



*Ципріян Коможицкі
Мирон Чернець*

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Р О Д Р Ї С З Н І К І

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

ZBIÓR ZADAŃ Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Cyprian Komorzycki
Myron Czerniec

ZBIÓR ZADAŃ Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW



Politechnika Lubelska
Lublin 2014

Ципріян Коможицкі
Мирон Чернець

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ



Люблінська Політехніка
Люблін 2014

Рецензенти:

Чл.-кор. НАН України, професор, д.т.н. Андрейків О.Є.

Професор, д.т.н. Диха О.В.

У збірнику подано завдання різної складності з таких розділів опору матеріалів: розтяг і стиск, напружений і деформівний стан, зріз, кручення, згин, складний опір, повздовжній згин. Наведено необхідні теоретичні відомості до кожного з розділів. Для ознайомлення з методикою розв'язку завдань подано численні приклади. Збірник задач призначено для студентів механічних (в т.ч. інженерно-педагогічних) спеціальностей вищих навчальних закладів.

Коможицькі Ц., Чернець М. Збірник задач з опору матеріалів. – Люблінська Політехніка, 2014. - 336 с.

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2014

ISBN: 978-83-7947-062-4

Wydawca: Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej
Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej
ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl
www.biblioteka.pollub.pl

Druk: TOP Agencja Reklamowa Agnieszka Łuczak
www.agencjatorp.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl

Nakład: 60 egz.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	7
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ.....	9
Розділ 1. Основні параметри.....	11
1.1. Внутрішні сили.....	11
1.2. Закон Гука: основні залежності, постійні матеріалів.....	17
Розділ 2. Розтяг і стиск.....	23
2.1. Аналіз розтягу / стиску стержня.....	23
2.1.1. Визначення основних параметрів.....	25
2.1.2. Різні завдання.....	30
2.2. Перевірочний та проектний розрахунок стержнів.....	33
2.3. Переміщення у стержневих системах.....	42
2.4. Кінетостатичні задачі.....	51
2.5. Статично невизначні задачі.....	53
2.5.1. Одновимірні задачі.....	54
2.5.2. Плоскі задачі.....	64
2.5.3. Просторові задачі.....	82
2.6. Різні завдання.....	83
Розділ 3. Напружений і деформований стан.....	89
3.1. Лінійний напружений стан.....	92
3.2. Плоский напружений стан.....	95
3.3. Об'ємний напружений стан.....	100
3.4. Деформації.....	102
3.5. Співвідношення між деформаціями, напруженнями і переміщеннями.....	103
3.6. Енергія деформації.....	107
Розділ 4. Теорії міцності матеріалів.....	109
4.1. Зведені напруження.....	109
4.2. Оцінка руйнування матеріалу.....	113
4.3. Різні завдання.....	117
Розділ 5. Зріз.....	119
Розділ 6. Кручення.....	125
6.1. Статика стержнів, що зазнають кручення.....	125
6.2. Кручення стержнів з круговими перерізами.....	126
6.3. Кручення стержнів з некруговими перерізами.....	138
6.4. Кручення стержнів з тонкостінними незамкнутими перерізами...	140
6.5. Кручення стержнів з тонкостінними замкнутими перерізами.....	145

6.6. Статично невизначні задачі.....	151
6.7. Різні завдання.....	155
Розділ 7. Згин.....	157
7.1. Статика зігнутих балок.....	157
7.2. Геометричні характеристики перерізів стержнів при згині.....	178
7.3. Прямий згин.....	188
7.3.1. Чистий згин.....	188
7.3.2. Згин без врахування дії поперечної сили.....	193
7.3.3. Згин з врахуванням дії поперечної сили.....	208
7.4. Прямий згин з врахуванням переміщень.....	222
7.4.1. Прогин балок і кути повороту поперечних перерізів.....	222
7.4.2. Розрахунок балок з врахуванням переміщень.....	247
7.5. Косий згин.....	252
7.6. Позацентровий розтяг / стиск.....	256
7.7. Стержні з криволінійною віссю.....	268
7.8. Статично невизначні задачі.....	273
7.9. Різні завдання.....	284
Розділ 8. Вибрані випадки складного опору.....	297
8.1. Згин із крученням.....	297
8.2. Різні випадки складного опору.....	301
8.3. Виті пружини.....	308
Розділ 9. Стійкість стиснутих довгих стержнів.....	313
9.1. Рівновага при поздовжньому згині.....	314
9.2. Стійкість поза границею пружності.....	319
9.3. Різні завдання.....	324
Розділ 10. Вибрані завдання.....	329

ПЕРЕДМОВА

"Збірник задач з опору матеріалів" містить завдання з основних розділів опору матеріалів, які охоплюють визначення внутрішніх сил, аналіз напруженого і деформованого стану, питання перевірного і проектного розрахунку для випадків простого опору, вибраних випадків складного опору та повздовжній згин.

На початку кожного підрозділу наведено основні формули і пояснення, необхідні для розв'язку задач. Реалізується принцип помірною наростання складності задач так, щоб наступні завдання не були простішими від попередніх, що дозволяє викладачеві проводити логічний вибір завдань для занять, а також завдань до самостійних чи контрольних робіт.

Збірник задач призначений як для роботи під керівництвом викладача, так і для самостійного вивчення опору матеріалів. Сприяють цьому теоретичні пояснення, вказівки щодо розв'язку частини задач, а також розв'язки деяких з них.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Величина	Символ	Одиниця розмірності
Довжина	L, l, s	м (метр)
Площа перерізу	F, S	м^2
Товщина	δ	м
Об'єм	V	м^3
Час	t	с (секунда)
Кут	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \varphi$	радіан
Швидкість	v	м/с
Кутова швидкість	ω	рад/с
Маса	m	кг
Густина	ρ	$\text{кг}/\text{м}^3$
Питома вага	γ	$\text{Н}/\text{м}^3$
Сила	P, W, R	Н (ньютон)
Нормальна сила до перерізу	N	Н
Дотична сила до перерізу	T	Н
Вага	Q, G	Н
Розподілене навантаження	q	Н/м
Момент	M	Нм
Згинальний момент	$M_{зг}$	Нм
Крутний момент	M_k	Нм
Тиск	p	$\text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}$ (Паскаль)
Нормальне напруження	σ	$\text{Н}/\text{м}^2$
Дотичне напруження	τ	$\text{Н}/\text{м}^2$
Відносна повздовжня деформація	ε	—
Кутова деформація (кут зсуву)	γ	—
Модуль пружності (модуль Юнга)	E	$\text{Н}/\text{м}^2$
Модуль пружності при зсуві	G	$\text{Н}/\text{м}^2$
Коефіцієнт Пуассона	μ	—
Границя пропорційності, пружності, міцності	$\sigma_{пц}, \sigma_{пр}, \sigma_v$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Границя плинності	σ_T	$\text{Н}/\text{м}^2$
Умовна границя плинності	$\sigma_{0,2}$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Коефіцієнт запасу міцності	n	—
Допустимі напруження на розтяг	$[\sigma_p]$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Допустимі напруження на стиск	$[\sigma_c]$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Допустимі напруження на зріз	$[\tau_{зр}]$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Головні напруження	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Головні деформації (лінійні)	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Температура	T	$^{\circ}\text{C}, \text{K}$
Коефіцієнт лінійного розширення	α	$\text{м}/\text{м}^{\circ}\text{C}$
Коефіцієнт тертя	f	—
Момент інерції плоского перерізу відносно осей x і y	I_x, I_y	м^4
Відцентровий момент інерції	I_{xy}	м^4
Полярний момент інерції	I_o	м^4
Радіус кривини	ρ	м
Енергія деформації	U	Нм = Дж
Робота	A	Нм
Потужність	P	$\text{Нм}/\text{с} = \text{Вт}$
Прискорення земного тяжіння	g	$\text{м}/\text{с}^2$

Розділ 1

Основні параметри

1.1. Внутрішні сили

1. Внутрішні сили в довільному перерізі тіла, а точніше їх результуючі – головний вектор сили і головний вектор моменту, визначаються методом уявних перерізів. У даному перерізі розділяють тіло на дві частини, одну з них (довільну) відкидають, а всі зовнішні сили, що діють на відкинуту частину, зводяться до центру ваги перерізу частини, яка залишилася. Отримують таким чином узагальнені результуючі внутрішніх сил – узагальнену силу і узагальнений момент, що діють в перерізі частини тіла, яка залишилася. З практичних міркувань, необхідними є також обчислення складових головних векторів. У загальному випадку це будуть три складові вектора сили F і три складові вектора моменту M .

Зокрема:

для вектора F : нормальна N до перерізу і дотична T .

для вектора M : нормальна $M_{ск}$ (скручуючий момент) і дотична $M_{зг}$ (згинальний момент).

2. Правильним теоретично, але більш трудомістким при визначенні внутрішніх сил є спосіб відділення однієї частини тіла, відрізаної уявною площиною, і прикладення в цьому перерізі у загальному випадку шести складових внутрішніх сил, які можна визначити, записавши і розв'язавши шість рівнянь рівноваги.

1. Розрахувати внутрішні сили в перерізі а-а пластини, навантаженої як на Рис. 1.
Дані: $P = 120 \text{ кН}$; $l = 6 \text{ м}$.

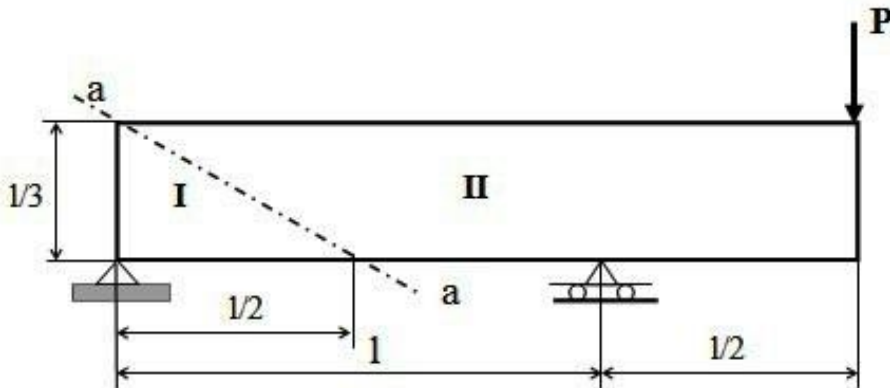


Рис. 1

Розв'язок

Обчислюють з рівнянь статки реакції опор на пластину, відкидають частину I, як показано на Рис. 2, а сили, що діють на цю частину, зводять до центру ваги перерізу а-а частини II.

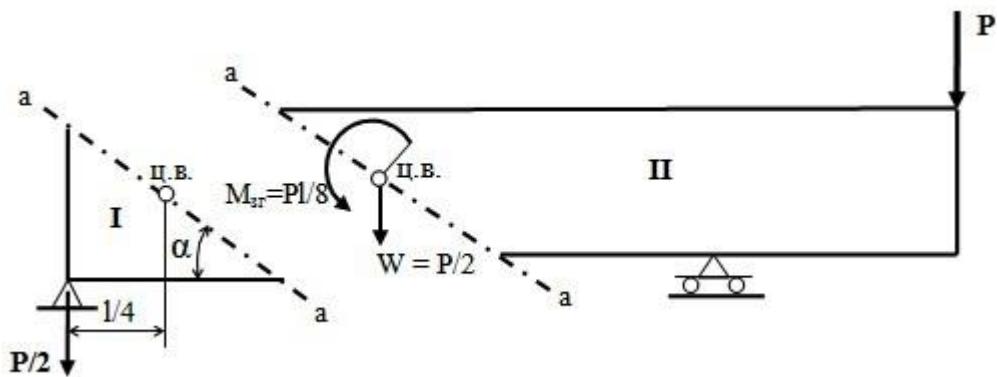


Рис. 2

Отримують внутрішні сили, що діють в перерізі а-а частини II як показано на Рис. 3.

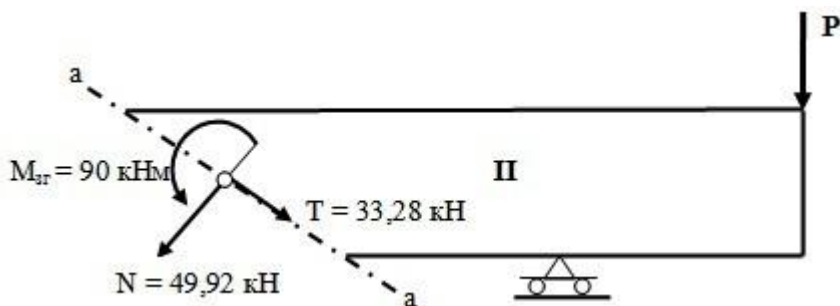


Рис. 3

У перерізі а-а (Рис. 3) діють:

- згинальний момент $M_{зг} = P/2 \cdot l/4 = Pl/8 = 90 \text{ кНм}$;
- розтягуюча сила $N = W \cos \alpha = P/2 \cdot 3/\sqrt{13} \cong 49,92 \text{ кН}$;
- зрізаюча сила $T = W \sin \alpha = P/2 \cdot 2/\sqrt{13} \cong 33,28 \text{ кН}$.

2. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А пластини з вирізом (Рис. 4). Дані: $P = 16 \text{ кН}$; $h = 8 \text{ см}$.

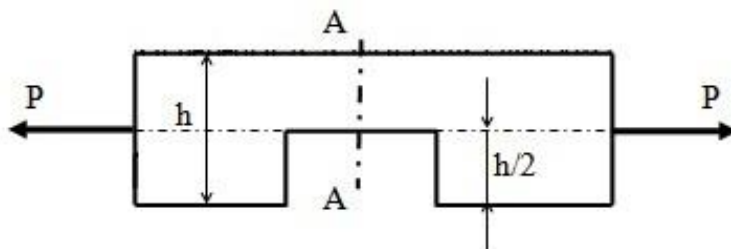


Рис. 4

3. Визначити складові внутрішніх сил в перерізі А-А плоского елемента, навантаженого як подано на Рис. 5. Дані: $P = 32 \text{ кН}$; $a = 1 \text{ м}$; $l = 4a$.

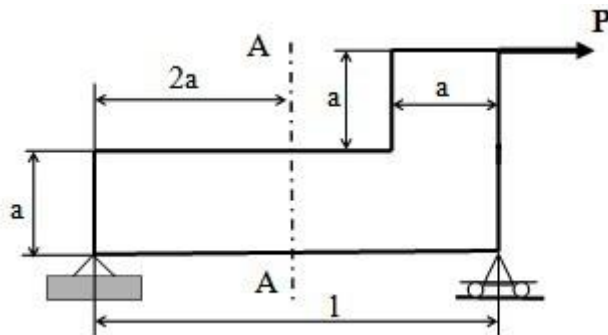


Рис. 5

4. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А плоского елемента, показаного на Рис. 6. Дані: $P = 64 \text{ кН}$; $l = 1,8 \text{ м}$; $h = l$.

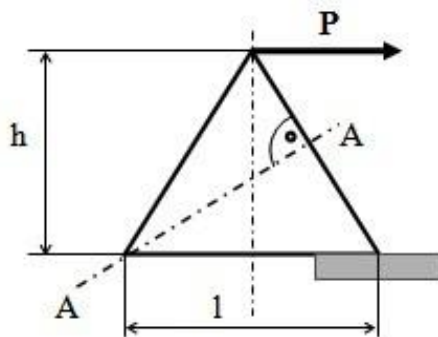


Рис. 6

5. Плоский трикутний елемент з жерсті навантажений силою P (Рис. 7). Обчислити внутрішні сили в перерізі А-А. Дані: $P = 120 \text{ кН}$; $b = 40 \text{ см}$; $h = 30 \text{ см}$.

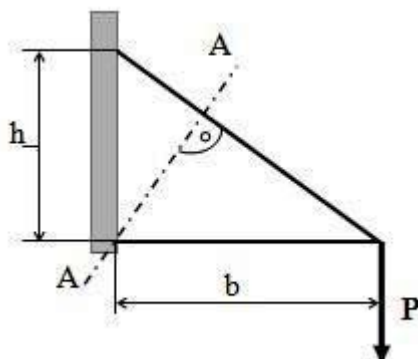


Рис. 7

6. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А пластини, показаної на Рис. 8.
Дані: $P = 24 \text{ кН}$; $l = 120 \text{ см}$.

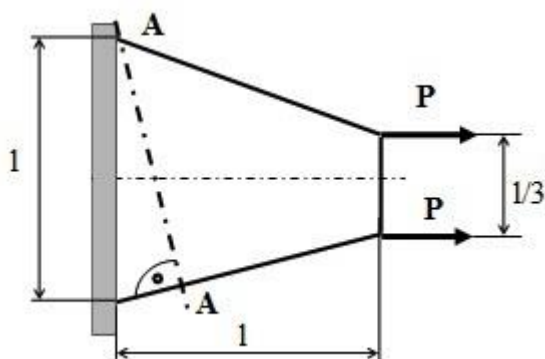


Рис. 8

7. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А пластини, показаної на Рис. 9.
Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $a = 50 \text{ см}$.

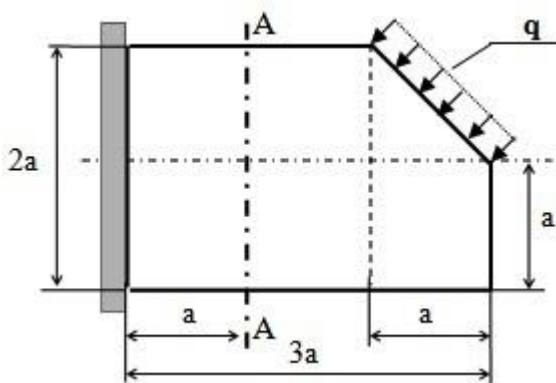


Рис. 9

8. Розрахувати складові внутрішніх сил в перерізі А-А плоского елемента, показаного на Рис. 10. Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$.

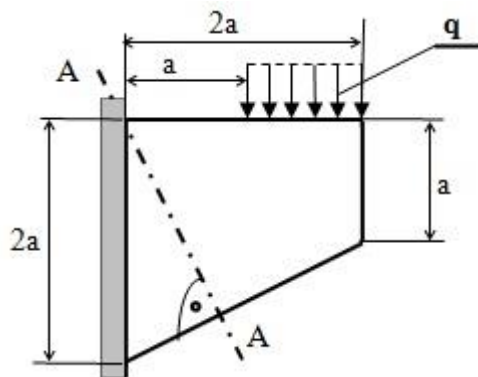


Рис. 10

9. Визначити внутрішні сили в перерізі А-А плоского елемента, показаного на Рис. 11. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 40 \text{ см}$; $P = 2qa$.

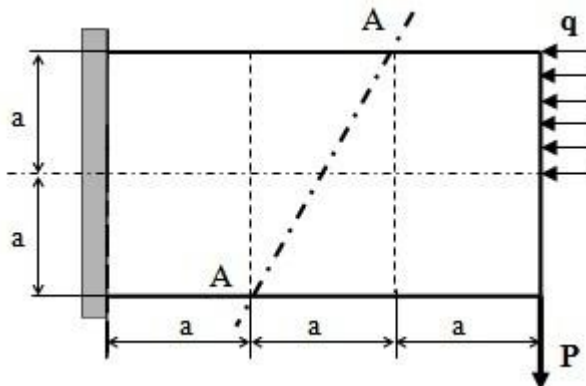


Рис. 11

10. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А пластини, показаної на Рис. 12. Дані: $q = 24 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $a = l/2$; $b = l$.

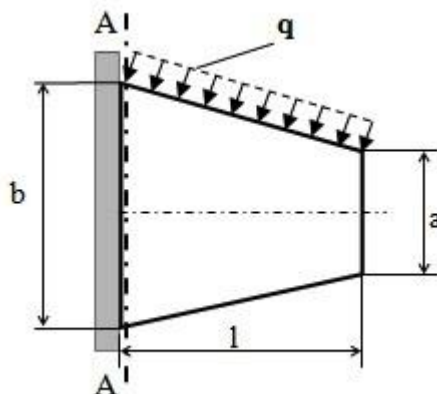


Рис. 12

11. Розрахувати складові внутрішніх сил в перерізі А-А плоского навантаженого елемента (Рис. 13). Дані: $q = 24 \text{ кН/м}$; $a = 80 \text{ см}$.

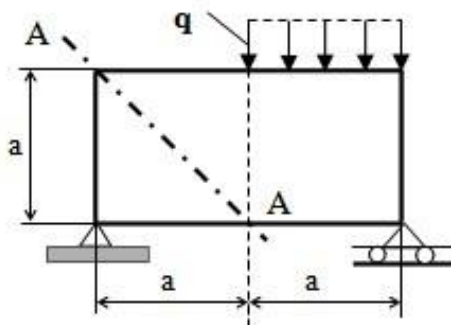


Рис. 13

12. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А плоского елемента, показаного на Рис. 14. Дані: $q = 48 \text{ кН/м}$; $l = 80 \text{ см}$; $h = 0,75l$.

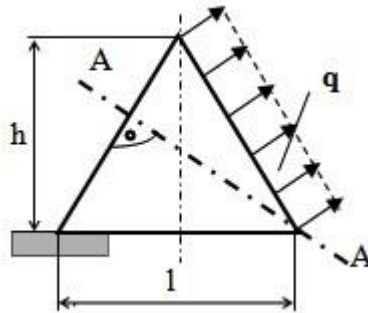


Рис. 14

13. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А плоскої балки, показаній на Рис. 15. Дані: $q = 12 \text{ кН/м}$; $l = 1,6 \text{ м}$; $h = l/4$.

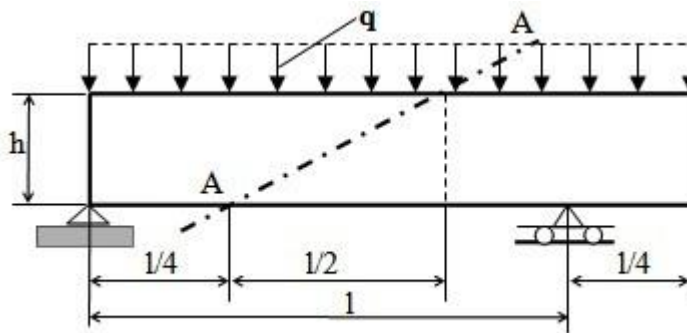


Рис. 15

14. Розрахувати внутрішні сили в перерізі а-а плоского елемента, закріпленого і навантаженого як показано на Рис. 16. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 80 \text{ см}$.

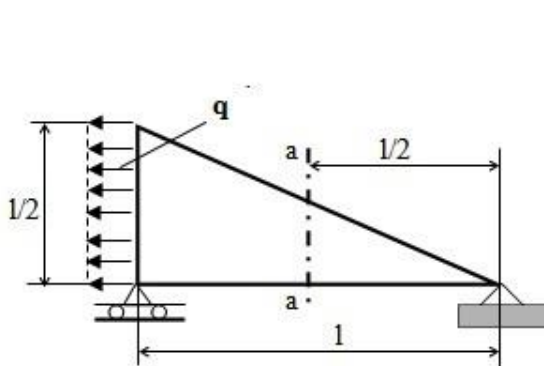


Рис. 16

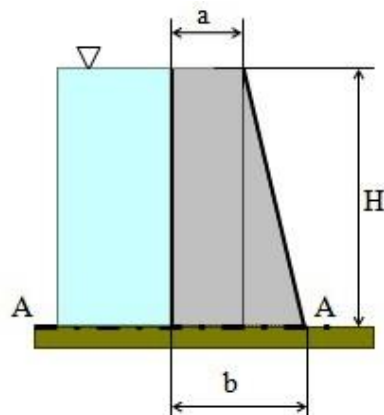


Рис. 17

15. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А в основі відрізка греблі (Рис. 17) довжиною 1. Дані: $a = 2$ м; $b = 2a$; $H = 4a$; $\gamma_v = 10$ кН/м³ – питома вага води; $\gamma_6 = 24$ кН/м³ – питома вага бетону.
16. Побудувати епюри внутрішніх сил у стержні, навантаженому силами як подано на Рис. 18. Дані: $P = 20$ кН; $l = 4$ м; $\alpha = 30^\circ$.

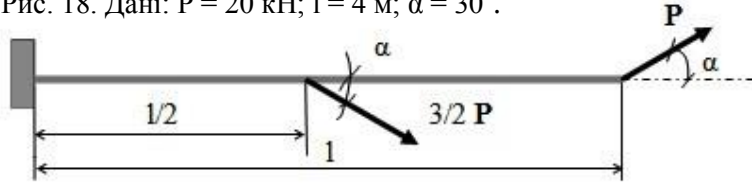


Рис. 18

17. Щит товщиною $\delta = 1$ см з вирізом (Рис. 19) обертається з кутовою швидкістю $\omega = 50$ с⁻¹. Розрахувати внутрішні сили в перерізі А-А щита. Дані: $r = 20$ см; $\gamma = 80$ кН/м³ – питома вага матеріалу щита.

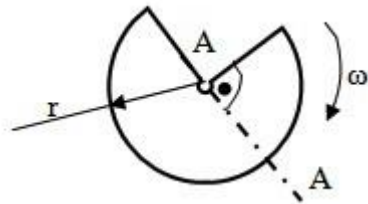


Рис. 19

1.2. Закон Гука: основні залежності, постійні матеріалів

1. Призматичний стержень довжиною l і поперечним перерізом F , розтягуваний силами P (Рис. 20), при пружній деформації видовжиться на величину Δl

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF},$$

де: EF – жорсткість стержня.

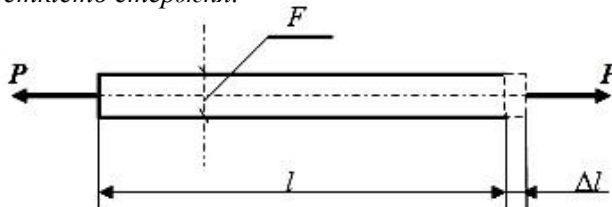


Рис. 20

2. Елемент з ізотропного матеріалу з одиничними розмірами під дією напружень σ (Рис. 21), видовжиться на $\epsilon = \sigma / E$ і змінить поперечні розміри на $\epsilon_n = -\mu\epsilon$, де: μ – коефіцієнт Пуассона, E – модуль пружності (модуль Юнга).

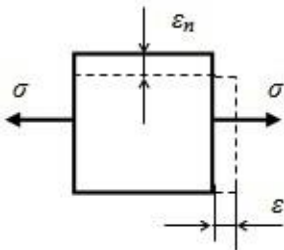


Рис. 21

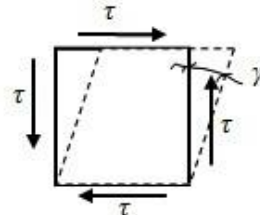


Рис. 22

3. Елемент з ізотропного матеріалу, навантажений дотичними напруженнями τ як показано на Рис. 22 (стан чистого зрізу), деформується на кут γ рівний:

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

де G - модуль пружності II роду або модуль зсуву (модуль Кірхгофа).

4. Між постійними матеріалів E , G і μ для ізотропних матеріалів існує залежність:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

5. Потенційна енергія пружності в елементі, розтягуваному напруженнями σ , рівна:

$$U_{\sigma j} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Потенційна енергія пружності в елементі в стані чистого зрізу є рівною:

$$U_{\tau j} = \frac{\tau^2}{2G}.$$

6. Потенційна енергія пружності в елементарному відрізку стержня довжиною dx , розтягнутого силами N , рівна:

$$dU_N = \frac{N^2 dx}{2EF}.$$

Потенційна енергія пружності в призматичному стержні довжиною l , розтягнутому силами P , рівна:

$$U_N = \frac{P^2 l}{2EF}.$$

18. Дюралевий елемент ($E = 7,5 \cdot 10^4$ МПа), що знаходиться в стані чистого зрізу (Рис. 23), має кут зсуву $\gamma = 2,14 \cdot 10^{-3}$. Обчислити коефіцієнт Пуассона. Дані: $\tau = 60$ МПа.

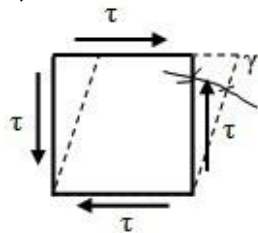


Рис. 23

Розв'язок

За законом Гука для зрізу модуль $G = \tau/\gamma$. Звідси залежність $\tau/\gamma = E/2(1+\mu)$, з якої коефіцієнт Пуассона

$$\mu = \gamma E / 2\tau - 1 = 0,34.$$

19. Обчислити коефіцієнт Пуассона:

- каучуку ($E = 7,9$ МПа; $G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа)
- скла ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа; $G = 2,8 \cdot 10^4$ МПа)
- титану ($E = 1,16 \cdot 10^5$ МПа; $G = 4,4 \cdot 10^4$ МПа).

