okresie 2π , to dla $\omega \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ mamy

$$\cos \tau\omega = \cos \left(\tau + \frac{2\pi}{\omega} k \right) \omega \quad \text{dla } \tau, k \in \mathbb{Z}.$$

Wielkość $\omega \in [-\pi, \pi]$ mierzona w radianach na jednostkę czasu nazywamy prędkością kątową. Wielkość $\frac{\omega}{2\pi}$ nazywamy częstotliwością (określa liczbę cykli na jednostkę czasu), natomiast dla $\omega \neq 0$ wielkość $\frac{2\pi}{\omega}$ nazywamy okresem.

Wniosek 4.3 Ze wzorów (4.23)-(4.24) wynika, że jeżeli elementy szeregu czasowego są nieskorelowane (tzn. współczynniki korelacji $r_\tau = r_{-\tau} = 0$ dla $\tau \geq 1$), to funkcja gęstości spektralnej jest stała

$$f(\omega) = \frac{\gamma_0}{2\pi} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi].$$

4.3.3 Spektralne przedstawienie stacjonarnych szeregów czasowych

Z twierdzenia Herglotza wynika, że dla stacjonarnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ istnieje taka miara (funkcja spektralna) F , że funkcję autokowariancji $\gamma_\tau, \tau \in \mathbb{Z}$ możemy przedstawić za pomocą wzoru (4.17). Twierdzenie poniżej podaje spektralne przedstawienie dla stacjonarnego szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Twierdzenie 4.3 *Niech $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie słabo stacjonarnym szeregiem czasowym z funkcją autokowariancji $\gamma_\tau, \tau \in \mathbb{Z}$ i odpowiadającą jej funkcją spektralną $F(\omega), \omega \in [-\pi, \pi]$. Wtedy istnieje stochastycznie ortogonalna miara $Z(\Delta)$ określona na borelowskiej σ -algebrze $\mathcal{B}_{[-\pi, \pi]}$ taka, że dla każdego $t \in \mathbb{Z}$*

$$x_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} Z(d\omega) \quad (4.26)$$

oraz $EZ(\Delta) = 0$, $E|Z(\Delta)|^2 = F(\Delta)$ dla $\Delta \in \mathcal{B}_{[-\pi, \pi]}$.

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć np. w [51].

Niech $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ oznacza ciąg niezależnych zmiennych losowych o zerowej wartości średniej i wariancji $Ez_k^2 = \sigma_k^2$ dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^2 < \infty$. Niech $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ będzie ciągiem rosnącym, $\omega_k \in [-\pi, \pi]$ dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz

$$Z(\omega) = \sum_{k: \omega_k \leq \omega} z_k. \quad (4.27)$$

Stacjonarny szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ możemy przedstawić w postaci

$$x_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} Z(d\omega_k), \quad (4.28)$$

gdzie $Z(d\omega_k) = Z(\omega_k) - Z(\omega_k - 0) = z_k$ oraz $E|Z(d\omega_k)|^2 = F(\omega_k) - F(\omega_k - 0) = \sigma_k^2$.

Rozwinięcie (4.28) przedstawia konstrukcję stacjonarnych szeregów czasowych o wartościach w zbiorze liczb zespolonych. Poniżej przedstawiona zostanie konstrukcja stacjonarnych szeregów czasowych o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Założmy, że $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ i $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ są ciągami niezależnych zmiennych losowych o własnościach $E\alpha_k = E\beta_k = 0$, $E\alpha_k^2 = E\beta_k^2 = \sigma_k^2$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$. Niech $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ będzie ciągiem rosnącym takim, że $\omega_k \in [-\pi, \pi]$ dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\omega_{-k} = \omega_k$. Przyjmujemy $z_0 = 0$, $z_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}$ oraz $z_{-k} = \bar{z}_k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Widzimy zatem, że $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o zerowej wartości średniej i wariancji $Ez_k^2 = \sigma_k^2$ dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^2 < \infty$. Definiujemy zmienną losową $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ postaci (4.27). Ze wzoru (4.28) otrzymujemy szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych postaci

$$x_t = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

4.3.4 Intensywność

Istnienie czynników sezonowych (okresowych) w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ma bezpośredni wpływ na zachowanie funkcji gęstości spektralnej. Jak zobaczymy poniżej, funkcja gęstości spektralnej $f(\omega)$ pomaga określić istnienie harmonicznych składowych w szeregu czasowym $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Poniżej rozważamy szeregi czasowe o zerowej wartości średniej.

Niech $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ oznacza realizację szeregu czasowego, dla którego wartość średnia wynosi zero. Jeżeli wartość średnia realizacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest różna od zera, to wyznaczamy stałą $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ oraz definiujemy ciąg

$$\hat{x}_t = x_t - \mu \quad \text{dla } 1 \leq t \leq N,$$

dla którego wartość średnia wynosi zero.

Na podstawie realizacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ definiujemy harmoniki sinusowe i kosinusowe jako funkcje postaci

$$a_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \sum_{t=1}^N x_t \cos t\omega, \quad (4.29)$$

$$b_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \sum_{t=1}^N x_t \sin t\omega, \quad (4.30)$$

gdzie $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Definicja 4.4 *Wielkość*

$$I_N(\omega) = a_N^2(\omega) + b_N^2(\omega) \quad (4.31)$$

nazywamy intensywnością odpowiadającą prędkości kątowej $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Podstawiając (4.29)-(4.30) do (4.31) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_N(\omega) &= \frac{1}{\pi N} \left[\left(\sum_{t=1}^N x_t \cos t\omega \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^N x_t \sin t\omega \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\pi N} \left[\sum_{t=1}^N x_t^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k} (\cos t\omega \cos (t+k)\omega + \sin t\omega \sin (t+k)\omega) \right] \\ &= \frac{1}{\pi N} \left[\sum_{t=1}^N x_t^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k} \cos k\omega \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k} \cos k\omega \right] \right]. \end{aligned}$$

Dla realizacji $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ o wartości średniej równej zero ($\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t = 0$) estymator wariancji jest równy

$$\hat{\gamma}_0(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t^2.$$

Niech $\hat{\gamma}'_k$ dla $0 \leq k \leq N$ oznacza obciążony estymator autokowariancji postaci

$$\hat{\gamma}'_k(N) = \frac{N-k}{N} \hat{\gamma}_k(N),$$

gdzie

$$\hat{\gamma}_k(N) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}.$$

Zatem

$$I_N(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \hat{\gamma}'_k \cos k\omega \right] \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi].$$

Dla każdego ustalonego k granice ciągów $\{\hat{\gamma}'_k(N)\}$ i $\{\hat{\gamma}_k(N)\}$, gdy $N \rightarrow \infty$, są równe kowariancji γ_k . Zatem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos k\omega \right] = I(\omega). \quad (4.32)$$

Zatem z twierdzenia 4.2 wynika, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(\omega) = 2f(\omega) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (4.33)$$

Wniosek 4.4 *Intensywność $I : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$ jest podwojoną wielkością gęstości spektralnej f odpowiadającą prędkości kątowej $\omega \in [-\pi, \pi]$ oraz $I(0) = \frac{\gamma_0}{\pi}$. Dla szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach stałych (tzn. $x_t = c = \text{const}$ dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$) mamy $I(\omega) = 0$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$.*

Analizując wartości funkcji gęstości spektralnej (lub intensywności) można określić istnienie związków pomiędzy elementami szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Przykład poniżej wyjaśnia zachowanie funkcji intensywności dla różnych przypadków opisujących zależności pomiędzy elementami szeregu czasowego.

Przykład 4.4 *Niech funkcje autokowariancji γ_k^i dla $i = 1, 2, 3, 4$ będą dane w tabeli:*

k	0	1	2	3	4	5
γ_k^1	3	0.3	0.22	0.1	0.04	0.03
γ_k^2	3	1.3	0.22	0.1	0.04	0.03
γ_k^3	3	0.3	0.22	-2.1	0.04	0.03
γ_k^4	3	0.3	0.22	-1.5	0.04	1.3

oraz $\gamma_k^i = 0$ dla $k > 5$ (reprezentują relacje pomiędzy elementami w szeregach czasowych $\{x_t^i\}_{t \in \mathbb{N}}$, $i = 1, 2, 3, 4$ odpowiednio). Wyznamy funkcje gęstości spektralnej oraz narysujemy wykresy funkcji gęstości spektralnej dla częstotliwości $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Ponieważ $\omega \in [-\pi, \pi]$, to $\nu = \frac{\omega}{2\pi} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Analizując $\gamma_k^1, k \geq 0$ widzimy, że elementy szeregu $\{x_t^1\}_{t \in \mathbb{N}}$ są praktycznie niezależne (współczynniki korelacji są bliskie zeru). Dla szeregu $\{x_t^2\}_{t \in \mathbb{N}}$ elementy odległe o jedną chwilę czasową są ze sobą skorelowane, dla szeregu $\{x_t^3\}_{t \in \mathbb{N}}$ elementy odległe o 3 momenty są ze sobą skorelowane, natomiast dla szeregu $\{x_t^4\}_{t \in \mathbb{N}}$ elementy z przesunięciami czasowymi 3 i 5 są ze sobą skorelowane. Dla $i = 1, 2, 3, 4$ funkcje gęstości spektralnej tych szeregów są dane wzorem

$$f_i(\omega) = \frac{3 + 2\phi_i(\omega)}{2\pi},$$

gdzie

$$\phi_1(\omega) = 0.3 \cos \omega + 0.22 \cos 2\omega + 0.1 \cos 3\omega + 0.04 \cos 4\omega + 0.03 \cos 5\omega,$$

$$\phi_2(\omega) = 1.3 \cos \omega + 0.22 \cos 2\omega + 0.1 \cos 3\omega + 0.04 \cos 4\omega + 0.03 \cos 5\omega,$$

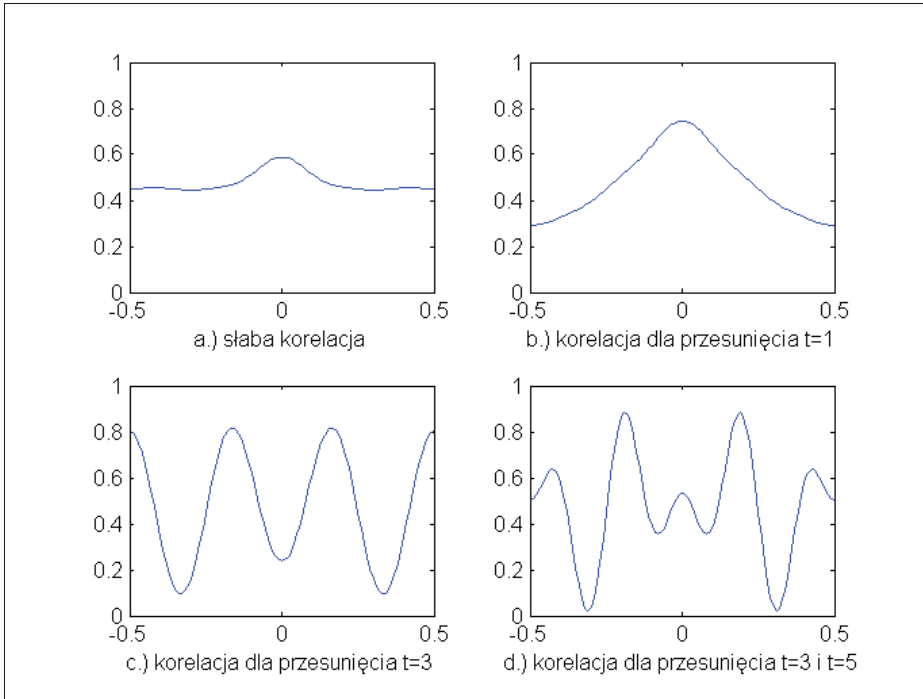
$$\phi_3(\omega) = 0.3 \cos \omega + 0.22 \cos 2\omega - 2.1 \cos 3\omega + 0.04 \cos 4\omega + 0.03 \cos 5\omega,$$

$$\phi_4(\omega) = 0.3 \cos \omega + 0.22 \cos 2\omega - 1.5 \cos 3\omega + 0.04 \cos 4\omega + 1.3 \cos 5\omega$$

dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. Wykresy poszczególnych funkcji gęstości spektralnej $\tilde{f}_i(\nu)$ dla częstotliwości $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (pamiętamy, że $\omega = 2\pi\nu$), gdzie

$$\tilde{f}_i(\nu) = f_i(2\pi\nu)$$

dla $i = 1, 2, 3, 4$ są przedstawione na rysunku 4.3.



Rysunek 4.3: Funkcje gęstości spektralnej.

Obserwując wykresy wartości funkcji gęstości spektralnej $\tilde{f}_i(\nu)$, $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ widzimy, że dla pewnych częstotliwości ν funkcja $\tilde{f}_i(\nu)$ osiąga wartości ekstremalne (następuje wyraźny wzrost lub spadek), na który wpływ wywiera harmoniczna składowa z prędkością kątową

$\omega = 2\pi\nu$. Zestaw punktów, dla których funkcja gęstości spektralnej osiąga wartości ekstremalne wyznacza pewien zbiór harmoniczných składowych, które określają okresowe wahania (oraz związki pomiędzy elementami) w analizowanym szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Jeżeli istnieje składowa z częstotliwością ν^* dla której funkcja gęstości spektralnej osiąga ekstremum, to istnieją również składowe z częstotliwościami $\frac{\nu^*}{2}, \frac{\nu^*}{3}, \dots$ (tzn, np. miesięczna częstotliwość implikuje efekty skoków w okresach dwumiesięcznych, trzymiesięcznych itd). Tym sposobem występuje tzw. efekt "echa" dla niższych częstotliwości.

Im większe jest przesunięcie czasowe $\tau > 0$, dla którego elementy szeregu czasowego są skorelowane (patrz rys. 4.3b-4.3d), tym z mniejszą częstotliwością występują wahania funkcji gęstości spektralnej, co bezpośrednio implikuje, że okres wahań jest większy. W przypadku, gdy elementy szeregu są słabo skorelowane, to na wykresie 4.3a widzimy nieduże wahania funkcji gęstości spektralnej.

Przykład 4.5 Niech $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$. Wyznamy gęstość spektralną dla szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (patrz przykład 4.1)

$$x_t = 3 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}.$$

Wartość oczekiwana elementów szeregu $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi

$$Ex_t = 3 \quad \text{dla } t \in \mathbb{N},$$

natomiast funkcje autokowariancji i autokorelacji są równe odpowiednio

$$\gamma_\tau = \begin{cases} 2, & \text{dla } \tau = 0, \\ 1, & \text{dla } \tau = 1, \\ 0, & \text{dla } \tau \geq 2, \end{cases} \quad i \quad r_\tau = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0.5, & \text{dla } \tau = 1, \\ 0, & \text{dla } \tau \geq 2. \end{cases}$$

Ze wzoru (4.24) wynika, że funkcja gęstości spektralnej jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} [1 + \cos \omega], \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Przykład 4.6 Niech $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{Z}} Ex_t = 0$$

oraz

$$\text{cov}(x_i, x_j) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Wyznamy funkcję spektralną i funkcję gęstości spektralnej.

W rozważanym przypadku szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest słabo stacjonarny oraz funkcja autokowariancji jest równa $\gamma_\tau = \text{cov}(x_t, x_{t+\tau})$ dla $\tau, t \in \mathbb{Z}$. Z twierdzenia Herglotza otrzymujemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0, & \text{dla } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Korzystając z własności

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0, & \text{dla } \tau \neq 0, \end{cases}$$

stwierdzamy, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} \frac{\sigma^2}{2\pi} d\omega,$$

więc funkcja gęstości spektralnej jest stała oraz

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Wobec powyższego funkcja spektralna jest dana wzorem

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\omega) d\omega = \frac{\sigma^2}{2\pi} (\lambda + \pi), \quad \text{dla } \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Rozdział 5

Modele stacjonarnych szeregów czasowych

Poniżej przedstawione zostaną klasyczne modele stacjonarnych szeregów czasowych: modele autoregresji AR, ruchomej średniej MA oraz autoregresji i ruchomej średniej ARMA. Wyżej wymienione modele mają liniową strukturę ze względu na elementy szeregu opóźnione w czasie oraz zaburzenia zewnętrzne (patrz np. [1], [6], [25], [52], [59]). Omówione zostaną problemy stacjonarności i odwracalności dla tych modeli. Identyfikacja parametryczna zostanie przeprowadzona w oparciu o metodę momentów tylko dla szeregów czasowych $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych ($\varepsilon_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dla $t \in \mathbb{Z}$). Uzyskane wyniki łatwo można rozszerzyć dla szeregów czasowych o wartościach w zbiorze liczb zespolonych. Na końcu rozdziału przedstawiony zostanie problem jednoznaczności modelowania stacjonarnych szeregów czasowych.

5.1 Zbieżność szeregów czasowych

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, natomiast $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$ (w literaturze przedmiotu można spotkać również oznaczenie $\varepsilon_t \sim iid. N(0, \sigma^2)$ – independently and identically distributed with $N(0, \sigma^2)$).

Wobec powyższego wartość oczekiwana i kowariancja elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są równe odpowiednio

$$E\epsilon_t = 0, \quad (5.1)$$

$$\text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t \pm \tau}) E\epsilon_t \epsilon_{t \pm \tau} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0, & \text{dla } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Tak zdefiniowany ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest nazywany białym szumem.

Symbolem $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich zmiennych losowych $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o drugim momencie skończonym ($E\xi^2 < \infty$). Przestrzeń $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z iloczynem skalarnym

$$\langle \xi, \lambda \rangle = E\xi\lambda, \quad \xi, \lambda \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

i normą

$$\|\xi\|_{L^2} = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{E\xi^2}, \quad \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

jest przestrzenią Hilberta. Zatem, przestrzeń $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_{L^2}$.

Poniżej będziemy rozważali szeregi czasowe $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci

$$\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j}, \quad (5.3)$$

gdzie $\alpha_j \in \mathbb{R}$ dla $j \in \mathbb{N}_0$, natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ oznacza ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$.

Definicja 5.1 Niech X będzie przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|$, natomiast $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ - ciągiem elementów przestrzeni X (tzn. $x_j \in X$, $j \in \mathbb{N}_0$). Mówimy, że szereg $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ jest zbieżny, jeżeli istnieje takie $x \in X$, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=0}^n x_j \right\| = 0.$$

Definicja 5.2 (Warunek Cauchy'ego) Niech X będzie przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|$, natomiast $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ - ciągiem elementów przestrzeni X (tzn. $x_j \in X$, $j \in \mathbb{N}_0$). Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek Cauchy'ego:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\| \sum_{j=m}^n x_j \right\| = 0.$$

Poniżej przyjmujemy $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$. Dla przestrzeni $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ warunki zbieżności zawarte są w lematach poniżej.

Lemat 5.1 Niech $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$, gdzie $0 < \sigma < \infty$. Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ spełnia warunek

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty, \quad (5.4)$$

to $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\| \leq \sigma \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|. \quad (5.5)$$

Dowód. Jeżeli $m, n \in \mathbb{N}_0$ i $m \leq n$, to

$$\left\| \sum_{j=m}^n \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\| \leq \sum_{j=m}^n |\alpha_j| \|\epsilon_{t-j}\| \leq \mu \sum_{j=m}^n |\alpha_j|,$$

gdzie

$$\mu = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|\epsilon_t\| = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \sqrt{E \epsilon_t^2} = \sigma < \infty.$$

Z warunku (5.4) wynika, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\| \sum_{j=m}^n \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\| = 0.$$

Ponieważ jest spełniony warunek Cauchy'ego, to szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j}$ jest zbieżny

oraz $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Poza tym

$$\left\| \sum_{j=m}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=m}^n \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma \sum_{j=0}^n |\alpha_j| = \sigma \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|.$$

■

Warunek zbieżności dla szeregu czasowego postaci (5.3) w nieco słabszej formie przedstawia następujący lemat.

Lemat 5.2 *Niech $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$, gdzie $0 < \sigma < \infty$. Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ spełnia warunek*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty, \quad (5.6)$$

to $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\| \leq \sigma \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2}. \quad (5.7)$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie lematu 5.1 sprawdzimy spełnienie warunku Cauchy'ego. Niech $m, n \in \mathbb{N}_0$ i $m \leq n$. Z niezależności zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=m}^n \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\|^2 &= \left\langle \sum_{j=m}^n \alpha_j \epsilon_{t-j}, \sum_{j=m}^n \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\rangle \\ &= \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n \alpha_i \alpha_j \langle \epsilon_{t-i}, \epsilon_{t-j} \rangle = \sigma^2 \sum_{j=m}^n \alpha_j^2. \end{aligned}$$

Wobec powyższego warunek Cauchy'ego

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left\| \sum_{j=m}^n \alpha_j \epsilon_{t-j} \right\| = 0$$

jest równoważny warunkowi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \sqrt{\sum_{j=m}^n \alpha_j^2} = 0$$

oraz warunkowi (5.6). ■

5.2 Modele autoregresji AR(p)

Modele autoregresji rzędu $p \in \mathbb{N}$ (w literaturze przedmiotu określone jako $AR(p)$) są to modele klasycznej regresji liniowej, gdzie jako zmienne niezależne (objaśniające) występują elementy szeregu opóźnione w czasie. Dla modelu autoregresji $AR(\infty)$ elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (5.8)$$

gdzie $t \in \mathbb{Z}$ oraz współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ określają parametry modelu, natomiast $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$ (patrz np. [1], [6], [25], [52], [59]). W większości przypadków wraz ze wzrostem przesunięcia czasowego $\tau \in \mathbb{N}_0$ słabnie korelacja pomiędzy elementami ε_t i $\varepsilon_{t+\tau}$ (im elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są bardziej oddalone czasowo od siebie, tym związki pomiędzy tymi elementami są słabsze), a od pewnego momentu $\tau = p + 1$ wartości współczynnika korelacji są bliskie zera. Przyjmujemy we wzorze (5.8) $\alpha_j = 0$ dla $j > p$, otrzymamy model $AR(p)$ autoregresji rzędu $p \in \mathbb{N}$ (*AutoRegressive process of order p*) zdefiniowany równaniem

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t. \quad (5.9)$$

Aby dokładniej zrozumieć zachowanie, własności i sposób identyfikacji modeli $AR(p)$, $p \in \mathbb{N}$ przeanalizujemy najpierw własności dynamiczne najprostszych modeli tej klasy.

5.2.1 Model autoregresji rzędu pierwszego

Najprostszym modelem autoregresji liniowej jest $AR(1)$ (wszystkie współczynniki oprócz pierwszego są równe zero). Elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \alpha \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t, \quad (5.10)$$

gdzie $|\alpha| < 1$ (zostanie wyjaśnione poniżej) oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Korzystając ze wzoru (5.10) dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \alpha [\alpha \varepsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1}] + \epsilon_t = \alpha^2 \varepsilon_{t-2} + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \alpha^2 [\alpha \varepsilon_{t-3} + \epsilon_{t-2}] + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t = \alpha^3 \varepsilon_{t-3} + \alpha^2 \epsilon_{t-2} + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t = \dots \end{aligned}$$

Ostatecznie elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ określone równaniem (5.10) możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej niezależnych zmiennych losowych $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \epsilon_{t-j}. \quad (5.11)$$

Z równania (5.11) wynika, że szereg postaci (5.10) możemy przedstawić jako proces ruchomej średniej rzędu nieskończoność. Jeżeli $|\alpha| < 1$, to

$$1 + |\alpha| + |\alpha|^2 + |\alpha|^3 + \dots = \frac{1}{1 - |\alpha|}.$$

Zatem z lematu 5.1 wynika, że szereg czasowy postaci (5.11) jest zbieżny w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ze wzorów (5.11) oraz (5.1) wynika, że wartość oczekiwana elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest równa

$$E\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j E\epsilon_{t-j} = 0. \quad (5.12)$$

Korzystając ze wzoru (5.2) otrzymujemy, że wariancja elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ spełnia równość

$$\gamma_0 = E\varepsilon_t^2 = E \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \epsilon_{t-j} \right]^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j}. \quad (5.13)$$

Ponieważ $|\alpha| < 1$, to

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}. \quad (5.14)$$

Dla dowolnego przesunięcia czasowego $\tau \in \mathbb{N}_0$ kowariancja elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest dana wzorem

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-\tau}) = E \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j} \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-\tau-j} \right] \\ &= E \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+\tau} \varepsilon_{t-k} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j+\tau} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \alpha^\tau \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} = \frac{\sigma^2 \alpha^\tau}{1 - \alpha^2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

natomiast współczynnik korelacji jest równy

$$r_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \alpha^\tau. \quad (5.16)$$

Wniosek 5.1 Ze wzoru (5.14) wynika, że jeżeli wielkość $|\alpha|$ jest bliska jedności, to wariancja elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest o wiele większa niż wariancja zmiennych losowych ε_t , $t \in \mathbb{Z}$. Zatem, jeżeli sąsiednie elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są mocno skorelowane ($|r_1| = |\alpha| \rightarrow 1$), to niewielkie wahania w szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ powodują duże wahania szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Wniosek 5.2 Stopień zależności (współczynnik korelacji, patrz wzór (5.16)) pomiędzy elementami szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ maleje wykładniczo wraz ze wzrostem przesunięcia czasowego $\tau \in \mathbb{N}_0$.

Warunek stacjonarności. Pamiętamy, że szereg czasowy jest stacjonarny słabo, jeżeli jest skończony drugi moment, wartość oczekiwana jest stała oraz kowariancja zależy tylko od przesunięcia $\tau \in \mathbb{N}_0$ (patrz wzory (5.12) i (5.15)). Zatem zbieżność szeregu (5.11) wymaga, aby był spełniony warunek $|\alpha| < 1$.

Warunek stacjonarności również możemy przedstawić w postaci: moduł pierwiastka równania charakterystycznego

$$1 - \alpha z = 0$$

powinien być większy od jedności.

Gęstość spektralna. Jeżeli elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone za pomocą równania (5.10) oraz mają wartości w zbiorze liczb rzeczywistych, to ze wzorów (4.21) i (5.15) wynika, że funkcja gęstości spektralnej jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos n\omega \right], \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos n\omega &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n (e^{in\omega} + e^{-in\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{i\omega})^n \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-i\omega})^n - 1 = \frac{1}{1 - \alpha e^{i\omega}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-i\omega}} - 1 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega}, \end{aligned}$$

to

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2}{|1 - \alpha e^{-i\omega}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega)}, \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (5.17)$$

(patrz np. [1], [6], [51]).

Identyfikacja modelu $AR(1)$. Identyfikację modelu (5.10) przeprowadzamy na podstawie realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. W tym celu wykorzystujemy metodę momentów (MM) oraz własności (5.14) i (5.16). Zakładamy, że wartość średnia ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest równa zero. W przypadku, gdy wartość średnia

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t$$

jest różna od zera ($\bar{\varepsilon} \neq 0$), to z ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ wydzielamy stałą $\bar{\varepsilon}$ tym samym otrzymujemy ciąg $\{\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}\}_{1 \leq t \leq N}$, który oscyluje dookoła zera.

Algorytm identyfikacji $AR(1)$.

1. Dla realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ wyznaczamy oceny estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ , $\tau \in \{0, 1\}$ za pomocą wzoru

$$\hat{\gamma}_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\gamma}_\tau(N) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} \varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau}. \quad (5.18)$$

2. Ocena parametru α ze wzoru (5.16) jest równa

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0}. \quad (5.19)$$

3. Jeżeli jest spełniony warunek stacjonarności ($|\alpha| < 1$), to ze wzoru (5.14) ocena parametru σ^2 (wariancja niezależnych zmiennych losowych ϵ_t) jest równa

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 (1 - \hat{\alpha}^2). \quad (5.20)$$

4. Wyznaczamy ciąg reszt $\epsilon_t = \varepsilon_t - \hat{\alpha}\varepsilon_{t-1}$ dla $2 \leq t \leq N$ oraz dla re-alizacji $\{\epsilon_t\}_{2 \leq t \leq N}$ przeprowadzamy test Kołmogorowa-Smirnowa (badanie normalności rozkładu elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$).

Rozkład łączny m elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ konstruujemy za pomocą rozkładu normalnego, gdzie wektor wartości oczekiwanych jest wektorem zerowym, natomiast autokowariancji jest dana wzorem (4.11). Wartości estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ dla $\tau = 0, 1$ wyznaczamy ze wzoru (5.18), natomiast dla $2 \leq \tau \leq m - 1$ wyznaczamy za pomocą wzoru (5.15).

Powyżej została przeprowadzona identyfikacja modelu $AR(1)$ w oparciu o metodę momentów (bezpośrednio zostały wykorzystane własności (5.14) i (5.16)). Nie mniej jednak identyfikację modelu (5.10) można również przeprowadzić za pomocą metody najmniejszych kwadratów (MNK) lub metody największej wiarygodności (MNW).

Identyfikacja parametryczna modelu (5.10) za pomocą metody najmniejszych kwadratów polega na rozwiązaniu zadania

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{t=2}^N (\varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1})^2. \quad (5.21)$$

Rozwiązując zadanie (5.21) otrzymujemy, że najlepszym estymatorem (w sensie średniokwadratowym) nieznanego parametru α jest

$$\hat{\alpha}(N) = \frac{\sum_{t=2}^N \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^N \varepsilon_{t-1}^2} = \frac{\hat{\gamma}_1}{\frac{N}{N-1} \hat{\gamma}_0 - \frac{\varepsilon_N^2}{N-1}}. \quad (5.22)$$

Stąd dla $N \rightarrow \infty$ mamy $\hat{\alpha}(N) \rightarrow \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0}$. Jako estymator wariancji zaburzeń zewnętrznych modelu (5.10) wybieramy

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2(N) &= \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N (\varepsilon_t - \hat{\alpha}\varepsilon_{t-1})^2 \\ &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{t=2}^N \varepsilon_t^2 + \hat{\alpha}^2 \sum_{t=2}^N \varepsilon_{t-1}^2 - 2\hat{\alpha} \sum_{t=2}^N \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \right) \\ &= \frac{1}{N-1} (N\hat{\gamma}_0 - \varepsilon_1^2 + \hat{\alpha}^2 (N\hat{\gamma}_0 - \varepsilon_N^2)) - 2\hat{\alpha}\hat{\gamma}_1. \quad (5.23)\end{aligned}$$

Widzimy, że dla $N \rightarrow \infty$ otrzymujemy $\hat{\sigma}^2(N) \rightarrow (1 + \hat{\alpha}^2) \hat{\gamma}_0 - 2\hat{\alpha}\hat{\gamma}_1$.

Poniżej przeprowadzimy identyfikację parametryczną za pomocą metody największej wiarygodności. Niech $\mathcal{F}_j = \sigma\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_j\}$, $j \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tzn. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$ dla $n \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$. $\mathcal{F}_j$ oznacza najmniejsze σ -ciało, którego elementy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_j$ są mierzalne względem $\mathcal{F}_j$. Ze wzoru (5.10) wynika, że dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ warunkowy rozkład $p(\varepsilon_{j+1} | \mathcal{F}_j)$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(\alpha\varepsilon_t, \sigma^2)$, zatem

$$p(\varepsilon_{j+1} | \mathcal{F}_j) = \gamma(\varepsilon_{j+1}, \alpha\varepsilon_t, \sigma)$$

gdzie

$$\gamma(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Dla realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ tworzymy funkcję wiarygodności zdefiniowaną jako iloczyn funkcji gęstości zmiennych losowych $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$

$$\begin{aligned}L(\alpha, \sigma) &= p(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_1) = p(\varepsilon_N | \mathcal{F}_{N-1}) \cdot \dots \cdot p(\varepsilon_2 | \mathcal{F}_1) \\ &= \prod_{t=2}^N \gamma(\varepsilon_t, \alpha\varepsilon_{t-1}, \sigma),\end{aligned}$$

Aby wyznaczyć parametry α, σ za pomocą metody największej wiarygodności należy rozwiązać zadanie postaci

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}, \sigma > 0} L(\alpha, \sigma). \quad (5.24)$$

Logarytm naturalny z funkcji wiarygodności wynosi

$$\ln [L(\alpha, \sigma)] = -\frac{N-1}{2} \ln(2\pi) - (N-1) \ln \sigma - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^N \frac{(\varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1})^2}{\sigma^2}.$$

Ponieważ logarytm naturalny jest funkcją rosnącą, to zadanie (5.24) możemy sprowadzić do postaci

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}, \sigma > 0} f(\alpha, \sigma), \quad (5.25)$$

gdzie

$$f(\alpha, \sigma) = (N-1) \ln \sigma + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^N \frac{(\varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1})^2}{\sigma^2}. \quad (5.26)$$

Przyrównując pochodne cząstkowe do zera, otrzymujemy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji $f(\alpha, \sigma)$ postaci

$$\begin{cases} \sum_{t=2}^N \frac{(\varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1}) \varepsilon_{t-1}}{\sigma^2} = 0, \\ \frac{N-1}{\sigma} - \sum_{t=2}^N \frac{(\varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1})^2}{\sigma^3} = 0. \end{cases}$$

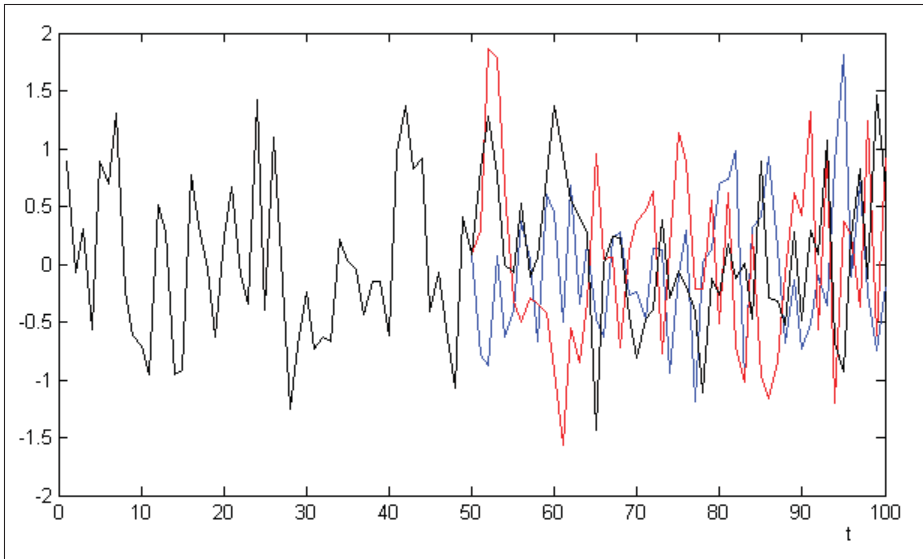
Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sum_{t=2}^N \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^N \varepsilon_{t-1}^2}, \\ \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N (\varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1})^2. \end{cases} \quad (5.27)$$

Macierz drugich pochodnych funkcji $f(\alpha, \sigma)$ w punkcie podejrzanym o ekstremum (określonym za pomocą układu równań (5.27)) jest dodatnio określona.

Wniosek 5.3 *Widzimy, że estymatory uzyskane za pomocą MNK i MNW są identyczne. Ze wzorów (5.22) - (5.23) dla $N \rightarrow \infty$ otrzymujemy $\hat{\alpha}(N) \rightarrow \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0}$, natomiast $\hat{\sigma}^2(N) \rightarrow (1 + \hat{\alpha}^2) \hat{\gamma}_0 - 2\hat{\alpha}\hat{\gamma}_1$, co powoduje, że estymatory uzyskane za pomocą metody najmniejszych kwadratów i metody największej wiarygodności są zbieżne do estymatorów uzyskanych za pomocą metody momentów.*

Przykład 5.1 Dana jest realizacja szeregu o wartościach 0.89, -0.07, 0.3, -0.56, 0.89, 0.69, 1.31, -0.23, -0.62, -0.71, -0.96, 0.51, 0.28, -0.95, -0.92, 0.77, 0.33, -0.04, -0.63, 0.24, 0.67, -0.1, -0.35, 1.42, -0.39, 1.1, 0.04, -1.25, -0.71, -0.24, -0.73, -0.63, -0.67, 0.22, 0.03, -0.04, -0.44, -0.15, -0.15, -0.62, 0.97, 1.37, 0.82, 0.91, -0.41, -0.07, -0.55, -1.07, 0.41, 0.09. Zakładając, że dany ciąg $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ jest realizacją szeregu $AR(1)$ (typu (5.10)) oszacujemy wartości parametrów α i σ^2 . Użyjemy do tego metody momentów. Dodatkowo przedstawione zostaną symulacje trzech realizacji procesu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$. Wartość średnia elementów ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ jest równa zero ($\hat{\mu} = 0$). Korzystając ze wzoru (5.18) dla przesunięć czasowych $\tau \in \{0, 1\}$ otrzymujemy $\hat{\gamma}_0 = 0.4709$ oraz $\hat{\gamma}_1 = 0.0958$. Zatem wartość estymatora parametru α jest równa $\hat{\alpha} = 0.2033$. Ponieważ $|\hat{\alpha}| < 1$, to warunek stacjonarności jest spełniony. Ze wzoru (5.20) otrzymujemy, że dla ciągu $\{\epsilon_t\}_{2 \leq t \leq 50}$ postaci $\epsilon_t = \varepsilon_t - \hat{\alpha}\varepsilon_{t-1}$ wartość estymatora wariancji zaburzeń zewnętrznych σ^2 w modelu (5.10) jest równa 0.4515, natomiast $\hat{\sigma} = 0.6719$. Na poziomie istotności 0.05 z testu Kołmogorowa–Smirnowa wynika, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$.



Rysunek 5.1: Symulacje szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$.

Ostatecznie szereg reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = 0.2033\varepsilon_{t-1} + \epsilon_t,$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0; 0.4515)$. Rysunek 5.1 przedstawia realizacje szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ oraz trzy symulacje szeregu $\{\varepsilon_t\}_{51 \leq t \leq 100}$.

5.2.2 Model autoregresji rzędu drugiego

Dla modelu autoregresji rzędu drugiego AR(2) (*AutoRegressive process of order 2*) elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone za pomocą równania regresji liniowej

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z}, \quad (5.28)$$

gdzie $\alpha_2 \neq 0$ oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$.

Podstawiając do prawej strony wzoru (5.28) zamiast ε_{t-1} i ε_{t-2} wielkości określone za pomocą równania (5.28) dla chwil $t-1$ i $t-2$ oraz powtarzając tę czynność wielokrotnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \alpha_1 (\alpha_1 \varepsilon_{t-2} + \alpha_2 \varepsilon_{t-3} + \epsilon_{t-1}) + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \epsilon_t \\ &= \epsilon_t + \alpha_1 \epsilon_{t-1} + (\alpha_1^2 + \alpha_2) \varepsilon_{t-2} + \alpha_1 \alpha_2 \varepsilon_{t-3} = \dots \end{aligned}$$

Widzimy, że dla każdego $t \in \mathbb{Z}$ zmienna ε_t jest kombinacją liniową zmiennych losowych $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$. Zatem model AR(2) (podobnie jak model AR(1)) możemy przedstawić w postaci ruchomej średniej rzędu ∞ (MA(∞))

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j \epsilon_{t-j} \text{ dla } t \in \mathbb{Z}, \quad (5.29)$$

gdzie $\kappa_0 = 1$, $\kappa_1 = \alpha_1$, natomiast $\kappa_j = \alpha_1 \kappa_{j-1} + \alpha_2 \kappa_{j-2}$ dla $j \geq 2$. Ze wzorów (5.29) oraz (5.1) wynika, że wartość oczekiwana elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest równa zero

$$E\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j E\epsilon_{t-j} = 0.$$

Mnożąc obustronnie równość (5.28) poprzez ε_{t-1} i ε_{t-2} , a następnie stosując obustronnie operator wartości oczekiwanej, otrzymujemy

$$\begin{cases} E\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} = \alpha_1 E\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \alpha_2 E\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1} + E\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}, \\ E\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} = \alpha_1 E\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \alpha_2 E\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-2} + E\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}. \end{cases}$$

Ze wzoru (5.29) wynika, że $E\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} = 0$ oraz $E\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} = 0$, zatem otrzymujemy układ równań postaci

$$\begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1, \\ \gamma_2 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0, \end{cases} \quad (5.30)$$

gdzie $\gamma_\tau = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-\tau}) = E\varepsilon_t\varepsilon_{t-\tau}$ dla przesunięć czasowych $\tau \in \mathbb{N}_0$. Dzieląc obustronnie równania (5.30) przez wariancję γ_0 , otrzymujemy

$$\begin{cases} r_1 = \alpha_1 + \alpha_2 r_1, \\ r_2 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2. \end{cases} \quad (5.31)$$

Rozwiązując układ równań (5.31), otrzymujemy

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}, \\ \alpha_2 = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Zależności kowariancji γ_1 i γ_2 od parametrów α_1 i α_2 przedstawia układ równań poniżej:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1\gamma_0}{1-\alpha_2}, \\ \gamma_2 = \alpha_2\gamma_0 + \frac{\alpha_1^2\gamma_0}{1-\alpha_2}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Wniosek 5.4 *W podobny sposób otrzymujemy współczynniki autokowariancji γ_τ dla $\tau > 2$. Najpierw obustronnie mnożymy równanie (5.28) poprzez $\varepsilon_{t-\tau}$ dla $\tau > 2$, a następnie stosujemy operator wartości oczekiwanej. Ostatecznie otrzymujemy równanie funkcji autokowariancji*

$$\gamma_\tau = \alpha_1\gamma_{\tau-1} + \alpha_2\gamma_{\tau-2} \quad \text{dla } \tau > 2. \quad (5.34)$$

Dzieląc obustronnie równanie (5.34) przez wariancję γ_0 otrzymujemy równanie funkcji autokorelacji

$$r_\tau = \alpha_1 r_{\tau-1} + \alpha_2 r_{\tau-2} \quad \text{dla } \tau > 2. \quad (5.35)$$

Wzory rekurencyjne (5.34) i (5.35) wykorzystujemy do wyznaczenia wartości funkcji autokowariancji i autokorelacji przy przesunięciach czasowych $\tau > 2$ dla wartości początkowych r_1 i r_2 lub wartości γ_1 i γ_2 odpowiednio.

