

Zastosowanie programu Mathcad do rozwiązywania wybranych zagadnień inżynierskich

Podręczniki – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Podstaw Techniki
ul. Nadbystrzycka 38
20-618 Lublin

Mykhaylo Pashechko
Marcin Barszcz
Krzysztof Dziedzic

Zastosowanie programu Mathcad do rozwiązywania wybranych zagadnień inżynierskich



Politechnika Lubelska
Lublin 2011

Recenzent:
prof. dr hab. inż. Miron Czerniec

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2011

ISBN: 978-83-62596-56-0

Wydawca: Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej
Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej
ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl
www.biblioteka.pollub.pl

Druk: ESUS Agencja Reklamowo-Wydawnicza Tomasz Przybylak
www.esus.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl

Nakład: 100 egz.

SPIS TREŚCI

WSTĘP	8
1. Wprowadzenie do obliczeń w programie Mathcad	9
1.1. Okno programu Mathcad	9
1.2. Tworzenie dokumentu	11
1.3. Definiowanie zmiennych	12
1.4. Wprowadzanie operatorów i stałych	13
1.5. Przykłady zastosowania programu Mathcad	15
1.5.1. Działania na macierzach	15
1.5.2. Tworzenie wykresów	17
1.5.3. Rozwiązywanie równań	20
1.5.4. Rozwiązywanie układów równań i nierówności	24
1.5.5. Operacje na pochodnych, całkach i granicach	28
1.5.6. Zadania do samodzielnego rozwiązania	32
2. Osiowe rozciąganie i ściskanie prętów prostych	36
2.1. Pojęcia podstawowe	36
2.2. Przykłady do wykonania	39
3. Ścinanie	57
3.1. Pojęcia podstawowe	57
3.1.1. Obliczenia wytrzymałości na ścinanie	57
3.2. Przykłady do wykonania	58
4. Skręcanie prętów	64
4.1. Pojęcia podstawowe	64
4.1.1. Naprężenia przy skręcaniu	64
4.1.2. Odkształcenia pręta skręcanego	66
4.1.3. Obliczanie prętów skręcanych	66
4.2. Przykłady do wykonania	66

5. Zginanie prętów prostych.....	78
5.1. Pojęcia podstawowe.....	78
5.1.1. Czyste zginanie.....	79
5.1.2. Konstrukcje statycznie wyznaczalne	81
5.1.3. Konstrukcje statycznie niewyznaczalne	81
5.1.4. Linia ugięcia i strzałka ugięcia belki	82
5.2. Przykłady do wykonania.....	83
6. Kratownice płaskie.....	104
6.1. Pojęcia podstawowe.....	104
6.1.1. Geometryczna niezmiennosc i statyczna wyznaczal- ność kratownic.....	104
6.1.2. Analityczne metody wyznaczania sił w prętach kratownicy	105
6.2. Przykłady do wykonania.....	106
7. Tarcie.....	117
7.1. Pojęcia podstawowe.....	117
7.1.1. Tarcie ślizgowe.....	118
7.1.2. Tarcie na równi pochyłej	119
7.1.3. Tarcie toczne.....	120
7.2. Przykłady do wykonania.....	121
LITERATURA.....	127

Przedmowa

Niniejszy podręcznik może być pomocny zarówno studentom wyższych uczelni technicznych w mechanice technicznej oraz wytrzymałości materiałów jak również nauczycielom i uczniom szkół technicznych.

Przedstawia przykłady rozwiązywania zagadnień mechaniki technicznej oraz wytrzymałości materiałów przy wykorzystaniu programu komputerowego Mathcad. Składa się ze wstępu, siedmiu rozdziałów i spisu najważniejszych pozycji literaturowych.

Pierwszy rozdział ma charakter rozdziału wprowadzającego do programu Mathcad gdzie przedstawiono budowę interfejsu, nazw palet, grup operacji i symboli oraz podstawowe skróty klawiaturowe operatorów programu. Szczegółowo opisuje możliwości obliczeniowe programu potwierdzone przykładami zadań tj. operacje na macierzach, tworzenie wykresów, rozwiązywanie równań, układów równań i nierówności, operacje na pochodnych, całkach i granicach.

Każdy z pozostałych rozdziałów dzieli się na dwie części. W pierwszej części omawiane są podstawy teoretyczne natomiast w drugiej części – zagadnienia praktyczne, gdzie przedstawia się przykłady rozwiązywania zadań z mechaniki oraz wytrzymałości materiałów w programie Mathcad. W podręczniku zostały przedstawione następujące zagadnienia: osiowe rozciąganie i ściskanie prętów prostych, ścinanie, skręcanie prętów, zginanie, konstrukcje kratowe oraz tarcie.

Przy pisaniu podręcznika korzystano z dostępnej literatury, której spis został podany na końcu pracy. Przez autorów podręcznika zostały opracowane, inne niż konwencjonalne, metody rozwiązywania zadań, oparte na wspomaganiu komputerowym o program Mathcad.

Spośród wielu programów komputerowych wspomagających rozwiązywanie różnego rodzaju zagadnień Mathcad wyróżnia się względną prostotą. Omówione w podręczniku możliwości wykorzystania programu Mathcad mogą w znacznym stopniu ułatwić i przyspieszyć rozwiązywanie zagadnień inżynierskich. Automatyzacja skomplikowanych obliczeń, z jakimi spotykają się inżynierowie, pomaga uniknąć błędów przy jednoczesnym zmniejszeniu czasu obliczeń, co z kolei przekłada się na jakość i rentowność projektu. Możliwości obliczeniowe programu Mathcad można również wykorzystać w codziennej pracy, która wymaga częstego i powtarzalnego stosowania mniej lub bardziej zaawansowanych obliczeń matematycznych.

Wstęp

Rozwój nauk technicznych, a w szczególności branży mechanicznej, budowlanej i elektronicznej spowodował znaczący rozwój techniki komputerowej. Co z pewnością pozytywnie wpływa na pracę inżynierów, konstruktorów i projektantów.

Obecnie głównym wymogiem pracy jest czas wykonania zleconego zadania, a dokładniej minimalny czas jego wykonania przy maksymalnej dokładności i precyzji. Niezbędne stało się więc opracowanie nowoczesnych narzędzi usprawniających pracę. Niezastąpionym narzędziem okazało się oprogramowanie typu CAD. Praca na tego typu programach w szczególności polega na opracowaniu dokumentacji konstrukcyjnej, analizy kinematycznej, wytrzymałościowej oraz wielu innych zagadnień związanych z powstawaniem projektu gotowego wyrobu. Dla inżynierów praca na tego typu programach ma niezwykle istotne znaczenie, gdyż umożliwia „dialog” między twórcą konstrukcji technicznych, a jej wykonawcą.

Spśród wielu programów komputerowych wspomagających rozwiązywanie różnego rodzaju zagadnień Mathcad wyróżnia się względną prostotą, wykazując przy tym pewną ogólność. Umożliwia wykonywanie prostych oraz bardzo skomplikowanych obliczeń inżynierskich. Daje również możliwość tworzenia dokumentacji technicznej w postaci dokumentu tekstowego wzbogaconego o wykresy i rysunki. Korzystają z niego miliony użytkowników w ponad pięćdziesięciu krajach. Środowisko programu umożliwia inżynierom efektywne wykorzystanie jego możliwości na każdym etapie projektowania. Do jego zalet możemy zaliczyć: łatwość obsługi, naturalny zapis wszystkich wzorów, możliwość tworzenia wykresów 2D i 3D oraz przejrzyste przedstawienie danych (w postaci wzorów i tekstu). Poniżej podano wybrane możliwości programu:

- rozwiązywanie równań i nierówności liniowych i nieliniowych;
- rozwiązywanie układów równań;
- operacje na wektorach i macierzach;
- obliczenia pochodnych i granic;
- rachunek całkowy i różniczkowy;
- wykonywanie obliczeń numerycznych;
- wykonywanie obliczeń symbolicznych;
- obliczenia rozkładu prawdopodobieństwa i funkcji statystycznych;
- tworzenie wykresów funkcji jednej i dwu zmiennych;
- programowanie obliczeń;
- korzystanie z jednostek i miar;
- tworzenie animacji.

W procesie kształcenia jest wyśmienitym narzędziem, które może posłużyć między innymi do rozwiązywania zadań prezentowanych w różnych zbiorach.

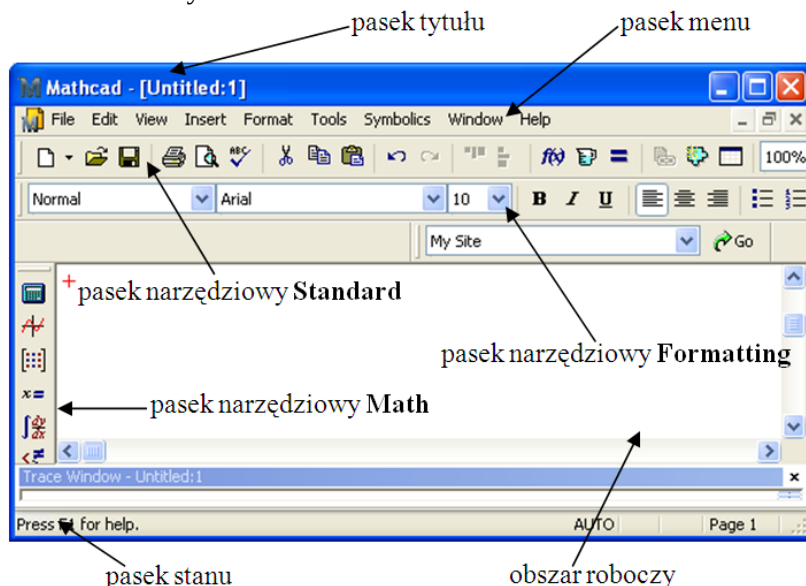
1. Wprowadzenie do obliczeń w programie Mathcad

Niniejszy rozdział ma charakter rozdziału wprowadzającego do programu Mathcad. Przedstawiono w nim budowę interfejsu, nazw palet, grup operacji i symboli oraz podstawowe skróty klawiaturowe operatorów programu. Szczegółowo opisuje możliwości obliczeniowe programu potwierdzone przykładami zadań tj. operacje na macierzach, tworzenie wykresów, rozwiązywanie równań, układów równań i nierówności, operacje na pochodnych, całkach i granicach.

1.1. Okno programu Mathcad

Po uruchomieniu Mathcad'a na ekranie pojawia się główne okno programu wraz z towarzyszącym mu oknem porady. Przystępując do pracy zamykamy to okno, a w razie potrzeby możemy go otworzyć z menu *Help*. Główne okno programu zostało przedstawione na rys. 1.1. Jak widać jego wygląd niczym się nie różni od innych aplikacji pracujących w środowisku Windows. Możemy w nim wyróżnić następujące elementy:

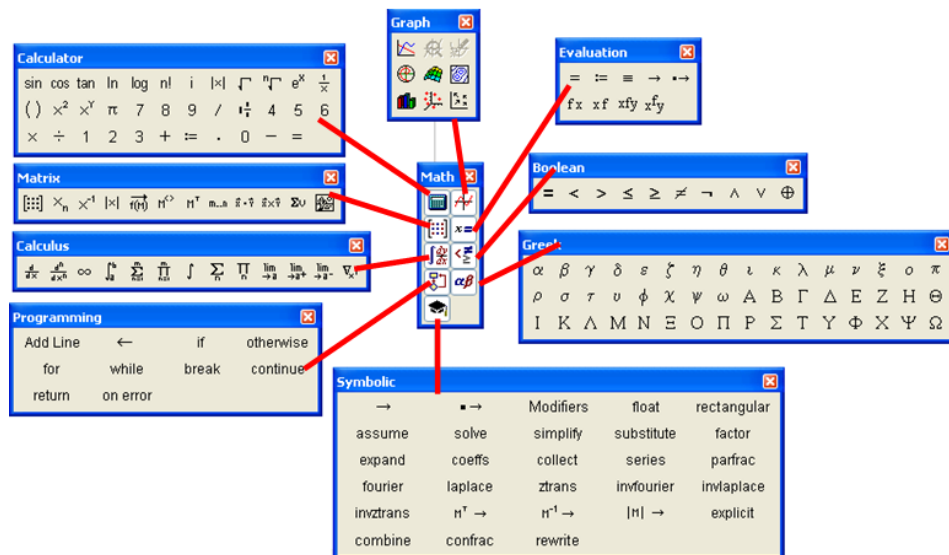
- pasek tytułu;
- pasek menu;
- paski narzędziowe;
- linijka;
- pasek stanu;
- arkusz roboczy.



Rys. 1.1 Główne okno programu Mathcad

W razie potrzeby paski narzędziowe możemy włączyć lub wyłączyć wybierając z menu *View*→*Toolbars* a następnie odpowiedni pasek narzędziowy.

Paski narzędziowe takie jak *Standard* oraz *Formatting* nie wymagają omawiania bo są niemal identyczne jak w innych programach użytkowych np. Wordzie, Excelu. Przyjrzyjmy się jednak paskowi narzędziowemu pod nazwą *Math*. Przy pomocy przycisków znajdujących się na tym pasku można wykonać większość operacji matematycznych. Każdy z tych przycisków pozwala włączyć lub wyłączyć dodatkowy pasek narzędziowy (rys.1.2).



Rys. 1.2 Palety symboli matematycznych znajdujących się na pasku *Math*

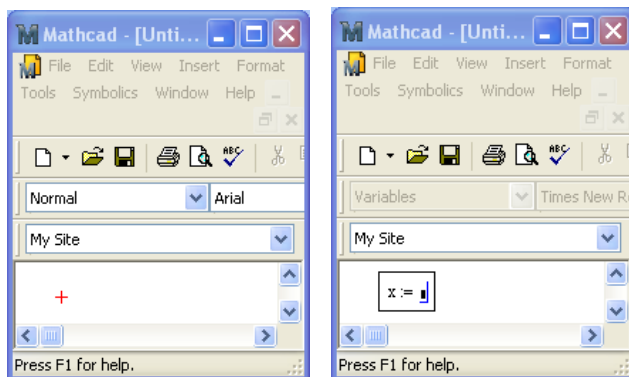
Najważniejsze symbole zostaną omówione przy realizacji poszczególnych zagadnień. W tym miejscu objaśnimy tylko nazwy palet oraz grup symboli i operacji:

- *Calculator* – podstawowe operacje i funkcje matematyczne;
- *Evaluation* – m.in. symbole przypisywania zmiennym wartości (podstawiania) oraz rozkazy wyświetlenia obliczonej wartości;
- *Graph* – wstawianie wykresów dwu i trójwymiarowych;
- *Matrix* – operatory wektorów i macierzy;
- *Boolean* – operatory logiczne;
- *Calculus* – operatory rachunkowe (całki, pochodne, sumy, iloczyny, granice);
- *Greek* – greckie litery;
- *Symbolic* – operatory do obliczeń na symbolach (działania na wzorach a nie liczbach);
- *Programming* – operatory służące do programowania.

1.2. Tworzenie dokumentu

Dokument programu Mathcad może składać się z jednej, kilku lub kilkunastu stron przyjmując postać referatu, publikacji lub podręcznika. Koniec każdej strony oddzielony jest linią kreskową co ułatwia nam odpowiednie rozmieszczenie wprowadzanych wzorów, tekstu oraz wykresów. Praca w dokumencie odbywa się na obszarach tzw. regionach, w które wpisujemy odpowiednie obiekty. Wyróżniamy cztery obszary: obszar matematyczny (umożliwia definiowanie zmiennych lub wyrażeń algebraicznych i równań), obszar wykresów, obszar tekstu (umożliwia dodawanie komentarzy i opisów) oraz obszar rysunków (umożliwia wczytywanie rysunków wykonanych w innych aplikacjach).

Po uruchomieniu programu na ekranie pojawia się nowy pusty dokument z kursorem roboczym (czerwony krzyżyk), który pokazuje miejsce wstawienia nowego regionu (rys. 1.3 a). Kursor ten możemy przenieść w dowolne miejsce gdzie chcemy rozpocząć pisanie. Wystarczy wskazać miejsce kursorem myszy i kliknąć lewy przycisk. Po rozpoczęciu wprowadzania obiektów kursor ten zmienia postać na niebieską pionową kreskę lub pół-ramkę (rys. 1.3 b).



Rys. 1.3 Kursor: roboczy (a); edycyjny (b)

Każdy utworzony region w dokumencie można dowolnie przesuwąć, kasać lub kopiować. Aby przeprowadzić powyższe czynności dany region należy zaznaczyć. W tym celu klikamy myszą na obszar lub zaznaczamy go poprzez okno (z wciśniętym lewym przyciskiem myszy). Wokół takiego regionu pojawi się ramka o linii ciągłej lub przerywanej. I tak np. przesuwanie regionu może odbywać się za pomocą myszy. Po zaznaczeniu należy umieścić kursor myszy na granicy regionu. Wówczas kursor przybierze kształt ręki i można przesuwąć go z wciśniętym lewym przyciskiem myszy.

Regiony można także edytować. Po kliknięciu na niego myszką spowoduje, to że w tym obszarze pojawi się pionowa kreska będąca punktem wstawienia. Nawigacja wewnątrz regionu odbywa się za pomocą strzałek i klawiszy.

1.3. Definiowanie zmiennych

Zmienna jest obiektem posiadającym nazwę tzw. identyfikator, który odróżnia go od innych zmiennych oraz przechowuje różne wartości. W programie Mathcad wyróżniamy następujące typy zmiennych:

- zmienna skalarna (np. $a:=20$);
- zmienna zakresowa (np. $b:=1,2..20$);
- zmienna znakowa (np. $d:="tekst"$);
- zmienna tablicowa (np. $c:=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$).

Powyższe zmienne mogą być:

- o zasięgu lokalnym – to znaczy, że jedna zmienna może być używana w jednym lub kilku różnych wzorach, co eliminuje konieczność jej ciągłego definiowania, używając znaku „:=”, definicja zmiennej lokalnej ma postać: "zmienna":="wyrażenie";
Wartość każdej zmiennej zdefiniowanej lokalnie jest odwołaniem dla regionów umieszczonych tylko po prawej stronie lub poniżej zmiennej.
Nie jest więc obojętna kolejność definiowania danych.
- o charakterze globalnym – to znaczy, że przypisana wartość zmiennej jest widoczna przez program w całym dokumencie, zawierająca znak „≡”, definicja zmiennej globalnej ma postać: "zmienna"≡"wyrażenie".

Przykład:

1. Aby zdefiniować zmienną **lokalną skalarną** m o wartości 10 należy z klawiatury wpisać: [m], [:], [10] oraz wcisnąć [Enter]. Na ekranie pojawi się zapis matematyczny zawierający definicję zmiennej $m:=10$.
2. Aby zdefiniować zmienną **lokalną zakresową** n z przedziału od 0 do 20 z krokiem 2 należy z klawiatury wcisnąć następujące klawisze: [n], [:], [0], [:], [2], [;], [20] oraz wcisnąć [Enter]. Na ekranie pojawi się zapis matematyczny zawierający definicję zmiennej $n:=0,2..20$.
3. Aby zdefiniować zmienną **globalną skalarną** p o wartości 30 należy wpisać z klawiatury: [p], [~], [3], [0] oraz wcisnąć [Enter]. Na ekranie pojawi się zapis matematyczny zawierający definicję zmiennej $p\equiv 30$.

UWAGA !

Źle zdefiniowane lub zdefiniowane w złym miejscu zmienne wyświetlane są w kolorze czerwonym.

1.4. Wprowadzanie operatorów i stałych

W programie Mathcad operatory tj. pierwiastek, całka, pochodna, wektor, indeks, relacje oraz stałe możemy wprowadzać korzystając z pasków narzędziowych jak również wprowadzając je bezpośrednio z klawiatury. Korzystanie z pasków narzędziowych jest dosyć łatwe i wygodne jednak spowalnia pracę dlatego opanowanie skrótów klawiaturowych operatorów znacznie ułatwia i przyspiesza prace obliczeniowe użytkownika. W tabeli 1.1 przedstawiono podstawowe skróty klawiaturowe operatorów. Operatory te zostały podzielone na trzy grupy: matematyczne i rachunkowe, logiczne, wektorowe i macierzowe.

Tabela 1.1 Podstawowe skróty klawiaturowe operatorów

OPERACJA	ZAPIS	KLAWISZE
Operatory matematyczne i rachunkowe		
Dodawanie	$x+y$	[+] plus
Odejmowanie	$x-y$	[-] minus
Dzielenie	$\frac{x}{y}$	[/] ukośnik prawy (slash)
Mnożenie	$a*x$	[*] gwiazdka
Pierwiastek kwadratowy	$\sqrt{z}$	[\\] ukośnik lewy (backslash)
Potęgowanie	x^y	[^] daszek
Wartość bezwzględna	$ z $	[] kreska pionowa
Silnia	$n!$	[!] wykrzyknik
L. zespolona sprzężona	$\overline{X}$	["] cudzysłów
Suma wyrażeń ze zmienną zakresową	$\sum_i x$	[\$] dolar
Iloczyn wyrażeń	$\prod_i X$	[#] hash (krzyżyk)
Pochodna pierwszego rzędu	$\frac{df(t)}{dt}$	[?] znak zapytania
Pochodna dowolnego rzędu	$\frac{d^n}{dx^n}$	[Ctrl+Shift+?]

cd. Tabeli 1.1

Całka oznaczona	$\int_a^b f(x) dx$	[&] ampersand
Całka nieoznaczona	$\int f(x) dx$	[Ctrl+I]
Granica dwustronna	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	[Ctrl+L]
Granica lewostronna	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	[Ctrl+Shift+B]
Granica prawostronna	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	[Ctrl+Shift+A]
Operatory logiczne		
Większy niż	$x > y$	[>]
Mniejszy niż	$x < y$	[<]
Większe lub równe	$x \geq y$	[Ctrl + 0]
Mniejsze lub równe	$x \leq y$	[Ctrl + 9]
Nie równe	$x \neq y$	[Ctrl + 3]
Twardy znak równości	$x = y$	[Ctrl + =]
Nawiasy	$(a+b)*c$	[(lub)]
Obydwa nawiasy	$(a+b)*c$	[']
Operatory wektorowe i macierzowe		
Dodawanie	$[] + []$	[+] plus
Odejmowanie	$[] - []$	[-] minus
Dzielenie	$[] / []$	[/] ukośnik prawy (slash)
Mnożenie	$[] * []$	[*] gwiazdka
Suma elementów wektora	$\sum v$	[Ctrl + 4]
Transponowanie	A^T	[Ctrl + 1] (jeden)
Stale		
Stała π	3,14	[Shift+Ctrl +p]
Stała e	2,718	[e]

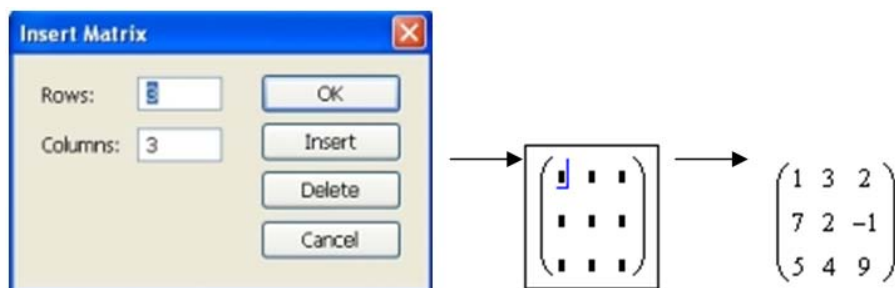
1.5. Przykłady zastosowania programu Mathcad

Poniżej zostały przedstawione przykłady działań na macierzach, całkach, pochodnych jak również sposoby rozwiązywania równań i układów równań a także tworzenie wykresów w programie Mathcad.

1.5.1. Działania na macierzach

Mathcad umożliwia wykonywanie różnych operacji na macierzach. Większość tych operacji zostało przedstawione w tabeli 1.1.

Aby zdefiniować macierz (wektor) należy wskazać kursorem miejsce wstawienia i nacisnąć z klawiatury [Ctrl+M] lub skorzystać z paska narzędziowego *Matrix*. W wywołanym oknie *Insert Matrix* podajemy wymiary macierzy – liczbę wierszy (*rows*) i kolumn (*columns*) a następnie wypełniamy poszczególne komórki (rys. 1.4).



Rys. 1.4 Okno *Insert Matrix* oraz zdefiniowana macierz

Przykład 1

Na podanych poniżej macierzach przeprowadź następujące operacje:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 40 & 50 \end{pmatrix}$$

- dodawanie macierzy,
- odejmowanie macierzy,
- mnożenie macierzy,
- transpozycja macierzy,
- odwracanie macierzy.

Aby przeprowadzić powyższe operacje na początku należy zdefiniować dwie zmienne tablicowe (np. A i B), które zawierają macierze o dwóch wierszach i dwóch kolumnach. W tym celu w nowym regionie z klawiatury wpisujemy

[A:], [Ctrl+M]. W wywołanym oknie *Insert Matrix* podajemy wymiary macierzy – *rows*: 2 i *columns*: 2 a następnie wypełniamy poszczególne komórki:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Identycznie postępujemy przy definiowaniu macierzy B:

$$B := \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 40 & 50 \end{pmatrix}$$

Ad a) Dodawanie macierzy $A+B$

W nowym regionie z klawiatury wpisujemy [A+B=]:

$$A + B = \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 45 & 58 \end{pmatrix}$$

Ad b) Odejmowanie macierzy $A-B$

W nowym regionie wpisujemy [A-B=]:

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & -17 \\ -35 & -42 \end{pmatrix}$$

Ad c) Mnożenie macierzy $A \cdot B$

W nowym regionie wpisujemy [A·B=]:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 155 & 250 \\ 355 & 500 \end{pmatrix}$$

Ad d) Transpozycja macierzy A^T

W nowym regionie z klawiatury wpisujemy [A], [Ctrl+1], [=] oraz w drugim regionie [B], [Ctrl+1], [=]:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 7 & 40 \\ 20 & 50 \end{pmatrix}$$

Ad e) Odwracanie macierzy A^{-1}

W nowym regionie wpisujemy [C], [:], [A^-1], oraz w drugim regionie [D], [:], [B^-1]:

$$C := A^{-1}, \quad D := B^{-1}$$

Następnie w kolejnych dwóch regionach wpisujemy [C=] oraz [D=]:

$$C = \begin{pmatrix} 0.32 & -0.12 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -0.111 & 0.044 \\ 0.089 & -0.016 \end{pmatrix}$$

1.5.2. Tworzenie wykresów

Mathcad posiada szerokie możliwości wprowadzania różnego rodzaju wykresów dwu- i trójwymiarowych.

Wykresy dwuwymiarowe:

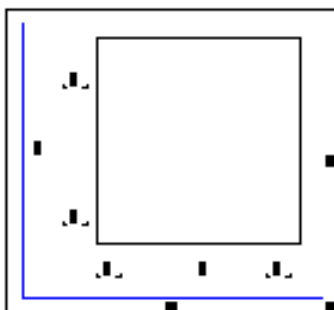
- X-Y Plot
- Polar Plot

Wykresy trójwymiarowe:

- Surface Plot
- Contour Plot
- 3D Scatter Plot
- 3D Bar Plot
- Vector Field Plot

W niniejszym rozdziale zostanie omówiony tylko wykres dwuwymiarowy: *X-Y Plot* i trójwymiarowy: *Surface Plot*.

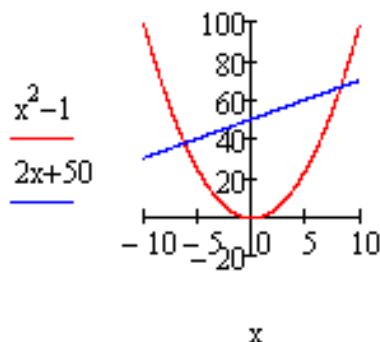
Wykres dwuwymiarowy *X-Y Plot* można wstawić wprowadzając z klawiatury znak `[@]` lub wybierając ikonę z menu *Graph*→*X-Y Plot*. Po wywołaniu operatora pojawi się pusty szablon wykresu z zaznaczonymi polami do wypełnienia (rys. 1.5).



Rys. 1.5 Szablon wykresu *X-Y Plot* z zaznaczonymi polami do wypełnienia

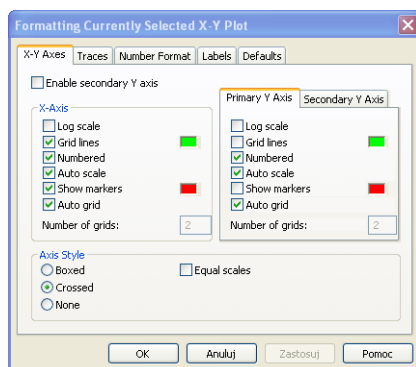
Na środku osi poziomej i pionowej należy wpisać odpowiednie nazwy zmiennych. Na krańcach osi można podać zakres wyświetlanych wartości w przeciwnym wypadku zostanie on ustawiony automatycznie.

W jednym układzie współrzędnych możemy przedstawić kilka wykresów funkcji. Wystarczy kolejne funkcje w polu opisu funkcji oddzielić od siebie przecinkiem (rys. 1.6), np. $[x^2-1]$, $[,]$, $[2x+50]$.



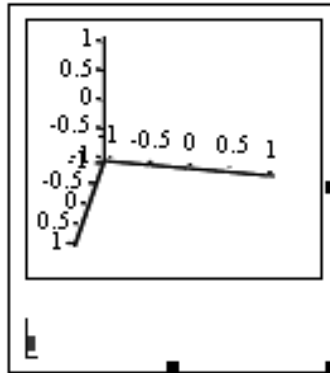
Rys. 1.6 Wykres funkcji $x^2 - 1$ oraz $2x + 50$ w jednym układzie współrzędnych

Wykresy formatujemy poprzez podwójne kliknięcie na wykresie i wybranie odpowiedniej zakładki w oknie dialogowym *Formatting Currently Selected X-Y Plot* (rys. 1.7).



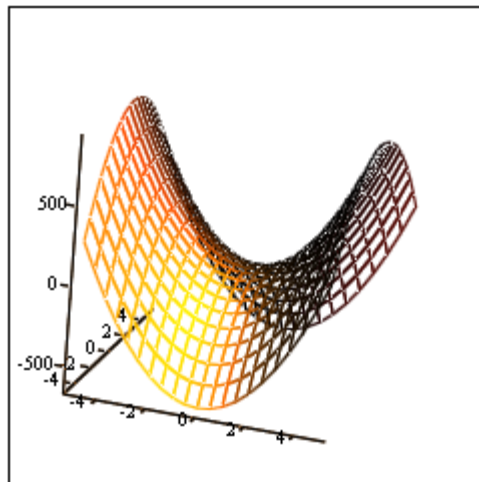
Rys. 1.7 Okno dialogowe *Formatting Currently Selected X-Y Plot*

Wykres trójwymiarowy: *Surface Plot* otrzymujemy poprzez wciśnięcie z klawiatury [Ctrl+2] lub wybierając ikonę *Surface Plot* z paska *Graph*. Po wywołaniu operatora pojawi się pusty szablon wykresu z zaznaczonym polem do wypełnienia (rys. 1.8).