20. Яку потрібно прикласти силу, щоб сталевий стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) довжиною 5 м і діаметром 2 см видовжити на 1 мм?
21. Сталевий стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) довжиною 3 м і поперечним перерізом 4 см^2 , розтягується силами 50 кН. Обчислити абсолютне і відносне видовження стержня.
22. Стержень довжиною 40 см і діаметром 25 мм, розтягуваний силами 50 кН, видовжився на 0,2 мм. Обчислити модуль пружності I роду матеріалу стержня.
23. Два стержні, сталевий (с) і дюралевий (д), з однаковими довжинами розтягуються однаковими силами і видовжилися на однакову величину. Обчислити діаметр сталевого стержня, якщо діаметр дюралевого стержня становить 10 мм. Дані: $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E_d = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.
24. Чавунна труба із зовнішнім діаметром 30 мм і внутрішнім 28 мм стискається осовою силою, рівною 1000 кН. Обчислити лінійну деформацію вздовж осі труби і величину напружень в поперечному перерізі. $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа.
25. Стержень з модулем пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, довжиною $l = 2,4$ м і квадратним поперечним перерізом розтягується силою $P = 60$ кН. Розрахувати площу поперечного перерізу стержня, якщо відомо, що він видовжився на 2 мм.
26. Скільки складає відносна зміна поперечного перерізу стержня з попереднього завдання після навантаження його силою P , якщо відомо, що коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$?
27. Призматичний сталевий стержень діаметром 4 см, розтягуваний силою 100 кН, видовжився на 3 мм. Яке буде видовження стержня, коли в його поперечному перерізі виникнуть розтягуючі напруження, рівні 200 МПа?
28. Призматичний стержень довжиною l розтягується силою P . Обчислити зміну об'єму стержня, якщо відомо, що: $P = 160$ кН; $l = 10$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.
29. Сталевий призматичний стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) з поперечним перерізом 6 см^2 отримує під час розтягу відносне видовження $\varepsilon = 0,25 \cdot 10^{-3}$. Визначити напруження в стержні і величину розтягуючої сили.
30. Сталевий дріт діаметром 3 мм, розтягуваний силою 314 кН, видовжився на 4 мм. Обчислити довжину дроту. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
31. Електричний тензометр з базою 1 см, наклеєний вздовж призматичного сталевого стержня, видовжився на 0,006 мм. Які напруження виникають в поперечному перерізі стержня? $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
32. Обчислити переміщення вільного кінця ступінчастого стержня, показаного на Рис. 24. Дані: $P = 120$ кН; $l = 1$ м; $F = 10 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

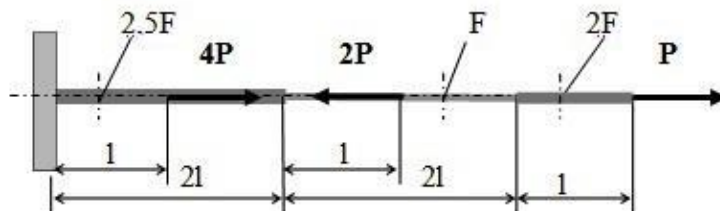


Рис. 24

33. Ступінчастий сталевий стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) складається з трьох відрізків: АВ довжиною 30 см і діаметром 25 мм, ВС довжиною 60 см і діаметром 15 мм, CD довжиною 40 см і діаметром 10 мм. В цьому стержні, розтягнутого силою P , виникають напруження 50 МПа в найтовщій його частині. Обчислити абсолютне видовження стержня. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

34. Розрахувати напруження в окремих відрізках стержня (Рис. 25), а також його абсолютне видовження. Дані: $P = 50$ кН; $l = 2$ м; $D = 2d = 4$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

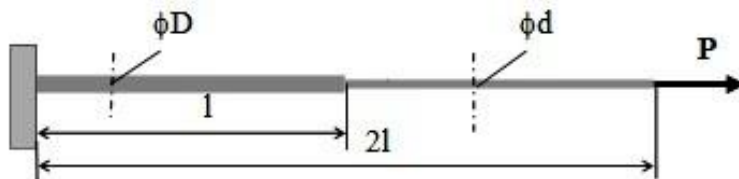


Рис. 25

35. Два з'єднані (мідний (м) і дюралевий (д)) стержні діаметрами d розтягуються силами P (Рис. 26). Розрахувати величину сили P , якщо відомо, що з'єднані стержні видовжилися на $\Delta l = 0,8$ мм. Також відомо: $l = 80$ см; $a = l/2$; $d = 2$ см; $E_m = 1,1 \cdot 10^5$ МПа; $E_d = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

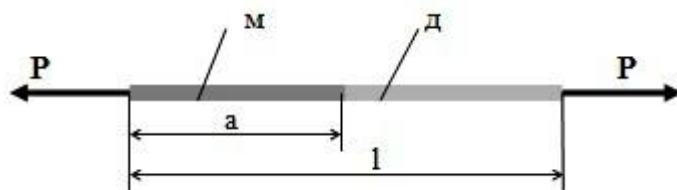


Рис. 26

36. Сталева ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$) труба із зовнішнім діаметром $D = 50$ мм і внутрішнім $d = 30$ мм розтягується силою $P = 200$ кН. Як зміняться параметри D і d ?

37. Приріст сили, яка розтягує зразок діаметром 10 мм і довжиною 100 мм на 2 кН, спричиняє приріст його довжини на 12,5 мкм. Обчислити модуль пружності матеріалу зразка.

38. Стержень діаметром 20 мм і довжиною 10 см, розтягуваний силою 40 кН, видовжився на 0,06 мм, а діаметр його зменшився на 0,004 мм. Розрахувати модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу стержня.
39. Після приєднання до сталевго стержня з модулем пружності $2 \cdot 10^5$ МПа мідного стержня з ідентичними розмірами, видовження під впливом тієї ж розтягуючої сили збільшилося втричі. Обчислити модуль пружності міді.
40. Розтягуваний сталевий стержень з модулем пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа видовжився на 0,33 мм. Мідний стержень з такими ж розмірами, розтягуваний такою ж силою видовжився на 0,66 мм. Обчислити модуль пружності міді.
41. Елементи – гумовий ($E_r = 8$ МПа) і сталевий ($E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа) - розтягвані напруженнями однакової величини. У скільки разів більше енергії закумулює гумовий елемент?
42. Розрахувати потенційну енергію пружності в дюралевому стержні ($E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа) довжиною $l = 1,4$ м, поперечним перерізом $F = 20$ см², що розтягується силами $P = 100$ кН.
43. Призматичний стержень розтягується силою P . Як зміниться потенційна енергія деформації стержня, якщо розтягуюча сила зменшиться у два рази?

Розділ 2

Розтяг і стиск

2.1. Аналіз розтягу / стиску стержня

1. Основними характеристиками в аналізованому призматичному стержні для довільного значення змінної x є:

$N(x)$ – нормальна сила в поперечному перерізі;

$\sigma(x)$ – нормальні напруження в поперечному перерізі;

$\varepsilon(x)$ – осьова деформація стержня;

$u(x)$ – переміщення у напрямку осі x .

2. Нормальні напруження $\sigma(x)$ в поперечному перерізі обчислюється за формулою:

$$\sigma(x) \equiv \sigma = \frac{N(x)}{F}.$$

3. Деформацію $\varepsilon(x)$ обчислюються за формулою:

$$\varepsilon(x) \equiv \varepsilon = \frac{\sigma(x)}{E}.$$

4. Переміщення $u(x)$ обчислюються за формулою:

$$u(x) = u(a) + \int_a^x \varepsilon(\xi) d\xi,$$

де ξ – поточна змінна з проміжку $x \in (a, x)$, $u(a)$ – переміщення в напрямку осі x точки із значенням змінної $x = a$.

5. Прямокутний елемент одиничних розмірів, розміщений в призматичному розтягуваному стержні (Рис. 27), навантажений тільки нормальними напруженнями зазнає лише лінійних деформацій. Деформації і напруження для цього особливого положення елемента називаються головними.

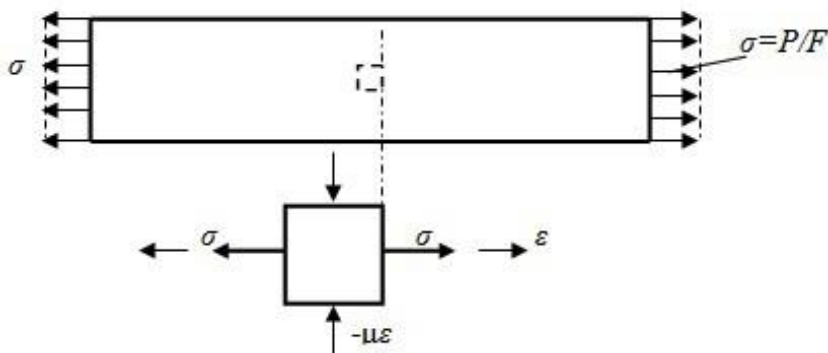


Рис. 27

6. В перерізі стержня, нормальна до якого утворює з віссю стержня кут α (Рис. 28), напруження абсолютні p_α , нормальні σ_α і дотичні τ_α виражаються формулами:

$$p_\alpha = \sigma \cos \alpha ; \quad \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha ;$$

$$\tau_\alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha .$$

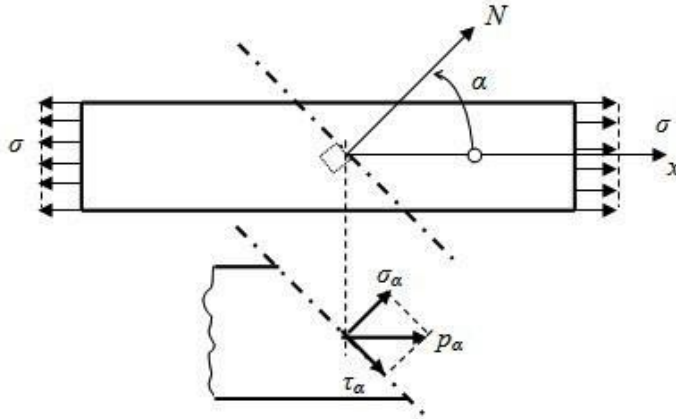


Рис. 28

7. Напруження, що діють на сторонах прямокутного елемента, повернутого на кут α відносно вихідного положення елемента (Рис. 27), та його деформації зображено на Рис. 29.

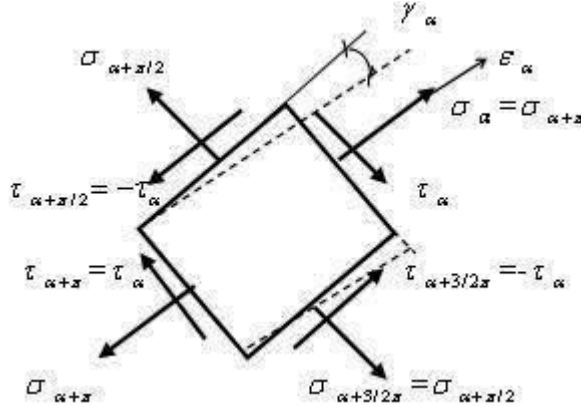


Рис. 29

Деформації повернутого елемента на кут α (Рис. 29) виражаються залежностями:

- лінійна деформація в напрямку, що утворює кут α з віссю стержня

$$\epsilon_\alpha = \epsilon(\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha) ,$$

- деформація зміни форми (кут зсуву) в напрямку, що утворює кут α з віссю x (Рис. 29):

$$\gamma_\alpha = 2\epsilon(1 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha = \epsilon(1 + \mu) \sin 2\alpha .$$

2.1.1. Визначення основних параметрів

44. Для стержня, показаного на Рис. 30, побудувати епюри $N(x)$, $\varepsilon(x)$, а також обчислити зміну відстані між точками А і В. Дані: $P = 32 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $a = l/4$; $F = 2 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

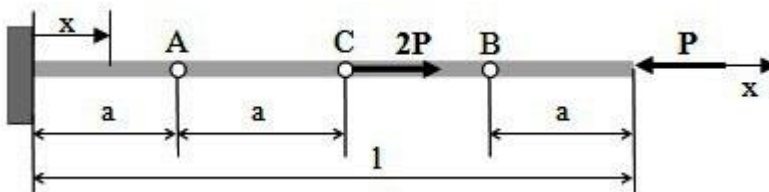


Рис. 30

Розв'язок

На осі x стержня (Рис. 31) зображено два відрізки змінних $N(x)$ і $\varepsilon(x)$:

$$\text{I: } 0 \leq x \leq l/2: N(x) = 2P - P = P; \quad \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{EF} = \frac{P}{EF};$$

$$\text{II: } l/2 \leq x \leq l: N(x) = -P; \quad \varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EF} = -\frac{P}{EF}.$$

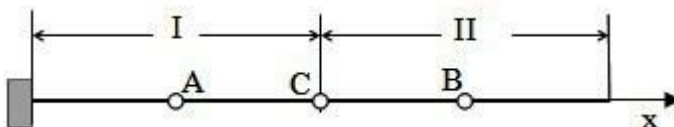


Рис. 31

Епюри $N(x)$ і $\varepsilon(x)$ зображені на Рис. 32.

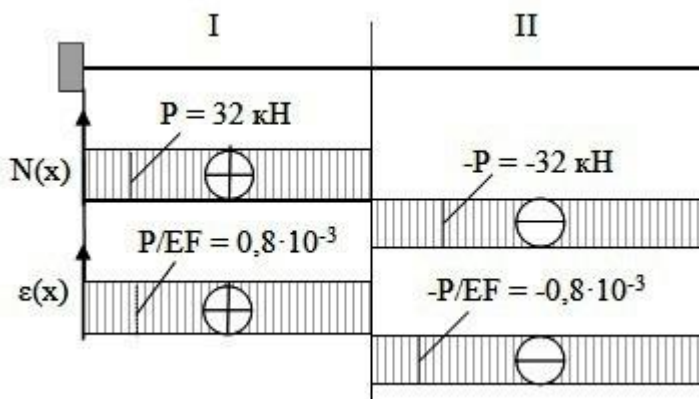


Рис. 32

Зміну відстані між пунктами А і В обчислюють з формули:

$$\Delta AB = u(B) - u(A) = u(3l/4) - u(l/4),$$

$$\text{де: } u(A) = u(l/4) = \int_0^{l/4} \varepsilon(x) dx = \int_0^{l/4} \frac{P}{EF} dx = \frac{Pl}{4EF};$$

$$u(B) = u(C) + \int_{l/2}^{3l/4} \varepsilon(x) dx = \int_0^{l/2} \frac{P}{EF} dx + \int_{l/2}^{3l/4} -\frac{P}{EF} dx = \frac{Pl}{2EF} - \frac{Pl}{4EF} = \frac{Pl}{4EF}.$$

Отримують зміну відстані:

$$\Delta AB = u(B) - u(A) = \frac{Pl}{4EF} - \frac{Pl}{4EF} = 0.$$

Отже, відстань між пунктами А і В не змінилася.

45. Побудувати епюри поздовжніх сил N для стержня, навантаженого як подано на Рис. 33. Дані: $P=10$ кН; $a=1$ м.

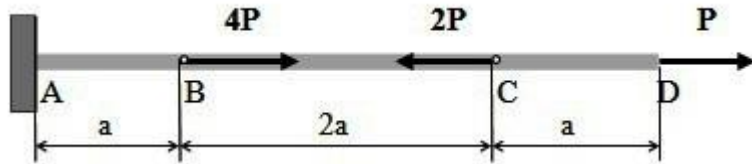


Рис. 33

46. В брусі заміряно лінійну деформацію під кутом α до осі x (Рис. 34). Обчислити величину сили P і побудувати епюру переміщень $u(x)$. Дані: $\alpha = 30^\circ$; $\varepsilon_\alpha = 0,2 \cdot 10^{-3}$; $l = 1,2$ м; $b = 2$ см; $h = 3b$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

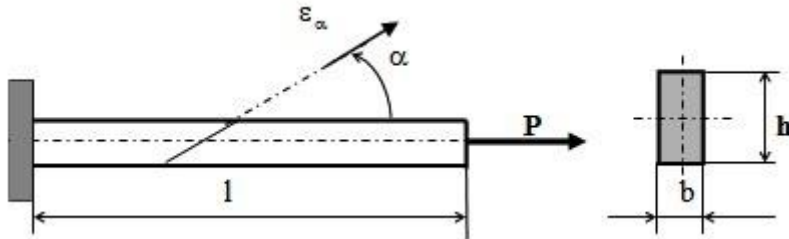


Рис. 34

47. Побудувати епюру напружень в поперечному перерізі стержня (Рис. 35) і обчислити його абсолютне видовження. Дані: $P = 100$ кН; $Q = 2,5P$; $G = 2P$; $l = 4,5$ м; $a = 1$ м; $b = 1,5$ м; $d = 3$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

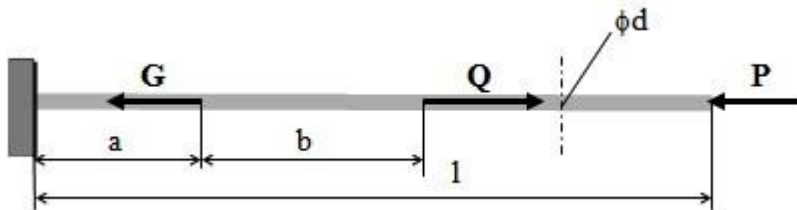


Рис. 35

48. Для стержня, показаного на Рис. 36, визначити закон зміни нормальних сил $N(x)$, напружень $\sigma(x)$, деформацій $\varepsilon(x)$ і переміщень $u(x)$. Подати їх екстремальні значення. Дані: $q = 80 \text{ кН/м}$; $l = 1 \text{ м}$; $P = ql$; $F = 4 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

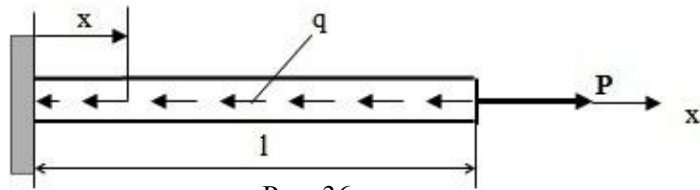


Рис. 36

49. На сталевий стержень, запресований в отвір, діють контактні тиски $p_k = 4 \text{ МПа}$ (Рис. 37). Побудувати епюру нормальних напружень в поперечному перерізі стержня в процесі витягування його з отвору, якщо коефіцієнт тертя між матеріалом стержня і отвору $f = 0,2$. Також відомо: $l = 10 \text{ см}$; $d = 20 \text{ мм}$.

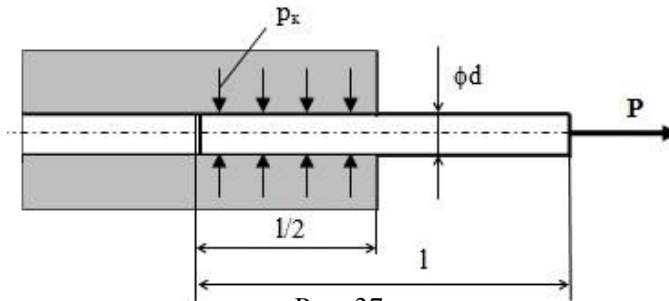


Рис. 37

50. Дріт довжиною $l = 1000 \text{ м}$ тягнуть по жорсткій основі (Рис. 38). Побудувати епюри нормальних напружень $\sigma(x)$ в поперечному перерізі дроту та переміщень $u(x)$. Також відомо: $\gamma = 80 \text{ кН/м}^3$ – питома вага матеріалу дроту; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $f = 0,4$ – коефіцієнт тертя.

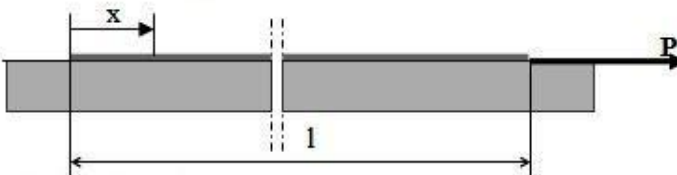


Рис. 38

51. Для призматичного стержня, навантаженого розподіленою силою q (Рис. 39) побудувати епюру нормальних сил в поперечному перерізі і розрахувати переміщення точки А. Дані: $q = 32 \text{ кН/м}$; $l = 80 \text{ см}$; $F = 1 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

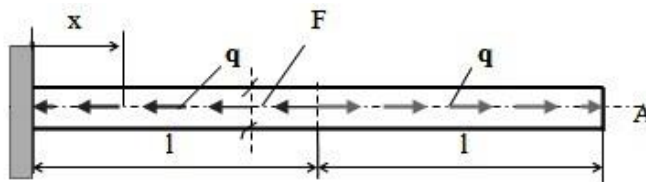


Рис. 39

52. Для стержня, навантаженого силою P і власною вагою (Рис. 40), побудувати епюру нормальних сил у поперечних перерізах. Дані: $\gamma = 80 \text{ кН/м}^3$; $l = 20 \text{ м}$; $F = 4 \text{ см}^2$; $P = 0,5\gamma l F$.

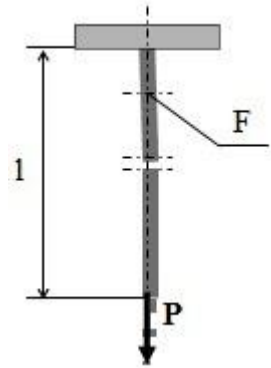


Рис. 40

53. Призматичний сталевий стержень ($E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\gamma = 7,85 \text{ кН/м}^3$) довжиною $l = 100 \text{ м}$ закріплений вертикально верхнім кінцем. Обчислити абсолютне видовження стержня під впливом власної ваги.
54. Канат підйомника довжиною 300 м і перерізом 4 см^2 навантажений кліткою з вагою 40 кН і своєю власною вагою. Побудувати епюру напружень в поперечному перерізі вздовж каната і обчислити відсоткову частку власної ваги каната в його абсолютному видовженні. Також відомо: $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$ – питома вага матеріалу каната; $E = 1,8 \cdot 10^5$ – модуль пружності матеріалу каната.
55. Визначити переміщення точки A і абсолютне видовження мідного стержня, навантаженого власною вагою і силою P як подано на Рис. 41. Дані: $P = 1 \text{ кН}$; $l = 90 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$; $\gamma = 89,3 \text{ кН/м}^3$ – питома вага міді; $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

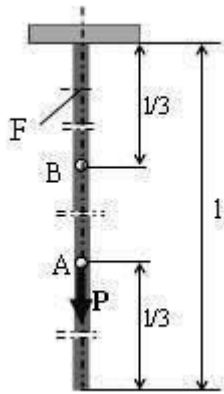


Рис. 41

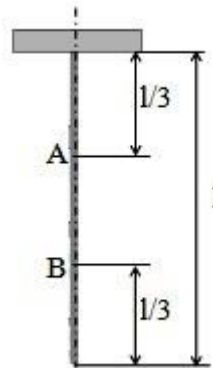


Рис. 42

56. Розрахувати зміну відстані між точками A і B сталевого дроту (Рис. 42), навантаженого власною вагою. Дані: $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$; $l = 1200 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.
57. Побудувати епюри нормальних сил $N(x)$, напружень $\sigma(x)$ і переміщень $u(x)$ для поперечних перерізів ступінчастого стержня, показаного на Рис. 43.

Обчислити екстремальні величини. Дані: $P = 50 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

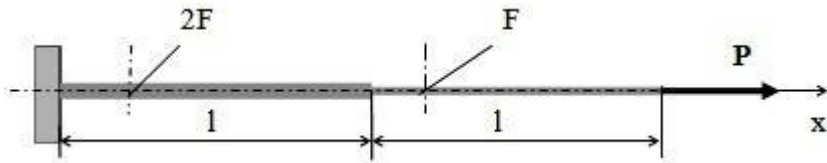


Рис. 43

58. Розрахувати абсолютне видовження ступінчастого стержня, показаного на Рис. 44, і вказати всі точки, які не перемістяться у напрямку осі x . Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $Q = 3/2P$; $l = 2 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

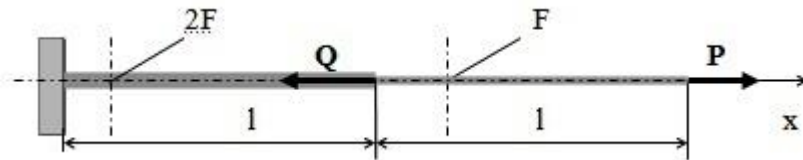


Рис. 44

59. Розрахувати абсолютне видовження ступінчастого стержня, показаного на Рис. 45, і напруження в окремих поперечних перерізах його відрізків. Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $a = 200 \text{ мм}$; $d_1 = 20 \text{ мм}$; $d_2 = 30 \text{ мм}$; $d_3 = 25 \text{ мм}$; $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

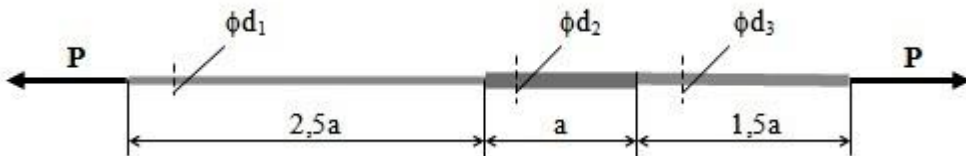


Рис. 45

60. Ступінчастий стержень, навантажений як показано на Рис. 46. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень в поперечних перерізах. Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $a = 1 \text{ м}$; $F = 5 \text{ см}^2$.

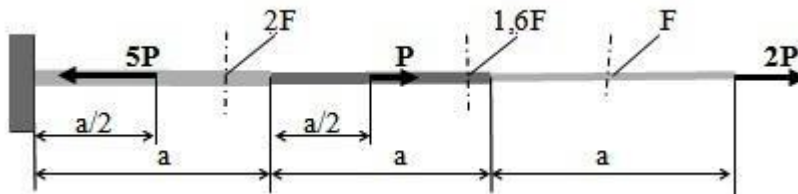


Рис. 46

61. Ступінчастий сталевий стержень (Рис. 47), навантажений власною вагою. Побудувати епюри внутрішніх сил $N(x)$, напружень $\sigma(x)$ і переміщень $u(x)$ для цього стержня.
Дані: $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$; $l = 200 \text{ м}$; $F = 1 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

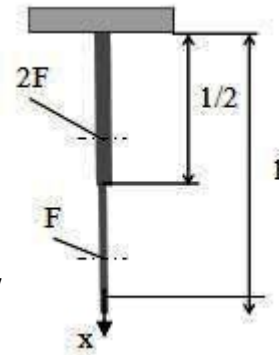


Рис. 47

62. Побудувати епюри нормальних сил, напружень і переміщень як функцію координати x ступінчастого сталевго стержня, показаного на Рис. 48.
Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $q = P/l$; $F = 2 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

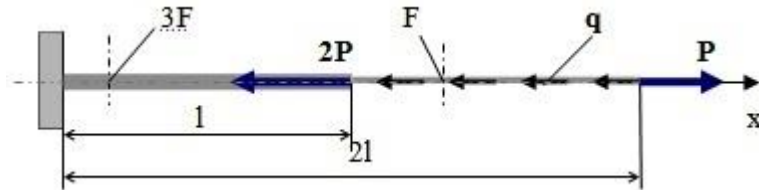


Рис. 48

2.1.2. Різні завдання

63. Сталевий дріт довжиною 2 м і діаметром 1 мм розташований горизонтально і навантажений по осі силою P . Розрахувати напруження в дроті і величину сили P , якщо точка її прикладання переміститься по вертикалі на 4 см . $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.
64. Трос довжиною 10 м складається з п'яти мідних дротів діаметрами 3 мм кожен і одного сталевго дроту діаметром 4 мм . Обчислити модуль пружності троса, якщо модуль пружності міді $E_m = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, а сталі $E_c = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Яким буде видовження троса після навантаження його розтягуючою силою 5 кН ?
65. Обчислити видовження конусного стержня з малою конусністю, навантаженого силою P (Рис. 49). Дані: $P = 400 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $D = 8 \text{ см}$; $d = 4 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

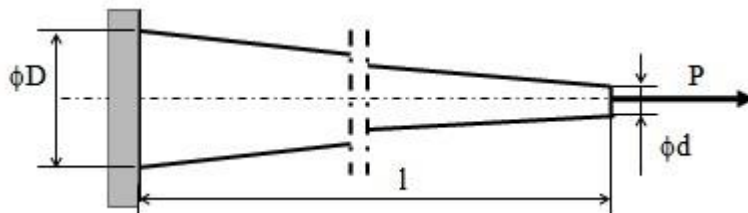


Рис. 49

66. Стержень, що складений із циліндричної та конусної частини (Рис. 50), розтягується силою P . Обчислити його видовження. Дані: $P = 80$ кН; $l = 1,2$ м; $D = 2d = 8$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

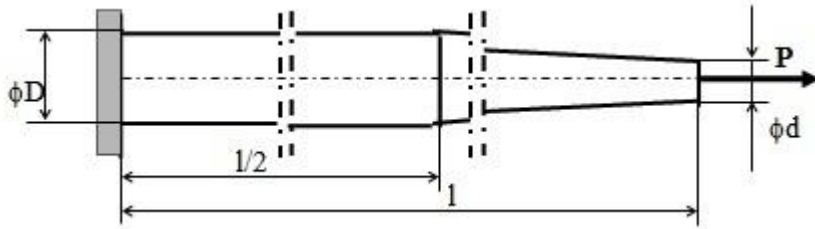


Рис. 50

67. Стержень, показаний на Рис. 51, навантажений власною вагою. Побудувати епюри $N(z)$, $\sigma(z)$, $u(z)$ і $\varepsilon(z)$ і обчислити екстремальні величини. Дані: $\gamma = 78$ кН/м³; $l = 20$ м; $h = 2$ см; $b_1 = 2h$; $b_2 = 20h$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

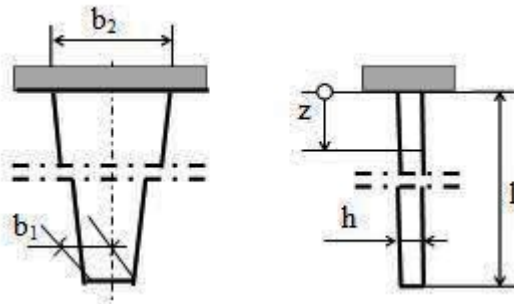


Рис. 51

68. Всередині бруса з поперечним перерізом 4 см $\times$ 1 см просвердлено отвір діаметром 20 мм. Які середні напруження діятимуть в найменшому поперечному перерізі бруса, навантаженого силою 16 кН?