Aby wyznaczyć zależność pomiędzy wariancją elementów szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ a wariancją zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ mnożymy obustronnie wyrażenie (5.28) przez ε_t . Otrzymujemy wtedy równanie

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \epsilon_t [\alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \epsilon_t].$$

Następnie obustronnie stosujemy operator wartości oczekiwanej oraz korzystając z niezależności zaburzeń zewnętrznych (patrz własność (5.2)), otrzymujemy równanie

$$E\varepsilon_t^2 = \alpha_1 E\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 E\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + E\epsilon_t \epsilon_t,$$

które jest równoważne równaniu

$$\gamma_0 = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \sigma^2. \quad (5.36)$$

Wariancja elementów szeregu zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ wynosi

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 = \gamma_0 (1 - \alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2) \quad (5.37)$$

lub (patrz (5.33))

$$\sigma^2 = \gamma_0 \frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2} \left((1 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2 \right). \quad (5.38)$$

Poniżej wyznaczmy warunek stacjonarności dla modelu AR(2). W tym celu zdefiniujemy operator przesunięcia

$$F_-^k \varepsilon_t = \varepsilon_{t-k} \text{ dla } k \in \mathbb{N}_0. \quad (5.39)$$

Równanie (5.28) możemy przedstawić w postaci

$$(1 - \alpha_1 F_- - \alpha_2 F_-^2) \varepsilon_t = \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z},$$

natomiast równanie (5.29) w postaci

$$\varepsilon_t = (1 + \varkappa_1 F_- + \varkappa_2 F_-^2 + \varkappa_3 F_-^3 + \dots) \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z},$$

gdzie $\varkappa_0 = 1$, $\varkappa_1 = \alpha_1$, natomiast $\varkappa_j = \alpha_1 \varkappa_{j-1} + \alpha_2 \varkappa_{j-2}$ dla $j \geq 2$. Wobec powyższego

$$(1 - \alpha_1 F_- - \alpha_2 F_-^2) (1 + \varkappa_1 F_- + \varkappa_2 F_-^2 + \varkappa_3 F_-^3 + \dots) = 1. \quad (5.40)$$

Dla szeregów postaci (5.28) wartość oczekiwana jest równa zero oraz kowariancja zależy tylko od przesunięcia $\tau \in \mathbb{N}_0$ (patrz wzory (5.30) i (5.34)). Zatem, żeby spełnić warunek stacjonarności elementy szeregu AR(2) muszą mieć skończone drugie momenty. Ze wzoru (5.40) wynika, że szereg postaci (5.29) jest zbieżny jeżeli jest spełniony następujący warunek.

Warunek stacjonarności. Pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 = 0$$

powinny być poza kołem o promieniu jeden. Warunek stacjonarności jest spełniony, gdy

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 < 1, \\ \alpha_1 - \alpha_2 < 1, \\ -1 < \alpha_2 < 1, \end{cases} \quad (5.41)$$

Gęstość spektralna. Gęstość spektralna dla modelu AR(2) jest dana wzorem

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi |1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \alpha_2 e^{-2i\omega}|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi (1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1(1 - \alpha_2)\cos(\omega) - 2\alpha_2\cos(2\omega))}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

gdzie $\omega \in [-\pi, \pi]$ (patrz np. [1], [6], [51]).

Identyfikacja modelu AR(2). Zakładamy, że wartość średnia elementów ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest równa zero.

Algorytm identyfikacji AR(2).

1. Dla realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ korzystając ze wzoru (5.18) wyznaczamy oceny estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ , $\tau \in \{0, 1, 2\}$.

2. Wyznaczamy oceny parametrów α_1, α_2 rozwiązując układ równań liniowych (5.30) lub np. dla $\tau \in \{1, 2\}$ wyznaczamy oceny estymatorów funkcji autokorelacji

$$\hat{r}_\tau = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0} \quad (5.43)$$

oraz korzystamy ze wzoru (5.32).

3. Jeżeli warunek stacjonarności jest spełniony, to ocenę parametru σ^2 (wariancję zaburzeń zewnętrznych w modelu (5.28)) szacujemy za pomocą (5.38).

4. Wyznaczamy ciąg reszt $\epsilon_t = \varepsilon_t - \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1} - \hat{\alpha}_2 \varepsilon_{t-2}$ dla $3 \leq t \leq N$ oraz dla realizacji $\{\epsilon_t\}_{3 \leq t \leq N}$ przeprowadzamy test Kołmogorowa–Smirnowa (badanie normalności rozkładu elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$).

Do konstrukcji rozkładów łącznych elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (dokładniej do oszacowania macierzy autokowariancji lub autokorelacji postaci (4.11) – (4.12)) wartości estymatorów $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ wyznaczamy za pomocą (5.18), natomiast wartości estymatorów r_1, r_2 ze wzoru (5.43). Dla przesunięć $\tau \geq 3$ wartości funkcji autokowariancji γ_τ i autokorelacji r_τ wyznaczamy ze wzorów (5.34) i (5.35) odpowiednio.

Przykład 5.2 Dany jest ciąg o wartościach 0.52, 0.36, -0.81, -1.59, -0.62, -0.26, 0.24, -0.24, -0.4, 0.43, -0.43, 1.21, 1.55, 0.2, 0.47, 0.69, -0.22, -0.8, -0.07, -1.03, -1.68, -0.48, 0.26, 0.8, 0.72, -0.97, -0.41, -0.46, -0.35, 1.04, 1.3, 1.74, -0.59, -0.94, -0.17, 0.57, 1.28, 0.29, 0.51, -1.66. Na podstawie realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 40}$ dokonamy identyfikacji modelu autoregresji rzędu drugiego.

Wartość średnia elementów ciągu $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 40}$ wynosi 0. Ze wzoru (5.18) wartości estymatorów funkcji autokowariancji dla przesunięć czasowych $\tau \in \{0, 1, 2\}$ są równe

$$\hat{\gamma}_0 = 0.7221, \quad \hat{\gamma}_1 = 0.2737, \quad \hat{\gamma}_2 = -0.0366,$$

natomiast wartości estymatorów funkcji autokorelacji dla przesunięć $\tau \in \{1, 2\}$ wynoszą

$$r_1 = 0.379, \quad r_2 = -0.0507.$$

Ze wzoru (5.32) otrzymujemy oceny parametrów

$$\hat{a}_1 = 0.465 \quad i \quad \hat{a}_2 = -0.2269.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 - 0.465z + 0.2269z^2 = 0$$

są równe $z_1 = 1.0245 + 1.8322i$ oraz $z_2 = 1.0245 - 1.8322i$. Widzimy, że $|z_1| = |z_2| = 4.4065 > 1$, zatem warunek stacjonarności jest spełniony.

Ze wzoru (5.37) otrzymujemy $\hat{\sigma}^2 \approx 0.5865$, stąd $\hat{\sigma} \approx 0.7658$. Dla ciągu $\{\epsilon_t\}_{3 \leq t \leq 40}$ postaci

$$\epsilon_t = \varepsilon_t - \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1} - \hat{\alpha}_2 \varepsilon_{t-2}$$

na poziomie istotności 0.01 z testu Kołmogorowa–Smirnowa wynika, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Ostatecznie szereg $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = 0.465\varepsilon_{t-1} - 0.2269\varepsilon_{t-2} + \epsilon_t,$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0; 0.5865)$.

5.2.3 Model autoregresji rzędu p

W modelach autoregresji rzędu $AR(p)$, $1 \leq p < \infty$ elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone za pomocą równania regresji liniowej postaci

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p} + \epsilon_t \quad \text{dla } t \in \mathbb{Z}, \quad (5.44)$$

gdzie $\alpha_p \neq 0$ oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.

Podstawiając kolejno zamiast $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}$ wielkości określone za pomocą (5.44) oraz powtarzając tę czynność wielokrotnie widzimy, że ε_t zależy od zmiennych $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$, natomiast nie zależy od $\epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+2}, \dots$. Podobnie jak dla modeli $AR(1)$ i $AR(2)$ elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci $AR(p)$ możemy przedstawić za pomocą ruchomej średniej rzędu ∞ (jako model $MA(\infty)$)

lub w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_p \end{bmatrix} = \Gamma_p \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_p \end{bmatrix},$$

gdzie $\gamma_\tau = E\varepsilon_t\varepsilon_{t-\tau}$ dla $\tau \in \mathbb{N}_0$, natomiast macierz autokowariancji Γ_p jest określona wzorem (4.11). Jeżeli każde równanie układu (5.51) podzielimy obustronnie przez wariancję γ_0 , to otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} r_1 = \alpha_1 + \alpha_2 r_1 + \dots + \alpha_p r_{p-1}, \\ r_2 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p r_{p-2}, \\ \dots \\ r_p = \alpha_1 r_{p-1} + \alpha_2 r_{p-2} + \dots + \alpha_p. \end{cases} \quad (5.52)$$

Powyższy układ równań nazywamy układem Yule’a-Walkera oraz możemy go zapisać w postaci macierzowej

$$r_p = P_p \alpha, \quad (5.53)$$

gdzie

$$r_p = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_p \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_p \end{bmatrix},$$

natomiast macierz autokorelacji P_p jest określona wzorem (4.12).

Wniosek 5.5 *W podobny sposób otrzymujemy własności funkcji autokowariancji γ_τ i autokorelacji r_τ dla $\tau > p$. Mnożąc obustronnie równanie (5.44) poprzez $\varepsilon_{t-\tau}$, $\tau > p$ oraz stosując obustronnie operator wartości oczekiwanej otrzymamy równanie rekurencyjne funkcji autokowariancji γ_τ dla $\tau > p$ postaci*

$$\gamma_\tau = \alpha_1 \gamma_{\tau-1} + \alpha_2 \gamma_{\tau-2} + \dots + \alpha_p \gamma_{\tau-p}. \quad (5.54)$$

Dzieląc obustronnie powyższe wyrażenie przez γ_0 otrzymamy równanie rekurencyjne funkcji autokorelacji

$$r_\tau = \alpha_1 r_{\tau-1} + \alpha_2 r_{\tau-2} + \dots + \alpha_p r_{\tau-p} \quad (5.55)$$

dla $\tau > p$.

Ponizej określimy zależność pomiędzy wariancją elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ a wariancją zaburzeń zewnętrznych ciągu niezależnych zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Mnożąc obustronnie wyrażenie (5.44) przez ε_t otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \alpha_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} \dots + \alpha_p \varepsilon_t \varepsilon_{t-p} \\ &\quad + \epsilon_t (\alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p} + \epsilon_t). \end{aligned}$$

Stosując obustronnie operator wartości oczekiwanej oraz korzystając z niezależności zaburzeń zewnętrznych (patrz (5.2)) otrzymujemy

$$E\varepsilon_t^2 = \alpha_1 E\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 E\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha_p E\varepsilon_t \varepsilon_{t-p} + E\epsilon_t \epsilon_t$$

lub

$$\gamma_0 = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \dots + \alpha_p \gamma_p + \sigma^2,$$

gdzie $\gamma_\tau = E\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}$ dla $\tau \in \mathbb{N}_0$. Z powyższego równania wynika, że zależność pomiędzy wariancją elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ a wariancją zaburzeń zewnętrznych ciągu niezależnych zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest dana wzorem

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 - \dots - \alpha_p \gamma_p \\ &= \gamma_0 (1 - \alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2 - \dots - \alpha_p r_p). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Ponizej wyznaczymy warunek stacjonarności dla modelu AR(p), $1 \leq p < \infty$. Korzystając z operatora przesunięcia (5.39) równanie (5.44) możemy przedstawić w postaci

$$(1 - \alpha_1 F_- - \dots - \alpha_p F_-^p) \varepsilon_t = \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z},$$

natomiast równanie (5.45) w postaci

$$\varepsilon_t = (1 + \varkappa_1 F_- + \varkappa_2 F_-^2 + \varkappa_3 F_-^3 + \dots) \varepsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z},$$

gdzie $\varkappa_i, i \geq 1$ są dane wzorami (5.46) - (5.50). Wobec powyższego

$$(1 - \alpha_1 F_- - \dots - \alpha_p F_-^p) (1 + \varkappa_1 F_- + \varkappa_2 F_-^2 + \varkappa_3 F_-^3 + \dots) = 1. \quad (5.57)$$

Dla szeregów postaci (5.44) wartość oczekiwana jest równa zero, kowariancja zależy tylko od przesunięcia $\tau \in \mathbb{N}_0$ oraz warunek stacjonarności jest spełniony, jeżeli skończone są drugie momenty. Szereg postaci (5.45) jest zbieżny w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jeżeli jest spełniony następujący warunek.

Warunek stacjonarności. Pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0$$

powinny być poza kołem o promieniu jeden.

Gęstość spektralna. Funkcja gęstości spektralnej dla modelu $\text{AR}(p)$, $1 \leq p < \infty$ jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \alpha_2 e^{-2i\omega} - \dots - \alpha_p e^{-pi\omega}|^2}, \quad (5.58)$$

gdzie $\omega \in [-\pi, \pi]$ (patrz np. [1], [6], [51]).

Identyfikacja modelu $\text{AR}(p)$. Identyfikacja modelu $\text{AR}(p)$, $1 \leq p < \infty$ polega na wyznaczeniu estymatorów parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ oraz σ^2 . Aby wyznaczyć te parametry korzystamy z własności (5.51)–(5.52) i (5.56). Zakładamy również, że wartość średnia ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest równa zero.

Algorytm identyfikacji $\text{AR}(p)$.

1. Dla realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ korzystając ze wzoru (5.18) wyznaczamy oceny estymatorów funkcji autokowariancji $\hat{\gamma}_\tau$, $\tau \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$.
2. Wyznaczamy oceny parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ w sposób następujący

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \dots \\ \hat{\alpha}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\gamma}_1 & \dots & \hat{\gamma}_{p-1} \\ \hat{r}_1 & 1 & \dots & \hat{\gamma}_{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\gamma}_{p-1} & \hat{\gamma}_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \dots \\ \hat{\gamma}_p \end{bmatrix}.$$

3. Jeżeli warunek stacjonarności jest spełniony, to ocenę parametru σ^2 szacujemy ze wzoru

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 - \hat{\alpha}_1 \hat{\gamma}_1 - \hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_2 - \dots - \hat{\alpha}_p \hat{\gamma}_p.$$

4. Wyznaczamy ciąg reszt $\epsilon_t = \varepsilon_t - \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \hat{\alpha}_p \varepsilon_{t-p}$ dla $p+1 \leq t \leq N$ oraz dla realizacji $\{\epsilon_t\}_{p+1 \leq t \leq N}$ przeprowadzamy test Kołmogorowa-Smirnowa (badanie normalności rozkładu elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$).

Do konstrukcji rozkładów łącznych elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (dokładniej do oszacowania macierzy autokowariancji lub autokorelacji) wartości estymatorów $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ wyznaczamy za pomocą (5.18), natomiast wartości estymatorów $r_1, r_2, \dots, r_p$ ze wzoru (5.43). Wartości funkcji autokowariancji γ_τ i autokorelacji r_τ dla $\tau \geq p+1$ wyznaczamy ze wzorów (5.54) i (5.55) odpowiednio.

5.3 Modele ruchomej średniej MA(q)

W modelach ruchomej średniej elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone jako kombinacje liniowe zaburzeń zewnętrznych opóźnionych w czasie (patrz np. [1], [6], [25], [52], [59]), więc możemy je przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2} - \dots,$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Ruchoma średnia rzędu q , $1 \leq q < \infty$ (MA(q) – *Moving Average process of order q*) jest to model ruchomej średniej ze względu na zaburzenia zewnętrzne, gdzie $\theta_k = 0$ dla $k > q$. Elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są dane wzorem

$$\varepsilon_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q} \text{ dla } t \in \mathbb{Z}. \quad (5.59)$$

Zaburzenie zewnętrzne ϵ_t w chwili t oddziałuje jeszcze przez q chwil, zatem wywołuje wpływ nie tylko na ε_t ale również na $\varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+q}$. Najbardziej

rozpowszechnione w praktyce są modele MA(1), MA(2).

$$\begin{aligned} MA(1) : \quad & \varepsilon_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, \\ MA(2) : \quad & \varepsilon_t = \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2}. \end{aligned}$$

W rozdziale 5.1 pokazano, że każdy proces autoregresji AR(p) można przedstawić w postaci ruchomej średniej rzędu $MA(\infty)$ (patrz (5.11), (5.29), (5.45)). Powstaje pytanie, czy ruchomą średnią można przedstawić jako autoregresję? Przyjrzyjmy się modelowi MA(1)

$$\varepsilon_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1} \text{ dla } t \in \mathbb{Z}. \quad (5.60)$$

Z powyższego równania wynika, że

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \varepsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} = \varepsilon_t + \theta(\varepsilon_{t-1} + \theta\epsilon_{t-2}) = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} + \theta^2\epsilon_{t-2} \\ &= \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} + \theta^2(\varepsilon_{t-2} + \theta\epsilon_{t-3}) = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-2} + \theta^3\epsilon_{t-3} = \dots \end{aligned}$$

Ostatecznie model ruchomej średniej MA(1) (5.60) możemy przedstawić jako model autoregresji rzędu nieskończoność – AR(∞) postaci

$$\varepsilon_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{t-j} + \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z}. \quad (5.61)$$

Model autoregresji AR(1) postaci (5.10) spełnia warunek stacjonarności wtedy i tylko wtedy, gdy parametr $|\alpha| < 1$ (lub moduł pierwiastka równania $1 - \alpha z = 0$ jest większy od jeden). Korzystając z własności zaburzeń zewnętrznych (5.1)–(5.2) wartość oczekiwana i kowariancja elementów szeregu opisanych za pomocą równania (5.60) wynoszą odpowiednio

$$E\varepsilon_t = 0$$

oraz

$$\gamma_\tau = E\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau} = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta^2), & \text{dla } \tau = 0, \\ -\theta\sigma^2, & \text{dla } \tau = 1, \\ 0, & \text{dla } \tau > 1. \end{cases} \quad (5.62)$$

Widzimy zatem, że model ruchomej średniej MA(1) postaci (5.60) spełnia warunek stacjonarności dla dowolnego θ . Natomiast jeżeli $|\theta| \geq 1$, to szereg wag we wzorze (5.61) jest rozbieżny. Modelując zjawisko za pomocą

równania (5.60) musimy przewidywać jego zachowanie w przyszłości. Zatem model ruchomej średniej rzędu pierwszego MA(1) postaci (5.60) spełnia warunek odwracalności, jeżeli w rozwinięciu (5.61) nieskończony szereg wag jest zbieżny w $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (warunek $\sum_{j=1}^{\infty} |\theta|^j < \infty$ jest równoważny warunkowi $|\theta| < 1$, patrz lemat 5.1). Powyższy wymóg jest równoważny warunkowi: moduł pierwiastka równania charakterystycznego

$$1 - \theta z = 0$$

powinien być większy od jedności ($|z| > 1$).

Poniżej przeprowadzimy rozważania dla modelu MA(q), $1 \leq q < \infty$. Załóżmy, że elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone za pomocą wzoru (5.59). Z własności (5.1) wynika, że wartość oczekiwana elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest równa zero. Dla dowolnego $t, \tau \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\varepsilon_{t-\tau} = \epsilon_{t-\tau} - \theta_1 \epsilon_{t-\tau-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-\tau-q}. \quad (5.63)$$

Korzystając z równań (5.59) i (5.63) dla każdego $\tau \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= E\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau} = \\ &= E(\epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q})(\epsilon_{t-\tau} - \theta_1 \epsilon_{t-\tau-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-\tau-q}). \end{aligned}$$

Ze wzoru (5.2) otrzymujemy

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2), & \text{dla } \tau = 0, \\ \sigma^2 (-\theta_\tau + \theta_1 \theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau} \theta_q), & \text{dla } \tau = 1, 2, \dots, q, \\ 0, & \text{dla } \tau > q. \end{cases} \quad (5.64)$$

Funkcja autokorelacji $r_\tau, \tau \in \mathbb{Z}$ jest dana wzorem

$$r_\tau = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tau = 0, \\ \frac{-\theta_\tau + \theta_1 \theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & \text{dla } \tau = 1, 2, \dots, q, \\ 0, & \text{dla } \tau > q. \end{cases} \quad (5.65)$$

Widzimy, że model ruchomej średniej MA(q) dla $1 \leq q < \infty$ postaci (5.59) spełnia warunki stacjonarności dla dowolnych rzeczywistych $\theta_1, \dots, \theta_q$ (elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ mają skończone pierwszy i drugi momenty główne oraz kowariancja γ_τ zależy tylko od przesunięcia $\tau \in \mathbb{N}_0$).

Poniżej przedstawiony zostanie problem odwracalności modeli MA(q) dla $1 \leq q < \infty$. Równanie (5.59) można przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \varepsilon_{t-j} + \epsilon_t, \quad (5.66)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \theta_1, \\ \pi_2 &= \theta_1 \pi_1 + \theta_2, \\ &\dots \\ \pi_{q-1} &= \theta_1 \pi_{q-2} + \theta_2 \pi_{q-3} + \dots + \theta_{q-2} \pi_1 + \theta_{q-1}, \\ \pi_q &= \theta_1 \pi_{q-2} + \theta_2 \pi_{q-2} + \dots + \theta_{q-1} \pi_1 + \theta_q, \end{aligned}$$

a dla $j > q$

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \dots + \theta_q \pi_{j-q}.$$

Korzystając z operatora przesunięcia (5.39) równanie (5.59) możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = (1 - \theta_1 F_- - \dots - \theta_q F_-^q) \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z},$$

natomiast równanie (5.66) w postaci

$$(1 + \pi_1 F_- + \pi_2 F_-^2 + \pi_3 F_-^3 + \dots) \varepsilon_t = \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{Z}.$$

Zatem

$$(1 - \theta_1 F_- - \dots - \theta_q F_-^q) (1 + \pi_1 F_- + \pi_2 F_-^2 + \pi_3 F_-^3 + \dots) = 1. \quad (5.67)$$

Szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci (5.59) spełnia warunek odwracalności, jeżeli w rozwinięciu (5.66) szereg wag jest zbieżny (powinien być spełniony warunek $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, patrz. lemat 5.1). Ze wzoru (5.67) wynika, że szereg postaci (5.66) jest zbieżny jeżeli jest spełniony następujący warunek.

Warunek odwracalności modelu MA(q). Pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q = 0$$

powinny być poza kołem o promieniu jeden ($|z_j| > 1$ dla $j = 1, 2, \dots, q$).

Uwaga 5.1 Dla modelu ruchomej średniej rzędu $1 \leq q < \infty$ wartości funkcji autokorelacji r_τ są równe zero dla $\tau > q$. Natomiast dla modeli autokoregresji $AR(p)$, $1 \leq p < \infty$ funkcja autokorelacji r_τ dla $\tau > p$ spełnia równanie (5.55). Powyższą własność wykorzystujemy na przykład do określania klasy modeli na podstawie realizacji szeregu czasowego (tzn. dla realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ obserwujemy zachowanie funkcji autokorelacji).

Gęstość spektralna MA(q). Funkcja gęstości spektralnej dla szeregów ruchomej średniej rzędu q , $1 \leq q < \infty$ jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-2i\omega} - \dots - \theta_q e^{-qi\omega}|^2, \quad (5.68)$$

gdzie $\omega \in [-\pi, \pi]$ (patrz np. [1], [6], [51]).

Identyfikacja modelu MA(q): Identyfikacja modelu MA(q), $1 \leq q < \infty$ polega na wyznaczeniu wartości parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ oraz σ^2 . Aby oszacować parametry korzystamy ze wzorów (5.64) i (5.65). Poniżej zakładamy, że wartość średnia ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest równa zero.

Algorytm identyfikacji MA(q).

1. Ze wzoru (5.18) wyznaczamy wartości estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ dla $\tau \in \{0, 1, 2, \dots, q\}$ na podstawie realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$.
2. Wyznaczamy wartości estymatorów funkcji autokorelacji $\hat{r}_\tau$:

$$\hat{r}_\tau = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0} \text{ dla } \tau = 1, 2, \dots, q.$$

3. Ocenę parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ wyznaczamy rozwiązując układ q równań nieliniowych

$$\begin{cases} \hat{r}_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \dots + \theta_{q-1}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, \\ \hat{r}_2 = \frac{-\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \dots + \theta_{q-2}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, \\ \dots \\ \hat{r}_q = \frac{-\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, \end{cases}$$

4. Jeżeli wśród rozwiązań układu równań z punktu 3 znajdziemy ciąg $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$ spełniający warunek odwracalności dla modelu MA(q), to wartość

estymatora wariancji zaburzeń zewnętrznych w modelu (5.59) wyznaczamy ze wzoru

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2}.$$

5. Wyznaczamy ciąg reszt $\epsilon_t = \varepsilon_t + \hat{\theta}_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \epsilon_{t-q}$ dla $q+1 \leq t \leq N$ oraz dla realizacji $\{\epsilon_t\}_{q \leq t \leq N}$ przeprowadzamy test Kołmogorowa-Smirnowa (badanie normalności rozkładu elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$).

Poniżej przedstawione zostaną przykłady dotyczące określenia i identyfikacji modeli $MA(q)$, $q \geq 1$.

Przykład 5.3 Załóżmy, że wariancja elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi 2 oraz kowariancja przy przesunięciu czasowym $\tau = 1$ wynosi 1, natomiast kowariancja dla $\tau \geq 2$ wynosi zero. Wyznamy model ruchomej średniej $MA(q)$, $q \geq 1$ oraz sprawdzimy warunek odwracalności.

Z założenia mamy $\gamma_0 = 2$ i $\gamma_1 = 1$ oraz $\gamma_\tau = 0$ dla $\tau \geq 2$. Zatem $r_1 = 0.5$ oraz $r_\tau = 0$ dla $\tau \geq 2$. Ze wzoru (5.62) i uwagi 5.1 wynika, że elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ należy modelować za pomocą $MA(1)$. Aby oszacować parametr θ w równaniu (5.60) należy rozwiązać równanie nieliniowe postaci

$$\frac{-\theta}{1 + \theta^2} = 0.5,$$

które sprowadzamy do postaci

$$\theta^2 + 2\theta + 1 = 0.$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest pierwiastek podwójny $\theta = -1$. Pierwiastek równania charakterystycznego

$$1 + z = 0$$

wynosi $z = -1$, oznacza to, że warunek odwracalności nie jest spełniony.

Przykład 5.4 Niech $\gamma_0 = 5$ oraz $\gamma_1 = 2$, natomiast $\gamma_\tau = 0$ dla $\tau \geq 2$. Wyznamy parametry modelu $MA(1)$.

Współczynnik korelacji przy przesunięciu czasowym $\tau = 1$ wynosi $r_1 = 0.4$. Rozwiązując równanie nieliniowe

$$\frac{-\theta}{1 + \theta^2} = 0.4$$

lub równanie

$$\theta^2 + 2.5\theta + 1 = 0$$

otrzymujemy pierwiastki $\theta = -2$ oraz $\theta = -0.5$. Pierwiastek równania charakterystycznego

$$1 - \theta z = 0$$

dla parametru $\theta = -2$ wynosi $z = -0.5$, natomiast dla $\theta = -0.5$ wynosi $z = -2$. Widzimy zatem, że warunek odwracalności jest spełniony tylko dla parametru $\theta = -0.5$. Dla modelu MA(1) ze wzoru (5.62) wynika, że wariancja zaburzeń zewnętrznych jest równa $\sigma^2 = \frac{5}{1+0.5^2} = 4$, natomiast odchylenie standardowe $\sigma = 2$. Ostatecznie model ruchomej średniej rzędu pierwszego MA(1) możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1},$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0; 4)$.

Przykład 5.5 Dla szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ o wartościach rzeczywistych funkcja autokowariancji jest dana wzorem

$$\gamma_0 = \begin{cases} 5, & \text{dla } \tau = 0, \\ 2, & \text{dla } \tau = 1, \\ 1, & \text{dla } \tau = 2, \\ 0, & \text{dla } \tau \geq 3. \end{cases}$$

Dokonyamy identyfikacji szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ na podstawie ruchomej średniej MA(q), $q \geq 1$.

Z uwagi 5.1 wynika, że $q = 2$. Wartości funkcji autokorelacji dla przesunięć czasowych $\tau \in \{1, 2\}$ wynoszą $r_1 = 0.4$ i $r_2 = 0.2$. Rozwiązując układ równań nieliniowych

$$\begin{cases} \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = 0.4 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = 0.2 \end{cases}$$

otrzymujemy następujące przypadki

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
θ_1	$-0.998-2.316i$	$-0.998+2.316i$	-1.61	-0.39
θ_2	$0.686-0.727i$	$0.686+0.727i$	-4.13	-0.242

Pod uwagę bierzemy tylko rozwiązania *III* i *IV*, ponieważ elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mają realizacje w zbiorze liczb rzeczywistych. Dla przypadku *III* pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 + 1.61z + 4.13z^2 = 0$$

wynoszą

$$z_1 = -0.19492 - 0.45182i,$$

$$z_2 = -0.19492 + 0.45182i.$$

Warunek odwracalności nie jest spełniony, ponieważ $|z_1| \leq 1$ oraz $|z_2| \leq 1$.

Dla przypadku *IV* pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 + 0.39z + 0.242z^2 = 0$$

wynoszą

$$z_1 = -0.80579 - 1.8663i,$$

$$z_2 = -0.80579 - 1.8663i.$$

W tym przypadku $|z_1| > 1$ oraz $|z_2| > 1$, zatem warunek odwracalności jest spełniony. Ze wzoru (5.64) wyznaczamy wariancję zaburzeń zewnętrznych, która jest równa $\sigma^2 = \frac{\gamma_0}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = \frac{5}{1+0.39^2+0.242^2} \approx 4.13$, natomiast $\sigma \approx 2.0322$. Ostatecznie model ruchomej średniej rzędu drugiego $MA(2)$ możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = \epsilon_t + 0.39\epsilon_{t-1} + 0.242\epsilon_{t-2},$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0; 4.13)$.

Kolejny przykład pokazuje różnice w zachowaniu modeli autoregresji AR(p) i ruchomej średniej MA(q), $1 \leq p, q < \infty$.

Przykład 5.6 Niech dane będą szeregi czasowe $\{\varepsilon_t^1\}_{t \in \mathbb{N}}$ oraz $\{\varepsilon_t^2\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci

$$\varepsilon_t^1 = a\varepsilon_{t-1}^1 + \epsilon_t, \quad (5.69)$$

$$\varepsilon_t^2 = \epsilon_t - a\epsilon_{t-1}, \quad (5.70)$$

gdzie $a = 0.8$ natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0; 1)$. Wyznamy funkcje autokorelacji i funkcje gęstości spektralnej dla każdego z szeregów. Dodatkowo wykonamy symulacje powyższych szeregów dla $1 \leq t \leq 100$ przyjmując $\varepsilon_0^1 = \epsilon_0 = 0$.

Rozwiązanie. Szereg czasowy $\{\varepsilon_t^1\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (5.69) przedstawia autoregresję rzędu pierwszego AR(1), natomiast szereg czasowy $\{\varepsilon_t^2\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (5.70) przedstawia ruchomą średnią rzędu pierwszego MA(1).

Funkcja autokorelacji dla szeregu $\{\varepsilon_t^1\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest dana wzorem

$$r_\tau = a^\tau \text{ dla } \tau \in \mathbb{N}_0$$

oraz jest przedstawiona na wykresie 5.2a ze znacznikiem "×". Funkcja autokorelacji dla szeregu $\{\varepsilon_t^2\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi

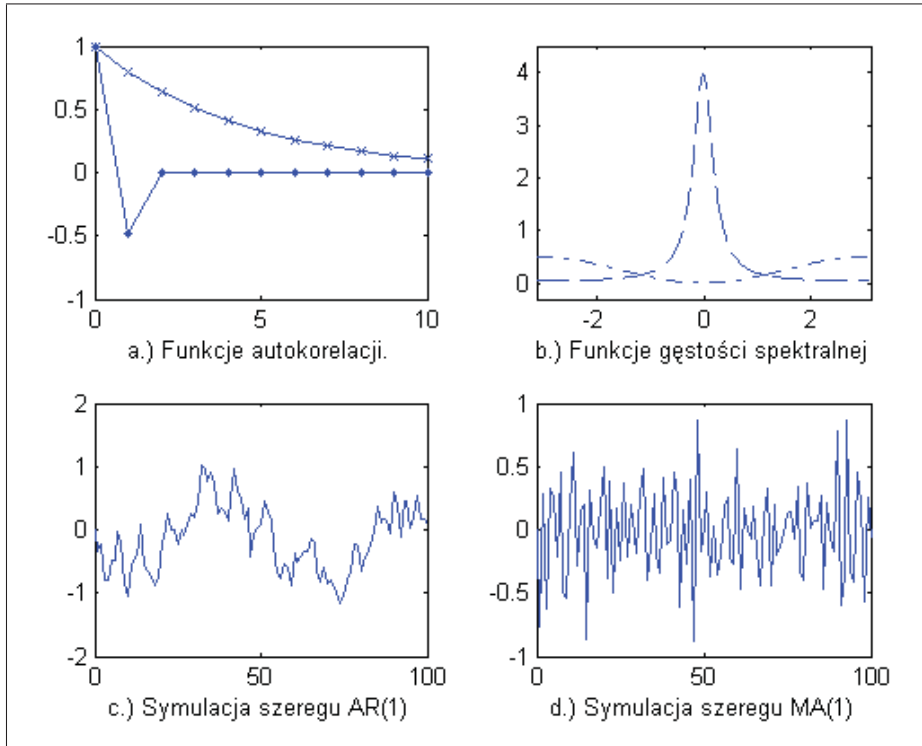
$$r_\tau = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tau = 0, \\ \frac{-a}{1+a^2}, & \text{dla } \tau = 1, \\ 0, & \text{dla } \tau > 1 \end{cases}$$

oraz jest przedstawiona na wykresie 5.2a ze znacznikiem "♦". Funkcja gęstości spektralnej dla modelu AR(1) jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1 - ae^{-i\omega}|^2}, \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

oraz jest przedstawiona na wykresie 5.2b krzywą przerywaną. Funkcja gęstości spektralnej dla modelu MA(1) jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - ae^{-i\omega}|^2, \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$



Rysunek 5.2: Funkcje autokorelacji, gęstości spektralnej oraz symulacje modeli AR(1) i MA(1).

oraz jest przedstawiona na wykresie 5.2b krzywą przerywaną z kropką. W przypadku modelu autoregresji AR(1) widzimy wyraźnie silniejszy związek pomiędzy elementami szeregu (wyższy skok na wykresie), niż dla ruchomej średniej MA(1). Na wykresach 5.2c i 5.2d przedstawione są symulacje szeregów $\{\varepsilon_t^1\}_{1 \leq t \leq 100}$ i $\{\varepsilon_t^2\}_{1 \leq t \leq 100}$, które oscylują dookoła zera. W przypadku modelu AR(1) dla pewnych przedziałów czasowych na wykresie widzimy wyraźne trendy, natomiast dla modelu MA(1) trajektoria szeregu $\{\varepsilon_t^2\}_{1 \leq t \leq 100}$ losowo ewaluje dookoła poziomu zerowego.

5.4 Modele autoregresji i ruchomej średniej ARMA

Poprzednio przedstawione zostały własności modeli autoregresji i ruchomej średniej. Każdy model ruchomej średniej MA(q), $1 \leq q < \infty$ mo-

żemy przedstawić jako model autoregresji $AR(\infty)$ i odwrotnie model autoregresji $AR(p)$, $1 \leq p < \infty$ możemy przedstawić jako model ruchomej średniej $MA(\infty)$. Przedstawienie modelu np. $AR(1)$ w postaci $MA(\infty)$ (zamiast dwóch parametrów α i σ w modelu $AR(1)$ mamy przeliczalną liczbę parametrów $\sigma, \theta_1, \theta_2, \dots$ w modelu $MA(\infty)$) oraz przedstawienie modelu $MA(1)$ w postaci $AR(\infty)$ nie jest działaniem optymalnym (ekonomicznym).

W niektórych szeregach czasowych występują zarówno własności autoregresyjne jak i własności odpowiadające ruchomej średniej. Powstaje zatem pytanie, w jaki sposób uwzględnić w/w własności jednocześnie? W praktyce dla uzyskania optymalnego przedstawienia szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ konieczne jest włączenie do modelu części odpowiadających za autoregresję oraz członów modelujących proces ruchomej średniej.

Model autoregresji i ruchomej średniej $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$ (*AutoRegresssive–Moving Average process of order (p, q)*) jest określony za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (5.71)$$

lub równania

$$\varepsilon_t - \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j} = \epsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} \text{ dla } t \in \mathbb{Z} \quad (5.72)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$ (patrz np. [1], [6], [25], [52], [59]).

Model ARMA jest modelem liniowym, w którym zmiennymi objaśniającymi są elementy szeregu czasowego opóźnione w czasie, natomiast zaburzenie zewnętrzne jest kombinacją liniową niezależnych zmiennych losowych. Ze wzoru (5.71) wynika, że $ARMA(p, 0) = AR(p)$ oraz $ARMA(0, q) = MA(q)$ dla $1 \leq p, q < \infty$.

Uwaga 5.2 Łatwo sprawdzić, że dla każdego $t \in \mathbb{Z}$ zmienna losowa ε_t zależy od zmiennych $\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$ ale nie zależy od zmiennych $\epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+2}, \dots$.

Model $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$ postaci (5.71), który jest wykorzystywany do predykcji, powinien spełniać warunki stacjonarności i odwracalności jednocześnie. Dla części odpowiadającej za autoregresję (lewa strona

we wzorze (5.72)) sprawdzamy stacjonarność, natomiast dla części odpowiadającej za ruchomą średnią (prawa strona we wzorze (5.72)) sprawdzamy odwracalność. Elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ określone za pomocą równania (5.71) możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p} + \epsilon_{tq}, \quad (5.73)$$

gdzie $\epsilon_{tq} = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q}$. Dla modelu (5.73) przeprowadzamy analizę stacjonarności tak jak dla modelu AR(p), $1 \leq p < \infty$.

Warunek stacjonarności. Pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0 \quad (5.74)$$

powinny być poza kołem o promieniu jeden.

Analogicznie elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ określone za pomocą równania (5.71) możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_{tp} = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q}, \quad (5.75)$$

gdzie $\varepsilon_{tp} = \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \alpha_p \varepsilon_{t-p}$. Analiza odwracalności dla modelu (5.75) przebiega tak jak dla modelu MA(q), $1 \leq q < \infty$.

Warunek odwracalności. Pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \dots - \theta_q z^q = 0 \quad (5.76)$$

powinny być poza kołem o promieniu jeden.

Uwaga 5.3 Model ARMA(p, q), $1 \leq p, q < \infty$ spełnia warunki stacjonarności i odwracalności wtedy i tylko wtedy, jeżeli moduły wszystkich pierwiastków równań (5.74) i (5.76) są większe od jedności.

Z uwagi 5.2 wynika, że wartość oczekiwana elementów szeregu ARMA(p, q), $1 \leq p, q < \infty$ jest równa zero. Aby wyznaczyć podstawowe własności procesu ARMA(p, q), $1 \leq p, q < \infty$ przeanalizujemy zachowanie funkcji autokowariancji i autokorelacji. Równanie (5.71) mnożymy obustronnie przez $\varepsilon_{t-\tau}$ dla dowolnego $\tau \in \mathbb{N}_0$ oraz zastosujemy obustronnie operator

wartości oczekiwanej. Zatem otrzymujemy

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}) = E \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-\tau} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-\tau} \right]. \quad (5.77)$$

Funkcję autokowariancji γ_τ , $\tau \in \mathbb{N}_0$ możemy przedstawić w postaci

$$\gamma_\tau = \sum_{j=1}^p \alpha_j \gamma_{\tau-j} + \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) - \sum_{j=1}^q \theta_j \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau-j), \quad (5.78)$$

gdzie $\gamma_\tau = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau})$ oraz $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = E\varepsilon_{t-\tau} \varepsilon_t$, $\tau \in \mathbb{N}_0$. Z uwagi 5.2 wynika, że $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = E\varepsilon_{t-\tau} \varepsilon_t = 0$ dla $\tau > 0$.

Zatem $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau-1) = \dots = \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau-q) = 0$ dla $\tau > q$. Stąd otrzymujemy

$$\gamma_\tau = \alpha_1 \gamma_{\tau-1} + \dots + \alpha_p \gamma_{\tau-p} \quad \text{dla} \quad \tau \geq q+1. \quad (5.79)$$

Dzieląc obustronnie równanie (5.79) przez wariancję elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ otrzymujemy

$$r_\tau = \alpha_1 r_{\tau-1} + \dots + \alpha_p r_{\tau-p} \quad \text{dla} \quad \tau \geq q+1. \quad (5.80)$$

Ze wzoru (5.78) wynika, że dla $\tau = 0, 1, 2, \dots, q$ zarówno funkcja autokowariancji γ_τ jak również funkcja autokorelacji r_τ zależą od parametrów odpowiadających za ruchomą średnią $\theta_1, \dots, \theta_q$ oraz parametrów odpowiadających za autoregresję $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Natomiast z uwagi 5.2 wynika, że jeżeli $\tau \leq q$, to kowariancje "mieszane" $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau-j)$ dla $\tau-j \leq 0$ zależą od $\theta_1, \dots, \theta_q, \alpha_1, \dots, \alpha_p$. Zatem dla $0 \leq k \leq q$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(-k) &= E\varepsilon_{t+k} \varepsilon_t = E \left[\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t+k-j} \right) \varepsilon_t \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(-k+j) - \theta_k \sigma^2. \end{aligned}$$

Stąd dla $0 \leq k \leq q$

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(-k) = \alpha_1 \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(-k+1) + \dots + \alpha_k \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(0) - \theta_k \sigma^2. \quad (5.81)$$

Wniosek 5.6 Dla modelu $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$ wielkości funkcji autokowariancji γ_τ i funkcji autokorelacji r_τ dla $\tau \geq q+1$ obliczamy odpowiednio za pomocą wzorów rekurencyjnych (5.79) i (5.80), które są podobne do wzorów rekurencyjnych funkcji autokowariancji i autokorelacji dla procesu $AR(p)$. Oznacza to, że dla przesunięcia $\tau \geq q+1$ funkcje γ_τ i r_τ procesu $ARMA(p, q)$ zachowują się jak dla procesu $AR(p)$ oraz określone są za pomocą parametrów $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ i wartości początkowych $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ lub $r_1, \dots, r_p$.

Gęstość spektralna $ARMA(p, q)$. Funkcja gęstości spektralnej dla szeregów autoregresji i ruchomej średniej $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$ jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2 |1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-2i\omega} - \dots - \theta_q e^{-qi\omega}|^2}{2\pi |1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \alpha_2 e^{-2i\omega} - \dots - \alpha_p e^{-pi\omega}|^2}, \quad (5.82)$$

gdzie $\omega \in [-\pi, \pi]$ (patrz np. [1], [6], [51]).