Rys. 1.8 Szablon wykresu *Surface Plot* z zaznaczonym polem do wypełnienia

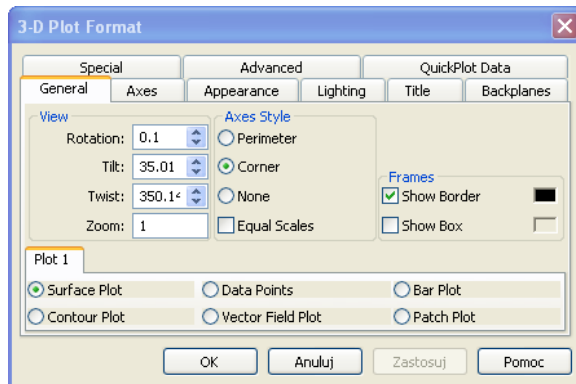
W miejscu braku wprowadzamy uprzednio zdefiniowaną funkcję, np. powyżej szablonu wykresu definiujemy funkcję $[f(x,y)]$, $[:]$, $[6x^2-5y^2]$ i w miejscu braku wstawiamy $[f]$ (rys. 1.9).



f

Rys. 1.9 Wykres funkcji $f(x,y) = 6x^2 - 5y^2$

Wykresy formatujemy poprzez podwójne kliknięcie na wykresie i wybranie odpowiedniej zakładki w oknie dialogowym *3D Plot Format* (rys. 1.10).



Rys. 1.10 Okno dialogowe 3D Plot Format

1.5.3. Rozwiązywanie równań

Rozwiązywanie równań algebraicznych z jedną niewiadomą możemy przeprowadzić na dwa sposoby: symbolicznie lub numerycznie. Do rozwiązywania symbolicznego możemy wykorzystać funkcję *solve* natomiast do rozwiązywania numerycznego funkcję *root* lub *polyroots*:

f(x)solve,x → pozwala na znalezienie pierwiastka równania bez zadania wartości początkowej (należy tylko określić, która z liter w równaniu jest zmienną);

root(f(x),x) pozwala na znalezienie jednego pierwiastka równania $f(x)=0$ zadaną wartością początkową;

root(f(x),x,a,b) poszukuje jednego pierwiastka równania $f(x)=0$ w zadanym przedziale wartości od a do b (wartość funkcji $f(x)$ w punktach a i b muszą mieć różne znaki);

polyroots(w) nie wymaga wartości początkowej jak funkcja *root*, funkcję tą stosujemy do obliczania pierwiastków wielomianu wyższego stopnia, gdzie w jest wektorem rzeczywistym lub zespolonym, który zawiera w kolumnie współczynniki w kolejności od wyrazu wolnego w pierwszym wierszu do współczynnika przy najwyższej potędze w ostatnim wierszu, np. $2x^2-x+3$

$$w := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^2-4=0$.

Równanie zostanie rozwiązane z wykorzystaniem funkcji *solve*.

1. Na początku należy zdefiniować funkcję $f(x)$ opisującą prawą stronę równania dlatego w tym celu wpisujemy z klawiatury następujące znaki $[f(x)], [:], [x^2-4]$:

$$f(x) := x^2 - 4$$

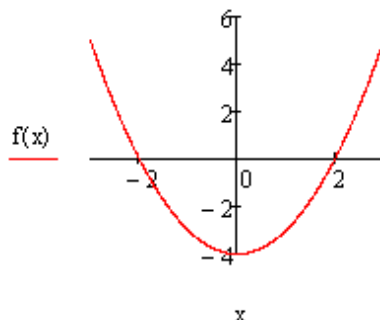
2. Następnie w nowym regionie wpisujemy $[f(x)]$ i wybieramy funkcję *solve* z paska *Symbolic*. Pomiedzy ***solve*** a $\rightarrow$ z klawiatury wstawiamy $[,]$ i podajemy zmienną $[x]$ oraz wciskamy $[\text{Enter}]$. Otrzymujemy zapis:

$$f(x) \text{ solve}, x \rightarrow$$

oraz rozwiązanie równania:

$$f(x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzenie rozwiązania równania:



Rys. 1.11 Wykres funkcji $f(x)=x^2-4=0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^2-4=0$, przyjmując jako początkową przybliżoną wartość rozwiązania 1.

Równanie zostanie rozwiązane z wykorzystaniem funkcji *root*.

1. Na początku należy zdefiniować zmienną x i przypisać jej wartość 1. Z klawiatury wpisujemy w nowym regionie $[x], [:], [1]$:

$$x := 1$$

2. Następnie w nowym regionie należy zdefiniować funkcję $f(x)$ opisującą prawą stronę równania. W tym celu wpisujemy następujące znaki $[f(x)]$, $[:]$, $[x^2-4]$:

$$f(x) := x^2 - 4$$

3. W nowym regionie wpisujemy funkcję rozwiązującą równanie i jako jej argument wstawiamy funkcję definiującą prawą stronę równania oraz zmienną x , względem której równanie jest rozwiązywane. Z klawiatury wpisujemy $[root(f(x),x)]$ i wciskamy $[Enter]$. Otrzymujemy zapis:

$$root(f(x),x) =$$

oraz jeden pierwiastek równania:

$$root(f(x),x) = 2$$

4. Pamiętamy jednak z przykładu 1, że równanie ma dwa pierwiastki. Aby wyznaczyć drugi należy zmiennej x przypisać inną wartość. Postępując zgodnie z punktem 1 zmiennej x przypisujemy wartość -4 . Powinniśmy otrzymać następujący wynik:

$$root(f(x),x) = -2$$

Przykład 3

Znajdź pierwiastki równania $x^2-4=0$ znajdujące się w przedziale $[0,10]$.

Równanie zostanie rozwiązane z wykorzystaniem funkcji *root*.

1. W nowym regionie należy zdefiniować funkcję $f(x)$ opisującą prawą stronę równania. W tym celu wpisujemy z klawiatury następujące znaki $[f(x)]$, $[:]$, $[x^2-4]$:

$$f(x) := x^2 - 4$$

2. Następnie sprawdzamy czy wartości funkcji $f(x)$ na granicach zadanego przedziału mają różne znaki. Z klawiatury wpisujemy w jednym regionie $[f(0)=]$ a w drugim $[f(10)=]$:

$$f(0) = -4 \quad f(10) = 96$$

3. Jak widać znaki są odmienne więc można zastosować drugi wariant funkcji *root*. W nowym regionie z klawiatury wpisujemy $[root(f(x),x,0,10)]$. Otrzymujemy zapis:

$$root(f(x),x,0,10) =$$

oraz jeden pierwiastek równania:

$$root(f(x),x,0,10) = 2$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$.

Równanie zostanie rozwiązane z wykorzystaniem funkcji *polyroots*.

1. W nowym regionie należy zdefiniować funkcję $f(x)$ opisującą prawą stronę równania. W tym celu z klawiatury wpisujemy następujące znaki $[f(x)], [:], [x^3-4x^2-5x+2]$:

$$f(x) := x^3 - 4x^2 - 5x + 2$$

2. Następnie definiujemy wektor o nazwie w , który zawiera w kolumnie cztery współczynniki w kolejności od wyrazu wolnego w pierwszym wierszu do współczynnika przy najwyższej potęgze w ostatnim wierszu. Ustawiamy kursor w nowym regionie i wybieramy z klawiatury $[w:]$ oraz $[\text{Ctrl}+\text{M}]$. W wywołanym oknie dialogowym *Insert Matrix* ustawiamy *Rows*: 4, *Columns*: 1 a następnie wciskamy *OK*. W macierzy wpisujemy kolejno od góry współczynniki $[2], [-5], [-4], [1]$.

$$w := \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

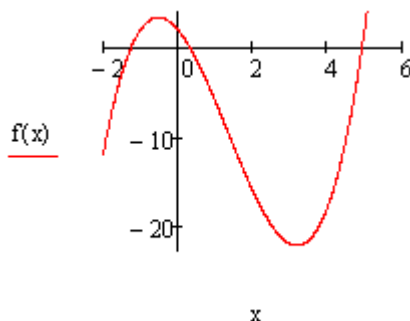
3. Po zdefiniowaniu wektora w wywołujemy funkcję *polyroots*. W nowym regionie wpisujemy $[\text{polyroots}(w)]$ oraz $[=]$. Otrzymujemy zapis:

$$\text{polyroots}(w) =$$

oraz wszystkie pierwiastki równania:

$$\text{polyroots}(w) = \begin{pmatrix} -1.255 \\ 0.323 \\ 4.932 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie rozwiązania równania:



Rys. 1.12 Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

UWAGA:

Dla sprawdzenia rozwiązania równania lub w celu dokładniejszego określenia zmiennej początkowej w funkcji *root* warto sporządzić wykres przebiegu funkcji tak jak zostało przedstawione w powyższych przykładach.

1.5.4. Rozwiązywanie układów równań i nierówności

Układy równań i nierówności, podobnie jak równania z jedną niewiadomą, możemy rozwiązać na dwa sposoby: symbolicznie lub numerycznie. Dostępne są następujące funkcje: *Isolve*, procedura *Given-Find*.

Isolve funkcja ta stosowana jest do rozwiązywania układów równań liniowych;

Given-Find poszukuje rozwiązania ścisłego (w granicach tolerancji), można stosować w obliczeniach symbolicznych i numerycznych do rozwiązywania układów równań i nierówności zarówno liniowych jak i nieliniowych (w obliczeniach numerycznych blok wymaga podania wartości startowych poszukiwanych zmiennych).

Przy rozwiązywaniu układów równań należy doprowadzić do takiej sytuacji aby równanie współczynników umieścić po lewej stronie a wyrazy wolne po prawej. W układach równań znak „=” wprowadza się poprzez wciśnięcie kombinacji klawiszy [Ctrl=]. Na ekranie pojawi się pogrubiony znak **=**.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki układu równań:

$$\begin{cases} 10x + 2y + z = 11 \\ 4x + 5y + 6z = 12 \\ 7x + 8y + 10z = 13 \end{cases}$$

Powyższy układ jest układem równań liniowych dlatego można go rozwiązać wykorzystując funkcję *Isolve*.

1. Na początku należy zdefiniować powyższy układ równań. W tym celu z klawiatury wpisujemy w nowym regionie następujące znaki [10x+2y+z], [Ctrl=], [11], w drugim regionie [4x+5y+6z], [Ctrl=], [12] oraz w trzecim regionie [7x+8y+10z], [Ctrl=], [13]:

$$10x + 2y + z = 11$$

$$4x + 5y + 6z = 12$$

$$7x + 8y + 10z = 13$$

- Następnie definiujemy macierz A , która zawiera współczynniki przy zmiennych. Ustawiamy kursor w nowym regionie i wybieramy z klawiatury [A:] oraz [Ctrl+M]. W wywołanym oknie dialogowym *Insert Matrix* ustawiamy *Rows*: 3, *Columns*: 3 a następnie wciskamy OK. W wierszach macierzy wpisujemy odpowiednio współczynniki [10], [2], [1], [4], [5], [6], [7], [8], [10]:

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

- Należy również zdefiniować wektor B zawierający wyrazy wolne. Ustawiamy kursor w nowym regionie i z klawiatury wpisujemy [B:] oraz [Ctrl+M]. W wywołanym oknie dialogowym *Insert Matrix* ustawiamy *Rows*: 3, *Columns*: 1 a następnie wciskamy OK. W kolumnie wektora B wpisujemy odpowiednio wyrazy wolne [11], [12], [13]:

$$B := \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

- Po zdefiniowaniu macierzy A i wektora B wywołujemy funkcję *lsolve*. Poniżej w nowym regionie wpisujemy [lsolve(A,B)] oraz [=]. Otrzymujemy zapis:

$$\text{lsolve}(A,B) =$$

oraz rozwiązanie układu równań liniowych:

$$\text{lsolve}(A,B) = \begin{pmatrix} -1.476 \\ 19.524 \\ -13.286 \end{pmatrix}$$

Dla sprawdzenia układ równań zostanie rozwiązany innym sposobem wykorzystując procedurę *Given-Find* (numerycznie).

- W obliczeniach numerycznych blok wymaga podania wartości startowych poszukiwanych zmiennych. Przyjmijmy dla $x=1$, $y=2$ i $z=2$. W nowym regionie z klawiatury wpisujemy [x], [:], [1], w drugim [y], [:], [2] i w trzecim [z], [:], [2]:

$$x := 1 \quad y := 2 \quad z := 2$$

- Poniżej w nowym regionie wpisujemy [Given] a następnie definiujemy równania. W tym celu z klawiatury wpisujemy w nowym regionie następujące znaki [10x+2y+z], [Ctrl=], [11], w drugim regionie

[4x+5y+6z], [Ctrl=], [12] oraz w trzecim regionie [7x+8y+10z], [Ctrl=], [13]:

Given

$$10x + 2y + z = 11$$

$$4x + 5y + 6z = 12$$

$$7x + 8y + 10z = 13$$

3. Poniżej w nowym regionie wpisujemy [Find(x,y,z)] oraz [=]. Otrzymujemy zapis:

$$\text{Find}(x,y,z) =$$

oraz rozwiązanie układu równań:

$$\text{Find}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1.476 \\ 19.524 \\ -13.286 \end{pmatrix}$$

W pierwszym i drugim przypadku otrzymaliśmy te same wartości szukanych zmiennych. Świadczy to o poprawności rozwiązania układu równań.

Przykład 2

Znajdź pierwiastki układu równań znajdujące się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - x^2 + x = 2 \end{cases}$$

Jak widać z zapisu układ jest układem równań nieliniowych dlatego nie możemy go rozwiązać przy użyciu funkcji *lsolve*. Do rozwiązania tego zadania wykorzystamy procedurę *Given-Find* (numerycznie).

1. Na początku należy zdefiniować zmienne x i y oraz przypisać im dowolne wartości. Przyjmijmy dla $x=0$ i dla $y=1$. W nowym regionie z klawiatury wpisujemy [x], [:], [0], a w drugim [y], [:], [1]. Otrzymujemy zapis:

$$x := 0 \quad y := 1$$

2. Po deklaracji zmiennych poniżej w nowym regionie wpisujemy [Given] a następnie definiujemy równania oraz nierówności ponieważ szukamy pierwiastków z pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. W tym celu w nowym regionie z klawiatury wpisujemy [x^2+y^2], [Ctrl=], [4],

w drugim regionie $[y-x^2+x]$, [Ctrl=], [2], w trzecim $[x>0]$, a w czwartym $[y>0]$:

Given

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y - x^2 + x = 2$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

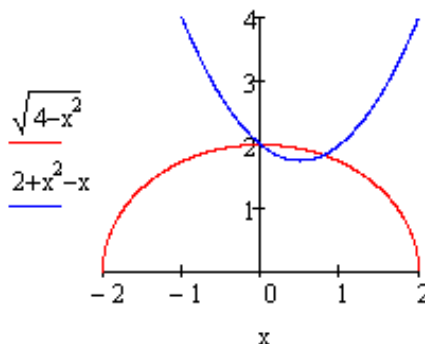
3. Następnie wywołujemy procedurę *Find* i podajemy wszystkie niewiadome. Poniżej w nowym regionie wpisujemy $[Find(x,y)]$ oraz $[=]$. Otrzymujemy zapis:

$$find(x,y) =$$

oraz rozwiązanie układu równań:

$$find(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Dla sprawdzenia sporządzimy wykres funkcji:



Rys. 1.13 Wykres funkcji $x^2+y^2=4$ i $y-x^2+x=2$

5. Jak widać z wykresu (rys. 1.13) układ równań ma dwa rozwiązania w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych dlatego musimy znaleźć drugi punkt. W tym celu należy podstawić inne wartości dla zmiennych x i y . Postępując identycznie jak w punkcie 1-3 rozwiążemy układ równań dla zmiennych $x=1$ i $y=2$. Otrzymujemy zapis z rozwiązaniem:

$$x := 1 \quad y := 2$$

Given

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y - x^2 + x = 2$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$\text{find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.793 \\ 1.836 \end{pmatrix}$$

1.5.5. Operacje na pochodnych, całkach i granicach

Mathcad umożliwia obliczanie pochodnych pierwszego rzędu, wartości pochodnych w punkcie i pochodnych rzędu dowolnego. Skróty klawiaturowe do wywoływania operatorów pochodnych pierwszego i dowolnego rzędu zostały przedstawione w tabeli 1.

Przykład 1

Oblicz pochodną pierwszego rzędu z funkcji:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Aby obliczyć pochodną pierwszego rzędu z powyższej funkcji należy postępować według poniższych kroków:

1. Na początku definiujemy funkcję $f(x)$. W tym celu w nowym regionie z klawiatury wpisujemy następujące znaki $[f(x)]$, $[:]$, $[\ln(x)]$, $[/]$, $[x]$. Otrzymujemy zapis:

$$f(x) := \frac{\ln(x)}{x}$$

2. Następnie wywołujemy operator pochodnej pierwszego rzędu. Wskazujemy kursorem miejsce nowego regionu i wciskamy $[?]$. Pojawi się operator pochodnej. W miejscu braku w mianowniku wpisujemy $[x]$, w liczniku $[f(x)]$ a następnie wciskamy kombinację klawiszy $[\text{Ctrl} \cdot]$. Na ekranie pojawi się wynik:

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Przykład 2

Oblicz wartość pochodnej funkcji:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \text{ w punkcie } x=2$$

Aby obliczyć pochodną pierwszego rzędu w punkcie z powyższej funkcji należy:

1. Zdefiniować funkcję $f(x)$. W tym celu z klawiatury wpisujemy w nowym regionie następujące znaki $[f(x)]$, $[:]$, $[\ln(x)]$, $[/]$, $[x]$. Otrzymujemy zapis:

$$f(x) := \frac{\ln(x)}{x}$$

2. Podać wartość odciętej, dla której będziemy liczyć pochodną. W nowym regionie poniżej zdefiniowanej funkcji wpisujemy $[x]$, $[:]$, $[2]$:

$$x := 2$$

3. Wywołać operator pochodnej pierwszego rzędu. Wskazujemy kursorem miejsce nowego regionu i wciskamy $[?]$. Pojawi się operator pochodnej. W miejscu braku w mianowniku wpisujemy $[x]$, w liczniku $[f(x)]$ a następnie $[=]$. Na ekranie pojawi się wynik:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0.077$$

Podobnie liczymy pochodną wyższego rzędu, np.

- druga pochodna z funkcji $f(x) = x^3$

$$\text{to } \frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 6 \cdot x$$

- trzecia pochodna z funkcji $f(x) = x^3$

$$\text{to } \frac{d^3}{dx^3} f(x) \rightarrow 6$$

Mathcad umożliwia również obliczanie całek pojedynczych, podwójnych, oznaczonych i nieoznaczonych. Do wprowadzania symboli całek funkcji można wykorzystać paletę **Calculus** lub użyć skrótów klawiszowych. Skróty do wywoływania symboli całek oznaczonych i nieoznaczonych zostały przedstawione w tabeli 1.1.

Przykład 3

Oblicz całkę oznaczoną funkcji:

$$f(x) = \ln x \text{ w przedziale } <1,2>$$

Jak pamiętamy ze szkoły lub studiów obliczanie tego typu całek było żmudną pracą. Dla przypomnienia przedstawimy przykład rozwiązania tej całki.

Aby rozwiązać całkę oznaczoną z powyższej funkcji należy wykorzystać wzór na całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f''(x) = \frac{1}{x} & g(x) = \int 1 dx = x \end{array} \right| = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 dx = \\ &= 2 \ln 2 - 1 \ln 1 - [x]_1^2 = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Po co się męczyć skoro taką całkę możemy rozwiązać przez kilka kliknięć myszą.

W Mathcadzie całkę oznaczoną z funkcji $f(x) = \ln x$ obliczamy w następujący sposób:

1. Wywołujemy operator całki oznaczonej poprzez wciśnięcie z klawiatury [&]. Następnie wprowadzamy granice [1], [2], funkcję podcałkową [ln(x)], zmienną całkowania [x] oraz wciskamy kombinację klawiszy [Ctrl .]. Otrzymujemy zapis i wynik:

$$\int_1^2 \ln(x) dx \rightarrow \ln(4) - 1$$

Przy obliczaniu całki nieoznaczonej postępujemy w podobny sposób z tą różnicą, że wywołujemy operator całki nieoznaczonej [Ctrl+I] i nie wprowadzamy granic całkowania, np. całka nieoznaczona z funkcji $f(x) = \ln x$ wynosi:

$$\int \ln(x) dx \rightarrow x \cdot (\ln(x) - 1)$$

W przypadku gdy chcemy obliczyć całkę nieoznaczoną podwójną lub potrójną operator całkowania wywołujemy odpowiednio dwa [Ctrl+I], [Ctrl+I] lub trzy razy [Ctrl+I], [Ctrl+I], [Ctrl+I], np.:

$$\int \int x^3 y^2 + 2y x^2 + 5x dx dy \rightarrow \frac{x^4 y^3}{12} + \frac{x^3 y^2}{3} + \frac{5x^2 y}{2}$$

Analogicznie odbywa się obliczanie granic funkcji.

Przykład 4

Oblicz granice funkcji w punktach nieokreśloności tej funkcji.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Dziedziną powyższej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem punktów -2 i 2. Naszym zadaniem jest obliczenie czterech granic jednostronnych: lewostronnej w punkcie -2 i 2 oraz prawostronnej w punkcie -2 i 2.

Przy obliczaniu granicy tej funkcji w Mathcadzie postępujemy w następujący sposób:

1. Wywołujemy granicę lewostronną poprzez naciśnięcie klawiszy [Ctrl+Shift+B]:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-}$$

2. W miejsce braku wpisujemy zmienną [x], punkt [-2] oraz funkcję $\frac{x}{x^2 - 4}$. Po uzupełnieniu z klawiatury wciskamy [Ctrl .]. Otrzymujemy wynik:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} \rightarrow -\infty$$

3. Identycznie postępujemy przy obliczaniu granicy lewostronnej dla punktu 2. Otrzymujemy wynik:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} \rightarrow -\infty$$

4. Następnie wywołujemy granicę prawostronną poprzez naciśnięcie klawiszy [Ctrl+Shift+A]:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+}$$

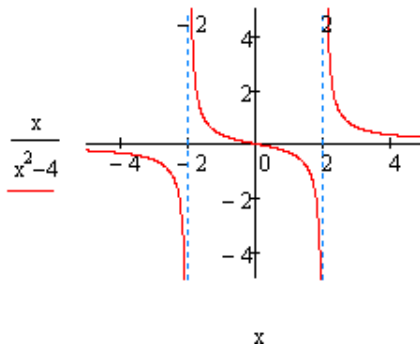
5. W miejsce braku wpisujemy zmienną x, punkt -2 oraz funkcję f(x). Po uzupełnieniu z klawiatury wciskamy [Ctrl .]. Otrzymujemy wynik:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} \rightarrow \infty$$

6. Identycznie postępujemy przy obliczaniu granicy prawostronnej dla punktu 2. Otrzymujemy wynik:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} \rightarrow \infty$$

7. Potwierdźmy rozwiązanie wykresem funkcji f(x).



Rys. 1.14 Wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

1.5.6. Zadania do samodzielnego rozwiązania

- Przeprowadź badanie przebiegu zmienności funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$:
 - zdefiniuj współczynniki $a=3$, $b=4$, $c=-2$,
 - zdefiniuj funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$,
 - utwórz wykres funkcji $f(x)$,
 - na krańcach osi ogranicz zakres wyświetlanych wartości -4 do 4 i argumentów -2 do 2 oraz sformatuj wykres funkcji wybierając następujące opcje:
 - (Axes style $\rightarrow$ crossed)
 - (X-axis $\rightarrow$ Numbered)
 - (X-axis $\rightarrow$ Number of Grids $\rightarrow$ 4)
 - (Y-axis - analogicznie),
 - oblicz zbiór wartości funkcji $f(x)$ dla zdefiniowanego zbioru argumentu $x=1, 1.5 \dots 4$,
 - oblicz deltę Δ oraz miejsca zerowe funkcji x_1 , x_2 ,
 - oblicz pole powierzchni pod wykresem funkcji kwadratowej.

- Oblicz wartość wyrażenia:

$$\sqrt{y^2 + 2x} + \frac{z^3 + y + e^{x^2}}{2z + x^{3t}}$$

dla $x=10$, $y=3$, $z=4$.

- Oblicz wartość wyrażenia:

$$t = \frac{\ln(x^2) + 2\sqrt{x^2 + 2x}}{\sin(2x)}$$

dla x zmieniającego się od 1 do 9 z krokiem równym 2.

4. Wykonaj działania na macierzach:

a) dodaj macierze

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 89 & -67 & 2 \\ 9 & 3 & -2 & 8 & 45 \\ 1 & -8 & 6 & 3 & 34 \\ 35 & 23 & -45 & 4 & -6 \\ -4 & 7 & 8 & -6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 & 7 & -5 & 8 & 35 \\ 6 & -56 & 77 & 5 & -2 \\ 43 & 12 & -10 & 3 & 5 \\ 9 & -8 & 7 & -9 & 45 \\ 23 & -24 & 21 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) transponuj macierz otrzymaną w punkcie a)

c) pomnóż macierze

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Oblicz pochodną pierwszego rzędu z funkcji:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2x} \sin(\cos(x))$$

6. Oblicz pochodną drugiego rzędu z funkcji:

$$f(x) = \sin(x) - \ln(x)$$

7. Wyznacz całkę nieoznaczoną funkcji:

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 10}$$

8. Oblicz całkę oznaczoną funkcji w przedziale od 1 do 3:

$$h(x) = x^3 \sqrt{x^2 - 1}$$

9. Oblicz całkę podwójną nieoznaczoną:

$$f(x, y) = x \cdot y$$

10. Rozwiąż równanie:

$$f(x) = 3^x + 3^{x+1} - 36$$

11. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \frac{(2x-1)^2}{3} - (y+2)^2 - \frac{(2x-y)(2x+y)}{2} + \frac{4x^2+3y^2}{6} = 3 \\ x(x-1)^2 + 2(y-1)^2 - x(x-2)(x+2) - 2(y-x)(y+x) = -4 \end{cases}$$

12. Korzystając z polecenia *Simplify* uprość wyrażenie:

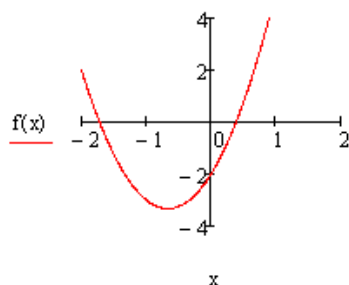
a) $\frac{(2x-1)^2}{3} - (y+2)^2 - \frac{(2x-y)(2x+y)}{2} + \frac{4x^2+3y^2}{6} - 3$

b) $x(x-1)^2 + 2(y-1)^2 - x(x-2)(x+2) - 2(y-x)(y+x) + 4$

ODPOWIEDZI:

1.

c, d)



e)

$f(x) =$	5
	10.75
	18
	26.75
	37
	48.75
	62

f)

$\Delta = 40$, $x_1 = -1.721$, $x_2 = 0.387$

g)

-4.685

2.

$2.688 \cdot 10^{37}$

3.

3.81
-35.586
-27.666
19.954
-32.35

4.

a)

$$\begin{pmatrix} 21 & 13 & 84 & -59 & 37 \\ 15 & -53 & 75 & 13 & 43 \\ 44 & 4 & -4 & 6 & 39 \\ 44 & 15 & -38 & -5 & 39 \\ 19 & -17 & 29 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 21 & 15 & 44 & 44 & 19 \\ 13 & -53 & 4 & 15 & -17 \\ 84 & 75 & -4 & -38 & 29 \\ -59 & 13 & 6 & -5 & -2 \\ 37 & 43 & 39 & 39 & 10 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 0 & 12 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 22 \end{pmatrix}$$

5.

$$2 \cdot x^2 \cdot e^{2x} \cdot \sin(\cos(x)) + 2 \cdot x \cdot e^{2x} \cdot \sin(\cos(x)) - \frac{2}{x} \cdot e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$$

6.

$$\frac{1}{x^2} - \sin(x)$$

7.

$$\frac{\sqrt{6} \cdot \arctan\left[\frac{\sqrt{6} \cdot (x + 2)}{6}\right]}{6}$$

8.

$$43.746$$

9.

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{4}$$

10.

$$2$$

11.

$$(-2, -1)$$

12.

a)

$$-\frac{4x}{3} - 4y - \frac{20}{3}$$

b)

$$5x - 4y + 6$$

Przydatne polecenia z paska narzędziowego *Symbolic*:

Simplify - upraszcza wyrażenia algebraiczne i trygonometryczne

Expand - wymnaża wyrażenia algebraiczne i trygonometryczne

Factor - rozkłada wyrażenia na czynniki

Collect - wyłącza wspólny czynnik przed nawias

Coeffs - wyciąga współczynnik z wielomianu

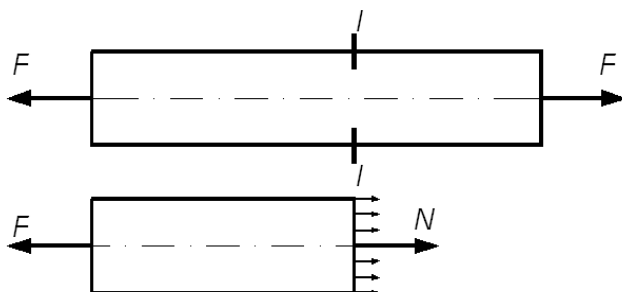
Series - rozwija w szereg

Convert, Parfrac - dzielenie wielomianów/wyciąganie czynnika przed ułamek.

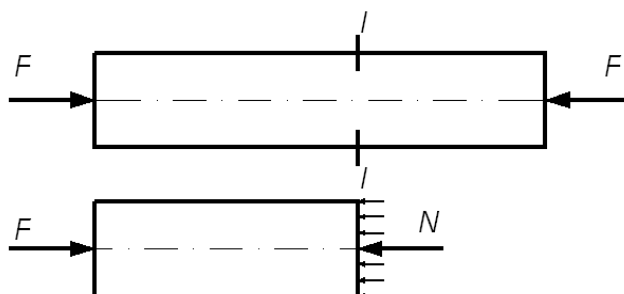
2. Osiowe rozciąganie i ściskanie prętów prostych

2.1. Pojęcia podstawowe

Osiowe rozciąganie lub ściskanie prętów występuje w przypadku gdy układ sił wewnętrznych po jednej stronie przekroju poprzecznego pręta daje się sprowadzić do wypadkowej N prostopadłej do przekroju, utwierdzonej w jego środku ciężkości i skierowanej zgodnie z normalną zewnętrzną. Jeżeli siły wypadkowe skierowane są od siebie – pręty są rozciągane, jeżeli siły wypadkowe skierowane są do siebie – pręty są ściskane (rys. 2.1 i 2.2). Elementami rozciąganyymi lub ściskanymi są pręty kratownic, ściągi, rozpory łuków i ram oraz słupy i filary.