69. На стержень зі змінним поперечним перерізом згідно рівняння $F(x) = 2F_0 \left(1 - \frac{x}{21}\right)$ діє рівномірне навантаження q (Рис. 52). Визначити закон

зміни поздовжніх сил $N(x)$, нормальних напружень $\sigma(x)$, переміщень в напрямку осі x $u(x)$ і деформацій $\varepsilon(x)$. Дані: $q = 20$ кН/м; $l = 1$ м; $F_0 = 5$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

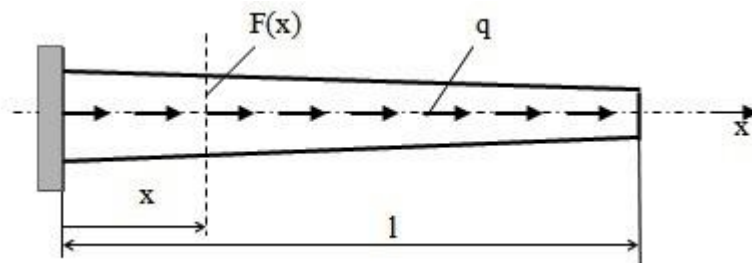


Рис. 52

70. Стержень довжиною l , навантажений силою P і власною вагою, має квадратний поперечний переріз змінної величини, що задовільняє умові рівномірності (Рис. 53). Обчислити видовження стержня. Дані: $P, l, [\sigma_p], E, \gamma, \mu$.

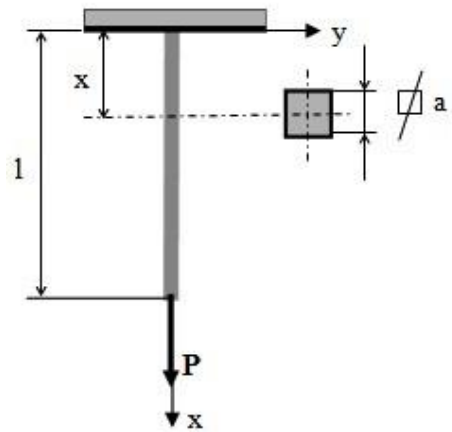


Рис. 53

71. Побудувати епюру переміщень $u(x)$ у напрямку осі x для стержня зі змінним поперечним перерізом, показаного на Рис. 54. Дані: $P = 160 \text{ кН}; l = 1,6 \text{ м}; F_0 = 8 \text{ см}^2; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, F(x) = 3F_0 \left(1 - \frac{2x}{3}\right)$.

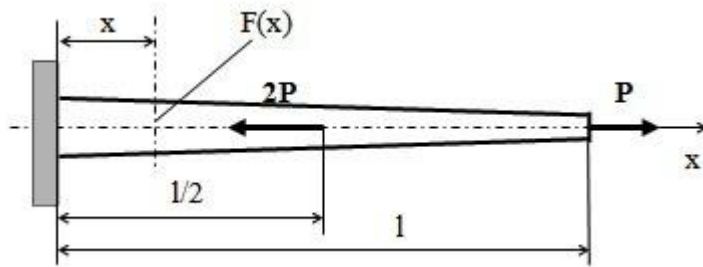


Рис. 54

72. Сталеve кільце у вигляді втулки з середнім діаметром 30 см, товщиною 0,5 мм і шириною 6 см навантажене на її внутрішній поверхні силою 2 МПа. Обчислити деформації на зовнішній поверхні втулки, величину напружень в поперечному перерізі і коефіцієнт запасу міцності. Також відомо: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \sigma_T = 240 \text{ МПа}$.

73. Конус (Рис. 55) навантажений власною вагою. Визначити закон зміни напружень $\sigma(z)$ і переміщень $u(z)$, обчислити їх екстремальні величини. Дані: $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – густина матеріалу; $h = 2 \text{ м}; d_0 = 10 \text{ см}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

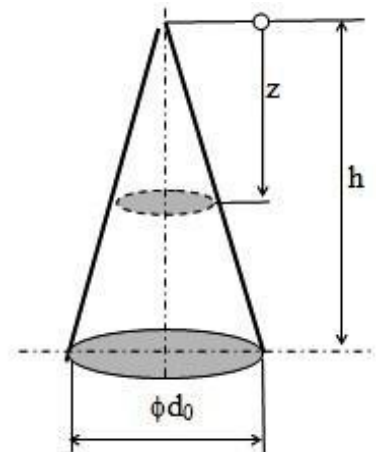


Рис. 55

2.2. Перевірочний та проектний розрахунок стержнів

1. Як при перевірочному, так і при проектному розрахунку, використовується умова міцності для розтягу/стиску:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_{pc}]$$

де: $[\sigma_{p,c}]$ – допустиме напруження на розтяг або стиск.

2. Допустимі напруження обчислюють за формулою:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{Bp} \text{ (або } \sigma_{Tp})}{n_p},$$

$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_{Bc} \text{ (або } \sigma_{Tc})}{n_c},$$

де: σ_{Bp} – границя міцності на розтяг, σ_{Bc} – границя міцності на стиск, σ_{Tp}/σ_{Tc} – границя текучості при розтягу / стиску, n_p , n_c – коефіцієнт запасу міцності відповідно для розтягу і стиску.

3. В реальних конструкціях розраховують величину дійсних нормальних напружень σ і дійсний коефіцієнт запасу міцності за формулою:

$$n = \frac{\sigma_{Bp} \text{ (або } \sigma_{Tp})}{\sigma}.$$

4. В деяких випадках в перевірочних або проектних розрахунках користуються умовою жорсткості при розтягу. Ця умова може бути сформульована відносно деформацій або переміщень :

$$\varepsilon \leq [\varepsilon],$$

$$u \leq [u],$$

де: $[\varepsilon]$ – допустимі деформації, $[u]$ – допустимі переміщення визначеної точки.

74. Якою максимальною розтягуючою силою можна навантажити брус з квадратним перерізом 10 см х 10 см, якщо допустимі напруження розтягу $[\sigma_p] = 120$ МПа?

75. Сталевий брус розтягується силою 40 кН. Розрахувати площу перерізу бруса, якщо допустиме відносне видовження $[\varepsilon] = 0,5 \cdot 10^{-3}$. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

76. Із скількох щонайменше дротів діаметром 3 мм має бути виготовлений сталевий канат, якщо він повинен витримувати розтягуючу силу 100 кН? $[\sigma_p] = 200$ МПа.

77. Визначити необхідний поперечний переріз сталевго бруса, який розтягується силами $P = 80$ кН, якщо необхідний коефіцієнт запасу міцності $n = 2$, $\sigma_T = 240$ МПа.

78. Якою динамічно прикладеною розтягуючою силою P можна навантажити сталевий брус перерізом F з максимально допустимою деформацією $[\epsilon]$. Дані: $F = 4 \text{ см}^2$; $[\epsilon] = 2 \cdot 10^{-3}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $k_d = 2$ – коефіцієнт динамічного навантаження.
79. Брус діаметром 30 мм, виконаний із матеріалу з $[\sigma_p] = 200 \text{ МПа}$ розтягується силою 100 кН. Осьовий отвір якого діаметру для зменшення ваги можна просвердлити в цьому брусі?
80. Розрахувати товщину стінки сталевій труби із зовнішнім діаметром $D = 20 \text{ см}$, яка стискається осьовою силою $P = 500 \text{ кН}$, якщо допустимі напруження на стиск $[\sigma_c] = 100 \text{ МПа}$.
81. Для ступінчастого чавунного бруса (Рис. 56) є необхідним коефіцієнт запасу міцності $n = 4$. Перевірити чи забезпечується ця умова. Дані: $P_1 = 40 \text{ кН}$; $P_2 = 60 \text{ кН}$; $d_1 = 20 \text{ мм}$; $d_2 = 30 \text{ мм}$; $\sigma_{Br} = 150 \text{ МПа}$; $\sigma_{Bc} = 580 \text{ МПа}$.

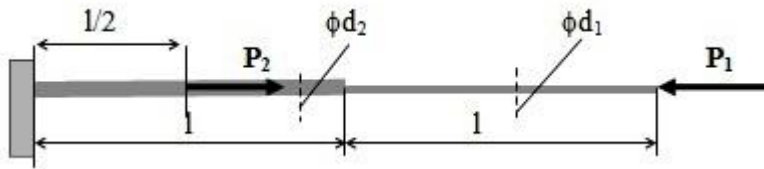


Рис. 56

82. Пластина шириною 20 см і товщиною 1 см розтягується силою 150 кН. З яким максимальним діаметром можна просвердлити отвір в центрі пластини, якщо $[\sigma_p] = 120 \text{ МПа}$? Напруження в поперечному перерізі пластини вважати рівномірно розподіленим.
83. Ємкість закрито кришкою, закріпленою 16 болтами (Рис. 57), так, що сила натягу в кожному з них становить $P_n = 5 \text{ кН}$. Розрахувати напруження у болтах після навантаження ємкості тиском p , якщо діаметр кожного з них становить d_p . Дані: $p = 1 \text{ МПа}$; $d = 40 \text{ см}$; $d_p = 10 \text{ мм}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (для болта); ємкість і кришка є недеформівними.

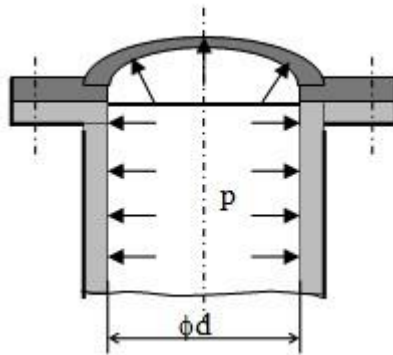


Рис. 57

84. Для бруса діаметром d можна допустити максимальну розтягуючу силу P . Як зміниться величина цієї сили, якщо у брусі просвердлено перпендикулярно до його осі отвір діаметром $d/2$? Розподіл напружень в поперечному перерізі бруса прийняти рівномірним.

85. Циліндрична ємкість з внутрішнім діаметром $d = 50$ см закрита кришками, закріпленими симетрично по колу розташованими болтами з діаметрами стержня $d_p = 12$ мм. Скільки болтів повинно закріплювати кришку, якщо ємкість навантажено внутрішнім тиском $p = 2$ МПа, а допустимі напруження розтягу для матеріалу болта $[\sigma_p] = 100$ МПа?
86. Головка шатуна скріплена двома болтами. Який діаметр повинні мати стержні болтів якщо максимальна сила, що діє на шатун, становить 80 кН? $[\sigma_p] = 100$ МПа.
87. У показаній на Рис. 58 стержневій системі розрахувати необхідний діаметр стержня АВ. Дані: $P = 40$ кН; $a = 1$ м; $[\sigma_p] = 80$ МПа.

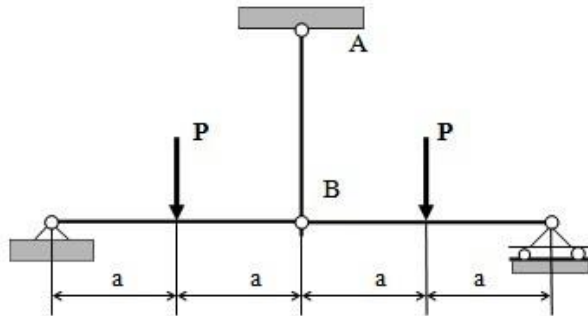


Рис. 58

88. Якою може бути максимальна сила P , що діє на стержневу систему (Рис. 59). Дані: $l = 1$ м; $F = \text{const} = 8 \text{ см}^2$; $[\sigma_p] = 200$ МПа; $[\sigma_c] = 120$ МПа.

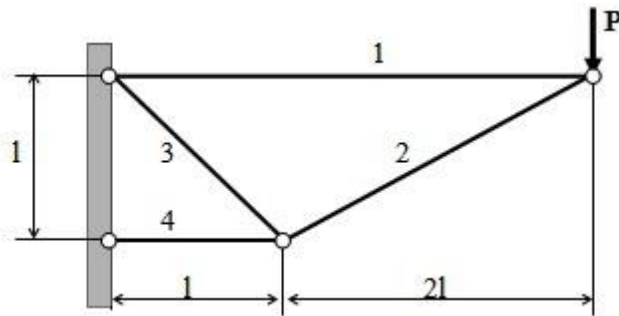


Рис. 59

Розв'язок

З рівнянь статки обчислюють сили в стержнях. Вони становлять:

$$N_1 = 2P; \quad N_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}P; \quad N_3 = \sqrt{2}P; \quad N_4 = -3P.$$

Найбільшими силами, щодо їхньої величини, є:

- розтягуючі в ланці №1;
- стискуючі в ланці №4.

Тому використано дві наступні умови міцності :

$$N_1 = 2P \leq [\sigma_p] F, \quad (1)$$

$$|N_4| = |-3P| \leq [\sigma_c] F. \quad (2)$$

З формул (1) і (2) отримано два числові значення допустимої сили P , менша з яких задовільнятиме умовам задачі.

$$3 (1) \quad P' \leq \frac{[\sigma_p] F}{2} = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80 \text{ кН};$$

$$3 (2) \quad P'' \leq \frac{[\sigma_c] F}{3} = \frac{12 \cdot 8}{3} = 32 \text{ кН}.$$

Допустима сила P становить:

$$P = \min(P', P'') = 32 \text{ кН}.$$

- 89.** Ступінчастий стержень навантажений силами P і Q (Рис. 60). Розрахувати мінімальний розмір поперечного перерізу і абсолютне видовження стержня. Дані: $P = 100 \text{ кН}$; $Q = 40 \text{ кН}$; $a = 1 \text{ м}$; $\sigma_b = 400 \text{ МПа}$; $n_p = 2$; $n_c = 5$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

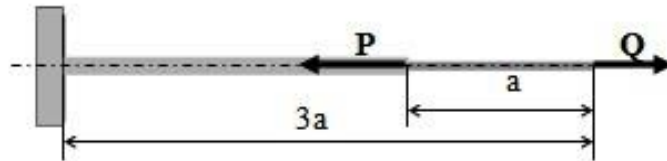


Рис. 60

- 90.** Ферма, виконана зі стержнів однакової довжини l і поперечних перерізів F , навантажена силами P (Рис. 61). Обчислити коефіцієнти запасу міцності для ланок 8, 9 і 10. Дані: $P = 30 \text{ кН}$; $F = 4 \text{ см}^2$; $\sigma_{Tp} = 320 \text{ МПа}$; $\sigma_{Tc} = 240 \text{ МПа}$.

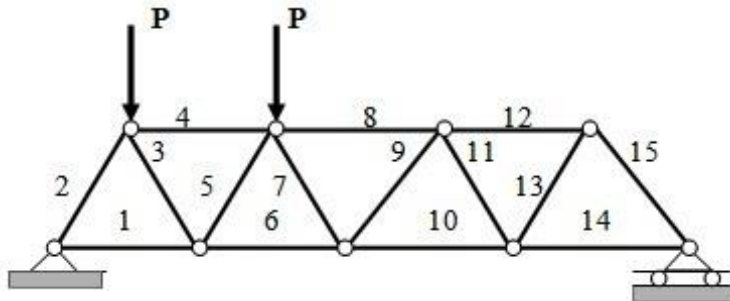


Рис. 61

- 91.** Сталева трубка із зовнішнім діаметром $D = 60 \text{ мм}$, внутрішнім $d = 50 \text{ мм}$ і довжиною $l = 2 \text{ м}$, розтягується силою P . Якою може бути допустима величина сили P , якщо $[\sigma_p] = 200 \text{ МПа}$ і скільки становитиме тоді видовження трубки? $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

- 92.** Невагома жорстка балка AB утримується в горизонтальному положенні з допомогою стержня CD , складеного з двох кутиків (Рис. 62). Обчислити коефіцієнт запасу міцності для стержня CD . Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $l = 2,5 \text{ м}$; $a = 2 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\sigma_b = 320 \text{ МПа}$.

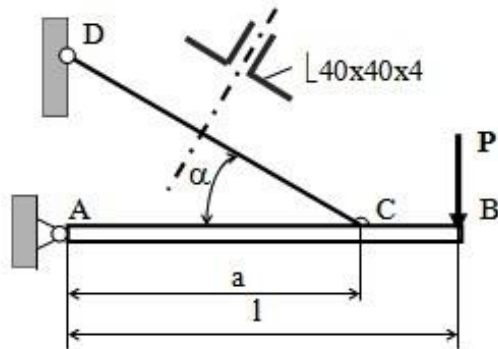


Рис. 62

93. Два стержні, мідний 1 і сталевий 2, з'єднані і навантажені як показано на Рис. 63. Яку максимальну вагу Q може витримати ця стержнева система? Дані: $F_1 = F_2 = F = 10 \text{ см}^2$; $[\sigma_{p1}] = 60 \text{ МПа}$; $[\sigma_{p2}] = 120 \text{ МПа}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

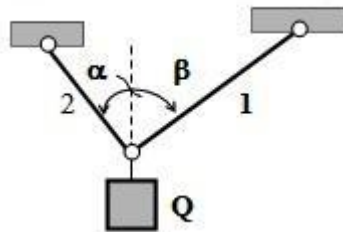


Рис. 63

94. Однорідна жорстка балка АВ вагою Q утримується в горизонтальному положенні трьома стержнями (Рис. 64). Обчислити розміри поперечних перерізів стержнів 1, 2 і 3. Дані: $Q = 800 \text{ кН}$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$; $\alpha = 60^\circ$.

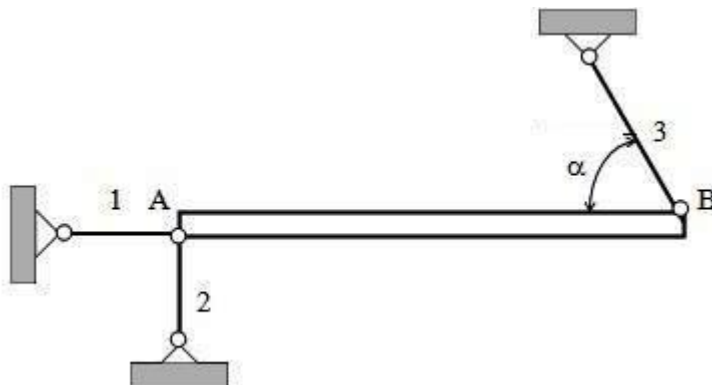


Рис. 64

95. Невагома балка АВ закріпена на трьох стержнях (Рис. 65). Обчислити мінімальні розміри поперечних перерізів стержнів для випадку, коли в точці А підвішено вантаж Q . Дані: $Q = 200 \text{ кН}$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 100 \text{ МПа}$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

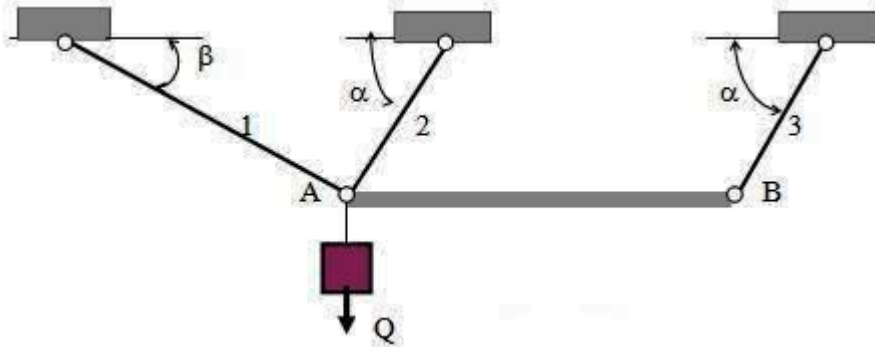


Рис. 65

96. Дюралеві трубки АС і ВС з'єднані шарнірно і навантажені силою P (Рис. 66). Якою може бути величина сили P , якщо $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 75 \text{ МПа}$? Також відомо: $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $d = 30 \text{ мм}$; $\delta = 3 \text{ мм}$.

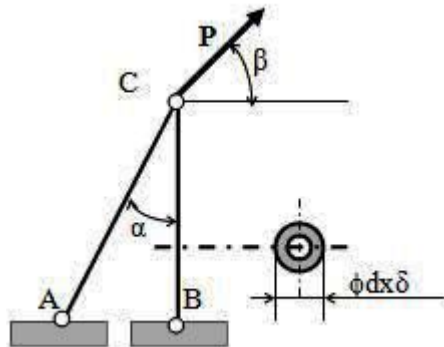


Рис. 66

97. На стержень АВ стержневої системи, показаної на Рис. 67, діє лінійно змінне розподілене навантаження. Обчислити поперечний переріз стержня ВС. Дані: $q_0 = 10 \text{ кН/м}$; $l = 12 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 30 \text{ МПа}$.

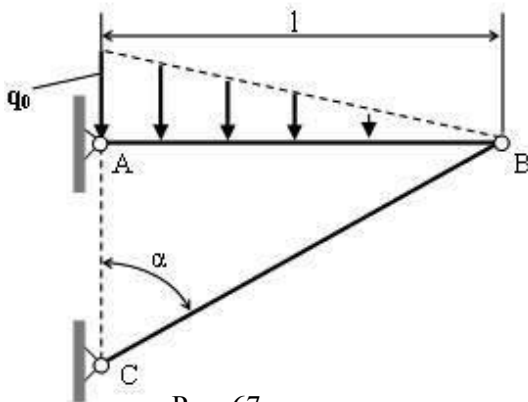


Рис. 67

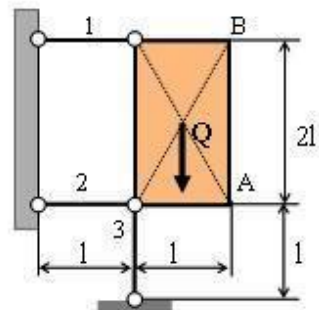


Рис. 68

98. Жорсткий елемент вагою $Q = 1000$ кН утримується трьома сталевими стержнями (Рис. 68). Обчислити розміри поперечних перерізів стержнів і кут відхилення від вертикалі ланки АВ. Дані: $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120$ МПа; $l = 1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

99. Розрахувати розміри поперечних перерізів стержнів системи, показаної на Рис. 69. Дані: $P = 240$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma_p] = 200$ МПа; $[\sigma_c] = 160$ МПа.

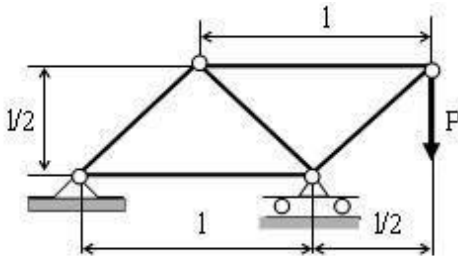


Рис. 69

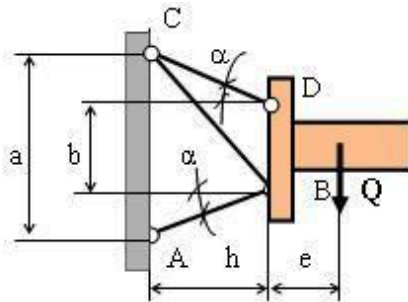


Рис. 70

100. Площадка вагою Q утримується трьома стержнями АВ, ВС і CD (Рис. 70). Визначити розміри поперечних перерізів стержнів. Дані: $Q = 180$ кН; $a = 800$ мм; $b = 500$ мм; $h = 400$ мм; $e = 300$ мм; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа.

101. Однорідний прямокутний елемент вагою Q оперто на трьох шарнірно закріплених стержнях (Рис. 71). Визначити розміри поперечних перерізів стержнів. Дані: $Q = 600$ кН; $l = 1$ м; $\alpha = 30^\circ$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120$ МПа.

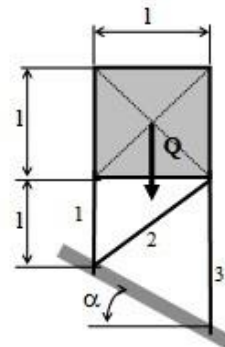


Рис. 71

102. Обчислити діаметри стержнів системи, показаної на Рис. 72. Дані: $Q = 120$ кН; $l = 1$ м; $\sigma_{Tp} = \sigma_{Tc} = 320$ МПа; $n_p = n_c = 4$.

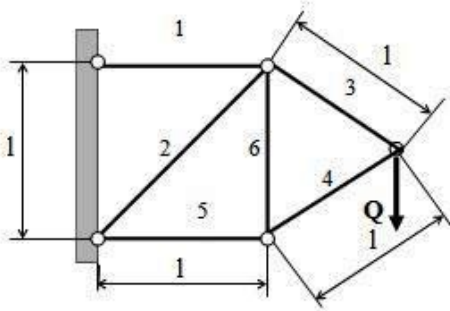


Рис. 72

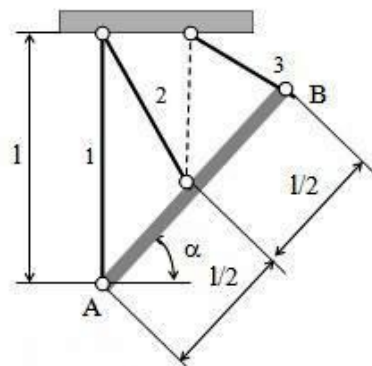


Рис. 73

- 103.** Однорідна жорстка балка АВ вагою Q підвішена на трьох стержнях (Рис. 73) з однаковими розмірами поперечних перерізів F . Обчислити коефіцієнти запасу міцності в стержнях. Дані: $Q = 480$ кН; $F = 5$ см²; $\alpha = 45^\circ$; $[\sigma_T] = 220$ МПа.
- 104.** Жорстка невагома балка АВ утримується тросом ВС (Рис. 74) і навантажена вантажем G . Визначити допустиму величину вантажу G . Дані: $F_{BC} = 4$ см²; $[\sigma_p] = 200$ МПа; $\alpha = 30^\circ$.

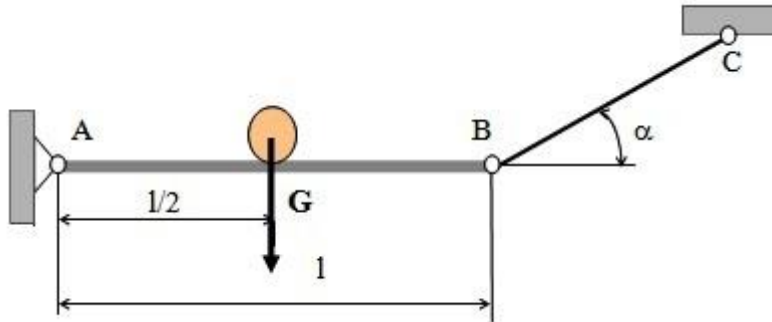


Рис. 74

- 105.** Яку максимальну вагу однорідної балки АВ можна допустити, якщо вона підвішена на симетричній системі п'яти стержнів (Рис. 75). Дані: $d = 40$ мм – діаметри всіх стержнів; $l = 1$ м; $\alpha = 60^\circ$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа; $u_{AB} = 1,6$ мм – допустиме вертикальне переміщення балки АВ; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

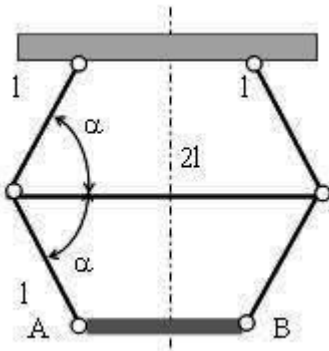


Рис. 75

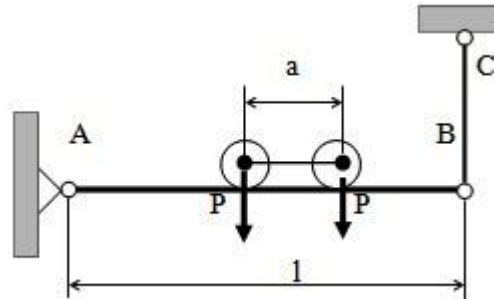


Рис. 76

- 106.** Кожне з коліс візка, що рухається по балці АВ, натискає на неї силою P (Рис. 76). Яким має бути діаметр стержня ВС, що підтримує балку, при допустимих напруженнях $[\sigma_p] = 140$ МПа та допустимих деформаціях $[\epsilon] = 3 \cdot 10^{-4}$? Інші дані: $P = 50$ кН; $l = 8$ м; $a = 2$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; вагою балки АВ знехтувати.
- 107.** Дві жорсткі невагомі балки АВ і CD підтримуються стержнями ЕА і АF. Ця система навантажена силою P (Рис. 77). Обчислити розмір поперечних перерізів стержнів і вертикальне переміщення точки D. Дані: $P = 80$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma_p] = 100$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

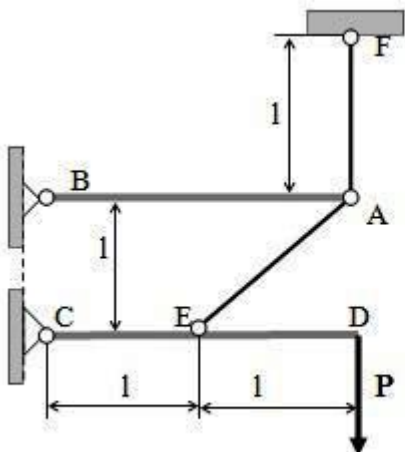


Рис. 77

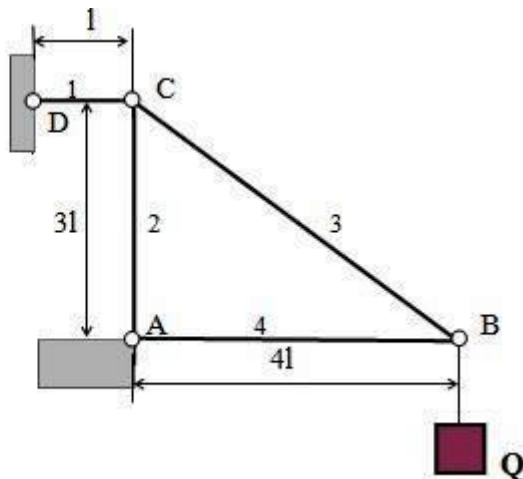


Рис. 78

108. Стержнева система, показана на Рис. 78, навантажена вантажем $Q = 200$ кН. Обчислити необхідні розміри поперечних перерізів стержнів та вертикальне переміщення точки В. Також задано: $l = 1$ м; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа;

109. Закріплений верхнім кінцем сталевий дріт з границею міцності на розтяг σ_b і питомою вагою γ звисає вертикально. При якій мінімальній довжині l дріт обірветься. Дані: $\sigma_b = 600$ МПа; $\gamma = 78,5$ кН/м³.