Identyfikacja modelu $ARMA(p, q)$. Identyfikacja modelu $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$ polega na oszacowaniu parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ oraz wariancji zaburzeń zewnętrznych σ^2 . Do wyznaczenia parametrów odpowiadających za autoregresję korzystamy ze wzorów (5.79)-(5.80, natomiast podczas szacowania parametrów odpowiadających za ruchomą średnią korzystamy z niezależności zaburzeń zewnętrznych ciągu zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (patrz własności (5.1)-(5.2)). Dodatkowo należy sprawdzić spełnienie warunków stacjonarności i odwracalności. Zakładamy, że wartość średnia ciągu $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest równa zero.

Algorytm identyfikacji $ARMA(p, q)$.

1. Dla realizacji $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ ze wzoru (5.18) wyznaczamy wartości estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ , $\tau \in \{0, 1, 2, \dots, q+p\}$.
2. Wyznaczamy wartości estymatorów funkcji korelacji r_τ :

$$\hat{r}_\tau = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0} \text{ dla } \tau = 1, 2, \dots, q+p.$$

3. Korzystając ze wzoru (5.80) tworzymy układ równań liniowych

$$\begin{cases} \hat{r}_{q+1} = \hat{\alpha}_1 \hat{r}_q + \dots + \hat{\alpha}_p \hat{r}_{q-p+1}, \\ \hat{r}_{q+2} = \hat{\alpha}_1 \hat{r}_{q+1} + \dots + \hat{\alpha}_p \hat{r}_{q-p+2}, \\ \dots\dots\dots \\ \hat{r}_{q+p} = \hat{\alpha}_1 \hat{r}_{q+p-1} + \dots + \hat{\alpha}_p \hat{r}_q. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy wartości parametrów $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, które są równe

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \dots \\ \hat{\alpha}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_q & \hat{r}_{q-1} & \dots & \hat{r}_{q-p+1} \\ \hat{r}_{q+1} & \hat{r}_q & \dots & \hat{r}_{q-p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{r}_{q+p-1} & \hat{r}_{q+p-2} & \dots & \hat{r}_q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_{q+1} \\ \hat{r}_{q+2} \\ \dots \\ \hat{r}_{q+p} \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

W podobny sposób można otrzymać oceny estymatorów $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$ jeżeli zamiast funkcji autokorelacji użyć funkcji autokowariancji, wtedy korzystamy ze wzoru (5.79).

4. Jeżeli warunek stacjonarności jest spełniony, to oceny parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ oraz σ^2 wyznaczamy w sposób następujący. Najpierw podstawiamy otrzymane wartości $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$ do równania (5.72) oraz tworzymy układ $q+1$ równań

$$\begin{cases} \varepsilon_t - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \\ \varepsilon_{t+1} - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t+1-j} = \varepsilon_{t+1} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t+1-j}, \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_{t+q} - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t+q-j} = \varepsilon_{t+q} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t+q-j}. \end{cases}$$

Obie strony równania pierwszego podnosimy do kwadratu, następnie obustronnie wymnożymy pierwsze równanie przez drugie itd. Stosując obustronnie operator wartości oczekiwanej do każdego z otrzymanych równań otrzymujemy układ równań nieliniowych

$$\begin{aligned} E \left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t-j} \right)^2 &= E \left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \right)^2, \\ E \left(\varepsilon_{t+1} - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t+1-j} \right) \left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t-j} \right) &= E \left(\varepsilon_{t+1} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t+1-j} \right) \left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \right), \\ &\dots\dots\dots \\ E \left(\varepsilon_{t+q} - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t+q-j} \right) \left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j \varepsilon_{t-j} \right) &= E \left(\varepsilon_{t+q} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t+q-j} \right) \left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \right). \end{aligned}$$

Lewe części w układzie równań zawierają kombinacje ocen $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$ oraz wartości funkcji autokowariancji $\gamma_0, \dots, \gamma_{q+p}$. Prawe części układu równań zależą od $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ oraz σ^2 . Podstawiając w lewe części wartości $\hat{\gamma}_0, \dots, \hat{\gamma}_{q+p}$ oraz rozwiązując układ $q + 1$ równań nieliniowych wyznaczamy oceny parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ oraz σ^2 .

5. Jeżeli warunek odwracalności jest spełniony, to wyznaczamy ciąg reszt $\{\epsilon_t\}_{\max(p,q) \leq t \leq N}$ oraz stosujemy test Kołmogorowa-Smirnowa w celu weryfikacji normalności rozkładu szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Uwaga 5.4 Podczas identyfikacji modeli ARMA(p, q) macierz kwadratowa użyta we wzorze (5.83) nie jest symetryczna!

Widzimy, że identyfikacja modelu ARMA(p, q) przebiega w dwu etapach. Najpierw wyznaczana jest część odpowiadająca za autoregresję, a następnie szacowane są parametry odpowiadające za ruchomą średnią oraz wariancję zaburzeń zewnętrznych.

Poniżej przedstawiona zostanie identyfikacja modelu ARMA(1, 1). Elementy szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dla modelu ARMA(1, 1) dane są wzorem

$$\epsilon_t = \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1} \text{ dla } t \in \mathbb{Z}, \quad (5.84)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Funkcję autokowariancji wyznaczamy w sposób następujący, najpierw równanie (5.84) mnożymy obustronnie przez $\epsilon_{t-\tau}$ otrzymując

$$E(\epsilon_t \epsilon_{t-\tau}) = E[\alpha \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-\tau} + \epsilon_t \epsilon_{t-\tau} - \theta \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-\tau}].$$

Dla dowolnego $\tau \geq 0$ otrzymujemy

$$\gamma_\tau = \alpha \gamma_{\tau-1} + \gamma_{\epsilon\epsilon}(\tau) - \theta \gamma_{\epsilon\epsilon}(\tau-1), \quad (5.85)$$

gdzie $\gamma_{\epsilon\epsilon}(\tau) = E\epsilon_{t-\tau}\epsilon_t$, $\gamma_{\epsilon\epsilon}(\tau-1) = E\epsilon_{t-\tau}\epsilon_{t-1}$ oraz $\gamma_\tau = E(\epsilon_t \epsilon_{t-\tau})$. Z uwagi 5.2 wynika, że $\gamma_{\epsilon\epsilon}(\tau-1) = 0$ dla $\tau > 1$. Zatem funkcja autokowariancji procesu ARMA(1, 1) jest równa

$$\gamma_\tau = \alpha \gamma_{\tau-1} \quad \text{dla } \tau \geq 2 \quad (5.86)$$

Dla $\tau = 0$ wariancja elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ wynosi

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= E(\varepsilon_t \varepsilon_t) = E[\alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t + \varepsilon_t \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t] \\ &= \alpha \gamma_1 + E(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})(\alpha \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) \\ &= \alpha \gamma_1 + \alpha E \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \alpha \theta E \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} + (1 + \theta^2) \sigma^2.\end{aligned}$$

Z uwagi 5.2 wynika, że $E \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} = 0$, natomiast

$$E \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} = E \varepsilon_{t-1} (\alpha \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2}) = \sigma^2.$$

Ostatecznie wariancja elementów szeregu postaci (5.84) jest równa

$$\gamma_0 = \alpha \gamma_1 + \sigma^2 (1 + \theta^2 - \alpha \theta).$$

Dla $\tau = 1$ mamy

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = E[\alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}] \\ &= \alpha \gamma_0 + E \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \theta E \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} = \alpha \gamma_0 - \theta \sigma^2.\end{aligned}$$

Ostatecznie funkcję autokowariancji modelu ARMA(1, 1) możemy przedstawić w postaci

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \alpha \gamma_1 + \sigma^2 (1 + \theta^2 - \alpha \theta), & \text{dla } \tau = 0, \\ \alpha \gamma_0 - \theta \sigma^2, & \text{dla } \tau = 1, \\ \alpha \gamma_{\tau-1}, & \text{dla } \tau \geq 2. \end{cases} \quad (5.87)$$

Podstawiając kowariancję z przesunięciem $\tau = 1$ do wyrażenia na wariancję otrzymujemy

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \alpha [\alpha \gamma_0 - \theta \sigma^2] + \sigma^2 (1 + \theta^2 - \alpha \theta) \\ &= \alpha^2 \gamma_0 + \sigma^2 (1 + \theta^2 - 2\alpha \theta),\end{aligned}$$

zatem

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta^2 - 2\alpha \theta)}{1 - \alpha^2} \sigma^2.$$

Z drugiej strony kowariancję z przesunięciem $\tau = 1$ możemy przedstawić jako

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha \frac{(1 + \theta^2 - 2\alpha \theta)}{1 - \alpha^2} \sigma^2 - \theta \sigma^2 \\ &= \frac{\alpha + \alpha \theta^2 - \alpha^2 \theta - \theta}{1 - \alpha^2} \sigma^2.\end{aligned}$$

Ostatecznie zależność funkcji autokowariancji ARMA(1,1) od parametrów modelu jest dana wzorem

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \frac{(1+\theta^2-2\alpha\theta)}{1-\alpha^2} \sigma^2, & \text{dla } \tau = 0, \\ \frac{(\alpha-\theta)(1-\alpha\theta)}{1-\alpha^2} \sigma^2, & \text{dla } \tau = 1, \\ \alpha^{\tau-1} \frac{(\alpha-\theta)(1-\alpha\theta)}{1-\alpha^2} \sigma^2, & \text{dla } \tau \geq 2. \end{cases} \quad (5.88)$$

Dzieląc obustronnie przez γ_0 otrzymujemy funkcję autokorelacji modelu ARMA(1,1)

$$r_\tau = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tau = 0, \\ \frac{(\alpha-\theta)(1-\alpha\theta)}{1+\theta^2-2\alpha\theta}, & \text{dla } \tau = 1, \\ \alpha^{\tau-1} \frac{(\alpha-\theta)(1-\alpha\theta)}{1+\theta^2-2\alpha\theta}, & \text{dla } \tau \geq 2. \end{cases} \quad (5.89)$$

Funkcja gęstości spektralnej modelu ARMA(1,1) jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|1 - \theta e^{-i\omega}|^2}{|1 - \alpha e^{-i\omega}|^2}, \quad (5.90)$$

gdzie $\omega \in [-\pi, \pi]$ (patrz np. [1], [6], [51]).

Identyfikacja modelu ARMA(1,1) postaci (5.84) polega na oszacowaniu parametrów θ , α oraz σ^2 . Zakładamy, że wartość średnia ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ jest równa zero.

1. Dla realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ ze wzoru (5.18) wyznaczamy wartości estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ , $\tau \in \{0, 1, 2\}$.

2. Wyznaczamy wartości estymatorów funkcji autokorelacji r_τ :

$$\hat{r}_\tau = \frac{\hat{\gamma}_\tau}{\hat{\gamma}_0} \text{ dla } \tau = 1, 2.$$

3. Ocena parametru α jest równa

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{r}_2}{\hat{r}_1}.$$

4. Jeżeli $|\hat{\alpha}| < 1$, to wielkość $\hat{\alpha}$ podstawiamy do równania (5.84) oraz tworzymy układ równań

$$\begin{cases} \varepsilon_t - \hat{\alpha}\varepsilon_{t-1} = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, \\ \varepsilon_{t+1} - \hat{\alpha}\varepsilon_t = \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t. \end{cases} \quad (5.91)$$

Lewą i prawą części równania pierwszego z układu (5.91) podnosimy do kwadratu, następnie równanie pierwsze mnożymy z drugim. Stosując operator wartości oczekiwanej otrzymujemy układ

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t - \hat{\alpha}\varepsilon_{t-1})^2 = E(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2, \\ E(\varepsilon_{t+1} - \hat{\alpha}\varepsilon_t)(\varepsilon_t - \hat{\alpha}\varepsilon_{t-1}) = E(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t)(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}). \end{cases}$$

Następnie do powyższego układu podstawiamy wartości estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ , $\tau \in \{0, 1\}$. Rozwiązując układ równań nieliniowych

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_0(1 + \hat{\alpha}^2) - 2\hat{\alpha}\hat{\gamma}_1 = \sigma^2(1 + \theta^2), \\ \hat{\gamma}_1(1 + \hat{\alpha}^2) - \hat{\alpha}[\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_2] = -\theta\sigma^2. \end{cases} \quad (5.92)$$

wyznaczamy oceny $\hat{\theta}$ oraz $\hat{\sigma}^2$.

5. Jeżeli $|\hat{\theta}| < 1$, to wyznaczamy ciąg reszt $\{\epsilon_t\}_{2 \leq t \leq N}$ oraz stosujemy test Kołmogorowa-Smirnowa.

Wniosek 5.7 Jeżeli szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest dany wzorem (5.84) oraz $\alpha = \theta$, to z (5.89) wynika, że elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są nieskorelowane (tzn. $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych). Funkcja autokorelacji jest równa

$$r_\tau = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0, & \text{dla } \tau \geq 1, \end{cases}$$

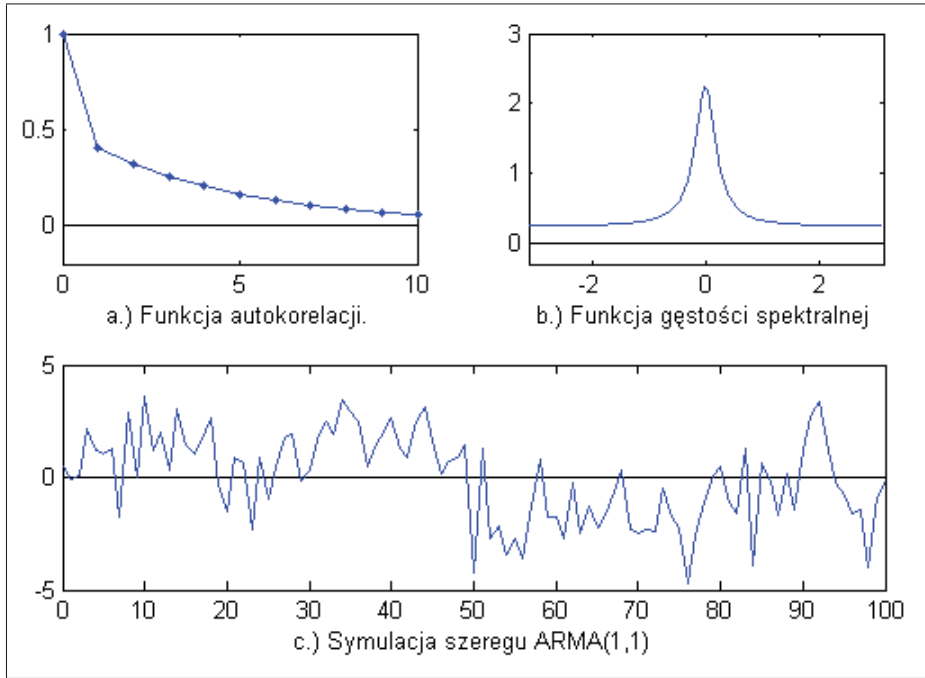
oraz ze wzoru (5.90) wynika, że funkcja gęstości spektralnej jest stała

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi].$$

Przykład 5.7 Dla szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o równaniu

$$\varepsilon_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}, \quad (5.93)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0; 1.5^2)$ wyznaczmy funkcje autokorelacji i funkcje gęstości spektralnej. Dodatkowo zostanie wykonana symulacja szeregu dla $1 \leq t \leq 100$, gdy $\varepsilon_0 = 0.5$ oraz $\epsilon_0 = 0$.



Rysunek 5.3: Funkcje autokorelacji, gęstości spektralnej oraz sumulacja szeregu postaci ARMA(1,1).

Ze wzoru (5.93) otrzymujemy, że funkcja autokorelacji dla szeregu ARMA(1,1) wynosi

$$r_{\tau} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \tau = 0, \\ 0.4, & \text{dla } \tau = 1, \\ \frac{0.8^{\tau}}{2}, & \text{dla } \tau \geq 2. \end{cases}$$

Wykres funkcji autokorelacji jest przedstawiony na rysunku 5.3a. Funkcja gęstości spektralnej jest dana wzorem

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|1 - 0.5e^{-i\omega}|^2}{|1 - 0.8e^{-i\omega}|^2} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi].$$

Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 5.3b. Symulację szeregu postaci (5.93) ilustruje rysunek 5.3c, gdzie widzimy wyraźne trendy w pewnych przedziałach czasowych, co jest charakterystyczne dla modeli autoregresji.

Przykład 5.8 Dany jest ciąg liczbowy 0.8, -2.2, -4.6, -2.5, -2.4, 2.3, 3.8, 3.6, 3.3, 0.8, 0.2, 0.1, -0.2, 1.5, -0.1, -2.9, -1.2, -1.3, -1.2, 1.4, 0.8. Na

podstawie realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 21}$ dokonamy identyfikacji modelu $ARMA(1, 1)$. Ze wzoru (5.18) wartości estymatorów funkcji autokowariancji γ_τ dla przesunięć czasowych $\tau = 0, 1, 2$ wynoszą

$$\hat{\gamma}_0 = 4.8, \quad \hat{\gamma}_1 = 3.166, \quad \hat{\gamma}_2 = 1.093,$$

natomiast wartości funkcji autokorelacji r_τ dla przesunięć czasowych $\tau = 1, 2$

$$\hat{r}_1 = 0.66, \quad \hat{r}_2 = 0.23 .$$

Ocena parametru α jest równa

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{r}_2}{\hat{r}_1} = \frac{0.23}{0.66} \approx 0.345 .$$

Dla parametru $\hat{\alpha} = 0.345$ warunek stacjonarności jest spełniony. Korzystając z (5.92) tworzymy układ równań postaci

$$\begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta^2) = 3.18, \\ -\theta \sigma^2 = 1.51 . \end{cases}$$

Z powyższego układu wynika, że parametr θ powinien spełniać równanie

$$\frac{1 + \theta^2}{\theta} = -2.11 .$$

Rozwiązując równanie postaci

$$\theta^2 + 2.11\theta + 1 = 0$$

otrzymujemy pierwiastki $\hat{\theta}_1 = -0.72$ oraz $\hat{\theta}_2 = -1.39$. Tylko pierwiastek $\hat{\theta}_1$ spełnia warunek odwracalności, w tym przypadku estymator wariancji zaburzeń zewnętrznych jest równy $\hat{\sigma}^2 = \frac{1.51}{0.72} \approx 2.1$. Korzystając z testu Kołmogorowa–Smirnowa na poziomie istotności 0.01 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Ostatecznie, szereg $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy przedstawić wzorem

$$\varepsilon_t = 0.345\varepsilon_{t-1} + \epsilon_t + 0.72\epsilon_{t-1},$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 2.1)$.

Przykład 5.9 Niech $\gamma_0 = 1.7$, $\gamma_1 = 0.6$, $\gamma_2 = -0.6$ oraz $\gamma_3 = 0.2$. Wyznamy parametry modelu $ARMA(2,1)$.

Korzystając ze wzoru (5.79) dla modelu $ARMA(2,1)$ tworzymy układ równań

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 1.7 \\ -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.51 \\ -0.17 \end{bmatrix}.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 + 0.51z + 0.17z^2 = 0$$

wynoszą $z_1 \approx -1.5 - 1.9059i$ oraz $z_2 \approx -1.5 + 1.9059i$. Ponieważ $|z_1| = |z_2| > 1$, to warunek stacjonarności jest spełniony. Aby dokonać identyfikacji parametru θ oraz wariancji zaburzeń zewnętrznych σ^2 tworzymy układ równań

$$\begin{cases} \varepsilon_t - \alpha_1 \varepsilon_{t-1} - \alpha_2 \varepsilon_{t-2} = \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}, \\ \varepsilon_{t+1} - \alpha_1 \varepsilon_t - \alpha_2 \varepsilon_{t-1} = \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t. \end{cases}$$

Lewą i prawą część równania pierwszego podnosimy do kwadratu, równanie drugie natomiast mnożymy obustronnie z pierwszym. Stosując operator wartości oczekiwanej otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \gamma_0 [1 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2] + \gamma_1 [2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1] - 2\alpha_2\gamma_2 = \sigma^2 (1 + \theta^2), \\ \gamma_0 [\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1] + \gamma_1 [1 + \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2 + \alpha_2^2] - \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3 = -\theta\sigma^2. \end{cases}$$

Podstawiając wartości estymatorów parametrów a_1 , a_2 oraz wartości kowariancji γ_0 , γ_1 , γ_2 , γ_3 do powyższego układu otrzymujemy

$$\begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta^2) = 3.19464, \\ -\theta\sigma^2 = 1.56577. \end{cases}$$

Rozwiązania powyższego układu równań nieliniowych są następujące:

$$\begin{aligned} I. \quad & \sigma^2 = 1.9132, \quad \theta = -0.81839, \\ II. \quad & \sigma^2 = 1.2814, \quad \theta = -1.2219. \end{aligned}$$

Sprawdzamy warunek odwracalności dla rozwiązania pierwszego. Pierwiastek równania charakterystycznego

$$1 + 0.81839z = 0$$

wynosi $z = -1.2219$. W tym przypadku $|z| > 1$, zatem warunek odwracalności jest spełniony oraz $\sigma = 1.3832$. Następnie sprawdzamy warunek odwracalności dla rozwiązania drugiego. Pierwiastek równania charakterystycznego

$$1 + 1.2219z = 0$$

wynosi $z = -0.81840$. Ponieważ $|z| \leq 1$, to w tym przypadku warunek odwracalności nie jest spełniony.

Ostatecznie szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = -0.51\varepsilon_{t-1} - 0.17\varepsilon_{t-2} + \epsilon_t + 0.81839\epsilon_{t-1},$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0; 1.9132)$.

5.5 Operatory przesunięcia

5.5.1 Problem jednoznaczności identyfikacji modeli ARMA

Podczas identyfikacji szeregów czasowych często powstaje problem z doбором odpowiedniego modelu, który by dokładnie odzwierciedlał zachowanie elementów szeregu czasowego. Znając własności modeli AR, MA, ARMA oraz obserwując zachowanie np. funkcji autokorelacji szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ wstępnie możemy określić klasę, do której należy model opisujący zachowanie elementów w szeregu. Oczywiście, wybierając model bardziej rozbudowany musimy oszacować większą liczbę parametrów, wtedy otrzymujemy dokładniejsze dopasowanie modelu do danych empirycznych. Niestety bardziej rozbudowane modele nie gwarantują dokładniejszej prognozy. Jako przykład rozważmy model ARMA(1,1), w którym współczynnik odpowiedzialny za autoregresję jest identyczny ze współczynnikiem odpowiedzialnym za ruchomą średnią. Niech dany będzie szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$

postaci

$$\varepsilon_t = \alpha \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t - \alpha \epsilon_{t-1}, \quad (5.94)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0; \sigma^2)$. Powyższy model możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t - \epsilon_t = \alpha (\varepsilon_{t-1} - \epsilon_{t-1}),$$

tym samym otrzymujemy

$$\varepsilon_t - \epsilon_t = \alpha^t (\varepsilon_0 - \epsilon_0).$$

Model ARMA(1,1) powinien spełniać warunki stacjonarności i odwracalności, a mianowicie powinna być spełniona nierówność $|\alpha| < 1$. W tym przypadku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^t (\varepsilon_0 - \epsilon_0) = 0,$$

co oznacza, że dla dużych wartości t szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ zachowuje się jak ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$. Identyczny wynik zawarty jest we wniosku 5.7 (dla modelu (5.94) funkcja gęstości spektralnej jest stała, co oznacza że nie ma związku pomiędzy elementami szeregu czasowego). Zatem modelowanie szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ za pomocą ARMA(1,1) postaci (5.94) nie jest racjonalne.

Poniżej przedstawione zostanie proste narzędzie, które umożliwia dokonanie redukcji zbyt rozbudowanych modeli ARMA oraz pomaga przy identyfikacji niestacjonarnych modeli ARIMA (autoregresji i scałkowanej ruchomej średniej).

5.5.2 Operatory F_+ i F_- .

Aby móc dokonać redukcji w modelach ARMA(p, q) posłużymy się operatorami przesunięć czasowych F_+ i F_- (patrz np. [1]). Powyższe operatory dokonują przesunięć o jedną jednostkę czasową. Działania operatorów definiujemy

$$F_+ \varepsilon_t = \varepsilon_{t+1}, \quad (5.95)$$

$$F_- \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}. \quad (5.96)$$

Operatory te wykorzystujemy do modelowania części odpowiadających za autoregresję i ruchomą średnią w szeregach czasowych $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ oraz szeregów zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{t \geq 1}$. Operatory F_+ i F_- spełniają następujące własności:

1. $F_+ = F_-^{-1}$ oraz $F_- = F_+^{-1}$, ponieważ

$$\begin{aligned} F_+(F_- \varepsilon_t) &= F_+(\varepsilon_{t-1}) = \varepsilon_t, \\ F_-(F_+ \varepsilon_t) &= F_-(\varepsilon_{t+1}) = \varepsilon_t. \end{aligned}$$

2. $F_+^k \varepsilon_t = \varepsilon_{t+k}$ oraz $F_-^k \varepsilon_t = \varepsilon_{t-k}$, np. dla $k = 2$ mamy

$$F_+^2 \varepsilon_t = F_+(F_+ \varepsilon_t) = F_+ \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2}.$$

Wobec powyższego dla ustalonych wartości $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ kombinację liniową operatorów F_+ lub F_- możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + \alpha_1 F_- + \dots + \alpha_p F_-^p) \varepsilon_t &= \alpha_0 \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}, \\ (\alpha_0 + \alpha_1 F_+ + \dots + \alpha_p F_+^p) \varepsilon_t &= \alpha_0 \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t+1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t+p}. \end{aligned}$$

W szczególności model ARMA(p, q), $1 \leq p, q < \infty$, postaci

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q},$$

możemy przedstawić za pomocą równania

$$A_p(F_-, \alpha) \varepsilon_t = B_q(F_-, \theta) \epsilon_t, \quad (5.97)$$

gdzie operatory autoregresji $A_p(F_-, \alpha)$ i ruchomej średniej $B_q(F_-, \theta)$ dane są wzorami

$$A_p(F_-, \alpha) = 1 - \alpha_1 F_- - \alpha_2 F_-^2 - \dots - \alpha_p F_-^p, \quad (5.98)$$

$$B_q(F_-, \theta) = 1 - \theta_1 F_- - \theta_2 F_-^2 - \dots - \theta_q F_-^q. \quad (5.99)$$

Identycznie model AR(p), $1 \leq p < \infty$ postaci (5.44) możemy przedstawić wzorem

$$A_p(F_-, \alpha) \varepsilon_t = \epsilon_t,$$

natomiast model $MA(q)$, $1 \leq q < \infty$ postaci (5.59) możemy przedstawić wzorem

$$\varepsilon_t = B_q(F_-, \theta) \epsilon_t.$$

Równanie

$$A_p(z, \alpha) = 0 \quad (5.100)$$

jest równaniem charakterystycznym procesu $AR(p)$, $1 \leq p < \infty$ lub równaniem charakterystycznym autoregresji dla $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$. Niech $\chi_1, \dots, \chi_p$ będą pierwiastkami równania (5.100) oraz spełniając warunek stacjonarności, czyli $|\chi_i| > 1$ dla $i = 1, \dots, p$. Zatem operator autoregresji w równaniu charakterystycznym (5.100) możemy przedstawić wzorem

$$A_p(z, \alpha) = \left(1 - \frac{z}{\chi_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\chi_p}\right). \quad (5.101)$$

W sposób identyczny równanie

$$B_q(z, \alpha) = 0 \quad (5.102)$$

jest równaniem charakterystycznym procesu $MA(q)$, $1 \leq q < \infty$ lub równaniem charakterystycznym odpowiadającym za ruchomą średnią w modelu $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$. Niech $\varkappa_1, \dots, \varkappa_q$ będą pierwiastkami równania (5.102) oraz spełniając warunek odwracalności, czyli $|\varkappa_i| > 1$ dla $i = 1, \dots, q$. Zatem operator ruchomej średniej w równaniu (5.102) możemy przedstawić w postaci

$$B_q(z, \alpha) = \left(1 - \frac{z}{\varkappa_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\varkappa_q}\right). \quad (5.103)$$

Podstawiając (5.101) oraz (5.103) do równania (5.97) otrzymujemy

$$\left(1 - \frac{1}{\chi_1} F_-\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\chi_p} F_-\right) \varepsilon_t = \left(1 - \frac{1}{\varkappa_1} F_-\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\varkappa_q} F_-\right) \epsilon_t. \quad (5.104)$$

Szeregi czasowe stacjonarne słabo jednoznacznie mogą być określone za pomocą funkcji autokowariancji γ_t dla $t \in \mathbb{N}_0$. Mówimy, że szeregi czasowe mające taką samą funkcję autokowariancji mają identyczną strukturę kowariancyjną. Analizując modele $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$

możemy zauważyć, że znając wartości funkcji autokowariancji możemy dokonać identyfikacji tych modeli. Pamiętamy, że podczas identyfikacji powinien być spełniony warunek stacjonarności dla $AR(p)$, odwracalności dla $MA(q)$ oraz stacjonarności i odwracalności jednocześnie dla $ARMA(p, q)$.

Modele liniowe postaci

$$\prod_{j=1}^p \left(1 - \frac{1}{\chi_j} F_{\pm}\right) \varepsilon_t = \prod_{j=1}^q \left(1 - \frac{1}{\varkappa_j} F_{\pm}\right) \epsilon_t$$

mają identyczną strukturę kowariancyjną, przy tym możliwa jest dowolna kombinacja indeksów "–" i "+" operatora F . Wobec powyższego modele $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$ postaci

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t+1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t+p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t+1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t+q} \quad (5.105)$$

oraz

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (5.106)$$

mają identyczną strukturę kowariancyjną, z tym że w modelu (5.106) wartości ε_t zależą od wartości przeszłych szeregu czasowego $(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p})$, natomiast w modelu (5.105) wartości ε_t zależą od wartości przyszłych szeregu czasowego $(\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots, \varepsilon_{t+p})$. Model (5.106) jest wykorzystywany do predykcji (prognozy przyszłości), natomiast model (5.105) jest wykorzystywany do konstrukcji "prognozy wstecz", między innymi do odzyskania danych utraconych (przypadkowo skasowanych, niezarejestrowanych).

5.5.3 Sposoby redukcji modeli ARMA

Podczas identyfikacji szeregów czasowych należy unikać zbędnej liczby parametrów w modelu. Poniżej zostaną podane sposoby redukcji rzędów autoregresji i ruchomej średniej w modelach $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$. Zakładamy, że elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone za pomocą równania (5.97) oraz są spełnione warunki stacjonarności i odwracalności.

Sposób I.

Jeżeli operatory autoregresji $A_p(F_-, \alpha)$ i ruchomej średniej $B_q(F_-, \theta)$ w modelu postaci (5.97) są wymnożone przez ten sam mnożnik $(1 - \lambda F_-)$, to modele $\text{ARMA}(p, q)$ postaci (5.97) oraz $\text{ARMA}(p+1, q+1)$ postaci

$$(1 - \lambda F_-) A_p(F_-, \alpha) \varepsilon_t = (1 - \lambda F_-) B_q(F_-, \theta) \epsilon_t \quad (5.107)$$

są równoważne, gdzie $|\lambda| < 1$ (ponieważ warunki stacjonarności i odwracalności powinny być spełnione).

Powyższe stwierdzenie pomaga unikać zbędnych mnożników podczas identyfikacji modeli $\text{ARMA}(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$.

Przykład 5.10 Niech dany będzie szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, którego elementy są określone wzorem

$$\varepsilon_t = 1.1\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2} + \epsilon_t - 0.6\epsilon_{t-1}, \quad (5.108)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0; \sigma^2)$. Dokonamy redukcji powyższego modelu.

Równanie (5.108) dla modelu $\text{ARMA}(2, 1)$ możemy przedstawić w postaci

$$(1 - 1.1F_- + 0.3F_-^2) \varepsilon_t = (1 - 0.6F_-) \epsilon_t .$$

Po rozłożeniu na mnożniki otrzymujemy

$$(1 - 0.5F_-)(1 - 0.6F_-) \varepsilon_t = (1 - 0.6F_-) \epsilon_t .$$

Widzimy, że redukując obustronnie mnożnik $(1 - 0.6F_-)$, model $\text{ARMA}(2, 1)$ możemy sprowadzić do modelu $\text{AR}(1)$ o równaniu

$$(1 - 0.5F_-) \varepsilon_t = \epsilon_t$$

lub

$$\varepsilon_t = 0.5\varepsilon_{t-1} + \epsilon_t ,$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0; \sigma^2)$.

Sposób II.

W praktyce w modelach ARMA(p, q), $1 \leq p, q < \infty$ mnożniki zbliżone

$$(1 - \lambda F_-) \approx (1 - \tilde{\lambda} F_-) \iff \lambda \approx \tilde{\lambda}$$

również podlegają redukcji, np. model ARMA(2, 1) postaci

$$(1 - 0.4F_-)(1 - 0.7F_-)\varepsilon_t = (1 - 0.402F_-)\varepsilon_t$$

redukujemy do modelu AR(1)

$$\varepsilon_t = 0.7\varepsilon_{t-1} + \epsilon_t,$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0; \sigma^2)$.

Sposób III.

Dla operatorów autoregresji $A_p(F_-, \alpha)$ i ruchomej średniej $B_q(F_-, \theta)$ elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci (5.97) możemy przedstawić za pomocą równania

$$\frac{A_p(F_-, \alpha)}{B_q(F_-, \theta)} \varepsilon_t = \epsilon_t,$$

gdzie

$$\frac{A_p(F_-, \alpha)}{B_q(F_-, \theta)} = \frac{\prod_{j=1}^p \left(1 - \frac{1}{\chi_j} F_-\right)}{\prod_{j=1}^q \left(1 - \frac{1}{\varkappa_j} F_-\right)}. \quad (5.109)$$

Ponieważ szereg czasowy postaci ARMA(p, q), $1 \leq p, q < \infty$ spełnia warunki stacjonarności i odwracalności, to współczynniki $\frac{1}{\chi_1}, \dots, \frac{1}{\chi_p}$ spełniają warunek $\left|\frac{1}{\chi_j}\right| < 1$ dla $j = 1, 2, \dots, p$, natomiast współczynniki $\frac{1}{\varkappa_1}, \dots, \frac{1}{\varkappa_q}$ spełniają warunek $\left|\frac{1}{\varkappa_j}\right| < 1$ dla $j = 1, 2, \dots, q$. Ze wzoru na sumę elementów szeregu geometrycznego każdy z mnożników $\left(1 - \frac{1}{\varkappa_j} F_-\right)$ dla $j = 1, 2, \dots, q$ (odpowiadający za ruchomą średnią) możemy przedstawić za pomocą wzoru

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\varkappa_j} F_-} = 1 + \frac{1}{\varkappa_j} F_- + \frac{1}{\varkappa_j^2} F_-^2 + \frac{1}{\varkappa_j^3} F_-^3 + \dots \quad (5.110)$$

Podstawiając (5.110) do (5.109) oraz wymnażając otrzymujemy nieskończoną sumę operatorów przesunięć dla autoregresji. Dla tak otrzymanego rozłożenia ograniczamy się tylko pierwszymi członami, dla których współczynniki są wyraźnie różne od zera. Tym sposobem model autoregresji i ruchomej średniej $ARMA(p, q)$, $1 \leq p, q < \infty$ możemy zredukować do modelu autoregresji $AR(\tilde{p})$, gdzie $\tilde{p} \leq p + q$.

Przykład 5.11 *Dokonyamy redukcji modelu $ARMA(2, 1)$ o równaniu*

$$(1 - 0.4F_-)(1 - 0.8F_-)\varepsilon_t = (1 - 0.5F_-)\epsilon_t \quad (5.111)$$

do modeli $AR(1)$ oraz $AR(2)$. Dodatkowo dokonamy symulacji modeli $ARMA(2, 1)$, $AR(1)$ i $AR(2)$ dla $0 \leq t \leq 100$, gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0; 0.25)$ oraz $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 0.8$, $\epsilon_1 = 0$.

Rozwiązanie. *Model $ARMA(2, 1)$ postaci (5.111) możemy przedstawić za pomocą równania*

$$\varepsilon_t = 1.2\varepsilon_{t-1} - 0.32\varepsilon_{t-2} + \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1}, \quad (5.112)$$

które wykorzystamy do symulacji. Natomiast korzystając ze wzorów (5.109) i (5.110) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{A_2(F_-, \alpha)}{B_1(F_-, \theta)} &= \frac{(1 - 0.4F_-)(1 - 0.8F_-)}{(1 - 0.5F_-)} \\ &= (1 - 0.4F_-)(1 - 0.8F_-)(1 + 0.5F_- + 0.25F_-^2 + 0.125F_-^3 + \dots) \\ &= 1 - 0.7F_- - 0.03F_-^2 - 0.015F_-^3 - 0.008F_-^4 - \dots \end{aligned} \quad (5.113)$$

Ograniczając tylko do pierwszych dwóch członów rozwinięcia (5.113) model $ARMA(2, 1)$ redukujemy do $AR(1)$. Elementy szeregu $\{\varepsilon_t^1\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ przedstawiamy za pomocą równania

$$(1 - 0.7F_-)\varepsilon_t^1 = \epsilon_t,$$

które sprowadzamy do postaci

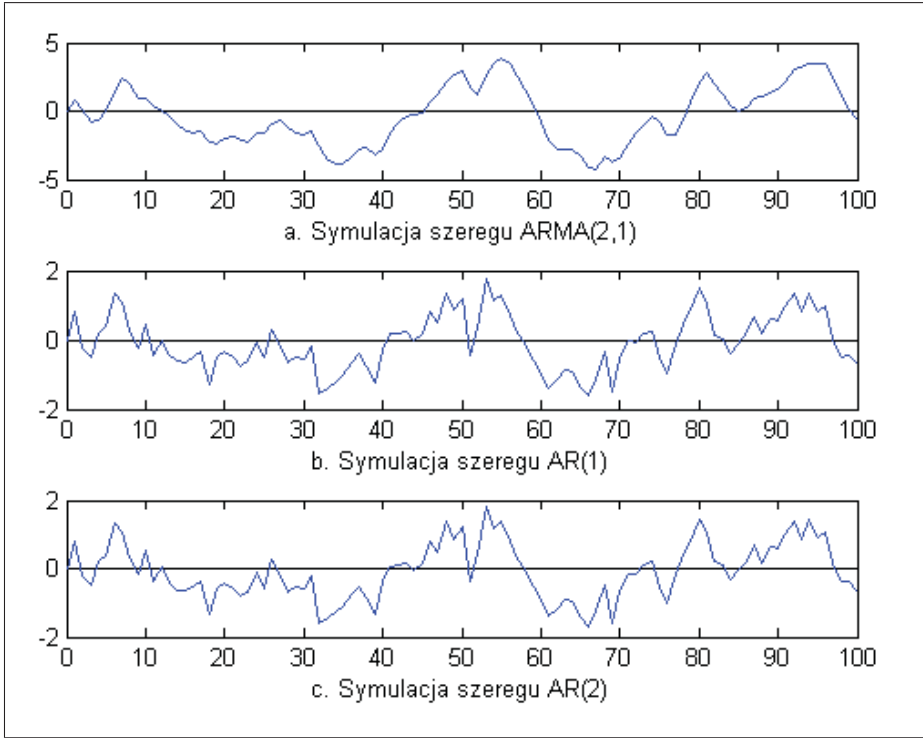
$$\varepsilon_t^1 = 0.7\varepsilon_{t-1}^1 + \epsilon_t. \quad (5.114)$$

Jeżeli ograniczymy rozwinięcie (5.113) tylko do pierwszych trzech członów, to model ARMA(2,1) redukujemy do AR(2). Elementy szeregu $\{\varepsilon_t^2\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ przedstawiamy wtedy za pomocą równania

$$(1 - 0.7F_- - 0.03F_-^2) \varepsilon_t^2 = \epsilon_t$$

lub

$$\varepsilon_t^2 = 0.7\varepsilon_{t-1}^2 + 0.03\varepsilon_{t-2}^2 + \epsilon_t. \quad (5.115)$$



Rysunek 5.4: Symulacje szeregu ARMA(2,1) oraz szeregów zredukowanych do AR(1) i AR(2).

Wykonując symulację zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$ możemy wygenerować trajektorie szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$, $\{\varepsilon_t^1\}_{0 \leq t \leq 100}$ i $\{\varepsilon_t^2\}_{0 \leq t \leq 100}$ o równaniach stanu (5.112), (5.114) oraz (5.115) odpowiednio. Rysunek 5.4a przedstawia trajektorię szeregu $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ postaci ARMA(2,1), rysunek 5.4b przedstawia trajektorię szeregu czasowego $\{\varepsilon_t^1\}_{0 \leq t \leq 100}$ postaci AR(1), natomiast rysunek 5.4c przedstawia trajektorię szeregu czasowego $\{\varepsilon_t^2\}_{0 \leq t \leq 100}$

postaci $AR(2)$ dla tego samego ciągu zaburzeń $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$. Z rysunku 5.4 widzimy, że szeregi postaci $ARMA(2,1)$, $AR(1)$, $AR(2)$ zachowują się podobnie. Dodatkowo trajektoria szeregu $ARMA(2,1)$ jest bardziej wygładzona niż trajektorie szeregów $AR(1)$ i $AR(2)$. Jest to spowodowane istnieniem ruchomej średniej w modelu (5.112), która częściowo niweluje (tłumi) wpływy zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$ w modelu.

Uwaga 5.5 Ostatecznego wyboru parametrów modelu, jak również wyboru rzędu autoregresji i ruchomej średniej (czyli p i q) należy dokonać dopiero po identyfikacji $ARMA(p,q)$. Jeżeli uda się dokonać redukcji do postaci $ARMA(\tilde{p}, \tilde{q})$ (gdzie $\tilde{p} + \tilde{q} < p + q$), $AR(\tilde{p})$ (gdzie $\tilde{p} < p + q$) lub $MA(\tilde{q})$ (gdzie $\tilde{q} < p + q$), to następnie od początku należy przeprowadzić proces identyfikacji modelu zredukowanego.