Rys. 2.1 Element pręta rozciąganego osiowo



Rys. 2.2 Element pręta ściskanego osiowo

Po przyłożeniu obciążenia działającego na element powoduje powstanie w materiale tego elementu sił wewnętrznych. Siły te odniesione do powierzchni przekroju elementu nazywamy naprężeniami. W prętach rozciąganych i ściskanych osiowo występują **naprężenia normalne**.

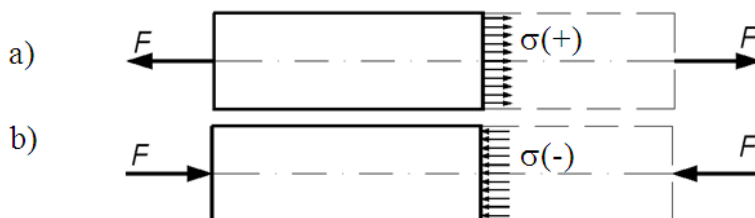
$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Ponieważ $N=F$ zatem można zapisać, że:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Jednostką naprężenia w układzie SI jest Pa (paskal), [$Pa=N/m^2$], wielokrotnością najczęściej używaną jest MPa (megapaskal) [$MPa=MN/m^2$ lub N/mm^2].

Na rysunku 2.3 przedstawiono rozkład naprężeń normalnych w przekroju pręta rozciąganego i ściskanego. Podczas rozciągania w przecie występują naprężenia $\sigma(+)$ natomiast przy ściskaniu naprężenia $\sigma(-)$.



Rys. 2.3 Rozkład naprężeń w przecie rozciąganim (a) i ściskanym (b)

Warunek wytrzymałości dla materiałów sprężysto-plastycznych ściskanych lub rozciąganych osiowo:

$$\sigma = \frac{F}{S} \leq k_r = \frac{R_m}{x_m} \text{ lub } \frac{R_e}{x_e}$$

gdzie:

S – pole powierzchni przekroju,

F – osiowa siła ściskająca lub rozciągająca,

k_r – naprężenia dopuszczalne,

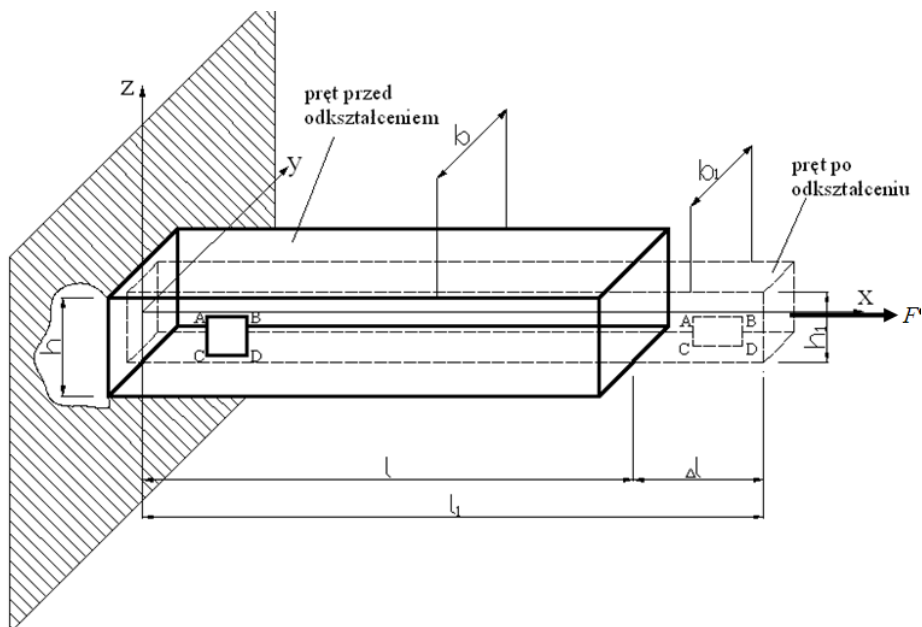
R_m – granica wytrzymałości,

R_e – granica plastyczności,

x_m – współczynnik bezpieczeństwa dla materiałów kruchych (np. dla żeliwa szarego $x_m = 3,5$),

x_e – współczynnik bezpieczeństwa dla materiałów plastycznych (np. dla stali, staliwa i żeliwa ciągliwego $x_e = 2 - 2,3$, dla stopów miedzi $x_e = 3 - 4$, dla stopów aluminium $x_e = 3,5 - 4$).

Rysunek 2.4 przedstawia pręt rozciągany siłą F . Lewy koniec pręta został utwierdzony w ścianie. W dowolnym punkcie pręta panuje siła normalna N .



Rys. 2.4 Schemat deformacji pręta po przyłożeniu obciążenia

Analizując powyższy rysunek (rys. 2.4) można zauważyć, że odkształcenia względne ε w poszczególnych kierunkach x, y, z zmieniają się w następujący sposób:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b_1 - b}{b}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} = \frac{h_1 - h}{h}$$

Natomiast prawo Hooke'a wyraża się wzorem:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0$$

Wydłużenie pręta Δl o długości l można więc wyznaczyć z prawa Hooke'a podstawiając za $\sigma_x = \frac{F}{S}$ i za $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$:

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S}$$

Ponieważ odkształcenia liniowe związane są zależnością: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$. Na tej podstawie można wyznaczyć zmiany wymiarów przekroju poprzecznego pręta:

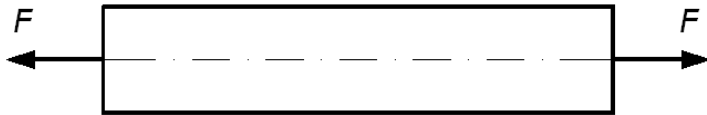
$$\Delta b = -\nu \frac{F \cdot b}{E \cdot S}$$

$$\Delta h = -\nu \frac{F \cdot h}{E \cdot S}$$

2.2. Przykłady do wykonania

Zadanie 1

Obliczyć naprężenie normalne w pręcie o przekroju kołowym $d=0,020$ m, rozciągany siłą $F=3200$ N (rys. 2.5).



Rys. 2.5 Schemat pręta rozciąganego (rysunek do zadania 1)

Rozwiązanie

Przystępując do rozwiązania zadania należy:

Zdefiniować siłę F rozciągającą pręt:

$$F := 3200 \cdot \text{N}$$

Zdefiniować średnicę d pręta:

$$d := 0.020 \text{ m}$$

Zadeklarować pole przekroju S pręta:

$$S := \frac{\pi d^2}{4}$$

$$S = 3.142 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Deklarujemy rozkład naprężeń σ :

$$\sigma := \frac{F}{S}$$

Otrzymujemy wynik:

$$\sigma = 1.02 \times 10^7 \text{ Pa}$$

Zadanie 2

Pręt stalowy o przekroju kwadratowym o długości $l=2,5\text{ m}$ został obciążony siłą $F=30000\text{ N}$. Wyznaczyć wymiary przekroju poprzecznego pręta, wydłużenie bezwzględne Δl oraz odkształcenie względne ε w kierunku x, y, z jeżeli naprężenie dopuszczalne wynosi $k_r=150\text{ MPa}$ zaś moduł Younga $E=2,5\cdot 10^5\text{ MPa}$ i współczynnik Poissona $\nu=0,3$.

Rozwiązanie

Definiujemy siłę F , długość pręta l , naprężenie dopuszczalne k_r , moduł Younga E oraz współczynnik Poissona ν :

$$F := 30000\text{ N} \quad l := 2,5\cdot\text{m} \quad k_r := 150\cdot\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E := 2,5\cdot 10^5\cdot\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \nu := 0,3$$

Wymiary przekroju poprzecznego pręta określamy z warunku wytrzymałości:

$$\sigma := \frac{F}{S} \leq k_r$$

Za pole przekroju poprzecznego S podstawiamy a^2 i z powyższego wzoru wyliczamy a :

$$\sigma := \frac{F}{a^2} \leq k_r \quad \longrightarrow \quad a \geq \sqrt{\frac{F}{k_r}} \quad \longrightarrow \quad a := \sqrt{\frac{F}{k_r}} = 0,014\text{ m}$$

Przyjmujemy $a=0,014\text{ m}$

Definiujemy pole przekroju poprzecznego pręta S :

$$S := a^2$$

Wydłużenie bezwzględne Δl obliczamy zgodnie z prawem Hooke'a. Definiujemy Δl i obliczamy:

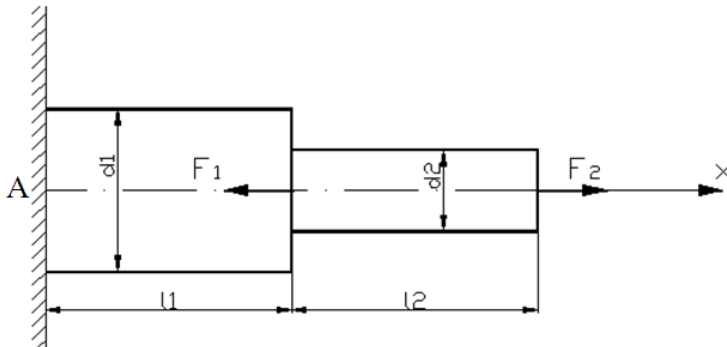
$$\Delta l := \frac{F \cdot l}{E \cdot S} \quad \Delta l = 1,5 \times 10^{-3}\text{ m}$$

Odkształcenie względne ε w kierunku x, y, z obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &:= \frac{\Delta l}{l} & \varepsilon_x &= 6 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_y &:= -\nu \cdot \varepsilon_x & \varepsilon_y &= -1,8 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_z &:= -\nu \cdot \varepsilon_x & \varepsilon_z &= -1,8 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Zadanie 3

Dla pręta stalowego o skokowo zmieniającej się średnicy obciążonego jak na rys. 2.6 obliczyć wydłużenie całkowite oraz sporządzić wykres sił normalnych, naprężeń normalnych i zmiany pola przekroju poprzecznego. W zadaniu przyjąć następujące dane: $d_1=0,020\text{ m}$, $d_2=0,010\text{ m}$, $l_1=0,5\text{ m}$, $l_2=0,5\text{ m}$, $F_1=20000\text{ N}$, $F_2=10000\text{ N}$, $E_1=2,1\cdot 10^5\text{ MPa}$, $E_2=2,1\cdot 10^5\text{ MPa}$.



Rys. 2.6 Schemat pręta rozciąganego (rysunek do zadania 3)

Rozwiązanie

Przystępując do rozwiązania zadania należy zdefiniować poszczególne obciążenia działające na dany pręt, punkty przyłożenia tych obciążeń, średnice pręta, zmianę przekroju poprzecznego, moduły Younga oraz długość poszczególnych odcinków pręta. Dodatkowo należy zdefiniować zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości pręta L .

Definiujemy poszczególne odcinki pręta i obliczamy jego długość całkowitą:

$$\begin{aligned} l_1 &:= 0.5\text{m} & l_2 &:= 0.5\text{m} \\ L &:= \sum_{i=1}^2 l_i & L &= 1\text{m} \end{aligned}$$

Aby sporządzić podane wykresy oraz obliczyć pola przekroju poprzecznego dla poszczególnych odcinków pręta należy zdefiniować zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości pręta L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Definiujemy siły działające na pręt oraz odległości ich przyłożenia od punktu utwierdzenia A. Siły działające zgodnie z kierunkiem osi x oznaczamy z „+” a przeciwnie z „-”.

$$F_1 := -20000\text{N} \quad F_2 := 10000\text{N}$$

$$l_{F_1} := 0.5 \cdot \text{m} \quad l_{F_2} := 1 \cdot \text{m}$$

Definiujemy moduły Younga dla poszczególnych odcinków pręta:

$$E_1 := 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa} \quad E_2 := 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$$

Definiujemy średnice poszczególnych odcinków pręta i obliczamy ich pole przekroju poprzecznego:

$$d_1 := 0.020\text{m} \quad d_2 := 0.010\text{m}$$

$$S_1 := \frac{\pi (d_1)^2}{4} \quad S_2 := \frac{\pi (d_2)^2}{4}$$

Definiujemy odległości zmiany przekrojów poprzecznych od punktu A:

$$l_{S_1} := 0.5 \cdot \text{m} \quad l_{S_2} := 1 \cdot \text{m}$$

Po zdefiniowaniu poszczególnych wielkości występujących w zadaniu możemy przejść do obliczenia reakcji występującej w miejscu utwierdzenia pręta w punkcie A:

$$R_A := \sum_{i=1}^2 F_i \quad R_A = -1 \times 10^4 \text{N}$$

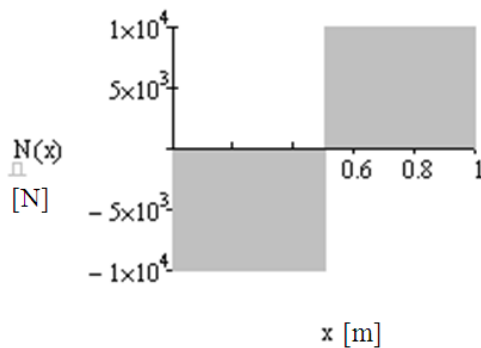
Następnie obliczamy siły normalne pochodzące od zewnętrznych sił skupionych działających na pręt:

$$N_F(x) := \sum_{i=1}^2 \left[F_i \left(x \geq l_{F_i} \right) \right]$$

Siły normalne N dla poszczególnych odcinków pręta wyznaczymy na podstawie równania:

$$N(x) := R_A - N_F(x)$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres sił normalnych:

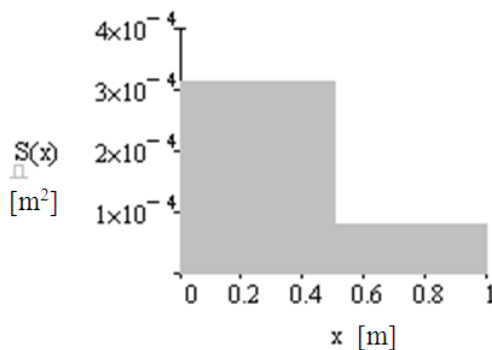


Rys. 2.7 Wykres rozkładu sił normalnych w pręcie

Aby obliczyć naprężenia normalne występujące w pręcie musimy dodatkowo obliczyć pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$S(x) := \sum_{i=1}^1 \left[S_i \left(x \leq l_{S_i} \right) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[S_i \left(l_{S_1} < x \leq l_{S_i} \right) \right]$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres zmiany pola przekroju:

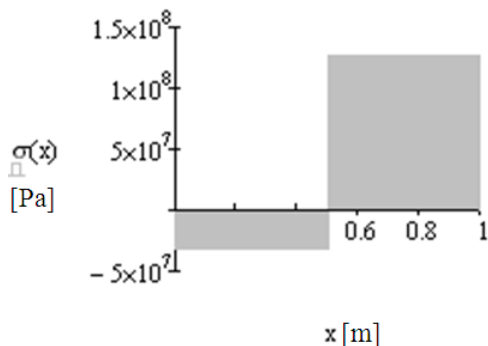


Rys. 2.8 Wykres zmiany pola przekroju pręta

Mając obliczone pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x możemy obliczyć rozkład naprężeń w zadeklarowanym obszarze funkcji x :

$$\sigma(x) := \frac{N(x)}{S(x)}$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres naprężeń normalnych:



Rys. 2.9 Wykres zmiany naprężeń normalnych przekroju pręta

Aby obliczyć wydłużenie całkowite pręta musimy obliczyć moduły Younga zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$E(x) := \sum_{i=1}^1 \left[E_i \left(x \leq l_{S_i} \right) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[E_i \left(l_{S_1} < x \leq l_{S_i} \right) \right]$$

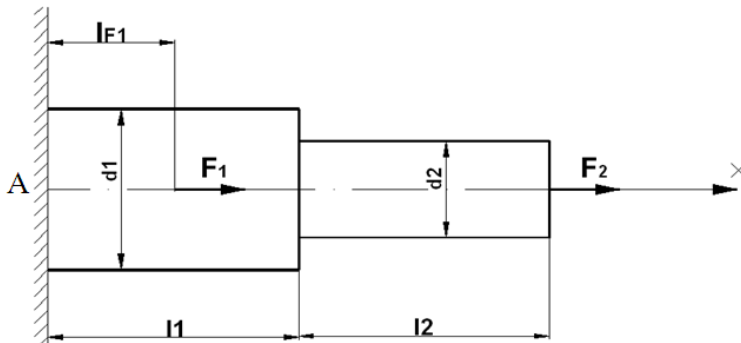
Wydłużenie całkowite obliczamy ze wzoru:

$$\Delta l_c := \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E(x)} dx$$

$$\Delta l_c = 2.274 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Zadanie 4

Dla pręta stalowego o skokowo zmieniającej się średnicy obciążonego jak na rys. 2.10 obliczyć wydłużenie całkowite oraz sporządzić wykres sił normalnych, naprężeń normalnych i zmiany pola przekroju poprzecznego. W zadaniu przyjąć następujące dane: $d_1=0,050 \text{ m}$, $d_2=2/3d_1$, $l_1=1 \text{ m}$, $l_2=1 \text{ m}$, $F_1=4200 \text{ N}$, $F_2=4000 \text{ N}$, $l_{F1}=0,5 \text{ m}$, $E_1=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_2=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Rys. 2.10 Schemat pręta rozciąganego (rysunek do zadania 4)

Rozwiązanie

Przystępując do rozwiązania zadania należy zdefiniować poszczególne obciążenia działające na dany pręt, punkty przyłożenia tych obciążeń, średnice pręta, zmianę przekroju poprzecznego, moduły Younga oraz długość poszczególnych odcinków pręta. Dodatkowo należy zdefiniować zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości pręta L .

Definiujemy poszczególne odcinki pręta i obliczamy jego długość całkowitą:

$$l_1 := 1\text{m} \quad l_2 := 1\text{m}$$

$$L := \sum_{i=1}^2 l_i \quad L = 2\text{m}$$

Aby sporządzić podane wykresy oraz obliczyć pola przekroju poprzecznego dla poszczególnych odcinków pręta należy zdefiniować zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości pręta L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Definiujemy siły działające na pręt oraz odległości ich przyłożenia od punktu utwierdzenia A. Siły działające zgodnie z kierunkiem osi x oznaczamy z „+” a przeciwnie z „-”.

$$F_1 := 4200\text{N} \quad F_2 := 4000\text{N}$$

$$l_{F_1} := 0.5 \cdot \text{m} \quad l_{F_2} := L$$

Definiujemy moduły Younga dla poszczególnych odcinków pręta:

$$E_1 := 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa} \quad E_2 := 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$$

Definiujemy średnice poszczególnych odcinków pręta i obliczamy ich pole przekroju poprzecznego:

$$d_1 := 0.050\text{m} \quad d_2 := \frac{2}{3} d_1$$

$$S_1 := \frac{\pi (d_1)^2}{4} \quad S_2 := \frac{\pi (d_2)^2}{4}$$

Definiujemy odległości zmiany przekrojów poprzecznych od punktu A:

$$l_{S_1} := l_1 \quad l_{S_2} := L$$

Po zdefiniowaniu poszczególnych wielkości występujących w zadaniu możemy przejść do obliczenia reakcji występującej w miejscu utwierdzenia pręta w punkcie A:

$$R_A := \sum_{i=1}^2 F_i \quad R_A = 8.2 \times 10^3 \text{N}$$

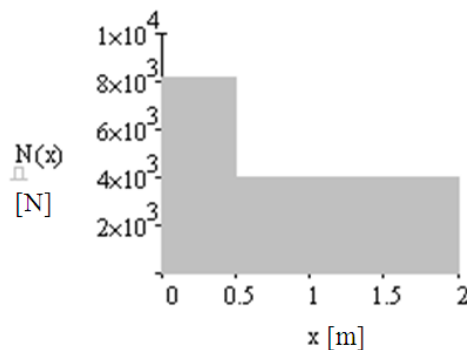
Następnie obliczamy siły normalne pochodzące od zewnętrznych sił skupionych działających na pręt:

$$N_F(x) := \sum_{i=1}^2 \left[F_i \left(x \geq l_{F_i} \right) \right]$$

Siły normalne N dla poszczególnych odcinków pręta wyznaczymy na podstawie równania:

$$N(x) := R_A - N_F(x)$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres sił normalnych:

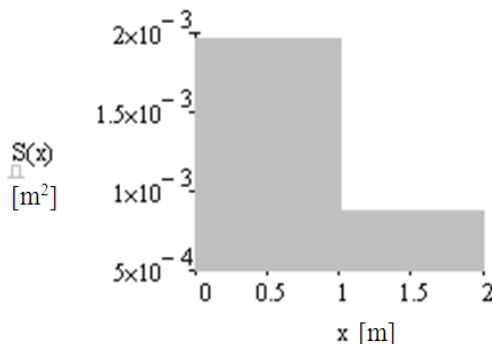


Rys. 2.11 Wykres rozkładu sił normalnych w pręcie

Aby obliczyć naprężenia normalne występujące w pręcie musimy dodatkowo obliczyć pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$S(x) := \sum_{i=1}^1 \left[S_i(x \leq l_{S_i}) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[S_i(l_{S_1} < x \leq l_{S_i}) \right]$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres zmiany pola przekroju:

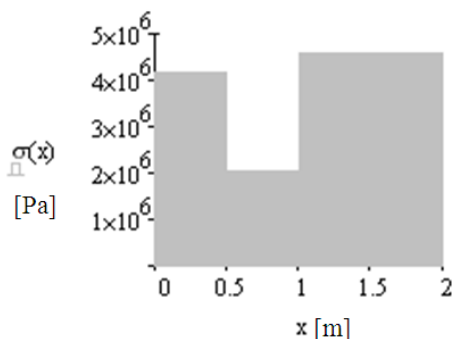


Rys. 2.12 Wykres zmiany pola przekroju pręta

Mając obliczone pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x możemy obliczyć rozkład naprężeń w zadeklarowanym obszarze funkcji x :

$$\sigma(x) := \frac{N(x)}{S(x)}$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres naprężeń normalnych:



Rys. 2.13 Wykres zmiany naprężeń normalnych przekroju pręta

Aby obliczyć wydłużenie całkowite pręta musimy obliczyć moduły Younga zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$E(x) := \sum_{i=1}^1 \left[E_i \left(x \leq l_{S_1} \right) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[E_i \left(l_{S_1} < x \leq l_{S_i} \right) \right]$$

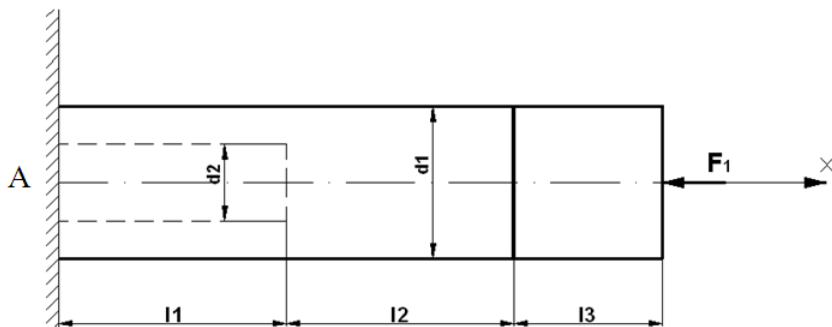
Wydłużenie całkowite obliczamy ze wzoru:

$$\Delta l_c := \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E(x)} dx$$

$$\Delta l_c = 3.624 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Zadanie 5

Dla pręta stalowego o skokowo zmieniającej się średnicy obciążonego jak na rys. 2.14 obliczyć wydłużenie całkowite oraz sporządzić wykres sił normalnych, naprężeń normalnych i zmiany pola przekroju poprzecznego. W zadaniu przyjąć następujące dane: $d_1=0,030 \text{ m}$, $d_2=1/2d_1$, $l_1=1 \text{ m}$, $l_2=1 \text{ m}$, $l_3=0,7 \text{ m}$, $F_1=4200 \text{ N}$, $E_1=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_2=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_3=3/4E_1$.



Rys. 2.14 Schemat pręta ściskanego (rysunek do zadania 5)

Rozwiązanie

Przystępując do rozwiązania zadania należy zdefiniować poszczególne obciążenia działające na dany pręt, punkty przyłożenia tych obciążeń, średnice pręta, zmianę przekroju poprzecznego, moduły Younga oraz długość poszczególnych odcinków pręta. Dodatkowo należy zdefiniować zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości pręta L .

Definiujemy poszczególne odcinki pręta i obliczamy jego długość całkowitą:

$$l_1 := 1\text{m} \quad l_2 := 1\text{m} \quad l_3 := 0.7\text{m}$$

$$L := \sum_{i=1}^3 l_i \quad L = 2.7\text{m}$$

Aby sporządzić podane wykresy oraz obliczyć pola przekroju poprzecznego dla poszczególnych odcinków pręta należy zdefiniować obszar funkcji x oraz krok obliczeń na długości pręta L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Definiujemy siły działające na pręt oraz odległości ich przyłożenia od punktu utwierdzenia A. Siły działające zgodnie z kierunkiem osi x oznaczamy z „+” a przeciwnie z „-”.

$$F_1 := -4200\text{N}$$

$$l_{F_1} := L$$

Definiujemy moduły Younga dla poszczególnych odcinków pręta:

$$E_1 := 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa} \quad E_2 := 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa} \quad E_3 := \frac{3}{4} E_1$$

Definiujemy średnice poszczególnych odcinków pręta i obliczamy ich pole przekroju poprzecznego:

$$d_1 := 0.030\text{m} \quad d_2 := \frac{1}{2} d_1$$

$$S_1 := \frac{\pi[(d_1)^2 - (d_2)^2]}{4} \quad S_2 := \frac{\pi(d_1)^2}{4} \quad S_3 := S_2$$

Definiujemy odległości zmiany przekrojów poprzecznych od punktu A:

$$l_{S_1} := l_1 \quad l_{S_2} := \sum_{i=1}^2 l_i \quad l_{S_3} := L$$

Po zdefiniowaniu poszczególnych wielkości występujących w zadaniu możemy przejść do obliczenia reakcji występującej w miejscu utwierdzenia pręta w punkcie A:

$$R_A := \sum_{i=1}^1 F_i \quad R_A = -4.2 \times 10^3 \text{N}$$

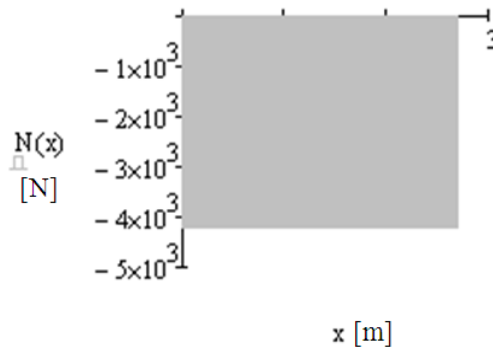
Następnie obliczamy siły normalne pochodzące od zewnętrznych sił skupionych działających na pręt:

$$N_F(x) := \sum_{i=1}^1 \left[F_i(x \geq l_{F_i}) \right]$$

Siły normalne N dla poszczególnych odcinków pręta wyznaczmy na podstawie równania:

$$N(x) := R_A - N_F(x)$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres sił normalnych:

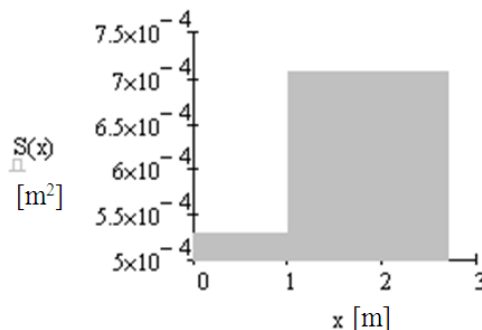


Rys. 2.15 Wykres rozkładu sił normalnych w pręcie

Aby obliczyć naprężenia normalne występujące w pręcie musimy dodatkowo obliczyć pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$S(x) := \sum_{i=1}^1 \left[S_i(x \leq l_{S_i}) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[S_i(l_{S_1} < x \leq l_{S_i}) \right] + \sum_{i=3}^3 \left[S_i(l_{S_2} < x \leq l_{S_i}) \right]$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres zmiany pola przekroju:

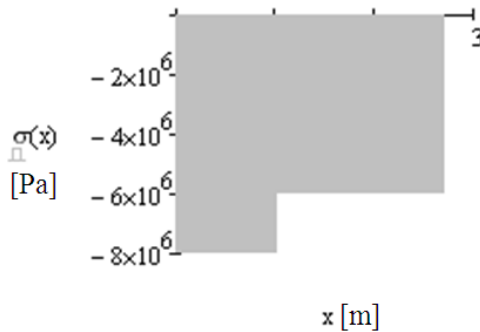


Rys. 2.16 Wykres zmiany pola przekroju pręta

Mając obliczone pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x możemy obliczyć rozkład naprężeń w zadeklarowanym obszarze funkcji x :

$$\sigma(x) := \frac{N(x)}{S(x)}$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres naprężeń normalnych:

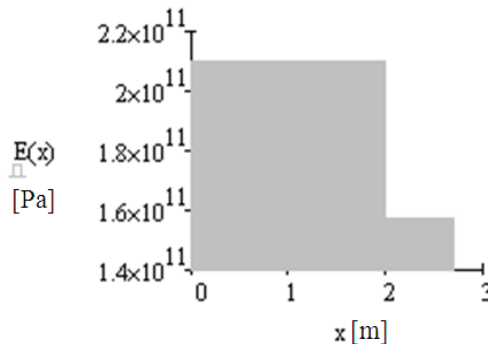


Rys. 2.17 Wykres zmiany naprężeń normalnych przekroju pręta

Aby obliczyć wydłużenie całkowite pręta musimy obliczyć moduły Younga zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$E(x) := \sum_{i=1}^1 \left[E_i(x \leq l_{S_i}) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[E_i(l_{S_1} < x \leq l_{S_i}) \right] + \sum_{i=3}^3 \left[E_i(l_{S_2} < x \leq l_{S_i}) \right]$$

Dla sprawdzenia sporządzimy wykres rozkładu modułu Younga:



Rys. 2.18 Wykres zmiany modułu Younga w przekroju pręta

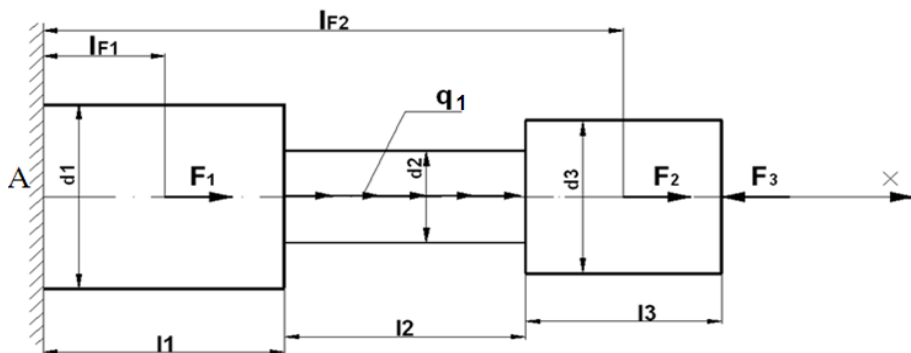
Wydłużenie całkowite obliczamy ze wzoru:

$$\Delta l_c := \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E(x)} dx$$

$$\Delta l_c = -9.279 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Zadanie 6

Dla pręta stalowego o skokowo zmieniającej się średnicy obciążonego jak na rys. 2.19 obliczyć wydłużenie całkowite oraz sporządzić wykres sił normalnych, naprężeń normalnych i zmiany pola przekroju poprzecznego. W zadaniu przyjąć następujące dane: $d_1=0,040 \text{ m}$, $d_2=1/2d_1$, $d_3=2/3d_1$, $l_1=1,2 \text{ m}$, $l_2=1,2 \text{ m}$, $l_3=0,8 \text{ m}$, $F_1=42000 \text{ N}$, $F_2=40000 \text{ N}$, $F_3=8000 \text{ N}$, $q_1=10000 \text{ N/m}$, $E_1=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_2=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_3=3/4E_1$ oraz $l_{F1}=0,6 \text{ m}$ i $l_{F2}=2,8 \text{ m}$.