110. Бетонна опора висотою 12 м стискається силою 800 кН і власною вагою. Обчислити об'єм опори для наступних випадків:

- 1) опора зі сталим поперечним перерізом,
- 2) ступінчаста опора, складена з 2 частин однакової довжини,
- 3) ступінчаста опора, складена з 4 частин однакової довжини,
- 4) рівномічна опора.

Дані: $\gamma_6 = 20$ кН/м³ – питома вага бетону; $[\sigma_{6c}] = 3$ МПа – допустимі напруження бетону на стиск.

111. Бурильна колона, виконана зі сталі у вигляді ступінчастого стержня, навантажена власною вагою і силою P (Рис. 79). Обчислити поперечний переріз кожної з трьох частин колони і видовження цілої колони, якщо $\sigma_b = 100$ МПа і $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Також дано: $P = 30$ кН; $l = 150$ м; $\gamma = 78,5$ кН/м³.

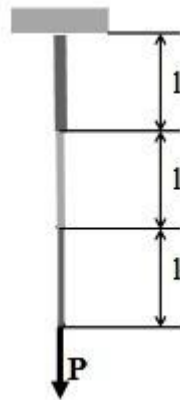


Рис. 79

112. Визначити рівняння діаметру стержня однакового опору $d(x)$, навантаженого як на Рис. 80. Дані: $P = 50$ кН; $q = 40$ кН/м; $\sigma_b = 160$ МПа; $l = 1,2$ м; $a = 60$ см.

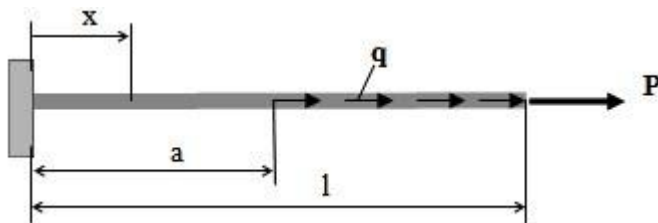


Рис. 80

2.3. Переміщення у стержневих системах

1. У системах з невеликим числом стержнів переміщення вузлів визначається, обчислюючи видовження окремих стержнів i , відповідно, зіставляючи їх.
2. Переміщення у фермах з більшим числом стержнів обчислюються, застосовуючи енергетичні методи, які є предметом розгляду у наступних розділах опору матеріалів. В окремих, простих випадках можливо визначати переміщення, порівнюючи роботу зовнішніх сил з потенційною енергією пружної деформації стержнів.

113. Визначити вертикальне, горизонтальне і абсолютне переміщення вузла А стержневої системи, показаної на Рис. 81. Дані: $P = 60$ кН; $l = 1$ м; $\alpha = 30^\circ$; $F_1 = 3$ см²; $F_2 = 6$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

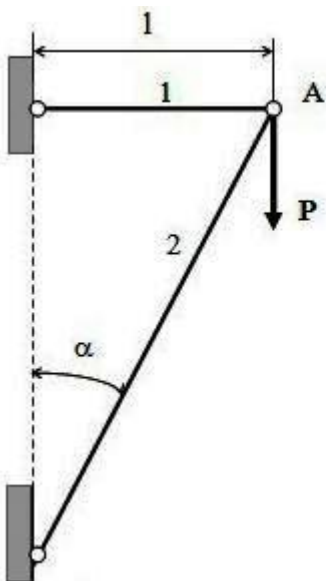


Рис. 81

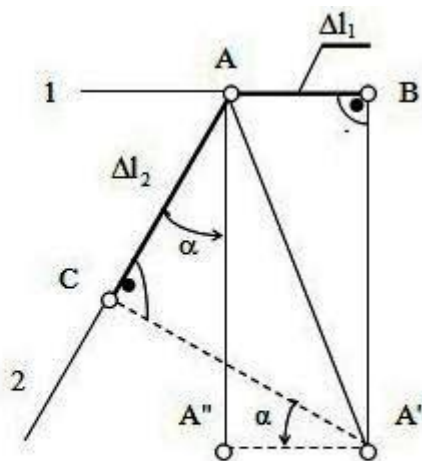


Рис. 82

Розв'язок

Сили в стержнях 1 і 2 системи обчислюють з відомих рівнянь статки. Ці сили становлять:

$$N_1 = P \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} = 60 \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 40 \text{ кН}; \quad N_2 = -\frac{P}{\cos \alpha} = -\frac{60}{\cos 30^\circ} = -69,3 \text{ кН}.$$

Видовження стержнів 1 і 2 становитимуть відповідно:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{40 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 2/3 \text{ мм} \approx 0,67 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{69,3 \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \sin 30^\circ} \approx -1,16 \text{ мм}.$$

Стержень 1 видовжиться на 0,67 мм, а стержень 2 вкоротиться на 1,16 мм.

На Рис. 82 видовження стержня 1 зображено відрізком АВ, а вкорочення стержня 2 – відрізком АС. Для врахування змінених довжин стержнів (ланок) з метою отримання нового положення точки А необхідно зарисувати дуги стержнями зі зміненими довжинами до їх перетину в точці А'. На практиці з огляду на те, що видовження стержнів дуже малі в порівнянні з їх довжинами, дуги кіл замінюємо відрізками, перпендикулярними до стержнів: на Рис. 82 ВА' для стержня 1 і СА' для стержня 2. Відповідні переміщення можемо визначити графічно, виконавши діаграму переміщень (Рис. 82) у визначеному масштабі або аналітично.

З елементарних геометричних обчислень отримують:

- горизонтальне переміщення точки А,

$$u_A = AB = \Delta l_1 = 0,67 \text{ мм};$$

- вертикальне переміщення точки А,

$$v_A = AA'' = \left(\Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} \right) \operatorname{tg} \alpha = 1,73 \text{ мм};$$

- абсолютне переміщення точки А,

$$AA' = \sqrt{u_A^2 + v_A^2} = \Delta l_1 \sqrt{1 + \left(\Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1,85 \text{ мм}.$$

- 114.** Обчислити напруження в перерізах стержнів консолі (Рис. 83), а також горизонтальне, вертикальне і повне переміщення точки А. Дані: $Q = 30 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $F_1 = 3 \text{ см}^2$; $F_2 = 6 \text{ см}^2$; $\alpha = 30^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

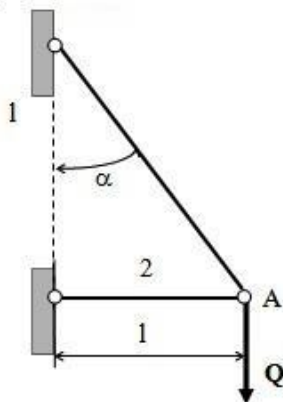


Рис. 83

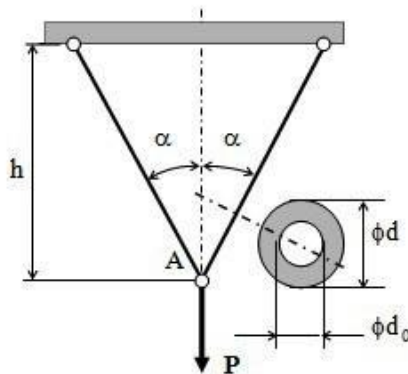


Рис. 84

115. Симетрична система дюралевих стержнів навантажена силою P , як показано на Рис. 84. Розрахувати напруження в стержнях і вертикальне переміщення точки A . Дані: $P = 12 \text{ кН}$; $h = 2 \text{ мм}$; $d = 2,2 \text{ см}$; $d_0 = 1,8 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$; $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

116. Два стержні сталевий (с) і алюмінієвий (а) навантажені силою P , як показано на Рис. 85. Площа поперечного перерізу сталевго стержня дорівнює 2 см^2 . Якою має бути площа поперечного перерізу алюмінієвого стержня, щоб точка A перемістилася тільки вертикально. Також відомо: $\alpha = 60^\circ$; $E_c = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_a = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

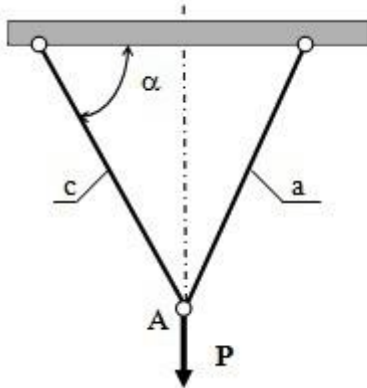


Рис. 85

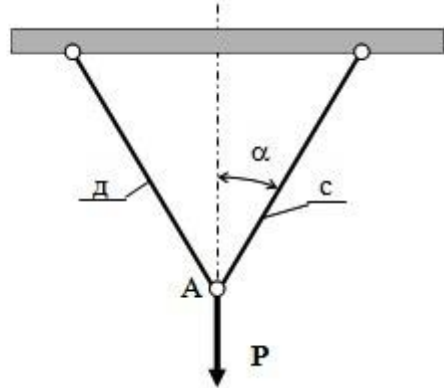


Рис. 86

117. Два стержні однакових розмірів, один сталевий (с), а другий дюралевий (д), навантажено силою P , як показано на Рис. 86. Визначити вертикальне і горизонтальне переміщення точки A . Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$ – довжини стержнів; $E_c = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_d = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $F = 2 \text{ см}^2$ – площі поперечних перерізів стержнів; $\alpha = 30^\circ$.

118. Визначити площі поперечних перерізів стержнів 1 і 2, а також вертикальне переміщення точки C (Рис. 87). Дані: $P = 100 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$ – довжини стержнів; $\alpha = 30^\circ$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

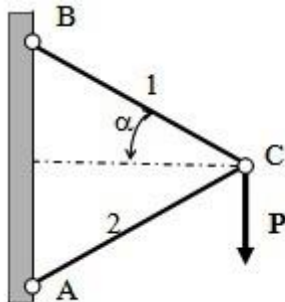


Рис. 87

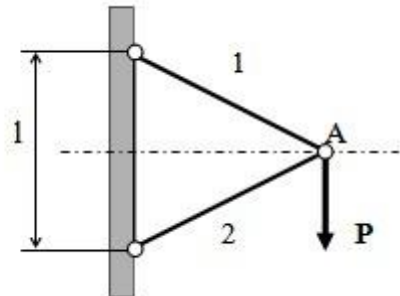


Рис. 88

119. Визначити переміщення вузла А стержневої системи (Рис. 88). Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$ – довжини стержнів; $F = 1 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

120. Два сталеві стержні системи (Рис. 89) навантажено силою $P = 80 \text{ кН}$. Визначити горизонтальне, вертикальне та повне переміщення точки С. Також відомо: $h = 1,6 \text{ м}$; $a = 20 \text{ мм}$; $d = 25 \text{ мм}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

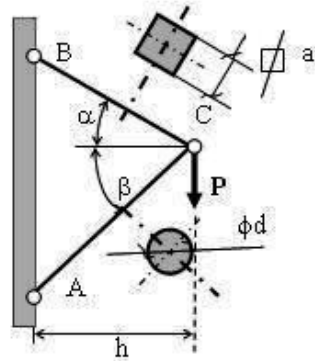


Рис. 89

121. Розрахувати горизонтальне і вертикальне переміщення вузла А стержневої системи, показаної на Рис. 90. Дані: $P = 96 \text{ кН}$; $l_1 = 2 \text{ м}$; $l_2 = 4 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$ – площа поперечного перерізу кожного стержня; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 30^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

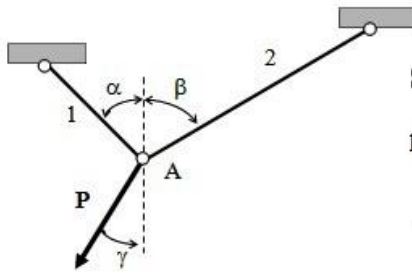


Рис. 90

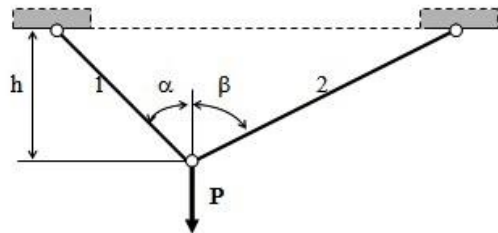


Рис. 91

122. Розрахувати повне переміщення вузла А стержневої системи, зображеної на Рис. 91. Дані: $P = 20 \text{ кН}$; $h = 4 \text{ м}$; $F_1 = F_2 = 1 \text{ см}^2$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

123. Однорідна жорстка балка АВ вагою G закріплена в горизонтальному положенні за допомогою стержня CD, як показано на Рис. 92. Розрахувати вертикальне переміщення точки В, спричинене вагою G балки. Дані: $G = 60 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $F_{CD} = 4 \text{ см}^2$; $\alpha = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

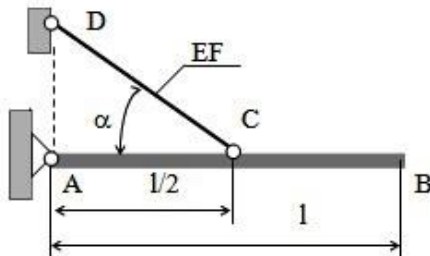


Рис. 92

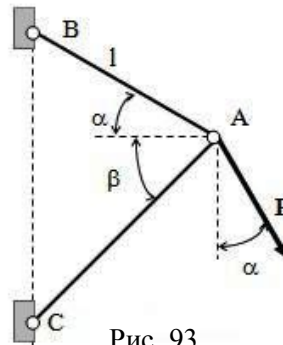


Рис. 93

124. Визначити графічно переміщення точки А системи, поданої на Рис. 93. Дані: $P = 120$ кН; $l = 2$ м – довжина стержня АВ; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120$ МПа; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

125. Підібрати такі перерізи стержнів 1 і 2 (Рис. 94), щоб переміщення точки А було вертикальним. Дані: $P = 200$ кН; 1 м – довжина стержня АС; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 150$ МПа; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$.

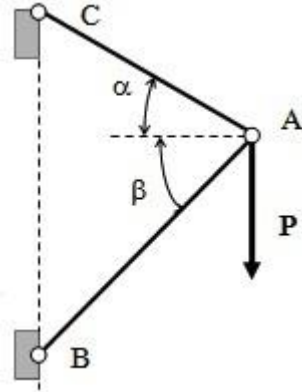


Рис. 94

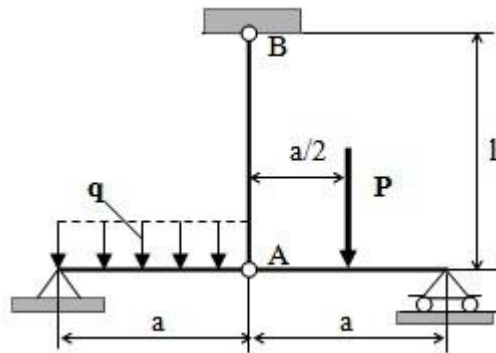


Рис. 95

126. Розрахувати площу поперечного перерізу стержня АВ і переміщення точки А для системи, показаної на Рис. 95. Дані: $P = 160$ кН; $q = 40$ кН/м; $a = 4$ м; $l = 5$ м; $[\sigma_p] = 120$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

127. По невагомій балці АВ, підвішеній на двох стержнях – сталевому (с) і мідному (м) з однаковими розмірами, переміщається вантаж Q (Рис. 96). Виконати епюри переміщень точок А і В як функцію x. Дані: $Q = 30$ кН; $l = 4$ м; $F_m = F_c = 2$ см²; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа.

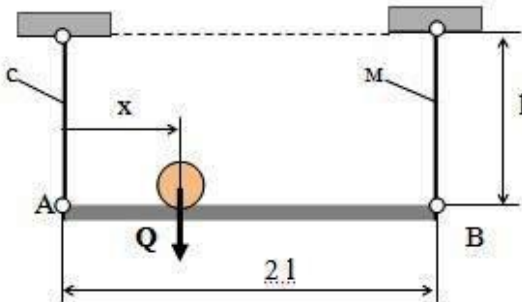


Рис. 96

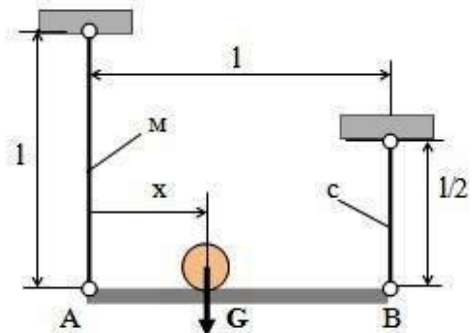


Рис. 97

128. На двох стержнях – мідному (м) та сталевому (с) - діаметрами $d = 20$ мм, кріпиться жорстка невагома балка АВ (Рис. 97). По поверхні балки від точки А до точки В переміщається вантаж $Q = 20$ кН. Подати епюри переміщень точок А і В. При якому значенні x балка буде горизонтальною? Також відомо: $l = 2$ м; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа.

129. Жорстка невагома балка АВ (Рис. 98) закріплена на двох сталевих стержнях з однаковими площами поперечних перерізів F . Де потрібно прикласти силу P , щоб балка АВ залишилася надалі горизонтальною? Якими будуть напруження в стержнях і вертикальне переміщення балки? Дані: $P = 80$ кН; $F = 2$ см² – площі поперечних перерізів стержнів; $l = 2$ м; $a = 1,8$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

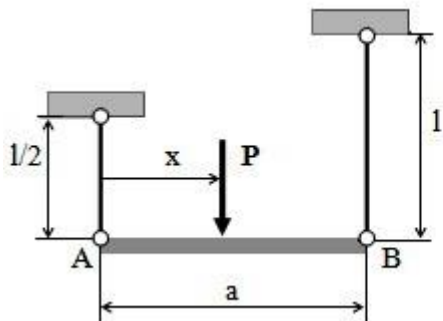


Рис. 98

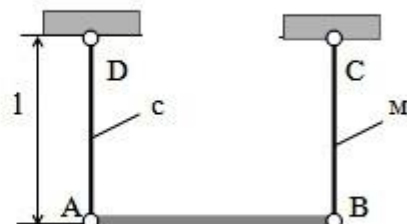


Рис. 99

130. Однорідна балка АВ кріпиться в горизонтальному положенні двома сталевими (с) стержнями з однаковими розмірами. Виникла необхідність заміни одного із сталевих стержнів мідним (м) (Рис. 99) з такою ж площею поперечного перерізу. Якою має бути довжина мідного стержня ВС, щоб балка АВ залишилася в горизонтальному положенні? Дані: $l = 2$ м; $E_c = 2,06 \cdot 10^5$ МПа; $E_m = 1,2 \cdot 10^5$ МПа.

131. Жорстка невагома балка АВ закріплена на двох сталевих стержнях і навантажена силою P як показано на Рис. 100. Розрахувати вертикальне переміщення точки С. Дані: $P = 24$ кН; $l = 1$ м; $a = 1,5$ м; $F = 2$ см² – площа поперечного перерізу кожного стержня; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

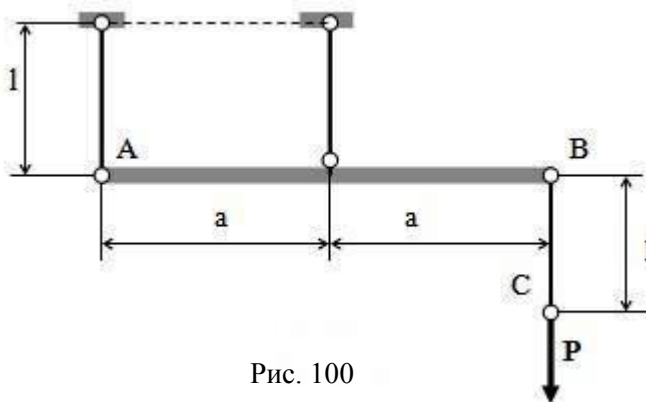


Рис. 100

132. Два мідні стержні 1 і 2, а також сталевий стержень 3 з діаметрами $d = 20$ мм і довжиною $l = 2$ м підтримують невагому жорстку балку АВ (Рис. 101). На балку діє вертикальна сила P на віддалі x від точки А. При якій величині x балка залишиться горизонтальною? Якою може бути максимальна величина сили P ? Дані: $a = 5/2l$; $\alpha = 30^\circ$; $[\sigma_{pc}] = [\sigma_{cc}] = 120$ МПа; $[\sigma_{pm}] = [\sigma_{cm}] = 80$ МПа; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа.

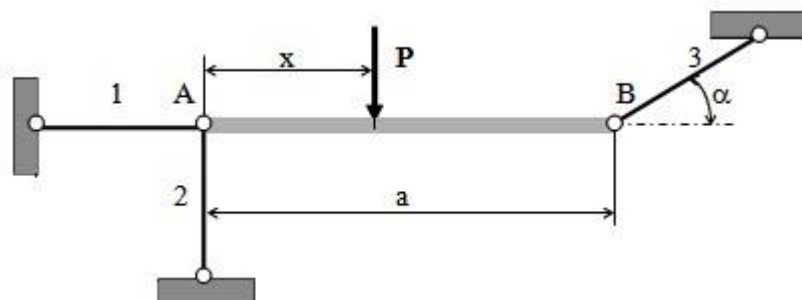


Рис. 101

133. Однорідна жорстка балка АВ вагою $Q = 200$ кН кріпиться на трьох стержнях (Рис. 102). Розрахувати максимальні нормальні напруження в стержнях і вертикальне переміщення центру ваги балки. Дані: $l = 1$ м; $F = 4$ см² – площа поперечного перерізу кожного стержня; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

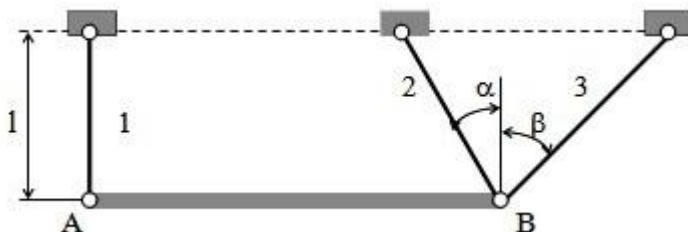


Рис. 102

134. Однорідна жорстка балка АВ вагою 80 кН закріплена по горизонталі на трьох сталевих стержнях з площею поперечного перерізу 2 см² кожен (Рис. 103). Розрахувати вертикальні переміщення точок А і В, а також кут, який утворить балка АВ з горизонталлю. Дані: $l = 4$ мм; $a = l/2$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

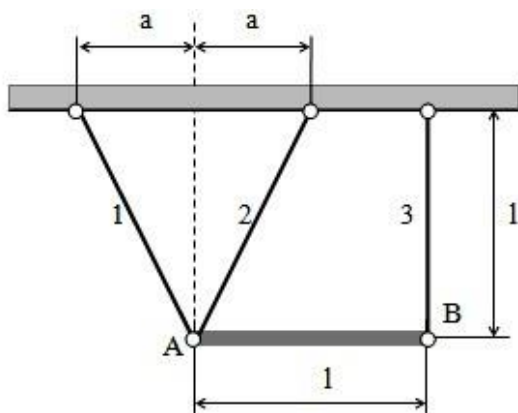


Рис. 103

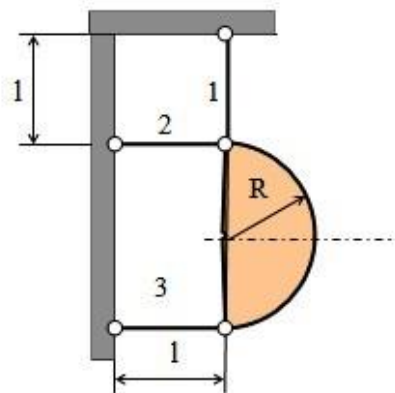


Рис. 104

135. Визначити кут повороту однорідного блоку у вигляді півкруга вагою 240 кН, який утримується трьома стержнями (Рис. 104), а також напруження у їх поперечних перерізах. Дані: $l = 1\text{ м}$; $R = 1\text{ м}$; $F_1 = 10\text{ см}^2$; $F_2 = F_3 = 4\text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

136. Вантаж Q утримується трьома стержнями як показано на Рис. 105. Вертикальне переміщення точки В при цьому становить $v_B = 5\text{ мм}$. Обчислити вагу вантажу Q , якщо при проектуванні перерізів стержнів прийнято $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 100\text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

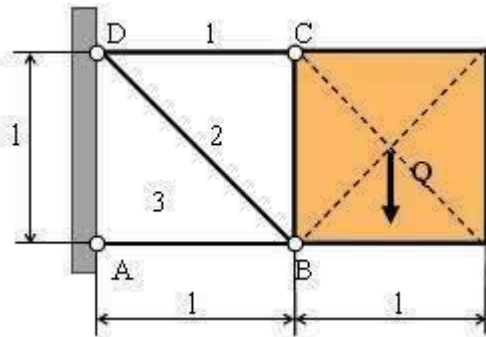


Рис. 105

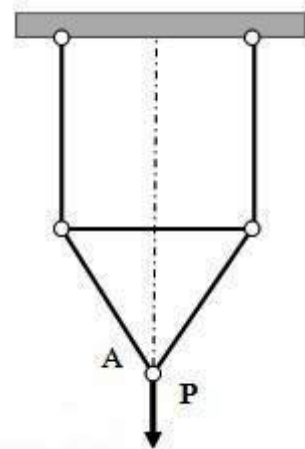


Рис. 106

137. Система з п'яти стержнів (Рис. 106) з однаковими довжинами l і площами поперечних перерізів F навантажена силою P . Розрахувати переміщення точки А. Дані: $P = 160\text{ кН}$; $l = 1\text{ м}$; $F = 4\text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

138. З'єднання чотирьох стержнів з однаковими площами поперечних перерізів 8 см^2 , навантажене силою $P = 200\text{ кН}$ як показано на Рис. 107. Розрахувати вертикальне переміщення точки А. Дані: $l = 2\text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

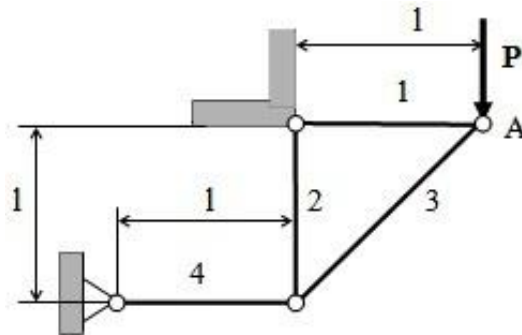


Рис. 107

Розв'язок

Обчислюють з рівнянь статки сили в стержнях системи. Ці сили складають: $N_1 = P$; $N_2 = P$; $N_3 = -\sqrt{2} P$.

Робота сили P при вертикальному переміщенні v_A точки A дорівнює сумі потенційної енергії деформації стержнів системи, яку записано таким чином:

$$\frac{P \cdot v_A}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i^2 l_i}{2EF_i}; \quad \frac{P \cdot v_A}{2} = \frac{P^2 \cdot 1}{2EF} + \frac{P^2 \cdot 1}{2EF} + \frac{(-\sqrt{2}P)^2 \cdot \sqrt{2}l}{2EF} + \frac{(-P)^2 \cdot 1}{2EF};$$

звідки $v_A = (3+2\sqrt{2}) \frac{Pl}{EF}$.

Підставляючи числові дані, отримано: $v_A = (3+\sqrt{2}) \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^4} = 14,6 \text{ мм}$.