Rozdział 6

Analiza stacjonarności szeregów czasowych

6.1 Modele niestacjonarne

Poniżej przedstawione zostaną różnice w zachowaniu szeregów stacjonarnych oraz szeregów niespełniających warunków stacjonarności. W tym celu omówione zostanie zachowanie elementów najprostszego modelu z rodziny autoregresji, dokładniej modelu AR(1). Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$ (biały szum), gdzie

$$E\epsilon_t = 0, \quad (6.1)$$

$$E\epsilon_t \epsilon_s = \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } \tau = s, \\ 0, & \text{dla } \tau \neq s. \end{cases} \quad (6.2)$$

Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiujemy niemalejącą rodzinę σ -ciał $\mathcal{F}_j = \sigma\{\epsilon_i : i = 0, 1, \dots, j\}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Niech dany będzie szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci

$$\varepsilon_t = a\varepsilon_{t-1} + \epsilon_t. \quad (6.3)$$

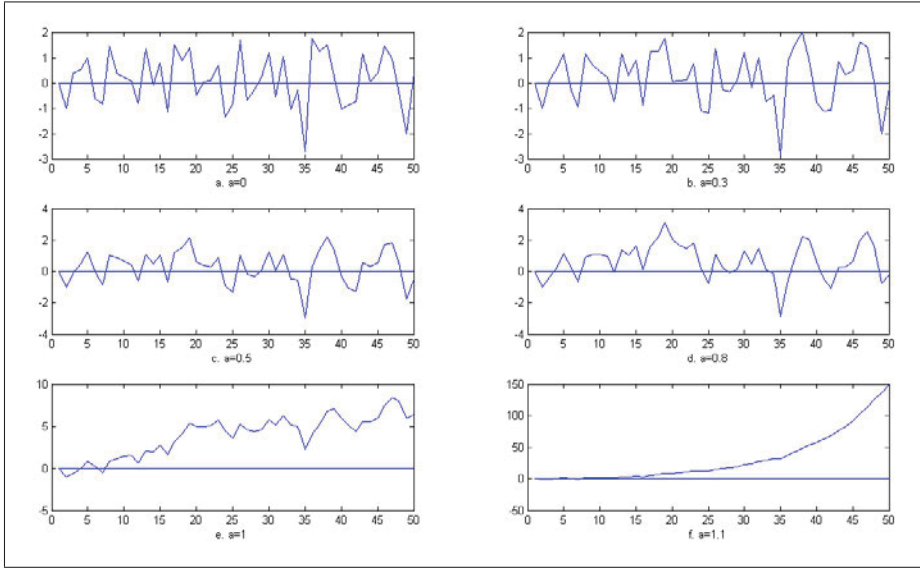
Jeżeli $|a| < 1$, to powyższy model autoregresji AR(1) spełnia warunek stacjonarności. W poprzednim rozdziale pokazano, że każdy z szeregów autoregresji rzędu $1 \leq p < \infty$ możemy przedstawić w postaci ruchomej średniej rzędu

nieskończoność. Szeregi spełniające warunek stacjonarności mają skończone drugie momenty, stałą wartość oczekiwaną oraz kowariancja zależy tylko od przesunięcia $\tau \in \mathbb{N}_0$. Powstaje zatem pytanie, jak się zachowują szeregi postaci (6.3), jeżeli warunek stacjonarności nie jest spełniony. Dla $\epsilon_0 = \varepsilon_0 = 0$ oraz wygenerowanej trajektorii białego szumu $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ rysunek 6.1 przedstawia trajektorie szeregów określonych za pomocą równania (6.3). Wykres 6.1.a przedstawia trajektorię szeregu (6.3) dla $a = 0$ – dokładnie trajektorię szeregu $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$, który oscyluje dookoła zera (wymuszenia zewnętrzne nie mają większego wpływu na zachowanie szeregu). Wykresy 6.1.b, 6.1.c, 6.1.d przedstawiają trajektorie stacjonarnych szeregów AR(1) dla $a = 0.3$, $a = 0.5$, $a = 0.8$ odpowiednio. Widzimy, że w każdym z tych przypadków trajektorie szeregów oscylują dookoła poziomu zerowego, natomiast wpływy wymuszeń zewnętrznych w tych szeregach z czasem są niwelowane i z upływem czasu trajektoria powraca do stanu równowagi (do poziomu zerowego). Wraz ze wzrostem parametru a powrót do poziomu zerowego jest coraz rzadszy (występują coraz dłuższe okresy, gdzie wartości szeregu są stale dodatnie lub stale ujemne). Dla $a = 1$ szereg czasowy postaci

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (6.4)$$

nie spełnia warunku stacjonarności. Na rysunku 6.1.e widzimy, że zachowuje się zupełnie inaczej niż szeregi stacjonarne.

Na rysunku 6.1.e widzimy, że trajektoria szeregu o równaniu (6.4) bardzo rzadko przecina poziom zero oraz może się oddalać od tego poziomu na dość duże odległości. W literaturze przedmiotu szereg czasowy postaci (6.4) jest określany jako błądzenie losowe (random walk). Dla $a = 1.1$ realizacja szeregu $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$ (patrz rysunek 6.1.d) ma wybuchowy (explosive) charakter. Trajektoria tego szeregu bardzo szybko oddala się od poziomu zerowego. Widzimy, że dla $\alpha \geq 1$ wymuszenia zewnętrzne nie wygasają z czasem, wpływają na realizację szeregu w przyszłości. Wartości średnie μ_a realizacji $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$ dla $a \in \{0, 0.3, 0.5, 0.8, 1, 1.1\}$ przedstawia tabela poniżej.



Rysunek 6.1: Symulacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$ modeli autoregresji rzędu pierwszego dla $a \in \{0, 0.3, 0.5, 0.8, 1, 1.1\}$

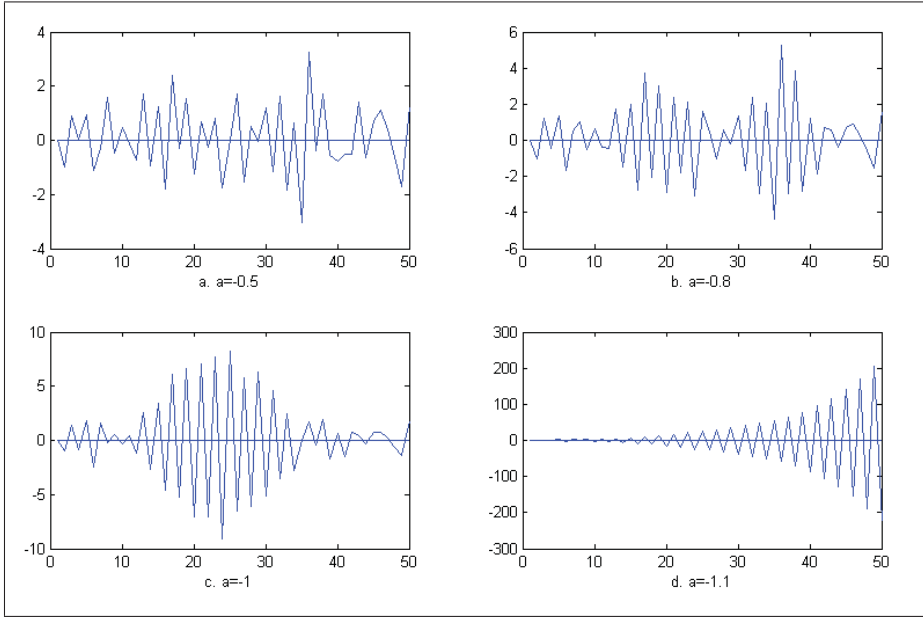
	$a = 0$	$a = 0.3$	$a = 0.5$	$a = 0.8$	$a = 1$	$a = 1.1$
μ_a	0.1268	0.1831	0.2636	0.6500	3.8850	31.5690

Szeregi stacjonarne oscylują dookoła zera, natomiast dla szeregów niestacjonarnych wartość średnia wygenerowanych realizacji zdecydowanie różni się od zera.

Rysunek 6.2 przedstawia realizacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$ dla ujemnych wartości parametru α . W przypadkach $a = -0.5$ oraz $a = -0.8$ (patrz wykresy 6.2.a- 6.2.b) trajektorie są podobne jak dla stacjonarnych modeli autoregresji (oscylują dookoła poziomu zero oraz amplituda wahań jest stała). W przypadku $a = -1$ oraz $a = -1.1$ realizacje tych szeregów również oscylują dookoła poziomu zero, natomiast amplituda wahań nie jest stała. Dla $a = -1$ zmienia się w czasie (patrz wykres 6.2.c), natomiast dla $a = -1.1$ zdecydowanie wzrasta (patrz wykres 6.2.d).

Przedstawienie szeregu (6.3) w postaci różnic ułatwia analizę jego własności. W równaniu (6.3) odejmując obustronnie ε_{t-1} otrzymujemy

$$\Delta \varepsilon_t = \kappa \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.5)$$



Rysunek 6.2: Symulacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$ modeli autoregresji rzędu pierwszego dla $a \in \{-0.5, -0.8, -1, -1.1\}$

gdzie operator Δ jest określony za pomocą (2.40) oraz $\kappa = a - 1$, natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Dla $t \in \mathbb{N}$ warunkowa wartość oczekiwana jest równa

$$E(\Delta \varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \kappa \varepsilon_{t-1}. \quad (6.6)$$

Jeżeli $\kappa = 0$ ($a = 1$), to wartość oczekiwana różnic elementów ε_t i ε_{t-1} przy ustalonym ε_{t-1} wynosi zero oraz

$$E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \varepsilon_{t-1} \text{ dla } t \in \mathbb{N}.$$

Oznacza to, że przy ustalonej wartości ε_{t-1} wartość ε_t może się okazać zarówno większa jak i mniejsza od wartości ε_{t-1} . Dla $\kappa = 0$ ($a = 1$) dokładnie ta własność określa losowy charakter zachowania tego szeregu.

Jeżeli $\kappa > 0$ ($a > 1$), to wartość oczekiwana różnic elementów ε_t i ε_{t-1} przy ustalonym ε_{t-1} ma taki sam znak jak ε_{t-1} . Ze wzoru (6.3) wynika, że dla $\varepsilon_{t-1} > 0$ wartość oczekiwana kolejnej realizacji ε_t jest większa od ε_{t-1} , natomiast dla $\varepsilon_{t-1} < 0$ wartość oczekiwana kolejnej realizacji ε_t

jest mniejsza od ε_{t-1} . Zatem $E(|\varepsilon_t| | \mathcal{F}_{t-1}) > |\varepsilon_{t-1}|$ dla $t \in \mathbb{N}$. Taki mechanizm doprowadza do szybkiego i progresywnego oddalania się od stanu początkowego.

Jeżeli $-2 < \kappa < 0$ ($-1 < a < 1$), to wartość oczekiwana różnic elementów ε_t i ε_{t-1} przy ustalonym ε_{t-1} ma znak przeciwny niż ε_{t-1} . Zatem dla $\varepsilon_{t-1} > 0$ wartość oczekiwana kolejnej realizacji ε_t jest mniejsza od ε_{t-1} , natomiast dla $\varepsilon_{t-1} < 0$ wartość oczekiwana kolejnej realizacji ε_t jest większa od ε_{t-1} , tzn. $E(|\varepsilon_t| | \mathcal{F}_{t-1}) < |\varepsilon_{t-1}|$ dla $t \in \mathbb{N}$. Taki mechanizm utrzymuje realizacje szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ blisko poziomu zerowego (elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ oscylują dookoła zera).

Jeżeli $\kappa \leq -2$ ($a \leq -1$), to zarówno wartość oczekiwana różnic elementów ε_t i ε_{t-1} przy ustalonym ε_{t-1} oraz realizacja ε_t mają znaki przeciwne niż ε_{t-1} . Oczekiwana wartość bezwzględna ε_t jest większa od wartości bezwzględnej ε_{t-1} (progresywny wzrost wartości bezwzględnych $E(|\varepsilon_t| | \mathcal{F}_{t-1}) > |\varepsilon_{t-1}|$ dla $t \in \mathbb{N}$). Taki mechanizm powoduje, że realizacje procesu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ oscylują dookoła zera z coraz większą amplitudą wahań.

Model trendu stochastycznego.

Poniżej przedstawione zostaną własności błędzenia losowego. Model błędzenia losowego (6.4) w literaturze przedmiotu również jest określany jako model trendu stochastycznego. Niech szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ będzie określony za pomocą równania (6.4) z warunkiem początkowym $\varepsilon_0 = 0$. Elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci (6.4) możemy również przedstawić za pomocą wzoru

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^t \epsilon_i \text{ dla } t \in \mathbb{N}.$$

Korzystając ze wzorów (6.1) i (6.2) stwierdzamy, że dla $t \in \mathbb{N}$ wartość oczekiwana wynosi

$$E\varepsilon_t = \sum_{i=1}^t E\epsilon_i = 0,$$

a wariancja jest równa

$$\gamma_0(t) = E\varepsilon_t^2 = E \left[\sum_{i=1}^t \epsilon_i \right]^2 = \sum_{j=1}^t \sigma^2 = t\sigma^2.$$

Kowariancja oraz współczynnik korelacji pomiędzy elementami ε_t oraz $\varepsilon_{t-\tau}$ dla $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq \tau < t$ są równe odpowiednio

$$\gamma_\tau(t) = E\varepsilon_t\varepsilon_{t-\tau} = E\left[\sum_{i=1}^t \epsilon_i\right]\left[\sum_{i=1}^{t-\tau} \epsilon_i\right] = (t-\tau)\sigma^2,$$

$$r_\tau(t) = \frac{\gamma_\tau(t)}{\sqrt{\gamma_0(t)\gamma_0(t-\tau)}} = \frac{(t-\tau)}{\sqrt{t(t-\tau)}} = \sqrt{1 - \frac{\tau}{t}}.$$

Stąd

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{t}} = 1.$$

Zatem wraz ze wzrostem $t \in \mathbb{N}$ współczynnik korelacji dąży do 1, co oznacza że sąsiednie elementy ε_t i ε_{t-1} procesu błędzenia losowego dla $t \rightarrow \infty$ są mocno ze sobą skorelowane. Dodatkowo współczynnik korelacji jest dodatni. To między innymi wyjaśnia sposób zachowania procesu błędzenia losowego. W pierwszych krokach trajektoria "postanawia" gdzie będzie się znajdować w ciągu dłuższego okresu, tzn. jeżeli po pierwszych krokach trajektoria błędzenia losowego znajduje się powyżej poziomu zero, to tam pozostanie przez dłuższy okres. Dokonując dłuższej symulacji można zauważyć, że trajektoria procesu błędzenia losowego składa się z długich kawałków, na których przyjmuje tylko wartości dodatnie bądź tylko ujemne. Model trendu stochastycznego dość często jest uwzględniany podczas analizy zjawisk ekonomicznych (patrz np. [52]-[53], [57]). Model trendu stochastycznego z czasem ciągłym w literaturze jest nazywany procesem Wienera (patrz [36], [51], [52], [53], [57]).

Wniosek 6.1 *Proces błędzenia losowego jest procesem niestacjonarnym. Wariancja elementów szeregu czasowego nie jest stała – wariancja kolejnych elementów wzrasta wraz ze wzrostem t . Kowariancja pomiędzy elementami ε_t i $\varepsilon_{t-\tau}$ zależy nie tylko od przesunięcia τ ale również zależy od momentu t . Wraz ze wzrostem t elementy w szeregu czasowym są ze sobą coraz mocniej skorelowane.*

6.2 Szeregi TS i DS

Zjawiska ekonomiczne, techniczne, fizyczne nie zawsze dają się opisać za pomocą sumy trendu deterministycznego (jako kombinacji liniowej czynników trendu, sezonowości i koniunkturalnego) oraz zaburzeń zewnętrznych. Niektóre zjawiska posiadają trend stochastyczny (np. systemy z całkowitą pamięcią poprzednich zaburzeń zewnętrznych), co uniemożliwia konstrukcję dokładnych prognoz długookresowych. Aby pokazać znaczące różnice pomiędzy trendem deterministycznym i stochastycznym rozważmy dwa proste systemy, które są opisywane za pomocą niestacjonarnych modeli szeregów czasowych.

Model I (złożenie trendu deterministycznego i białego szumu).

Niech dany będzie szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, elementy którego są określone za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 + at + \epsilon_t, \quad (6.7)$$

gdzie $\varepsilon_0, a \in \mathbb{R}$ oraz $\epsilon_0 = 0$, natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Dla każdego $t \in \mathbb{N}$ wartość oczekiwana oraz wariancja elementów szeregu postaci (6.7) wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} E\varepsilon_t &= \varepsilon_0 + at, \\ \text{Var}(\varepsilon_t) &= E(\varepsilon_t - \varepsilon_0 - at)^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci (6.7) są zdefiniowane jako suma trendu $\varepsilon_0 + at$ oraz zaburzeń zewnętrznych ϵ_t w postaci białego szumu. Po wydzieleniu z szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ trendu deterministycznego $\varepsilon_0 + at$ otrzymujemy szereg $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci

$$\epsilon_t = \varepsilon_t - (\varepsilon_0 + at).$$

Jest to zwykły biały szum, który spełnia własność stacjonarności. Dla każdego $t \in \mathbb{N}_0$ wartość oczekiwana oraz wariancja elementów szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$

wynoszą

$$\begin{aligned} E\epsilon_t &= 0, \\ Var(\epsilon_t) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Model II (błądzenie losowe z dryfem).

Niech dany będzie szereg czasowy $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, elementy którego są określone za pomocą wzoru

$$\zeta_t = a + \zeta_{t-1} + \epsilon_t \quad (6.8)$$

z warunkiem początkowym $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon_0 = 0$, natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Dla $t \in \mathbb{N}$ elementy szeregu czasowego postaci (6.8) możemy również przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \zeta_t &= a + (a + \zeta_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t = \dots \\ &= \zeta_0 + at + \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \dots + \epsilon_1 = \zeta_0 + at + \sum_{j=1}^t \epsilon_j. \end{aligned}$$

Dla każdego $t \in \mathbb{N}$ wartość oczekiwana wynosi

$$E\zeta_t = \zeta_0 + at,$$

natomiast wariancja elementów szeregu $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest równa

$$Var(\zeta_t) = E(\zeta_t - \zeta_0 - at)^2 = E\left(\sum_{j=1}^t \epsilon_j\right)^2 = t\sigma^2.$$

Wariancja elementów szeregu $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ nie jest stała. W rozważanym przypadku elementy szeregu postaci (6.7) są określone jako suma trendu $\zeta_0 + at$ i suma zaburzeń zewnętrznych $\sum_{j=1}^t \epsilon_j$. Po wydzieleniu z tego szeregu trendu deterministycznego $\zeta_0 + at$ otrzymujemy szereg $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci

$$\eta_t = \zeta_t - (\zeta_0 + at) = \sum_{j=1}^t \epsilon_j,$$

gdzie $\eta_0 = \epsilon_0 = 0$. Jest to model błędzenia losowego – szereg niestacjonarny. Dla każdego $t \in \mathbb{N}$ wartość oczekiwana oraz wariancja sumy zaburzeń zewnętrznych wynoszą odpowiednio

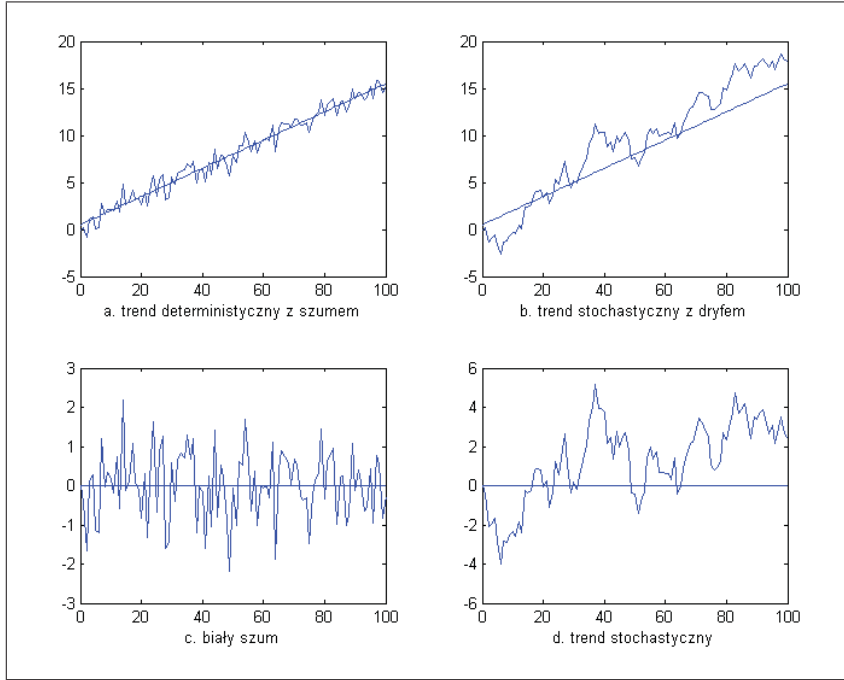
$$\begin{aligned} E\eta_t &= E\left(\sum_{j=1}^t \epsilon_j\right) = 0, \\ \text{Var}(\eta_t) &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^t \epsilon_j\right) = t\sigma^2. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że jeżeli warunki początkowe są identyczne $\varepsilon_0 = \zeta_0$, to elementy szeregów $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ i $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ (postaci (6.7) i (6.8) odpowiednio) oscylują dookoła tego samego trendu $E\varepsilon_t = E\zeta_t = \varepsilon_0 + at$, natomiast sposób zachowania tych szeregów jest zupełnie inny. Trajektoria szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ dość często przecina linię trendu $\varepsilon_0 + at$ (wariancja elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stała i równa σ^2), natomiast trajektoria szeregu $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ często się oddala od tej linii trendu (wariancja elementów szeregu $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ nie jest stała oraz wynosi $t\sigma^2$, wzrasta wraz ze wzrostem t). Dla wygenerowanej trajektorii białego szumu $\{\epsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ ($\epsilon_0 = 0$), warunku początkowego $\varepsilon_0 = \zeta_0 = 0.5$ oraz współczynnika kierunkowego/dryfu $a = 0.15$ zachowanie szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ i $\{\zeta_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ przedstawiają rysunki 6.3.a i 6.3.b odpowiednio.

Wydzielenie trendu deterministycznego z szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ skutkuje otrzymaniem procesu stacjonarnego w postaci białego szumu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ (patrz rysunek 6.3.c), natomiast po wydzieleniu trendu deterministycznego z szeregu $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ pozostaje trend stochastyczny $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ – proces niestacjonarny w postaci błędzenia losowego (patrz rysunek 6.3.d).

Definicja 6.1 Szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny względem trendu $f(t)$, jeżeli szereg postaci $\{x_t - f(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny, gdzie $f(\cdot)$ jest funkcją deterministyczną.

Klasę szeregów czasowych stacjonarnych względem trendu deterministycznego nazywamy klasą **TS** (*trend stationary*). Każdy szereg stacjonarny należy do klasy **TS** (trend deterministyczny występuje w postaci stałej).



Rysunek 6.3: Realizacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ i $\{\zeta_t\}_{0 \leq t \leq 100}$, trajektorie białego szumu $\{\epsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ i błędzenia losowego $\{\eta_t\}_{0 \leq t \leq 100}$.

Zastosujemy operator różnicowy Δ określony za pomocą wzoru (2.40) do szeregów $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ i $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci (6.7) i (6.8) odpowiednio. Dla $t \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\Delta \varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = a + \epsilon_t - \epsilon_{t-1},$$

$$\Delta \zeta_t = \zeta_t - \zeta_{t-1} = a + \epsilon_t.$$

Każdy z otrzymanych szeregów czasowych $\{\Delta \varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ i $\{\Delta \zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek stacjonarności. Widzimy zatem, że szereg czasowy $\{\Delta \varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ruchomą średnią rzędu pierwszego – MA(1), dla którego warunek odwracalności nie jest spełniony (szeregu klasy MA(q), $1 \leq q < \infty$ nie spełniającego warunku odwracalności nie można wykorzystywać do prognoz, patrz np. [25]). Natomiast elementy szeregu czasowego $\{\Delta \zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone jako suma stałej a i białego szumu. Zatem różnicowanie kolejnych elementów (zastosowanie operatora Δ) niestacjonarnych szeregów czasowych $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$

i $\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ pozwala sprowadzić je do szeregów stacjonarnych.

Wniosek 6.2 *Jeżeli niestacjonarny szereg czasowy posiada trend stochastyczny, to wydzielenie tylko trendu deterministycznego z tego szeregu nie sprowadzi go do szeregu stacjonarnego. Dopiero zastosowanie operatora różnicowego pozwala wyeliminować niestacjonarność związaną z trendem stochastycznym.*

Model III (proces zintegrowany).

Niech dany będzie szereg czasowy $\{v_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, elementy którego są określone równaniem

$$\nu_t = \nu_0 + \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1} + \dots + t\epsilon_1 = \nu_0 + \sum_{j=1}^t (t-j+1) \epsilon_j, \quad (6.9)$$

gdzie $t \in \mathbb{N}$ oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$, natomiast ν_0 określa stan początkowy. Dla każdego $t \in \mathbb{N}_0$ wartość oczekiwana elementów szeregu $\{v_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ wynosi

$$E\nu_t = \nu_0,$$

natomiast wariancja

$$\begin{aligned} \text{Var}(\nu_t) &= E \left(\sum_{j=1}^t (t-j+1) \epsilon_j \right)^2 \\ &= (1 + 2^2 + \dots + t^2) \sigma^2 = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} \sigma^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Stosując operator różnicowy Δ otrzymujemy szereg $\{\Delta\nu_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci

$$\Delta\nu_t = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_t = \sum_{j=1}^t \epsilon_j.$$

Widzimy, że szereg $\{\Delta\nu_t\}_{t \geq 1}$ reprezentuje proces błędzenia losowego, który nadal posiada trend stochastyczny (własność stacjonarności nie jest spełniona). Stosując kolejny raz operator różnicowy Δ otrzymujemy szereg $\{\Delta^2\nu_t\}_{t \geq 2}$ o równaniu stanu

$$\Delta^2\nu_t = \epsilon_t.$$

Dopiero szereg $\{\Delta^2 \nu_t\}_{t \geq 2}$ spełnia warunek stacjonarności. W tym przypadku zastosowanie podwójnego operatora różnicowego wyeliminowało trend stochastyczny z szeregu postaci (6.9).

Engle R.F. i Granger C.W.J wprowadzili definicję zmiennej zintegrowanej (patrz [20]). Według Engle R.F. i Granger C.W.J zmienna jest zintegrowana, jeżeli jest niestacjonarna oraz można ją sprowadzić do zmiennej stacjonarnej używając operatora różnicowego. W 2003 r. Clive William John Granger oraz Robert Engle zostali uhonorowani Nagrodą Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii. CWJ Granger otrzymał nagrodę "za metody analizy ekonomicznych szeregów czasowych ze wspólnymi trendami (kointegrację)", natomiast R. Engle "za metody analizowania ekonomicznych szeregów czasowych ze zmienną w czasie wariancją (model ARCH)".

Definicja 6.2 Szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest zintegrowany w stopniu d (co zapisujemy jako $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(d)$), jeśli szeregi $\{\Delta^k x_t\}_{t \geq k}$ dla $0 \leq k < d$ są niestacjonarne, natomiast szereg różnic $\{\Delta^d x_t\}_{t \geq d}$ jest stacjonarny (operator Δ jest określony za pomocą wzorów (2.40)-(2.41)). Stopień integracji d jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której własność stacjonarności dla szeregu $\{\Delta^d x_t\}_{t \geq d}$ jest spełniona.

Klasę szeregów czasowych $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, których elementy są zintegrowane w stopniu $d \geq 1$, nazywamy klasą **DS** (*difference stationary*). Jeżeli szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny, to mówimy, że elementy tego szeregu są zintegrowane w stopniu zero oraz zapisujemy jako $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$.

W szeregach TS zaburzenia zewnętrzne są niwelowane w czasie, natomiast w szeregach DS zaburzenia zewnętrzne oddziałują na zachowanie szeregu w przyszłości. W szeregach TS wartości układają się ("ślizgają się") wzdłuż linii trendu, dość często przecinają tę linię, daleko od trendu nie odbiegają oraz dość szybko do niego powracają. Natomiast szeregi DS zachowują się odwrotnie.

Szeregi TS i DS posiadają następujące własności:

- eliminując deterministyczną składową z szeregu TS otrzymujemy szereg stacjonarny;
- eliminując deterministyczną składową z szeregu DS otrzymujemy szereg DS;
- stosując operator różnicowy rzędu $d \geq 1$ do szeregu TS otrzymujemy szereg TS (patrz rozdział 2.4), natomiast w otrzymanym szeregu składnik losowy jest postaci ruchomej średniej $MA(q)$ $1 \leq q < \infty$, dla której warunek odwracalności nie jest spełniony (natomiast warunek stacjonarności jest spełniony);
- stosując operator różnicowy rzędu $d \geq 1$ do niestacjonarnego szeregu $I(d)$ (zintegrowanego w stopniu d) otrzymujemy szereg stacjonarny.

Podczas identyfikacji szeregów czasowych powstaje problem związany z klasyfikacją szeregu. Między innymi musimy odpowiedzieć na pytanie do której klasy należy badany szereg: TS czy DS? Poniżej przedstawiony zostanie prosty przykład, który pokazuje z jednej strony możliwości identyfikacji szeregu z drugiej natomiast problem z klasyfikacją tego szeregu.

Przykład 6.1 Wygenerowana została trajektoria $\{\epsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym (biały szum) o wartościach 0 -0.63 -1.67 0.13 0.28 -1.14 -1.19 1.08 0.06 0.53 -0.27 -0.18 0.55 -0.58 1.18 -0.14 0.11 1.06 -0.06 -0.09 -0.83 0.29 -1.34 0.71 1.62 -0.69 0.85 1.25 -1.59 -1.44 0.57 -0.39 0.69 0.81 0.71 1.29 0.66 1.19 -1.05 -0.09 -0.15 -1.61 -0.25 -1.05 1.41 -0.81 0.53 0.21 -0.92 -1.17 -0.05 -1.01 0.61 0.51 1.69 0.29 -0.84 0.38 -1.01 -0.05 -0.02 0.00 -0.32 1.09 -1.87 0.42 0.86 0.73 0.59 0.04 0.67 0.56 -0.25 -0.37 -0.29 -1.47 -0.23 0.12 0.31 1.44 -0.35 0.62 0.79 0.94 -0.99 0.21 0.23 -1.07 -0.74 0.68 -0.13 0.39 0.08 -0.63 -0.56 0.24 -0.94 0.78 0.56 -0.82 -0.26, która jest przedstawiona na rysunku 6.4a. Wartość średnia elementów ciągu $\{\epsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ wynosi 0, natomiast $Var(\epsilon_t) = 0.6609$. Następnie wyznaczono trajektorię błędzenia losowego $\{\zeta_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ (bez dryfu

$a = 0$) postaci (6.8) dla $\zeta_0 = \epsilon_0 = 0$, która jest przedstawiona na rysunku 6.4b. Widzimy wyraźny trend liniowy (na rysunku 6.4b zaznaczony linią przerywaną). Korzystając z klasycznej metody najmniejszych kwadratów elementy ciągu $\{\zeta_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ możemy przedstawić w postaci

$$\zeta_t = -1.4463 + 0.0524t + \varepsilon_t^\zeta,$$

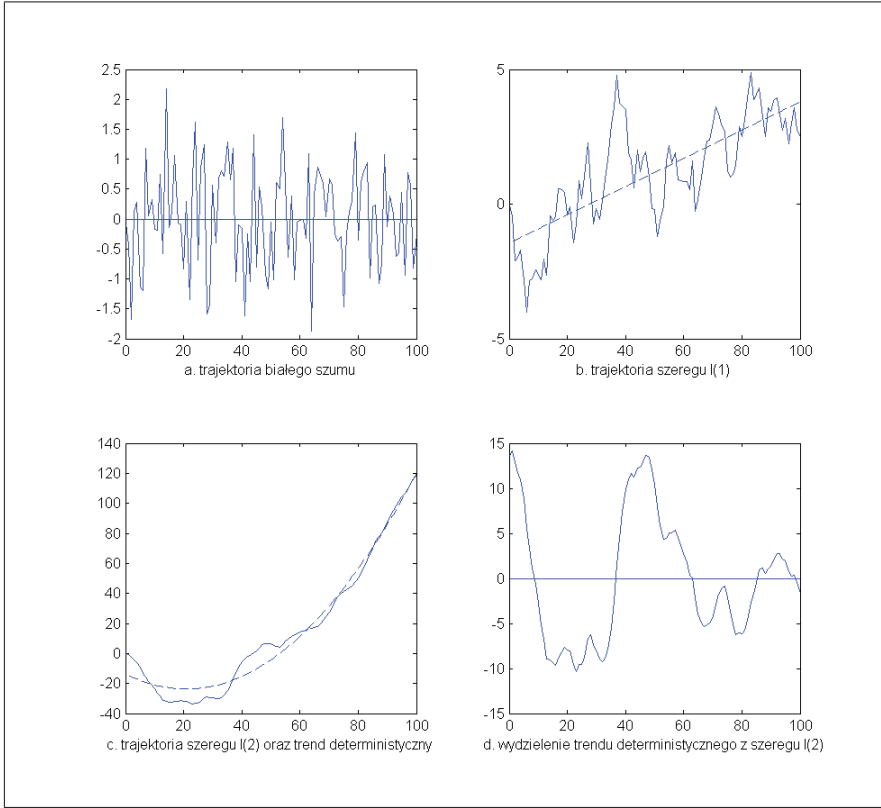
gdzie $\text{Var}(\varepsilon_t^\zeta) = 1.7607$. Natomiast z poprzednich rozważań wynika, że proces błędzenia losowego jest to szereg czasowy zintegrowany w stopniu 1 ($\{\zeta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(1)$).

Następnie wyznaczono trajektorię procesu zintegrowanego $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ postaci (6.9) dla $v_0 = \epsilon_0 = 0$, która jest przedstawiona na rysunku 6.4c. W tym przypadku widzimy wyraźny trend wielomianowy (na rysunku 6.4c zaznaczony krzywą przerywaną). Korzystając z klasycznej metody najmniejszych kwadratów elementy ciągu $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ możemy przedstawić w postaci

$$v_t = 0.023t^2 - 0.9622t - 13.616 + \varepsilon_t^v, \quad (6.11)$$

gdzie $\text{Var}(\varepsilon_t^v) = 50.019$. Wydzielając trend deterministyczny otrzymujemy ciąg reszt $\{\varepsilon_t^v\}_{0 \leq t \leq 100}$, który przedstawia rysunek 6.4d. W rozważanym przypadku wariancja skadnika losowego we wzorze (6.11) wynosi 50.019 oraz jest równa wariancji elementów $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$. Wydzielając trend deterministyczny z szeregu $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ otrzymujemy ciąg zaburzeń, który należy identyfikować za pomocą modeli ARMA. Natomiast z poprzednich rozważań wynika, że szereg $\{v_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest zintegrowany w stopniu 2 ($\{v_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(2)$). Badania losowości, korelacji oraz identyfikacja rozkładów składników losowych ε_t^ζ i ε_t^v zostały pominięte aby nie przesłaniać problematyki klasyfikacji szeregu.

Z drugiej strony różnicując elementy szeregu $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ otrzymujemy ciąg $\{\zeta_t\}_{1 \leq t \leq 100}$ przedstawiony na rysunku 6.4b w postaci błędzenia losowego, który nadal ma w sobie trend stochastyczny. Stosując kolejny raz operator różnicowy otrzymujemy szereg $\{\epsilon_t\}_{2 \leq t \leq 100}$ przedstawiony na rysunku 6.4d w postaci białego szumu (trend stochastyczny w tym przypadku został wyeliminowany). Zatem elementy szeregu $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ możemy przedstawić rów-



Rysunek 6.4: Identyfikacja trendu deterministycznego oraz trendu stochastycznego w szeregu $\{x_t\}_{0 \leq t \leq 100}$.

naniem

$$\Delta^2 v_t = \epsilon_t$$

lub w postaci równoważnej

$$v_t = v_0 + \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1} + \dots + t\epsilon_1, \quad (6.12)$$

gdzie wariancja zaburzeń zewnętrznych jest równa $\text{Var}(\epsilon_t) = 0.6609$. Natomiast ze wzoru (6.10) wyznaczamy wariancję elementów szeregu $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$, która jest równa $\text{Var}(v_t) = 0.6609 \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$.

Powstaje pytanie, którego z tych modeli (6.11) czy (6.12) należy używać do prognoz? Do której klasy TS czy DS należy szereg $\{v_t\}_{0 \leq t \leq 100}$? Szeregi TS mają wyraźny trend dookoła którego oscylują elementy, dość

często znajdując się powyżej/poniżej linii trendu. W przypadku szeregów DS trajektorie dość długo przebywają ponad lub pod linią trendu oddalając się od niego na dłuższą odległość.

W latach 80-ych ubiegłego stulecia było przyjęte, że najpierw z szeregu wydzielamy nielosową składową, a następnie dobieramy model ARMA opisujący zachowanie składnika losowego. Obecnie po opublikowaniu przez G.E.P.Boxa i G.M. Jenkinsa modelu ARIMA (patrz np. [6]) dość często szeregi czasowe najpierw są stacjonaryzowane poprzez różnicowanie. Różnicowanie szeregu TS pozwala wyeliminować trend deterministyczny (patrz rozdział 2.4), natomiast doprowadza do "przeróżnicowania szeregu". Tak zróżnicowany szereg spełnia warunek stacjonarności, natomiast składowa odpowiadająca za ruchomą średnią (MA) nie spełnia warunku odwracalności. Reasumując, zbudowanie adekwatnego modelu, który można wykorzystać do opisu dynamiki badanego zjawiska oraz do prognozowania zachowania w przyszłości, jest trudne bez określenia klasy, do której należy szereg.

Problem określenia klasy szeregu mającego wyraźny trend deterministyczny jest dość skomplikowany. Opis procedur klasyfikacji szeregów jest szeroko omawiany w [17], [25], [27], [37]. Podstawowa różnica pomiędzy klasami TS i DS polega na tym, że wydzielając trend deterministyczny z TS szeregu otrzymujemy szereg stacjonarny, natomiast wydzielając trend deterministyczny z szeregu klasy DS otrzymujemy szereg niestacjonarny.

Wariancje elementów szeregów stacjonarnych i szeregów DS zdecydowanie się różnią (wystarczy porównać wyniki zawarte w rozdziałach 5.1-5.3 i 6.2). Prognozy dla szeregów TS są dokładniejsze niż dla szeregów DS przy identycznych zaburzeniach w modelach. Dlatego z szeregu czasowego $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ najpierw należy wydzielić nielosową składową $f(t)$, a następnie zbadać stacjonarność szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, gdzie $\varepsilon_t = x_t - f(t)$. Jeżeli szereg $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny, to szereg $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ należy do klasy TS, w przeciwnym razie należy do klasy DS.

Do weryfikacji stacjonarności szeregów służą klasyczne testy DF, ADF, KPSS, które zostaną omówione poniżej.

6.3 Test DF

Najprostszym i najpopularniejszym testem weryfikującym stacjonarność szeregu czasowego, jest test Dickey-Fullera (w literaturze przedmiotu czasami zwanego testem pierwiastka jednostkowego). Jako hipotezę zerową przyjmuje się stwierdzenie, że szereg czasowy jest niestacjonarny (zachowanie elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ możemy opisać za pomocą modelu błędzenia losowego (patrz równanie (6.8)). Jako hipotezę alternatywną przyjmuje się, że szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny oraz elementy szeregu są określone za pomocą modelu AR(1).

Test Dickey-Fullera (patrz np. [15], [45]) przeprowadzamy w sposób następujący. Niech dany będzie szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci

$$\varepsilon_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.13)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Na poziomie istotności α tworzymy hipotezę roboczą

$H_0 : \theta = 1$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny, elementy szeregu są określone za pomocą modelu błędzenia losowego)

wobec hipotezy alternatywnej

$H_1 : |\theta| < 1$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny).

W równaniu (6.13) odejmując obustronnie ε_{t-1} otrzymujemy

$$\Delta \varepsilon_t = \kappa \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.14)$$

gdzie $\kappa = \theta - 1$. Hipotezy zerową i alternatywną dla modelu (6.14) możemy przedstawić jako:

$H_0 : \kappa = 0$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny, tzn. $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(d), d \geq 1$)

$H_1 : \kappa \in (-2, 0)$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ spełnia warunek stacjonarności, więc elementy szeregu są zintegrowane w stopniu zero, tzn. $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$).

Dla realizacji szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ korzystając z metody najmniejszych kwadratów wyznaczamy wartość estymatora κ za pomocą wzoru

$$\hat{\kappa} = \frac{\sum_{t=2}^N \Delta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^N \varepsilon_{t-1}^2}$$

oraz odchylenie standardowe tego estymatora

$$S(\kappa) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{t=2}^N \varepsilon_{t-1}^2}},$$

gdzie estymator odchylenia standardowego ciągu zaburzeń zewnętrznych $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ w modelu (6.14) jest równy

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{t=2}^N (\Delta \varepsilon_t - \hat{\kappa} \varepsilon_{t-1})^2}.$$

Statystyka testowa

$$DF = \frac{\hat{\kappa}}{S(\kappa)} \quad (6.15)$$

ma rozkład Dickey-Fullera. Z tablic dla testu Dickey-Fullera odczytujemy wartość krytyczną DF^* . Jeżeli $DF^* \leq DF$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 , zatem elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ są zintegrowane w stopniu wyższym bądź równym jeden. Jeżeli $DF < DF^*$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 oraz przyjmujemy, że elementy szeregu są zintegrowane w stopniu zero, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$. Jeżeli stwierdzimy, że szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny, to należy zbadać stacjonarność szeregów $\{\Delta^k \varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ dla $k \geq 1$.

W podobny sposób są przeprowadzane testy dla następujących modeli:

- z dryfem

$$\Delta \varepsilon_t = \alpha_0 + \kappa \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t,$$

- z dryfem i trendem deterministycznym

$$\Delta \varepsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \kappa \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t.$$

Statystykę testową DF obliczamy ze wzoru (6.15), natomiast wartość estymatora parametru κ oraz odchylenie standardowe tego parametru wyznaczamy korzystając z metody najmniejszych kwadratów. Wartości krytyczne dla statystyki Dickey-Fullera podane są w tabeli poniżej.