Rys. 2.19 Schemat pręta rozciąganego (rysunek do zadania 6)

Rozwiązanie

Przystępując do rozwiązania zadania należy zdefiniować poszczególne obciążenia działające na dany pręt, punkty przyłożenia tych obciążeń, średnice pręta, zmianę przekroju poprzecznego, moduły Younga oraz długość poszczególnych odcinków pręta. Dodatkowo należy zdefiniować zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości pręta L .

Definiujemy poszczególne odcinki pręta i obliczamy jego długość całkowitą:

$$l_1 := 1.2 \text{ m} \quad l_2 := 1.2 \text{ m} \quad l_3 := 0.8 \text{ m}$$

$$L := \sum_{i=1}^3 l_i \quad L = 3.2 \text{ m}$$

Aby sporządzić podane wykresy oraz obliczyć pola przekroju poprzecznego i moduły Younga dla poszczególnych odcinków pręta należy zdefiniować zakres funkcji x oraz krok obliczeń na długości pręta L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Definiujemy siły działające na pręt oraz odległości ich przyłożenia od punktu utwierdzenia A. Siły działające zgodnie z kierunkiem osi x oznaczamy z „+” a przeciwnie z „-”:

- siły skupione:

$$F_1 := 42000 \text{ N}$$

$$F_2 := 40000 \text{ N}$$

$$F_3 := -8000 \text{ N}$$

$$l_{F_1} := \frac{1}{2} l_1$$

$$l_{F_2} := \sum_{i=1}^2 l_i + \frac{1}{2} l_3$$

$$l_{F_3} := L$$

- siły rozłożone:

$$q_1 := 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad l_{q_1} := l_2 \quad a_{q_1} := l_1$$

Definiujemy moduły Younga dla poszczególnych odcinków pręta:

$$E_1 := 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_2 := 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_3 := \frac{3}{4} E_1$$

Definiujemy średnice poszczególnych odcinków pręta i obliczamy ich pole przekroju poprzecznego:

$$d_1 := 0.040 \text{ m}$$

$$d_2 := \frac{1}{2} d_1$$

$$d_3 := \frac{2}{3} d_1$$

$$S_1 := \frac{\pi (d_1)^2}{4}$$

$$S_2 := \frac{\pi (d_2)^2}{4}$$

$$S_3 := \frac{\pi (d_3)^2}{4}$$

Definiujemy odległości zmiany przekrojów poprzecznych od punktu A:

$$l_{S_1} := l_1$$

$$l_{S_2} := \sum_{i=1}^2 l_i$$

$$l_{S_3} := L$$

Po zdefiniowaniu poszczególnych wielkości występujących w zadaniu możemy przejść do obliczenia reakcji występującej w miejscu utwierdzenia pręta w punkcie A:

$$R_A := \sum_{i=1}^3 F_i + \sum_{i=1}^1 (q_i \cdot l_{q_i})$$

$$R_A = 8.6 \times 10^4 \text{ N}$$

Następnie obliczamy siły normalne pochodzące od zewnętrznych sił skupionych i rozłożonych działających na pręt:

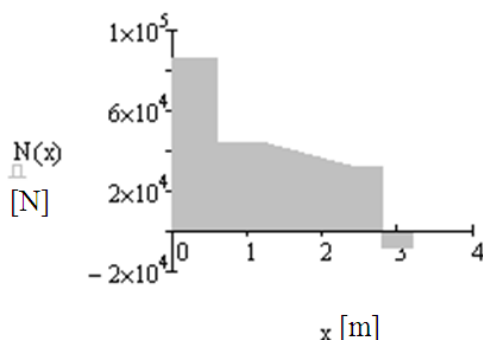
$$N_F(x) := \sum_{i=1}^3 \left[F_i \left(x \geq l_{F_i} \right) \right]$$

$$N_q(x) := \sum_{i=1}^1 \left[\left[q_i \left(x \geq a_{q_i} \right) \right] \text{if} \left[x \geq \left(a_{q_i} + l_{q_i} \right), l_{q_i}, x - a_{q_i} \right] \right]$$

Siły normalne N dla poszczególnych odcinków pręta wyznaczmy na podstawie równania:

$$N(x) := R_A - N_F(x) - N_q(x)$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres sił normalnych:

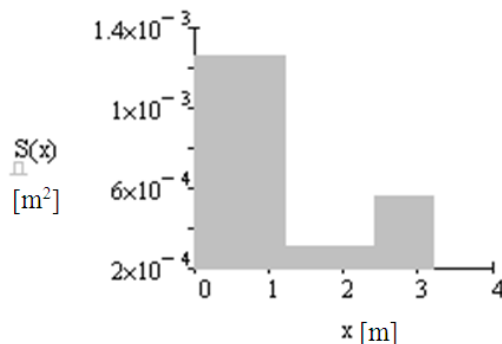


Rys. 2.20 Wykres rozkładu sił normalnych w pręcie

Aby obliczyć naprężenia normalne występujące w pręcie musimy dodatkowo obliczyć pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$S(x) := \sum_{i=1}^1 \left[S_i \left(x \leq l_{S_i} \right) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[S_i \left(l_{S_1} < x \leq l_{S_i} \right) \right] + \sum_{i=3}^3 \left[S_i \left(l_{S_2} < x \leq l_{S_i} \right) \right]$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres zmiany pola przekroju:

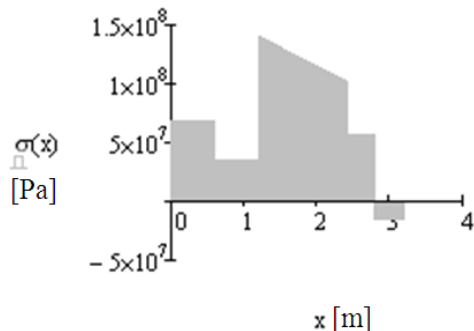


Rys. 2.21 Wykres zmiany pola przekroju pręta

Mając obliczone pole przekroju poprzecznego zmieniające się w zakresie funkcji x możemy obliczyć rozkład naprężeń w zadeklarowanym obszarze funkcji x :

$$\sigma(x) := \frac{N(x)}{S(x)}$$

Dla sprawdzenia możemy sporządzić wykres naprężeń normalnych:



Rys. 2.22 Wykres zmiany naprężeń normalnych przekroju pręta

Aby obliczyć wydłużenie całkowite pręta musimy obliczyć moduły Younga zmieniające się w zakresie funkcji x :

$$E(x) := \sum_{i=1}^1 \left[E_i \left(x \leq l_{S_i} \right) \right] + \sum_{i=2}^2 \left[E_i \left(l_{S_1} < x \leq l_{S_i} \right) \right] + \sum_{i=3}^3 \left[E_i \left(l_{S_2} < x \leq l_{S_i} \right) \right]$$

Wydłużenie całkowite obliczamy ze wzoru:

$$\Delta l_c := \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E(x)} dx$$

$$\Delta l_c = 1.092 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Zadanie 7

Do samodzielnego rozwiązania

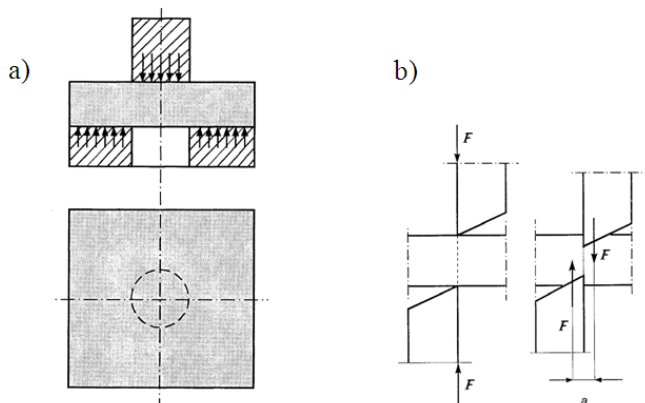


Obliczyć siłę działającą na linę odciągową masztu radiowego wiedząc, że moduł Younga wynosi $2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, całkowita długość liny jest równa 100 m a średnica liny wynosi $0,012 \text{ m}$. Lina podczas działania siły wydłużyła się o $0,005 \text{ m}$.

3. Ścinanie

3.1. Pojęcia podstawowe

W praktyce najczęściej spotykamy się ze ścinaniem technologicznym. Ścinanie elementu występuje w wyniku działania dwu sił równoległych o przeciwnych zwrotach, tworzących parę sił o bardzo małym ramieniu. Ścinanie techniczne występuje np. przy cięciu nożycami, wykrawaniu (rys. 3.1a, b), w połączeniach nitowych, sworzniowych, klinowych, śrubowych, spawanych itp.



Rys. 3.1 Schemat ścinania cylindrycznego (a) i działanie ostrzy podczas cięcia (b)

3.1.1. Obliczenia wytrzymałości na ścinanie

Rzeczywiste naprężenia styczne występujące w materiale przy ścinaniu wyraża się wzorem:

$$\tau = \frac{F}{S}$$

gdzie:

F – siła ścinająca,

S – pole przekroju elementu ścinanego.

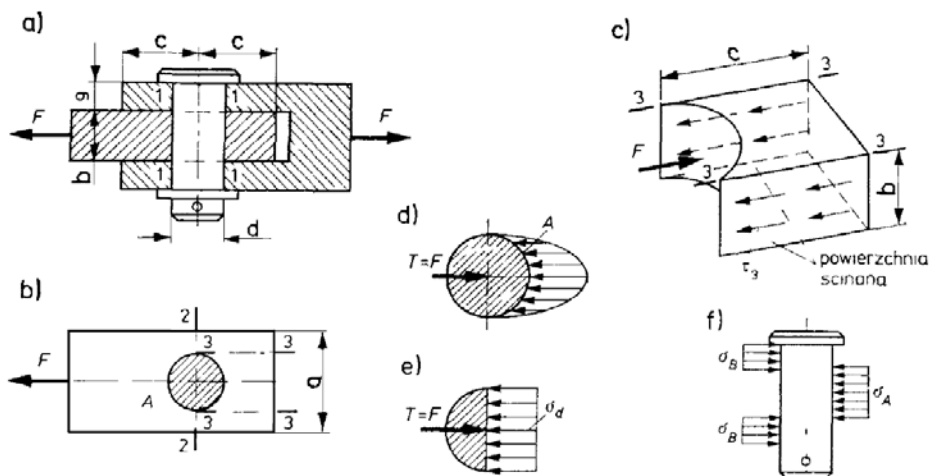
Naprężenia styczne muszą być mniejsze lub co najwyżej równe naprężeniom dopuszczalnym na ścinanie k_t :

$$\tau = \frac{F}{S} \leq k_t$$

3.2. Przykłady do wykonania

Zadanie 1

Obliczyć jaką największą siłą F można obciążyć połączenie sworzniowe pokazane na rys. 3.2a. Należy przyjąć naprężenia dopuszczalne dla sworznia i płaskowników $k_r=120 \text{ MPa}$, $k_t=80 \text{ MPa}$, $k_d=200 \text{ MPa}$ oraz $a=0,040 \text{ m}$, $b=0,010 \text{ m}$, $c=0,020 \text{ m}$, $d=0,015 \text{ m}$.



Rys. 3.2 Schemat połączenia sworzniowego (a), widok z góry sworznia i płaskownika (b, c), rozkład naprężeń (d, e) i naciski działające na sworzień (f)

Rozwiązanie

Na początku należy zdefiniować niezbędne zmienne potrzebne do rozwiązania powyższego zadania:

- naprężenia dopuszczalne dla sworznia i płaskowników:

$$k_r := 120 \text{ MPa}$$

$$k_t := 80 \text{ MPa}$$

$$k_d := 200 \text{ MPa}$$

- wymiary sworznia i płaskowników: a - szerokość płaskownika, b - grubość płaskownika, c - odległość od środka sworznia do końca płaskownika, d - średnica sworznia:

$$a := 0.040 \text{ m}$$

$$b := 0.010 \text{ m}$$

$$c := 0.020 \text{ m}$$

$$d := 0.015 \text{ m}$$

Pole przekroju poprzecznego sworznia obliczamy ze wzoru:

$$S_1 := 2 \cdot \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2$$

Na ścinanie pracuje zarówno sworzeń w przekroju 1-1 (rys. 3.2a) jak i płaskownik w przekroju 3-3 (rys. 3.2b). Siłę w przekroju 1-1 obliczamy z warunku wytrzymałości na ścinanie. Naprężenia styczne w tym przekroju mają postać:

$$\tau_1 = \frac{F}{S_1} \leq k_t$$

z czego siła wynosi:

$$F := S_1 \cdot k_t = 2.827 \times 10^4 \text{ N}$$

Naprężenia styczne w przekroju 3-3 mają postać:

$$\tau_3 = \frac{F}{2 \cdot c \cdot b} \leq k_t$$

więc dopuszczalna siła w tym przekroju wynosi:

$$F := 2 \cdot c \cdot b \cdot k_t = 3.2 \times 10^4 \text{ N}$$

Otwór na sworzeń nie może być wykonany zbyt blisko końca płaskownika gdyż może dojść do ścięcia płaskownika w dwóch przekrojach 3-3 (rys. 3.2 b, c).

Przy obciążeniu płaskownika siłą F powierzchnia sworznia A jest dociskana do jego końcowej części (rys. 3.2 b, c). Największe obciążenia występują w połowie średnicy sworznia (rys. 3.2 d). Dla uproszczenia przyjmujemy równomierny rozkład nacisków (rys. 3.2 e). Siłę w tym przekroju obliczamy korzystając ze wzoru na normalne naprężenia ściskające:

$$\sigma_A = \frac{F}{d \cdot b} \leq k_d$$

więc siła wynosi:

$$F := d \cdot b \cdot k_d = 3 \times 10^4 \text{ N}$$

W przekroju 2-2 występują normalne naprężenia rozciągające, które mają postać:

$$\sigma_2 = \frac{F}{(a - d) \cdot b} \leq k_T$$

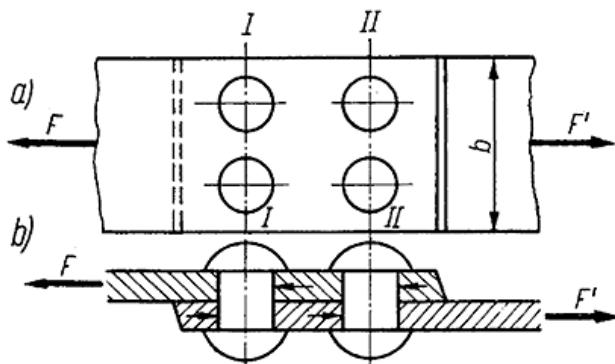
więc siła wynosi:

$$F := (a - d) \cdot b \cdot k_T = 3 \times 10^4 \text{ N}$$

Z obliczeń wynika, że największa siła obciążająca połączenie sworzniowe wynosi $F = S_1 \cdot k_t = 2,827 \times 10^4 \text{ N}$.

Zadanie 2

Dwa płaskowniki (rys. 3.3) połączone nitami o średnicy $d=0,020\text{ m}$ rozciągane są siłą $F=100000\text{ N}$. Grubość blach $g=0,010\text{ m}$, dopuszczalne naprężenie na ścinanie $k_t=100\text{ MPa}$, a na rozciąganie $k_r=160\text{ MPa}$. Określić liczbę nitów potrzebnych do tego połączenia oraz sprawdzić płaskownik o szerokości $b=0,160\text{ m}$ na rozciąganie.



Rys. 3.3 Płaskowniki połączone nitami obciążone siłą F

Rozwiązanie:

Jak już wiemy przystępując do rozwiązania powyższego zadania w programie Mathcad należy zdefiniować:

- średnicę nitów:

$$d := 0.020\text{m}$$

- grubość i szerokość płaskownika:

$$g := 0.010\text{m} \quad b := 0.160\text{m}$$

- siłę rozciągającą:

$$F := 100000\text{N}$$

- dopuszczalne naprężenia na ścinanie i dopuszczalny nacisk powierzchniowy:

$$k_t := 100\text{MPa}$$

$$k_r := 160\text{MPa}$$

Ze wzoru na naprężenia styczne przy ścinaniu:

$$\tau = \frac{F}{S} \leq k_t$$

wyznaczamy pole przekroju poprzecznego nitów:

$$S := \frac{F}{k_t}$$

Pole przekroju poprzecznego jednego nitu wyznaczamy ze wzoru:

$$S_1 := \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Łączną liczbę nitów określamy na podstawie wzoru:

$$n := \frac{S}{S_1} = 3.183$$

przyjmujemy 4 nity.

Połączenia nitowe sprawdzamy również na naciski powierzchniowe:

$$k_d := \frac{F}{n \cdot g \cdot d}$$

k_d – dopuszczalny nacisk powierzchniowy, przyjmujemy w przedziale $(2-2,5)k_r$.

$$k_d = 2.1k_r$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy oraz obliczamy n :

$$n := \frac{F}{g \cdot d \cdot k_d} = 1.488$$

przyjmujemy 2 nity.

Otrzymaliśmy $n=4$ nity i $n=2$ nity. Oczywiście przyjmujemy większą liczbę nitów czyli $n=4$.

Dla sprawdzenia obliczymy rzeczywiste naprężenia w przekroju niebezpiecznym płaskowników. W tym celu definiujemy średnicę otworu pod nit oraz pole przekroju niebezpiecznego:

$$d_1 := d + 1\text{mm}$$

$$S_n := g \cdot b - 2 \cdot d_1 \cdot g = 1.18 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

a więc naprężenia rzeczywiste wynoszą:

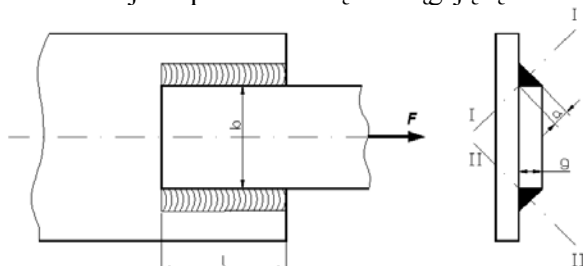
$$\sigma := \frac{F}{S_n} = 84.746 \times 10^6 \text{ Pa}$$

czyli są mniejsze od naprężeń dopuszczalnych:

$$\sigma = 8.475 \times 10^7 \text{ Pa} < k_r = 160 \text{ MPa}$$

Zadanie 3

Płaskownik o grubości $0,010\text{ m}$ i szerokości $0,040\text{ m}$ wykonany ze stali S235JR przyspawano do płyty stalowej za pomocą dwóch spoin (rys. 3.4). Obliczyć niezbędną długość l każdej ze spoin oraz siłę rozciągającą F .



Rys. 3.4 Płaskownik przyspawany do płyty stalowej i rozciągany siłą F

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania w programie Mathcad należy zdefiniować:

- szerokość b i grubość g płaskownika:

$$b := 0.040\text{m} \quad g := 0.010\text{m}$$

- dopuszczalne naprężenia na rozciąganie stali S235JR:

$$k_T := 125\text{MPa}$$

Pole przekroju poprzecznego płaskownika wyznaczamy ze wzoru:

$$S := b \cdot g = 4 \times 10^{-4} \text{m}^2$$

Ze wzoru na naprężenia normalne przy rozciąganiu:

$$\sigma = \frac{F}{S} \leq k_r$$

wyznaczamy maksymalną siłę rozciągającą płaskownik:

$$F := S \cdot k_T$$

$$F = 5 \times 10^4 \text{N}$$

Przy zbyt dużej sile rozciągającej i niedostatecznych wymiarach spoiny połączenie to ulegnie zniszczeniu w niebezpiecznych miejscach w przekroju I-I i przekroju II-II. Pole przekroju poprzecznego spoiny pachwinowej obliczamy ze wzoru:

$$S_{sp} := a \cdot l$$

gdzie:

l – długość spoiny,

a – najmniejsza szerokość spoiny, która w przypadku spoiny pachwinowej wynosi:

$$a := \frac{\sqrt{2}}{2} g = 7.071 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Całkowitą długość spoin obliczamy z warunku, że średnie naprężenie styczne powinno być mniejsze od naprężenia dopuszczalnego:

$$\tau = \frac{F}{S_{sp}} \leq k_t$$

gdzie:

k_t – dopuszczalne naprężenie na ścinanie dla spoiny pachwinowej.

$$k_t := 0.65 k_T$$

stąd:

$$\tau := \frac{F}{S_{sp}} = \frac{F}{2 \cdot S_{sp}} = \frac{F}{2 \cdot a \cdot l} \leq k_t$$

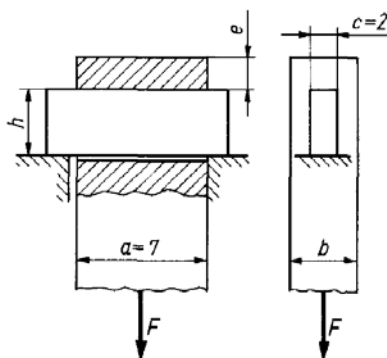
$$l := \frac{F}{2 \cdot a \cdot k_t}$$

$$l = 0.044 \text{ m}$$

Zadanie 4

Do samodzielnego rozwiązania

Dobrać wymiary b , h i e dla układu przedstawionego na rysunku 3.5 aby połączenie mogło przenieść siłę $F=35000 \text{ N}$, jeżeli $k_r=150 \text{ MPa}$, $k_t=100 \text{ MPa}$ oraz $a=0,070 \text{ m}$, $c=0,020 \text{ m}$.

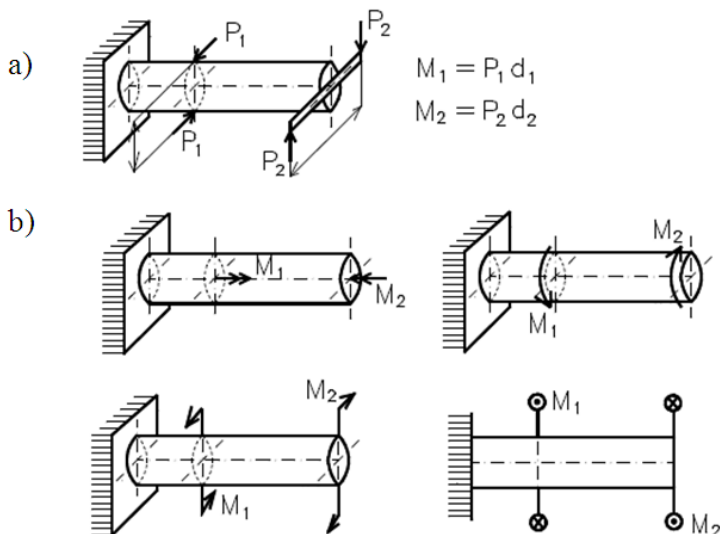


Rys. 3.5 Ilustracja do zadania 4

4. Skręcanie prętów

4.1. Pojęcia podstawowe

Skręcanie pręta występuje w wyniku przyłożenia pary sił lub momentu siły (sił). Moment ten powoduje obrót względem siebie równoległych przekrojów pręta. Na poniższym rysunku przedstawiono pręt obciążony dwiema parami sił (rys. 4.1a) oraz różne sposoby przedstawiania momentów skręcających pręt (rys. 4.1b).



Rys. 4.1 Pręt obciążony dwiema parami sił (a) i różne metody zaznaczania obciążenia (b)

4.1.1. Naprężenia przy skręcaniu

Przy obciążeniu momentem skręcającym w przekroju poprzecznym prostopadłym do osi pręta występują tylko naprężenia styczne (rys. 4.2). Dla dowolnego promienia naprężenia styczne obliczamy:

$$\tau_p = \frac{M_s \rho}{J_0}$$

gdzie:

τ_p – naprężenia styczne przy skręcaniu w punktach odległych o ρ od środka,

M_s – moment skręcający,

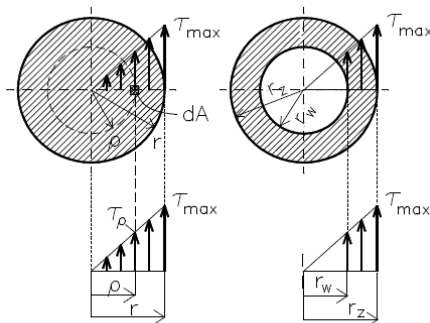
J_0 – biegunowy moment bezwładności pola przekroju.

Naprężenia styczne w danym przekroju nie są jednakowe. Zmieniają się proporcjonalnie do odległości od środka przekroju (naprężenia w środku są równe zero). Największą wartość osiągają na zewnętrznej powierzchni pręta ($\rho=r$):

$$\tau_{\max} = \tau_{\rho=r} = \frac{M_s}{J_0} \cdot r = \frac{M_s}{W_0}$$

gdzie:

W_0 – wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie.



Rys. 4.2 Rozkłady naprężeń stycznych przy skręcaniu dla wału pełnego i drążonego

Wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie W_0 jest to iloraz biegunowego momentu bezwładności i odległości skrajnego włókna od środka ciężkości przekroju:

$$W_0 = \frac{J_0}{r} = \frac{J_0}{\frac{1}{2}d}$$

Ponieważ dla wału pełnego biegunowy moment bezwładności pola przekroju wynosi $J_0 = \frac{\pi d^4}{32}$ to wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie jest równy:

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16}$$

Dla wału drążonego $J_0 = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{32}$ to wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie wynosi:

$$W_0 = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{16d_z}$$

4.1.2. Odkształcenia pręta skręcanego

Całkowity kąt skręcania wału jest proporcjonalny do momentu skręcającego i długości pręta, a odwrotnie proporcjonalny do modułu sprężystości postaciowej i biegunowego momentu bezwładności przekroju.

$$\varphi = \frac{M_s L}{GJ_0} [\text{rad}]$$

$$\varphi^\circ = \frac{M_s L}{GJ_0} \frac{180}{\pi} [^\circ]$$

Iloczyn GJ_0 nazywamy sztywnością przekroju na skręcanie (por. EA przy rozciąganiu).

4.1.3. Obliczanie prętów skręcanych

Obliczenia wytrzymałościowe muszą uwzględniać dwa warunki – warunek wytrzymałości i sztywności.

Warunek wytrzymałościowy na skręcanie ma postać:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s$$

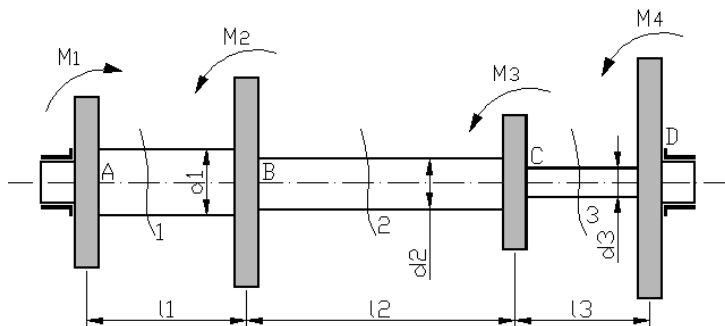
Warunek sztywności wału skręcanego sprowadza się do tego, że kąt skręcania wału musi być mniejszy od dopuszczalnego:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot l}{G \cdot J_0} \leq \varphi_{\text{dop}}$$

4.2. Przykłady do wykonania

Zadanie 1

Na stalowym wale zamontowano cztery koła zębate, jak pokazuje rys. 4.3 Koło A odbiera moment skręcający $M_1=1100\text{Nm}$, a pozostałe koła przekazują momenty: $M_2=300\text{ Nm}$, $M_3=500\text{ Nm}$ i $M_4=300\text{ Nm}$. Wykonać wykresy przebiegu wewnętrznych momentów skręcających dla wału oraz wyznaczyć wymagane średnice w poszczególnych częściach wału dla: $l_1=0,110\text{ m}$, $l_2=0,190\text{ m}$, $l_3=0,090\text{ m}$ oraz dopuszczalnych naprężeń skręcających $\tau_s=k_s=36\text{ MPa}$, $G=80000\text{ MPa}$. Obliczyć całkowity kąt skręcenia φ dla wału.