- 139.** Тензометр, наклеєний вздовж стержня 2 стержневої системи, поданої на Рис. 108, показав відносне видовження $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$. Розрахувати величину сили P і вертикальне переміщення точки A . Дані: $l = 1 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$ – площі поперечних перерізів стержнів; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

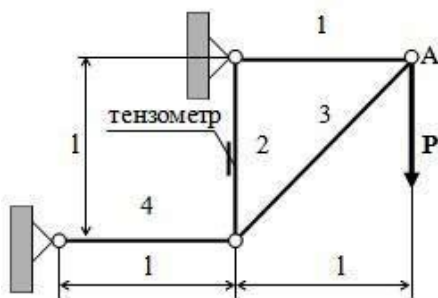


Рис. 108

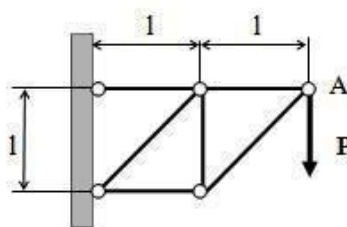


Рис. 109

- 140.** Розрахувати вертикальне переміщення точки A стержневої системи, зображеної на Рис. 109. Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$ – площі поперечних перерізів стержнів; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

- 141.** При якій силі P і куті α вузол A стержневої системи, показаної на Рис. 110, переміститься до положення A' ? Дані: $AA' = 1 \text{ см}$; $l = 1 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$ – площі поперечних перерізів стержнів; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

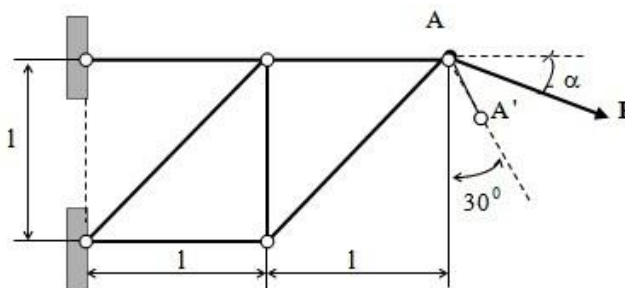


Рис. 110

2.4. Кінетостатичні задачі

1. Задачі, в яких тіло рухається, однак з урахуванням дії масових сил може досліджуватись на міцність як таке, що знаходиться у статичному стані, називаються кінетостатичними задачами.
2. В кінетостатичних задачах зазвичай розглядаються випадки, в яких виник тільки обертовий рух тіла. Обертовий рух тіла спричиняє, що на кожен нескінченно малий його елемент dm діє відцентрова сила, яку потрібно врахувати в обчисленнях. Ця сила дорівнює:

$$dP = r \omega^2 dm;$$

де: r – віддаль маси dm від центру обертання,
 ω – кутова швидкість тіла.

- 142.** Вантаж масою $m = 50$ кг, закріплений на кінці дроту довжиною $l = 2$ м і діаметром $d = 4$ мм, обертається у вертикальній площині з частотою $n = 30$ об./хв. Розрахувати екстремальні напруження у дроті і його видовження. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; власною вагою дроту знехтувати.

Розв'язок

На дрід діє відцентрова сила P та сила тяжіння G . Найбільшою силою, що розтягує дрід, буде тоді, коли вантаж буде внизу, а найменшою, коли вантаж буде вверху, як показано на Рис. 111.

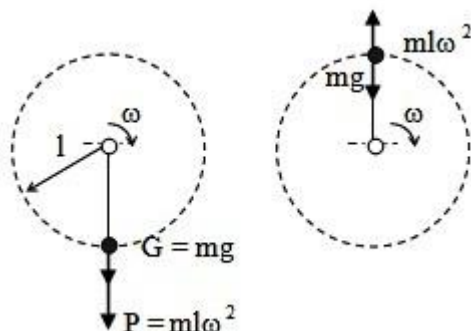


Рис. 111

Внизу відцентрова сила і сила тяжіння додаються. Тоді розтягуюча сила P буде рівна:

$$P_d = P_o + G;$$

де: $P_o = l \cdot \omega^2 \cdot m$.

В системі СІ $\omega [c^{-1}] = \pi n / 30$; підставляючи числові дані, отримано:

$$P_o = 2 \cdot \left(\frac{\pi 30}{30} \right)^2 \cdot 50 = 987 \text{ Н.}$$

$$G = m \cdot g = 50 \cdot 9,81 = 491 \text{ Н.}$$

$$P_d = 987 + 491 = 1478 \text{ Н.}$$

Нагорі відцентрова сила діє вгору, а сила тяжіння вниз. Тому сила, що розтягує дрід в цьому положенні, становить:

$$P_g = P_o - G = 987 - 491 = 496 \text{ Н.}$$

Площа поперечного перерізу дроту:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 4^2}{4} = 12,6 \text{ мм}^2.$$

Шукані напруження і видовження дроту будуть рівні:

- вантаж внизу: $\sigma = P_d / F = 1478 / 12,6 = 117,3 \text{ МПа};$

$$\Delta l = \frac{P_d l}{EF} = \frac{1478 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 12,6} = 1,2 \text{ мм};$$

- вантаж вверху: $\sigma = P_g / F = 496 / 12,6 = 39,4 \text{ МПа};$

$$\Delta l = \frac{P_g l}{EF} = 0,4 \text{ мм}.$$

- 143.** Призматичний стержень обертається навколо одного з кінців в горизонтальній площині з частотою $n = 3000 \text{ об./хв}$ (Рис. 112). Якою повинна бути допустима довжина стержня, щоб напруження не перевищили допустимих? $[\sigma_p] = 180 \text{ МПа}; \gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$ - питома вага матеріалу.

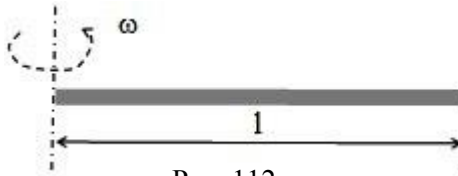


Рис. 112

- 144.** При яких обертах кільця з площею поперечного перерізу A в ньому діятимуть напруження 300 МПа , якщо при частоті $n = 4000 \text{ об./хв}$ напруження становили 75 МПа ?
- 145.** Розрахувати напруження в перерізі сталевго кільця середнього радіуса r і густини ρ , яке обертається з частотою n обертів. Дані: $r = 40 \text{ см}; \rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; n = 3000 \text{ об./хв}$.
- 146.** Обчислити потенційну енергію деформації в сталевому кільці з середнім діаметром D , площею поперечного перерізу F , яке обертається з частотою n обертів. Дані: $D = 40 \text{ см}; F = 1 \text{ см}^2; n = 3000 \text{ об./хв}; \gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.
- 147.** Мідне кільце ($E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \rho = 8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$) з поперечним перерізом $F = 4 \text{ см}^2$ і радіусом $r = 20 \text{ см}$ обертається з частотою $n = 6000 \text{ об./хв}$. Обчислити напруження в перерізі кільця та його потенційну енергію деформації.
- 148.** Лопатка осьового компресора з внутрішнім радіусом $r_b = 50 \text{ см}$, зовнішнім радіусом $r_3 = 65 \text{ см}$, змінним поперечним перерізом згідно рівняння $F = F_b (r_b/r)^2$ обертається з частотою $n = 3600 \text{ об./хв}$. Розрахувати максимальні розтягуючі напруження в лопатці. Дані: $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – питома вага матеріалу лопатки; F_b – площа перерізу лопатки для радіуса r_b .

149. Лопатку вентилятора, що обертається з частотою $n = 1500$ об./хв, виконано зі змінним поперечним перерізом згідно рівняння $F = F_0 (a/r)^2$ (Рис. 113). Скільки відсотків матеріалу заощаджено і як зміняться максимальні напруження в поперечному перерізі? Інші дані: $F_0 = 10 \text{ см}^2$; $a = 10 \text{ см}$; $b = 30 \text{ см}$; $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

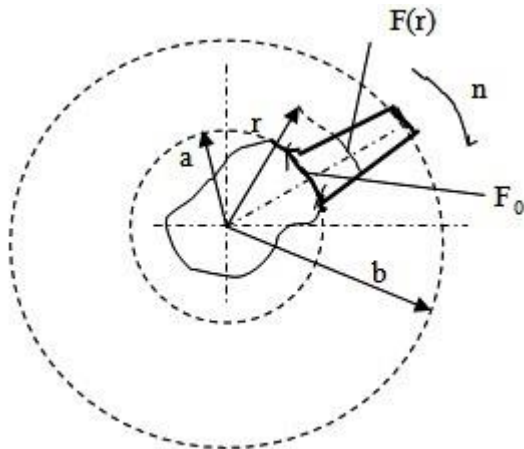


Рис. 113

150. Лопатка компресора зі сталим поперечним перерізом, внутрішнім радіусом $r_b = 60 \text{ см}$ і зовнішнім радіусом $r_z = 80 \text{ см}$ обертається з частотою $n = 3000$ об./хв. Визначити зміну напружень в поперечних перерізах лопатки; $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.
151. Поперечний переріз лопатки осевого компресора змінюється згідно рівняння $A(r) = A_a (a/r)^2$ (Рис. 114). Лопатка компресора обертається з частотою $n = 300$ об./хв. Подати епюри нормальних сил, а також напружень і переміщень вздовж лопатки. Дані: $A_a = 10 \text{ см}^2$; $a = 30 \text{ см}$; $b = 50 \text{ см}$; $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

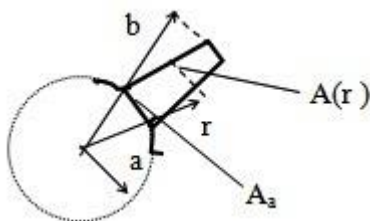


Рис. 114

152. Лопатка компресора зі сталим поперечним перерізом, внутрішнім радіусом $r_b = 90 \text{ см}$ і зовнішнім $r_z = 120 \text{ см}$ обертається з частотою $n = 1800$ об./хв. Розрахувати видовження лопатки. Дані: $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

2.5. Статично невизначні задачі

В простих випадках конструкції або елементів з невеликим ступенем статичної невизначності для обчислення невідомих реакцій застосовують принцип суперпозиції переміщень. Цей метод полягає в записанні стільки рівнянь переміщень, яким є ступінь статичної невизначності конструкції, з наступним їх розв'язком.

В процесі розв'язування статично невизначних задач за допомогою принципу суперпозиції вирізняють наступні етапи:

1) Зі статично невизначної конструкції утворюють статично визначну, усуваючи надмірне число вязей і замінюючи їх дію відповідними силами. Цю процедуру називають побудовою основної системи. Число можливих основних систем необмежене.

2) Ідентифікують точки або перерізи, для яких лінійні або кутові переміщення відповідають ступеню статичної невизначності конструкції.

3) Обчислюють переміщення для обраних точок від всіх сил, що діють на основну систему, і, відповідно, сумуючи їх, отримують рівняння, в яких невідомими є лише статично невизначні сили.

2.5.1. Одновимірні задачі

153. Призматичний сталевий стержень, закріплений з обох сторін і навантажений силою P , як показано на Рис. 115. Подати епюри напружень і переміщень уздовж осі стержня. Дані: $P = 60$ кН; $l = 90$ см; $F = 5$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

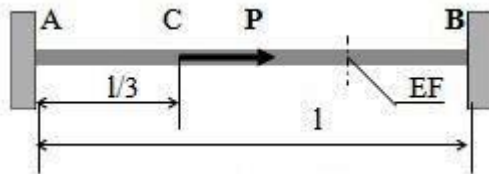


Рис. 115

Розв'язок

У одновимірному просторі така конструкція є один раз статично невизначною. Праву стіну відкидають і впроваджують замість неї реакцію R_B . Отримують конструкцію, показану на Рис. 116.

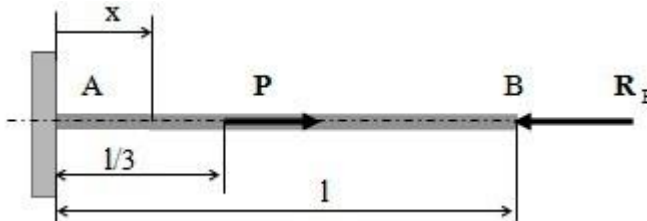


Рис. 116

Відомо, що переміщення перерізу В уздовж осі x $u_B = 0$. Сума переміщень перерізу В внаслідок дії всіх зовнішніх сил, що діють на конструкцію, має бути рівна нулю. Отже, можна записати наступний вираз:

$$u_{BP} + u_{BR_B} = 0;$$

$$\text{де: } u_{BP} = \frac{P \cdot l/3}{EF}; \quad u_{BR_B} = -\frac{R_B \cdot l}{EF}.$$

Після підставлення у рівняння числових значень переміщень (внаслідок дії окремих навантажень) і обчислення, отримують величину реакції: $R_B = P/3 = 60 \text{ кН}/3 = 20 \text{ кН}$.

Рівняння напружень і переміщень уздовж осі x мають дві ділянки зміни:

Ділянка I: $0 \leq x \leq l/3$

$$\sigma(x) = N(x)/F = \frac{P - \frac{P}{3}}{F} = \frac{2}{3} \frac{P}{F},$$

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E} dx = \frac{2}{3} \frac{Px}{EF}.$$

Ділянка II: $l/3 \leq x \leq l$

$$\sigma(x) = N(x)/F = -P/3F,$$

$$u(x) = u_C + \int_{l/3}^x \varepsilon(x) dx = \frac{2}{3} \frac{P}{EF} \frac{l}{3} - \int_{l/3}^x \frac{P}{3EF} dx = \frac{Pl}{3EF} - \frac{Px}{3EF}.$$

Епюри напружень та переміщень подано на Рис. 117.

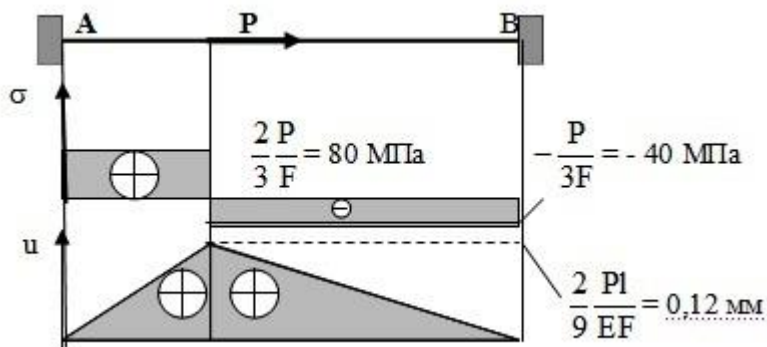


Рис. 117

- 154.** Стержень, закріплений з обох сторін, навантажений силами P як показано на Рис. 118. Розрахувати напруження в окремих ділянках стержня. Дані: $P = 200 \text{ кН}$; $l = 40 \text{ см}$; $F = 10 \text{ см}^2$; $E = \text{const}$.

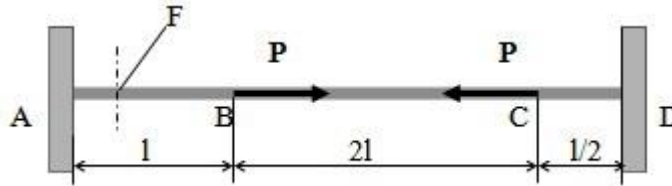


Рис. 118

155. Призматичний стержень з площею перерізу F , складений із сталевोї (с) і мідної (м) частини, закріплений і навантажений силою P як показано на Рис. 119. Розрахувати величину напружень в обох частинах стержня. Дані: $P = 80 \text{ кН}$; $F = 5 \text{ см}^2$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

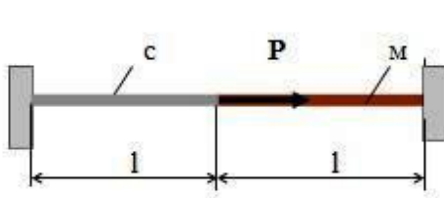


Рис. 119

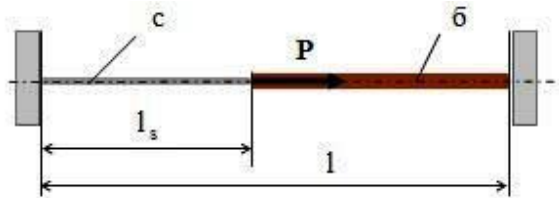


Рис. 120

156. Ступінчатий стержень, складений з тоншої сталевोї (с) та товщої бронзової (б) частини, закріплено між двома недеформівними стінами і навантажено силою P як показано на Рис. 120. При якій довжині сталеві частини l_c напруження в обох частинах стержня будуть рівними за величиною? Дані: $l = 3 \text{ м}$; $E_c = 2E_b = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $F_b = 3F_c$.
157. Сталевий ступінчатий стержень закріплений з обох сторін і навантажений як показано на Рис. 121. Обчислити коефіцієнт запасу міцності в перерізі з найбільшими напруженнями. Дані: $P = 60 \text{ кН}$; $F = 3 \text{ см}^2$; $\sigma_T = 260 \text{ МПа}$.

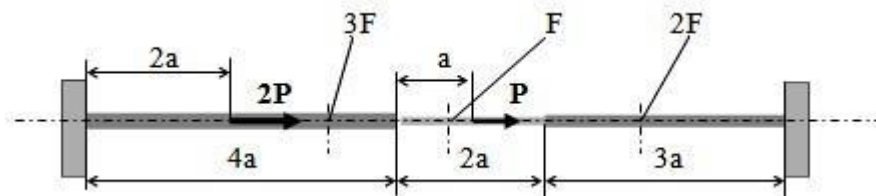


Рис. 121

158. Призматичний стержень, складений зі сталевोї (с) і дюралевої (д) частини закріплений між двома стінами як показано на Рис. 122. На якій віддалі x від правої стіни потрібно прикласти силу P , щоб напруження в кожному перерізі були однакові за величиною? Дані: $l = 90 \text{ см}$; $E_c = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_d = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

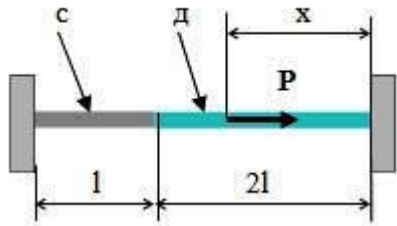


Рис. 122

159. У закріпленому і навантаженому силами P стержні, зображеному на Рис. 123, обчислити переміщення точки C . Дані: $P = 90$ кН; $l = 6$ м; $F = 5$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

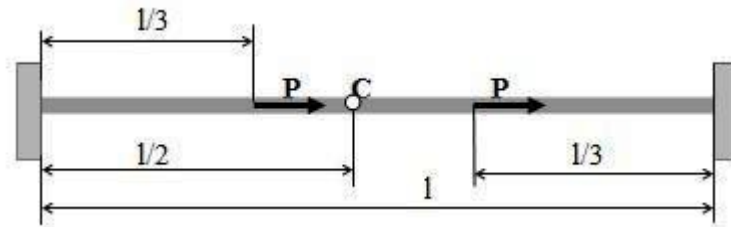


Рис. 123

160. Бетонний стовп діаметром 30 см, закріплений з обох сторін і навантажений як показано на Рис. 124, зміцнений п'ятьма симетрично розміщеними стержнями діаметром 2 см кожен. Обчислити напруження у бетоні та сталі частини a і b стовпа. Дані: $P = 400$ кН; $b = 2a = 3$ м; $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E_{\sigma} = 1,5 \cdot 10^4$ МПа.

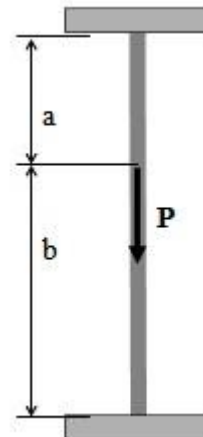


Рис. 124

161. Римська гайка з'єднує два стержні: латунний (л) і сталевий (с) (Рис. 125). Крок різьби гайки становить 4 мм. Розрахувати напруження в стержнях і осьове переміщення гайки при її повороті на кут 270° . Деформаціями гайки знехтувати. Дані: $l = 4$ м; $E_c = 2E_{\text{л}} = 2 \cdot 10^5$ МПа; $F_c = F_{\text{л}} = 8$ см².

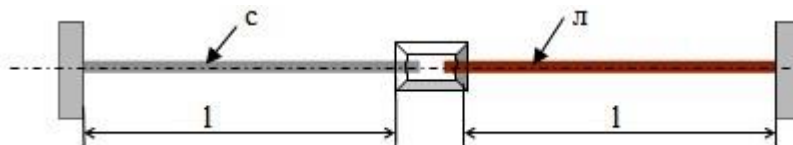


Рис. 125

- 162.** Сталеву втулку і бронзовий стержень з різьбою змонтовано із початковим натягом, що відповідає $\frac{1}{4}$ оберту гайки (Рис. 126). Розрахувати величину напружень у втулці і стержні. Які будуть напруження в цих елементах, якщо цілу конструкцію охолодити на $\Delta T = -60 \text{ K}$? Дані: $l = 20 \text{ см}$; $d = 2 \text{ см}$; $D_3 = 3 \text{ см}$; $D_b = 2,5 \text{ см}$; $h = 1 \text{ мм}$ – крок різьби болта; $E_c = 2E_b = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha_c = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_b = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

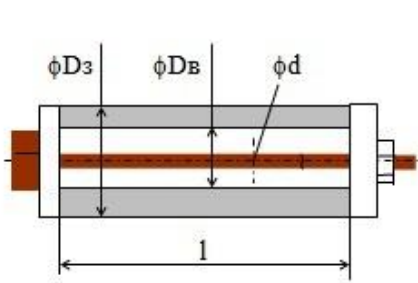


Рис. 126

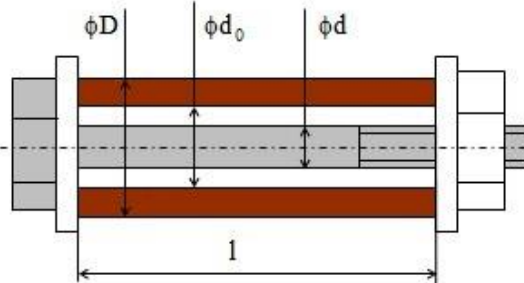


Рис. 127

- 163.** Сталевий болт і мідна втулка (Рис. 127) були змонтовані без початкових напружень. Приймаючи, що головка болта і гайка є недеформівними, розрахувати можливе число обертів гайки, які спричиняють стиск двома недеформівними плитами, якщо крок різьби болта становить h . Дані: $h = 1,5 \text{ мм}$; $d = 10 \text{ мм}$; $d_0 = 12 \text{ мм}$; $D = 18 \text{ мм}$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\sigma_{pc}] = [\sigma_{cc}] = 120 \text{ МПа}$; $[\sigma_{pm}] = [\sigma_{cm}] = 70 \text{ МПа}$.

- 164.** Сталеve осердя і латунна втулка однакової довжини стискаються жорсткими плитами силами $Q = 200 \text{ кН}$ (Рис. 128). Які напруження виникатимуть в поперечних перерізах осердя і втулки, якщо всю конструкцію додатково нагріти на $\Delta T = 100 \text{ K}$? Дані: $d = 4 \text{ см}$; $D_3 = 8 \text{ см}$; $D_b = 6 \text{ см}$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_m = 1,65 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

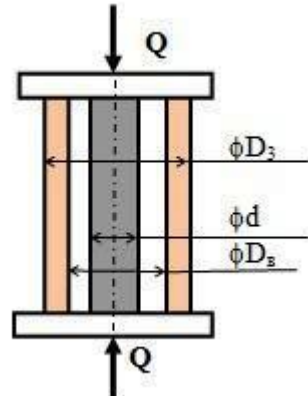


Рис. 128

- 165.** Мідний циліндр і дюралева втулка однакової довжини та площі поперечного перерізу F навантажені силою P через жорстку плиту (Рис. 129). Як належить змінити температуру конструкції, щоб сили, які передаються на втулку та циліндр, були однакові? Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $F = 20 \text{ см}^2$; $E_m = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_d = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha_m = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_d = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

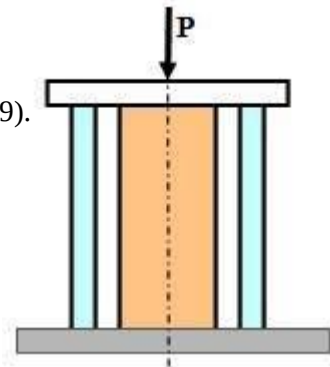


Рис. 129

166. Автомобільні шини монтуються при температурі 20°C . Які екстремальні напруження виникатимуть в шинах, якщо передбачені охолодження і розігрів шин знаходяться в проміжку від -40°C до $+60^{\circ}\text{C}$? Дані: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

167. Призматичний стержень, складений із сталевий (с), мідної (м) і дюралевої (д) частин, вмонтовано без зазору і без натягу між двома недеформівними стінами (Рис. 130) і підігріто на ΔT . Розрахувати напруження в стержні і переміщення місць стику окремих його частин. Дані: $\Delta T = 100 \text{ К}$; $a = 40 \text{ см}$; $F = 2 \text{ см}^2$; $E_s = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_d = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_m = 1,65 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_d = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

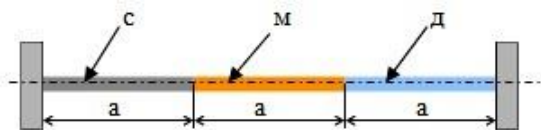


Рис. 130

168. Два стержні, сталевий (с) і латунний (л), з однаковими поперечними перерізами вмонтовані без зазору і без натягу між двома недеформівними стінами (Рис. 131) та підігріті на ΔT . Розрахувати напруження в стержнях і побудувати епюру переміщень поперечних перерізів вздовж осі стержня. Дані: $\Delta T = 50 \text{ К}$; $l = 1 \text{ м}$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha_c = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_m = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

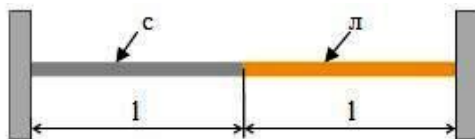


Рис. 131

169. Три стержні з однаковими поперечними перерізами, сталевий (с), мідний (м) і дюралевий (д), вміщено без зазору і без натягу між двома недеформівними стінами і навантажено силою $P = 100 \text{ кН}$ (Рис. 132), а також підігріто на $\Delta T = 80 \text{ К}$. Визначити реакції стін і взаємне переміщення точок В і С. Дані: $l = 40 \text{ см}$; $F = 10 \text{ см}^2$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_d = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_m = 1,65 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $\alpha_d = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

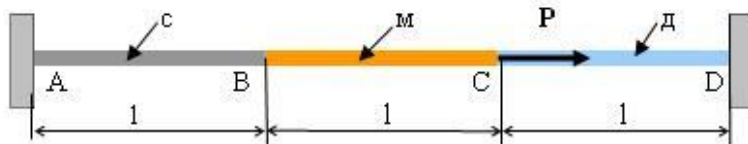


Рис. 132

170. Ступінчастий сталевий стержень вмонтовано без зазору і без натягу між двома недеформівними стінами (Рис. 133) і нагріто на ΔT . Розрахувати натиск стержня на стіни. Дані: $\Delta T = 30 \text{ К}$; $l = 1 \text{ м}$; $F = 10 \text{ см}^2$; $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

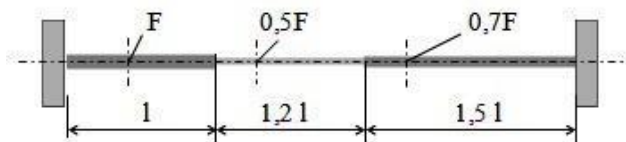


Рис. 133

171. Відрізок ступінчастого стержня, показаного на Рис. 134, нагрівають на ΔT . Розрахувати силу натиску на стіну і напруження в обох частинах стержня. Дані: $\Delta T = 100 \text{ K}$; $D = 6 \text{ cm}$; $d = 4 \text{ cm}$; $a = 20 \text{ cm}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

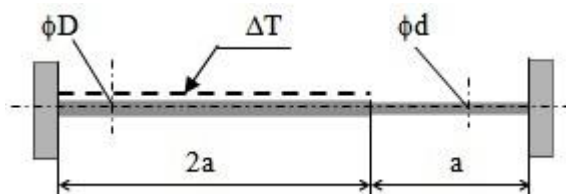


Рис. 134

172. Вільний кінець замуrowаного в стіні стержня стискається накладками силами $N = 20 \text{ kN}$ (Рис. 135). При якому підвищенні або зниженні температури стержня ΔT в його поперечному перерізі з'являться максимальні стискаючі чи розтягуючі напруження. Дані: $F = 4 \text{ cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$; $f = 0,1$ – коефіцієнт тертя між накладками і стержнем.