Liczebność N	Poziom istotności α			
	0.01	0.025	0.05	0.1
dla modelu bez wyrazu wolnego				
25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60
50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61
100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61
250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62
500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62
∞	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62
dla modelu z dryfem				
25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.62
50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60
100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58
250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57
∞	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57
dla modelu z dryfem i trendem				
25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24
50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18
100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15
250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13
500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13
∞	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12

Uwaga 6.1 Statystyka DF jest skonstruowana w sposób podobny jak dla testu t –Studenta, gdy badamy np. istotność parametrów strukturalnych. W rozważanym przypadku statystyka postaci (6.15) ma jednak inny rozkład: asymetryczny i o ujemnej wartości oczekiwanej. W tym przypadku nie należy korzystać z tablic rozkładu t –Studenta!

Przykład 6.2 Dla realizacji 0.89, 0.11, 0.08, -0.45, 0.49, -0.22, -0.06, -0.28, 0.31, 0.1, 0.55, 0.52, 0.19, 1.09, 0.08, 0.04, 0.39, -0.28, 0.83, -0.06, -0.58, -0.76, -0.2, -0.37, 0.11, 0.17, -0.23, 0.09, -0.94, -0.46, -0.48, -0.49, 0.15, 0.12, -0.48, 1.12, 0.14, 0.07, -0.26, -0.87, -0.88, -0.81, -0.14, 0.19, 0.35, 0.44, 0.77, 0.43, -0.05, -0.47 na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ zweryfikujemy hipotezę o stacjonarności szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ tworzymy hipotezę roboczą

$$H_0 : \kappa = 0 \text{ (szereg czasowy } \{\varepsilon_t\}_{t \geq 1} \text{ jest niestacjonarny)}$$

oraz hipotezę alternatywną

$$H_1 : \kappa \in (-2, 0) \text{ (szereg czasowy } \{\varepsilon_t\}_{t \geq 1} \text{ jest stacjonarny)}.$$

Suma elementów szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$ jest równa zero. Przeprowadzamy test dla modelu (6.14). Wartość estymatora parametru κ dla modelu (6.14) wynosi $\hat{\kappa} = -0.69126$, natomiast odchylenie standardowe tego estymatora $S(\kappa) = 0.133604$. Statystyka testowa jest równa

$$DF = \frac{-0.69126}{0.133604} = -5.17394,$$

natomiast wartość krytyczna $DF^* = -2.62$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ odrzucamy hipotezę roboczą na korzyść hipotezy alternatywnej. Wobec powyższego przyjmujemy, że szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ spełnia warunek stacjonarności (elementy są zintegrowane w stopniu zero, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$).

6.4 Test ADF

Test Dickey'a-Fullera opiera się na założeniu, że w modelu (6.13) zaburzenia zewnętrzne ϵ_t , $t \in \mathbb{N}_0$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Jeżeli występuje autokorelacja pomiędzy zaburzeniami ϵ_t i $\epsilon_{t+\tau}$ dla $\tau \in \mathbb{N}$, to moc testu DF spada. Rozszerzony test DF (w literaturze nazywany testem ADF – Augmented Dickey Fuller) uwzględnienia dodatkowe elementy modelu (6.13) eliminujące autokorelację w szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$. Modyfikacja modelu (6.13) polega na dodaniu zmiennych objaśniających jako zmiennych objaśnianych opóźnionych w czasie.

W tym przypadku rozważamy szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci

$$\Delta \varepsilon_t = \kappa \varepsilon_{t-1} + \sum_{i=1}^k \varkappa_i \Delta \varepsilon_{t-i} + \epsilon_t, \quad (6.16)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Dla realizacji szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ dobieramy rząd autoregresji $k \in \mathbb{N}$ żeby wyeliminować korelację pomiędzy elementami ciągu zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{k+1 \leq t \leq N}$. W tym celu przeprowadzamy badanie istotności współczynnika korelacji pomiędzy elementami ciągu $\{\epsilon_t\}_{k+1 \leq t \leq N}$. Dodatkowo przy doborze $k \in \mathbb{N}$ możemy się posłużyć kryteriami informacyjnymi (patrz rozdział 2). Rząd autoregresji k powinien spełniać nierówność (patrz [49])

$$k < \left\lceil 4 \left(\frac{N}{100} \right)^{0.25} \right\rceil,$$

gdzie $\lceil \cdot \rceil$ oznacza część całkowitą.

Na poziomie istotności α tworzymy hipotezę roboczą

$H_0 : \kappa = 0$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny, zatem $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(d)$, $d \geq 1$)

oraz hipotezę alternatywną

$H_1 : \kappa \in (-2, 0)$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$).

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów dla realizacji szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ wyznaczamy wartość estymatora κ oraz odchylenie standardowe tego estymatora. Statystyka testowa dla testu ADF jest taka sama jak w przypadku testu DF. Statystyka postaci (6.15) ma rozkład Dickey-Fullera. Z tablic dla testu Dickey-Fullera odczytujemy wartość krytyczną DF^* . Jeżeli $DF^* \leq DF$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 , zatem elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ są zintegrowane w stopniu wyższym bądź równym jeden (tzn. $\varepsilon_t \sim I(d)$, $d \geq 1$). Jeżeli $DF < DF^*$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 , zatem przyjmujemy, że elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ spełniają warunek stacjonarności (są zintegrowane w stopniu zero $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$). W przypadku stwierdzenia, że szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$

jest niestacjonarny, należy zbadać stacjonarność szeregów $\{\Delta^k \varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ dla $k \geq 1$.

6.5 Test KPSS

Zweryfikować stacjonarność szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ możemy również za pomocą testu Kwiatkowskiego-Phillipsa-Schmidta-Shina (test KPSS) (patrz [35], [55]). W tym przypadku rozważamy szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci

$$\varepsilon_t = \beta t + r_t + \epsilon_t, \quad (6.17)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$. Zakładamy, że szereg $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ reprezentuje błędzenie losowe

$$r_t = r_{t-1} + u_t \quad (6.18)$$

oraz jest nieobserwowalną częścią w modelu (6.17), natomiast $\{u_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma_u^2)$. Jeżeli wariancja składnika losowego u_t jest równa zero ($\sigma_u = 0$), to wartości procesu $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ są stałe ($r_t = r = \text{const}$ dla każdego $t \in \mathbb{N}_0$), zatem nieobserwowalny składnik w modelu (6.17) reprezentuje stałą r . Jeżeli elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ są określone jako suma stałej r lub stałej i trendu deterministycznego $r + \beta t$ oraz losowego składnika ϵ_t (pamiętamy, że szereg $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny), to szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest klasy TS oraz elementy tego szeregu są zintegrowane w stopniu zero ($\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$). Jeżeli natomiast $\sigma_u^2 > 0$, to równanie (6.18) określa proces błędzenia losowego. Zatem szereg $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny. W tym przypadku szereg $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ postaci (6.17) jest sumą trendu deterministycznego, procesu niestacjonarnego $\{r_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ i szeregu stacjonarnego $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$. Zatem szereg $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny (jako suma odpowiednich elementów szeregów stacjonarnego i niestacjonarnego). Test KPSS przeprowadzamy w sposób następujący.

Na poziomie istotności α tworzymy hipotezę roboczą

$H_0 : \sigma_u^2 = 0$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest stacjonarny, tzn. $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$)

wobec hipotezy alternatywnej

$H_1 : \sigma_u^2 > 0$ (szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny, tzn. $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(d)$, $d \geq 1$).

Hipotezy zerowa i alternatywna mają układ odwrotny niż w teście Dickey’a–Fullera. Dla realizacji szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ za pomocą MNK szacujemy parametry strukturalne modelu (z trendem lub bez)

$$\varepsilon_t = \beta t + r + \epsilon_t$$

oraz wyznaczamy ciąg reszt $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Ustalamy rząd opóźnienia k (lag truncation), dla którego spełniona jest nierówność (patrz [35])

$$k < \left\lceil 12 \left(\frac{N}{100} \right)^{0.25} \right\rceil,$$

gdzie $\lceil \cdot \rceil$ oznacza część całkowitą. Obliczamy sumy reszt

$$S_t = \sum_{i=1}^t \epsilon_i$$

dla $t = 1, 2, \dots, N$ oraz wartości zgodnego estymatora wariancji długookresowej reszt z wagami Bartletta

$$S^2(k) = \frac{1}{N} \left(\sum_{t=1}^N \epsilon_t^2 + 2 \sum_{s=1}^k w(s, k) \sum_{t=s+1}^N \epsilon_t \epsilon_{t-s} \right),$$

gdzie wagi Bartletta określamy wzorem

$$w(s, k) = 1 - \frac{s}{k+1}.$$

Statystyka testowa jest dana wzorem

$$\eta = \frac{\sum_{t=1}^N S_t^2}{N^2 S^2(k)}.$$

Z tablic odczytujemy wartość krytyczną (patrz np. [35])

α	0.1	0.05	0.025	0.01
η^*	0.119	0.146	0.176	0.216

Jeżeli $\eta < \eta^*$, to na poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 , zatem elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ są zintegrowane w stopniu zero $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} \sim I(0)$. Jeżeli $\eta \geq \eta^*$, to na poziomie istotności α odrzucamy hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 oraz przyjmujemy, że szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ jest niestacjonarny (elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ są zintegrowane w stopniu wyższym bądź równym jeden). W przypadku odrzucenia H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 należy zbadać stacjonarność różnic pomiędzy elementami szeregów $\{\Delta^k \varepsilon_t\}_{t \geq k}$ dla $k \geq 1$).

Do weryfikacji stacjonarności szeregu czasowego można używać również innych testów, np. test Phillipsa-Perrona (patrz [46]), ADF-GLS (test Elliotta-Rothemberga-Stocka, patrz [16]). W niektórych przypadkach stosując testy ADF i KPSS otrzymujemy sprzeczne wyniki, wtedy należy zastosować łączny test ADF-KPSS (patrz [12]). Przegląd testów można znaleźć w pracy [55].

Rozdział 7

Niestacjonarne szeregi czasowe

7.1 Model ARIMA(p, r, q)

W rozdziale piątym zostały przedstawione szeregi stacjonarne, czyli szeregi czasowe, które w swojej naturze mają pewną wyidealizowaną własność: zachowują swoją dynamikę przy dowolnym przesunięciu czasowym $\tau \in \mathbb{Z}$. Niestety większość szeregów, za pomocą których modelujemy procesy ekonomiczne, finansowe, techniczne itp. nie ma takiej własności. Najczęściej niestacjonarność dotyczy pierwszego momentu (wartość oczekiwana elementów szeregu czasowego nie jest stała), tzn. szeregi nie mają ustalonej średniej dookoła której oscylują. W szeregach klasy TS po wyeliminowaniu części nielosowej składnik reszt zachowuje własność stacjonarności, który następnie możemy modelować procesami AR, MA, ARMA. Niestety nie zawsze po wydzieleniu części deterministycznej otrzymujemy szereg czasowy, który spełnia warunek stacjonarności.

Definicja 7.1 Szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ nazywamy niestacjonarnym jednorodnie (homoskedastycznie), jeżeli wydzielaając z szeregu czasowego nielosową składową otrzymujemy szereg stacjonarny słabo (w szerszym sensie).

W literaturze przedmiotu niestacjonarność jednorodna jest określana jako niestacjonarność I rzędu. Widzimy zatem, że każdy szereg TS jest niestacjonarny jednorodnie. W rozdziale 2 przedstawiono sposoby identy-

fikacji nielosowych składowych. Wydzielając nielosową składową z szeregu TS otrzymujemy szereg stacjonarny. W rozdziale 6 pokazano, że niestacjonarne szeregi czasowe DS po zastosowaniu operatora różnicowego rzędu $r \geq 1$ można sprowadzić do szeregów stacjonarnych, które następnie możemy identyfikować modelami $\text{ARMA}(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}_0$.

7.1.1 Własności modeli ARIMA

Wprowadźmy niezbędne założenia. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Mamy wtedy

$$E\epsilon_t = 0 \text{ dla } t \in \mathbb{Z} \quad (7.1)$$

oraz

$$E\epsilon_t \epsilon_s = \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } \tau = s. \\ 0, & \text{dla } \tau \neq s. \end{cases} \quad (7.2)$$

Definicja 7.2 Szereg $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest szeregiem $\text{ARIMA}(p, r, q)$, $p, r, q \in \mathbb{N}_0$, wtedy i tylko wtedy gdy szereg $\{\Delta^r \epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest szeregiem $\text{ARMA}(p, q)$.

Model autoregresji i scałkowanej ruchomej średniej $\text{ARIMA}(p, r, q)$, $p, r, q \in \mathbb{N}_0$ (AutoRegresive Integrated Moving Average) służy do opisu niestacjonarnych szeregów czasowych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, które w pewnych przedziałach czasowych spełniają warunek stacjonarności lub po wyeliminowaniu nielosowej składowej zachowują się jak szeregi stacjonarne (patrz np. [1], [45]). Po zastosowaniu operatora różnicowego rzędu $r \geq 1$ (patrz (2.40)–(2.41)) szereg $\{\Delta^r \epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ spełnia warunek stacjonarności oraz jest postaci $\text{ARMA}(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_0$. Symbolicznie model $\text{ARIMA}(p, r, q)$ można przedstawić przy pomocy wzoru

$$\Delta^r \text{ARIMA}(p, r, q) = \text{ARMA}(p, q),$$

gdzie $p, r, q \in \mathbb{N}_0$. Model $\text{ARIMA}(p, r, q)$ został zaproponowany przez Boxa i Jenkinsa (patrz [6]) oraz w literaturze przedmiotu jest nazywany modelem Boxa–Jenkinsa.

Niech dany będzie szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Stosując operator różnicowy Δ^r , $r \geq 1$ otrzymujemy szereg $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Jeżeli elementy szeregu $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są postaci ARMA(p, q), $p, q \in \mathbb{N}_0$ (spełniając warunki stacjonarności i odwracalności), to możemy przedstawić je za pomocą równania

$$\Delta^r \varepsilon_t = \alpha_1 \Delta^r \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_p \Delta^r \varepsilon_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (7.3)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Z twierdzenia 2.3 otrzymujemy

$$\Delta^r \varepsilon_t = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j \varepsilon_{t-j} \text{ dla } t \in \mathbb{Z}.$$

Operator różnicowy Δ dany wzorem (2.40) możemy (patrz wzory (5.95)-(5.96)) przedstawić w postaci

$$\Delta = 1 - F_-.$$

Elementy szeregu ARIMA(p, r, q), $p, r, q \in \mathbb{N}_0$ postaci (7.3) możemy przedstawić za pomocą równania

$$A_p(F_-, \alpha) (1 - F_-)^r \varepsilon_t = B_q(F_-, \theta) \varepsilon_t, \quad (7.4)$$

gdzie operatory odpowiadające za autoregresję $A_p(F_-, \alpha)$ i ruchomą średnią $B_q(F_-, \theta)$ dane są wzorami

$$A_p(F_-, \alpha) = 1 - \alpha_1 F_- - \alpha_2 F_-^2 - \dots - \alpha_p F_-^p, \quad (7.5)$$

$$B_q(F_-, \theta) = 1 - \theta_1 F_- - \theta_2 F_-^2 - \dots - \theta_q F_-^q. \quad (7.6)$$

Operator odwrotny S do operatora różnicowego Δ definiujemy wzorem

$$S = (1 - F_-)^{-1} = 1 + F_- + F_-^2 + F_-^3 + \dots$$

oraz nazywamy go operatorem całkowania (dokładniej operatorem sumowania). Definiujemy operator całkowania rzędu $r \in \mathbb{N}$ wzorem

$$S^{r+1} = S(S^r) \text{ oraz } S^0 = 1.$$

Stosując operator całkowania do szeregu zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ otrzymujemy

$$S\epsilon_t = \sum_{k=-\infty}^t \epsilon_k$$

oraz

$$S^r \epsilon_t = \sum_{k_1=-\infty}^t \sum_{k_2=-\infty}^{k_1} \dots \sum_{k_r=-\infty}^{k_{r-1}} \epsilon_{k_r} .$$

Dla szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ mamy

$$(1 - F_-) S\epsilon_t = S(1 - F_-) \epsilon_t = \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Powyższy warunek jest spełniony również dla szeregów $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$. W tym przypadku wystarczy przyjąć $\epsilon_t = 0$ dla $t \leq 0$.

Wzór (7.4) możemy przedstawić w postaci równoważnej

$$A_p(F_-, \alpha) \epsilon_t = B_q(F_-, \theta) S^r \epsilon_t. \quad (7.7)$$

Równanie (7.7) opisuje zachowanie szeregu autoregresji (rzędu p) i scałkowanej (rzędu r) ruchomej średniej (rzędu q), które symbolicznie możemy zapisać w postaci

$$\text{ARIMA}(p, r, q) = \text{AR}(p) + \text{I}(r) + \text{MA}(q).$$

Równanie

$$A_p(z, \alpha) = 0 \quad (7.8)$$

jest równaniem charakterystycznym autoregresji rzędu $p \in \mathbb{N}_0$ dla szeregu $\{\Delta^r \epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Jeżeli $\chi_1, \dots, \chi_p$ są pierwiastkami tego równania oraz spełniają warunek stacjonarności ($|\chi_i| > 1$ dla $i = 1, \dots, p$), to operator autoregresji $A_p(z, \alpha)$ określamy wzorem

$$A_p(z, \alpha) = \left(1 - \frac{z}{\chi_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\chi_p}\right). \quad (7.9)$$

Podobnie równanie

$$B_q(z, \theta) = 0 \quad (7.10)$$

jest równaniem charakterystycznym ruchomej średniej rzędu $q \in \mathbb{N}_0$. Jeżeli $\varkappa_1, \dots, \varkappa_p$ są pierwiastkami tego równania oraz spełniają warunek odwracalności ($|\varkappa_i| > 1$ dla $i = 1, \dots, q$), to operator ruchomej średniej $B_q(z, \theta)$ możemy przedstawić w postaci

$$B_q(z, \theta) = \left(1 - \frac{z}{\varkappa_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\varkappa_q}\right). \quad (7.11)$$

Podstawiając (7.9)–(7.11) do równania (7.4), otrzymujemy

$$\left(1 - \frac{1}{\chi_1} F_-\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\chi_p} F_-\right) (1 - F_-)^r \varepsilon_t = \left(1 - \frac{1}{\varkappa_1} F_-\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\varkappa_q} F_-\right) \epsilon_t, \quad (7.12)$$

natomiast podstawiając (7.9)–(7.11) do (7.7), otrzymujemy

$$\left(1 - \frac{1}{\chi_1} F_-\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\chi_p} F_-\right) \varepsilon_t = \left(1 - \frac{1}{\varkappa_1} F_-\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\varkappa_q} F_-\right) S^r \epsilon_t. \quad (7.13)$$

Równania (7.12) i (7.13) są równoważne ze wzorem (7.3), który opisuje zachowanie szeregów ARIMA(p, r, q), gdzie $p, r, q \in \mathbb{N}_0$.

7.1.2 Transformacja modeli ARIMA

Niech elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będą określone za pomocą równania (7.4). Poniżej pokażemy, że elementy szeregu ARIMA(p, r, q), $p, r, q \in \mathbb{N}_0$ można przedstawić:

- w postaci różnicowej (poprzez poprzednie wartości szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ oraz bieżącą i poprzednie wartości zaburzeń $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$);
- w postaci scałkowanej (tylko poprzez bieżącą i poprzednie wartości zaburzeń $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$);
- w postaci odwróconej (tylko poprzez poprzednie wartości procesu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ oraz bieżącą wartość zaburzenia ϵ_t).

Aby przedstawić elementy szeregu ARIMA(p, r, q) w postaci różnicowej, należy dokonać transformacji ARIMA(p, r, q) do ARMA($p + r, q$). Dla postaci scałkowanej należy dokonać transformacji ARIMA(p, r, q) do

$MA(\infty)$. Natomiast dla postaci odwróconej należy dokonać transformacji $ARIMA(p, r, q)$ do $AR(\infty)$. Każdy ze sposobów przedstawiania szeregu $ARMA(p, r, q)$ ma swoje wady i zalety. Do konstrukcji prognoz jest używana zwykle postać różnicowa, ponieważ w tym przypadku mamy doczynienia z ograniczoną liczbą parametrów (dokładniej $p + r + q + 1$ parametrów). Poniżej przedstawione zostaną sposoby przekształcania szeregu $ARIMA(p, r, q)$ do modeli $ARMA(p + r, q)$, $MA(\infty)$ oraz $AR(\infty)$.

Przekształcenie modelu $ARIMA(p, r, q)$ do postaci różnicowej $ARMA(p + r, q)$

W równaniu (7.4) wymnożymy operator autoregresji $A_p(F_-, \alpha)$ z operatorem różnicowym $(1 - F_-)^r$. Tym samym otrzymujemy operator autoregresji $A_{p+r}(F_-, \tilde{\alpha})$ dany wzorem

$$A_{p+r}(F_-, \tilde{\alpha}) = A_p(F_-, \alpha) (1 - F_-)^r,$$

gdzie $p, r \in \mathbb{N}_0$. Zatem równanie (7.4) możemy przedstawić w postaci

$$A_{p+r}(F_-, \tilde{\alpha}) \varepsilon_t = B_q(F_-, \theta) \varepsilon_t. \quad (7.14)$$

gdzie parametry $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{p+r}$ operatora autoregresji rzędu $p + r$ w modelu (7.14) wyznaczamy rozwiązując równanie

$$(1 - \alpha_1 F_- - \alpha_2 F_-^2 - \dots - \alpha_p F_-^p) (1 - F_-)^r = 1 - \tilde{\alpha}_1 F_- - \dots - \tilde{\alpha}_{p+r} F_-^{p+r}.$$

Zatem dla $t \in \mathbb{Z}$ elementy szeregu $ARIMA(p, r, q)$ postaci (7.3) możemy przedstawić za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \tilde{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \tilde{\alpha}_{p+r} \varepsilon_{t-p-r} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (7.15)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Tym sposobem model $ARIMA(p, r, q)$ został sprowadzony do postaci różnicowej, dokładniej do modelu $ARMA(p + r, q)$.

Przykład 7.1 Elementy szeregu $ARIMA(1, 1, 1)$ przedstawimy w postaci różnicowej.

Elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci ARIMA(1, 1, 1) są określone za pomocą wzoru

$$\Delta \varepsilon_t = \alpha \Delta \varepsilon_{t-1} + \epsilon_t - \theta \epsilon_{t-1}, \quad (7.16)$$

gdzie Δ jest operatorem różnicowym (patrz wzór (2.40)), natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$. Ponieważ $\Delta = 1 - F_-$, to elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ możemy przedstawić w postaci

$$A_1(F_-, \alpha)(1 - F_-)\varepsilon_t = B_1(F_-, \theta)\epsilon_t,$$

gdzie operatory autoregresji i ruchomej średniej dane są wzorami

$$\begin{aligned} A_1(F_-, \alpha) &= 1 - \alpha F_-, \\ B_1(F_-, \theta) &= 1 - \theta F_-. \end{aligned}$$

Korzystając z rachunku operatorów przesunięcia równanie (7.16) zapisujemy w postaci

$$(1 - (1 + \alpha)F_- + \alpha F_-^2)\varepsilon_t = (1 - \theta F_-)\epsilon_t. \quad (7.17)$$

Ostatecznie ARIMA(1, 1, 1) sprowadzamy do ARMA(2, 1), gdzie elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są dane wzorem

$$\varepsilon_t = (1 + \alpha)\varepsilon_{t-1} - \alpha\varepsilon_{t-2} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1},$$

natomiast $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$.

Przekształcenie ARIMA(p, r, q) do postaci scałkowanych zaburzeń MA(∞)

Dla modelu autoregresji i scałkowanej ruchomej średniej ARIMA(p, r, q) elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci (7.3) możemy przedstawić jako kombinację liniową zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_k\}_{k \leq t}$ (w chwilach obecnej oraz poprzednich)

$$\varepsilon_t = \epsilon_t + \eta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \eta_k \epsilon_{t-k} + \dots \text{ dla } t \in \mathbb{Z}. \quad (7.18)$$

Korzystając z rachunku operatorów przesunięcia powyższe równanie możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = B_\infty(F_-, \eta) \varepsilon_t. \quad (7.19)$$

Z drugiej strony model $\text{ARIMA}(p, r, q)$ możemy skonwertować do $\text{ARMA}(p + r, q)$, gdzie elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ spełniają równanie (7.14). Podstawiając (7.19) do (7.14) otrzymujemy równanie

$$A_{p+r}(F_-, \tilde{\alpha}) B_\infty(F_-, \eta) \varepsilon_t = B_q(F_-, \theta) \varepsilon_t \quad (7.20)$$

dla $t \in \mathbb{Z}$. Wobec powyższego współczynniki $\eta_1, \eta_2, \dots$ we wzorze (7.18) powinny spełniać równanie

$$A_{p+r}(F_-, \tilde{\alpha}) A_\infty(F_-, \eta) = B_q(F_-, \theta),$$

które zapisujemy w postaci

$$(1 - \tilde{\alpha}_1 F_- - \dots - \tilde{\alpha}_{p+r} F_-^{p+r}) (1 + \eta_1 F_- + \dots) = (1 - \theta_1 F_- - \dots - \theta_q F_-^q).$$

Porównując odpowiednie współczynniki przy operatorach F_-^k , $k \geq 0$ tworzymy nieskończony układ równań

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_j \eta_{n-j} - \eta_k = \theta_k, & \text{dla } 1 \leq k \leq q, \\ \sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_j \eta_{n-j} - \eta_k = 0, & \text{dla } k > q, \end{cases} \quad (7.21)$$

gdzie $\eta_0 = 1$ oraz $\tilde{\alpha}_j = 0$ dla $j > p + r$. Rozwiązując układ równań (7.21) otrzymujemy wartości parametrów $\eta_1, \eta_2, \dots$ dla równania (7.18). Szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ powinien spełniać warunek odwracalności, zatem współczynniki $\eta_1, \eta_2, \dots$ muszą tworzyć szereg zbieżny (patrz np. [1], [6]).

Przykład 7.2 Model $\text{ARIMA}(1, 1, 1)$ przedstawimy w postaci ruchomej średniej $MA(\infty)$.

Dla modelu $MA(\infty)$ elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone za pomocą wzorów (7.18) lub (7.19). Z drugiej strony elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci $\text{ARIMA}(1, 1, 1)$ są określone za pomocą wzoru (7.16) lub w postaci różnicowej (7.17). Podstawiając (7.19) do wzoru (7.17) otrzymujemy

$$(1 - (1 + \alpha_1) F_- + \alpha_1 F_-^2) (1 + \eta_1 F_- + \eta_2 F_-^2 + \dots) \varepsilon_t = (1 - \theta_1 F_-) \varepsilon_t$$

dla $t \in \mathbb{Z}$, gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Wobec powyższego parametry $\eta_1, \eta_2, \dots$ powinny spełniać równanie

$$(1 - (1 + \alpha_1)F_- + \alpha_1 F_-^2) (1 + \eta_1 F_- + \eta_2 F_-^2 + \dots) = (1 - \theta_1 F_-)$$

dla $t \in \mathbb{Z}$. Porównując współczynniki przy operatorach F_-^k , dla $k \geq 0$, tworzymy nieskończony układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1 + \alpha_1) + \eta_1 = -\theta_1, \\ \alpha_1 - (1 + \alpha_1)\eta_1 + \eta_2 = 0, \\ \alpha_1\eta_1 - (1 + \alpha_1)\eta_2 + \eta_3 = 0, \\ \dots \\ \alpha_1\eta_{k-2} - (1 + \alpha_1)\eta_{k-1} + \eta_k = 0, \\ \dots \end{array} \right.$$

Zatem elementy szeregu ARIMA(1, 1, 1) postaci (7.16) możemy przedstawić za pomocą wzoru (7.18) (jako $MA(\infty)$), gdzie $\eta_1, \eta_2, \dots$ są dane wzorami rekurencyjnymi

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = (1 + \alpha_1) - \theta_1, \\ \eta_2 = (1 + \alpha_1)\eta_1 - \alpha_1, \\ \eta_3 = (1 + \alpha_1)\eta_2 - \alpha_1\eta_1, \\ \dots \\ \eta_k = (1 + \alpha_1)\eta_{k-1} - \alpha_1\eta_{k-2}, \\ \dots \end{array} \right.$$

Przekształcenie ARIMA(p, r, q) do postaci odwróconej AR(∞)

Dla modelu autoregresji i scałkowanej ruchomej średniej ARIMA(p, r, q) elementy szeregu czasowego $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci (7.3) można przedstawić w postaci kombinacji liniowej poprzednich wartości tego szeregu plus zaburzenie w chwili obecnej t , tzn. elementy szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ określamy za pomocą równania

$$\epsilon_t = \epsilon_t + \pi_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \pi_k \epsilon_{t-k} + \dots, \quad (7.22)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Korzystając z rachunku operatorów powyższe równanie przedstawiamy w postaci

$$A_\infty(F_-, \pi) \epsilon_t = \epsilon_t. \quad (7.23)$$

Z drugiej strony, model $\text{ARIMA}(p, r, q)$ możemy skonwertować do modelu $\text{ARMA}(p + r, q)$, tzn. elementy szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ przedstawiamy za pomocą wzoru (7.14). Podstawiając (7.23) do (7.14) otrzymujemy

$$A_{p+r}(F_-, \tilde{\alpha}) \epsilon_t = B_q(F_-, \theta) A_\infty(F_-, \pi) \epsilon_t$$

dla $t \in \mathbb{Z}$. Parametry $\pi_1, \pi_2, \dots$ w równaniu (7.22) powinny spełniać warunek

$$A_{p+r}(F_-, \tilde{\alpha}) = B_q(F_-, \theta) A_\infty(F_-, \pi), \quad (7.24)$$

który zapisujemy w postaci

$$(1 - \tilde{\alpha}_1 F_- - \dots - \tilde{\alpha}_{p+r} F_-^{p+r}) = (1 - \theta_1 F_- - \dots - \theta_q F_-^q) (1 - \pi_1 F_- - \dots).$$

Porównując odpowiednie współczynniki przy potęgach F_-^k , $k \geq 0$ tworzymy nieskończony układ równań

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k \theta_j \pi_{n-j} - \pi_k = -\tilde{\alpha}_k, & \text{dla } 1 \leq k \leq p+r, \\ \sum_{j=1}^k \theta_j \pi_{n-j} - \pi_k = 0, & \text{dla } k > q, \end{cases} \quad (7.25)$$

gdzie $\pi_0 = 1$ oraz $\theta_j = 0$ dla $j > q$. Rozwiązując układ (7.25) otrzymujemy wartości współczynników $\pi_1, \pi_2, \dots$ dla równania (7.22).

Zgodnie z warunkiem stacjonarności wagi $\pi_1, \pi_2, \dots$ muszą tworzyć szereg zbieżny (patrz [1], [6]). Równanie (7.24) możemy również przedstawić w postaci

$$A_p(F_-, \tilde{\alpha}) (1 - F_-)^r = B_q(F_-, \theta) A_\infty(F_-, \pi).$$

Podstawiając do powyższego równania zamiast operatora F_- wartość 1 widzimy, że lewa strona wynosi 0, zatem wobec dowolności parametrów $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ powinna zachodzić równość $A_\infty(1, \pi) = 0$. Wobec powyższego $1 - \pi_1 - \pi_2 - \dots = 0$ (suma wag $\pi_1, \pi_2, \dots$ w rozwinięciu (7.22) wynosi 1).

Przykład 7.3 Model ARIMA(1, 1, 1) przedstawimy w postaci AR(∞).

Elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ postaci ARIMA(1, 1, 1) są określone za pomocą równania (7.16) oraz możemy je przedstawić za pomocą wzoru (7.17) (w postaci różnicowej jako ARMA(2, 1)). Dla postaci odwróconej elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ są określone jako autokorelacja rzędu ∞ (AR(∞)), zatem dla $t \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon_t = \epsilon_t + \pi_1 \varepsilon_{t-1} + \pi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots, \quad (7.26)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$. Podstawiając (7.26) do (7.17) otrzymujemy

$$(1 - (1 + \alpha_1)F_- + \alpha_1 F_-^2) \varepsilon_t = (1 - \theta_1 F_-) (1 - \pi_1 F_- - \pi_2 F_-^2 - \dots) \varepsilon_t$$

dla $t \in \mathbb{Z}$. Zatem parametry $\pi_1, \pi_2, \dots$ powinny spełniać warunek

$$(1 - (1 + \alpha_1)F_- + \alpha_1 F_-^2) = (1 - \theta_1 F_-) (1 - \pi_1 F_- - \pi_2 F_-^2 - \dots).$$

Porównując współczynniki przy operatorach F_-^k , $k \geq 0$ otrzymujemy nieskończony układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} -\theta_1 - \pi_1 = -(1 + \alpha_1), \\ \theta_1 \pi_1 - \pi_2 = \alpha_1, \\ \theta_1 \pi_2 - \pi_3 = 0, \\ \dots \\ \theta_1 \pi_{k-1} - \pi_k = 0, \\ \dots \end{array} \right.$$

który można zamienić na układ równoważny

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 1 + \alpha_1 - \theta_1, \\ \pi_2 = \theta_1 \pi_1 - \alpha_1, \\ \pi_3 = \theta_1 \pi_2, \\ \dots \\ \pi_k = \theta_1 \pi_{k-1}, \\ \dots \end{array} \right.$$

Ostatecznie, współczynniki w rozwinięciu (7.26) są dane wzorami

$$\pi_k = \begin{cases} 1 - \alpha_1 - \theta_1, & \text{dla } k = 1, \\ (\theta_1 - \alpha_1)(1 - \theta_1), & \text{dla } k = 2 \\ \theta_1^{k-2}(\theta_1 - \alpha_1)(1 - \theta_1), & \text{dla } k \geq 3. \end{cases}$$

7.1.3 Identyfikacja modeli ARIMA

Niech dana będzie realizacja szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Identyfikacja modeli ARIMA(p, r, q), $p, r, q \in \mathbb{N}_0$ przebiega w dwu etapach.

- Etap pierwszy polega na wyznaczeniu stopnia operatora różnicowego $r \in \mathbb{N}_0$, który możemy wykonać na dwa sposoby.

Pierwszy sposób polega na analizie kwadratowej wariancji różnic (patrz rozdział 2.4) dla ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Rozważamy szeregi postaci $\{\Delta^k \varepsilon_t\}_{k < t \leq N}$ dla $k \geq 0$. Szukamy stopnia operatora różnicowego, dla którego wartości ciągu $\{\Delta^k \varepsilon_t\}_{k < t \leq N}$ oscylują dookoła poziomu zerowego oraz kwadratowa wariancja różnic

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\sum_{t=k+1}^N (\Delta^k \varepsilon_t)^2}{(N - k) C_{2k}^k}$$

zaczyna się stabilizować. Stopień operatora różnicowego dla modelu ARIMA(p, r, q) jest równy $r = k^*$. Dla potwierdzenia stacjonarności przeprowadzamy testy (patrz rozdział 6): test Dickey - Fullera (test DF), rozszerzony test Dickey - Fullera (test ADF) lub test Kwiatkowskiego - Phillipsa - Schmidta - Shina (test KPSS).

Drugi sposób wyznaczenia stopnia operatora różnicowego $r \in \mathbb{N}_0$ polega na analizie stacjonarności ciągów $\{\Delta^k \varepsilon_t\}_{k < t \leq N}$ dla $k \geq 0$, tzn. kolejno dla ciągów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$, $\{\Delta \varepsilon_t\}_{2 \leq t \leq N}$, $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq N}, \dots$ przeprowadzamy testy stacjonarności. Jako stopień operatora różnicowego obieramy najmniejszą wartość $r \in \mathbb{N}_0$ dla którego szereg $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{k < t \leq N}$ jest stacjonarny, zatem

$$r = \min \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \{\Delta^k \varepsilon_t\}_{k < t \leq N} \sim I(0) \right\}.$$

Szukamy najmniejszą wartość $r \in \mathbb{N}_0$, gdzie na podstawie ciągu $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{r < t \leq N}$ dla testu KPSS (patrz rozdział 6.5) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej H_0 lub dla testów DF lub ADF (patrz rozdziały 6.3 - 6.4) hipotezę roboczą H_0 odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 . Testy mogą dawać sprzeczne wyniki.

- Etap drugi polega na identyfikacji modeli ARMA(p, q), $p, q \in \mathbb{N}_0$ na podstawie realizacji $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{r < t \leq N}$. Algorytm identyfikacji ARMA(p, q) został przedstawiony w rozdziale 5.3.

Przykład 7.4 Na podstawie notowań ropy BRENT⁷ z okresu 07/08/2014–04/02/2015 sprawdzimy, czy ciąg $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 150}$ można uznać za realizację pewnego szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ typu ARIMA.

Rysunek 7.1a przedstawia ceny ropy BRENT w okresie 07/08/2014 - 04/02/2015 jako wartości ciągu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 150}$. Na rysunkach 7.1b, 7.1c oraz 7.1d przedstawione są ciągi $\{\Delta \varepsilon_t\}_{2 \leq t \leq 150}$, $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$, $\{\Delta^3 \varepsilon_t\}_{4 \leq t \leq 150}$ odpowiednio.

Tabela poniżej przedstawia wartości średnie oraz kwadratowe wariacje różnic, które wyznaczamy za pomocą wzorów

$$\hat{m}_r = \frac{1}{N-r} \sum_{t=r+1}^N \Delta^r \varepsilon_t,$$

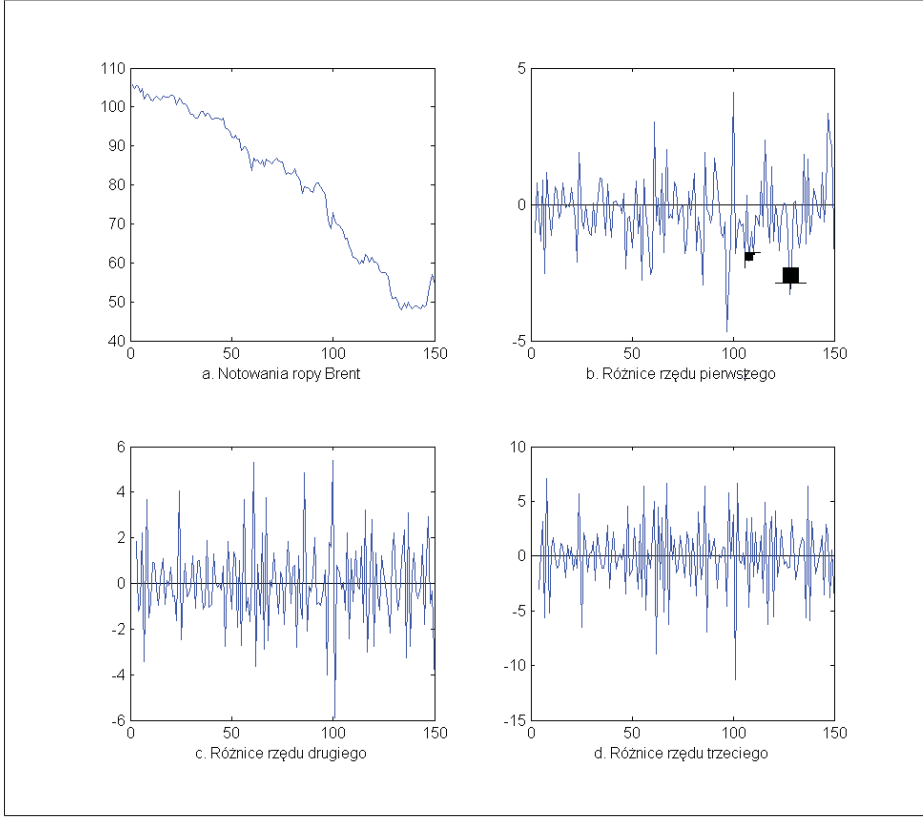
$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{\sum_{t=r+1}^N (\Delta^r \varepsilon_t)^2}{(N-r) C_{2r}^r}$$

dla $N = 150$ oraz $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

r	0	1	2	3	4
$\hat{m}_r$	80.099	-0.3438	-0.0092	-0.0429	-0.0075
$\hat{\sigma}_r^2$	6763.3	0.887	0.5699	0.5099	0.4897

W rozważanym przypadku dopiero elementy ciągów $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{r+1 \leq t \leq 150}$ dla $r \geq 2$ oscylują dookoła poziomu zerowego. Moment stabilizacji kwadratowej

⁷Dane pochodzą z <http://www.biznesradar.pl/notowania-historyczne/BRENT-OIL-ROPA-BRENT>



Rysunek 7.1: Realizacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 150}$ oraz $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{1+r \leq t \leq 150}$ dla $r = 1, 2, 3..$

wariacji różnic $\hat{\sigma}_r^2$ wynosi 2, zatem do dalszej identyfikacji należy rozważyć ciąg $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$.

Na podstawie testów *DF* i *ADF* przeprowadzimy również badania stacjonarności ciągów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 150}$, $\{\Delta \varepsilon_t\}_{2 \leq t \leq 150}$, $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$. Dla testu *ADF* w równaniu (6.16) przyjmujemy rząd autoregresji $k = 1$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ dla każdego $r = 0, 1, 2$ tworzymy hipotezę roboczą

H_0 : szereg czasowy $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{r+1 \leq t}$ jest niestacjonarny

wobec hipotezy alternatywnej

H_1 : szereg czasowy $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{r+1 \leq t}$ jest stacjonarny.

Wartości statystyk testowych *DF* dla w/w testów (patrz rozdziały 6.3 - 6.4)

podaje tabela poniżej

r	0	1	2
dla testu DF	-3.2658	-12.0267	-21.1533
dla testu ADF	-0.3446	-1.3671	-4.3529

Dla poziomu istotności 0.01 wartość krytyczna statystyki testowej jest równa $DF^* = -2.60$. Na podstawie testu Dickey - Fullera dla każdego $r = 0, 1, 2$ należy odrzucić hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotez alternatywnych H_1 (ponieważ dla każdego $r = 0, 1, 2$ mamy $DF < DF^*$). Wobec powyższego należy przyjąć, że ciągi $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 1500}$, $\{\Delta \varepsilon_t\}_{2 \leq t \leq 150}$, $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$ są stacjonarne. Na podstawie rozszerzonego testu Dickey - Fullera dla $r = 0, 1$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotez roboczych H_0 (dla $r = 0, 1$ spełniona jest nierówność $DF^* \leq DF$), natomiast dla $r = 2$ należy odrzucić hipotezę roboczą H_0 na korzyść hipotezy alternatywnej H_1 (ponieważ $DF < DF^*$). Zatem należy przyjąć, że ciągi $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 1500}$, $\{\Delta \varepsilon_t\}_{2 \leq t \leq 150}$ są niestacjonarne, natomiast $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$ jest stacjonarny. Wyniki uzyskane na podstawie testów DF i ADF są różne. Test DF ma mniejszą moc niż ADF (patrz rozdział 6.4). Zatem do dalszej identyfikacji należy rozważać ciąg $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$. Wartości estymatorów funkcji autokorelacji wynoszą $\hat{\gamma}_0 = 3.4195$, $\hat{\gamma}_1 = -1.7358$, $\hat{\gamma}_2 = 0.1654$.