Rys. 4.3 Wał obciążony czterema momentami skręcającymi

Rozwiązanie:

Zadanie rozpoczynamy od zdefiniowania poszczególnych zmiennych niezbędnych do rozwiązania powyższego zadania:

- momenty skręcające dla wału:

$$M_1 := 1100\text{N}\cdot\text{m} \quad M_2 := 300\text{N}\cdot\text{m} \quad M_3 := 500\text{N}\cdot\text{m} \quad M_4 := 300\text{N}\cdot\text{m}$$

- odległości pomiędzy działającymi momentami oraz całą długość wału:

$$l_1 := 0.110\text{m} \quad l_2 := 0.190\text{m} \quad l_3 := 0.090\text{m}$$

$$L := \sum_{i=1}^3 l_i = 0.39\text{m}$$

- dopuszczalne naprężenia skręcające i moduł sprężystości poprzecznej:

$$\tau_s := 36\text{MPa} \quad G := 80000\text{MPa}$$

- zmienną zakresową i , określającą zakres obliczeń:

$$i := 1..3$$

- obszar funkcji oraz krok obliczeń na długości wału L :

$$x := 0..L, 0.001..L$$

Po zdefiniowaniu powyższych zmiennych możemy przystąpić do wyznaczenia wymaganych średnic w poszczególnych częściach wału. W tym celu skorzystamy z warunku wytrzymałości na skręcanie, który ma postać:

$$\tau = \frac{M_s}{W_0} \leq \tau_s$$

ponieważ wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie ma postać:

$$W_0 := \pi \frac{d^3}{16}$$

to otrzymujemy:

$$\frac{16M_{s_i}}{\pi d_i^3} \leq \tau_s$$

z powyższego wzoru wyznaczamy d :

$$d_i \geq \sqrt[3]{16 \frac{M_{s_i}}{\pi \tau_s}}$$

dodatkowo należy zdefiniować momenty skręcające M_s w poszczególnych przedziałach działające na wał od punktu A:

$$M_{s_1} := M_1 \quad M_{s_2} := M_1 - M_2 \quad M_{s_3} := M_1 - M_2 - M_3$$

oraz odległości zmiany tych momentów od punktu A:

$$l_{M.s_1} := 0.110\text{m} \quad l_{M.s_2} := 0.300\text{m} \quad l_{M.s_3} := 0.390\text{m}$$

możemy powrócić do wzoru na d i obliczyć średnice poszczególnych przedziałów wału:

$$d_1 := \sqrt[3]{16 \frac{M_{s_1}}{\pi \tau_s}} = 0.054\text{m}$$

$$d_2 := \sqrt[3]{16 \frac{M_{s_2}}{\pi \tau_s}} = 0.048\text{m}$$

$$d_3 := \sqrt[3]{16 \frac{M_{s_3}}{\pi \tau_s}} = 0.035\text{m}$$

Do sporządzenia wykresu przebiegu kąta skręcania φ wału należy określić biegunowy moment bezwładności przekroju w poszczególnych przedziałach. Obliczamy go ze wzoru:

$$J_{0_i} := \pi \frac{(d_i)^4}{32}$$

$$J_{0_1} = \frac{\frac{821.764 \cdot 10^{-9}}{537.457 \cdot 10^{-9}}}{145.34 \cdot 10^{-9}} \text{ m}^4$$

Kąt skręcania wału w poszczególnych przedziałach obliczamy ze wzoru:

$$\phi_i := \frac{M_{s_i} \cdot l_i}{G \cdot J_{0_1}}$$

$$\phi_i = \frac{\frac{1.841 \cdot 10^{-3}}{3.535 \cdot 10^{-3}}}{2.322 \cdot 10^{-3}} \text{ rad}$$

Całkowity kąt skręcania wału obliczamy:

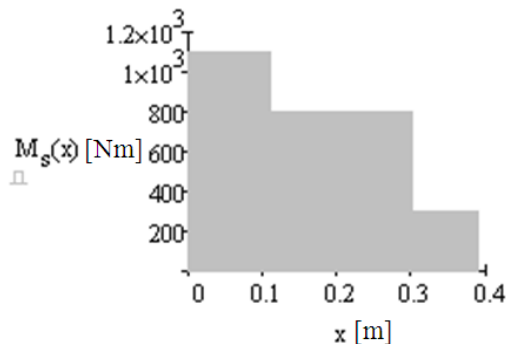
$$\phi_c := \sum_{i=1}^3 \phi_i$$

$$\phi_c = 7.698 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

W celu sporządzenia wykresu przebiegu wewnętrznych momentów skręcających dla wału wyznaczamy momenty skręcające dla zdefiniowanego zakresu funkcji $x \in <0;L>$:

$$M_s(x) := \sum_{i=1}^1 M_{s_1}(x < l_{M.s_1}) + \sum_{i=2}^2 [M_{s_2}(l_{M.s_1} < x \leq l_{M.s_2})] + \sum_{i=3}^3 [M_{s_3}(l_{M.s_2} < x \leq L)]$$

Rozkład funkcji momentów skręcających $M_s(x)$ na długości wału ma postać (rys. 4.4).



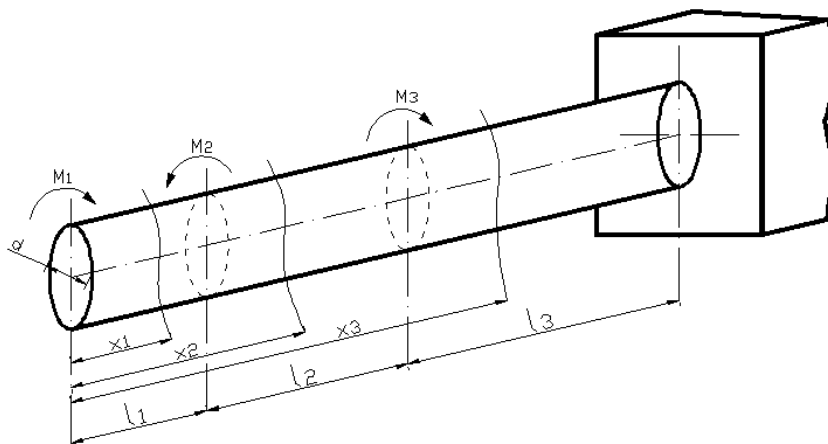
Rys. 4.4 Rozkład momentów skręcających $M_s(x)$ na długości pręta

Zadanie 2

Dla pręta stalowego obciążonego jak na rys. 4.5 obliczyć i sporządzić wykres:

- momentu skręcającego
- maksymalnych naprężeń

przyjmując $d=0,110\text{ m}$, $M_1=7000\text{ Nm}$, $M_2=16000\text{ Nm}$, $M_3=15000\text{ Nm}$, $l_1=0,3\text{ m}$, $l_2=0,4\text{ m}$, $l_3=0,7\text{ m}$, $G=80000\text{ MPa}$.



Rys.4.5 Pręt utwierdzony jednym końcem i obciążony momentami skręcającymi

Rozwiązanie:

Podobnie jak w zadaniu 1 przystępując do rozwiązania zadania należy zdefiniować:

- momenty skręcające dla pręta:

$$M_1 := 7000\text{ N}\cdot\text{m} \quad M_2 := 16000\text{ N}\cdot\text{m} \quad M_3 := 15000\text{ N}\cdot\text{m}$$

- odległości pomiędzy działającymi momentami oraz całą długość pręta:

$$l_1 := 0.3\text{ m} \quad l_2 := 0.4\text{ m} \quad l_3 := 0.7\text{ m}$$

$$L := \sum_{i=1}^3 l_i = 1.4\text{ m}$$

- średnice pręta i moduł sprężystości poprzecznej:

$$d := 0.110\text{ m} \quad G := 80000\text{ MPa}$$

- zmienną zakresową i , określającą zakres obliczeń:

$$i := 1..3$$

- zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości wału L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

dotatkowo należy zdefiniować momenty skręcające M_s w poszczególnych przedziałach działające na pręt:

$$0 \leq x_1 \leq l_1$$

$$M_{s_1} := M_1$$

$$l_1 \leq x_2 \leq l_1 + l_2$$

$$M_{s_2} := M_1 - M_2$$

$$l_1 + l_2 \leq x_2 \leq l_1 + l_2 + l_3$$

$$M_{s_3} := M_1 - M_2 + M_3$$

oraz odległości zmiany tych momentów:

$$l_{M.s_1} := 0.3\text{m}$$

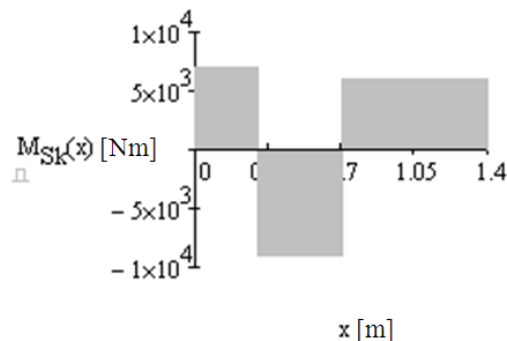
$$l_{M.s_2} := 0.7\text{m}$$

$$l_{M.s_3} := 1.4\text{m}$$

W celu sporządzenia wykresu przebiegu momentów skręcających dla pręta wyznaczamy momenty skręcające dla zdefiniowanego zakresu funkcji $x \in \langle 0; L \rangle$:

$$M_{Sk}(x) := \sum_{i=1}^1 M_{s_1}(x < l_{M.s_1}) + \sum_{i=2}^2 [M_{s_2}(l_{M.s_1} < x \leq l_{M.s_2})] + \sum_{i=3}^3 [M_{s_3}(l_{M.s_2} < x \leq L)]$$

W oparciu o powyższe równanie sporządzamy rozkład funkcji momentów skręcających $M_{Sk}(x)$ na całej długości pręta (rys. 4.6).



Rys. 4.6 Rozkład momentów skręcających $M_{Sk}(x)$ na całej długości pręta

Aby wyznaczyć naprężenia w pręcie należy zdefiniować wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie:

$$W_0 := \pi \frac{d^3}{16}$$

Maksymalne naprężenia styczne wyznaczamy ze wzoru:

$$\tau := \frac{M_s}{W_0}$$

W poszczególnych przedziałach wynoszą one:

$$\tau_1 := \frac{M_{s_1}}{W_0} = 2.678 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\tau_2 := \frac{M_{s_2}}{W_0} = -3.444 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\tau_3 := \frac{M_{s_3}}{W_0} = 2.296 \times 10^7 \text{ Pa}$$

Do sporządzenia wykresu maksymalnych naprężeń stycznych $\tau(x)$ na długości pręta należy określić:

- biegunowy moment bezwładności przekroju pręta:

$$J_0 := \pi \frac{(d)^4}{32} \quad J_0 = 14.3738 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

w poszczególnych przedziałach $J_w(x)$ ma postać (na całej długości pręta biegunowy moment bezwładności ma stałą wartość):

$$J_w(x) := \sum_{i=1}^1 J_0(x < l_{M.s_1}) + \sum_{i=2}^2 [J_0(l_{M.s_1} < x \leq l_{M.s_2})] + \sum_{i=3}^3 [J_0(l_{M.s_2} < x \leq L)]$$

- średnicę zewnętrzną pręta $d_z(x)$ w poszczególnych przedziałach dla zdefiniowanego zakresu funkcji $x \in <0;L>$ (dla danego pręta średnica w poszczególnych przedziałach ma stałą wartość):

$$d_z(x) := \sum_{i=1}^1 d(x < l_{M.s_1}) + \sum_{i=2}^2 [d(l_{M.s_1} < x \leq l_{M.s_2})] + \sum_{i=3}^3 [d(l_{M.s_2} < x \leq L)]$$

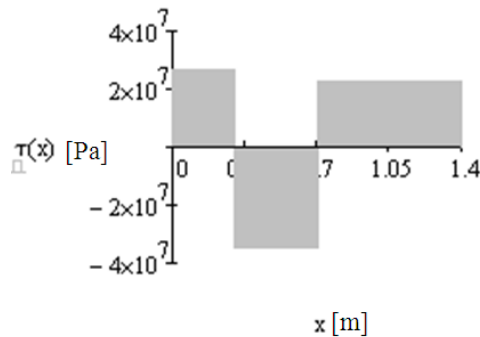
- wskaźnik wytrzymałości na skręcanie $W_0(x)$:

$$W(x) := \frac{2 \cdot J_w(x)}{d_z(x)}$$

Ostatecznie naprężenia styczne $\tau(x)$ mają postać:

$$\tau(x) := \frac{M_{Sk}(x)}{W(x)}$$

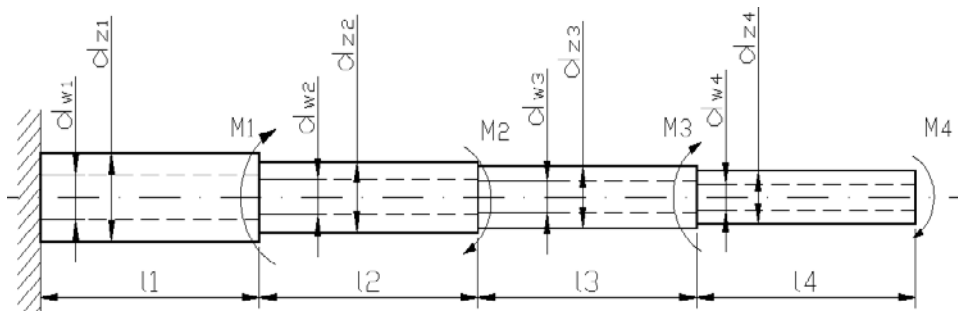
Wykres maksymalnych naprężeń stycznych $\tau(x)$ został przedstawiony na rys. 4.7



Rys. 4.7 Rozkład maksymalnych naprężeń stycznych $\tau(x)$ na długości pręta

Zadanie 3

Pręt utwierdzony jednym końcem jest obciążany momentami $M_1=5000 \text{ Nm}$, $M_2=10000 \text{ Nm}$, $M_3=15000 \text{ Nm}$, $M_4=11000 \text{ Nm}$ w sposób przedstawiony jak na rysunku 4.8. Długość odcinków pręta wynosi $l_1=l_2=l_3=l_4=0,5 \text{ m}$. Średnice zewnętrzne wynoszą $d_{z1}=0,100 \text{ m}$, $d_{z2}=0,080 \text{ m}$, $d_{z3}=0,070 \text{ m}$, $d_{z4}=0,060 \text{ m}$. Średnice wewnętrzne są równe $d_{w1}=0,050 \text{ m}$, $d_{w2}=0,040 \text{ m}$, $d_{w3}=0,035 \text{ m}$, $d_{w4}=0,030 \text{ m}$. Dla pręta należy obliczyć wartości naprężeń stycznych, w każdym z przedziałów oraz sporządzić wykres momentu skręcającego i maksymalnych naprężeń, przyjmując $G=80000 \text{ MPa}$.



Rys.4.8 Pręt utwierdzony jednym końcem i obciążony momentami skręcającymi

Rozwiązanie:

Podobnie jak w zadaniu 1 i 2 przystępując do rozwiązania należy zdefiniować:

- momenty skręcające dla pręta:

$$M_1 := 5000 \text{ N} \cdot \text{m} \quad M_2 := 10000 \text{ N} \cdot \text{m} \quad M_3 := 15000 \text{ N} \cdot \text{m} \quad M_4 := 11000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- odległości pomiędzy działającymi momentami oraz całą długość pręta:

$$l_1 := 0.5\text{m} \quad l_2 := 0.5\text{m} \quad l_3 := 0.5\text{m} \quad l_4 := 0.5\text{m}$$

$$L := \sum_{i=1}^4 l_i = 2\text{m}$$

- średnice zewnętrzne i wewnętrzne pręta:

$$d_{z1} := 0.100\text{m} \quad d_{z2} := 0.080\text{m} \quad d_{z3} := 0.070\text{m} \quad d_{z4} := 0.060\text{m}$$

$$d_{w1} := 0.050\text{m} \quad d_{w2} := 0.040\text{m} \quad d_{w3} := 0.035\text{m} \quad d_{w4} := 0.030\text{m}$$

- moduł sprężystości poprzecznej:

$$G := 80000\text{MPa}$$

- zmienną zakresową i , określającą zakres obliczeń:

$$i := 1 \dots 4$$

- zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości pręta L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Przystępując do rozwiązywania zadania należy obliczyć moment utwierdzenia pręta:

$$M_u := M_1 - M_2 + M_3 - M_4$$

$$M_u = -1 \times 10^3$$

dodatkowo należy zdefiniować momenty skręcające M_s w poszczególnych przedziałach działające na pręt:

$$0 \leq x_1 \leq l_1$$

$$M_{s1} := M_u$$

$$l_1 \leq x_2 \leq l_1 + l_2$$

$$M_{s2} := M_u + M_1$$

$$l_1 + l_2 \leq x_2 \leq l_1 + l_2 + l_3$$

$$M_{s3} := M_u + M_1 - M_2$$

$$l_1 + l_2 + l_3 \leq x_2 \leq L$$

$$M_{s4} := M_u + M_1 - M_2 + M_3$$

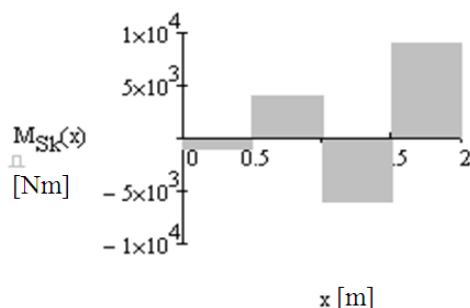
oraz odległości zmiany tych momentów:

$$l_{M.s_1} := l_1 \quad l_{M.s_2} := \sum_{i=1}^2 l_i \quad l_{M.s_3} := \sum_{i=1}^3 l_i \quad l_{M.s_4} := \sum_{i=1}^4 l_i$$

W celu sporządzenia wykresu przebiegu momentów skręcających dla pręta wyznaczamy momenty skręcające dla zdefiniowanego zakresu funkcji $x \in \langle 0; L \rangle$:

$$M_{Sk}(x) := \sum_{i=1}^1 M_{s_i} [x < l_{M.s_1}] + \sum_{i=2}^2 [M_{s_2} l_{M.s_1} < x \leq l_{M.s_2}] + \sum_{i=3}^3 [M_{s_3} l_{M.s_2} < x \leq l_{M.s_3}] + \sum_{i=4}^4 [M_{s_4} l_{M.s_3} < x \leq L]$$

W oparciu o powyższe równanie sporządzamy rozkład funkcji momentów skręcających $M_{Sk}(x)$ na całej długości pręta (rys. 4.9).



Rys. 4.9 Rozkład momentów skręcających $M_{Sk}(x)$ na całej długości pręta

Aby wyznaczyć naprężenia w przęcie należy zdefiniować wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie:

$$W_{0_i} := \pi \frac{[d_{z_i}^4 - (d_{w_i})^4]}{16 d_{z_i}}$$

W poszczególnych przedziałach wynoszą one:

$$W_{0_i} = \begin{array}{|c|} \hline 0.184 \\ \hline 0.094 \\ \hline 0.063 \\ \hline 0.04 \\ \hline \end{array} \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Maksymalne naprężenia styczne wyznaczamy ze wzoru:

$$\tau_i := \frac{M_{s_i}}{W_{0_i}}$$

W poszczególnych przedziałach wynoszą one:

$$\tau_i = \begin{array}{|c|} \hline -5.432 \cdot 10^6 \\ \hline 4.244 \cdot 10^7 \\ \hline -9.503 \cdot 10^7 \\ \hline 2.264 \cdot 10^8 \\ \hline \end{array} \text{ Pa}$$

Do sporządzenia wykresu maksymalnych naprężeń stycznych $\tau(x)$ na długości pręta należy określić:

- biegunowy moment bezwładności przekroju pręta:

$$J_{0_i} := \pi \frac{(d_{z_i})^4 - (d_{w_i})^4}{32}$$

$$J_{0_i} = \begin{array}{|c|} \hline 9.2039 \cdot 10^{-6} \\ \hline 3.7699 \cdot 10^{-6} \\ \hline 2.2099 \cdot 10^{-6} \\ \hline 1.1928 \cdot 10^{-6} \\ \hline \end{array} \text{ m}^4$$

w poszczególnych przedziałach $J_w(x)$ ma postać (dla danego zadania biegunowy moment bezwładności przekroju dla całego pręta ma stałą wartość):

$$J_w(x) := \sum_{i=1}^1 J_{0_i} [x \leq l_{M.s_1}] + \sum_{i=2}^2 [J_{0_i} | l_{M.s_1} < x \leq l_{M.s_2}] + \sum_{i=3}^3 [J_{0_i} | l_{M.s_2} < x \leq l_{M.s_3}] + \sum_{i=4}^4 [J_{0_i} | l_{M.s_3} < x \leq L]$$

- średnicę zewnętrzną $d_z(x)$ pręta w poszczególnych przedziałach dla zdefiniowanego zakresu funkcji $x \in \langle 0; L \rangle$:

$$d_z(x) := \sum_{i=1}^1 d_{z_i} [x \leq l_{M.s_1}] + \sum_{i=2}^2 [d_{z_i} | l_{M.s_1} < x \leq l_{M.s_2}] + \sum_{i=3}^3 [d_{z_i} | l_{M.s_2} < x \leq l_{M.s_3}] + \sum_{i=4}^4 [d_{z_i} | l_{M.s_3} < x \leq L]$$

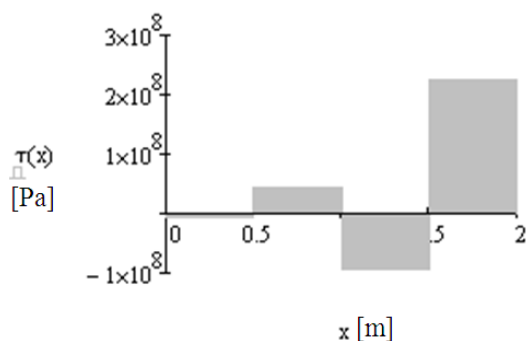
- wskaźnik wytrzymałości na skręcanie $W_0(x)$:

$$W(x) := \frac{2 \cdot J_w(x)}{d_z(x)}$$

Ostatecznie naprężenia styczne $\tau(x)$ mają postać:

$$\tau(x) := \frac{M_{Sk}(x)}{W(x)}$$

Wykres maksymalnych naprężeń stycznych $\tau(x)$ został przedstawiony na rys. 4.10.

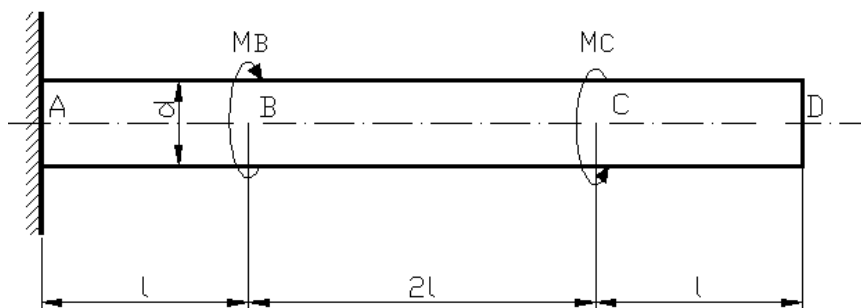


Rys. 4.10 Rozkład maksymalnych naprężeń stycznych $\tau(x)$ na długości pręta

Zadanie 4

Do samodzielnego rozwiązania

Stalowy pręt o przekroju kołowym przedstawiony na rys. 4.11 jest obciążony parami sił o momentach $M_B=6000 \text{ Nm}$ i $M_C=1500 \text{ Nm}$. Średnica pręta wynosi $d=0,060 \text{ m}$. Przyjmując długość jednostkowego odcinka pręta $l=0,2 \text{ m}$, wykonać wykres momentów skręcających poszczególnych przekrojów oraz wyznaczyć największe naprężenia styczne τ_{max} , przyjmując $G=80000 \text{ MPa}$.



Rys. 4.11 Pręt obciążony momentami skręcającymi

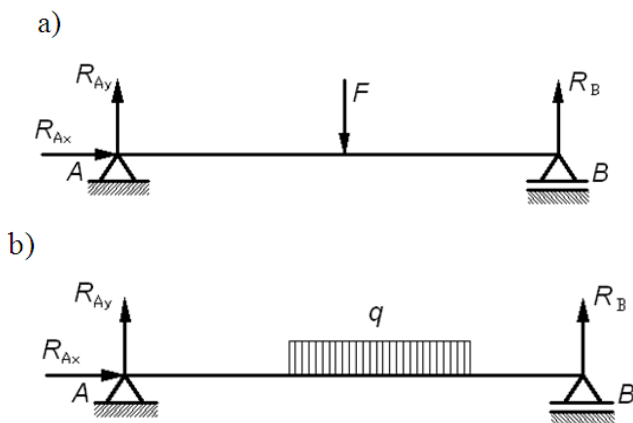
5. Zginanie prętów prostych

5.1. Pojęcia podstawowe

Pręty zginane będziemy nazywać belkami. Belka jest to element konstrukcyjny, obciążony siłami lub momentami zewnętrznymi, których wektory przecinają oś pręta pod określonym kątem lub kątem prostym. Ze zjawiskiem zginania spotykamy się zarówno w życiu codziennym jak i w technice.

Belka może być obciążona w postaci sił skupionych lub obciążenia ciągłego:

- siła skupiona (F [N]) jest to obciążenie przyłożone w punkcie lub rozłożone na bardzo małym odcinku (rys. 5.1 a),
- obciążenie ciągłe (q [N/m]) rozłożone w sposób ciągły na całej długości belki lub na danym odcinku belki (rys. 5.1 b). Przykładem może być półka, na której ułożono równomiernie książki.

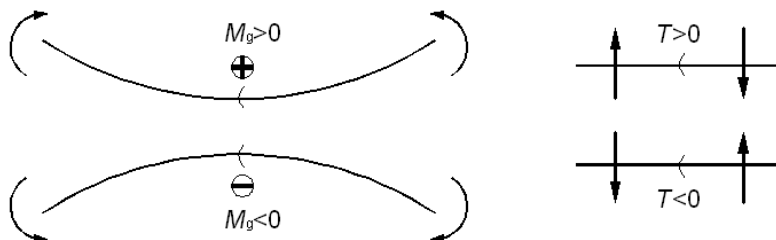


Rys. 5.1 Belka obciążona siłą skupioną (a) i rozłożoną (b)

Do wielkości charakteryzujących zginanie możemy zaliczyć następujące czynniki wewnętrzne:

- Moment zginający (M_g).
Momentem zginającym w dowolnym przekroju belki nazywamy sumę algebraiczną momentów wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych) działających po jednej stronie rozważanego przekroju i obliczonych względem środka ciężkości przekroju.
- Siła poprzeczna – tnąca (T).
Siłą poprzeczną – tnącą w dowolnym przekroju belki nazywamy sumę algebraiczną wszystkich sił zewnętrznych działających prostopadle do osi belki po jednej stronie rozpatrywanego przekroju.

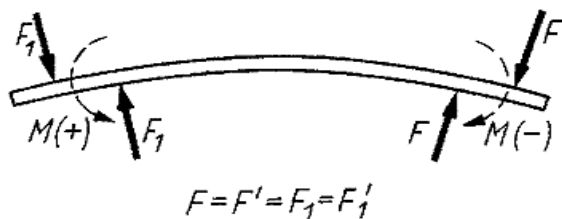
Przy rozwiązywaniu zadań korzystając z powyższych definicji należy pamiętać, że dowolność wyboru „jednej ze stron” przekroju pozwala wybrać lewą lub prawą stronę przekroju. Najczęściej przyjmujemy, że moment zginający ma wartość dodatnią jeżeli usiłuje wygiąć belkę wypukłością w dół a siła poprzeczna ma wartość dodatnią jeżeli usiłuje przesunąć lewą stronę belki w górę a prawą w dół. Oznaczenia dotyczące znaków sił tnących i momentów gnących podano na rysunku 5.2.



Rys. 5.2 Określenie dodatnich i ujemnych wartości momentów zginających M_g i sił tnących T

5.1.1. Czyste zginanie

Czyste zginanie belki zachodzi, gdy na całej długości lub na pewnym jej odcinku wartość wektora momentu gnącego $M_g(x) = \text{const}$ oraz wartość siły tnącej $T(x) = 0$ (w belce nie działają siły poprzeczne) rys. 5.3.



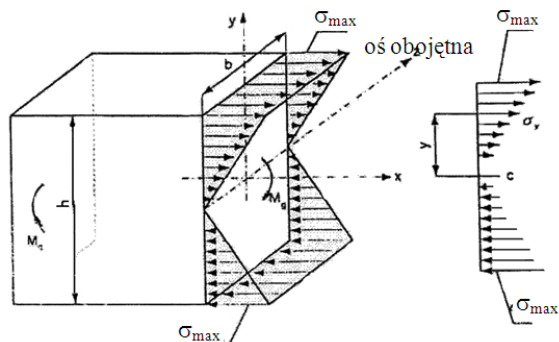
Rys. 5.3 Obciążenie belki przy czystym zginaniu

W celu określenia zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami przy czystym zginaniu przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

- obciążenia działają w płaszczyźnie symetrii belki zwanej płaszczyzną zginania,

- płaskie przekroje poprzeczne prostopadłe do osi belki przed odkształceniem pozostają płaskimi i prostopadłymi do osi belki po jej odkształceniu; jest to tzw. hipoteza płaskich przekrojów,
- warstwy podłużne belki nie naciskają na siebie wzajemnie czyli włókna po stronie wklęsłej są tylko ściskane a włókna po stronie wypukłej są tylko rozciągane.

Przy czystym zginaniu w przekrojach poprzecznych belki nie ma naprężeń stycznych. Występują jedynie naprężenia normalne (rys. 5.4).



Rys. 5.4 Rozkład naprężeń normalnych w belce przy czystym zginaniu

Największe naprężenie normalne występuje we włóknach najdalej położonych od osi obojętnej przekroju poprzecznego:

$$\sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{I_z}$$

gdzie:

M – moment gnący,

y_{max} – odległość najdalej położonych włókien od osi obojętnej,

I_z – moment bezwładności względem osi obojętnej.

Wskaźnikiem wytrzymałości przekroju na zginanie względem osi obojętnej nazywamy stosunek momentu bezwładności tego przekroju względem osi obojętnej do odległości włókien skrajnych od tej osi:

$$W = \frac{I_z}{y}$$

gdzie:

I_z – moment bezwładności względem osi obojętnej,

y – odległość włókien skrajnych od tej osi.

Obliczenia wytrzymałościowe belek zginanych sprowadzają się do określenia największego naprężenia normalnego, występującego w przekroju poprzecznym belki. Warunek wytrzymałościowy przedstawia się następująco

$$\sigma_g = \frac{M_{\max}}{W} \leq k_g$$

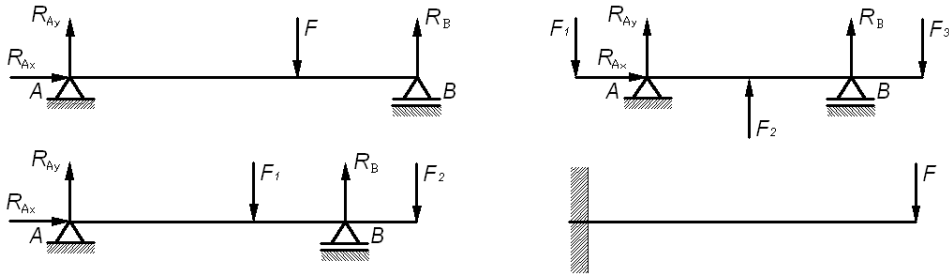
gdzie:

k_g – naprężenie dopuszczalne przy zginaniu.

5.1.2. Konstrukcje statycznie wyznaczalne

Konstrukcje statycznie wyznaczalne są to belki, dla których liczba niewiadomych podporowych jest równa liczbie równań równowagi. Metodyka rozwiązywania belek statycznie wyznaczalnych przedstawia się następująco:

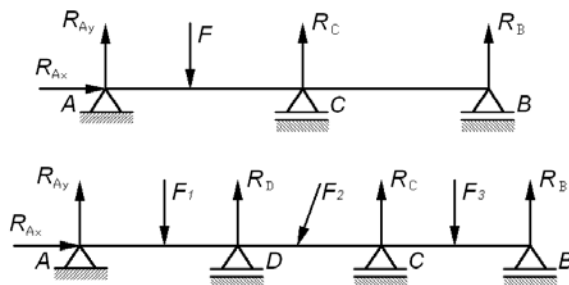
1. wyznaczenie wartości reakcji podpór za pomocą równań równowagi;
2. wyznaczenie momentów zginających w miejscach przyłożenia sił skupionych wzdłuż osi belki;
3. obliczenie sił tnących w poszczególnych przedziałach belki;
4. przyjęcie podziałki dla momentów gnących i sił tnących;
5. sporządzenie wykresów momentów gnących i sił tnących z zachowaniem znaków.