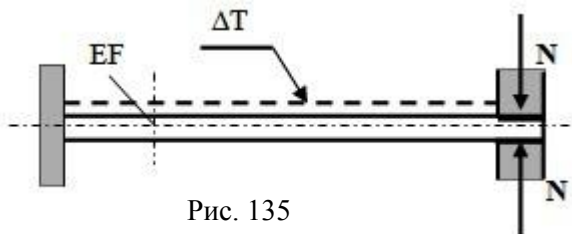


Рис. 135

173. Сталевий конусний стержень з малою конусністю закріплено з обох сторін до недеформівних стін (Рис. 136). Розрахувати сили натиску стержня на стіни і максимальну величину напружень після охолодження стержня на $\Delta T = 50 \text{ K}$. Дані: $l = 1 \text{ m}$; $D = 8 \text{ cm}$; $d = 5 \text{ cm}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

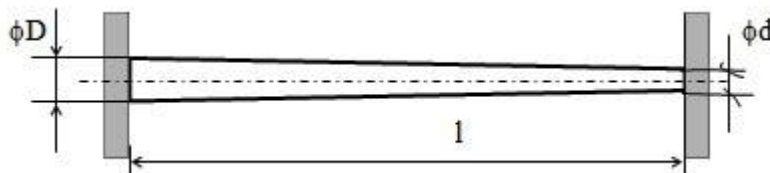


Рис. 136

174. На скільки градусів можна підігріти сталевий стержень на половині його довжини (Рис. 137), якщо допустимі напруження на стиск $[\sigma_c] = 80 \text{ МПа}$. Дані: $l = 1 \text{ m}$; $F = 8 \text{ cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

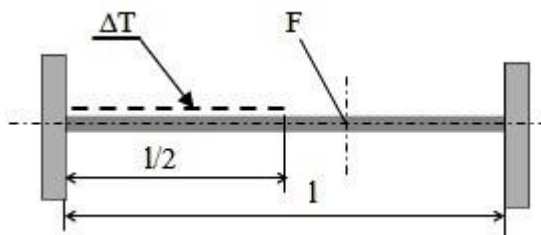


Рис. 137

175. Закріплений верхнім кінцем дрід довжиною $l = 300$ м, що складається із сталевго осердя перерізом $F_c = 4 \text{ мм}^2$ і мідного кожуха перерізом $F_m = 20 \text{ мм}^2$, навантажений тільки власною вагою. Визначити зміну напружень в перерізах сталевго і мідної частини та переміщення вздовж осі дроту. Дані: $\gamma_c = 78,5 \text{ кН/м}^3$; $\gamma_m = 89,3 \text{ кН/м}^3$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

176. Якою розтягуючою силою можна навантажити дрід, складений із сталевго осердя діаметром $d = 4 \text{ мм}$ і мідного кожуха із зовнішнім діаметром $D = 6 \text{ мм}$? Дані: $[\sigma_c] = 200 \text{ МПа}$; $[\sigma_m] = 60 \text{ МПа}$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

177. Побудувати епюри внутрішніх сил і переміщень вздовж осі стержня, показаного на Рис. 138. Дані: $q = 100 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $F = 5 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

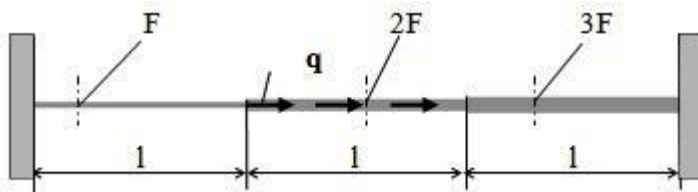


Рис. 138

178. Побудувати епюри внутрішніх сил для стержня, закріпленого і навантаженого як показано на Рис. 139. Дані: $q = 30 \text{ кН/м}$; $P = 2ql$; $F = 6 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

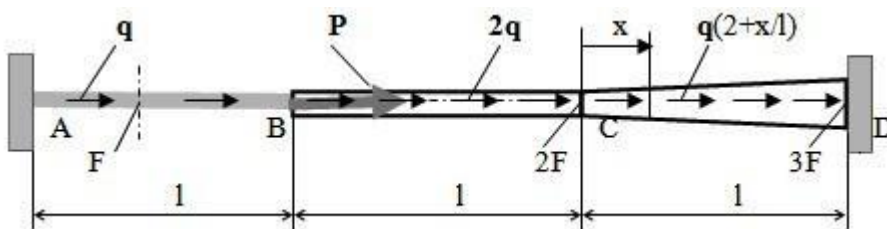


Рис. 139

179. Каучуковий стержень ($E = 8 \text{ МПа}$) довжиною $l = 1 \text{ м}$ і перерізом $F = 10 \text{ см}^2$, закріплений з обох сторін у вертикальному положенні, навантажений власною вагою ($\gamma = 9,5 \text{ кН/м}^3$). Побудувати епюри напружень в перерізах стержня та епюри переміщень вздовж осі стержня.

180. У залізобетонній колоні перерізи сталевих стержнів становлять 2% цілого перерізу колоні. Яким має бути діаметр колоні і число стержнів діаметрами 20 мм, якщо вона стискається силою 2000 кН. Параметри матеріалів бетону і сталі: $[\sigma_{c,b}] = 7 \text{ МПа}$; $E_b = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $[\sigma_{c,c}] = 120 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

181. Залізобетонна колона перерізом 1000 см^2 має 5 симетрично розташованих сталевих стержнів з перерізами 10 см^2 кожен. Якою стискаючою силою можна навантажити колону, якщо для бетону $[\sigma_{c,b}] = 8 \text{ МПа}$; $E_b = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, а для сталі $[\sigma_{c,c}] = 140 \text{ МПа}$; $E_c = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$?

182. Залізобетонна колона з круговим перерізом зміцнена симетрично розташованими 6 сталевими стержнями із спільним поперечним перерізом, що становить 1% цілого перерізу колоні. Яким повинен бути діаметр колоні і діаметри сталевих стержнів, якщо колона навантажена стискаючою силою 800 кН? Дані: $E_c = 10E_b = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\sigma_{c,c}] = 160 \text{ МПа}$; $[\sigma_{c,b}] = 8 \text{ МПа}$.

183. Стержень, закріплений з обох сторін, піддано дії розподіленого навантаження q (Рис. 140). Розрахувати відносне переміщення точок С і D. Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $a = 30 \text{ см}$; $b = 140 \text{ см}$; $F = 1 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

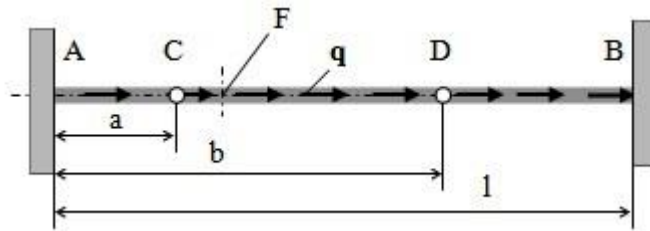


Рис. 140

184. Ступінчастий стержень, закріплений одним кінцем до жорсткої стіни, а другим до пружини з жорсткістю c , навантажено силою P як показано на Рис. 141. Обчислити сили і напруження в обох частинах стержня. Дані: $P = 200 \text{ кН}$; $l = 50 \text{ см}$; $F = 8 \text{ см}^2$; $c = 8 \cdot 10^4 \text{ кН/м}$; $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

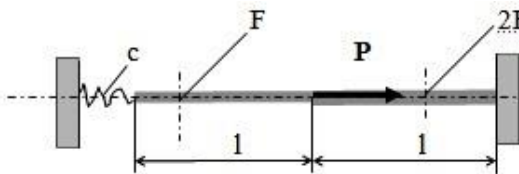


Рис. 141

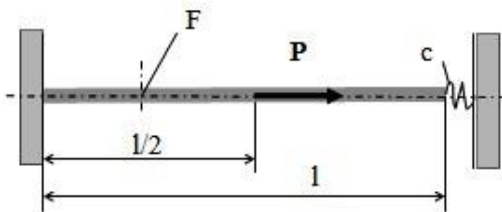


Рис. 142

185. Призматичний сталевий стержень, закріплений одним кінцем, навантажено посередині силою P . Переміщення другого кінця обмежує пружина жорсткістю c (Рис. 142). Побудувати епюри напружень, деформацій і переміщень вздовж осі стержня. Дані: $P = 180 \text{ кН}$; $l = 2,4 \text{ м}$; $F = 5 \text{ см}^2$; $c = 8 \cdot 10^3 \text{ кН/см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

186. Відрізок трубопроводу разом з компенсатором розташований на нерухомих опорах як показано на Рис. 143. Початковий натяг компенсатора з жорсткістю 200 кН/см при температурі $t = 20^\circ\text{C}$ становить $\Delta l = 4$ см. У яких межах змінюватимуться напруження в поперечному перерізі трубопроводу, якщо передбачувана робота трубопроводу буде в проміжку температур від -40°C до $+80^\circ\text{C}$. Дані: $l = 50$ м; $F = 40$ см² – поперечний переріз стінки трубопроводу; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

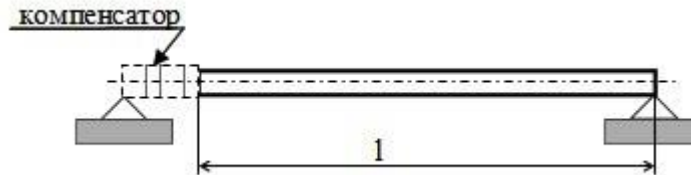


Рис. 143

187. Стержень закріплено одним кінцем так, що вільний кінець опинився на відстані Δl від жорсткої стіни як показано на Рис. 144. Побудувати епюри сил в поперечних перерізах стержня після навантаження його силою P . Дані: $P = 60$ кН; $l = 3$ м; $\Delta l = 3$ мм; $F = 2$ см²; $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

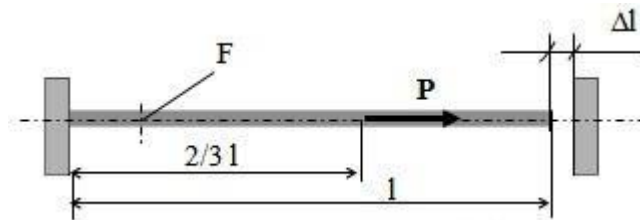


Рис. 144

188. Якою максимальною силою P можна навантажити ступінчастий стержень, показаний на Рис. 145? Дані: $l = 2$ м; $d = 3$ см; $D = 4$ см; $\delta = 1$ мм; $[\sigma_p] = 160$ МПа; $[\sigma_c] = 100$ МПа; $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

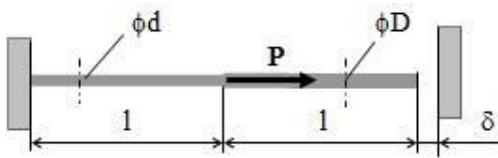


Рис. 145

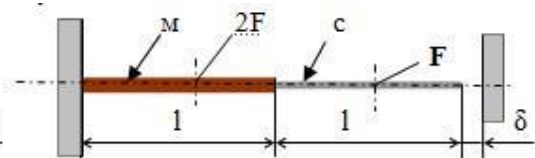


Рис. 146

189. Ступінчастий стержень складений із сталевोї (с) та мідної (м) частини. Після закріплення лівого кінця стержня на правому кінці виник зазор δ (Рис. 146). Обчислити натиск на стіни, а також напруження в обох частинах стержня після підігріву цілої конструкції на $\Delta T = 80$ К. Дані: $l = 1$ м; $\delta = 1$ мм; $F = 40$ см²; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К; $\alpha_m = 1,26 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

190. Ступінчастий стержень, виконаний із сталі (с) і з міді (м) з монтажним зазором δ (Рис. 147), навантажено силою P і нагріто на ΔT . Обчислити напруження в окремих частинах стержня. Дані: $P = 200$ кН; $\Delta T = 40$ К; $l = 80$ см; $\delta = 0,8$ мм; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К; $\alpha_m = 1,26 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

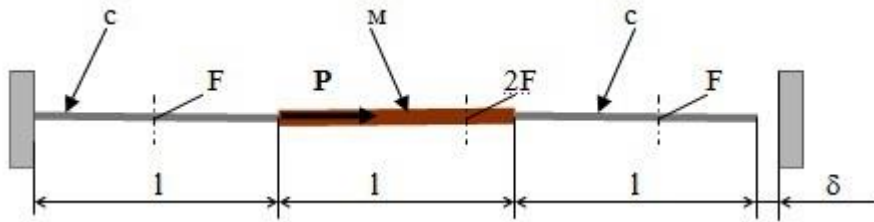


Рис. 147

191. З метою монтажу двох частин стержня, показаного на Рис. 148, прикладено силу P до повної ліквідації зазору δ і зварено їх. Розрахувати напруження в стержні після припинення дії сили P . Дані: $a = 50$ см; $\delta = 0,4$ мм; $F = 20$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

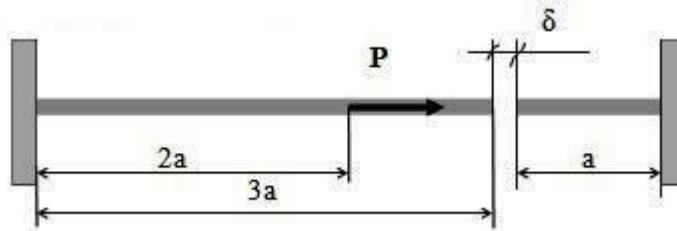


Рис. 148

2.5.2. Плоскі задачі

192. Жорстка невагома балка АВ підвішена як показано на Рис. 149. Які сили виникатимуть в сталевих стержнях 1 і 2, якщо їх підігріти на ΔT ? Дані: $\Delta T = 80$ К; $l = 1,6$ м; $a = 0,8$ м; $F = 4$ см²; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

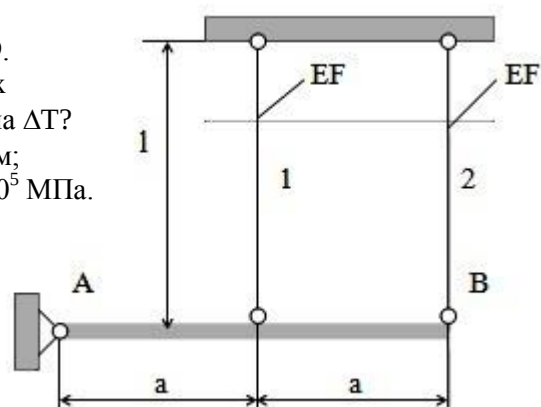


Рис. 149

Розв'язок

Підігрів стержнів 1 і 2 спричинить поворот жорсткої балки АВ, як показує Рис. 150

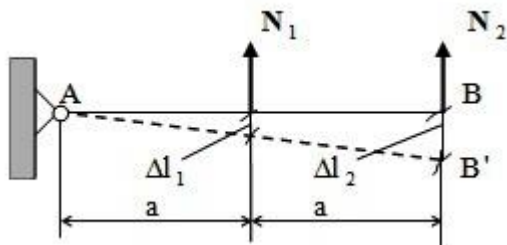


Рис. 150

Плоска система, показана на Рис. 149, є статично невизначною один раз. Це означає, що для розв'язку задачі необхідно скористатися одним рівнянням, що пов'язує переміщення. Таке рівняння, згідно з позначеннями на Рис. 150, матиме вигляд:

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a}, \text{ де: } \Delta l_1 = \alpha \Delta T + \frac{N_1 l}{EF}; \quad \Delta l_2 = \alpha \Delta T + \frac{N_2 l}{EF}.$$

Друге рівняння статички суми моментів сил відносно точки А, що діють на балку АВ, матиме вигляд:

$$N_1 a + N_2 2a = 0.$$

Отримано два рівняння з двома невідомими N_1 і N_2 . Після підстановки у рівняння переміщень виразів Δl_1 і Δl_2 і після розв'язку системи двох рівнянь отримано:

$$N_1 = -\frac{2}{5} EF \alpha \Delta T = -\frac{2}{5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 80 = 32 \text{ кН};$$

$$N_2 = \frac{1}{5} EF \alpha \Delta T = 16 \text{ кН}.$$

Результати розв'язку показують, що стержень 1 стискається силою 32 кН, а стержень 2 розтягується силою 16 кН.

- 193.** Мідний стержень 1 і сталевий стержень 2 підтримують жорстку невагому балку АВ, навантажену силою Р (Рис. 151). Розрахувати величину напружень в поперечних перерізах стержнів. Дані: $P = 400 \text{ кН}$; $l = 2,5 \text{ м}$; $a = 3 \text{ м}$; $F_1 = 20 \text{ см}^2$; $F_2 = 10 \text{ см}^2$; $E_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

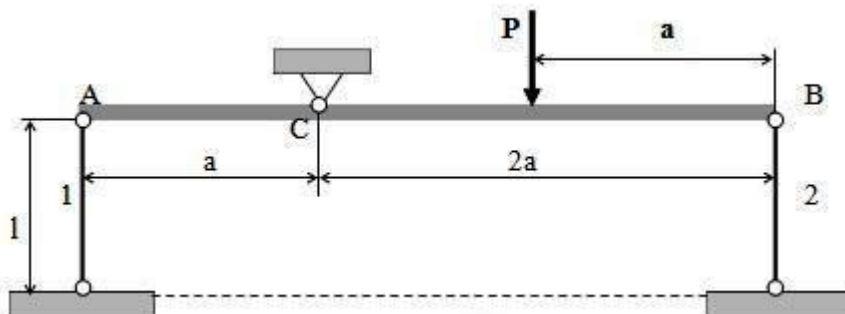


Рис. 151

Розв'язок

Плоска система, показана на Рис. 151, є статично невизначною один раз. Очікуване положення балки АВ після прикладання сили Р показано на Рис. 152. Також на рисунку показані сили, які діють на балку АВ за умови, що сили у стержнях є розтягуючими.

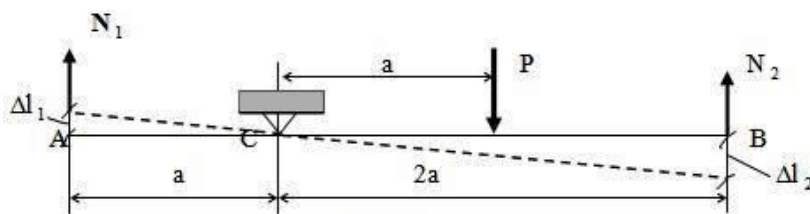


Рис. 152

Рівняння переміщень матиме вигляд:

$$\Delta l_1/a = \Delta l_2/2a;$$

а рівняння моментів відносно шарніру С – $N_1a - Pa - N_22a = 0$.

Потрібно звернути увагу, що в рівнянні статички є сили, які діють на балку АВ, а в рівняннях переміщень враховують сили, які діють на стержні 1 і 2 (розтягуючі).

Підставляючи у рівняння переміщень $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}$ і $\Delta l_2 = -\frac{N_2 l}{EF}$ (знак мінус,

тому що переміщення має протилежний напрямок до напрямку сили N_2 , що діє на стержень 2) і розв'язуючи систему двох рівнянь, отримано:

$$N_1 = \frac{P}{4 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + 1} = \frac{400}{4 \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10}{1 \cdot 10^5 \cdot 20} + 1} = 80 \text{ кН}; \quad N_2 = -\frac{P}{\frac{E_2 F_2}{2 E_1 F_1} + 2} = -160 \text{ кН}.$$

Стержень 1 розтягується силою 80 кН, а стержень 2 стискається силою 160 кН.

Напруження в стержнях 1 і 2 становлять:

$$\sigma_{(1)} = N_1 / F_1 = 80 / 20 = 4 \text{ кН/см}^2 = 40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = N_2 / F_2 = -160 / 10 = -16 \text{ кН/см}^2 = -160 \text{ МПа}.$$

- 194.** Сталеві стержні 1, 2 і 3, що підтримують жорстку невагому балку АВ (Рис. 153), нагрівають на $\Delta T = 80 \text{ К}$. Розрахувати величину сил в стержнях. Дані: $l = 1,25 \text{ м}$; $a = 1 \text{ м}$; $F = 5 \text{ см}^2$ – поперечні перерізи стержнів; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}$.

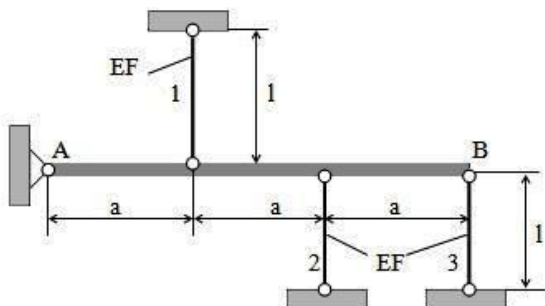


Рис. 153

195. Жорстка невагома балка АВ підвішена і навантажена, як показано на Рис. 154. Спроекувати перерізи стержнів 1 і 2, якщо допустимі напруження розтягу $[\sigma_p] = 100 \text{ МПа}$. Дані: $P = 120 \text{ кН}$; $E = \text{const}$.

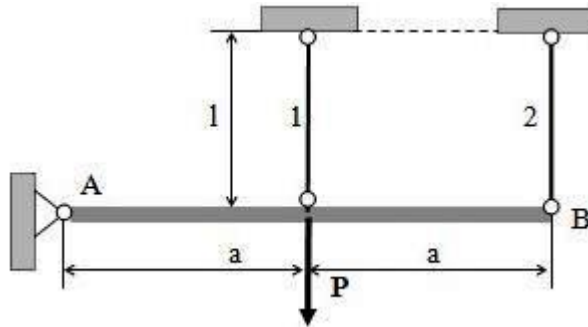


Рис. 154

Розв'язок

Задача є один раз статично невизначною. Визначення розмірів перерізів в статично невизначних конструкціях не завжди однозначне і можливе без прийняття додаткових умов. Балка АВ після прикладання сили P повернеться на невеликий кут α (Рис. 155).

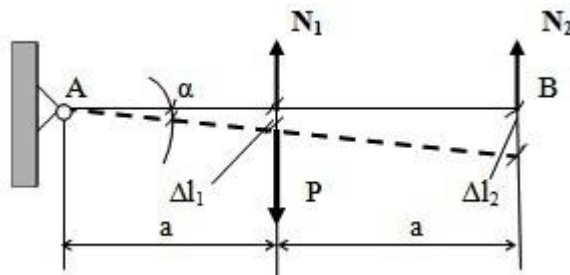


Рис. 155

Можна записати два рівняння:

– рівняння переміщень для стержнів:

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a};$$

– рівняння моментів сил відносно шарніру А для балки АВ:

$$N_1 a + N_2 2a - P a = 0.$$

Підставляючи $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}$, а також $\Delta l_2 = -\frac{N_2 l}{EF}$, і спрощуючи, отримано

систему рівнянь

$$\frac{N_1}{E_1} = \frac{N_2}{2E_2}; P = N_1 + 2N_2.$$

У вищевказаній системі рівнянь є формально чотири невідомі, але з геометричних співвідношень конструкції слідує, що напруження в стержні 1 будуть завжди рівні половині напружень в стержні 2, бо деформації в стержні 2, незалежно від розміру перерізів стержнів, будуть завжди в два рази більші від деформацій в стержні 1. Це означає, що неможливо добрати оптимальних перерізів задля економії матеріалу, тобто таких, щоб в обох стержнях водночас діяли допустимі напруження $[\sigma_p]$. Натомість напруження $[\sigma_p]$ в цілій конструкції будуть наступними:

1) **розглядається тільки стержень 1** і тоді сила в ньому, як випливає з Рис. 155, буде рівна $N_1 = P$; оптимальний переріз $F_1 = P/[\sigma_p] = 120/100 = 12 \text{ см}^2$ та при цьому а priori $F_2 = 0$;

2) **розглядається тільки стержень 2** і тоді сила в ньому $N_2 = P/2$; переріз стержня для цього випадку $F_2 = P/2[\sigma_p] = 100/2 \cdot 100 = 6 \text{ см}^2$, при цьому $F_1 = 0$.

З вищезгаданого слідує, що найменша сума поперечних перерізів стержнів може становити 6 см^2 , а найбільша вимагає окремого дослідження і, безсумнівно, перевищить 12 см^2 . Виникає це з факту, що поява стержня 2 змінює спосіб обчислення розміру перерізу стержня 1 через прийняття допустимих напружень рівних $0,5[\sigma_p]$ (для стержня 2 допустимі напруження становлять $[\sigma_p]$).

Обчислюють суму поперечних перерізів стержнів, ввівши співвідношення між перерізами $F_1/F_2 = k$.

Після підставлення у рівняння переміщень $F_1 = kF_2$ отримують $N_2 = 2/kN_1$, а після підставлення у рівняння статки обчислюють сили, які становлять:

$$N_1 = \frac{k}{k+4} P; \quad N_2 = \frac{2}{k+4} P. \text{ Відповідні перерізи будуть рівні}$$

$$F_1 = \frac{N_1}{0,5[\sigma_p]} = \frac{2k}{k+4} \cdot \frac{P}{[\sigma_p]}; \quad F_2 = \frac{N_2}{[\sigma_p]} = \frac{2}{k+4} \cdot \frac{P}{[\sigma_p]};$$

$$\text{звідки } F_1 + F_2 = \frac{k+1}{k+4} \cdot \frac{2P}{[\sigma_p]}.$$

$$\text{З отриманого виразу слідує, що при } k \rightarrow 0 \quad F_1 + F_2 = \frac{P}{2[\sigma_p]} = 6 \text{ см}^2, \text{ що було}$$

вже раніше встановлено.

Натомість при $k \rightarrow \infty$, але при врахуванні наявності стержня 2, матимемо

$$F_1 + F_2 = \frac{2P}{[\sigma_p]} = 24 \text{ см}^2.$$

Приймаючи до уваги те, що без стержня 2, як встановлено раніше, переріз стержня 1 дорівнює 12 см^2 , то нелогічним є врахування стержня 2, коли стержень 1 досягне поданого розміру перерізу.

Керуючись вимогами ощадливості матеріалу і безпеки конструкції, можна отримати ще два випадки:

1) $k = 2$; тоді, як легко розрахувати, $F_1 = 8 \text{ см}^2$ і $F_2 = 4 \text{ см}^2$; тобто в сумі буде переріз 12 см^2 . Отже, такий самий переріз, як для випадку, коли є лише стержень 1. Але в цьому випадку маємо два стержні і більш безпечна конструкція.

2) $k = 1$; тоді $F_1 = F_2 = 4,8 \text{ см}^2$, а в сумі перерізи становлять $9,6 \text{ см}^2$. Вигідний випадок для конструкції, бо буде два стержні з однаковими перерізами і з сумою перерізів не набагато більшою 6 см^2 .

- Цікаві можуть бути також випадки для $k \leq 1$;
- для $k = 1/2$; маємо $F_1 + F_2 = 8/3 \text{ см}^2 + 16/3 \text{ см}^2 = 8 \text{ см}^2$;
 - для $k = 1/4$; маємо $F_1 + F_2 = 24/17 \text{ см}^2 + 96/17 \text{ см}^2 = 7,1 \text{ см}^2$;
 - для $k = 1/6$; маємо $F_1 + F_2 = 24/25 \text{ см}^2 + 144/25 \text{ см}^2 = 6,72 \text{ см}^2$.
- Остаточний вибір перерізів проведе інженер-конструктор.

196. Однорідний блок вагою $Q = 240 \text{ кН}$ закріплений у шарнірі А, розташовано на двох сталевих стержнях з однаковими перерізами (Рис. 156). Розрахувати найменший розмір поперечних перерізів стержнів, якщо $[\sigma_c] = 100 \text{ МПа}$.

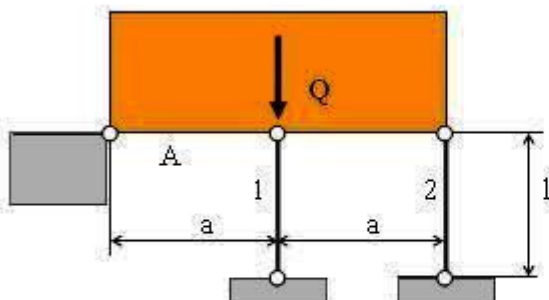


Рис. 156

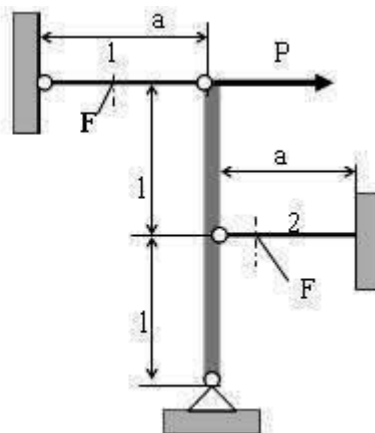


Рис. 157

197. Недеформівна колона утримується у вертикальному положенні за допомогою сталевого 1 і чавунного 2 стержня (Рис. 157). Якою максимальною силою P можна навантажити цю конструкцію, якщо $[\sigma_{p1}] = 160 \text{ МПа}$ і $[\sigma_{c2}] = 200 \text{ МПа}$? Дані: $l = 1,5 \text{ м}$; $a = 1 \text{ м}$; $F = 20 \text{ см}^2$; $E_1 = 2E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

198. Однорідний блок вагою $Q = 400 \text{ кН}$ закріплений як показано на Рис. 158. Розрахувати поперечні перерізи стержнів, якщо $F_1/F_2 = 2$ і $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$.

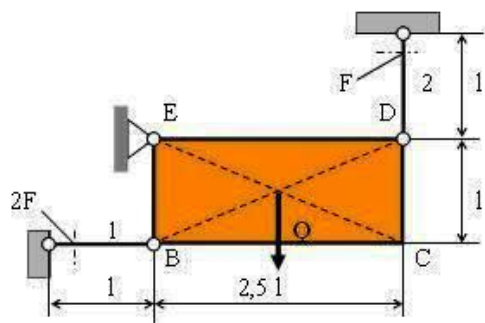


Рис. 158

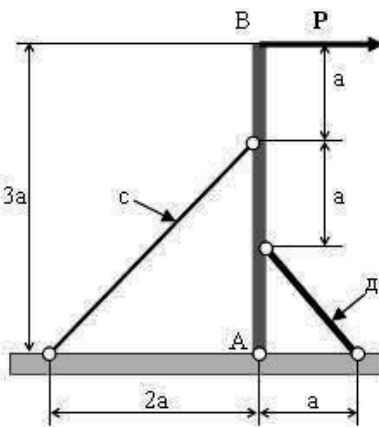


Рис. 159

199. Жорстка колона АВ, що закріплена шарнірно, утримується з допомогою двох стержнів, сталевго (с) і дерев'яного (д), як показано на Рис. 159. Якою горизонтальною силою Р, прикладеною до верхівки колони та скерованою праворуч, можна навантажити цю конструкцію? Скільки повинна становити ця сила, якщо вона буде скерована ліворуч? Дані: $a = 1$ м; $F_d = 20F_c = 80$ см²; $[\sigma_{pc}] = [\sigma_{cc}] = 140$ МПа; $[\sigma_{pd}] = 40$ МПа; $[\sigma_{cd}] = 15$ МПа; $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E_d = 1,2 \cdot 10^4$ МПа.