Następnie próbujemy zidentyfikować ciąg $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$ modelami $ARMA(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_0$. Na przykład, dla ciągu $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$ wyznaczymy parametry modelu $ARMA(1, 1)$. Parametr odpowiadający za autoregresję wynosi

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_1} = -0.0953$$

(warunek stacjonarności jest spełniony $|\hat{\alpha}| < 1$). Pozostaje wyznaczyć część odpowiadającą za ruchomą średnią. Ze wzoru (5.92) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta^2) = 3.1197, \\ -\theta \sigma^2 = -1.5911. \end{cases}$$

Z powyższego układu wynika, że parametr θ powinien spełniać równanie

$$\frac{1 + \theta^2}{\theta} = -1.9608.$$

Rozwiązując równanie

$$\theta^2 + 2.2602\theta + 1 = 0$$

otrzymujemy pierwiastki $\hat{\theta}_1 = -0.42$ i $\hat{\theta}_2 = 2.3808$. Tylko pierwiastek $\hat{\theta}_1$ spełnia warunek odwracalności, w tym przypadku wariancja zaburzeń zewnętrznych wynosi $\hat{\sigma}^2 \approx 3.7882$. Następnie dla ARMA(1,1) wyznaczamy wartości ciągu zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{4 \leq t \leq 150}$, gdzie

$$\epsilon_t = \Delta^2 \varepsilon_t - \hat{\alpha} \Delta^2 \varepsilon_{t-1} + \hat{\theta}_1 \epsilon_t.$$

Do badania normalności rozkładu zaburzeń zewnętrznych korzystamy z testu Kołmogorowa–Smirnowa. Na poziomie istotności 0.01 konstruujemy hipotezę roboczą

$$H_0 : \text{elementy szeregu reszt } \{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}} \text{ mają rozkład } \mathbf{N}(0, \sigma^2)$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1 : \text{elementy szeregu reszt } \{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}} \text{ mają inny rozkład.}$$

Wartość statystyki $d_{147} = 0.1802$, natomiast wartość krytyczna $d_{147}(0.99) = 0.1329$. Ponieważ $d_{147} \geq d_{147}(0.99)$, to na poziomie istotności 0.01 należy odrzucić hipotezę roboczą na korzyść hipotezy alternatywnej oraz przyjmujemy, że $\{\epsilon_t\}_{4 \leq t \leq 150}$ nie ma rozkładu normalnego.

Następnie spróbujemy dokonać identyfikacji ciągu $\{\Delta^2 \varepsilon_t\}_{3 \leq t \leq 150}$ modelem AR(1). Parametr odpowiadający za autoregresję wynosi $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = -0.5076$ (warunek stacjonarności jest spełniony $|\hat{\alpha}| < 1$). Wariancja zaburzeń zewnętrznych wynosi $\hat{\sigma}^2 \approx 2.5384$. Następnie dla AR(1) wyznaczamy wartości ciągu zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{4 \leq t \leq 150}$, gdzie

$$\epsilon_t = \Delta^2 \varepsilon_t - \hat{\alpha} \Delta^2 \varepsilon_{t-1}.$$

Za pomocą testu Kołmogorowa–Smirnowa sprawdzamy normalność rozkładu ciągu zaburzeń zewnętrznych $\{\epsilon_t\}_{4 \leq t \leq 150}$. Na poziomie istotności 0.01 konstruujemy hipotezę roboczą

$$H_0 : \text{elementy szeregu reszt } \{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}} \text{ mają rozkład } \mathbf{N}(0, \sigma^2)$$

wobec hipotezy alternatywnej

H_1 : elementy szeregu reszt $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mają inny rozkład.

W tym przypadku wartość statystyki $d_{147} = 0.1294$, natomiast wartość krytyczna $d_{147}(0.99) = 0.1329$. Ponieważ $d_{147} < d_{147}(0.99)$, to na poziomie istotności 0.01 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy roboczej, zatem przyjmujemy, że $\{\epsilon_t\}_{4 \leq t \leq 150}$ ma rozkład normalny. Zatem dla modelu $ARIMA(1, 2, 0)$ elementy szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy przedstawić za pomocą równania

$$(1 + 0.5076F_-)(1 - F_-)^2 \epsilon_t = \epsilon_t,$$

które sprowadzamy do postaci

$$\epsilon_t = 1.4924\epsilon_{t-1} + 0.0152\epsilon_{t-2} - 0.5076\epsilon_{t-3} + \epsilon_t,$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0, 2.5384)$.

7.2 Szeregi warunkowo normalne

Podczas analizy szeregów czasowych pojawia się problem adekwatnego modelowania dynamiki zjawisk. Analizując dane z rynków finansowych można zaobserwować momenty większej i mniejszej aktywności, efekty dużych skoków, częstsze występowanie wartości dodatnich niż ujemnych. Za pomocą modeli ARMA oraz ARIMA pewnych zachowań nie udawało się wyjaśnić. R. Engle pokazał, że niektóre szeregi czasowe mają zmienną strukturę wahań, tzn. w różnych przedziałach czasowych wahania elementów szeregu są różne. Zmienna struktura wahań określa niestacjonarność niejednorodną. R. Engle w swojej pracy "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation" opublikowanej w roku 1982 w czasopiśmie "Econometrica" (patrz [18]) zaproponował, by do opisu zachowań elementów szeregu czasowego o zmiennej strukturze wahań używać modelu autoregresji z warunkową niejednorodnością (heteroskedastycznością) - ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedastic model). Heteroskedastyczność oznacza, że wariancja elementów szeregu czasowego

nie jest stała – zmienia się w czasie. W modelu ARCH(1) elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ określone są za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{N}, \quad (7.27)$$

gdzie $\alpha_0 > 0$, $|\alpha_1| < 1$, $\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \geq 0$ dla $t \in \mathbb{N}$ oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Elementy szeregu czasowego postaci (7.27) są warunkowo niejednorodne.

Oczywiście powyższa publikacja dała początek rozwojowi całej rodziny modeli ARCH. Pojawiły się modele GARCH, EGARCH, RGARCH, TARCH, QTARCH, HARCH, NGARCH, IGARCH itp. (patrz np. [8], [14], [19], [22], [41], [50], [56], [57]). Każdy z tych modeli próbuje uchwycić dodatkowe własności szeregów czasowych, mianowicie skupianie danych, skośność danych, grube ogony rozkładów oraz efekty pamięci:

- **skupianie danych** (clustering data) – duże (małe) wartości szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ pociągają za sobą duże (małe) wartości tego szeregu w przyszłości;
- **grube ogony** – częste występowanie elementów ekstremalnych, tzn. im częściej występują elementy ekstremalne tym grubszy ogon;
- **skośność danych** – znana jako efekt dźwigni (w literaturze angielskojęzycznej "leverage effect") oraz powodująca, że elementy w szeregu czasowym zaczynają rosnąć po uprzednim spadku i odwrotnie.

Poniżej zostaną omówione niektóre modele z rodziny ARCH, podane zostaną podstawowe własności tych modeli oraz sposoby konstrukcji ocen nieznanymi parametrów. Do identyfikacji modeli rodziny ARCH zostanie użyta metoda największej wiarygodności MNW, która pozwala otrzymywać estymatory bardziej efektywne niż metoda najmniejszych kwadratów MNK (patrz np. [1], [24], [51], [52], [18]). W swojej pracy R. Engle pokazał (patrz [18], str. 1003), że standardowe błędy estymatorów uzyskane za pomocą MNK są większe niż błędy estymatorów otrzymanych za pomocą MNW.

Więcej na temat estymacji parametrów modeli rodziny ARCH można znaleźć w [54].

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, na której jest zdefiniowany ciąg niezależnych zmiennych losowych $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$, natomiast $\mathcal{F}_j = \sigma\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j\}$, $j \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tzn. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$ dla $n \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. $\mathcal{F}_j$ jest najmniejszym σ -ciałem, względem którego elementy $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j$ są mieralne.

Definicja 7.3 Szereg czasowy $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest warunkowo gaussowski (warunkowo normalny), jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{N}$ warunkowy rozkład $P(\varepsilon_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(\mu_t, \sigma_t^2)$, tzn. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$P(\varepsilon_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1}) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(y - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) dy.$$

Zatem dla każdego $t \in \mathbb{N}$ warunkowa wartość oczekiwana jest równa

$$E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t,$$

natomiast warunkowa wariancja

$$\text{Var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2.$$

Każdy element szeregu warunkowo normalnego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t, \quad (7.28)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. W literaturze finansowej wielkość σ_t dla $t \in \mathbb{N}$ jest nazywana zmiennością (volatility).

7.2.1 Model ARCH

Model ARCH został wprowadzony poprzez R.F. Engle'a w 1982 roku (patrz [18]). W 2003r. Robert Franklin Engle został laureatem Nagrody

Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii (wraz z Brytyjczykiem C.W.J. Grangerem) za "metody analizowania ekonomicznych szeregów czasowych ze zmiennymi w czasie wahaniami (ARCH)". Dla modelu ARCH(p), $p \geq 1$ elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są dane wzorem

$$\varepsilon_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (7.29)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$, natomiast zmienność σ_t jest określona za pomocą równania

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2, \quad (7.30)$$

gdzie $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0$ oraz $\varepsilon_s = 0$ dla $s \leq 0$. Dla szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci (7.29) parametr zmienności σ_t , $t \in \mathbb{N}$ zachowuje się niejednoznacznie (nie jest stały), zależy od poprzednich wartości $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}$.

W przedstawionym wyżej modelu dla każdego $t \in \mathbb{N}$ warunkowy rozkład zmiennej losowej ε_t ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma_t^2)$, gdzie parametr zmienności σ_t spełnia równanie (7.30). Zmienność σ_t jest funkcją mierzalną ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ (zależy od wartości $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}$). Powyższy model w odróżnieniu od modeli AR, MA, ARMA, ARIMA opisuje efekt skupiania danych (clustering data), a mianowicie duże (małe) wartości $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ pociągają za sobą duże (małe) wartości szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ w przyszłości co do wartości bezwzględnej (ogólnie nie wiadomo jakiego znaku oraz w którym kierunku "przesuną się" wartości, patrz np. [1], [18], [52]). Więcej o własnościach modeli ARCH(p), $p \geq 1$ można znaleźć w pracy [21]. Rysunek 7.2 przedstawia symulację szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$ postaci ARCH(1) dla parametrów $\alpha_0 = 0.6$, $\alpha_1 = 0.3$ i warunku początkowego $\varepsilon_1 = 2$.

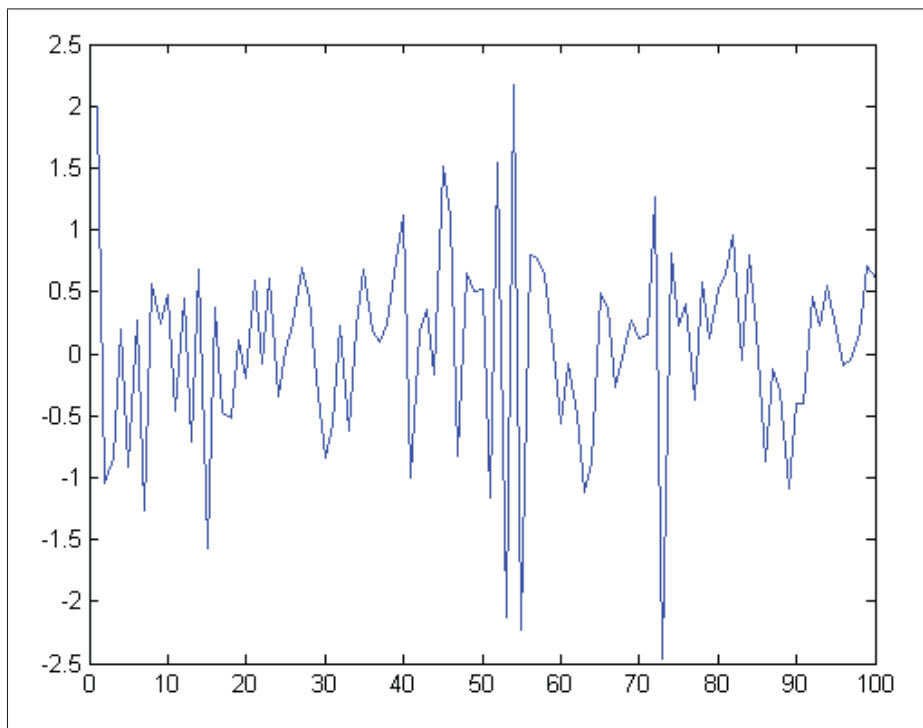
Własności modelu ARCH(p):

- a. elementy szeregu oscylują dookoła poziomu zerowego

$$E\varepsilon_t = E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0 \text{ dla } t \in \mathbb{N};$$

- b. z definicji (7.29) wynika, że elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są nieskorelowane

$$E\varepsilon_t \varepsilon_s = 0 \text{ dla } t \neq s;$$



Rysunek 7.2: Symulacja szeregu ARCH(1) dla parametrów $\alpha_0 = 0.6$, $\alpha_1 = 0.3$ i warunku początkowego $\varepsilon_1 = 2$.

c. drugi moment zwykły jest kombinacją liniową drugich momentów zwykłych z p chwil poprzednich

$$E\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 E\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p E\varepsilon_{t-p}^2 \text{ dla } t > p; \quad (7.31)$$

d. warunkowa wariancja jest równa kwadratowi parametru zmienności

$$E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \text{ dla } t > p. \quad (7.32)$$

Uwaga 7.1 Ze wzoru (7.31) wynika, że szereg drugich momentów zwykłych $\{E\varepsilon_t^2\}_{t>p}$ dla modelu ARCH(p), $p \geq 1$ jest określony za pomocą autoregresji liniowej rzędu p .

Identyfikacja modelu ARCH(p).

Parametry modelu ARCH(p) identyfikujemy korzystając z metody największej wiarygodności. Niech dana będzie realizacja szeregu czasowego

$\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Ze wzorów (7.29) oraz (7.30) wynika, że dla $p < t \leq N$ warunkowy rozkład ε_t ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ jest równy

$$p(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma(\varepsilon_t, 0, \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2}), \quad (7.33)$$

gdzie

$$\gamma(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (7.34)$$

Warunkowy rozkład łączny zmiennych $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N$ jest dany wzorem

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_p) &= p(\varepsilon_N | \mathcal{F}_{N-1}) p(\varepsilon_{N-1} | \mathcal{F}_{N-2}) \cdot \dots \cdot p(\varepsilon_{p+1} | \mathcal{F}_p) \\ &= \prod_{i=p+1}^N \gamma(\varepsilon_i, 0, \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2}). \end{aligned}$$

Funkcję wiarygodności definiujemy jako warunkowy rozkład łączny dla zmiennych $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N$, zatem

$$L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = p(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_p).$$

Wyznaczenie parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ polega na rozwiązaniu zadania postaci

$$\max_{\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0} L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p). \quad (7.35)$$

Logarytm naturalny z funkcji wiarygodności jest równy

$$\begin{aligned} \ln L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) &= -\frac{N-p}{2} \ln(2\pi) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^N \ln(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^N \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2} \\ &= -\frac{N-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) &= \sum_{i=p+1}^N \ln(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2) \\ &+ \sum_{i=p+1}^N \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2}. \end{aligned}$$

Logarytm naturalny jest funkcją rosnącą, zatem zadanie (7.35) możemy sprowadzić do postaci równoważnej

$$\min_{\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0} f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p). \quad (7.36)$$

Rozwiązując zadanie (7.36) otrzymujemy oceny parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ dla modelu ARCH(p).

Uwaga 7.2 *Im większy jest rząd autoregresji $p > 0$ tym większa jest wartość funkcji wiarygodności w zadaniu (7.35), a zatem dopasowanie modelu do danych empirycznych jest lepsze. Z drugiej strony estymacja zbyt dużej liczby parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ skutkuje większymi błędami wewnętrznymi (każdy z parametrów wywołuje, generuje zaburzenia wewnętrzne w modelu) podczas symulacji. Żeby znaleźć "złoty środek" (kompromis) pomiędzy rzędem autoregresji $p > 0$ a funkcją wiarygodności, najczęściej stosuje się kryterium Akaike (patrz np. [2], [5], [57], [59])*

$$AIC(p) = -2 \ln L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) + 2(p+1)$$

lub kryterium Schwarza (patrz np. [48], [57], [59])

$$SIC(p) = -2 \ln L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) + (p+1) \ln(N-p-1).$$

Najmniejsze wartości wskaźników $AIC(p)$ lub $SIC(p)$ wskazują na optymalną wielkość rzędu autoregresji p . Kryteria Akaike i Schwarza również stosujemy do wyznaczenia optymalnej liczby parametrów strukturalnych dla modeli rodziny ARCH (np. GARCH, EGARCH itd.).

Model ARCH(1) jest najprostrzym przedstawicielem rodziny ARCH. Elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \epsilon_t \text{ dla } t \in \mathbb{N}, \quad (7.37)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Ze wzoru (7.37) wynika, że dla każdego $t \geq 1$

$$\begin{aligned} E\varepsilon_t &= 0, \\ E\varepsilon_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 E\varepsilon_{t-1}^2, \\ E(\varepsilon_t^2 | F_{t-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Widzimy, że dla $0 \leq \alpha_1 < 1$ elementy szeregu ARCH(1) mają skończone drugie momenty ($E\varepsilon_t^2 < \infty$ dla każdego $t \geq 1$). Dodatkowo dla warunku początkowego $\varepsilon_1^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ elementy szeregu ARCH(1), postaci (7.37), mają identyczne drugie momenty, tzn. dla każdego $t \geq 1$

$$E\varepsilon_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

7.2.2 Model GARCH

Uogólnieniem modelu ARCH(p), $p \in \mathbb{N}$ jest model GARCH(p, q), $p, q \in \mathbb{N}$ (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic model – uogólniony model autoregresji z warunkową niejednorodnością), który został wprowadzony poprzez T. Bollerslev’a w 1986 roku (patrz [8]). Elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (7.38)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$, natomiast

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \quad (7.39)$$

dla $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0, \beta_1 \geq 0, \dots, \beta_q \geq 0$ oraz $\varepsilon_s = \sigma_s = 0$ dla $s \leq 0$.

W rozważanym przypadku, podobnie jak w modelu ARCH, warunkowa wariancja zachowuje się niejednorodnie. Warunkowy rozkład $P(\varepsilon_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma_t^2)$, gdzie parametr zmienności σ_t jest dany wzorem (7.39). Parametr zmienności σ_t jest funkcją mierzalną ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$, zależy od $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}$ poprzednich wartości elementów szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ oraz warunkowych wariancji $\sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-q}$ z q chwil poprzednich. Podobnie jak ARCH(p) model GARCH(p, q) opisuje efekt skupiania danych (clustering data). Identyfikując realizację szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ modelem ARCH(p) potrzebujemy zazwyczaj więcej parametrów niż identyfikując ten sam ciąg modelem GARCH(p, q) (patrz [1], [19], [52]).

Własności modelu GARCH(p, q):

a. elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ oscylują dookoła poziomu zerowego

$$E\varepsilon_t = 0 \text{ dla dowolnego } t \geq 1; \quad (7.40)$$

b. drugi moment zwykły zmiennej ε_t , $t > \max(p, q)$ jest kombinacją liniową drugich momentów zwykłych oraz jest dany wzorem

$$E\varepsilon_t^2 = \begin{cases} \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) E\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=p+1}^q \beta_i E\varepsilon_{t-i}^2, & \text{dla } p < q, \\ \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) E\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=q+1}^p \alpha_i E\varepsilon_{t-i}^2, & \text{dla } p > q, \\ \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) E\varepsilon_{t-i}^2, & \text{dla } p = q; \end{cases} \quad (7.41)$$

c. warunkowa wariancja zmiennej ε_t , $t > \max(p, q)$ jest równa kwadratowi parametru zmienności

$$E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2. \quad (7.42)$$

Uwaga 7.3 Ze wzoru 7.41 wynika, że szereg drugich momentów zwykłych $\{E\varepsilon_t^2\}_{t > s}$ dla modelu GARCH(p, q) jest określony za pomocą autoregresji liniowej rzędu $s = \max(p, q)$.

Identyfikacja modelu GARCH(p, q).

Parametry modelu GARCH(p, q) identyfikujemy za pomocą metody największej wiarygodności. Niech dana będzie realizacja $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ szeregu czasowego postaci (7.38). Dla każdego $t > \max(p, q)$ warunkowy rozkład zmiennej losowej ε_t ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ jest rozkładem normalnym. Zatem dla $t > \max(p, q)$ mamy

$$p(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma \left(\varepsilon_t, 0, \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} \right), \quad (7.43)$$

gdzie $\gamma(\cdot)$ jest funkcją gęstości rozkładu normalnego określoną wzorem (7.34).

Uwaga 7.4 W przypadku modeli GARCH, RGARCH, EGARCH itp. jeżeli w równaniu na warunkową wariancję (7.42) występuje składowa opisująca

autoregresję wariancji, to do określenia warunkowego rozkładu zmiennej losowej ε_t dla $t > \max(p, q)$ ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ (według (7.43)) używamy estymatorów wariancji $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$. Ze wzoru (7.40) wynika, że wartość oczekiwana elementów szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest równa zero, zatem wartości estymatorów warunkowej wariancji wyznaczamy za pomocą wzoru

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t} \left((t-1) \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 \right), \quad (7.44)$$

z warunkiem początkowym $\hat{\sigma}_1 = |\varepsilon_1|$.

Korzystając z niezależności zmiennych $\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N$ funkcję wiarygodności definiujemy jako warunkowy rozkład łączny dla zmiennych $\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N$

$$\begin{aligned} L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta) &= p(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_s) \\ &= \prod_{t=s+1}^N \gamma \left(\varepsilon_t, 0, \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} \right), \end{aligned}$$

gdzie $s = \max(p, q)$ oraz $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$. Wartości parametrów α, β wyznaczamy rozwiązując zadanie programowania nieliniowego

$$\max_{(\alpha, \beta) \in D} L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta), \quad (7.45)$$

gdzie

$$D = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{(p+1)} \times \mathbb{R}^q : \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0, \beta_1 \geq 0, \dots, \beta_q \geq 0 \right\}.$$

Logarytm naturalny z funkcji wiarygodności jest równy

$$\begin{aligned} \ln L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta) &= -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=s+1}^N \left(\ln \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \right) + \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} \right) \\ &= -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} f(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

gdzie

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{t=s+1}^N \ln \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \right) + \sum_{t=s+1}^N \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2}.$$

Korzystając z własności funkcji logarytm naturalny zadanie (7.45) możemy sprowadzić do postaci równoważnej

$$\min_{(\alpha, \beta) \in D} f(\alpha, \beta). \quad (7.46)$$

Uwaga 7.5 Do wyznaczenia optymalnej liczby parametrów w modelu $GARCH(p, q)$ posługujemy się kryteriami Akaike $AIC(p, q)$ lub Schwarza $SIC(p, q)$ (patrz np. [2], [5], [57], [59]), gdzie

$$AIC(p, q) = -2 \ln L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta) + 2(p + q + 1),$$

$$SIC(p, q) = -2 \ln L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta) + (p + q + 1) \ln(N - p - q - 1).$$

7.2.3 Model RGARCH

Uogólnieniem modelu $GARCH(p, q)$ jest model $RGARCH(p, q, r)$, $p, q, r \in \mathbb{N}$ (Randomized Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic model-randomizowany uogólniony model autoregresji z warunkową niejednorodnością). Powyższy model oprócz wartości elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ oraz warunkowej zmienności z chwil poprzednich uwzględnia dodatkowe czynniki wpływające na zmienność elementów tego szeregu (np. zmienność stopy zwrotu z akcji sektora paliwowego zależy od wartości stóp zwrotu i zmienności z poprzednich okresów oraz dodatkowo zależy od wypowiedzi ekspertów odnośnie tego sektora).

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ – ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$, natomiast $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ – ciągiem nieujemnych niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\varphi(\xi, \theta)$. Zmienne losowe $\xi_t, t \in \mathbb{N}$ generują (wywołują)

dodatkowy wpływ na zmienność elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Zakładamy stochastyczną niezależność wszystkich wymienionych obiektów. Niech $\mathcal{F}_j^\varepsilon = \sigma\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j\}$, $\mathcal{F}_j^\xi = \sigma\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j\}$, $j \in \mathbb{N}$ oznaczają niemalejącą rodziny σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz $\mathcal{F}_0^\varepsilon = \mathcal{F}_0^\xi = \{\emptyset, \Omega\}$. Niech $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j^\varepsilon \vee \mathcal{F}_j^\xi$ dla $j \in \mathbb{N}$.

Dla modelu RGARCH(p, q, r), $p, q, r \in \mathbb{N}$ (patrz [57]) elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (7.47)$$

gdzie zmienność σ_t elementów szeregu czasowego jest dana wzorem

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (7.48)$$

gdzie $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0, \beta_1 \geq 0, \dots, \beta_q \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_r \geq 0$ oraz $\varepsilon_s = \xi_s = \sigma_s = 0$ dla $s \leq 0$. Widzimy zatem, że klasa modeli RGARCH jest bogatsza niż klasa modeli GARCH. Z definicji modeli GARCH i RGARCH wynika symboliczna równość:

$$\text{RGARCH}(p, q, 0) = \text{GARCH}(p, q).$$

Własności modelu RGARCH(p, q, r):

- a. elementy szeregu oscylują dookoła poziomu zerowego

$$E\varepsilon_t = 0 \text{ dla dowolnego } t \geq 1;$$

- b. dla dowolnego $t > \max(p, q, r)$ warunkowa wariancja jest równa

$$E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

Warunkowy rozkład $P(\varepsilon_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma_t^2)$, gdzie σ_t^2 spełnia równanie (7.48). Parametr zmienności σ_t jest funkcją mierzalną ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ (zależy od wartości $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}, \sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-q}, \xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-r}$).

Identyfikacja modelu RGARCH(p, q, r).

Parametry modelu RGARCH(r, p, q) identyfikujemy korzystając z metody największej wiarygodności. Oprócz identyfikacji $p + q + r + 1$ parametrów modelu postaci (7.47)-(7.48) należy również skonstruować estymatory wektora nieznanych parametrów $\theta \in D$ dla ciągu niezależnych zmiennych losowych $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ (zakładamy, że dla dowolnego $t \geq 1$ zmienne losowe ξ_t mają rozkład $\varphi(\xi, \theta)$), gdzie D oznacza zbiór możliwych wartości wektora θ .

Wprowadźmy następujące oznaczenia $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Niech dane będą realizacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ oraz $\{\xi_t\}_{1 \leq t \leq N-1}$. Z niezależności $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}$ wynika, że dla każdego $t > \max(p, q, r)$ warunkowy rozkład zmiennej losowej ε_t ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ jest dany wzorem

$$p(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma \left(\varepsilon_t, 0, \sqrt{\alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} \right), \quad (7.49)$$

gdzie $\gamma(\cdot)$ jest funkcją gęstości rozkładu normalnego postaci (7.34), natomiast wartości estymatorów $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ szacujemy za pomocą (7.44). W rozważanym przypadku funkcję wiarygodności definiujemy jako warunkowy rozkład łączny dla zmiennych $\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N$ i $\xi_1, \dots, \xi_{N-1}$

$$\begin{aligned} L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \alpha, \beta, \lambda, \theta) &= p(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_s) p(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}) \\ &= \prod_{t=s+1}^N \gamma \left(\varepsilon_t, 0, \sqrt{\alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} \right) \prod_{k=1}^{N-1} \varphi(\xi_k, \theta), \end{aligned}$$

gdzie $s = \max(p, q, r)$. Wartości parametrów strukturalnych $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ oraz θ wyznaczamy rozwiązując zadanie programowania nieliniowego

$$\max_{(\alpha, \beta, \lambda, \theta) \in D} L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \alpha, \beta, \lambda, \theta), \quad (7.50)$$

gdzie

$$D = \left\{ (\alpha, \beta, \lambda, \theta) \in \mathbb{R}^{(p+1)} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \times D_\theta : \begin{aligned} &\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0, \\ &\beta_1 \geq 0, \dots, \beta_q \geq 0, \\ &\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_r \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Logarytm naturalny z funkcji wiarygodności jest równy

$$\begin{aligned} \ln [L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \alpha, \beta, \lambda, \theta)] &= -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=s+1}^N \ln \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=s+1}^N \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} + \sum_{k=1}^{N-1} \ln \varphi(\xi_k, \theta) \\ &= -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} f(\alpha, \beta, \lambda, \theta), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \lambda, \theta) &= \sum_{t=s+1}^N \ln \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{t=s+1}^N \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{t-k} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \ln \varphi(\xi_k, \theta). \end{aligned}$$

Korzystając z własności funkcji logarytmu naturalnego, zadanie (7.50) możemy sprowadzić do postaci

$$\min_{(\alpha, \beta, \lambda, \theta) \in D} f(\alpha, \beta, \lambda, \theta). \quad (7.51)$$

Przykład 7.5 Dane są realizacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 20}$ o wartościach 0.2, 0, -0.42, 0.36, 0.2, -0.95, -1.19, -0.47, -0.45, 0.11, -0.17, -0.55, -0.1, 1.1, -0.31, 0.69, 0.75, 0.34, -0.79, 1.65 oraz $\{\xi_t\}_{1 \leq t \leq 19}$ o wartościach 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1. Dokonamy identyfikacji szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci $RGARCH(1, 1, 1)$, jeżeli wymuszenia zewnętrzne $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie zero-jedynkowym. Elementy szeregu $RGARCH(1, 1, 1)$ są określone wzorem

$$\varepsilon_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (7.52)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Warunkowa wariancja elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wynosi

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \lambda \xi_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (7.53)$$

gdzie $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0$, natomiast $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\varphi(x, \theta) = P(\xi = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

dla $0 \leq \theta \leq 1$ oraz $x \in \{0, 1\}$. W rozważanym przypadku należy oszacować parametry $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda, \theta$. Wartości estymatorów tych parametrów wyznaczamy rozwiązując zadanie programowania nieliniowego

$$\min_{(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda, \theta) \in D} f(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda, \theta), \quad (7.54)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda, \theta) = & \sum_{t=2}^N \ln(\alpha_0 + \lambda \xi_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2) \\ & + \sum_{t=s+1}^N \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \lambda \xi_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} (\xi_k \ln \theta + (1 - \xi_k) \ln(1 - \theta)) \end{aligned}$$

oraz $D = \{(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda, \theta) \in R^4 \times [0, 1] : \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0\}$. Dla zadania (7.54) warunek konieczny istnienia ekstremum ma postać układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=2}^{20} g_i(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda) = 0, \\ \sum_{i=2}^{20} \varepsilon_{i-1}^2 g_i(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda) = 0, \\ \sum_{i=2}^{20} \sigma_{i-1}^2 g_i(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda) = 0, \\ \sum_{i=2}^{20} \xi_{i-1} g_i(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda) = 0, \\ \frac{\sum_{k=1}^{19} \xi_k}{\theta} - \frac{19 - \sum_{k=1}^{19} \xi_k}{1 - \theta} = 0, \end{array} \right. \quad (7.55)$$

gdzie dla $2 \leq t \leq 20$

$$g_t(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda) = \frac{1 - \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \lambda \xi_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}}{\alpha_0 + \lambda \xi_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}.$$

Funkcja $f(\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda, \theta)$ osiąga minimum dla $\alpha_0 = 0.224$, $\alpha_1 = 0.34$, $\beta = 0.284$, $\lambda = 0.155$ oraz $\theta = \frac{11}{19}$. Zatem elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ należy modelować za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sqrt{0.224 + 0.155 \xi_{t-1} + 0.224 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.284 \sigma_{t-1}^2} \varepsilon_t,$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$, natomiast $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie zero-jedynkowym z prawdopodobieństwem sukcesu $\theta = \frac{11}{19}$.

7.2.4 Model EGARCH

W 1976 r. F. Black zaobserwował pewne zjawisko na rynkach finansowych, które polegało na wzroście zmienności indeksów po uprzednich spadkach cen, a mianowicie ε_{t-1} i σ_t były ujemnie skorelowane. W literaturze finansowej powyższe zjawisko nazywane jest efektem dźwigni – "leverage effect" (czasami w literaturze określane jako efekt asymetrii). Za pomocą modeli ARCH i GARCH powyższego zjawiska nie da się opisać. Dla opisu efektu dźwigni wskazanego przez F. Blacka w 1991 r. D.B. Nelson (patrz [41]) zaproponował użycie modelu EGARCH(p, q), $p, q \in \mathbb{N}$ (Exponential Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic model - wykładniczy uogólniony model autoregresji z warunkową niejednorodnością). Według D.B. Nelsona elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ należy modelować za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (7.56)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Parametr zmienności σ_t jest dany wzorem

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\theta \epsilon_{t-j} + \eta \left(|\epsilon_{t-j}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \sum_{i=1}^q \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2, \quad (7.57)$$

gdzie $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0, \beta_1 \geq 0, \dots, \beta_q \geq 0$ oraz $\varepsilon_s = \sigma_s = 0$ dla $s \leq 0$. W rozważanym przypadku asymetria jest spowodowana wpływem

kombinacji liniowej elementów ϵ_{t-j} oraz $|\epsilon_{t-j}|$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} E|\epsilon_t| &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ Ee^{\epsilon_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx = \sqrt{e}, \\ Ee^{|\epsilon_t|} &= 2F(1)\sqrt{e}, \end{aligned}$$

gdzie $F(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $\mathbf{N}(0,1)$ oraz $F(1) \approx 0.8413$.

Warunkowy rozkład $P(\epsilon_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma_t^2)$, gdzie parametr zmienności σ_t spełnia równanie (7.57). Parametr zmienności σ_t jest funkcją mierzalną ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ (zależy od poprzednich wartości $\epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_{t-p}$ i $\sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-q}$).

Własności modelu EGARCH(p, q):

a. elementy szeregu oscylują dookoła poziomu zerowego

$$E\epsilon_t = 0 \text{ dla dowolnego } t \geq 1;$$

b. dla dowolnego $t > \max(p, q, r)$ warunkowa wariancja jest równa

$$E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \exp\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\theta \epsilon_{t-j} + \eta \left(|\epsilon_{t-j}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]\right) \prod_{i=1}^q \sigma_{t-i}^{2\beta_i}.$$

Identyfikacja modelu EGARCH(p, q).

Parametry modelu EGARCH(p, q), $p, q \in \mathbb{N}$ identyfikujemy korzystając z metody największej wiarygodności. Niech dana będzie realizacja $\{\epsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$ szeregu czasowego postaci (7.56)-(7.57). Dla każdego $t > \max(p, q)$ warunkowy rozkład zmiennej losowej ϵ_t ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ jest dany wzorem

$$\begin{aligned} p(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \\ \gamma\left(\epsilon_t, 0, \exp\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\theta \frac{\epsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} + \eta \left(\frac{|\epsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right]\right) \prod_{i=1}^q \sigma_{t-i}^{2\beta_i}\right), \end{aligned} \quad (7.58)$$

gdzie $\gamma(\cdot)$ jest funkcją gęstości rozkładu normalnego $\mathbf{N}(0, 1)$ (patrz wzór (7.34)), natomiast dla $t \geq 1$ wartości estymatorów σ_t szacujemy za pomocą (7.44). Niech $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$. Funkcję wiarygodności definiujemy jako warunkowy rozkład łączny dla zmiennych $\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N$, przyjmując

$$L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta, \theta, \eta) = p(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_s) = \prod_{t=s+1}^N p(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}),$$

gdzie $s = \max(p, q)$. Wartości parametrów $\alpha, \beta, \theta, \eta$ wyznaczamy rozwiązując zadanie programowania nieliniowego postaci

$$\max_{(\alpha, \beta, \theta, \eta) \in D} L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta, \theta, \eta), \quad (7.59)$$

gdzie

$$D = \left\{ (\alpha, \beta, \theta, \eta) \in \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+2} : \begin{array}{l} \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0, \\ \beta_1 \geq 0, \dots, \beta_q \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Logarytm naturalny z funkcji wiarygodności wynosi

$$\begin{aligned} \ln L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha, \beta, \theta, \eta) &= -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=s+1}^N \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\theta \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} + \eta \left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \sum_{i=1}^q \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=s+1}^N \varepsilon_t^2 \exp \left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\theta \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} + \eta \left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] \right) \prod_{i=1}^q \sigma_{t-i}^{-2\beta_i} \\ &= -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} f(\alpha, \beta, \theta, \eta), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \theta, \eta) &= (N-s) \alpha_0 \\ &\quad + \sum_{t=s+1}^N \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\theta \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} + \eta \left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \sum_{i=1}^q \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{t=s+1}^N \varepsilon_t^2 \exp \left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\theta \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} + \eta \left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] \right) \prod_{i=1}^q \sigma_{t-i}^{-2\beta_i}. \end{aligned}$$

Korzystając z własności funkcji logarytmu naturalnego zadanie (7.59) możemy przedstawić w postaci

$$\min_{(\alpha, \beta, \theta, \eta) \in D} f(\alpha, \beta, \theta, \eta). \quad (7.60)$$

7.2.5 Model TARCh

Model TARCh(p, q), $p, q \in \mathbb{N}$ (Threshold AutoRegressive Conditional Heteroscedastic model – progowy model autoregresji z warunkową niejednorodnością) po raz pierwszy został zaprezentowany przez Tonga w 1990 r. (patrz [56]). Elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t, \quad (7.61)$$

gdzie

$$\mu_t = \sum_{i=1}^q I_{A_i}(\varepsilon_{t-q}) [\lambda_0^i + \lambda_1^i \varepsilon_{t-1} + \dots + \lambda_q^i \varepsilon_{t-q}], \quad (7.62)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2, \quad (7.63)$$

natomiast $I_A(x)$ jest indykátorem zbioru A , tzn.

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in A, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin A, \end{cases}$$

oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Dodatkowo zakładamy, że zbiory $A_1, A_2, \dots, A_q$ są rozłączne oraz $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_q = \mathbb{R}$, natomiast $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0$. Wielkość $q \geq 1$ nazywamy opóźnieniem czasowym, a wielkość $p \geq 1$ rzędem regresji liniowej warunkowej niejednorodności (heteroskedastyczności). Powyższy model również opisuje efekt asymetrii. Widzimy, że model TARCh powstał jako połączenie modelu progowego, który reprezentuje trend (7.62) dookoła którego oscylują elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, oraz modelu ARCH (warunkowa niejednorodność jest określona wzorem (7.63)). Więcej

na temat modelu TARCH można znaleźć w [60]. Niech

$$I(\varepsilon_{t-q}) = \begin{bmatrix} I_{A_1}(\varepsilon_{t-q}) \\ I_{A_2}(\varepsilon_{t-q}) \\ \dots \\ I_{A_q}(\varepsilon_{t-q}) \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_q^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_q^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_0^q & \lambda_1^q & \dots & \lambda_q^q \end{bmatrix}, \quad \zeta_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon_{t-1} \\ \dots \\ \varepsilon_{t-q} \end{bmatrix}.$$

Trend (7.62), dookoła którego oscylują elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, możemy przedstawić w postaci

$$\mu_t \stackrel{\text{def}}{=} \mu_t(\Lambda) = I^T(\varepsilon_{t-q}) \Lambda \zeta_t. \quad (7.64)$$

Własności modelu TARCH(p, q):

a. dla dowolnego $t > \max(p, q)$ warunkowa wartość oczekiwana jest równa

$$E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t(\Lambda);$$

b. dla dowolnego $t > \max(p, q, r)$ warunkowa wariancja jest dana wzorem

$$E\left((\varepsilon_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2.$$

Warunkowy rozkład $P(\varepsilon_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(\mu_t, \sigma_t^2)$. Widzimy również, że parametry średniej μ_t oraz odchylenia σ_t są funkcjami mierzalnymi ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ (dla $t > \max(p, q)$ zależą od wartości $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-\max(p,q)}$).

Identyfikacja modelu TARCH(p, q).

Parametry modelu TARCH(p) identyfikujemy korzystając z metody największej wiarygodności. W rozważanym przypadku należy wyznaczyć parametry progowych poziomów oscylacji dla funkcji trendu μ_t (należy oszacować $(q+1) \times q$ parametrów dla macierzy Λ) oraz parametry strukturalne dla warunkowej niejednorodności σ_t^2 (parametry $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$). Niech dana będzie realizacja szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Ze wzorów (7.61)–(7.63) wynika, że warunkowy rozkład elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{s < t \leq N}$ jest równy

$$p(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma(\varepsilon_t, \mu_t, \sigma_t), \quad (7.65)$$

gdzie $s = \max(p, q)$ oraz funkcja gęstości $\gamma(\cdot)$ jest określona wzorem (7.34). Warunkowy rozkład łączny zmiennych $\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N$ jest określony wzorem

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_s) &= p(\varepsilon_N | \mathcal{F}_{N-1}) p(\varepsilon_{N-1} | \mathcal{F}_{N-2}) \cdot \dots \cdot p(\varepsilon_{s+1} | \mathcal{F}_s) \\ &= \prod_{i=s+1}^N \gamma(\varepsilon_i, \mu_i, \sigma_i). \end{aligned}$$

Funkcję wiarygodności definiujemy jako warunkowy rozkład łączny zmiennych $\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N$

$$L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = p(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N | F_s).$$

Wyznaczenie parametrów macierzy Λ oraz parametrów autoregresji $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ polega na rozwiązaniu zadania

$$\max_{(\Lambda, \alpha) \in D} L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \Lambda, \alpha), \quad (7.66)$$

gdzie $D = \{(\Lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^{(q+1) \times q} \times \mathbb{R}^{p+1} : \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0\}$.