Rys. 5.5 Przykłady belek statycznie wyznaczalnych

5.1.3. Konstrukcje statycznie niewyznaczalne

Belki, w których liczba niewiadomych jest większa od liczby równań równowagi nazywamy statycznie niewyznaczalnymi. Przykłady takich belek to: belki wieloprzęsłowe (o trzech lub więcej podporach), belki dwustronnie utwierdzone, belki jednym końcem utwierdzone, a na drugim podparte itp.



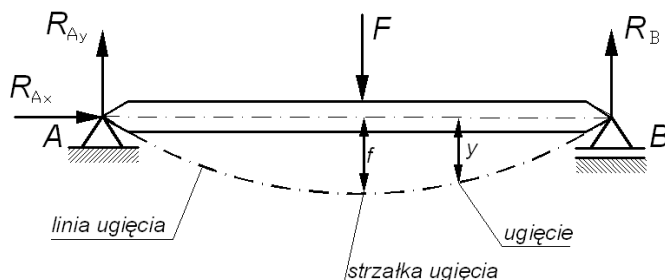
Rys. 5.6 Przykłady belek statycznie niewyznaczalnych

W tych belkach określenie reakcji bądź sił wewnętrznych tylko na podstawie równań równowagi nie jest możliwe. Do ich wyznaczenia należy uwzględnić odkształcenie tych konstrukcji. Do niektórych metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych można zaliczyć:

1. metodę sił,
2. metodę przemieszczeń,
3. metodę superpozycji,
4. metodę trzech momentów,
5. metodę Menabrei.

5.1.4. Linia ugięcia i strzałka ugięcia belki

W rzeczywistych warunkach pracy konstrukcja belki ulega odkształceniu. Początkowa prostoliniowa oś belki zmienia się na krzywoliniową. Krzywą tą nazywamy linią ugięcia osi belki. Proces przemieszczenia środka ciężkości przekroju w kierunku prostopadłym do osi belki nazywamy ugięciem belki, a największe ugięcie strzałką ugięcia belki.



Rys. 5.7 Linia i strzałka ugięcia

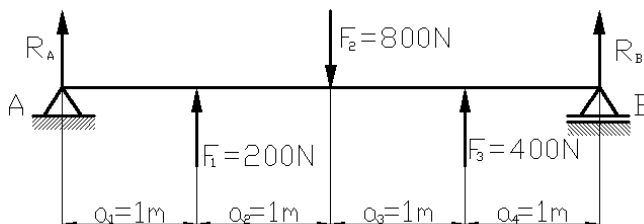
Strzałka ugięcia świadczy o sztywności belki dlatego w praktyce często ją obliczamy. Do niektórych metod wyznaczania ugięć belki można zaliczyć:

1. metodę analityczną,
2. metodę Clebscha,
3. metodę Maxwella-Mohra,
4. metodę momentów wtórnych,
5. metodę wykreślną-analityczną.

5.2. Przykłady do wykonania

Zadanie 1

Dla belki obciążonej siłami jak na rys. 5.8 obliczyć momenty zginające i siły tnące oraz sporządzić ich wykresy.



Rys. 5.8 Belka obciążona siłami skupionymi (rysunek do zadania 1)

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania należy zdefiniować:

- siły skupione działające na belkę:

$$F_1 := 200\text{N} \quad F_2 := 800\text{N} \quad F_3 := 400\text{N}$$

- odległości pomiędzy działającymi siłami skupionymi i reakcjami:

$$a_1 := 1\text{m} \quad a_2 := 1\text{m} \quad a_3 := 1\text{m} \quad a_4 := 1\text{m}$$

oraz obliczamy jego długość całkowitą:

$$L := \sum_{i=1}^4 a_i \quad L = 4\text{m}$$

- odległości przyłożenia tych sił od punktu A:

$$a_{F_1} := a_1 \quad a_{F_2} := a_1 + a_2 \quad a_{F_3} := a_1 + a_2 + a_3 \quad a_{R.B} := a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

- obszar funkcji oraz krok obliczeń na długości belki L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Na początku należy wyznaczyć reakcje podpór R_A i R_B , które określimy z warunków równowagi. W tym celu budujemy układ równań (suma rzutów sił zewnętrznych na oś pionową i suma momentów sił zewnętrznych względem podpory A) poprzedzając napisem Given:

Given

$$R_A + F_1 - F_2 + F_3 + R_B = 0$$

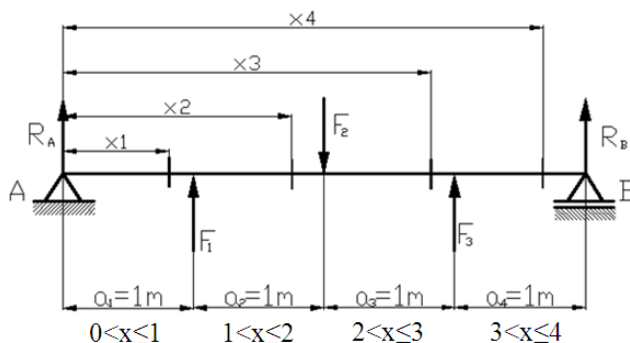
$$a_1 \cdot F_1 - \sum_{i=1}^2 [a_i(F_2)] + \sum_{i=1}^3 [a_i(F_3)] + \sum_{i=1}^4 (a_i \cdot R_B) = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 150 \cdot \text{N} \\ 50 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Tak więc reakcja R_A wynosi 150 N natomiast reakcja R_B równa jest 50 N .

Przystępujemy do wyznaczenia momentu zginającego na całej długości belki. W tym celu na początku wyznaczamy momenty zginające w przekrojach, w których zostały przyłożone siły zewnętrzne (rys. 5.9). Pomiedzy tymi przekrojami, w poszczególnych przedziałach, wykres momentów będzie utworzony przez odcinki linii prostych. Przyjmując za początek układu punkt A możemy wyznaczyć cztery przedziały ($0 < x \leq 1$); ($1 < x \leq 2$); ($2 < x \leq 3$); ($3 < x \leq 4$).



Rys. 5.9 Belka obciążona siłami skupionymi z zaznaczonymi przedziałami

Moment zginający na podporze w punkcie A wynosi:

$$M_A := 0$$

W przekroju belki odległym o x_1 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju czyli w przedziale ($0 < x \leq 1$):

$$M_{F,1} := R_A \cdot a_{F_1} = 150$$

Aby sporządzić wykres momentów zginających należy w oparciu o powyższe równanie dla zadeklarowanego zakresu funkcji obliczyć rozkład momentu $M_{F,1}$.

$$M_{F,1}(x) := (0 < x \leq a_{F_1}) (R_A \cdot x)$$

Pozostałe momenty zginające w miejscu przyłożenia poszczególnych sił obliczamy w podobny sposób.

W przekroju belki odległym o x_2 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział ($1 < x \leq 2$):

$$M_{F,2} := R_A \cdot a_{F_2} + F_1 \cdot a_2 = 500$$

$$M_{F,2}(x) := (a_{F_1} < x \leq a_{F_2}) [R_A \cdot x + F_1(x - a_{F_1})]$$

W przekroju belki odległym o x_3 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział ($2 < x \leq 3$):

$$M_{F,3} := R_A \cdot a_{F_3} + F_1(a_{F_3} - a_{F_1}) - F_2(a_{F_3} - a_{F_2}) = 50$$

$$M_{F,3}(x) := (a_{F_2} < x \leq a_{F_3}) [R_A \cdot x + F_1(x - a_{F_1}) - F_2(x - a_{F_2})]$$

Moment zginający w miejscu działania reakcji R_B obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział ($3 < x \leq 4$):

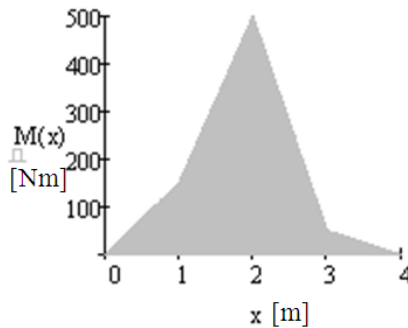
$$M_{R,B} := R_A \cdot a_{R,B} + F_1(a_{R,B} - a_{F_1}) - F_2(a_{R,B} - a_{F_2}) + F_3(a_{R,B} - a_{F_3}) = 0$$

$$M_{R,B}(x) := (a_{F_3} < x \leq a_{R,B}) [R_A \cdot x + F_1(x - a_{F_1}) - F_2(x - a_{F_2}) + F_3(x - a_{F_3})]$$

Moment zginający na całej długości belki jest równy sumie momentów zginających w poszczególnych przedziałach belki:

$$M(x) := M_A + M_{F,1}(x) + M_{F,2}(x) + M_{F,3}(x) + M_{R,B}(x)$$

Na podstawie powyższego równania możemy sporządzić wykres momentów zginających na całej długości belki.



Rys. 5.10 Wykres rozkładu momentów zginających na długości belki

W przekroju odległym o x_1 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_1(x) := (0 < x \leq a_{F_1}) R_A$$

W przedziale ($1 < x \leq 2$) czyli w przekroju odległym o x_2 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_2(x) := (a_{F_1} < x \leq a_{F_2}) (R_A + F_1)$$

W pozostałych przedziałach siły tnące wynoszą:

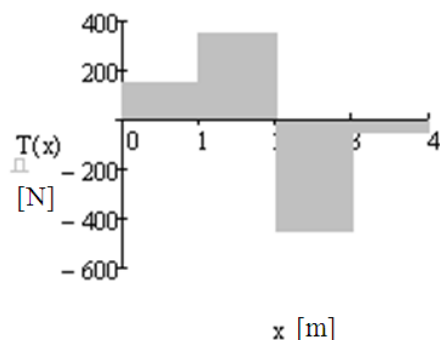
$$T_3(x) := (a_{F_2} < x \leq a_{F_3}) (R_A + F_1 - F_2)$$

$$T_4(x) := (a_{F_3} < x \leq a_{R.B}) (R_A + F_1 - F_2 + F_3)$$

Aby sporządzić wykres sił tnących dla całej długości belki sumujemy siły tnące z poszczególnych przedziałów:

$$T(x) := T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + T_4(x)$$

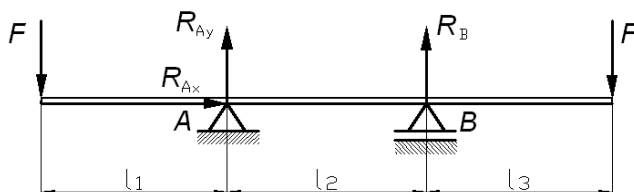
Wykres sił tnących na całej długości belki sporządzamy na podstawie powyższego równania.



Rys. 5.11 Wykres rozkładu sił tnących na długości belki

Zadanie 2

Dla belki przedstawionej jak na rysunku 5.12 obliczyć dopuszczalną wartość siły jaką można obciążyć belkę. Przyjmując prostokątny przekrój belki o wymiarach $b=0,06\text{ m}$, $h=0,04\text{ m}$ oraz $l_1=0,5\text{ m}$, $l_2=1\text{ m}$, $l_3=0,5\text{ m}$ i $k_g=120\text{ MPa}$.



Rys. 5.12 Obciążenie belki siłami skupionymi (rysunek do zadania 2)

Rozwiązanie sprowadza się do początkowego zdefiniowania:

- wymiarów geometrycznych belki (grubość h i szerokość b):

$$b := 0.06\text{m} \quad h := 0.04\text{m}$$

- odległości między podporami i przyłożonymi siłami:

$$l_1 := 0.5\text{m} \quad l_2 := 1\text{m} \quad l_3 := 0.5\text{m}$$

- dopuszczalne naprężenia zginające:

$$k_g := 120\text{MPa}$$

Do obliczenia dopuszczalnej wartości siły skorzystamy ze wzoru na naprężenia przy zginaniu:

$$\sigma = \frac{M_g}{W_z} \leq k_g$$

moment gnący wynosi:

$$\sigma = \frac{F \cdot l_1}{W_z} \leq k_g$$

Dla belki o przekroju prostokątnym wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie ma postać:

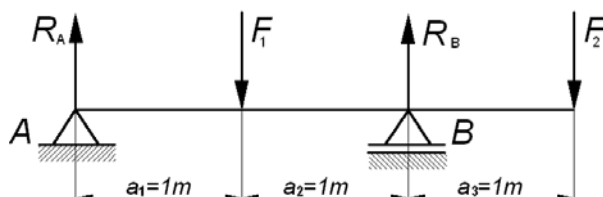
$$W_z := \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Tak więc dopuszczalna siła jaką możemy obciążyć belkę wynosi:

$$F := \frac{W_z \cdot k_g}{l_1} = 3.84 \times 10^3 \text{ N}$$

Zadanie 3

Dla belki obciążonej jak na rysunku 5.13 obliczyć siły tnące i momenty zginające. Wykonać również wykres sił tnących i momentów zginających przyjmując $F_1=5000 \text{ N}$, $F_2=3000 \text{ N}$ oraz $a_1=a_2=a_3=1 \text{ m}$.



Rys. 5.13 Belka obciążona siłami skupionymi (rysunek do zadania 3)

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania należy zdefiniować:

- siły skupione działające na belkę:

$$F_1 := 5000 \text{ N} \quad F_2 := 3000 \text{ N}$$

- odległości pomiędzy działającymi siłami skupionymi i reakcjami:

$$a_1 := 1 \text{ m} \quad a_2 := 1 \text{ m} \quad a_3 := 1 \text{ m}$$

oraz obliczamy długość całkowitą belki:

$$L := \sum_{i=1}^3 a_i \quad L = 3 \text{ m}$$

- odległości przyłożenia sił skupionych i reakcji R_B od punktu A:

$$a_{F_1} := 1\text{m} \quad a_{F_2} := 3\text{m} \quad a_{R_B} := 2\text{m}$$

- obszar funkcji oraz krok obliczeń na długości belki L :

$$x := 0:L, 0.001:L..L$$

Na początku należy wyznaczyć reakcje podpór R_A i R_B , które określimy z warunków równowagi. W tym celu budujemy układ równań (suma rzutów sił zewnętrznych na oś pionową i suma momentów sił zewnętrznych względem punktu A) poprzedzając napisem Given:

Given

$$R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0$$

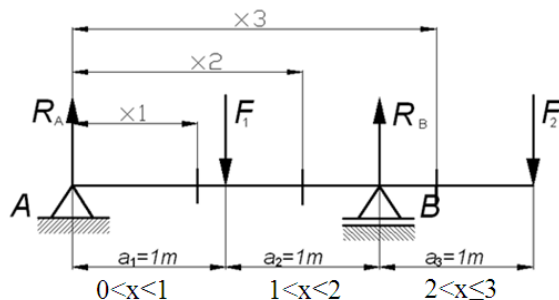
$$(-F_1) \cdot a_{F_1} - F_2 \cdot a_{F_2} + R_B \cdot a_{R_B} = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1000 \cdot \text{N} \\ 7000 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Tak więc reakcja R_A wynosi 1000 N natomiast reakcja R_B równa jest 7000 N .

Przystępujemy do wyznaczenia momentu zginającego na całej długości belki. W tym celu na początku wyznaczamy momenty zginające w przekrojach, w których zostały przyłożone siły zewnętrzne (rys. 5.14). Pomiedzy tymi przekrojami, w poszczególnych przedziałach, wykres momentów będzie utworzony przez odcinki linii prostych. Przyjmując za początek układu punkt A możemy wyznaczyć trzy przedziały ($0 < x \leq 1$); ($1 < x \leq 2$); ($2 < x \leq 3$).



Rys. 5.14 Belka obciążona siłami skupionymi z zaznaczonymi przedziałami

Moment zginający na podporze w punkcie A wynosi:

$$M_A := 0$$

W przekroju belki odległym o x_1 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju czyli w przedziale ($0 < x \leq 1$):

$$M_1 := R_A \cdot a_{F_1} = 1 \times 10^3$$

Aby sporządzić wykres momentów zginających należy w oparciu o powyższe równanie dla zadeklarowanego obszaru funkcji obliczyć rozkład momentu M_1 :

$$M_1(x) := (0 < x \leq a_{F_1})(R_A \cdot x)$$

Pozostałe momenty zginające w miejscu przyłożenia poszczególnych sił obliczamy w podobny sposób.

W przekroju belki odległym o x_2 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział ($1 < x \leq 2$):

$$M_2 := R_A \cdot a_{R.B} - F_1 \cdot a_2 = -3 \times 10^3$$

$$M_2(x) := (a_{F_1} < x \leq a_{R.B})[R_A \cdot x - F_1(x - a_{F_1})]$$

W przekroju belki odległym o x_3 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział ($2 < x \leq 3$):

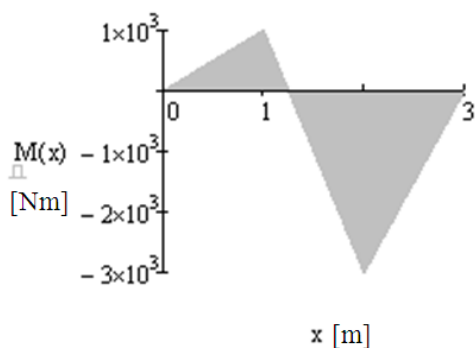
$$M_3 := R_A \cdot a_{F_2} - F_1(a_{F_2} - a_{F_1}) + R_B(a_{F_2} - a_{R.B}) = 0$$

$$M_3(x) := (a_{R.B} < x \leq a_{F_2})[R_A \cdot x - F_1(x - a_{F_1}) + R_B(x - a_{R.B})]$$

Moment zginający na całej długości belki jest równy sumie momentów zginających w poszczególnych przedziałach belki:

$$M(x) := M_A + M_1(x) + M_2(x) + M_3(x)$$

Na podstawie powyższego równania możemy sporządzić wykres momentów zginających na całej długości belki.



Rys. 5.15 Wykres rozkładu momentów zginających na długości belki

W przekroju odległym o x_1 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_1(x) := (0 < x \leq a_{F_1}) R_A$$

W przedziale $(1 < x \leq 2)$ czyli w przekroju odległym o x_2 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_2(x) := (a_{F_1} < x \leq a_{R,B}) (R_A - F_1)$$

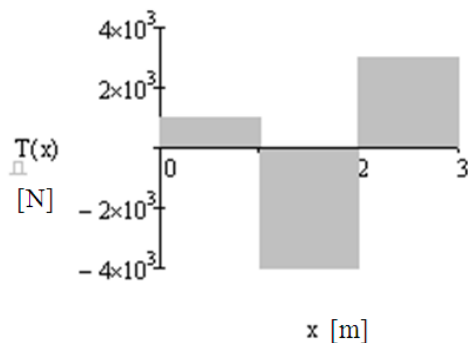
W ostatnim przedziale siła tnąca wynosi:

$$T_3(x) := (a_{R,B} < x \leq a_{F_2}) (R_A - F_1 + R_B)$$

Aby sporządzić wykres sił tnących dla całej długości belki sumujemy siły tnące z poszczególnych przedziałów.

$$T(x) := T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$$

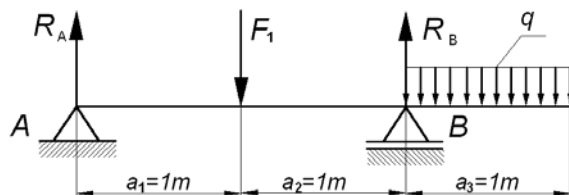
Wykres sił tnących na całej długości belki sporządzamy na podstawie powyższego równania.



Rys. 5.16 Wykres rozkładu sił tnących na długości belki

Zadanie 4

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki wspornikowej podpartej przegubowo w punktach A i B obciążonej siłą rozłożoną $q=25000 \text{ N/m}$ oraz siłą skupioną $F=60000 \text{ N}$ (rys. 5.17).



Rys. 5.17 Belka obciążona siłami skupionymi i rozłożonymi
(rysunek do zadania 4)

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania należy zdefiniować:

- siły skupione działające na belkę:

$$F_1 := 60000 \text{ N}$$

- siły rozłożone działające na belkę:

$$q := 25000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

- odległości pomiędzy działającymi siłami skupionymi, rozłożonymi i reakcjami oraz obliczamy długość całkowitą belki:

$$a_1 := 1 \text{ m} \quad a_2 := 1 \text{ m} \quad a_3 := 1 \text{ m}$$

$$L := \sum_{i=1}^3 a_i \quad L = 3 \text{ m}$$

- odległości przyłożenia sił skupionych i reakcji R_B od punktu A:

$$a_{F_1} := 1 \text{ m} \quad a_{R_B} := 2 \text{ m}$$

- długość działania siły rozłożonej oraz odległość przyłożenia tej siły od punktu A:

$$l_q := 1 \text{ m} \quad a_q := 2 \text{ m}$$

- zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości belki L:

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Na początku należy wyznaczyć reakcje podpór R_A i R_B , które określimy z warunków równowagi. W tym celu budujemy układ równań (suma rzutów sił zewnętrznych na oś pionową i suma momentów sił zewnętrznych względem punktu A) poprzedzając napisem Given:

Given

$$R_A - F_1 + R_B - q \cdot l_q = 0$$

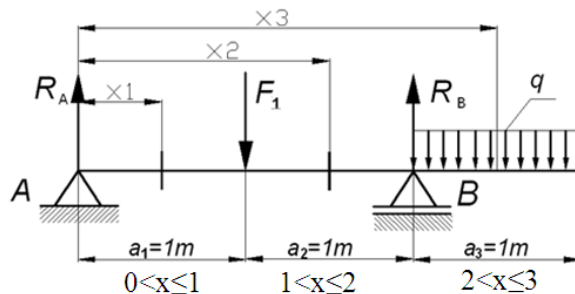
$$(-F)_1 \cdot a_{F_1} + R_B \cdot a_{R_B} - q \cdot l_q \cdot \left(a_q + \frac{l_q}{2} \right) = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 23750 \cdot \text{N} \\ 61250 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Tak więc reakcja R_A wynosi 23750 N natomiast reakcja R_B równa jest 61250 N .

Przystępujemy do wyznaczenia momentu zginającego na całej długości belki. W tym celu na początku wyznaczamy momenty zginające w przekrojach, w których zostały przyłożone siły zewnętrzne (rys. 5.18). Pomiedzy tymi przekrojami, w poszczególnych przedziałach, wykres momentów będzie utworzony przez odcinki linii prostych. Przyjmując za początek układu punkt A możemy wyznaczyć trzy przedziały ($0 < x \leq 1$); ($1 < x \leq 2$); ($2 < x \leq 3$).



Rys. 5.18 Belka obciążona siłami skupionymi i rozłożonymi z zaznaczonymi przedziałami

Moment zginający na podporze w punkcie A wynosi:

$$M_A := 0$$

W przekroju belki odległym o x_1 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju czyli w przedziale ($0 < x \leq 1$):

$$M_1 := R_A \cdot a_{F_1} = 2.375 \times 10^4$$

Aby sporządzić wykres momentów zginających należy w oparciu o powyższe równanie dla zadeklarowanej dziedziny argumentu funkcji obliczyć rozkład momentu M_1 :

$$M_1(x) := (0 < x \leq a_{F_1})(R_A \cdot x)$$

Pozostałe momenty zginające w miejscu przyłożenia poszczególnych sił obliczamy w podobny sposób.

W przekroju belki odległym o x_2 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział ($1 < x \leq 2$):

$$M_2 := R_A \cdot a_{R,B} - F_1 \cdot a_2 = -1.25 \times 10^4.$$

$$M_2(x) := (a_{F_1} < x \leq a_{R,B})[R_A \cdot x - F_1(x - a_{F_1})]$$

W przekroju belki odległym o x_3 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział ($2 < x \leq 3$):

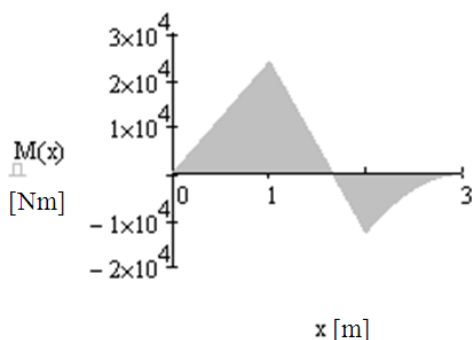
$$M_3 := R_A \cdot L - F_1 \cdot (L - a_{F_1}) + R_B(L - a_{R,B}) - q \cdot (L - a_{R,B}) \cdot \frac{L - a_{R,B}}{2} = 0$$

$$M_3(x) := (a_{R,B} < x \leq L) \left[R_A \cdot x - F_1(x - a_{F_1}) + R_B(x - a_{R,B}) - q \cdot (x - a_{R,B}) \cdot \frac{x - a_{R,B}}{2} \right]$$

Moment zginający na całej długości belki jest równy sumie momentów zginających w poszczególnych przedziałach belki:

$$M(x) := M_A + M_1(x) + M_2(x) + M_3(x)$$

Na podstawie powyższego równania możemy sporządzić wykres momentów zginających na całej długości belki.



Rys. 5.19 Wykres rozkładu momentów zginających na długości belki

W przekroju odległym o x_1 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_1(x) := (0 < x \leq a_{F_1}) R_A$$

W przedziale ($1 < x \leq 2$) czyli w przekroju odległym o x_2 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_2(x) := (a_{F_1} < x \leq a_{R.B}) (R_A - F_1)$$

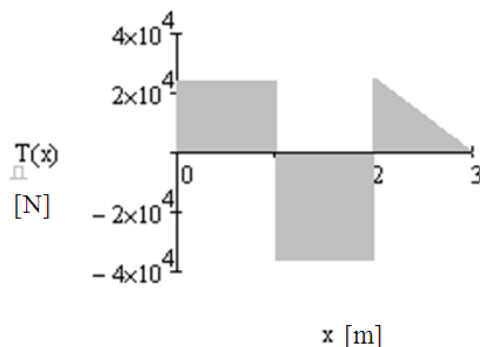
W ostatnim przedziale siła tnąca wynosi:

$$T_3(x) := (a_{R.B} < x \leq a_{R.B} + l_q) [R_A - F_1 + R_B - q \cdot [x - (a_{R.B})]]$$

Aby sporządzić wykres sił tnących dla całej długości belki sumujemy siły tnące z poszczególnych przedziałów:

$$T(x) := T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$$

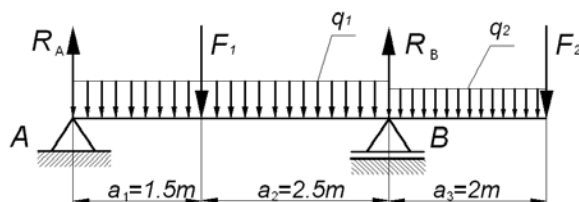
Wykres sił tnących na całej długości belki sporządzamy na podstawie powyższego równania.



Rys. 5.20 Wykres rozkładu sił tnących na długości belki

Zadanie 5

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki wspornikowej podpartej przegubowo w punktach A i B obciążonej siłami $F_1=10000\text{ N}$, $F_2=15000\text{ N}$ oraz $q_1=20000\text{ N/m}$, $q_2=5000\text{ N/m}$ jak na rys. 5.21.



Rys. 5.21 Belka obciążona siłami skupionymi i rozłożonymi (rysunek do zadania 5)

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania należy zdefiniować:

- siły skupione działające na belkę:

$$F_1 := 10000\text{ N} \quad F_2 := 15000\text{ N}$$

- siły rozłożone działające na belkę:

$$q_1 := 20000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad q_2 := 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

- odległości pomiędzy działającymi siłami skupionymi, rozłożonymi i reakcjami oraz obliczamy długość całkowitą belki:

$$a_1 := 1.5\text{ m} \quad a_2 := 2.5\text{ m} \quad a_3 := 2\text{ m}$$

$$L := \sum_{i=1}^3 a_i \quad L = 6\text{ m}$$

- odległości przyłożenia sił skupionych i reakcji R_B od punktu A:

$$a_{F_1} := a_1 \quad a_{F_2} := L$$

- długości działania sił rozłożonych oraz odległości przyłożenia tych sił od punktu A:

$$l_{q_1} := \sum_{i=1}^2 a_i \quad l_{q_2} := a_3$$

$$a_{q_1} := 0 \quad a_{q_2} := \sum_{i=1}^2 a_i$$

- zakres funkcji oraz krok obliczeń na długości belki L :

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Na początku należy wyznaczyć reakcje podpór R_A i R_B , które określimy z warunków równowagi. W tym celu budujemy układ równań (suma rzutów sił zewnętrznych na oś pionową i suma momentów sił zewnętrznych względem punktu A) poprzedzając napisem Given:

Given

$$R_A - F_1 - q_1 \cdot l_{q1} + R_B - q_2 \cdot l_{q2} - F_2 = 0$$

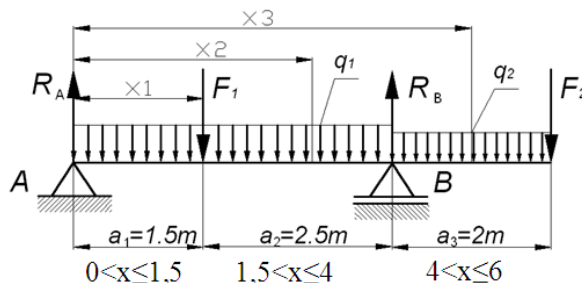
$$(-F)_1 \cdot a_{F1} - q_1 \cdot l_{q1} \cdot \frac{l_{q1}}{2} + R_B \cdot a_{q2} - q_2 \cdot l_{q2} \cdot \left(a_{q2} + \frac{l_{q2}}{2} \right) - F_2 \cdot L = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 36250.0 \cdot \text{N} \\ 78750.0 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Tak więc reakcja R_A wynosi 36250 N natomiast reakcja R_B równa jest 78750 N .

Przystępujemy do wyznaczenia momentu zginającego na całej długości belki. W tym celu na początku wyznaczamy momenty zginające w przekrojach, w których zostały przyłożone siły zewnętrzne (rys. 5.22). Pomiedzy tymi przekrojami, w poszczególnych przedziałach, wykres momentów będzie utworzony przez odcinki linii prostych. Przyjmując za początek układu punkt A możemy wyznaczyć trzy przedziały ($0 < x \leq 1,5$); ($1,5 < x \leq 4$); ($4 < x \leq 6$).



Rys. 5.22 Belka obciążona siłami skupionymi z zaznaczonymi przedziałami

Moment zginający na podporze w punkcie A wynosi:

$$M_A := 0$$

W przekroju belki odległym o x_1 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju czyli w przedziale $(0 < x \leq 1,5)$:

$$M_1 := R_A \cdot a_{F_1} - q_1 \left[\frac{(a_1)^2}{2} \right] = 3.188 \times 10^4$$

Aby sporządzić wykres momentów zginających należy w oparciu o powyższe równanie dla zadeklarowanego zakresu funkcji obliczyć rozkład momentu M_1 :

$$M_1(x) := (0 < x \leq a_1) \left[(R_A \cdot x) - \frac{q_1 \cdot x^2}{2} \right]$$

Pozostałe momenty zginające w miejscu przyłożenia poszczególnych sił obliczamy w podobny sposób.