200. Жорстка невагома балка АВ закріплена і навантажена як показано на Рис. 160. Розрахувати реакції опор балки АВ. Дані: $P = 200$ кН; $a = 2$ м; $l_1 = l_2 \equiv l = 2$ м; $F_2 = 2F_1 = 4$ см²; $\alpha = 60^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

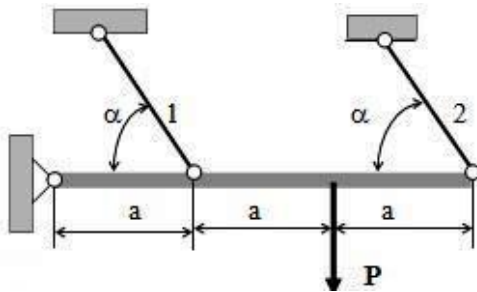


Рис. 160

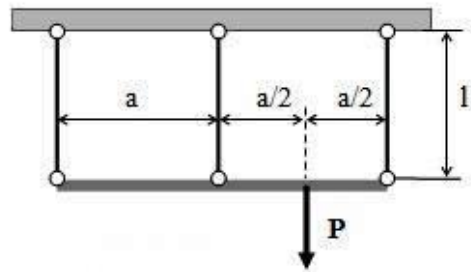


Рис. 161

201. Однорідна балка вагою $Q = 8$ кН навантажена додатково силою Р як показано на Рис. 161, розташована на трьох стержнях. Крайні стержні виконані з міді, а середній із сталі. Розрахувати сили в стержнях. Дані: $P = 60$ кН; $l = a = 1$ м; $F = 2$ см² – перерізи стержнів; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа.

202. Жорстка однорідна балка АВ вагою G утримується з допомогою трьох стержнів з однаковими розмірами (Рис. 162). Розрахувати сили в стержнях. Дані: $G = 240$ МПа; $E = \text{const}$.

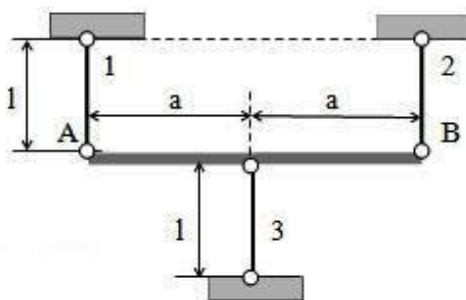


Рис. 162

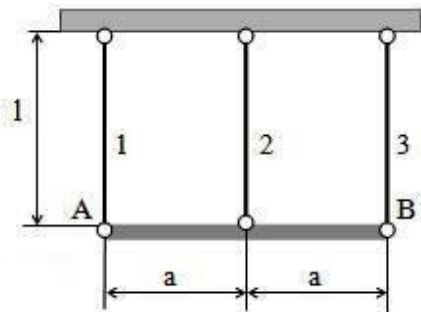


Рис. 163

203. Однорідна жорстка балка АВ вагою Q розташована на трьох сталевих (Рис. 163) стержнях. Підібрати такі розміри перерізів стержнів, щоб сили в них були однакові. Дані: $Q = 480$ кН; $[\sigma_p] = 200$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

- 204.** Жорстка невагома балка АВ утримується з допомогою симетричного з'єднання стержнів, двох мідних (м) і одного сталевго (с), та навантажується силою Р як показано на Рис. 164. Обчислити допустиму величину сили Р. Дані: $l = a = 1$ м; $F_m = F_c = 5$ см²; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma_{pc}] = 200$ МПа; $[\sigma_{p,m}] = 80$ МПа.

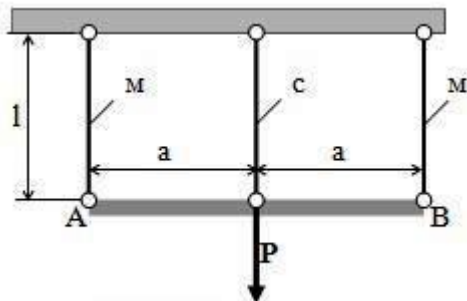


Рис. 164

- 205.** Невагома жорстка балка АВ закріплена як показано на Рис. 165. На скільки градусів можна нагріти сталеві стержні ВС і DE, якщо розтягуючі або стискаючі напруження в цих стержнях не можуть перевищувати 80 МПа. Дані: $l = 3$ м; $a = 2$ м; $F = 4$ см² – перерізи стержнів; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

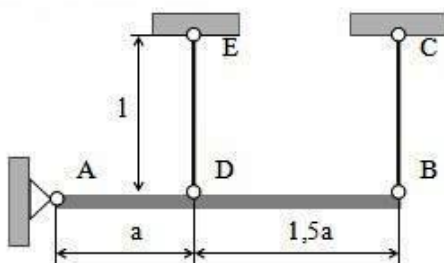


Рис. 165

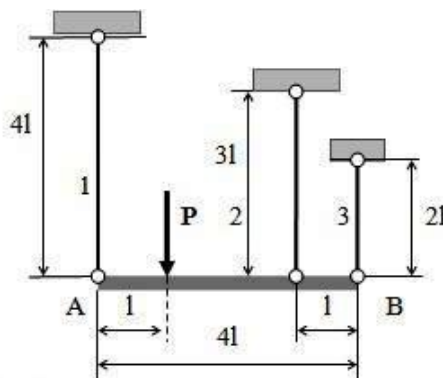


Рис. 166

- 206.** Жорстка невагома балка АВ утримується за допомогою трьох стержнів перерізами F кожен. Якою силою Р (Рис. 166) можна навантажити цю стержневу систему? Дані: $l = 1$ м; $F = 4$ см²; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 240$ МПа; $E = \text{const}$.

- 207.** Жорстка невагома балка підвішена на п'яти рівномірно розміщених стержнях з однаковими розмірами, але виготовлених з різних матеріалів, а саме: сталі (с), чавуну (ч), міді (м), дюралюмінію (д) і вісмуту (в) (Рис. 167). На якій віддалі від лівого кінця балки потрібно прикласти силу Р, щоб вона й надалі залишалася горизонтальною. Дані: $a = 2$ м; $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E_{\text{ч}} = 1,3 \cdot 10^5$ МПа; $E_m = 1 \cdot 10^5$ МПа; $E_d = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $E_v = 0,3 \cdot 10^5$ МПа

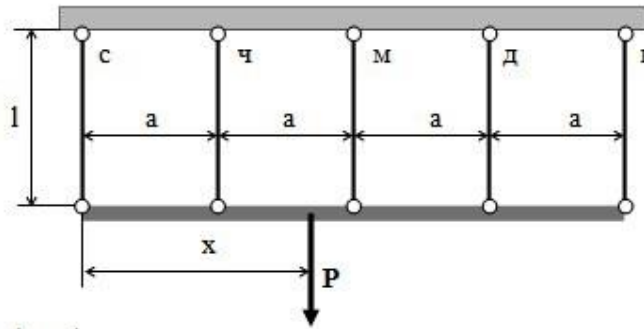


Рис. 167

- 208.** Жорстка недеформівна балка АВ закріплена за допомогою двох сталевих (с) та одного мідного (м) стержня і навантажена силами Q і G як показує Рис. 168. Обчислити напруження в кожному стержні після їх додаткового нагрівання на $\Delta T = 100$ К. Дані: $Q = 2G = 40$ кН; $l = a = 1$ м; $F = 2$ см² – перерізи стержнів; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К; $\alpha_m = 1,8 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

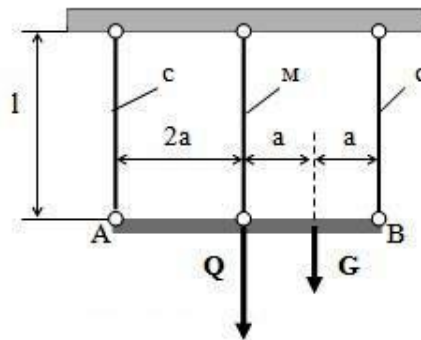


Рис. 168

- 209.** Невагома жорстка балка АВ (Рис. 169) розташована на трьох стержнях: сталевих 1 і 2, і мідному 3. Поперечні перерізи та довжини стержнів є однаковими. Розрахувати сили в стержнях після нагрівання конструкції на ΔT . Дані: $\Delta T = 100$ К; $l = a = 1$ м; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа; $F = 5$ см² – поперечні перерізи стержнів $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К; $\alpha_m = 1,7 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

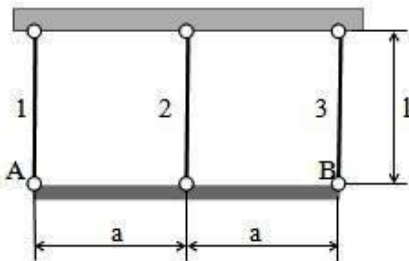


Рис. 169

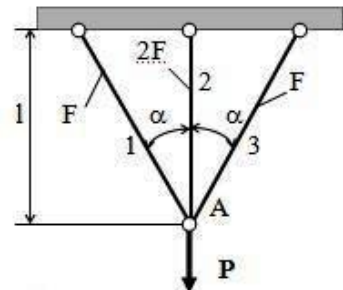


Рис. 170

210. Три з'єднані у вузлі А стержні навантажено силою Р як показано на Рис. 170. Розрахувати величину сил в стержнях і переміщення точки А. Дані: $P = 120 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $F = 2 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язок

На вузол А (Рис. 171) діє плоска система чотирьох збіжних сил, з яких три невідомі і задача є один раз статично невизначною.

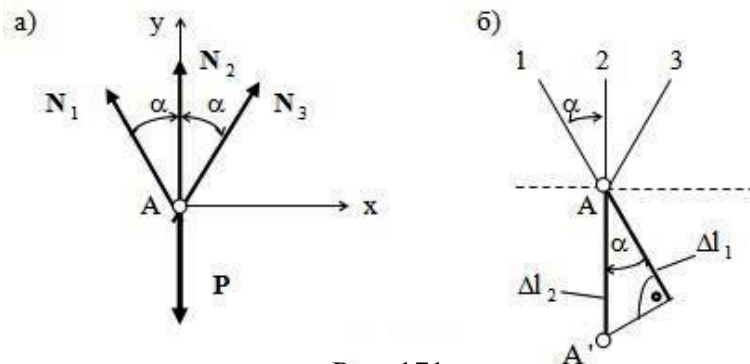


Рис. 171

Два рівняння статички і рівняння переміщень матимуть вигляд:

$$\sum P_{xi} = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum P_{yi} = N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - P = 0, \quad \Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha.$$

Підставляючи замість $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF \cos \alpha}$ і $\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{2EF}$ до вищевказаної системи

рівнянь та розв'язуючи її, отримано:

$$N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{2(1 + \cos^3 \alpha)}, \quad N_2 = \frac{P}{1 + \cos^3 \alpha}.$$

Переміщення вузла А дорівнює видовженню стержня 2:

$$AA' = \Delta l_2 = \frac{Pl}{2EF(1 + \cos^3 \alpha)}.$$

Підставляючи числові дані, отримано:

$$N_1 = N_3 = \frac{120 \cdot \cos^2 30^\circ}{2(1 + \cos^3 30^\circ)} = 27,3 \text{ кН}, \quad N_2 = \frac{120}{1 + \cos^3 30^\circ} = 72,7 \text{ кН}.$$

$$AA' = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 200(1 + \cos^3 30^\circ)} = 1,8 \text{ мм}.$$

211. Розрахувати сили в стержнях і проекції переміщень вузла А на осі x і y в симетричній системі трьох стержнів з однаковими довжинами l та перерізами F, показаній на Рис. 172, для двох випадків навантажень:

а) стержень 3 був підігрітий на $\Delta T = 80 \text{ К}$,

б) стержні 2 і 3 були охолоджені на $\Delta T = -50 \text{ К}$.

Дані: $l = 1 \text{ м}$; $F = 1 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}$.

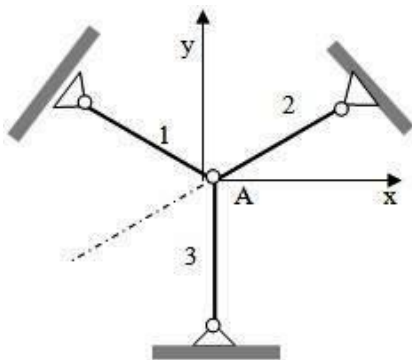


Рис. 172

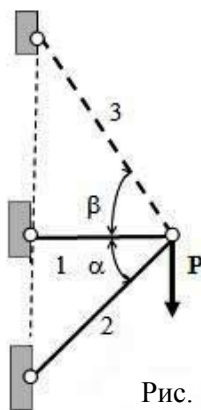


Рис. 173

212. На скільки відсотків можна збільшити величину допустимої сили P , що діє на систему двох стержнів 1 і 2, якщо додамо стержень 3 як показано на Рис. 173? Дані: $F_1 = F_2 = F_3 \equiv F = 2 \text{ см}^2$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 200 \text{ МПа}$; $E = \text{const}$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

213. Обчислити вертикальне та горизонтальне переміщення вузла А системи, показаної на Рис. 174. Дані: $P = 80 \text{ кН}$; $l = 3 \text{ м}$; $a = l$; $b = 2/3l$; $F = 1 \text{ см}^2$ – поперечні перерізи стержнів; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = \text{const}$.

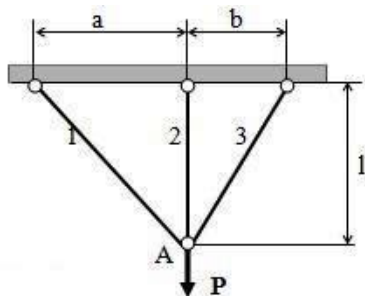


Рис. 174

Розв'язок

Задача є один раз статично невизначною. Сили, які діють на вузол А і його переміщення показано на Рис. 175.

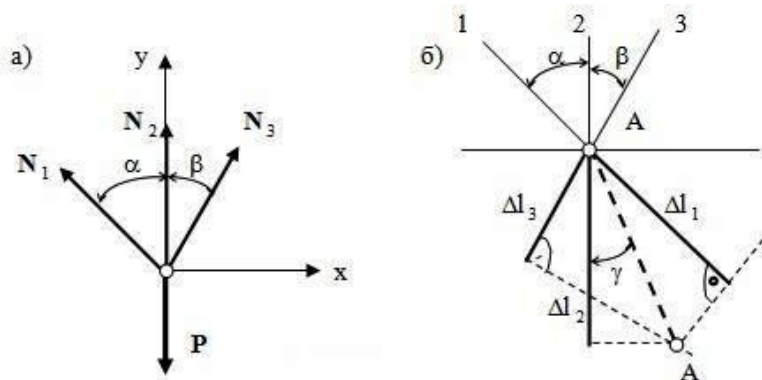


Рис. 175

Записують два рівняння статички для вузла А (Рис. 175а) і два рівняння переміщень (для зручності обчислень вводиться ще одна невідома – кут γ , який утворює переміщення AA' з вертикаллю), враховуючи Рис. 175б. Ці рівняння матимуть вигляд:

$$\sum P_{xi} = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \beta = 0, \quad (1)$$

$$\sum P_{yi} = N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \beta - P = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta l_3}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\Delta l_1}{\sin(\alpha - \gamma)}, \quad (3)$$

$$\frac{\Delta l_1}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{\Delta l_2}{\cos \gamma}. \quad (4)$$

Підставляючи в рівняння (3) $\Delta l_1 = N_1 l_1 / EF$ і $\Delta l_3 = N_3 l_3 / EF$, а також зважаючи на те, що $l_1 = \sqrt{2}l$ і $l_3 = \frac{\sqrt{13}}{3}l$, отримано: $\frac{N_3}{N_1} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha - \gamma)}$.

З рівняння (1) буде: $\frac{N_3}{N_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Після прирівнювання правих сторін отриманих вище рівнянь, отримано рівняння, у якому невідомим є тільки кут γ :

$$\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{\sqrt{13} \sin \alpha}{3\sqrt{2} \sin \beta}.$$

Враховуючи, що у вищевказаному рівнянні $\alpha = \arctg 1 = 45^\circ$ і $\beta = \arctg 2/3 = 33,7^\circ$, а також розв'язуючи його, отримано $\gamma = 7,5^\circ$.

З рівняння (4) після підставлення $\Delta l_1 = N_1 l_1 / EF$ і $\Delta l_2 = N_2 l_2 / EF$, а також враховуючи, що $l_1 = \sqrt{2}l$ і $l_2 = l$, отримано:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}, \text{ а оскільки } \alpha = 45^\circ \text{ і } \gamma = 7,5^\circ, \text{ то буде: } N_2 = 1,767N_1.$$

$$\text{З рівняння (1): } N_3 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} N_1 = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 33,7^\circ} N_1 = 1,274N_1.$$

Підставляючи вище отримані величини N_1 і N_3 в рівняння (2):

$$N_1 \cos 45^\circ + 1,767N_1 + 1,274 \cos 33,7^\circ N_1 = P, \text{ звідки}$$

$$N_1 = P/3,534 = 80 \text{ кН} / 3,534 = 22,64 \text{ кН};$$

$$N_2 = 1,767N_1 = 40 \text{ кН};$$

$$N_3 = 1,274N_1 = 28,84 \text{ кН}.$$

Підставляючи числові дані, отримано видовження стержнів: $\Delta l_1 = 4,8 \text{ мм}$; $\Delta l_2 = 6,02 \text{ мм}$; $\Delta l_3 = 5,2 \text{ мм}$.

Шукані в задачі переміщення вузла А – вертикальне v_A і горизонтальне u_A становлять:

$$v_A = \Delta l_2 = 6,02 \text{ мм};$$

$$u_A = \Delta l_2 \operatorname{tg} \gamma = 0,8 \text{ мм}.$$

214. Три стержні, виготовлені з однакового матеріалу і з однаковими розмірами, навантажені силою P як показано на Рис. 176. Для яких кутів α використання матеріалу буде найменшим, якщо $[\sigma_p] = [\sigma_c]$?

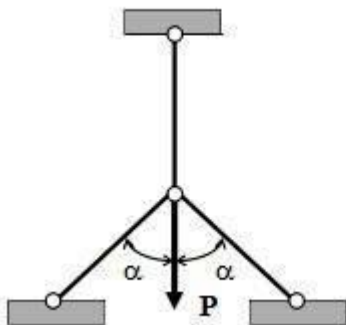


Рис. 176

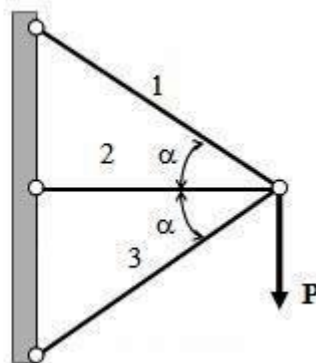


Рис. 177

215. Система трьох сталевих стержнів, 1 і 2 з перерізами F і стержня 3 з перерізом $2F$, навантажена силою $P = 240$ кН (Рис. 177). Розрахувати перерізи стержнів. Дані: $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 100$ МПа; $\alpha = 30^\circ$; $E = \text{const}$.

216. Система з трьох сталевих стержнів однакових поперечних перерізів навантажена силою P як показано на Рис. 178. Розрахувати сили в стержнях і переміщення точки А. Дані: $P = 360$ кН; $l = 1$ м; $F = 5$ см²; $\alpha = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

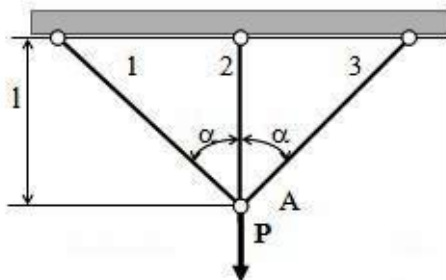


Рис. 178

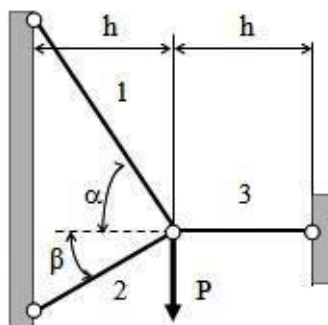


Рис. 179

217. Система трьох стержнів з однаковими поперечними перерізами F навантажена силою P як показано на Рис. 179. Розрахувати найменший допустимий розмір поперечних перерізів стержнів. Дані: $P = 120$ кН; $h = 1$ м; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа; $E = \text{const}$.

218. Три стержні, 1 і 2 сталеві, а також 3 мідний, зі співвідношенням поперечних перерізів $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 1$, з'єднані та навантажені як показано на Рис. 180. Обчислити мінімальні розміри поперечних перерізів стержнів. Дані: $P = 200$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma_{pc}] = 160$ МПа; $[\sigma_{cc}] = 120$ МПа; $[\sigma_{pm}] = 80$ МПа; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа.

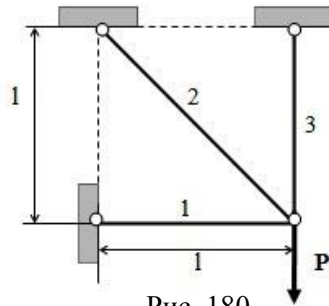


Рис. 180

Розв'язок

Сили, які діють у вузлі А, та переміщення цієї точки в системі видовжень окремих стержнів показано на Рис. 181.

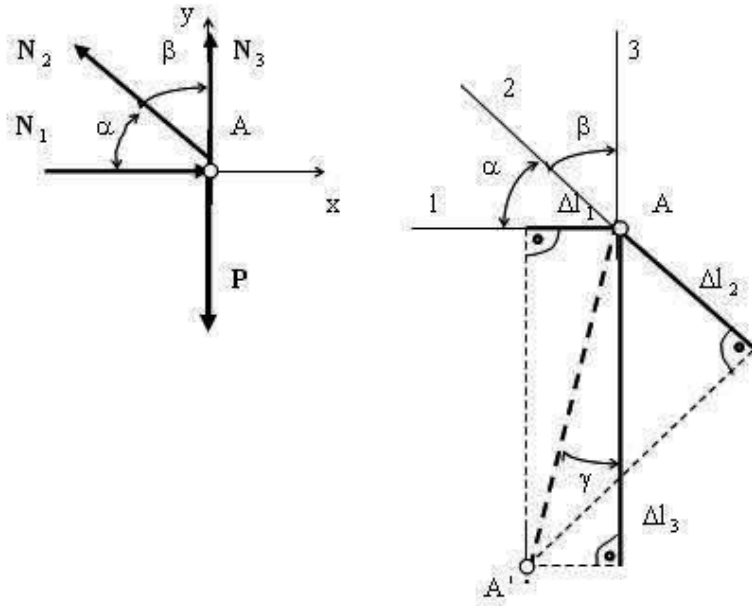


Рис. 181

Система є один раз статично невизначною, розв'язок якої проводиться з використанням рівнянь статики і рівнянь переміщень. Ці рівняння мають наступний вигляд:

$$\sum P_{xi} = N_1 - N_2 \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum P_{yi} = N_2 \cos \beta + N_3 - P = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta l_1}{\sin \gamma} = \frac{\Delta l_2}{\sin(\alpha - \gamma)}, \quad (3a)$$

$$\frac{\Delta l_2}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{\Delta l_3}{\cos \gamma}. \quad (3б)$$

З рівнянь (3а) і (1) після підставлення $\Delta l_1 = N_1 l / EF$ і $\Delta l_2 = N_2 \sqrt{2} l / 2EF$ (прийнято $E_c \equiv E$) отримано:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha - \gamma)} = \sqrt{2} \cos \alpha, \text{ де } \alpha = 45^\circ.$$

Розв'язком рівняння $\frac{\sin \gamma}{\sin(45^\circ - \gamma)} = \sqrt{2} \cos 45^\circ$ є кут $\gamma = 22,5^\circ$.

З рівняння (3б), враховуючи, що $\Delta l_2 = N_2 \sqrt{2} l / EF$ і $\Delta l_3 = N_3 l / E_m F$ де $E_m = E/2$, отримано:

$$\frac{N_2}{N_3} = 4 \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma};$$

а враховуючи, що $\alpha = 45^\circ$ і $\gamma = 22,5^\circ$, отримано $N_2 = 0,8284 N_3$.

Після підставлення у рівняння (2) вищезгаданої величини N_2 , буде:
 $0,8284 N_3 \cos \beta + N_3 - P = 0$;

звідки, враховуючи, що $\beta = 45^\circ$, отримано

$$N_3 = P / 1,5858 = 200 \text{ кН} / 1,5858 = 126,1 \text{ кН};$$

а також

$$N_2 = 104,5 \text{ кН}; N_1 = 73,9 \text{ кН}.$$

Перерізи стержнів з умови допустимих напружень могли б становити:

- стержень 1: $F = N_1 / [\sigma_{cc}] = 6,16 \text{ см}^2$;
- стержень 2: $2F = N_2 / [\sigma_{pc}] = 6,53 \text{ см}^2$;
- стержень 3: $F = N_3 / [\sigma_{pm}] = 15,76 \text{ см}^2$.

Найбільший переріз F отримано для мідного стержня 3. Тому, щоб задовольнити умову задачі $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 1$, вибрано наступні розміри перерізів стержнів:

$$F_1 = 15,76 \text{ см}^2; F_2 = 31,52 \text{ см}^2; F_3 = 15,76 \text{ см}^2.$$

Матеріал у повній мірі використаний тільки для стержня 3, де напруження становлять 80 МПа, натомість стержні 1 і 2 недовантажені, бо напруження становлять відповідно $\sigma_1 = 46,9 \text{ МПа}$ і $\sigma_2 = 33,2 \text{ МПа}$.

219. Однорідна недеформівна балка АВ вагою Q утримується в горизонтальному положенні з допомогою стержнів 1 і 2 як показано на Рис. 182. Обчислити напруження в стержнях. Дані: $Q = 240 \text{ кН}$; $a = 1 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $F_1 = F_2 \equiv F = 10 \text{ см}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

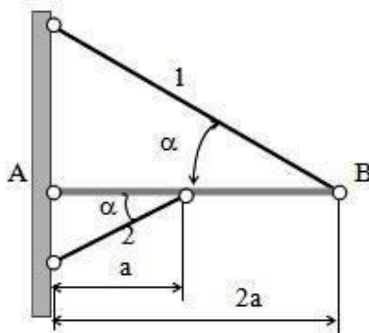


Рис. 182

220. Стержні 1 і 2, що підтримують жорстку і невагому балку АВ (Рис. 183), охолоджено на ΔT . Розрахувати сили і напруження в стержнях 1 і 2. Дані: $\Delta T = -40$ К; $l = 1$ м; $F_1 \equiv F = 2$ см²; $F_2 \equiv 2F = 4$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К; $\beta = 45^\circ$; $\alpha = 30^\circ$.

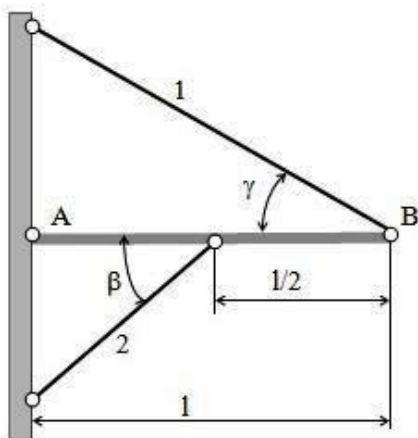


Рис. 183

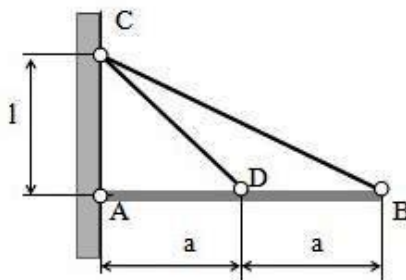


Рис. 184

221. Однорідна недеформівна балка АВ вагою 200 кН підтримується в горизонтальному положенні сталевими стержнями CD і BC з перерізами $F = 8$ см² кожен (Рис. 184). Розрахувати напруження в поперечних перерізах стержнів.

222. Систему чотирьох стержнів, двох сталевих (с) і двох мідних (м) однакової довжини l та поперечних перерізів F (Рис. 185), охолоджено на $\Delta T = -50$ К. Розрахувати сили і напруження в стержнях, а також вертикальне переміщення точки А. Дані: $l = 1$ м; $F = 4$ см²; $\alpha = 30^\circ$; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К; $\alpha_m = 1,65 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

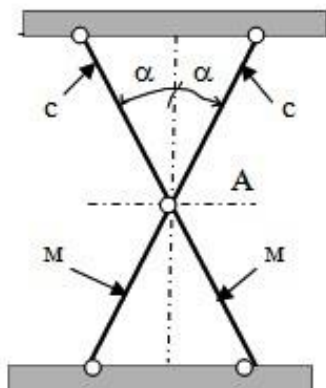


Рис. 185

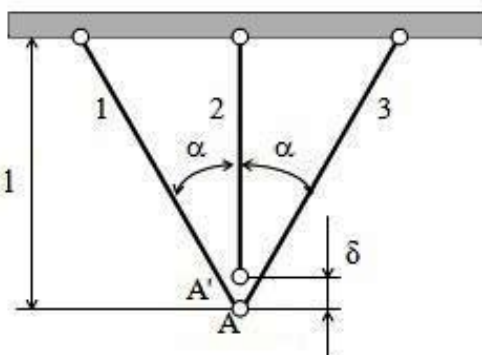


Рис. 186

223. При монтажі стержневої системи, показаної на Рис. 186, зауважили, що стержень 2 закороткий на величину δ . Які сили і напруження будуть у стержнях після вимушеного монтажу? Дані: $\delta = 2$ мм; $l = 1$ м; $F = 3$ см² – поперечні перерізи стержнів; $\alpha = 30^\circ$; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язок

Сили, які діють на вузол А, а також його переміщення до точки А'' в поєднанні з видовженнями стержнів після монтажу системи, подано на рис. 187.