Logarytm naturalny z funkcji wiarygodności jest równy

$$\begin{aligned} \ln L(\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N, \Lambda, \alpha) &= -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=s+1}^N \frac{(\varepsilon_i - \mu_i(\Lambda))^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=s+1}^N \ln(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2) = -\frac{N-s}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} f(\Lambda, \alpha), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(\Lambda, \alpha) &= \sum_{i=s+1}^N \ln(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2) \\ &\quad + \sum_{i=s+1}^N \frac{(\varepsilon_i - \mu_i(\Lambda))^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{i-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{i-p}^2}. \end{aligned}$$

Logarytm naturalny jest funkcją rosnącą, zatem zadanie (7.66) możemy sprowadzić do postaci równoważnej

$$\min_{(\Lambda, \alpha) \in D} f(\Lambda, \alpha). \quad (7.67)$$

7.2.6 Model HARCH

W niektórych przypadkach autokorelację pomiędzy elementami szeregu czasowego $\{\varepsilon_t^2\}_{t \in \mathbb{N}}$ zanika wolnej niż pomiędzy elementami szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Jest to efekt "długiej pamięci", który nie zawsze da się uwzględnić za pomocą ARCH lub GARCH. Efekt długiej pamięci opisuje model HARCH(p), $p \in \mathbb{N}$ (Heterogeneous AutoRegressive Conditional Heteroscedastic model), który został przedstawiony w 1995 roku w pracach Muller U.A., Dacorogna M.M., Dave R.D., Olsen R.B., Pictet O.V., von Weizsacker J.E (parz [39]) oraz Dacorogna M.M., Embrechts P., Samorodnitsky G. (patrz [14]). Na podstawie modelu HARCH(p) identyfikowane były 30-minutowe zwroty kursu wymiany USD/DEM na podstawie danych z okresu 1-01-1987 do 1-01-1995.

Dla modelu HARCH(p), $p \geq 1$ elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (7.68)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Parametr zmienności σ_t jest dany wzorem

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left(\sum_{j=1}^i \varepsilon_{t-j} \right)^2, \quad (7.69)$$

natomiast $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0$ oraz $\varepsilon_s = 0$ dla $s \leq 0$. Widzimy, że na zmiany wartości σ_t wpływają nie tylko wielkości elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ale również znaki tych elementów.

Identycznie jak dla modeli z rodziny ARCH warunkowy rozkład zmiennej losowej ε_t ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ jest rozkładem normalnym $N(0, \sigma_t^2)$, gdzie parametr zmienności spełnia równanie (7.69). Warunkowa wariancja σ_t^2 jest funkcją mierzalną ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t-1}$ (zależy od wartości $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}$).

Własności modelu HARCH(p):

- a. elementy szeregu oscylują dookoła poziomu zerowego

$$E\varepsilon_t = 0 \text{ dla dowolnego } t \geq 1;$$

b. dla dowolnego $t > p$ warunkowa wariancja jest dana wzorem

$$E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \phi_i(t),$$

gdzie

$$\phi_i(t) = \left(\sum_{j=1}^i \varepsilon_{t-j} \right)^2. \quad (7.70)$$

W przypadku, gdy $p = 1$ otrzymujemy model ARCH(1) (tzn. HARCH(1)=ARCH(1)).

Identyfikacja modelu HARCH(p).

Parametry modelu HARCH(p) identyfikujemy korzystając z metody największej wiarygodności. Niech dana będzie realizacja szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq N}$. Ze wzorów (7.68) oraz (7.69) wynika, że warunkowy rozkład elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{p < t \leq N}$ jest równy

$$p(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma(\varepsilon_t, 0, \sigma_t), \quad (7.71)$$

gdzie $\gamma(\cdot)$ jest funkcją gęstości dla rozkładu $\mathbf{N}(0, \sigma_t^2)$ określoną wzorem (7.34). Zatem warunkowy rozkład łączny zmiennych $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N$ wynosi

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_p) &= p(\varepsilon_N | \mathcal{F}_{N-1}) p(\varepsilon_{N-1} | \mathcal{F}_{N-2}) \cdot \dots \cdot p(\varepsilon_{p+1} | \mathcal{F}_p) \\ &= \prod_{i=p+1}^N \gamma(\varepsilon_i, 0, \sigma_i). \end{aligned}$$

Funkcję wiarygodności definiujemy jako warunkowy rozkład łączny dla zmiennych $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N$

$$L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = p(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N | \mathcal{F}_p).$$

Wyznaczenie parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ polega na rozwiązaniu zadania

$$\max_{\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0} L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p). \quad (7.72)$$

Logarytm naturalny z funkcji wiarygodności wynosi

$$\begin{aligned}
 \ln L(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_N, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) &= -\frac{N-p}{2} \ln(2\pi) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N \ln(\alpha_0 + \alpha_1 \phi_1(t) + \dots + \alpha_p \phi_p(t)) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \phi_1(t) + \dots + \alpha_p \phi_p(t)} \\
 &= -\frac{N-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) &= \sum_{t=p+1}^N \ln(\alpha_0 + \alpha_1 \phi_1(t) + \dots + \alpha_p \phi_p(t)) \\
 &\quad + \sum_{t=p+1}^N \frac{\varepsilon_i^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \phi_1(t) + \dots + \alpha_p \phi_p(t)}.
 \end{aligned}$$

Logarytm naturalny jest funkcją rosnącą, zatem zadanie (7.72) możemy sprowadzić do zadania

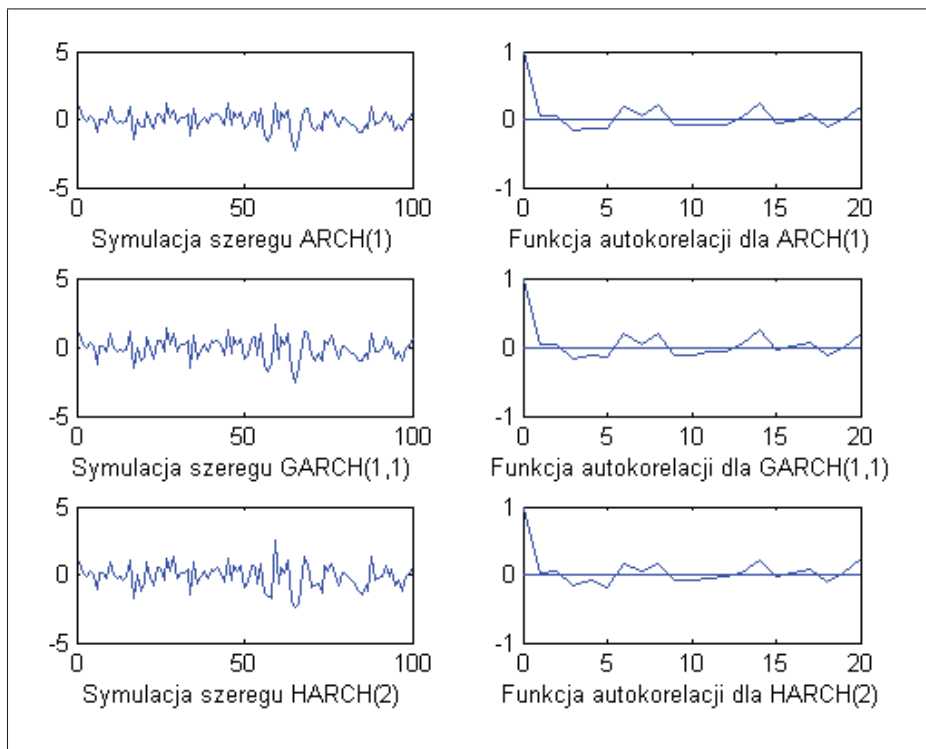
$$\min_{\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0} f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p). \quad (7.73)$$

Rysunek 7.3 przedstawia zachowania szeregów czasowych modeli ARCH(1), GARCH(1,1) oraz HARCH(2) dla uprzednio wygenerowanego ciągu realizacji niezależnych zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{3 \leq t \leq 100}$ o rozkładzie $\mathbf{N}(0,1)$. Dla powyższych modeli zostały przyjęte następujące wartości parametrów strukturalnych $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = \beta = 0.23$ oraz warunek początkowy $\varepsilon_1 = 1$ i $\varepsilon_2 = 0.2$.

Wartości szeregów czasowych ARCH(1), GARCH(1,1), HARCH(2) zostały wygenerowane za pomocą równania

$$\varepsilon_t = \sigma_t \epsilon_t \text{ dla } t \geq 3, \quad (7.74)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{3 \leq t \leq 100}$ jest realizacją ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{N}(0,1)$. Parametr zmienności dla modelu ARCH(1) jest dany



Rysunek 7.3: Symulacje szeregów ARCH(1), GARCH(1, 1), HARCH(2) oraz wartości funkcji autokorelacji.

wzorem

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}, \quad (7.75)$$

dla modelu GARCH(1, 1)

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}, \quad (7.76)$$

natomiast dla modelu HARCH(2)

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 (\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})^2}. \quad (7.77)$$

Dla każdego z szeregów ARCH(1), GARCH(1, 1) i HARCH(2) na rysunku 7.3 przedstawiono dodatkowo wartości funkcji autokorelacji r_τ , $0 \leq \tau \leq 20$. Widzimy zatem, że wartości funkcji autokorelacji oscylują dookoła poziomu zero, praktycznie dla $\tau \geq 1$. Brak związku pomiędzy

elementami ε_t i $\varepsilon_{t+\tau}$ dla $\tau \geq 1$ wynika z definicji tych elementów (patrz wzór (7.74)) oraz jest spowodowany multiplikatywnym wejściem "białego szumu" jako ciągu niezależnych zmiennych losowych $\{\epsilon_t\}_{3 \leq t \leq 100}$ o rozkładzie $\mathbf{N}(0, 1)$.

Rozdział 8

Filtracja ciągów warunkowo normalnych

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Poniżej rozważamy szereg czasowy $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, elementy którego są określone za pomocą równania

$$\xi_{t+1} = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta + B(t, \xi)\varepsilon_{t+1},$$

gdzie $A_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$, $A_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$, $B : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, natomiast $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych m -wymiarowych wektorów losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(\bar{0}, I)$, $\bar{0} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem o współrzędnych zerowych, $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jest macierzą jednostkową. Zakładamy, że wektor losowy $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m_0, \gamma_0)$ oraz jest stochastycznie niezależny od elementów szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$. Zagadnienie filtracji polega na oszacowaniu wektora θ na podstawie realizacji $\{\xi_s\}_{0 \leq s \leq t}$ (patrz np. [36], [44]). Rozpatrywany szereg czasowy $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest szeregiem gaussowskim (elementy ξ_t , $t \in \mathbb{N}$ mają rozkłady normalne).

Niech $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz $\mathcal{F}_0^\xi = \{\emptyset, \Omega\}$. Dodatkowo zakładamy, że $A_0(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $A_1(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ są mierzalne ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_t^\xi$. Optymalny estymator w sensie średniokwadratowym wektora nieznanymi parametrów θ ("filtr Kalmana - Bucy'ego") na

podstawie obserwacji $\{\xi_s\}_{0 \leq s \leq t}$ pokrywa się z warunkową wartością oczekiwaną

$$m_t = E\left(\theta \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right),$$

natomiast błąd estymacji (filtracji) jest równy warunkowej macierzy kowariancji

$$\gamma_t = E\left((\theta - m_t)(\theta - m_t)^T \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right).$$

W rozważanym przypadku wektor m_t i macierz γ_t , $t \in \mathbb{N}$ zostaną wyprowadzone z twierdzenia o korelacji normalnej (bez użycia aparatu teorii martynałów). Wektor warunkowej wartości oczekiwanej m_t oraz macierz warunkowej kowariancji γ_t zostaną przedstawione w postaci równań rekurencyjnych, co jest bardzo użyteczne dla praktycznego wykorzystania optymalnego filtru.

8.1 Twierdzenie o korelacji normalnej

Na początek przypomnijmy proste własności wektorów losowych o rozkładzie normalnym. Niech $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(m, Q)$, gdzie $m \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz

$$m = E\xi, \quad Q = E(\xi - m)(\xi - m)^T.$$

Zakładamy, że macierz Q jest macierzą nieosobliwą ($\det Q \neq 0$), więc także dodatnio określoną. Dla dowolnego $z \in \mathbb{R}^n$ funkcja charakterystyczna wektora losowego ξ jest dana wzorem

$$\varphi_\xi(z) = E \exp(iz^T \xi) = \exp\left(iz^T m - \frac{1}{2}z^T Q z\right). \quad (8.1)$$

Własności wektorów losowych o rozkładzie normalnym:

1. Jeżeli wektor losowy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m, Q)$, macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą deterministyczną, $a \in \mathbb{R}^n$ – wektorem deterministycznym, to wektor losowy $\mu = A\xi + a$ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(Am + a, AQA^T)$, gdzie wektor wartości oczekiwanych wynosi

$$E\mu = E(A\xi + a) = Am + a,$$

natomiast macierz kowariancji

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mu, \mu) &= E(\mu - E\mu)(\mu - E\mu)^T \\ &= E(A\xi + a - Am - a)(A\xi + a - Am - a)^T \\ &= E(A(\xi - m))(A(\xi - m))^T = AQA^T. \end{aligned}$$

Funkcja charakterystyczna wektora losowego μ jest równa

$$\varphi_\mu(z) = E \exp(iz^T \mu) = \exp\left(iz^T(Am + a) - \frac{1}{2}z^T AQA^T z\right). \quad (8.2)$$

2. Niech wektor losowy $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(\bar{0}, I)$,

gdzie $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem o współrzędnych zerowych oraz macierz $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą jednostkową. Zatem $E\varepsilon_j = 0$ dla dowolnego $1 \leq j \leq n$ oraz

$$E\varepsilon_i \varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j, \end{cases}$$

ponieważ składowe wektora losowego ε są niezależne. Jeżeli wektor losowy ξ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m, Q)$, to z własności 1 wynika, że wektor ξ możemy przedstawić w postaci

$$\xi = Q^{\frac{1}{2}} \varepsilon + m.$$

3. Niech $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_k \end{pmatrix}$ i $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ będą wektorami losowymi

o rozkładach normalnych $\mathbf{N}(m_\theta, Q_\theta)$ i $\mathbf{N}(m_\xi, Q_\xi)$ odpowiednio. Jeżeli wektory losowe θ i ξ są niezależne, to macierz kowariancji wektorów θ i ξ jest macierzą zerową oraz funkcja charakterystyczna wektora $(\theta, \xi) \in \mathbb{R}^{k+n}$ jest dana wzorem

$$\begin{aligned} \varphi_{(\theta, \xi)}(x, z) &= E \exp(i(x^T \theta + z^T \xi)) = \varphi_{(\theta)}(x) \varphi_{(\xi)}(z) \\ &= \exp\left(ix^T m_\theta - \frac{1}{2}x^T Q_\theta x\right) \exp\left(iz^T m_\xi - \frac{1}{2}z^T Q_\xi z\right). \end{aligned}$$

Niektóre zjawiska losowe są ze sobą skorelowane. Dość często spotykamy się z sytuacją, gdzie na podstawie zaobserwowanej realizacji jednego ze zjawisk losowych musimy dokonać prognozy drugiego zjawiska. W przypadku, gdy oba zjawiska są ze sobą skorelowane oraz zachowanie każdego z nich jest podporządkowane rozkładowi normalnemu, to twierdzenie o korelacji normalnej pokazuje w jaki sposób oszacować parametry rozkładu jednego ze zjawisk na podstawie realizacji drugiego. Poniżej zostanie przedstawione twierdzenie o korelacji normalnej wraz z dowodem. Więcej na ten temat można znaleźć np. w pracy [36].

Twierdzenie 8.1 (Twierdzenie o korelacji normalnej) *Niech*

$\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ i $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *będą wektorami o rozkładach normalnych odpowiednio* $N(m_\theta, Q_\theta)$ *i* $N(m_\xi, Q_\xi)$, *gdzie*

$$m_\theta \in \mathbb{R}^k, m_\xi \in \mathbb{R}^n, Q_\theta \in \mathbb{R}^{k \times k}, Q_\xi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Przyjmijmy $Q_{\theta\xi} = E(\theta - m_\theta)(\xi - m_\xi)^T$. *Wtedy* $Q_{\theta\xi} \in \mathbb{R}^{k \times n}$, *a wektor warunkowej wartości oczekiwanej* $E(\theta | \xi)$ *oraz macierz warunkowej kowariancji*

$$\text{cov}(\theta, \theta | \xi) = E\left((\theta - E(\theta | \xi))(\theta - E(\theta | \xi))^T | \xi\right)$$

dane są wzorami

$$E(\theta | \xi) = m_\theta + Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}(\xi - m_\xi), \quad (8.3)$$

$$\text{cov}(\theta, \theta | \xi) = Q_\theta - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}Q_{\theta\xi}^T. \quad (8.4)$$

Dowód. Rozważmy wektor losowy μ dany wzorem

$$\mu = (\theta - m_\theta) - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}(\xi - m_\xi). \quad (8.5)$$

Niech wektor $\bar{0} \in \mathbb{R}^k$ będzie wektorem o współrzędnych zerowych (wektor zerowy) oraz macierz $\bar{0} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ będzie macierzą o elementach zerowych (macierz zerowa). Wartość oczekiwana wektora μ jest równa

$$E\mu = E\theta - m_\theta - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}(E\xi - m_\xi) = \bar{0},$$

natomiast macierz kowariancji wektorów μ i $(\xi - m_\xi)$ jest równa

$$\begin{aligned} E\mu(\xi - m_\xi)^T &= E(\theta - m_\theta)(\xi - m_\xi)^T - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}E(\xi - m_\xi)(\xi - m_\xi)^T \\ &= Q_{\theta\xi} - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}Q_\xi = \emptyset. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Ze wzoru (8.6) wynika, że wektory μ i ξ są niezależne. Zatem

$$E(\mu|\xi) = E\mu = \bar{0}.$$

Wobec powyższego z równania (8.5), biorąc obustronnie operator warunkowej wartości oczekiwanej ze względu na ξ , otrzymujemy

$$\bar{0} = E(\theta|\xi) - m_\theta - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}(\xi - m_\xi).$$

Tym samym stwierdzamy prawdziwość wzoru (8.3). Ze wzoru (8.3) wynika

$$\theta - E(\theta|\xi) = \theta - m_\theta - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}(\xi - m_\xi) = \mu. \quad (8.7)$$

Z równania (8.7) oraz niezależności μ i ξ otrzymujemy

$$\begin{aligned} cov(\theta, \theta|\xi) &= E((\theta - E(\theta|\xi))(\theta - E(\theta|\xi))^T|\xi) \\ &= E(\mu\mu^T|\xi) = E\mu\mu^T, \end{aligned} \quad (8.8)$$

natomiast z równania (8.5) mamy

$$\begin{aligned} E\mu\mu^T &= Q_\theta + Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}Q_\xi Q_\xi^{-1}Q_{\theta\xi}^T - 2Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}Q_{\theta\xi}^T \\ &= Q_\theta - Q_{\theta\xi}Q_\xi^{-1}Q_{\theta\xi}^T. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Podstawiając (8.9) do (8.8) otrzymujemy wzór (8.4). ■

Wniosek 8.1 *Jeżeli θ i ξ są zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych $N(m_\theta, \sigma_\theta^2)$ i $N(m_\xi, \sigma_\xi^2)$ odpowiednio oraz kowariancja zmiennych losowych θ i ξ wynosi $cov(\theta, \xi) = r\sigma_\theta\sigma_\xi$, gdzie r jest współczynnikiem korelacji zmiennych θ i ξ oraz $\sigma_\xi^2 > 0$, to z twierdzenia o korelacji normalnej otrzymujemy*

$$\begin{aligned} E(\theta|\xi) &= m_\theta + \frac{cov(\theta, \xi)}{\sigma_\xi^2}(\xi - m_\xi) = m_\theta + r\frac{\sigma_\theta}{\sigma_\xi}(\xi - m_\xi), \\ cov(\theta, \theta|\xi) &= \sigma_\theta^2 - \frac{cov^2(\theta, \xi)}{\sigma_\xi^2} = \sigma_\theta^2(1 - r^2). \end{aligned}$$

Wniosek 8.2 Jeżeli θ i $\xi_1, \dots, \xi_k$ są zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych $\mathbf{N}(m_\theta, \sigma_\theta^2)$ i $\mathbf{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathbf{N}(m_k, \sigma_k^2)$ odpowiednio oraz zmienne losowe $\xi_1, \dots, \xi_k$ są niezależne, to warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej θ ze względu na $\xi_1, \dots, \xi_k$ wynosi

$$E(\theta | \xi_1, \dots, \xi_k) = m_\theta + \sum_{i=1}^k \frac{\text{cov}(\theta, \xi_i)}{\sigma_i^2} (\xi_i - m_i).$$

Przykład 8.1 Przyrząd dokonuje pomiarów z błędem. Niech zmienna losowa θ o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(m_\theta, \sigma_\theta^2)$ określa wielkość mierzonego parametru, natomiast zmienna losowa ε o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, \sigma^2)$ określa błąd pomiaru. Zakładamy, że zmienne losowe θ i ε są niezależne. Wyznamy warunkowy rozkład zmiennej losowej θ ze względu na wielkość pomiaru (wielkość pomiarów odczytujemy z błędem).

Niech zmienna losowa ξ reprezentuje wielkość pomiaru z błędem, tzn. $\xi = \theta + \varepsilon$, zatem

$$\begin{aligned} E\xi &= E(\theta + \varepsilon) = m_\theta, \\ \text{Var}(\xi) &= E(\xi - m_\theta)^2 = \sigma_\theta^2 + \sigma^2, \end{aligned}$$

natomiast kowariancja zmiennych losowych θ i ξ jest równa

$$\text{cov}(\theta, \xi) = E(\theta - m_\theta)(\theta + \varepsilon - m_\theta) = \sigma_\theta^2.$$

Z twierdzeniem o korelacji normalnej

$$E(\theta | \xi) = m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2} (\xi - m_\theta). \quad (8.10)$$

Zdefiniujmy zmienną losową μ postaci

$$\mu = \theta - E(\theta | \xi). \quad (8.11)$$

Wobec powyższego $E\mu = 0$ oraz

$$\begin{aligned} E(\xi - E\xi)(\mu - E\mu) &= E(\theta + \varepsilon - m_\theta) \left(\theta - m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2} (\theta + \varepsilon - m_\theta) \right) \\ &= \sigma_\theta^2 - \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2} (\sigma_\theta^2 + \sigma^2) = 0. \end{aligned}$$

Zatem zmienne losowe ξ i μ są niezależne. Ponieważ ξ i μ są niezależne, to warunkowa wariancja zmiennej losowej θ ze względu na ξ wynosi

$$\begin{aligned} \text{Var}(\theta|\xi) &= E\left((\theta - E(\theta|\xi))^2|\xi\right) = E(\mu^2|\xi) = E\mu^2 \\ &= E\left(\theta - m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2}(\theta + \varepsilon - m_\theta)\right)^2 = \sigma_\theta^2 - \frac{\sigma_\theta^4}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie ze wzorów (8.10) – (8.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} E(\exp(iz\theta)|\xi) &= E(\exp(izE(\theta|\xi) + iz\mu)|\xi) \\ &= \exp(izE(\theta|\xi)) E(\exp(iz\mu)|\xi) = \exp(izE(\theta|\xi)) E(\exp(iz\mu)) \\ &= \exp\left(iz\left(m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2}(\xi - m_\theta)\right) - \frac{z^2}{2}\left(\sigma_\theta^2 - \frac{\sigma_\theta^4}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że warunkowy rozkład zmiennej losowej θ ze względu na pomiar $\theta + \varepsilon$ jest rozkładem normalnym $N\left(m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2}(\xi - m_\theta), \sigma_\theta^2 - \frac{\sigma_\theta^4}{\sigma_\theta^2 + \sigma^2}\right)$.

8.2 Równania filtracji liniowej

Poniżej zostanie przedstawiona uproszczona konstrukcja filtra liniowego, która następnie zostanie wykorzystana do zagadnień estymacji parametrów strukturalnych szeregów warunkowo normalnych. Bardziej rozbudowaną wersję liniowej filtracji metodą Kalmana - Bucy'ego dla procesów częściowo obserwowalnych można znaleźć np. w [36], [44].

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a elementy szeregu czasowego $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ będą określone za pomocą równania

$$\xi_{t+1} = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta + B(t, \xi)\varepsilon_{t+1}, \quad (8.12)$$

gdzie $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych m -wymiarowych wektorów losowych o rozkładzie normalnym $N(\bar{0}, I)$, natomiast $\bar{0} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem o współrzędnych zerowych oraz macierz $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jest macierzą jednostkową. Zakładamy, że wektory losowe θ oraz $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są stochastycznie niezależne. Niech $\mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_0^\xi \vee \sigma\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ oraz $\mathcal{F}_0^\xi = \{\emptyset, \Omega\}$. Dodatkowo w równaniu (8.12) zakładamy:

1. dla dowolnego $t \in \mathbb{N}$ wektor $A_0(t, \xi) \in \mathbb{R}^n$ oraz macierze $A_1(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B(t, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ są mieralne ze względu $\mathcal{F}_t^\xi$;
2. z prawdopodobieństwem jeden elementy wektora $A_0(t, \xi)$ i macierzy $A_1(t, \xi)$, $B(t, \xi)$ są ograniczone, tzn. dla $t \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} P(|A_{0i}(t, \xi)| \leq c) &= 1, \quad P(|A_{1ij}(t, \xi)| \leq c) = 1, \\ P(|B_{is}(t, \xi)| \leq c) &= 1 \end{aligned}$$

dla $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq s \leq m$, $c < \infty$ oraz

$$E|A_0(t, \xi)|^2 < \infty, \quad E|A_1(t, \xi)|^2 < \infty, \quad E|B(t, \xi)|^2 < \infty;$$

3. warunkowy rozkład wektora losowego $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ ze względu na $\mathcal{F}_0^\xi$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_0, \gamma_0)$.

Wyznaczenie optymalnego estymatora ("filtru Kalmana - Bucy'ego") wektora losowego θ na podstawie realizacji $\{\xi_s\}_{0 \leq s \leq t}$ polega na oszacowaniu wektora warunkowych wartości oczekiwanych

$$m_t = E(\theta | \mathcal{F}_t^\xi),$$

oraz wyznaczeniu macierzy warunkowej kowariancji (macierzy błędu estymacji -filtracji)

$$\gamma_t = E\left((\theta - m_t)(\theta - m_t)^T | \mathcal{F}_t^\xi\right).$$

Wielkość błędu estymacji określamy jako ślad z macierzy warunkowej kowariancji. Twierdzenie poniżej podaje sposób oszacowania wektora m_t i macierzy γ_t dla $t \in \mathbb{N}_0$.

Twierdzenie 8.2 *Jeżeli spełnione są założenia (1)-(3), to warunkowy rozkład wektora losowego θ ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_t^\xi$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_t, \gamma_t)$, gdzie wektor warunkowych wartości oczekiwanych m_t oraz*

macierz błędu estymacji γ_t określone są za pomocą równań rekurencyjnych

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= m_t + \gamma_t A_1^T(t, \xi) (A_1(t, \xi) \gamma_t A_1^T(t, \xi) + B(t, \xi) B^T(t, \xi))^{-1} \\ &\quad \times (\xi_{t+1} - A_0(t, \xi) - A_1(t, \xi) m_t), \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{t+1} &= \gamma_t - \gamma_t A_1^T(t, \xi) \\ &\quad \times (A_1(t, \xi) \gamma_t A_1^T(t, \xi) + B(t, \xi) B^T(t, \xi))^{-1} A_1(t, \xi) \gamma_t \end{aligned} \quad (8.14)$$

z warunkami początkowymi m_0 i γ_0 odpowiednio.

Dowód. Dowiedziemy twierdzenia za pomocą indukcji matematycznej. Założmy, że dla dowolnego $t \geq 1$ warunkowy rozkład $P(\theta \leq x \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ jest rozkładem normalnym $N(m_t, \gamma_t)$, gdzie $m_t = E(\theta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ oraz $\gamma_t = \text{cov}(\theta, \theta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$. Z równania (8.12) wynika, że warunkowa wartość oczekiwana wektora ξ_{t+1} ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_t^\xi$ jest równa

$$E(\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t^\xi) = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi) m_t, \quad (8.15)$$

natomiast macierz warunkowej kowariancji jest równa

$$\begin{aligned} \gamma_t^\xi &= \text{cov}(\xi_{t+1}, \xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t^\xi) \\ &= E\left(\left(\xi_{t+1} - E(\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t^\xi)\right) \left(\xi_{t+1} - E(\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t^\xi)\right)^T \mid \mathcal{F}_t^\xi\right) \\ &= A_1(t, \xi) \gamma_t A_1^T(t, \xi) + B(t, \xi) B^T(t, \xi). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Macierz warunkowej kowariancji wektorów θ i ξ_{t+1} jest dana wzorem

$$\begin{aligned} \gamma_t^{\theta\xi} &= \text{cov}(\theta, \xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t^\xi) \\ &= E\left((\theta - m_t) ((A_1(t, \xi) (\theta - m_t) + B(t, \xi) \varepsilon_{t+1}))^T \mid \mathcal{F}_t^\xi\right) \\ &= \gamma_t A_1^T(t, \xi). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Korzystając z twierdzenia o korelacji normalnej, otrzymujemy

$$E(\theta \mid \mathcal{F}_{t+1}^\xi) = E(\theta \mid \mathcal{F}_t^\xi) + \gamma_t^{\theta\xi} (\gamma_t^\xi)^{-1} (\xi_{t+1} - E(\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t^\xi)). \quad (8.18)$$

Zdefiniujmy wektor losowy μ_t postaci

$$\begin{aligned} \mu_t &= \theta - E(\theta \mid \mathcal{F}_{t+1}^\xi) = \theta - E(\theta \mid \mathcal{F}_t^\xi) \\ &\quad - \gamma_t^{\theta\xi} (\gamma_t^\xi)^{-1} (\xi_{t+1} - E(\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t^\xi)). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Ze wzoru (8.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} E\left(\mu_t \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right) &= \bar{0}, \\ \text{cov}\left(\mu_t, \mu_t \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right) &= \gamma_t - \gamma_t^{\theta\xi} \left(\gamma_t^\xi\right)^{-1} \left(\gamma_t^{\theta\xi}\right)^T. \end{aligned}$$

Warunkowa macierz kowariancji wektorów μ_t i $\xi_{t+1} - E\left(\xi_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right)$ jest równa

$$E\left(\mu_t \left(\xi_{t+1} - E\left(\xi_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right)\right)^T \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right) = \gamma_t^{\theta\xi} - \gamma_t^{\theta\xi} \left(\gamma_t^\xi\right)^{-1} \gamma_t^\xi = \emptyset, \quad (8.20)$$

gdzie wektor $\bar{0} \in \mathbb{R}^k$ jest wektorem o współrzędnych zerowych (wektor zerowy) oraz macierz $\emptyset \in \mathbb{R}^{k \times n}$ jest macierzą o elementach zerowych (macierz zerowa). Zatem μ_t i $\xi_{t+1} - E\left(\xi_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right)$ jak również μ_t i ξ_{t+1} są stochastycznie niezależne. Z równania (8.19) wynika, że funkcja charakterystyczna wektora losowego θ ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t+1}^\xi$ jest równa

$$\begin{aligned} &E\left(\exp\left(iz^T \theta\right) \middle| \mathcal{F}_{t+1}^\xi\right) \\ &= \exp\left(iz^T \left(E\left(\theta \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right) + \gamma_t^{\theta\xi} \left(\gamma_t^\xi\right)^{-1} \left(\xi_{t+1} - E\left(\xi_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right)\right)\right)\right) \\ &\times E\left(\exp\left(iz^T \mu_t\right) \middle| \mathcal{F}_{t+1}^\xi\right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Z niezależności μ_t i ξ_{t+1} otrzymujemy

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(iz^T \mu_t\right) \middle| \mathcal{F}_{t+1}^\xi\right) &= E\left(\exp\left(iz^T \mu_t\right) \middle| \mathcal{F}_t^\xi\right) \\ &\exp\left(-\frac{1}{2}z^T \left(\gamma_t - \gamma_t^{\theta\xi} \left(\gamma_t^\xi\right)^{-1} \left(\gamma_t^{\theta\xi}\right)^T\right) z\right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Podstawiając (8.15)-(8.17) oraz (8.22) do wzoru (8.21) otrzymujemy

$$E\left(\exp\left(iz^T \theta\right) \middle| \mathcal{F}_{t+1}^\xi\right) = \exp\left(iz^T m_{t+1} - \frac{1}{2}z^T \gamma_{t+1} z\right),$$

gdzie m_{t+1} i γ_{t+1} są określone za pomocą wzorów (8.13)-(8.14). Stąd warunkowy rozkład wektora losowego θ ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t+1}^\xi$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_{t+1}, \gamma_{t+1})$. ■

Równania rekurencyjne (8.13)-(8.14) przedstawimy w postaci efektywnych rozwiązań. W tym celu dowiedzimy lematu pomocniczego.

Lemat 8.1 *Jeżeli $x, B \in \mathbb{R}^k$, $C \in \mathbb{R}$ oraz macierz $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ jest macierzą nieosobliwą, to*

$$\int \exp \left(-\frac{1}{2} x^T A x - B^T x - C \right) dx = \sqrt{\frac{(2\pi)^k}{\det A}} \exp \left(-\frac{1}{2} B^T A^{-1} B - C \right). \quad (8.23)$$

Dowód. Niech

$$S = \int \exp \left(-\frac{1}{2} x^T A x - B^T x - C \right) dx.$$

Aby wyznaczyć powyższą całkę wprowadzimy zamianę zmiennych. Niech $y = A^{\frac{1}{2}} x$, zatem $dy = \sqrt{\det A} dx$. Wobec powyższego otrzymujemy

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp \left(-\frac{1}{2} y^T y - B^T A^{-\frac{1}{2}} y - C \right) dy \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(y^T y + 2 B^T A^{-\frac{1}{2}} y + B^T A^{-1} B - B^T A^{-1} B \right) - C \right) dy \\ &= \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} B^T A^{-1} B - C \right)}{\sqrt{\det A}} \int \exp \left(-\frac{1}{2} \|y - A^{-\frac{1}{2}} B\|^2 \right) dy. \end{aligned}$$

Korzystając z własności całki Eulera (patrz np. [23], [28]) otrzymujemy tezę.

■

Twierdzenie poniżej przedstawia efektywne rozwiązania równań rekurencyjnych (8.13)-(8.14), które reprezentują wektor warunkowych wartości oczekiwanych m_t oraz macierz błędu estymacji (filtracji) γ_t wektora losowego θ .

Twierdzenie 8.3 *Jeżeli dla $t \in \mathbb{N}_0$ macierze $B(t, \xi) B^T(t, \xi)$ są nieosobliwe, to rozwiązania równań (8.13)-(8.14) dane są wzorami*

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \left(I + \gamma_0 \sum_{i=0}^t A_1^T(i, \xi) (B(i, \xi) B^T(i, \xi))^{-1} A_1(i, \xi) \right)^{-1} \\ &\times \left(m_0 + \gamma_0 \sum_{i=0}^t A_1^T(i, \xi) (B(i, \xi) B^T(i, \xi))^{-1} (\xi_{i+1} - A_0(i, \xi)) \right), \quad (8.24) \end{aligned}$$

$$\gamma_{t+1} = \left(I + \gamma_0 \sum_{i=0}^t A_1^T(i, \xi) (B(i, \xi) B^T(i, \xi))^{-1} A_1(i, \xi) \right)^{-1} \gamma_0, \quad (8.25)$$

gdzie $I \in \mathbb{R}^{k \times k}$ jest macierzą jednostkową.

Dowód. W celu uproszczenia oznaczeń i przejrzystości dowodu przyjmujemy

$$A_{0t} \triangleq A_0(t, \xi), \quad A_{1t} \triangleq A_1(t, \xi), \quad B_t \triangleq B(t, \xi) \quad (8.26)$$

dla $t \in \mathbb{N}_0$. Na podstawie twierdzenia 8.2 warunkowy rozkład wektora losowego θ ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_t^\xi$ jest rozkładem normalnym $N(m_t, \gamma_t)$. Ponieważ, dla każdego $t \in \mathbb{N}_0$ macierz BB^T jest nieosobliwa, to warunkowy rozkład wektora losowego ξ_{t+1} ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_t^{\xi\theta} = \sigma\{\theta\} \vee \mathcal{F}_t^\xi$ jest rozkładem normalnym $N(A_{0t} + A_{1t}\theta, B_t B_t^T)$. Warunkowy rozkład łączny wektorów ξ_{t+1} i θ wynosi

$$\begin{aligned} f_{\xi_{t+1}\theta}(\xi, \theta | \mathcal{F}_t^\xi) &= f_\theta(\theta | \mathcal{F}_t^\xi) f_{\xi_{t+1}}(\xi | \mathcal{F}_t^{\xi\theta}) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\theta - m_t)^T \gamma_t^{-1}(\theta - m_t)\right)}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\gamma_t)}} \\ &\quad \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - A_{0t} - A_{1t}\theta)^T (B_t B_t^T)^{-1}(\xi - A_{0t} - A_{1t}\theta)\right)}{\sqrt{(2\pi)^n \det(B_t B_t^T)}}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Rozkład brzegowy wektora losowego ξ_{t+1} jest określony za pomocą funkcji gęstości

$$\begin{aligned} f_{\xi_{t+1}}(\xi | \mathcal{F}_t^\xi) &= \int f_{\xi_{t+1}\theta}(\xi, \theta | \mathcal{F}_t^\xi) d\theta = \int \exp\left(-\frac{\phi(\theta)}{2}\right) d\theta \\ &\quad \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(m_t^T \gamma_t^{-1} m_t + (\xi - A_{0t})^T (B_t B_t^T)^{-1}(\xi - A_{0t})\right)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{k+n} \det(\gamma_t) \det(B_t B_t^T)}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \theta^T \left(\gamma_t^{-1} + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} A_{1t} \right) \theta \\ &\quad - 2\theta^T \left(\gamma_t^{-1} m_t + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} (\xi - A_{0t}) \right). \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (8.23) otrzymujemy

$$f_{\xi_{t+1}}(\xi | \mathcal{F}_t^\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\gamma_t) \det(B_t B_t^T) \det(\gamma_t^{-1} + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} A_{1t})}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(m_t^T \gamma_t^{-1} m_t + (\xi - A_{0t})^T (B_t B_t^T)^{-1} (\xi - A_{0t})^T \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\gamma_t^{-1} m_t + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} (\xi - A_{0t}) \right) \left(\gamma_t^{-1} + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} A_{1t} \right)^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\gamma_t^{-1} m_t + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} (\xi - A_{0t}) \right) \right) \right\} \quad (8.28)$$

Z własności warunkowych rozkładów wynika, że funkcja gęstości wektora losowego θ ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t+1}^\xi$ jest dana wzorem

$$f_\theta(\theta | \mathcal{F}_{t+1}^\xi) = \frac{f_{\xi_{t+1}\theta}(\xi, \theta | \mathcal{F}_t^\xi)}{f_{\xi_{t+1}}(\xi | \mathcal{F}_t^\xi)}. \quad (8.29)$$

Podstawiając (8.27) i (8.28) do (8.29) otrzymujemy

$$f_\theta(\theta | \mathcal{F}_{t+1}^\xi) = \sqrt{\frac{\det(\gamma_{t+1}^{-1})}{(2\pi)^k}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\theta - m_{t+1})^T \gamma_{t+1}^{-1} (\theta - m_{t+1}) \right\},$$

gdzie

$$m_{t+1} = \left(\gamma_t^{-1} + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} A_{1t} \right)^{-1} \left(\gamma_t^{-1} m_t + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} (\xi - A_{0t}) \right) \quad (8.30)$$

oraz

$$\gamma_{t+1}^{-1} = \gamma_t^{-1} + A_{1t}^T (B_t B_t^T)^{-1} A_{1t}. \quad (8.31)$$

Warunkowy rozkład wektora losowego θ ze względu na σ -ciało $\mathcal{F}_{t+1}^\xi$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_{t+1}, \gamma_{t+1})$ (patrz twierdzenie 8.2). Podstawiając (8.26) do równań (8.30)–(8.31) otrzymujemy

$$\begin{cases} \gamma_{t+1}^{-1} m_{t+1} = \gamma_t^{-1} m_t + A_1^T(t, \xi) (B(t, \xi) B^T(t, \xi))^{-1} (\xi - A_0(t, \xi)) \\ \gamma_{t+1}^{-1} = \gamma_t^{-1} + A_1^T(t, \xi) (B(t, \xi) B^T(t, \xi))^{-1} A_1(t, \xi) \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań rekurencyjnych jest dane za pomocą wzorów (8.24)–(8.25). ■

8.3 Zastosowanie równań filtracji liniowej do identyfikacji szeregów warunkowo normalnych

Liniową filtrację Kalmana-Bucy'ego najczęściej wykorzystujemy w przypadku dynamicznie rozszerzającego się zbioru danych dotyczącego realizacji szeregu czasowego. Jeżeli elementy szeregu czasowego $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania (8.12), to wykorzystując bezpośrednio wzory (8.24)-(8.25) lub w postaci dynamicznej (8.13)-(8.14) szacujemy parametry strukturalne θ w równaniu (8.12).

Równania liniowej filtracji również można wykorzystać do identyfikacji modeli $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p, q)$, $ARIMA(p, r, q)$ oraz modeli rodziny ARCH. Poniżej zostaną podane konstrukcje estymatorów parametrów strukturalnych dla modeli $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p, q)$ oraz $ARCH(p)$.