W przekroju belki odległym o x_2 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział $(1,5 < x \leq 4)$:

$$M_2 := R_A \cdot l_{q_1} - q_1 \left[\frac{(l_{q_1})^2}{2} \right] - F_1(a_2) = -4 \times 10^4$$

$$M_2(x) := (a_1 < x \leq a_{q_2}) \left[R_A \cdot x - q_1 \cdot \frac{x^2}{2} - F_1(x - a_{F_1}) \right]$$

W przekroju belki odległym o x_3 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział $(4 < x \leq 6)$:

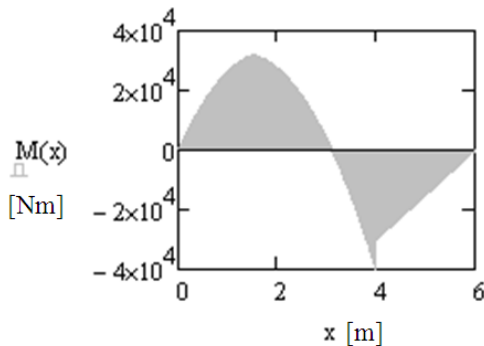
$$M_3 := R_A \cdot L - F_1(L - a_{F_1}) + R_B(L - l_{q_1}) - q_1 \cdot l_{q_1} \left[L - \frac{(l_{q_1})}{2} \right] - q_2 \cdot l_{q_2} \left[L - \left(a_{q_2} + \frac{l_{q_2}}{2} \right) \right] = 0$$

$$M_3(x) := (a_{q_2} < x \leq L) \left[R_A \cdot x - F_1(x - a_{F_1}) + R_B(x - l_{q_1}) - q_1 \cdot l_{q_1} \left[x - \frac{(l_{q_1})}{2} \right] - q_2 \cdot l_{q_2} \left[x - \left(a_{q_2} + \frac{l_{q_2}}{2} \right) \right] \right]$$

Moment zginający na całej długości belki jest równy sumie momentów zginających w poszczególnych przedziałach belki:

$$M(x) := M_A + M_1(x) + M_2(x) + M_3(x)$$

Na podstawie powyższego równania możemy sporządzić wykres momentów zginających na całej długości belki.



Rys. 5.23 Wykres rozkładu momentów zginających na długości belki

W przekroju odległym o x_1 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_1(x) := \left(0 < x \leq a_{F_1} \right) (R_A - q_1 \cdot x)$$

W przedziale ($1 < x \leq 2$) czyli w przekroju odległym o x_2 od punktu A siła tnąca wynosi:

$$T_2(x) := \left(a_{F_1} < x \leq a_{q_2} \right) (R_A - q_1 \cdot x - F_1)$$

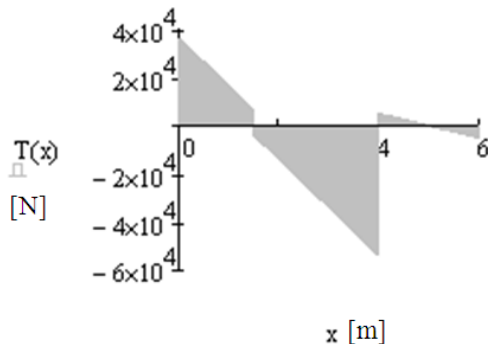
W ostatnim przedziale siła tnąca wynosi:

$$T_3(x) := \left(a_{q_2} < x \leq L \right) [R_A - F_1 + R_B - q_1 \cdot (l_{q_1}) - q_2 \cdot (x - a_{q_1})]$$

Aby sporządzić wykres sił tnących dla całej długości belki sumujemy siły tnące z poszczególnych przedziałów:

$$T(x) := T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$$

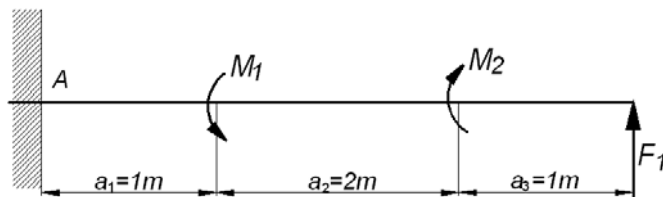
Wykres sił tnących na całej długości belki sporządzamy na podstawie powyższego równania.



Rys. 5.24 Wykres rozkładu sił tnących na długości belki

Zadanie 6

Dla belki obciążonej jak na rysunku 5.25 obliczyć siły tnące i momenty zginające. Wykonać również wykres sił tnących i momentów zginających przyjmując $F_1=200\text{ N}$, $M_1=100\text{ Nm}$, $M_2=100\text{ Nm}$ oraz $a_1=a_3=1\text{ m}$, $a_2=2\text{ m}$.



Rys. 5.25 Belka obciążona momentami zginającymi oraz siłą skupioną (rysunek do zadania 6)

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania należy zdefiniować:

- siłę skupioną oraz momenty zginające działające na belkę:

$$F_1 := 200\text{ N} \quad M_1 := 100\text{ N}\cdot\text{m} \quad M_2 := 100\text{ N}\cdot\text{m}$$

- odległości pomiędzy działającymi momentami zginającymi oraz siłą skupioną:

$$a_1 := 1\text{ m} \quad a_2 := 2\text{ m} \quad a_3 := 1\text{ m}$$

oraz obliczamy długość całkowitą belki:

$$L := \sum_{i=1}^3 a_i \quad L = 4\text{ m}$$

- odległości przyłożenia momentów zginających i siły skupionej od punktu A:

$$a_{M_1} := a_1 \quad a_{M_2} := \sum_{i=1}^2 a_i \quad a_{F_1} := L$$

- obszar funkcji oraz krok obliczeń na długości belki L wynoszący 0,001:

$$x := 0 \cdot L, 0.001 \cdot L \dots L$$

Na początku należy wyznaczyć reakcje R_A i moment M_A w miejscu utwierdzenia belki, które określimy z warunków równowagi. W tym celu budujemy układ

równań (suma rzutów sił zewnętrznych na oś pionową i suma momentów względem punktu A) poprzedzając napisem Given:

Given

$$R_A + F_1 = 0$$

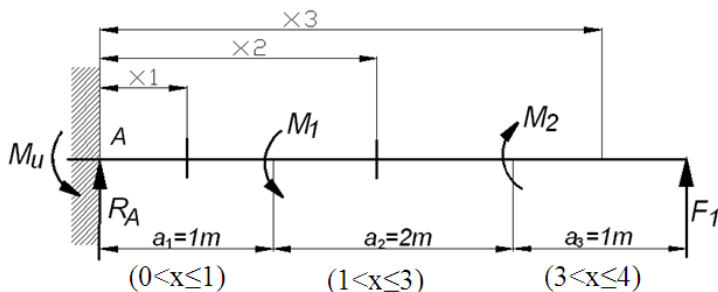
$$M_u + F_1 \cdot a_{F_1} + M_1 - M_2 = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_A, M_u) \rightarrow \begin{pmatrix} -200 \cdot \text{N} \\ -800 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \end{pmatrix}$$

Tak więc reakcja R_A wynosi -200 N natomiast moment M_A równy jest -800 Nm .

Przystępujemy do wyznaczenia momentu zginającego na całej długości belki. W tym celu na początku wyznaczamy momenty zginające w przekrojach, w których zostały przyłożone momenty zginające i siła zewnętrzna (rys. 5.26). Pomiedzy tymi przekrojami, w poszczególnych przedziałach, wykres momentów będzie utworzony przez odcinki linii prostych. Przyjmując za początek układu punkt A możemy wyznaczyć trzy przedziały ($0 < x \leq 1$); ($1 < x \leq 3$); ($3 < x \leq 4$).



Rys. 5.26 Belka obciążona momentami zginającymi i siłą skupioną z zaznaczonymi przedziałami

Moment zginający w miejscu utwierdzenia w punkcie A wynosi:

$$M_u := -800 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

W przekroju belki odległym o x_1 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając momenty zginające po lewej stronie tego przekroju czyli w przedziale ($0 < x \leq 1$):

$$M_1 := M_u - R_A \cdot a_1 = -600.$$

Aby sporządzić wykres momentów zginających należy w oparciu o powyższe równanie dla zadeklarowanego obszaru funkcji obliczyć rozkład momentu M_1 :

$$M_1(x) := (0 < x \leq a_{M_1}) (M_u - R_A \cdot x)$$

W przekroju belki odległym o x_2 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie momenty zginające po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział $(1 < x \leq 3)$:

$$M_2 := M_u - R_A \cdot \sum_{i=1}^2 a_i + M_1 = -100$$

$$M_2(x) := (a_{M_1} < x \leq a_{M_2}) (M_u - R_A \cdot x + M_1)$$

W przekroju belki odległym o x_3 od punktu A moment zginający obliczamy uwzględniając wszystkie momenty zginające po lewej stronie tego przekroju. Rozpatrujemy przedział $(3 < x \leq 4)$:

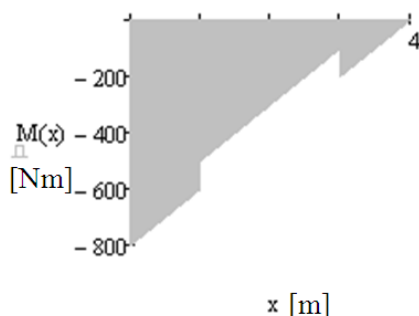
$$M_3 := M_u - R_A \cdot \sum_{i=1}^3 a_i + M_1 - M_2 = 0$$

$$M_3(x) := (a_{M_2} < x \leq a_{F_1}) (M_u - R_A \cdot x + M_1 - M_2)$$

Moment zginający na całej długości belki jest równy sumie momentów zginających w poszczególnych przedziałach belki:

$$M(x) := M_1(x) + M_2(x) + M_3(x)$$

Na podstawie powyższego równania możemy sporządzić wykres momentów zginających na całej długości belki.



Rys. 5.27 Wykres rozkładu momentów zginających na długości belki

W każdym przedziale belki czyli $(0 < x \leq 1)$, $(1 < x \leq 3)$, $(3 < x \leq 4)$ siła tnąca ma tę samą wartość i wynosi:

$$T_1(x) := (0 < x \leq a_{M_1}) (-R_A)$$

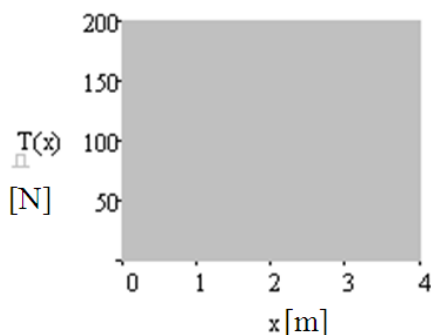
$$T_2(x) := (a_{M_1} < x \leq a_{M_2}) (-R_A)$$

$$T_3(x) := (a_{M_2} < x \leq a_{F_1}) (-R_A)$$

Aby sporządzić wykres sił tnących dla całej długości belki sumujemy siły tnące z poszczególnych przedziałów.

$$T(x) := T_1(x) + T_2(x) + T_3(x)$$

Wykres sił tnących na całej długości belki sporządzamy na podstawie powyższego równania.



Rys. 5.28 Wykres rozkładu sił tnących na długości belki

Zadanie 7

Do samodzielnego rozwiązania

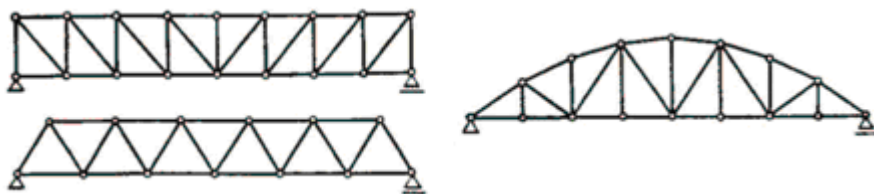
Dla belki obciążonej jak na rysunku 5.12 obliczyć siły tnące i momenty zginające. Wykonać również wykres sił tnących i momentów zginających przyjmując $F=1500\text{ N}$ oraz $a_1=a_2=a_3=1\text{ m}$.

6. Kratownice płaskie

6.1. Pojęcia podstawowe

Kratownicą nazywamy układ złożony z prętów prostych połączonych ze sobą w węzłach (pozbawionymi tarcia) przegubami, na które działają wyłącznie siły skupione. Z definicji tej wynika, że końce prętów mogą się względem siebie przemieszczać. Jednak w rzeczywistych konstrukcjach budowlanych połączenia prętów kratownic są realizowane w sposób odbiegający od tego założenia. Kratownice stanowią dźwigary kratowe o sztywnych węzłach. Założenie to jednak znacznie upraszcza teorie kratownic i sposoby ich rozwiązywania, nie wprowadzając większych błędów.

Kratownice mogą być płaskie (wszystkie pręty i obciążenia leżą na jednej płaszczyźnie, rys. 6.1) lub przestrzenne.



Rys. 6.1 Kratownice płaskie

6.1.1. Geometryczna niezmienność i statyczna wyznaczalność kratownic

Rozwiązanie kratownicy sprowadza się do wyznaczenia reakcji powstających w punktach podparcia oraz sił rozciągających i ściskających poszczególne pręty. Przystępując do rozwiązywania kratownicy na początku należy sprawdzić warunek konieczny statycznej (wewnętrznej) wyznaczalności, który ma postać:

$$p = 2w - 3$$

Stopień statycznej niewyznaczalności kratownicy można wyznaczyć ze wzoru:

$$p = 2w - r$$

gdzie:

w – liczba węzłów kratownicy,

p – liczba prętów kratownicy,

r – liczba reakcji podporowych.

Jeżeli $p > 2w - r$ kratownica ma większą liczbę prętów niż to jest konieczne dla jej geometrycznej niezmienności i liczba niewiadomych jest większa niż liczba równań równowagi. Kratownica taka jest przesztyniona i statycznie niewyznaczalna. Jeżeli zaś $p < 2w - r$, to układ jest geometrycznie zmienny i nie może być stosowany w konstrukcjach budowlanych.

6.1.2. Analityczne metody wyznaczania sił w prętach kratownicy

W celu wyznaczenia sił w prętach kratownicy najczęściej wykorzystuje się dwie metody:

- metoda równoważenia węzłów,
- metoda przekrojów (metoda Rittera).

Metoda równoważenia węzłów polega na znalezieniu równań równowagi, dla każdego myślowo wyciętego węzła kratownicy. Przystępując do rozwiązania:

- z równań równowagi wyznaczamy składowe reakcji podpór $\Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0, \Sigma F_{ix} = 0, \Sigma F_{iy} = 0$,
- w poszczególnych wyciętych węzłach kratownicy zapisujemy dwa równania równowagi $\Sigma F_{ix} = 0, \Sigma F_{iy} = 0$,
- z zapisanych równań równowagi wyznaczamy siły we wszystkich prętach kratownicy (rozwiązanie zaczynany od węzła, w którym zbiegają się dwa pręty o nieznanach siłach).

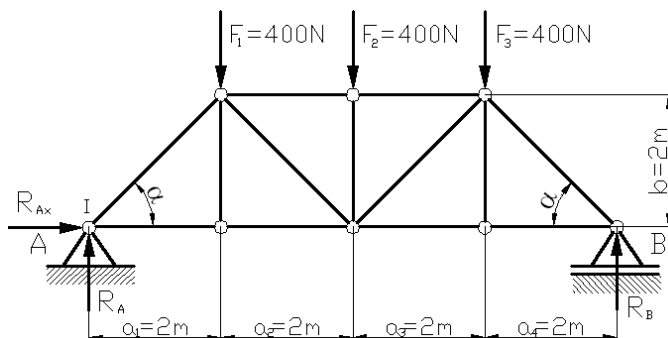
Metoda Rittera polega na myślowym przecięciu kratownicy odpowiednim przekrojem na dwie części i wykorzystaniu warunków równowagi wszystkich sił działających na jedną z nich. Przystępując do wyznaczania sił w prętach kratownicy metodą Rittera:

- z równań równowagi wyznaczamy składowe reakcji podpór $\Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0, \Sigma F_{ix} = 0, \Sigma F_{iy} = 0$,
- przecinamy kratownicę przez trzy pręty, w których chcemy określić siły wewnętrzne (pręty kratownicy nie mogą zbiegać się w jednym punkcie),
- jedną część kratownicy odrzucamy (najczęściej tą, na którą działa więcej sił zewnętrznych),
- dla odciętej części kratownicy zapisujemy równania sumy momentów wszystkich sił względem trzech punktów, w których przecinają się parami kierunki poszukiwanych sił w prętach.

6.2. Przykłady do wykonania

Zadanie 1

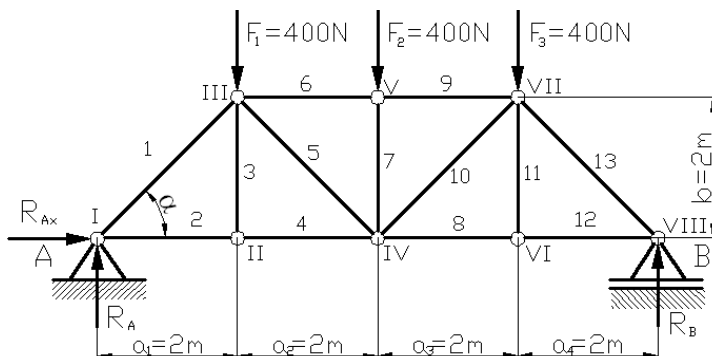
Dla kratownicy płaskiej obciążonej jak na rysunku 6.2 obliczyć składowe reakcji podpór przegubowej stałej A i przesuwnej B oraz siły wewnętrzne rozciągające i ściskające poszczególne pręty. Zadanie należy rozwiązać metodą równoważenia węzłów.



Rys. 6.2 Kratownica z zaznaczonymi obciążeniami

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania należy zacząć od ponumerowania węzłów i prętów kratownicy. Najczęściej węzły numerujemy liczbami rzymskimi a pręty arabskimi.



Rys. 6.3 Kratownica z zaznaczonymi obciążeniami i ponumerowanymi węzłami i prętami

Następnie definiujemy:

- siły działające na poszczególne węzły kratownicy:

$$F_1 := 400 \cdot \text{N} \quad F_2 := 400 \cdot \text{N} \quad F_3 := 400 \cdot \text{N}$$

- odległości przyłożenia tych sił od punktu A:

$$l_{F_1} := 2m \quad l_{F_2} := 4m \quad l_{F_3} := 6m$$

- odległości pomiędzy węzłami w poziomie a i w pionie b :

$$a_1 := 2 \cdot m \quad a_2 := 2 \cdot m \quad a_3 := 2 \cdot m \quad a_4 := 2 \cdot m$$

$$b := 2 \cdot m$$

- liczbę prętów p oraz liczbę węzłów w w kratownicy:

$$p := 13 \quad w := 8$$

- kąt pomiędzy prętami kratownicy:

$$\alpha := 45$$

$$m := \sin(\alpha \cdot \text{deg}) = 0.707$$

$$n := \cos(\alpha \cdot \text{deg}) = 0.707$$

Po zdefiniowaniu powyższych wielkości sprawdzamy warunek konieczny statycznej (wewnętrznej) wyznaczalności:

$$p := 2w - 3$$

$$p = 13$$

warunek jest spełniony więc można przystąpić do rozwiązania.

Aby rozwiązać podaną kratownicę metodą równoważenia węzłów musimy wyznaczyć reakcje podpór. W tym celu budujemy trzy układy równań z trzema niewiadomymi. Poprzedzając je napisem Given:

Given

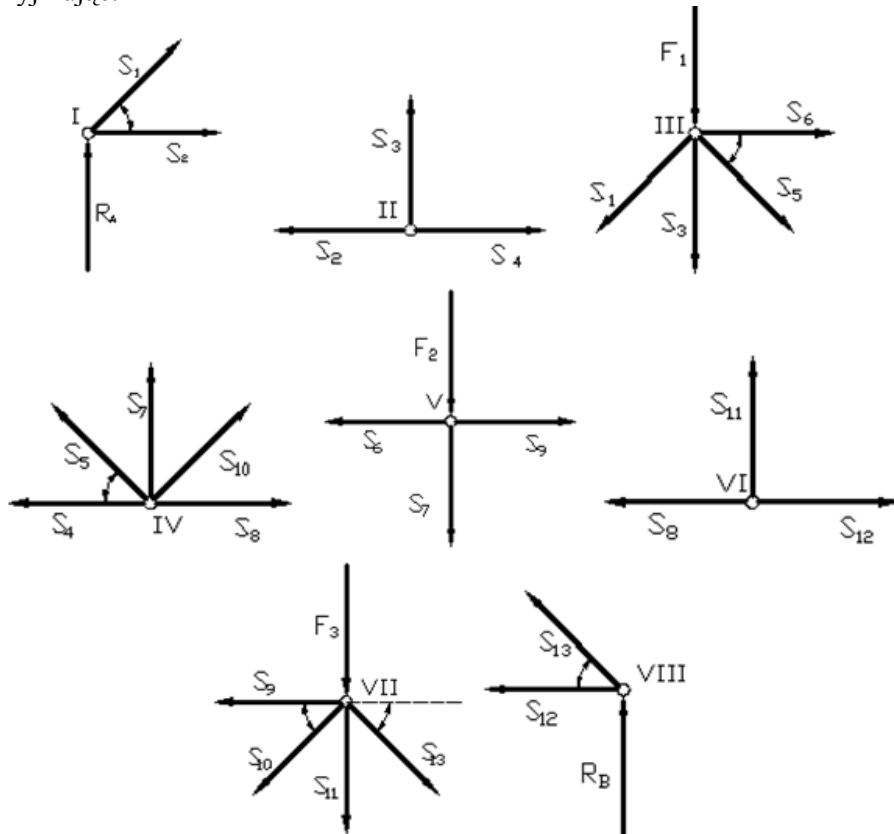
$$R_{A,x} = 0$$

$$R_A - F_1 - F_2 - F_3 + R_B = 0$$

$$a_1 \cdot F_1 + \sum_{i=1}^2 [a_i(F_2)] + \sum_{i=1}^3 [a_i(F_3)] - \sum_{i=1}^4 (a_i \cdot R_B) = 0$$

Następnie przechodzimy do wycinania poszczególnych węzłów. Zaczynamy od węzła I ponieważ w nim zbiegają się dwa pręty. Dla każdego pręta definiujemy dwa równania.

Przyjmując:



Rys. 6.4 Rozkład sił w poszczególnych węzłach kratownicy

Węzeł I

$$R_{A.x} + S_2 + m \cdot S_1 = 0$$

$$R_A + m \cdot S_1 = 0$$

Węzeł III

$$S_6 + m \cdot S_5 - m \cdot S_1 = 0$$

$$-F_1 - S_3 - m \cdot S_5 - m \cdot S_1 = 0$$

Węzeł V

$$S_9 - S_6 = 0$$

$$-F_2 - S_7 = 0$$

Węzeł VII

$$-S_9 - m \cdot S_{10} + m \cdot S_{13} = 0$$

Węzeł II

$$-S_2 + S_4 = 0$$

$$S_3 = 0$$

Węzeł IV

$$S_8 - S_4 + m \cdot S_{10} - m \cdot S_5 = 0$$

$$S_7 + m \cdot S_{10} + m \cdot S_5 = 0$$

Węzeł VI

$$S_{12} - S_8 = 0$$

$$S_{11} = 0$$

Po rozpatrzeniu wszystkich węzłów możemy wyznaczyć niewiadome z tych równań:

$$\text{Find}(R_{A_x}, R_A, R_B, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ -848.656 \cdot \text{N} \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ 0 \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ 282.885 \cdot \text{N} \\ -800.0 \cdot \text{N} \\ -400.0 \cdot \text{N} \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ -800.0 \cdot \text{N} \\ 282.885 \cdot \text{N} \\ 0 \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ -848.656 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Pozostałe trzy równania zostały niewykorzystane ale mogą posłużyć jako sprawdzenie. Jedno równanie z węzła VII:

$$-F_3 - S_{11} - m \cdot S_{13} - m \cdot S_{10} = 0$$

i dwa równania z węzła VIII:

$$-S_{12} - m \cdot S_{13} = 0$$

$$R_B + m \cdot S_{13} = 0$$

Sprawdzenie:

$$-F_3 - S_{11} - m \cdot S_{13} - m \cdot S_{10} = 0$$

$$F_3 := -S_{11} - m \cdot S_{13} - m \cdot S_{10} = 400 \text{ N}$$

$$-S_{12} - m \cdot S_{13} = 0$$

$$S_{12} := -m \cdot S_{13} = 600 \text{ N}$$

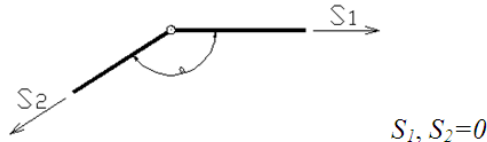
$$R_B + m \cdot S_{13} = 0$$

$$R_B := -m \cdot S_{13} = 600 \text{ N}$$

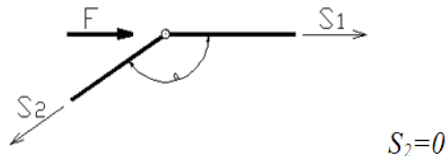
Na podstawie otrzymanych wyników można zauważyć, że część prętów jest rozciąganych a część ściskanych. Pręty, które są rozciągane ($S_2, S_4, S_5, S_8, S_{10}, S_{12}$) mają wartości dodatnie natomiast ściskane ($S_1, S_6, S_7, S_9, S_{13}$) wartości ujemne. Można również zauważyć, że niektóre pręty nie pracują czyli ich siły są równe zero, np. pręt S_3 i S_{11} .

Przykłady prętów zerowych:

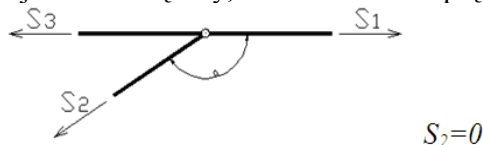
- 1) Jeżeli w nieobciążonym węźle kratownicy schodzą się 2 pręty pod pewnym kątem, to siły wewnętrzne w obu prętach są równe zero.



- 2) Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 2 pręty i węzeł jest obciążony siłą zewnętrzną równoległą do jednego z nich, to siła wewnętrzna w drugim pręcie jest równa zero.



- 3) Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 3 pręty, z których dwa są równoległe i węzeł jest nieobciążony, to siła w trzecim pręcie jest równa zero.



Dla potwierdzenia otrzymanych wyników rozwiążemy powyższe zadanie metodą Rittera

Ponieważ powyżej zostały zdefiniowane poszczególne wielkości (tj. siły działające na węzły kratownicy, odległości przyłożenia tych sił od punktu A, odległości pomiędzy węzłami w poziomie i w pionie oraz liczba prętów i liczba węzłów) możemy przystąpić do wyznaczenia reakcji podpor. W celu wyznaczenia sił reakcji w podporach można ułożyć cztery równania równowagi:

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0$$

$$\sum M_{iB} = 0$$

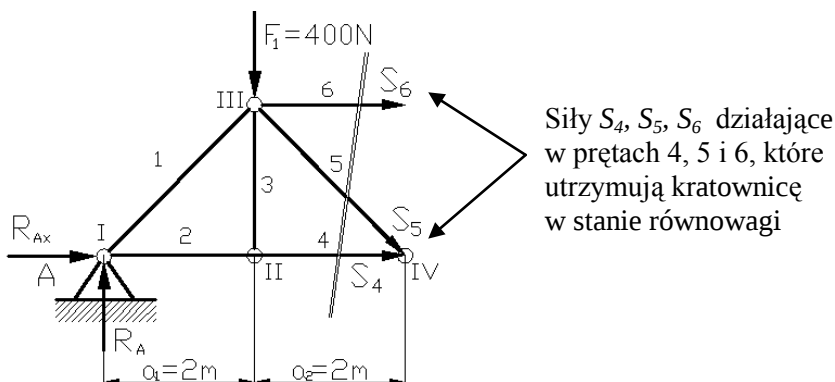
Dla podanego przykładu wystarczy dwa równania równowagi: suma rzutów wszystkich sił na oś x i suma momentów względem punktu A. Poprzedzamy je napisem Given:

Given

$$R_A - F_1 - F_2 - F_3 + R_B = 0$$

$$a_1 \cdot F_1 + \sum_{i=1}^2 [a_i(F_2)] + \sum_{i=1}^3 [a_i(F_3)] - \sum_{i=1}^4 (a_i \cdot R_B) = 0$$

Ponieważ metoda Rittera pozwala na wyznaczenie sił w trzech prętach kratownicy. To jako przykład wyznaczmy je w prętach 4, 5 i 6. W tym celu przecinamy kratownicę wyobrażalną płaszczyzną przechodzącą przez pręty 4, 5, 6 i odrzucamy jej prawą część (rys. 6.5).



Rys. 6.5 Przecięta kratownica z odrzuconą prawą stroną

Dla odciętej części kratownicy zapisujemy równania sumy momentów wszystkich sił względem dwóch punktów (węzeł III i IV), w których przecinają się parami kierunki poszukiwanych sił w prętach oraz sumę sił na oś y . Równania definiujemy w rozpoczętej procedurze Given:

$$-F_1 - m \cdot S_5 + R_A = 0$$

$$R_A \cdot a_1 - S_4 \cdot b = 0$$

$$S_6 \cdot b + \sum_{i=1}^2 [a_i(R_A)] - F_1 \cdot a_1 = 0$$

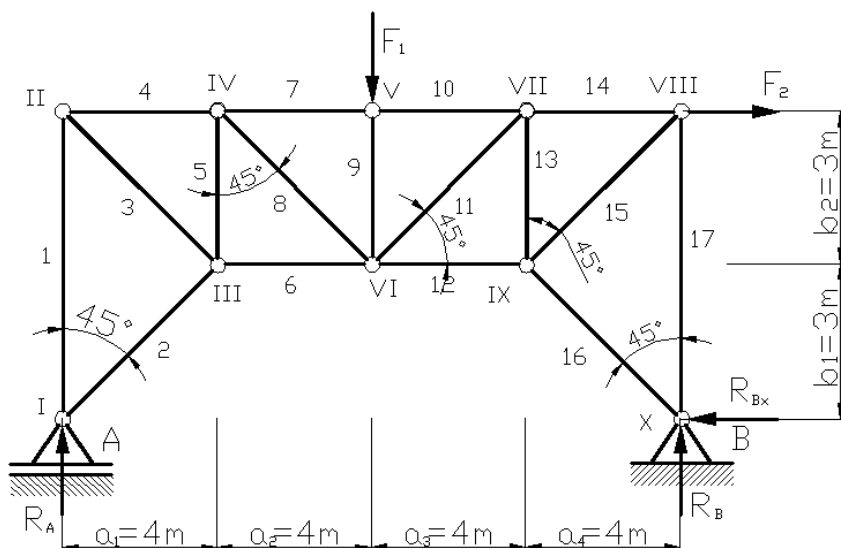
Po rozpatrzeniu wszystkich równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_A, R_B, S_4, S_5, S_6) \rightarrow \begin{pmatrix} 600.0 \cdot \text{N} \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ 600.0 \cdot \text{N} \\ 282.885 \cdot \text{N} \\ -800.0 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Jak widać w pierwszym i drugim przypadku otrzymaliśmy te same wartości szukanych zmiennych. Świadczy to o poprawności rozwiązania zadania.