8.3.1 Filtracja modeli $AR(p)$

Dla modeli autoregresji $AR(p)$, $p \geq 1$ elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania (5.44), które możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_{t+1} = A_p(t, \varepsilon) \Lambda + \sigma_t \epsilon_{t+1} \quad \text{dla } t > p, \quad (8.32)$$

gdzie

$$A_p(t, \varepsilon) = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p+1}),$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zakładamy, że wektor nieznanych parametrów Λ ma rozkład normalny $N(m_s, \gamma_s)$ dla $s > p$. Z twierdzenia 8.2 wynika, że dla dowolnego $t \geq s$ warunkowy rozkład

$P(\Lambda \leq x | \mathcal{F}_t)$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_t, \gamma_t)$, gdzie m_t i γ_t wyznaczamy za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} m_t &= \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \frac{A_p^T(i, \varepsilon) A_p(i, \varepsilon)}{\sigma_i^2} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(m_s + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \frac{A_p^T(i, \varepsilon)}{\sigma_i^2} \varepsilon_{i+1} \right), \\ \gamma_t &= \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \frac{A_p^T(i, \varepsilon) A_p(i, \varepsilon)}{\sigma_i^2} \right)^{-1} \gamma_s, \end{aligned} \quad (8.33)$$

oraz $I \in \mathbb{R}^{p \times p}$ jest macierzą jednostkową. W modelu $\text{AR}(p)$, $p \geq 1$ postaci (8.32) wartość estymatora odchylenia standardowego σ_t , $t \geq s$ wyznaczamy ze wzoru

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{t-p} \sum_{i=p}^{t-1} (\varepsilon_i - A_p(i, \varepsilon) m_t)^2}. \quad (8.34)$$

Parametry rozkładu wektora Λ również możemy wyznaczyć wykorzystując równania rekurencyjne

$$m_{t+1} = m_t + \frac{\gamma_t A_p^T(t, \varepsilon)}{A_p(t, \varepsilon) \gamma_t A_p^T(t, \varepsilon) + \sigma_t^2} \varepsilon_{t+1} - A_p(t, \varepsilon) m_t, \quad (8.35)$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \frac{1}{A_p(t, \varepsilon) \gamma_t A_p^T(t, \varepsilon) + \sigma_t^2} \gamma_t A_p^T(t, \varepsilon) A_p(t, \varepsilon) \gamma_t \quad (8.36)$$

z warunkiem początkowym m_s i γ_s . Powyższe równania najczęściej wykorzystujemy w przypadku dynamicznie rozszerzającego się zbioru danych dotyczącego realizacji szeregu $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq t}$, $t \in \mathbb{N}$.

Przykład 8.2 Dany jest 100-elementowy szereg reszt 0.3, -0.02, -0.11, -0.28, -0.07, 0.14, 0.24, 0.36, 0.22, 0.14, 0.35, 0.07, -0.18, -0.31, 0.22, -0.3, -0.35, 0.11, -0.01, 0.69, 0.33, -0.31, -0.36, -0.06, -0.23, -0.77, -0.45, -1.14, -0.94, -0.82, -0.78, -0.36, -0.33, -0.32, 0 -0.17, -0.24, 0.09, 0.42, 0.32, 0.75, 0.92, 0.69, 0.91, 0.87, 0.48, 0.28, 0.08, 0.05, 0.29, 0.1, 0.62, 0.69, 0.22, 0.09, -0.17, -0.47, -0.63, -0.37, -0.06, -0.47, -0.06, 0.19, 0.02, -0.28, 0.28, -0.09, -0.4, -0.67, -0.43, 0.45, 0.38, -0.2, 0.26, 0.17, 0.21, 0.23, 0.06, -0.29, -0.42, -0.4, -0.32, -0.49, -0.13, -0.2, -0.71, -0.96, -0.88, -0.95,

-1.02, -0.82, -0.28, -0.54, -0.7, -0.58, -0.78, -0.67, -0.3, 0.03, 0.21. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów na podstawie realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$ dokonamy identyfikacji modelu $AR(1)$. Następnie dla każdego $10 < t \leq 100$ stosując równania liniowej filtracji Kalmana-Bucy'ego oszacujemy wartości parametrów modelu $AR(1)$ na podstawie realizacji $\{\varepsilon_s\}_{1 \leq s \leq t}$.

Najpierw na podstawie realizacji $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$ wyznaczmy oceny parametrów modelu $AR(1)$ postaci

$$\varepsilon_t = \alpha \varepsilon_{t-1} + \sigma \epsilon_t, \quad (8.37)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$.

Przyjmijmy, że $X = (0.3, -0.02, -0.11, -0.28, -0.07, 0.14, 0.24, 0.36, 0.22)^T$ oraz $Y = (-0.02, -0.11, -0.28, -0.07, 0.14, 0.24, 0.36, 0.22, 0.14)^T$. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów otrzymujemy:

a. wartość estymatora parametru α jest równa

$$\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T Y \approx 0.605 ,$$

b. wartość odchylenia standardowego zaburzeń zewnętrznych w modelu (8.37) jest równa

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (\varepsilon_{i+1} - \hat{\alpha} \varepsilon_i)^2} \approx 0.1617 ,$$

c. wariancja parametru α wynosi

$$\sigma_\alpha^2 = \hat{\sigma}^2 (X^T X)^{-1} \approx 0.0978 .$$

W momencie $t = 10$ przyjmujemy, że parametr α ma rozkład normalny $N(0.605, 0.0978)$. Dla $t > 10$ rozważamy szereg czasowy postaci

$$\varepsilon_t = \alpha \varepsilon_{t-1} + \sigma_{t-1} \epsilon_t, \quad (8.38)$$

gdzie $\{\epsilon_t\}_{t \geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Z twierdzenia 8.2 wynika, że dla dowolnego $10 < t \leq 100$ warunkowy rozkład $P(\alpha \leq x | \mathcal{F}_t)$ jest rozkładem normalnym

$\mathbf{N}(m_t, \gamma_t)$, gdzie

$$m_{t+1} = m_t + \frac{\varepsilon_{t+1} - m_t \varepsilon_{t+1}}{\gamma_t \varepsilon_{t+1}^2 + \sigma_t^2} \gamma_t \varepsilon_t, \quad (8.39)$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \frac{\gamma_t^2 \varepsilon_t^2}{\gamma_t \varepsilon_{t+1}^2 + \sigma_t^2} \quad (8.40)$$

z warunkiem początkowym $m_{10} = \hat{\alpha}$, $\gamma_{10} = \sigma_\alpha^2$, $\sigma_{10} = \hat{\sigma}$. Wykres 8.1a przedstawia realizację szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$. Dla każdego $10 < t \leq 100$ ze wzorów (8.39) – (8.40) wyznaczamy wartości parametrów rozkładu zmiennej losowej α . Wykresy 8.1b i 8.1c przedstawiają warunkową wartość oczekiwaną i warunkową wariancję parametru strukturalnego α w postaci szeregów $\{m_t\}_{10 \leq t \leq 100}$ i $\{\gamma_t\}_{10 \leq t \leq 100}$ odpowiednio. Dla $10 < t \leq 99$ wartość estymatora odchylenia standardowego σ_t w równaniu (8.38) wyznaczamy za pomocą wzoru

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t (\varepsilon_{i+1} - m_t \varepsilon_i)^2}.$$

Wykres 8.1d przedstawia wartości estymatora odchyłeń standardowych $\{\hat{\sigma}_t\}_{10 \leq t \leq 99}$.

8.3.2 Filtracja modeli MA(q)

Dla modelu MA(q), $q \geq 1$ elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania (5.59), które możemy przedstawić w postaci

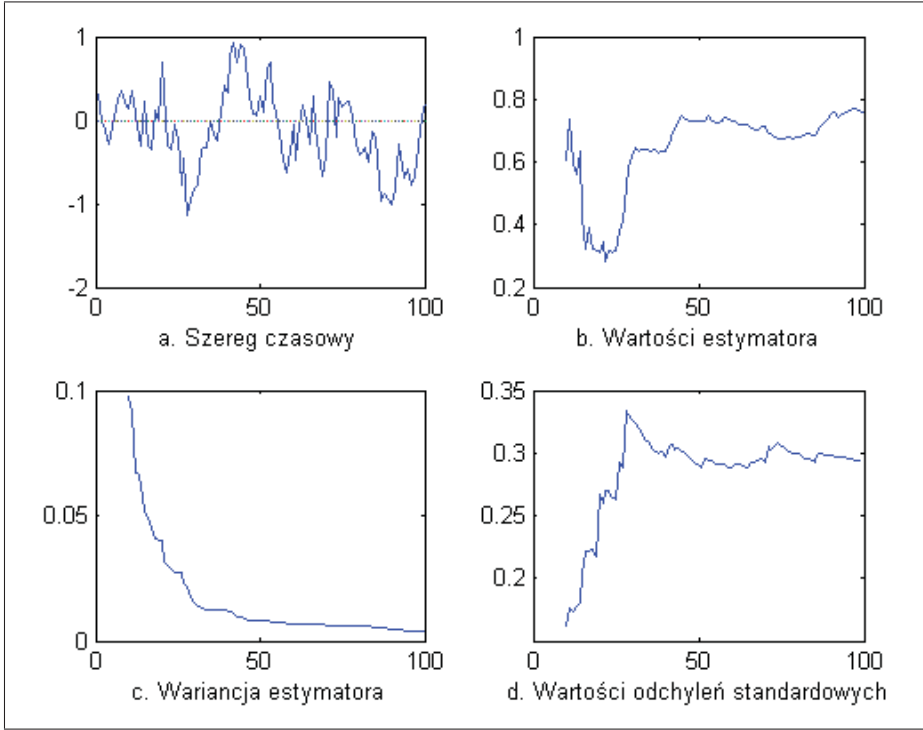
$$\varepsilon_{t+1} = -\sigma_t B_q(t, \varepsilon) \Theta + \sigma_t \varepsilon_{t+1} \text{ dla } t > q, \quad (8.41)$$

gdzie

$$B_q(t, \varepsilon) = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q+1}),$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_q \end{pmatrix}$$

oraz $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zakładamy,



Rysunek 8.1: Wartości szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$, wartości średnie $\{m_t\}_{10 \leq t \leq 100}$ oraz wariancja $\{\gamma_t\}_{10 \leq t \leq 100}$ estymatora parametru α , wartości odchyłeń standardowych $\{\hat{\sigma}_t\}_{10 \leq t \leq 99}$.

że wektor nieznanych parametrów Θ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m_s, \gamma_s)$ dla $s > q$. Z twierdzenia 8.7 wynika, że dla dowolnego $t \geq s$ warunkowy rozkład $P(\Theta \leq x | \mathcal{F}_t)$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_t, \gamma_t)$, gdzie m_t i γ_t , $t \geq s$ wyznaczamy za pomocą wzorów

$$m_t = \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} B_q^T(i, \epsilon) B_q(i, \epsilon) \right)^{-1} \times \left(m_s - \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} B_q^T(i, \epsilon) \frac{\varepsilon_{i+1}}{\sigma_i} \right), \quad (8.42)$$

$$\gamma_t = \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} B_q^T(i, \epsilon) B_q(i, \epsilon) \right)^{-1} \gamma_s, \quad (8.43)$$

natomiast $I \in \mathbb{R}^{q \times q}$ jest macierzą jednostkową. Wartości estymatora odchylenia standardowego σ_t , $t \geq s$ wyznaczamy ze wzoru

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{t-q} \sum_{i=q}^{t-1} (\varepsilon_i + \hat{\sigma}_{i-1} B_q(i, \epsilon) m_t)^2}. \quad (8.44)$$

Wartości szeregu $\{\epsilon_t\}_{t \geq s}$ szacujemy za pomocą równania

$$\epsilon_t = \frac{\varepsilon_t}{\hat{\sigma}_{t-1}} - B_q(t, \epsilon) m_{t-1}. \quad (8.45)$$

Dla dowolnego $t \geq s$ parametry rozkładu wektora losowego Θ możemy wyznaczyć korzystając z równań rekurencyjnych

$$m_{t+1} = m_t - \frac{\varepsilon_{t+1} + \hat{\sigma}_t B_q(t, \epsilon) m_t}{(B_q(t, \epsilon) \gamma_t B_q^T(t, \epsilon) + 1) \hat{\sigma}_t} \gamma_t B_q^T(t, \epsilon), \quad (8.46)$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \frac{1}{B_q(t, \epsilon) \gamma_t B_q^T(t, \epsilon) + 1} \gamma_t B_q^T(t, \epsilon) B_q(t, \epsilon) \gamma_t \quad (8.47)$$

z warunkiem początkowym m_s i γ_s .

8.3.3 Filtracja modeli ARMA(p,q) i ARIMA(p,r,q)

Dla modelu ARMA(p, q), $p \geq 1$ i $q \geq 1$ elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ są określone za pomocą równania (5.71), które możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_{t+1} = \Psi_{pq}(t, \varepsilon, \epsilon) \Upsilon + \sigma_t \epsilon_{t+1} \text{ dla } t > \max(p, q), \quad (8.48)$$

gdzie

$$\Psi_{pq}(t, \varepsilon, \epsilon) = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p+1}, -\sigma_t \epsilon_t, -\sigma_t \epsilon_{t-1}, \dots, -\sigma_t \epsilon_{t-q+1}), \quad (8.49)$$

$$\Upsilon = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^T \quad (8.50)$$

oraz $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zakładamy, że wektor nieznanymi parametrów Υ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m_s, \gamma_s)$ dla

$s > \max(p, q)$. Z twierdzenia 8.2 wynika, że dla dowolnego $t \geq s$ warunkowy rozkład $P(\Upsilon \leq x | \mathcal{F}_t)$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_t, \gamma_t)$, gdzie m_t i γ_t są dane wzorami

$$m_t = \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \frac{\Psi_{pq}^T(i, \varepsilon, \epsilon) \Psi_{pq}(i, \varepsilon, \epsilon)}{\sigma_i^2} \right)^{-1} \times \left(m_s + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \Psi_{pq}^T(i, \varepsilon, \epsilon) \frac{\varepsilon_{i+1}}{\sigma_i^2} \right), \quad (8.51)$$

$$\gamma_t = \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \frac{\Psi_{pq}^T(i, \varepsilon, \epsilon) \Psi_{pq}(i, \varepsilon, \epsilon)}{\sigma_i^2} \right)^{-1} \gamma_s,$$

natomiast $I \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)}$ jest macierzą jednostkową. Wartości estymatora odchylenia standardowego σ_t , $t \geq s$ szacujemy z użyciem wzoru

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{t - (p+q)} \sum_{i=p+q}^{t-1} (\varepsilon_i - \Psi_{p,q}(i, \varepsilon, \epsilon) m_t)^2}. \quad (8.52)$$

Wartości szeregu $\{\epsilon_k\}_{q \leq k \leq t-1}$ wyznaczamy za pomocą równania

$$\epsilon_k = \frac{\varepsilon_k}{\hat{\sigma}_{k-1}} - \Psi_{p,q}(k, \varepsilon, \epsilon) m_{k-1}. \quad (8.53)$$

Dla dowolnego $t \geq s$ parametry rozkładu $\mathbf{N}(m_t, \gamma_t)$ można wyznaczyć za pomocą równań rekurencyjnych

$$m_{t+1} = m_t + \frac{\varepsilon_{t+1} - \Psi_{pq}(t, \varepsilon, \epsilon) m_t}{\Psi_{pq}(t, \varepsilon, \epsilon) \gamma_t \Psi_{pq}^T(t, \varepsilon, \epsilon) + \hat{\sigma}_t^2} \gamma_t \Psi_{pq}^T(t, \varepsilon, \epsilon), \quad (8.54)$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \frac{\gamma_t \Psi_{pq}^T(t, \varepsilon, \epsilon) \Psi_{pq}(t, \varepsilon, \epsilon) \gamma_t}{\Psi_{pq}(t, \varepsilon, \epsilon) \gamma_t \Psi_{pq}^T(t, \varepsilon, \epsilon) + \hat{\sigma}_t^2} \quad (8.55)$$

z warunkiem początkowym m_s i γ_s .

Filtracja modelu ARIMA(p, r, q) przebiega dwuetapowo. Najpierw należy określić rząd integracji $r \geq 0$. Następnie dla szeregu czasowego $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{t \geq s}$, $s > \max(p, r, q)$ o równaniu stanu

$$\Delta^r \varepsilon_{t+1} = \Psi_{pq}(t, \Delta^r \varepsilon, \epsilon) \Upsilon + \sigma_t \epsilon_{t+1},$$

należy zastosować równania filtracji liniowej, gdzie $\Psi_{pq}(\cdot)$, Υ , σ_t są określone za pomocą (8.49)–(8.50) i (8.52) odpowiednio.

8.3.4 Filtracja modeli ARCH(p)

W odróżnieniu od modeli ARMA elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci ARCH(p), $p \geq 1$ zachowują się całkowicie odmiennie. Z jednej strony (patrz (7.29)–(7.30)) widzimy, że co do wartości bezwzględnej duże (małe) wartości szeregu pociągają za sobą duże (małe) wartości tego szeregu w przyszłości, natomiast nie wiadomo w którym kierunku "przesuną się" wartości szeregu w przyszłości. Z drugiej strony elementy szeregu ARCH(p) są nieskorelowane (patrz własności modeli ARCH). Dlatego bezpośrednie zastosowanie analizy korelacyjnej (badanie własności funkcji autokorelacji, zastosowanie twierdzenia o korelacji normalnej lub równań liniowej filtracji metodą Kalmana - Bucy'ego) jest bezzasadne. Z własności modeli ARCH(p) wynika natomiast, że drugie momenty zwykle są podporządkowane modelom regresji liniowej rzędu $p \geq 1$. Zatem zamiast bezpośrednio analizować elementy szeregu $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ postaci ARCH(p) przeanalizujemy zachowanie szeregu, który się składa z kwadratów wartości tych elementów, tzn. analizujemy zachowanie szeregu $\{\varepsilon_t^2\}_{t \in \mathbb{N}}$.

Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ oznacza niemalejącą rodzinę σ -ciał na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Elementy szeregu czasowego $\{\varepsilon_t^2\}_{t \in \mathbb{N}}$ przedstawiamy za pomocą wzoru

$$\varepsilon_t^2 = E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) + \varkappa_{t-1} \eta_t, \quad (8.56)$$

gdzie $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(0, 1)$. Korzystając ze wzoru (7.32) równanie (8.56) możemy przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \varkappa_{t-1} \eta_t \text{ dla } t > p. \quad (8.57)$$

lub w postaci macierzowej

$$\varepsilon_{t+1} = \Phi_p(t, \varepsilon, \epsilon) \Upsilon + \varkappa_t \eta_{t+1}, \quad (8.58)$$

gdzie

$$\Phi_p(t, \varepsilon) = (1, \varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-p+1}^2), \quad (8.59)$$

$$\Theta = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^T. \quad (8.60)$$

Zakładamy, że wektor nieznanych parametrów Θ ma rozkład normalny $\mathbf{N}(m_s, \gamma_s)$ dla $s > p$. Z twierdzenia 8.2 wynika, że dla dowolnego $t \geq s$ warunkowy rozkład $P(\Theta \leq x | \mathcal{F}_t)$ jest rozkładem normalnym $\mathbf{N}(m_t, \gamma_t)$, gdzie m_t i γ_t wyznaczamy ze wzorów

$$m_t = \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \frac{\Phi_p^T(i, \varepsilon) \Phi_p(i, \varepsilon)}{\varkappa_i^2} \right)^{-1} \times \left(m_s + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \Phi_p^T(i, \varepsilon, \varepsilon) \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varkappa_i^2} \right), \quad (8.61)$$

$$\gamma_t = \left(I + \gamma_s \sum_{i=s}^{t-1} \frac{\Phi_p^T(i, \varepsilon) \Phi_p(i, \varepsilon)}{\varkappa_i^2} \right)^{-1} \gamma_s, \quad (8.62)$$

natomiast $I \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ jest macierzą jednostkową. Wartość estymatora odchylenia standardowego σ_t , $t \geq s$ wyznaczamy ze wzoru

$$\hat{\varkappa}_t = \sqrt{\frac{1}{t-p} \sum_{i=p}^{t-1} (\varepsilon_i - \Phi_p(i, \varepsilon) m_t)^2}. \quad (8.63)$$

Dla dowolnego $t \geq s$ oceny parametrów m_t, γ_t możemy wyznaczyć za pomocą równań rekurencyjnych

$$m_{t+1} = m_t + \frac{\varepsilon_{t+1} - \Phi_p(t, \varepsilon) m_t}{\Phi_p(t, \varepsilon) \gamma_t \Phi_p^T(t, \varepsilon) + \varkappa_t^2} \gamma_t \Phi_p^T(t, \varepsilon), \quad (8.64)$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \frac{1}{\Phi_p(t, \varepsilon) \gamma_t \Phi_p^T(t, \varepsilon) + \varkappa_t^2} \gamma_t \Phi_p^T(t, \varepsilon) \Phi_p(t, \varepsilon) \gamma_t \quad (8.65)$$

z warunkiem początkowym m_s i γ_s .

Przykład 8.3 Dany jest 100-elementowy szereg reszt 0.3, -0.2, -0.8, -0.75, 0.67, -1.04, 1.02, 0.61, 1.19, 0.97, 1.21, 0.57, 0.68, -0.65, 0.44, 0.29, -0.81, -0.26, 0.93, 0.31, 0.13, -0.06, 0.19, 0.06, -0.35, -0.13, -0.16, 0.78, 0.48, 0.42, -0.07, 0.38, 0.07, -0.71, 0, -0.1, 0.07, -0.82, 0.15, 1.07, -0.37, -0.85, -0.06, 0.77, 0.5, -0.25, 0.11, -1.21, -0.67, 0.67, -0.53, -1.33, 0.76, -0.2, -0.22, -1.16, -1.41, -0.2, -1.01, 0.39, -0.26, -0.67, 1.14, -0.89, 0.31, 0.78, 0.65, 0, -0.47, -0.64, -0.18, 0.35, -0.29, -0.45, -0.13, -0.15, 1.1, 0.04, 0.35, 0.52, 0, 0.13, -1.48, -1.21, -0.02, -0.7, 0.17, -0.07, 0.07, -0.31, -0.12, -0.29,

-0.86, -1.18, -0.12, -0.58, 1.03, -0.7, -0.95, 0.69 zachowanie którego podporządkowane jest modelowi ARCH(1). Korzystając z metody najmniejszych kwadratów dla realizacji szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$ dokonamy identyfikacji modelu

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \varkappa \eta_t \quad (8.66)$$

gdzie $\{\eta_t\}_{t \geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Dla $t > 10$ stosując równania liniowej filtracji Kalmana-Bucy'ego wyznaczmy wartości estymatorów parametrów modelu ARCH(1) na podstawie realizacji $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq t}$.

Najpierw dokonamy identyfikacji szeregu czasowego $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 10}$. Dla równania (8.66) przyjmujemy, że

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.09 \\ 1 & 0.04 \\ 1 & 0.64 \\ 1 & 0.5625 \\ 1 & 0.4489 \\ 1 & 1.0816 \\ 1 & 1.0404 \\ 1 & 0.3721 \\ 1 & 1.4161 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad Y = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.64 \\ 0.5625 \\ 0.4489 \\ 1.0816 \\ 1.0404 \\ 0.3721 \\ 1.4161 \\ 0.9409 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów otrzymujemy

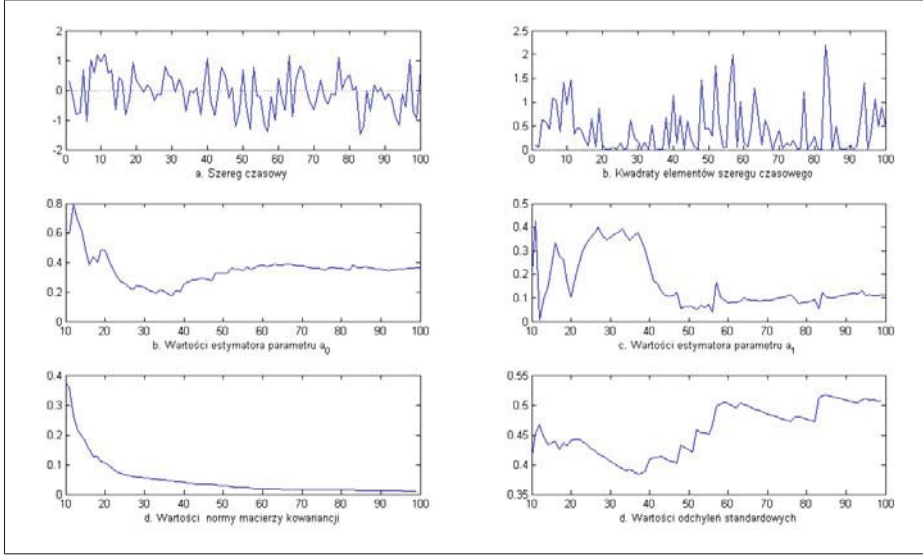
$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T Y \approx \begin{pmatrix} 0.5951 \\ 0.2085 \end{pmatrix}.$$

Odchylenie standardowe zaburzeń zewnętrznych w modelu (8.66) wyznaczamy ze wzoru

$$\hat{\varkappa} = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^9 (\varepsilon_{i+1}^2 - (1, \varepsilon_i) \hat{\alpha})^2} \approx 0.4439,$$

natomiast macierz kowariancji wektora parametrów $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ wynosi

$$\gamma_\alpha = \hat{\varkappa}^2 (X^T X)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.1517 & -0.1619 \\ -0.1619 & 0.2560 \end{pmatrix}.$$



Rysunek 8.2: Wartości szeregów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$ i $\{\varepsilon_t^2\}_{1 \leq t \leq 100}$, wartości estymatorów $\{m_t\}_{10 \leq t \leq 100}$, wartości norm macierzy kowariancji $\{\|\gamma_t\|\}_{10 \leq t \leq 100}$, wartości odchyłeń standardowych $\{\hat{\kappa}_t\}_{10 \leq t \leq 99}$.

Z twierdzenia 8.2 wynika, że dla dowolnego $t > 10$ warunkowy rozkład $P(\alpha \leq x | \mathcal{F}_t)$ jest rozkładem normalnym $N(m_t, \gamma_t)$, gdzie

$$m_{t+1} = m_t + \frac{\varepsilon_{t+1}^2 - (1, \varepsilon_t^2) m_t}{(1, \varepsilon_t^2) \gamma_t (1, \varepsilon_t^2)^T + \kappa_t^2} \gamma_t (1, \varepsilon_t^2),$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \frac{\gamma_t (1, \varepsilon_t^2)^T (1, \varepsilon_t^2) \gamma_t}{(1, \varepsilon_t^2) \gamma_t (1, \varepsilon_t^2)^T + \kappa_t^2}$$

z warunkiem początkowym $m_{10} = \hat{\alpha}$, $\gamma_{10} = \gamma_\alpha$ oraz $\kappa_{10} = \hat{\kappa}$. Estymator odchylenia standardowego κ_t w równaniu (8.66) wyznaczamy za pomocą wzoru

$$\hat{\kappa}_t = \sqrt{\frac{1}{t-2} \sum_{i=1}^t (\varepsilon_{i+1} - (1, \varepsilon_i^2) m_t)^2}.$$

Wykres 8.2a przedstawia realizację szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$, natomiast wykres 8.2b przedstawia wartości szeregu $\{\varepsilon_t^2\}_{1 \leq t \leq 100}$. Dla $t > 10$ wykresy 8.2c i 8.2d przedstawiają wartości parametrów α_0 i α_1 odpowiednio (jako pierwsza i druga współrzędne szeregu $\{m_t\}_{10 \leq t \leq 100}$) uzyskane za pomocą filtracji

liniowej Kalmana-Bucy'ego na podstawie realizacji $\{\varepsilon_s\}_{1 \leq s \leq t}$. Na wykresie 8.2e przedstawiono wartości norm ciągu macierzy kowariancji $\{\gamma_t\}_{10 \leq t \leq 100}$ (normę macierzy A określamy jako $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$). Wykres 8.2f przedstawia zachowanie estymatora odchyłeń standardowych $\{\varkappa_t\}_{10 \leq t \leq 99}$ zaburzeń zewnętrznych w modelu (8.66).

Uwaga 8.1 Zastosowanie równań liniowej filtracji (8.61)–(8.62) lub (8.64)–(8.65) nie gwarantuje otrzymania nieujemnych wartości parametrów strukturalnych w modelu obserwacyjnym (8.57) (w modelu ARCH(p) parametry strukturalne powinny spełniać warunek $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0$). Aby spełnić powyższy warunek należy zastosować filtrację z ograniczeniami odnośnie parametrów strukturalnych lub przyjąć że rozkład apiori parametrów strukturalnych jest np. rozkładem logarytmiczno-normalnym oraz zastosować estymację bayesowską. Więcej na temat filtracji z ograniczeniami można znaleźć w pracach [40], [42].

Uwaga 8.2 Filtracja liniowa Kalmana - Bucy'ego jest dość pomocna w przypadku rozszerzającego się zbioru danych dotyczących realizacji szeregu czasowego, ponieważ parametry są szacowane w sposób dynamiczny. Od strony technicznej jest to dość prosta konstrukcja. Ostateczną identyfikację należy przeprowadzić używając algorytmy podane przy opisie każdego z modeli.

Spis rysunków

1.1	Wielkość kapitału w poszczególnych latach.	17
1.2	Symulacje modelu AR(2).	18
2.1	Realizacje szeregu czasowego $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ oraz ruchome średnie $\{\hat{f}_2(t)\}_{3 \leq t \leq 47}$ i $\{\hat{f}_4(t)\}_{5 \leq t \leq 47}$	39
2.2	Szereg czasowy $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 47}$ oraz estymatory części deterministycznej szeregu czasowego otrzymane za pomocą metody wykładniczych wag ruchomej średniej dla $\eta_1 = 0.2$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_3 = 0.7$, $\eta_4 = 0.9$	42
2.3	Szereg czasowy $\{x_t\}_{t \in \{1, \dots, 30\}}$ oraz ruchome średnie $\hat{f}(t)$ i $\hat{f}_\infty(t)$ uzyskane za pomocą wykładniczych wag dla $\eta = 0.8$	45
2.4	Różnice pomiędzy estymatorami wyznaczonymi za pomocą metody wykładniczych wag ruchomej średniej.	46
2.5	Szereg $\{x_t\}_{t \in \{1, 2, \dots, 31\}}$ oraz różnice rzędu $k = 1, 2, 3, 4, 5$	56
2.6	Szereg czasowy $\{x_t\}_{1 \leq t \leq 39}$	59
2.7	Szeregi $\{x_t^m\}_{1 \leq t \leq 10}$ dla $m = 1, 2, 3, 4$ wraz z trendami.	60
2.8	Wartości empiryczne i teoretyczne szeregu czasowego.	62
2.9	Identyfikacja wahań okresowych.	71
3.1	Realizacje szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 50}$	88
3.2	Realizacje szeregu reszt $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 80}$	89
4.1	Ceny pszenicy w okresie 7.10.2014 – 16.12.2014.	104
4.2	Wartości funkcji autokorelacji.	105

4.3	Funkcje gęstości spektralnej.	114
5.1	Symulacje szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$	128
5.2	Funkcje autokorelacji, gęstości spektralnej oraz symulacje modeli AR(1) i MA(1).	148
5.3	Funkcje autokorelacji, gęstości spektralnej oraz sumulacja szeregu postaci ARMA(1,1).	158
5.4	Symulacje szeregu ARMA(2,1) oraz szeregów zredukowanych do AR(1) i AR(2).	169
6.1	Symulacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$ modeli autoregresji rzędu pierw- szego dla $a \in \{0, 0.3, 0.5, 0.8, 1, 1.1\}$	173
6.2	Symulacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 50}$ modeli autoregresji rzędu pierw- szego dla $a \in \{-0.5, -0.8, -1, -1.1\}$	174
6.3	Realizacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ i $\{\zeta_t\}_{0 \leq t \leq 100}$, trajektorie białego szumu $\{\epsilon_t\}_{0 \leq t \leq 100}$ i błędzenia losowego $\{\eta_t\}_{0 \leq t \leq 100}$	180
6.4	Identyfikacja trendu deterministycznego oraz trendu stochastycz- nego w szeregu $\{x_t\}_{0 \leq t \leq 100}$	185
7.1	Realizacje szeregów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 150}$ oraz $\{\Delta^r \varepsilon_t\}_{1+r \leq t \leq 150}$ dla $r = 1, 2, 3..$	208
7.2	Symulacja szeregu ARCH(1) dla parametrów $\alpha_0 = 0.6, \alpha_1 =$ 0.3 i warunku początkowego $\varepsilon_1 = 2$	215
7.3	Symulacje szeregów ARCH(1), GARCH(1, 1), HARCH(2) oraz war- tości funkcji autokorelacji.	235
8.1	Wartości szeregu $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$, wartości średnie $\{m_t\}_{10 \leq t \leq 100}$ oraz wariancja $\{\gamma_t\}_{10 \leq t \leq 100}$ estymatora parametru α , wartości odchyłeń standardowych $\{\hat{\sigma}_t\}_{10 \leq t \leq 99}$	254
8.2	Wartości szeregów $\{\varepsilon_t\}_{1 \leq t \leq 100}$ i $\{\varepsilon_t^2\}_{1 \leq t \leq 100}$, wartości estymato- rów $\{m_t\}_{10 \leq t \leq 100}$, wartości norm macierzy kowariancji $\{\ \gamma_t\ \}_{10 \leq t \leq 100}$, wartości odchyłeń standardowych $\{\hat{\sigma}_t\}_{10 \leq t \leq 99}$	260

Indeks

- Autokorelacja, 96
- Autokowariancja, 94
- Błądzenie losowe, 19, 172, 175
- Filtr Kalmana - Bucy'ego, 237, 244
- Filtracja modeli AR(p), 250
- Filtracja modeli ARCH(p), 257
- Filtracja modeli ARMA(p,q), 255
- Filtracja modeli MA(q), 253
- Funkcja gęstości spektralnej, 107
- Funkcja spektralna, 106
- Harmonika, 61, 111
- Intensywność, 112
- Kryterium Akaike, 29, 217
- Kryterium Hannana-Quinna, 29
- Kryterium Schwarza, 29, 217
- Metoda Browna, 39
- Metoda najmniejszych kwadratów, 25
- Metoda największej wiarygodności, 30
- Metoda różnicowa, 45
- Model AR(p), 121, 134
- Model ARCH, 211, 214
- Model ARIMA(p,r,q), 196
- Model ARMA(p,q), 149
- Model EGARCH, 226
- Model GARCH, 218
- Model HARCH, 232
- Model MA(q), 139
- Model RGARCH, 221
- Model TARCH, 229
- Operator różnicowy, 46, 180
- Operatory przesunięcia, 162
- Proces zintegrowany, 182
- Ruchoma średnia, 35
- Szereg warunkowo normalny, 213
- Szereg czasowy, 12
- Szereg DS, 182
- Szereg niestacjonarny jednorodnie, 195
- Szereg niestacjonarny niejednorodnie,
211
- Szereg stacjonarny ściśle , 92
- Szereg stacjonarny słabo, 93
- Szereg TS, 179
- Test ADF, 190
- Test DF, 187
- Test Kołmogorowa-Smirnowa, 82
- Test KPSS, 192
- Test Stevensa, 75

Trend stochastyczny, 175

Trendy fazowe, 57

Twierdzenie Herglotza, 106

Twierdzenie o korelacji normalnej, 240

Układ Yule'a–Walkera, 136

Warunek odwracalności, 142

Warunek stacjonarności, 138

Bibliografia

- [1] Aivazian S.A., Mkhitarian V.S., *Applied statistics and essentials of econometrics*, Publishing Association UNITY, Moscow 1998.
- [2] Akaike H., *A new look at the statistical identification model*, "IEEE Transactions on Automatic Control", 1974, vol. 19, s. 716–723.
- [3] Akaike H., *Statistical Predictor Identification*, "Annals of the Institute of Statistical Mathematics", 1970, vol. 22, s. 203–217.
- [4] Akaike H., *A bayesian analysis of the minimum AIC procedure*, "Annals of the Institute of Statistical Mathematics", 1978, vol. 30, s. 9–14.
- [5] Banek T., Kozłowski E., Sikorski M., *Efekt Mallowsa – Akaike w selekcji modeli przetwarzania informacji*, "Modelowanie preferencji a ryzyko 2004", pod red. T Trzaskalika, Ustroń 2004, s. 57–67.
- [6] Box G.E.P., Jenkins G.M., *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*, PWN, Warszawa 1983.
- [7] Bartlett M. S., *On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series*, "Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society", 1946, vol. 8(1), s. 27–41.
- [8] Bollerslev T., *Generalized autoregressive conditional heteroskedascity*, "Journal of Econometrics", 1986, vol 31(3), s. 307–327.
- [9] Borovkov A.A., *Matematicheskaja statistika*, Fizmatlit, Moskwa 2007.

-
- [10] Brown R. G., *Statistical forecasting for inventory control*, McGraw-Hill, New York 1959.
- [11] Bulinsky A.V., Shiryaev A.N., *Teoria sluchajnyh procesov*, Fizmatlit, Moskwa 2003.
- [12] Charemza W.W., Syczewska E.M., *Joint application of the Dickey-Fuller and KPSS tests*, "Economics Letters", 1998 vol. 61(1), s. 17–21.
- [13] Chow G.C., *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1995.
- [14] Dacorogna M.M., Müller U.A., Embrechts P., Samorodnitsky G., *Moment Condition for the HAR $CH(k)$ Models*. Preprint. Zurich "Olsen&Associates", 1995.
- [15] Dickey D.A., Fuller W.A., *Distributions of the estimators for autoregressive time series with a unit root*, "Journal of the American Statistical Association", 1979 vol. 74, s. 427–431.
- [16] Elliot, G., Rothenberg, T., Stock, J. H. *Efficient tests for an autoregressive unit root*, "Econometrica", 1996 vol. 64, s. 813–836.
- [17] Enders W., *Applied Econometric Time Series*, Wiley, New York 1995.
- [18] Engle R. F., *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, "Econometrica", 1982 vol. 50 (4), s. 987–1008.
- [19] Engle R. F., Bollerslev T., *Modelling the persistence of conditional variances*, "Econometrics Reviews", 1986 vol. 5 (1), s. 1–50.
- [20] Engle R.F., Granger C.W.J., *Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing*, "Econometrica", 1987 vol. 55 (2), s. 251–276.
- [21] Engle R. F., Kraft D., *Multiperiod forecast error variances of inflation estimated from ARCH models*, in ed. A. Zellner *Applied Time Series Analysis of Economic Data*, Washington D.C., Bureau of the Census, 1983, s. 293–302.

-
- [22] Engle R.F., Ng V.K. , *Measuring and testing the impact of news on volatility*, " Journal of Finance", 1991 vol. 48 (5), s. 1749–1778.
- [23] Fichtenholz G. M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 1–3. PWN, Warszawa 2007.
- [24] Green W.H., *Econometric Analysis*, Macmillian Publishing Company, New York, 1993.
- [25] Hamilton J.D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1994.
- [26] Hannan, E. J., Quinn B. G., *The Determination of the Order of an Autoregression*, "Journal of the Royal Statistical Society", 1979 vol. 41, 190–195.
- [27] Hatanaka M., *Time Series-Based Econometrics: Unit Roots and Cointegration*, Oxford University Press, 1996.
- [28] Helwig Z., *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1993.
- [29] Hillier F.S., Lieberman G.J., *Introduction to operation research*, fourth edition, McGraw-Hill Publishing Company, New York 1986.
- [30] Koronacki J., Mielniczuk J., *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*, WNT, Warszawa, 2001.
- [31] Kryszicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, tom 1–2, PWN, Warszawa 1986.
- [32] Kufel T., *Ekonometryczna analiza cykliczności procesów gospodarczych o wysokiej częstotliwości obserwowania*, Wydawnictwo Naukowe UMK, 2010.
- [33] Kufel T., *Ekonometria. Rozwiązywanie programów z wykorzystaniem programu GRETL*, PWN, Warszawa 2011.

-
- [34] Kuhn H.W., Tucker A.W., *Nonlinear programming* in J. Neyman (ed.) Proceedings of the Second Berkeley Symposium, University of California, Berkeley 1951, s. 481–491.
- [35] Kwiatkowski D., Phillips P. C. B., Schmidt P., Shin Y., *Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root*, "Journal of Econometrics", 1992 vol. 54, s. 159–178.
- [36] Liptser R.Sh., Shiryaev A.N., *Statistics of Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [37] Maddala G.S., Kim In-Moo, *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [38] Magnus J.R., Neudecker H., *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*, John Wiley & Sons, New York 1999.
- [39] Müller U.A., Dacorogna M.M., Dave R.D., Olsen R.B., Pictet O.V., von Weizsäcker J.E., *Volatilities of different time resolution- Analyzing the dynamics of market components*, Preprint, Zürich "Olsen&Associates", 1995.
- [40] Nelson D.B., *Asymptotic filtering theory for multivariate ARCH models*, "Journal of Econometrics", 1996 vol. 71 (1), s. 1–47.
- [41] Nelson D.B., *Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach*, "Econometrica", 1991 vol. 59 (2), s. 347–370.
- [42] Nelson D.B., Foster D.P., *Asymptotic filtering theory for univariate ARCH models*, "Econometrica", 1994 vol. 62 (1), pp. 1-41.
- [43] Nowak E., *Zarys metod ekonometrii. Zbiór zadań*, PWN, Warszawa 1997.
- [44] Oksendal B., *Stochastic differential equations. An introduction with applications*, Springer, New York 2000.

-
- [45] Osińska M., *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa 2006.
- [46] Phillips P.C.B., Perron P., *Testing for a unit root in time series regression*, "Biometrika", 1988 vol. 75, s. 335–346.
- [47] Rogowski A., *Podstawy metod probabilistycznych w transporcie*, Wyd. Uniwersytetu Techniczno - Humanistycznego im. K. Pułaskiego w Radomiu, Radom, 2012.
- [48] Schwarz G., *Estimating the dimension of a model*, "Annals of Statistics", 1978 vol. 6 (2), s. 461–464.
- [49] Schwert G.W., *Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation*, "Journal of Business and Economic Statistics", 2002 vol. 20(1), s. 5–17.
- [50] Sentana E., *Quadratic ARCH Models*, "Review of Economic Studies", 1995 vol. 62, s. 639–661.
- [51] Shiryaev A. N., *Verojatnost'*, tom 1-2, MCHMO, Moskwa 2004.
- [52] Shiryaev A. N., *Osnovy stohasticheskoy finansovoj matematiki. Fakty. Modeli*, Phasis, Moskwa 1998.
- [53] Shiryaev A. N., *Osnovy stohasticheskoy finansovoj matematiki. Teoria*, Phasis, Moskwa 1998.
- [54] Straumann D., *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*, "Lecture Notes in Statistics", vol. 181, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [55] Syczewska E.M., *Analiza relacji długookresowych: estymacja i weryfikacja*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 1999.
- [56] Tong H., *Nonlinear time series. A dynamical approach*, Oxford University Press 1990.
- [57] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, WNT, Warszawa, 1998.

-
- [58] Welfe A., *Ekonometria. Metody i ich zastosowanie*, PWE, Warszawa 2009.
- [59] Yaffee R.A., McGee M., *An Introduction to Time Series Analysis and Forecasting with Applications of SAS and SPSS*, Academic Press Inc., 2000.
- [60] Zakoian J., *Threshold heteroskedastic functions*, "Journal of Economic Dynamics and Control", 1994 vol. 18, s. 931–955.
- [61] Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S., *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*, PWN, Warszawa 2004.