Zadanie 2

Dla kratownicy płaskiej obciążonej siłami $F_1 = 12000 \text{ N}$ i $F_2 = 8000 \text{ N}$ jak na rysunku 6.6 obliczyć składowe reakcji podpór przegubowej stałej A i przesuwnej B oraz siły wewnętrzne rozciągające i ściskające poszczególne pręty. Zadanie należy rozwiązać metodą równoważenia węzłów.



Rys. 6.6 Kratownica z zaznaczonymi obciążeniami oraz ponumerowanymi węzłami i prętami

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania powyższego zadania należy zdefiniować:

- siły działające na poszczególne węzły kratownicy:

$$F_1 := 12000 \cdot \text{N} \quad F_2 := 8000 \cdot \text{N}$$

- odległości pomiędzy węzłami w poziomie a i w pionie b :

$$a_1 := 4\text{ m} \quad a_2 := 4\text{ m} \quad a_3 := 4\text{ m} \quad a_4 := 4\text{ m}$$

$$b_1 := 3\text{ m} \quad b_2 := 3\text{ m}$$

- liczbę prętów p oraz liczbę węzłów w w kratownicy:

$$p := 17 \quad w := 10$$

- kąt pomiędzy prętami kratownicy:

$$\alpha := 45$$

$$m := \sin(\alpha \text{ deg}) = 0.707$$

$$n := \cos(\alpha \text{ deg}) = 0.707$$

Po zdefiniowaniu powyższych wielkości sprawdzamy warunek konieczny statycznej (wewnętrznej) wyznaczalności:

$$p := 2w - 3$$

$$p = 17$$

warunek jest spełniony więc można przystąpić do rozwiązania.

Aby rozwiązać podaną kratownicę metodą równoważenia węzłów musimy wyznaczyć reakcje podpór. W tym celu budujemy trzy układy równań z trzema niewiadomymi. Poprzedzając je napisem Given:

Given

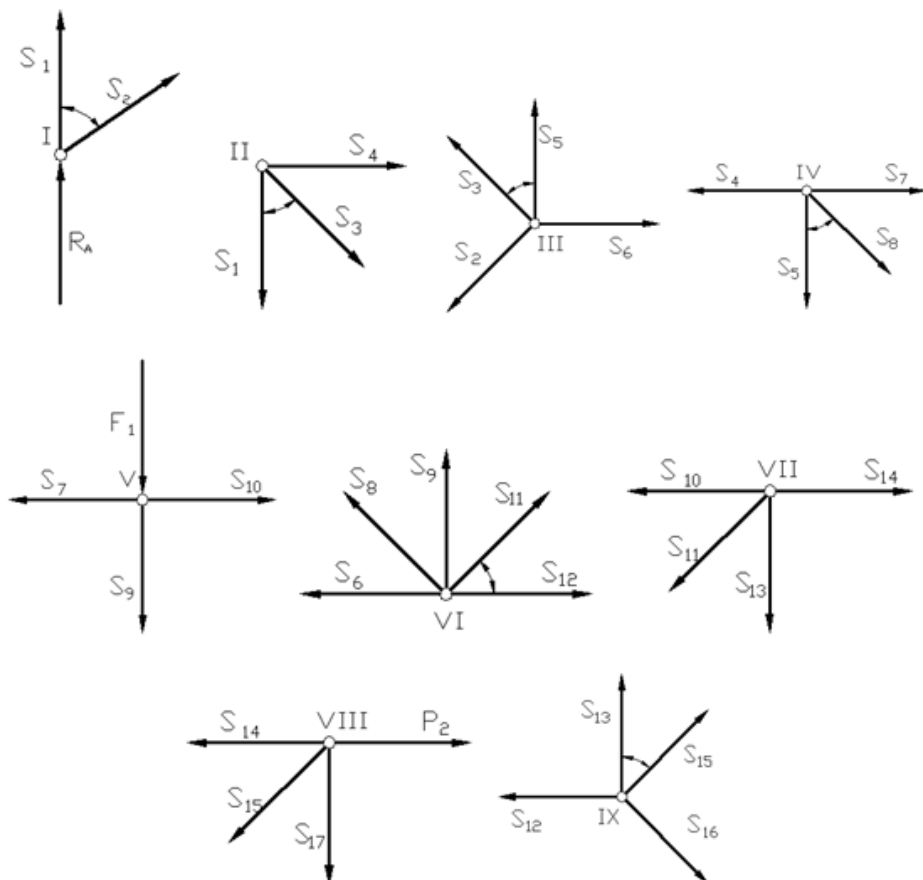
$$R_{B,x} = 8000\text{ N}$$

$$R_A - F_1 + R_B = 0$$

$$-\sum_{i=1}^2 [a_i(F_1)] - \sum_{i=1}^2 [b_i(F_2)] + \sum_{i=1}^4 (a_i \cdot R_B) = 0$$

Następnie przechodzimy do wycinania poszczególnych węzłów. Zaczynamy od węzła I ponieważ w nim zbiegają się dwa pręty. Dla każdego pręta definiujemy dwa równania.

Przyjmując:



Rys. 6.7 Rozkład sił w poszczególnych węzłach kratownicy

Węzeł I

$$m \cdot S_2 = 0$$

$$S_1 + R_A + m \cdot S_2 = 0$$

Węzeł IV

$$S_7 - S_4 + m \cdot S_8 = 0$$

$$-m \cdot S_8 - S_5 = 0$$

Węzeł VII

$$S_{14} - S_{10} - m \cdot S_{11} = 0$$

$$-S_{13} - m \cdot S_{11} = 0$$

Węzeł II

$$S_4 + m \cdot S_3 = 0$$

$$-m \cdot S_3 - S_1 = 0$$

Węzeł V

$$S_{10} - S_7 = 0$$

$$-F_1 - S_9 = 0$$

Węzeł VIII

$$-m \cdot S_{15} - S_{14} + F_2 = 0$$

$$-S_{17} - m \cdot S_{15} = 0$$

Węzeł III

$$S_6 - m \cdot S_3 - m \cdot S_2 = 0$$

$$S_5 + m \cdot S_3 - m \cdot S_2 = 0$$

Węzeł VI

$$S_{12} - S_6 - m \cdot S_8 + m \cdot S_{11} = 0$$

$$m \cdot S_{11} + S_9 + m \cdot S_8 = 0$$

Węzeł IX

$$-m \cdot S_{16} + S_{13} + m \cdot S_{15} = 0$$

Po rozpatrzeniu wszystkich węzłów możemy wyznaczyć niewiadome z tych równań:

$$\text{Find}(R_{B_x}, R_A, R_B, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}) \rightarrow \begin{pmatrix} 8000.0 \cdot \text{N} \\ 3000.0 \cdot \text{N} \\ 9000.0 \cdot \text{N} \\ -3000.0 \cdot \text{N} \\ 0 \\ 4243.2 \cdot \text{N} \\ -3000.0 \cdot \text{N} \\ -3000.0 \cdot \text{N} \\ 3000.0 \cdot \text{N} \\ -6000.0 \cdot \text{N} \\ 4243.2 \cdot \text{N} \\ -12000.0 \cdot \text{N} \\ -6000.0 \cdot \text{N} \\ 12729.8 \cdot \text{N} \\ -3000.0 \cdot \text{N} \\ -9000.0 \cdot \text{N} \\ 3000.0 \cdot \text{N} \\ 7072.1 \cdot \text{N} \\ -5657.7 \cdot \text{N} \\ -5000.0 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Pozostałe trzy równania zostały niewykorzystane ale mogą posłużyć jako sprawdzenie. Jedno równanie z węzła IX i dwa równania z węzła X.

Na podstawie otrzymanych wyników można zauważyć, że część prętów jest rozciąganych a część ściskanych. Pręty, które są rozciągane ($S_3, S_6, S_8, S_{11}, S_{14}, S_{15}$) mają wartości dodatnie natomiast ściskane ($S_1, S_4, S_5, S_7, S_9, S_{10}, S_{12}, S_{13}, S_{16}, S_{17}$) wartości ujemne. Można również zauważyć, że niektóre pręty nie pracują czyli siły, które działają w nich są równe zero, np. pręt S_2 .

Zadanie 3

Do samodzielnego rozwiązania

Dla kratownicy płaskiej obciążonej jak na rysunku 6.8 obliczyć składowe reakcje podpór przegubowej stałej i przesuwnej oraz siły wewnętrzne rozciągające i ściskające poszczególne pręty. Określić działanie sił na poszczególne węzły i przyjąć ich wartość (przyjmujemy wagę 1 wagonu ok. $0,6\text{ MN}$). Zadanie należy rozwiązać metodą równoważenia węzłów.

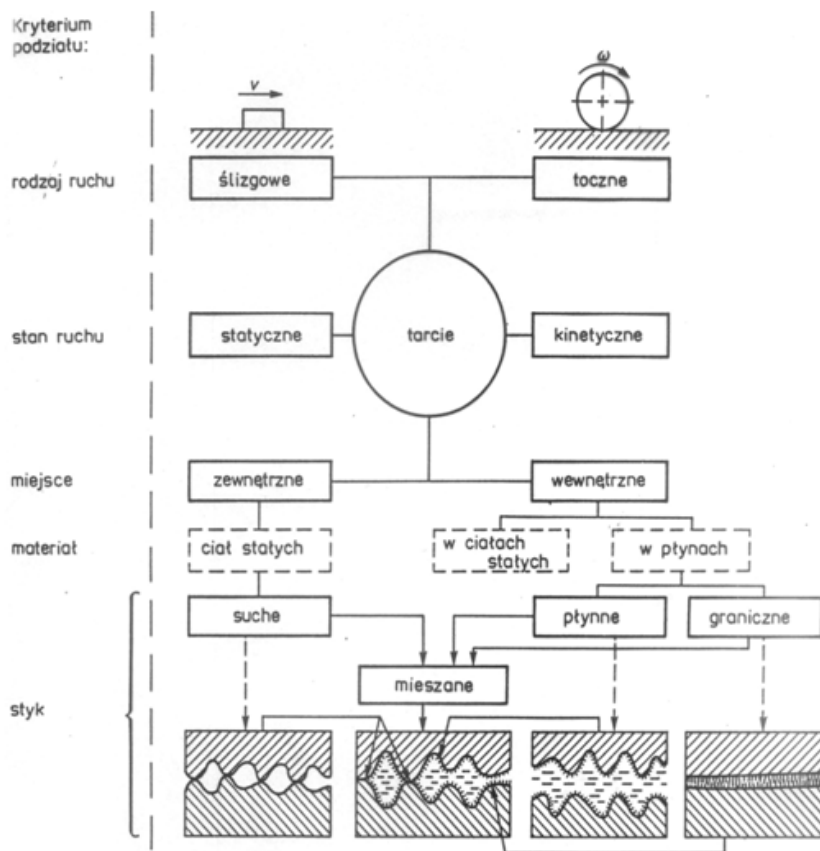


Rys. 6.8 Kratownica płaska obciążona przez przejeżdżający pociąg

7. Tarcie

7.1. Pojęcia podstawowe

Tribologia jest nauką o procesach fizyko-chemiczno-mechanicznych zachodzących w ruchomym styku ciał stałych. Jednym z podstawowych zagadnień, którymi zajmuje się tribologia są zjawiska tarcia. Rodzaje tarcia przedstawiono na rys. 7.1.



Rys. 7.1 Rodzaje tarcia

Tarcie jest zjawiskiem powszechnie występującym w przyrodzie i technice; związane jest z pracą maszyn i urządzeń. Pokonywanie oporów tarcia wymaga bardzo dużego zużycia energii. Tribologia przeważnie zajmuje się poszukiwaniem ograniczenia skutków działania tarcia, a co za tym idzie – ograniczenia

zużycia energii i współpracujących ze sobą elementów. Czyli w tribologii podobnie jak w medycynie najlepiej jest zapobiegać niż leczyć.

Tarciem nazywamy zbiór zjawisk występujących w obszarze styku dwóch przemieszczających się względem siebie ciał, w wyniku których powstają opory ruchu. Miarą tarcia jest wypadkowa sił oporu ruchu występująca w płaszczyźnie zetknięcia się ciał – nazywana siłą tarcia poślizgowego.

Siła tarcia to siła przeciwdziałająca wzajemnemu przemieszczaniu ciał będących w styku powierzchniowym, która utrzymuje ciało w stanie spoczynku. Współczynnik tarcia μ jest to współczynnik proporcjonalności pomiędzy siłą tarcia F_t a siłą normalną F_N :

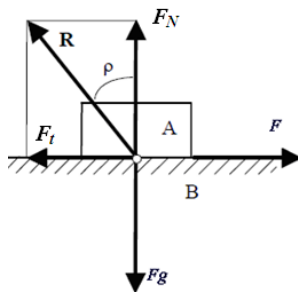
$$F_t = \mu \cdot F_N$$

Tarcie możemy podzielić ze względu na:

- rodzaj ruchu – ślizgowe i toczne;
- stan ruchu – statyczne i kinetyczne;
- miejsce – zewnętrzne i wewnętrzne;
- materiał – ciał stałych, w ciałach stałych i w płynach;
- styk – suche, płynne, graniczne i mieszane.

7.1.1. Tarcie ślizgowe

Z tarciem ślizgowym mamy do czynienia najczęściej. Rozpatrzmy przypadek kiedy ciało znajduje się na płaszczyźnie chropowatej (rys. 7.2).



Rys. 7.2 Reakcje z uwzględnieniem tarcia

Na to ciało działa siła ciężkości F_g i siła F styczna do powierzchni styku. Jeżeli siła F działająca na ciało będzie mniejsza od pewnej wartości granicznej F_t to ciało to pozostanie w spoczynku. W chwili równowagi siła $F = F_t$ i $F_g = F_N$. Wśród praw doświadczalnych charakteryzujących tarcie można wymienić:

- 1) siła tarcia ślizgowego między dwoma ciałami jest wprost proporcjonalna do składowej normalnej siły utrzymującej ciało w zetknięciu

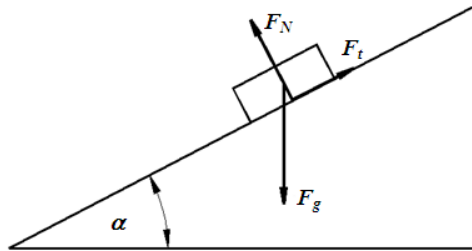
$$F_t = \mu \cdot F_N$$

współczynnik proporcjonalności nazywa się współczynnikiem tarcia statycznego i jest wielkością bezwymiarową;

- 2) siła tarcia ślizgowego nie zależy od wielkości powierzchni zetknięcia ciał;
- 3) współczynnik tarcia zależy od materiału stykających się ciał oraz od stanu ich powierzchni.

7.1.2. Tarcie na równi pochyłej

Przeanalizujmy przypadek kiedy na chropowatej równi pochyłej, której kąt nachylenia α można zmieniać, znajduje się ciało o ciężarze F_g (rys. 7.3).



Rys. 7.3 Rozkład sił na równi z uwzględnieniem siły tarcia

Na ciało działają siły: siła ciężkości F_g oraz reakcja równi rozłożona na składową normalną N i siła tarcia F_t . Siłę ciężkości możemy rozłożyć na dwie składowe $F_g \cdot \sin \alpha$ równoległą do równi i składową $F_g \cdot \cos \alpha$ normalną.

Jeżeli między równią a znajdującym się ciałem występuje tarcie, relacje między siłami przybiorą postać:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = F_t - F_g \cdot \sin \alpha = 0 \\ \sum F_{iy} = F_N - F_g \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Z powyższych równań otrzymujemy zależności:

$$\frac{F_t}{F_N} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$F_t = \mu \cdot F_N$$

$$\mu = \frac{F_t}{F_N} = \operatorname{tg} \alpha$$

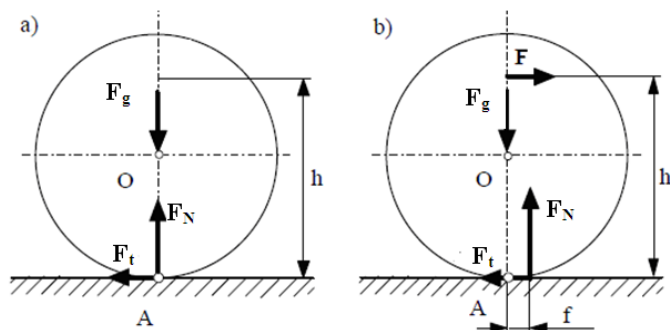
Widzimy więc, że współczynnik tarcia μ jest równy tangensowi kąta nachylenia równi pochyłej względem poziomemu. Jeżeli przy kącie $\alpha \leq \alpha_{gr}$ pochylenia

równi ciało będzie w równowadze bez żadnej dodatkowej siły utrzymującej to taką równię nazywamy samohamowną.

7.1.3. Tarcie toczone

Tarcie toczone jest oporem toczenia występującym przy toczeniu jednego ciała po drugim. Najczęściej występuje np. pomiędzy elementami łożyska tocznego, między oponą a nawierzchnią drogi.

Jeżeli do walca spoczywającego na poziomej płaszczyźnie przyłożymy siłę czynną F (rys. 7.4a) to reakcja normalna N zostanie przesunięta względem pionowej osi walca o pewną odległość f w kierunku działania siły (rys. 7.4 b).



Rys. 7.4 Tarcie toczone przed rozpoczęciem toczenia (a) i po rozpoczęciu toczenia(b)

Na rysunku 7.4 b występują dwa momenty, które możemy ze sobą porównać:

$$F \cdot h = F_N \cdot f$$

$$F = F_N \frac{f}{h}$$

występujący w tym wzorze współczynnik proporcjonalności f nazywamy współczynnikiem tarcia toczonego.

Aby walec nie zaczął się toczyć, musi być spełniony warunek:

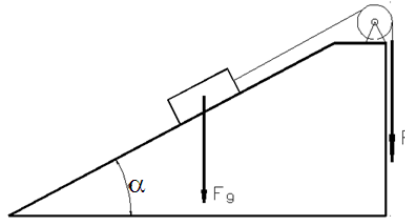
$$F \leq F_N \frac{f}{h}$$

W przypadku gdy $f/h < \mu$ walec zacznie się toczyć, zanim nastąpi poślizg. Zwykle f/h jest znacznie mniejsze od współczynnika tarcia μ .

7.2. Przykłady do wykonania

Zadanie 1

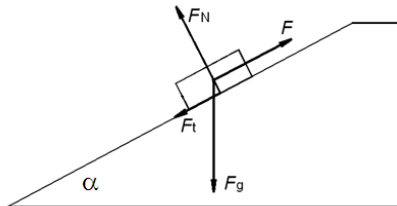
Wyznaczyć najmniejszą wartość siły F potrzebnej do przesunięcia ciała o ciężarze $F_g = 1000 \text{ N}$ w górę równi o kącie pochylenia 30° . Sposób przyłożenia siły pokazano na rys. 7.5 Współczynnik tarcia między ciałem a równią wynosi $\mu = 0,3$. Tarcie na osi krążka pomijamy.



Rys. 7.5 Rysunek do zadania 1

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania zadania z równią pochyłą należy narysować rozkład sił działających na dane ciało. Na oswobodzone z więzów ciało działają następujące siły: siła ciężkości F_g , siła reakcji linki F , reakcja normalna równi F_N oraz siła tarcia F_t (rys. 7.6).



Rys. 7.6 Reakcje z uwzględnieniem tarcia

Następnie definiujemy:

- ciężar ciała:

$$F_g := 1000 \text{ N}$$

- współczynnik tarcia:

$$\mu := 0.3$$

- kąt pochylenia równi:

$$\alpha := \frac{\pi}{6}$$

Układamy dwa równania równowagi (suma sił na oś x i y) poprzedzając je napisem Given. Przyjmujemy, że oś x jest równoległa do równi a oś y prostopadła. Przyjmujemy również, że $F_t = \mu \cdot F_N$.

Given

$$F - \mu \cdot F_N - F_g \cdot \sin(\alpha) = 0$$

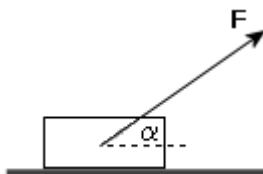
$$F_N - F_g \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome.

$$\text{Find}(F_N, F) \rightarrow \begin{pmatrix} 866.025 \text{ N} \\ 759.807 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Zadanie 2

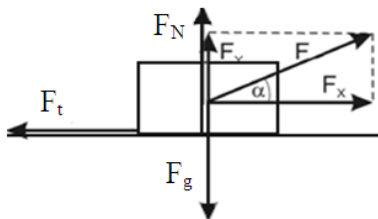
Klocek o masie $m=58,9 \text{ kg}$ porusza się ze stałą prędkością po poziomej powierzchni pod wpływem siły $F=900 \text{ N}$, działającej pod kątem $\alpha=\pi/6$ do powierzchni rys. 7.7. Współczynnik tarcia klocka o podłoże jest równy $\mu=0,3$. Oblicz wartość siły tarcia F_t działającej na klocek.



Rys. 7.7 Rysunek do zadania 2

Rozwiązanie:

Należy narysować rozkład sił działających na dane ciało przy czym siłę F rozkładamy na dwie składowe: F_x – działającą równoległe do podłoża i F_y – prostopadłą do podłoża.



Rys. 7.8 Rozkład sił działających na ciało

Wszystkie siły, jakie działają na ciało, muszą się równoważyć, a zatem ich składowe wzdłuż osi prostopadłej i równoległej do podłoża również muszą się równoważyć, czyli:

$$F_x - F_t = 0$$

$$F_N + F_y - F_g = 0$$

Z rysunku wynika, że

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

W programie Mathcad definiujemy:

- ciężar ciała:

$$F_g := 589\text{N}$$

- współczynnik tarcia

$$\mu := 0.3$$

- siłę działającą na ciało

$$F := 900\text{N}$$

- kąt pod jakim działa siła F

$$\alpha := \frac{\pi}{6}$$

- składową równoległą i prostopadłą do podłoża

$$F_x := F \cdot \cos(\alpha)$$

$$F_y := F \cdot \sin(\alpha)$$

Następnie układamy dwa równania – suma sił na oś y oraz $F_t = \mu F_N$ poprzedzając je napisem Given.

Given

$$F_N + F_y - F_g = 0$$

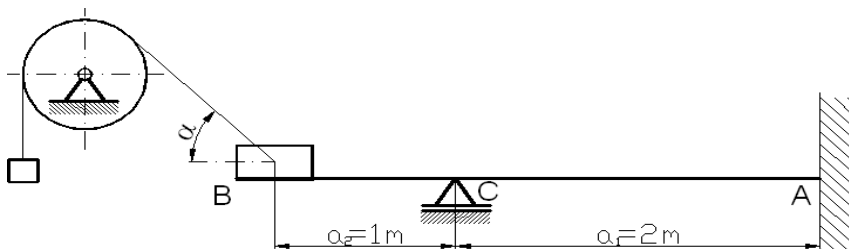
$$F_t - \mu \cdot F_N = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome.

$$\text{Find}(F_N, F_t) \rightarrow \begin{pmatrix} 139.0 \cdot \text{N} \\ 41.7 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Zadanie 3

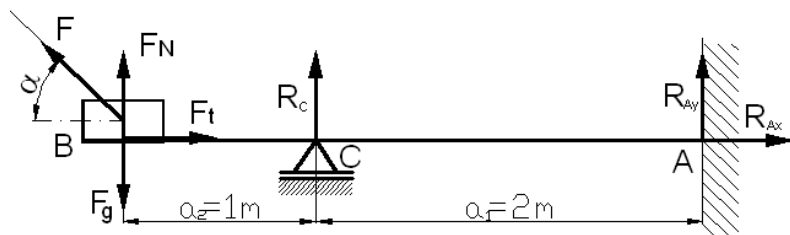
Układ przedstawiony na rys. 7.9 składa się z belki AB, która jest utwierdzona w punkcie A i podparta podporą przesuwczą w punkcie C. Na końcu belki spoczywa klocek o ciężarze $F_g = 3000 \text{ N}$. Do klocka jest przymocowana wiotka linka, przerzucona przez idealny krążek i obciążona ciężarem F . Linka tworzy z poziomem kąt $\alpha = 45^\circ$, a współczynnik tarcia między klockiem i belką wynosi $\mu = 0,2$. Wyznaczyć minimalną wartość ciężaru F , aby klocek nie zsunął się z belki. Dodatkowo wyznaczyć reakcje w podporach A i C.



Rys. 7.9 Obciążenie belki

Rozwiązanie:

Przystępując do rozwiązania zadania należy zaznaczyć rozkład sił działających na dany układ. Na klocek działają następujące siły: siły czynne F i F_g , siła reakcji belki, którą rozłożono na siłę tarcia F_t i siłę normalną F_N (rys. 7.10). Na belkę AB w miejscu utwierdzenia działa reakcja R_A , którą rozłożono na dwie składowe R_{Ax} i R_{Ay} , oraz moment utwierdzenia M_A . W podporze C działa na tę belkę reakcja R_C . Działanie klocka na końcu belki zastąpiono siłą tarcia F_t i reakcją normalną F_N .



Rys. 7.10 Rozkład sił działających na układ z uwzględnieniem tarcia

Następnie definiujemy:

- ciężar klocka:

$$F_g := 3000 \text{ N}$$

- współczynnik tarcia:

$$\mu := 0.2$$

- odległość podpory i kloka od punktu A:

$$a_1 := 2 \text{ m} \quad a_2 := 1 \text{ m}$$

- kąt pod jaką działa linka na klocek:

$$\alpha := 45$$

$$b := \sin(\alpha \cdot \text{deg}) = 0.707$$

$$c := \cos(\alpha \cdot \text{deg}) = 0.707$$

Układamy dwa równania równowagi (suma sił na oś x i y) dla kloka znajdującego się w końcowej części belki poprzedzając je napisem Given. Przyjmujemy również, że $F_t = \mu \cdot F_N$:

Given

$$F \cdot c - F_t = 0$$

$$F_N + F \cdot b - F_g = 0$$

$$F_t := \mu \cdot F_N$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(F_N, F) \rightarrow \begin{pmatrix} 2500.00 \cdot \text{N} \\ 707.10 \cdot \text{N} \end{pmatrix}$$

Minimalna wartość ciężaru F jaki możemy zaczepić do linki przerzuconej przez krążek wynosi $707,106 \text{ N}$.

Następnie układamy równania równowagi dla belki AB poprzedzając je napisem Given:

Given

$$F_t + R_{A,x} - F \cdot c = 0$$

$$R_{A,y} + R_C + F_N + F \cdot b - F_g = 0$$

$$a_1 \cdot R_C + \sum_{i=1}^2 (a_i \cdot F_N) - \sum_{i=1}^2 (a_i \cdot F_g) + \sum_{i=1}^2 (a_i \cdot F \cdot b) = 0$$

Po ułożeniu równań możemy wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_{A.x}, R_{A.y}, R_C) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wartości reakcji R_A obliczymy z poniższego wzoru:

$$R_A := \sqrt{(R_{A.x})^2 + (R_{A.y})^2} = 0$$

Reakcja w punkcie utwierdzenia wynosi 0 N .

Zadanie 4

Do samodzielnego rozwiązania

Z jaką siłą należy zacząć ciągnąć samochód po asfalcie, jeżeli ciężar samochodu wynosi 15000 N a średnica kół $0,634\text{ m}$ (przyjąć współczynnik tarcia tocznego dla koła gumowego po asfalcie – $f=0,005$).

Zadanie 5

Do samodzielnego rozwiązania

Pod jakim maksymalnym kątem może wjechać samochód terenowy pod górę. Przyjąć współczynnik tarcia ślizgowego dla koła gumowego po piasku z kamieniem $\mu=0,5$.

LITERATURA

1. Bodaszewski W., *Wytrzymałość materiałów z elementami mechaniki konstrukcji*, T. 2, Kielce 2005.
2. Bodnar A., *Wytrzymałość Materiałów*, Podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych, Kraków 2004.
3. Bożenko L., *Maszynoznawstwo dla ZSZ*, Warszawa 1991.
4. Iwulski Z., Klisowski R., *Wyznaczanie sił tnących i momentów zginających w belkach*, Kraków 2009.
5. Jakubowski K., *Mathcad 2000 Professional*, Warszawa 2000.
6. Kozak B., *Mechanika techniczna*, Warszawa 2004.
7. Kubik J., Mielniczuk J., Wilczyński A., *Mechanika techniczna*, Warszawa 1980.
8. Kucharski T., *Mechanika ogólna. Rozwiązywanie zagadnień z MATHCAD-em*, Warszawa 2002.
9. Leyko J., Szmelter J., *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*. Statyka, T. 1, Warszawa 1983.
10. Major M., Major I., *Przykłady zadań z wytrzymałości materiałów z zastosowaniem programu Mathcad*, Częstochowa 2003.
11. Mazanek E., Kania L., Dziurski A., *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn*, Warszawa 2009.
12. Misiak J., *Mechanika ogólna. Zadania z mechaniki ogólnej*. Statyka, Cz. 1, Warszawa 1992.
13. Niezgodziński M., Niezgodziński T., *Zadania z wytrzymałości materiałów*, Warszawa 2009.
14. Pietraszek J., *Mathcad. Ćwiczenia*, Gliwice 2002.
15. Sałata W., *Mechanika ogólna w zarysie*, Poznań 1998.
16. Siuta W., *Mechanika techniczna*, Warszawa 1993.
17. Wolny S., Siemieniec A., *Wytrzymałość materiałów. Teoria. Zastosowanie*, Kraków 2002.
18. *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, red. K. Gołosia i J. Osińskiego, Warszawa 2001.
19. *Skrećanie wałów okrągłych [online]*, [dostęp 12 październik 2011].
Dostępny w World Wide Web:
http://www.sms.am.put.poznan.pl/eskrypty_pliki/podstawymechaniki/11skrecaniewalowokraglych.pdf.
20. *Mechanika techniczna [online]*, [dostęp 12 październik 2011]. Dostępny w World Wide Web: <http://www.matthewz.republika.pl>.
21. *Mathcad instrukcja do ćwiczeń laboratoryjnych z informatyki [online]*, [dostęp 12 październik 2011]. Dostępny w World Wide Web:
http://www.tezet.ps.pl/PLIKI/MATHCAD/MATHCAD_instrukcja_uzupelniona.pdf
22. *Techniki informatyczne [online]*, [dostęp 12 październik 2011].
http://www.kkiem.agh.edu.pl/dydakt/zaoczne/ZR_skrypty/Tech_Inf_T2.
23. *Analiza kinematyczna płaskich układów prętowych [online]*, [dostęp 12 październik 2011]. Dostępny w World Wide Web:
http://www.ikb.poznan.pl/anita.kaczor/materialy_pliki/teoria/teoria_analiza_kin_stat_debinski02.pdf.
24. *Zginanie zadania [online]*, [dostęp 12 październik 2011]. Dostępny w World Wide Web: <http://www.ely.pg.gda.pl/krism/dydaktyka/MCS/zgin.pdf>.