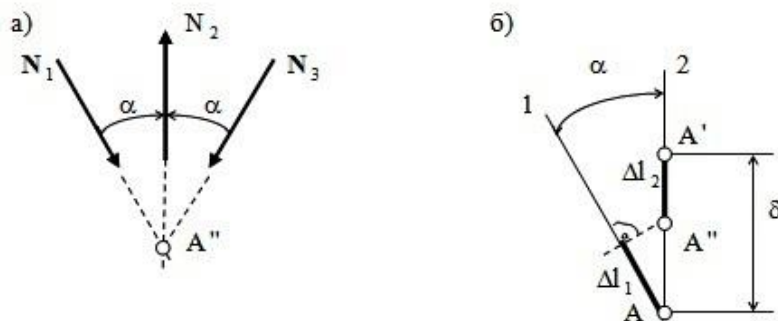


Рис. 187

Система є один раз статично невизначною. Два рівняння статички і рівняння переміщень для вузла А мають вигляд:

$$\sum P_{xi} = N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum P_{yi} = N_2 - N_1 \cos \alpha - N_3 \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \delta. \quad (3)$$

З рівняння (1) отримано, що $N_1 = N_3$, а з рівняння (3), враховуючи, що $\Delta l_1 = 4N_1 l / 3EF$ і $\Delta l_2 = N_2 l / EF$, буде $N_2 = \delta EF / l - 4/3 N_1$.

Підставляючи вищевказані залежності у рівняння (2), отримано:

$$\frac{\delta EF}{l} - \frac{4}{3} N_1 - N_1 \cos \alpha - N_1 \cos \alpha = 0;$$

Звідси, враховуючи, що $\alpha = 30^\circ$,

$$N_1 = \frac{3(3\sqrt{3} - 4)}{11} EF \delta,$$

та, підставляючи числові дані $N_1 = N_3 = 40,32$ кН, з (1) і (2) $N_2 = 2N_1 \cos \alpha = 69,8$ кН.

Відповідні напруження становлять:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = -40,3 / 3 = -13,4 \text{ кПа} = -134 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 69,8 / 3 = 23,3 \text{ кПа} = 23,3 \text{ МПа}.$$

224. Симетрична система стержнів, двох дюралюмінієвих 1 і 4 та двох мідних 2 і 3, навантажена силою Р як показано на Рис. 188. Якою може бути найбільша величина сили Р? Дані: $h = 1$ м; $F_1 = 2F_2 = 10$ см²; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $[\sigma_{p1}] = 60$ МПа; $[\sigma_{p2}] = 80$ МПа; $E_1 = 0,72 \cdot 10^5$ МПа; $E_2 = 1,1 \cdot 10^5$ МПа.

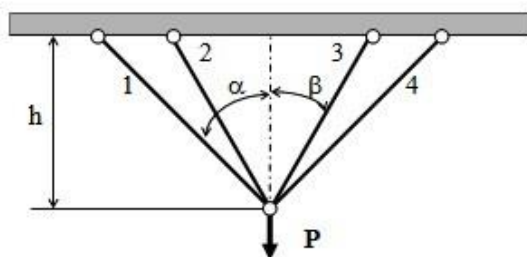


Рис. 188

225. При монтажі стержневої системи (Рис. 189) монтажну неточність δ ліквідовано вимушеним з'єднанням вузлів А і В. Розрахувати сили в стержнях. Дані: $\delta = 1$ мм; $\alpha = 30^\circ$; $F = 2$ см² – поперечний переріз стержнів; $l = 1,2$ м – довжина стержнів 1, 2 і 3; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

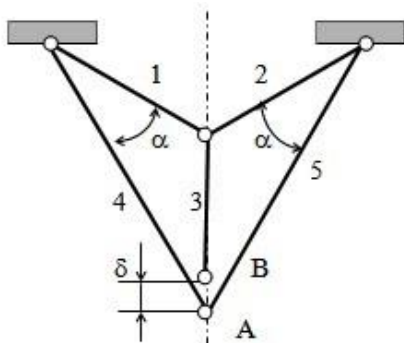


Рис. 189

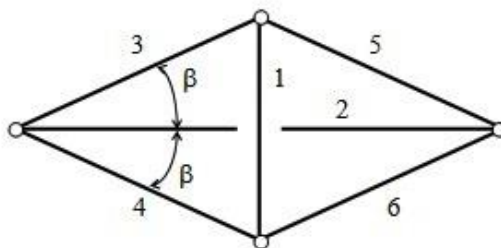


Рис. 190

226. У стержневій системі (Рис. 190) нагріто стержень 1 на ΔT . Розрахувати сили в стержнях. Дані: $\Delta T = 100$ К; $l = 1$ м – довжина стержнів 3, 4, 5 і 6; $\beta = 30^\circ$; $F = 4$ см² – поперечний переріз стержнів; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/К.

227. В стержневій системі (Рис. 191) стержень 1 виявився закоротким на величину Δ . Обчислити напруження в стержнях після вимушеного з'єднання вузлів А і А'. Дані: $\Delta = 1$ мм; $l = 1$ м; $F = 2$ см² = const; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

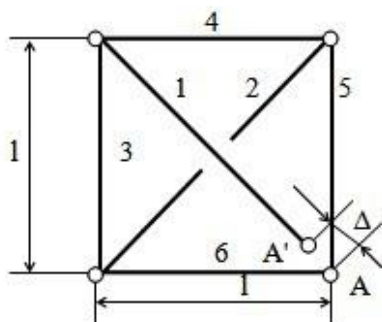


Рис. 191

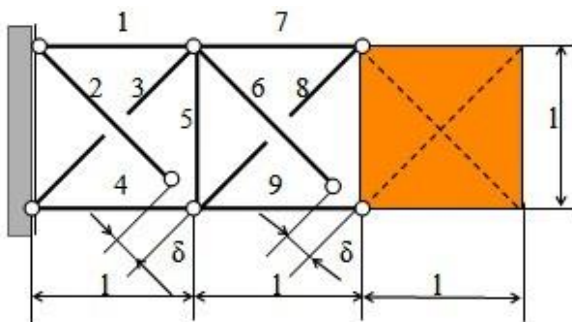


Рис. 192

228. У стержневій системі (Рис. 192) стержні 2 і 6 закороткі на $\delta = 0,5$ мм. Розрахувати сили в стержнях після вимушеного монтажу і навантаження її однорідним блоком вагою Q . Дані: $Q = 200$ кН; $l = 1$ м; $F = 2$ см² = const; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

2.5.3. Просторові задачі

229. Якою максимальною вагою Q можна навантажити симетричну систему чотирьох стержнів, показану на Рис. 193. Дані: $l = 2a = 2$ м; $F = 4$ см² = const; $[\sigma_p] = 160$ МПа.

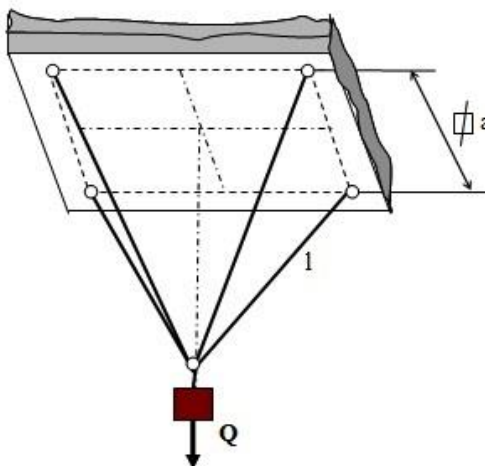


Рис. 193

230. Недеформівна кругла плита знаходиться на п'яти однакових симетрично розташованих стовпцях. Розрахувати сили в окремих стовпцях після навантаження половини плити силою p (Рис. 194). Дані: $p = 50$ гПа; $D = 2$ м; $R = 80$ см.

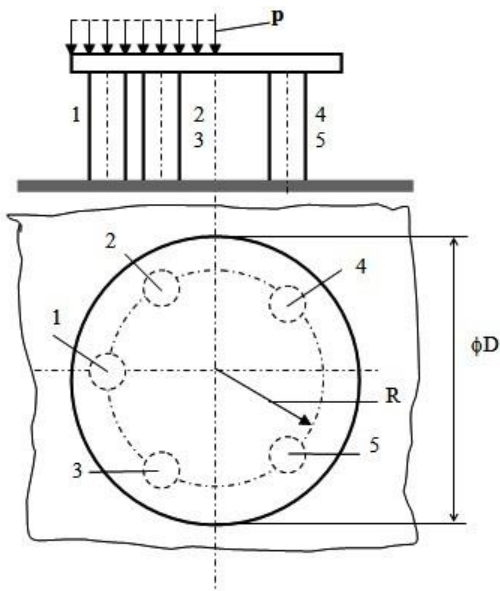


Рис. 194

231. На квадратну недеформівну плиту, що підтримується чотирма однаковими симетрично розташованими підпорами, діє сила P (Рис. 195), прикладена в точці $A(x_0, y_0)$. Розрахувати сили в підпорах. Дані: $P = 240$ кН; $a = 1,2$ м; $x_0 = 80$ см; $y_0 = 40$ см.

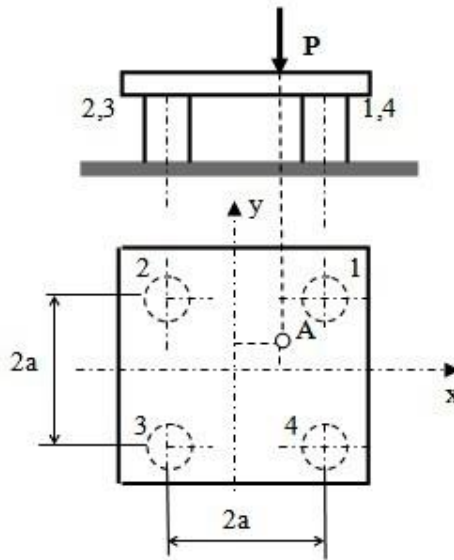


Рис. 195

2.6. Різні завдання

232. Колона навантажена силою P та власною вагою (Рис. 196). Покладаючи, що в кожному поперечному перерізі колони напруження однакові і становлять $\sigma = P/F_0$, визначити переріз колони для довільного значення x та її повне вкорочення. Дані: $P = 800$ кН; $F_0 = 400$ см²; $h = 8$ м; $\gamma = 8,9$ кН/м³; $E = 1,1 \cdot 10^5$ МПа.

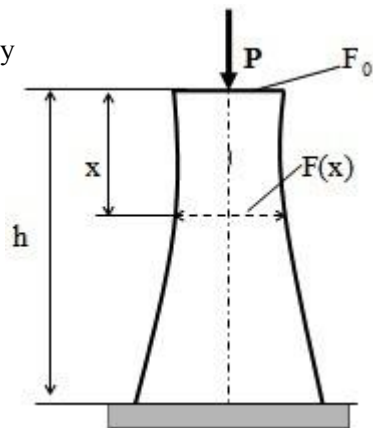


Рис. 196

233. Бетонна колона висотою 16 м стискається силою 100 кН і власною вагою. Зі скількох рівних частин потрібно виготовити цю колону, щоб її об'єм був не більш, ніж на 2% більшим від об'єму для так званої рівномірної колони. Дані: $\gamma = 22$ кН/м³ – питома вага бетону, $[\sigma_c] = 32$ МПа – допустиме напруження стиску для бетону.

234. Невагома жорстка балка АВ підвішена на мідному (м) та сталевому (с) стержні як показано на Рис. 197. Для якого значення x можна допустити найбільшу величину сили P ? Обчислити величину цієї сили і кут, на який повернеться тоді балка. Дані: $l = 1$ м; $F_m = 10$ см²; $F_c = 4$ см²; $[\sigma_{pm}] = 80$ МПа; $[\sigma_{pc}] = 200$ МПа; $E_c = 2E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа.

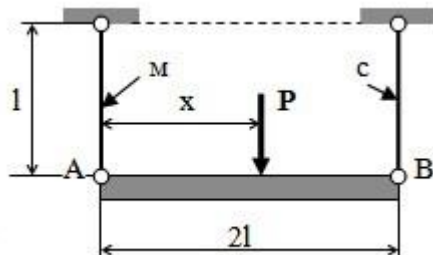


Рис. 197

235. Вісім рівномірно розташованих сталевих стержнів однакової довжини та однаковими поперечними перерізами підтримують жорсткий невагомий елемент ABC (Рис. 198), на який діє сила P і розподілене навантаження q . Обчислити площі поперечних перерізів стержнів. Дані: $q = 20$ кН/м; $l = 8$ м; $P = 2ql$; $[\sigma_p] = 150$ МПа.

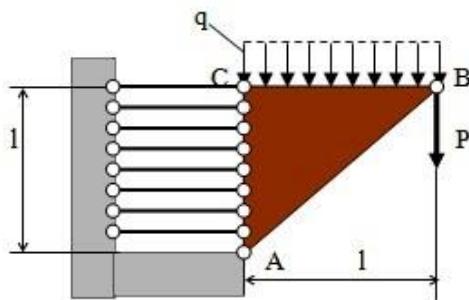


Рис. 198

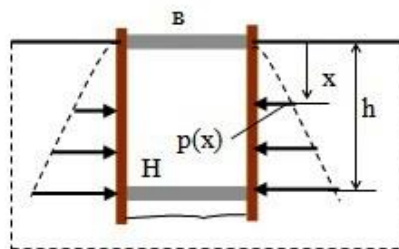


Рис. 199

236. Яма глибиною h , викопана в мокрій глині, укладена плитами, що укріплені дерев'яними верхньою (в) і нижньою (н) розпорками по одній на кожен метр глибини виїмки (Рис. 199). Який може бути мінімальний переріз верхніх і нижніх розпорок, якщо допустимі стискаючі напруження для деревини $[\sigma_c] = 10$ МПа, а тиск ґрунту на плиту змінюється згідно рівняння:

$$p = -\frac{\gamma}{2h} x^2 + \gamma x, \text{ де } h = 3 \text{ м; } \gamma = 22 \text{ кН/м}^3 \text{ – питома вага ґрунту.}$$

237. Жорстка балка АВ, може повертатися навколо шарніру А з горизонтального положення АВ до вертикального положення АВ' за допомогою троса BCD (Рис. 200). Який максимальний вантаж Q може бути підвішений на кінці балки АВ, якщо допустиме напруження в тросі $[\sigma_p] = 100$ МПа? Дані: $l = 5$ м; $\alpha = 45^\circ$; $F = 2$ см² – переріз троса.

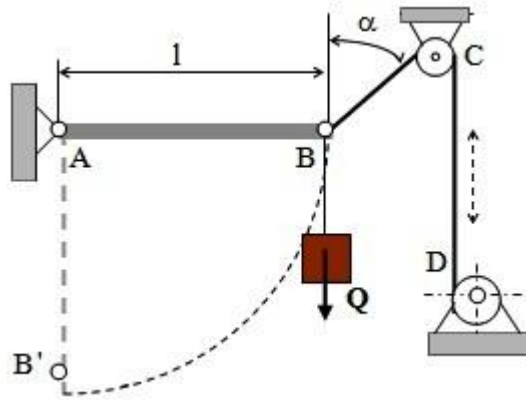


Рис. 200

238. В яких межах змінюватимуться напруження в поперечному перерізі штока і його видовження під час повного циклу роботи парової машини з тиском пари (Рис. 201). Дані: $p = 1,1$ МПа; $l = 80$ см; $D = 40$ см; $d = 6$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

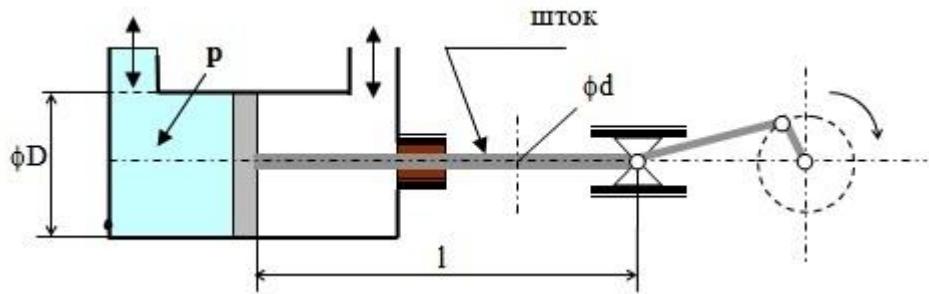


Рис. 201

239. Стержнева система, побудована у вигляді правильного п'ятикутника ABCDE, навантажена силою P (Рис. 202). Розрахувати сили в стержнях та їх площі поперечного перерізу. Дані: $P = 160$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma_p] = 2[\sigma_c] = 200$ МПа.

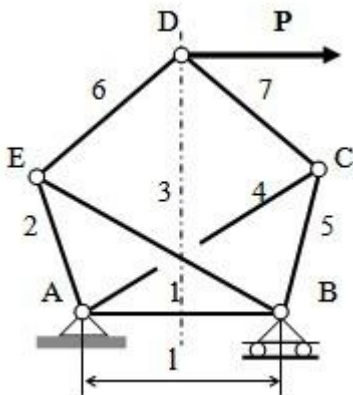


Рис. 202

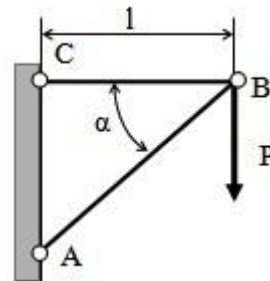


Рис. 203

240. Два сталеві стержні навантажені силою P як показано на Рис. 203. Для якого кута α вага цілої системи буде мінімальною, якщо величина допустимих напружень для обох стержнів є однаковою?

241. Симетрична система сталевих стержнів навантажена силою P як показано на Рис. 204. Приймаючи, що відома довжина l і допустимі напруження розтягу $[\sigma_p]$, знайти, для якого кута α вага стержнів буде найменшою.

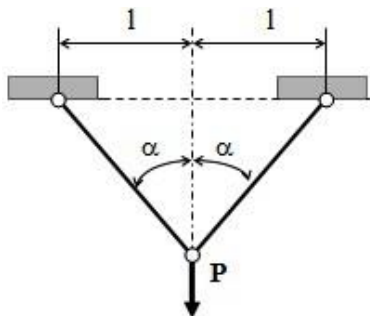


Рис. 204

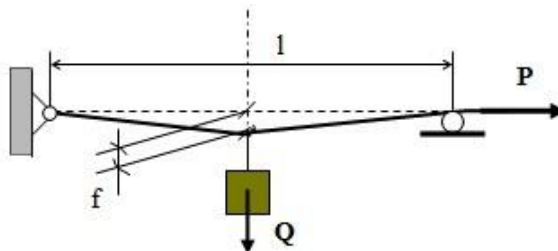


Рис. 205

242. Дріт діаметром 2 мм підвішений і навантажений вагою $Q = 40$ Н (Рис. 205). Якою може бути найменша величина прогину f , якщо напруження в дроті не можуть перевищувати 240 МПа? Дані: $l = 3$ м; дріт вважати тонкою гнучкою невагомою ниткою.

243. Сталевий дріт діаметром $d = 2$ мм натягнуто по горизонталі між підпорами А і В (Рис. 206). Приймаючи, що дріт є ідеально прямий на відрізку АВ, розрахувати максимальне вертикальне переміщення точки С під впливом навантаження, спричиненого падаючою масою $m = 1$ кг, що падає з висоти $h = 20$ см. Дані: $l = 10$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; дріт вважати тонкою гнучкою невагомою ниткою.

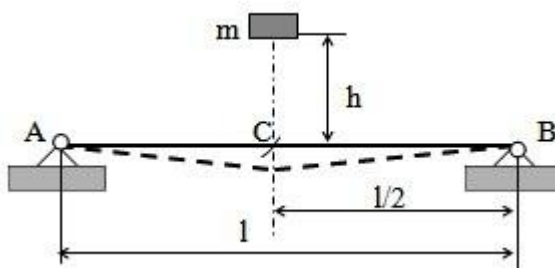


Рис. 206

244. Мідний дріт зі сталим перерізом натягнутий між опорами А і В (Рис. 207). Після обледеніння дроту виявилось, що максимальне його провисання збільшилося у два рази, а напруження в дроті досягли величини $[\sigma_p]$. У скільки разів напруження у дроті були менші перед обледенінням? Дані: $l = 100$ м; $f_{\max} = 4$ м (після обледеніння); $[\sigma_p] = 120$ МПа; $\gamma = 86$ кН/м³ – питома вага міді.

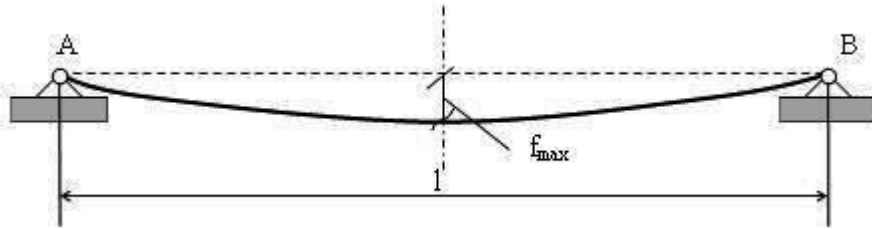


Рис. 207

245. У з'єднанні, навантаженому силою P (Рис. 208), розрахувати діаметр D і висоту h головки стержня. Використати умови міцності стержня на розтяг, а також головки стержня на зріз і зминання. Дані: $[\sigma_p] = 140$ МПа; $[\sigma_{зр}] = 80$ МПа; $[\sigma_{зм}] = 250$ МПа.

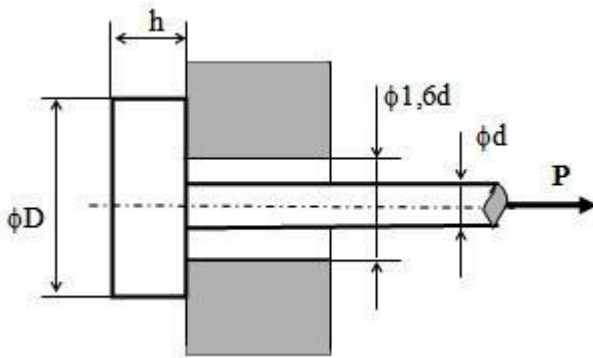


Рис. 208

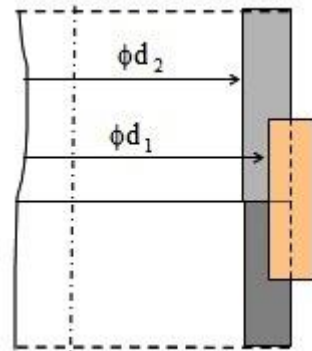


Рис. 209

246. Обчислити допустиму довжину комплекту обсадних труб у свердловині, занурених у суміші води і глини з питомою вагою $\gamma = 11$ кН/м³. Труби є стальними з погонною вагою $q = 0,32$ кН/м та з'єднаними як показано на Рис. 209. Дані: $d_1 = 162$ мм; $d_2 = 153$ мм; $\sigma_t = 320$ МПа; $n = 2$ – коефіцієнт запасу міцності; $\gamma_c = 78,5$ кН/м³ – питома вага сталі.

Розділ 3

Напружений і деформований стан

1. Напружений стан в довільній точці твердого тіла визначають величини дев'яти складових напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{zx}$. Цей стан описується тензором напружень:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

або з використанням елементарного паралелепіпеда з нескінченно малими розмірами в точці із складовими напружень на його сторонах (Рис. 210).

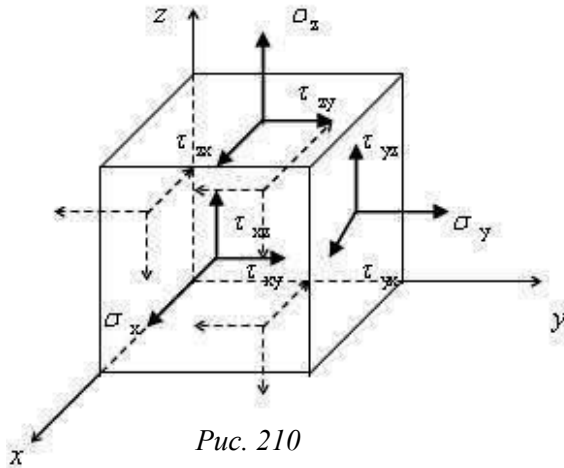


Рис. 210

Якщо дійсні напрямки складових напружень є такими, як показано на Рис. 210, то їх вважають додатними, а якщо протилежні – то від'ємними. Легко встановити, що мають місце наступні залежності: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, які називають законом парності дотичних складових напружень.

2. Для довільного напруженого стану існує таке положення осей прямокутної системи координат x, y, z в даній точці, що на сторонах елементарного паралелепіпеда діятимуть тільки нормальні напруження. Такі напруження називають головними. Величину головних напруження обчислюють з наступного рівняння:

$$\sigma^3 - \pi_1 \cdot \sigma^2 + \pi_2 \cdot \sigma - \pi_3 = 0,$$

$$\text{де: } \pi_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$\pi_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$\pi_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Величини виразів π_1 , π_2 і π_3 не змінюються в даній точці при повороті системи координат хуз і тому їх називають визначниками опору матеріалів. Компоненти вищеподаного рівняння завжди дійсні. Як правило вони позначаються так:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

3. Положення перерізу, в якому діє головне напруження σ_1 відносно осей системи координат хуз, однозначно визначають кути, які утворює нормаль до цього перерізу з осями хуз. Напрямні косинусів цих кутів, які відповідно позначаються l , m , n , відносно осей x , y , z обчислюються, розв'язуючи систему рівнянь:

$$(\sigma_x - \sigma_1)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0,$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_1)m + \tau_{zy}n = 0,$$

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_1)n = 0.$$

Аналогічно знаходять положення перерізів, в яких діють головні напруження σ_2 і σ_3 .

4. Такі ж вирази, які подано для напружень в пунктах 1, 2 і 3, є також і для деформацій. Достатньо тільки замість нормальних напружень підставити відповідні головні деформації, наприклад σ_x потрібно замінити на ϵ_x , а дотичні напруження замінити половиною відповідної об'ємної деформації, наприклад τ_{xy} замінити на $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$.

Тензор деформацій буде мати вигляд:

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix}.$$

5. В напруженому стані, зображеному на Рис. 211, в перерізі ADEB, паралельному до осі 3, нормальні і дотичні напруження σ_α і $\tau_{\alpha\beta}$ обчислюються із виразів:

$$\sigma_\alpha \equiv \sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha \equiv \tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

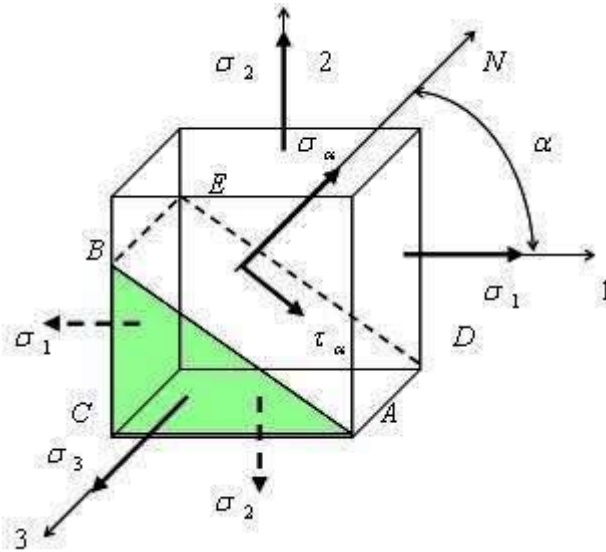


Рис. 211

Після виключення параметра α з вищезгаданих рівнянь, одержано наступну залежність між напруженнями σ_x і τ_{xy} та σ_1, σ_2 :

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2.$$

Це є рівняння кола, поданого на рис. 212.

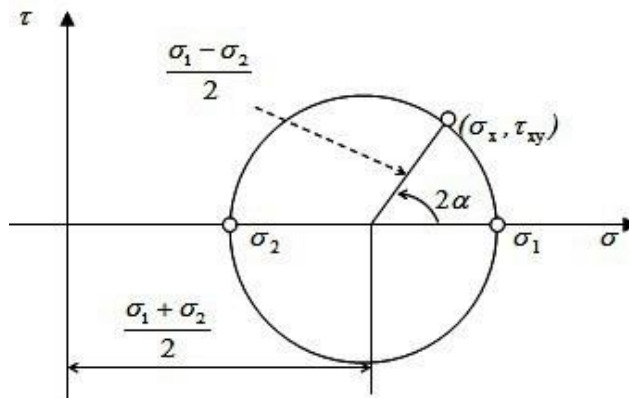


Рис. 212

Коло, подане на рис. 212, показує, які величини і для яких кутів α приймають нормальні і дотичні напруження у розглядуваному перерізі. Помітно, що максимальні нормальні напруження σ_1 будуть для кута $\alpha = 0$ мінімальними, σ_2 – для кута $\alpha = 90^\circ$, а максимальні дотичні напруження рівні $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ – для кута $\alpha = 45^\circ$. З Рис. 212 також видно, що коло можна нарисувати, при відомих головних напруженнях σ_1 і σ_2 .

6. В тривісному напруженому стані зміну нормальних і дотичних напружень для трьох характерних перерізів F_1 , F_2 і F_3 , показаних на Рис. 213, залежно від кута їх повороту, можливо побачити на відповідних колах, званих також кругами Мора (Рис. 214). Нормальні і дотичні напруження в довільному перерізі F (Рис. 213г) подано відповідними точками в заштрихованій області трьох кругів Мора (Рис. 214).

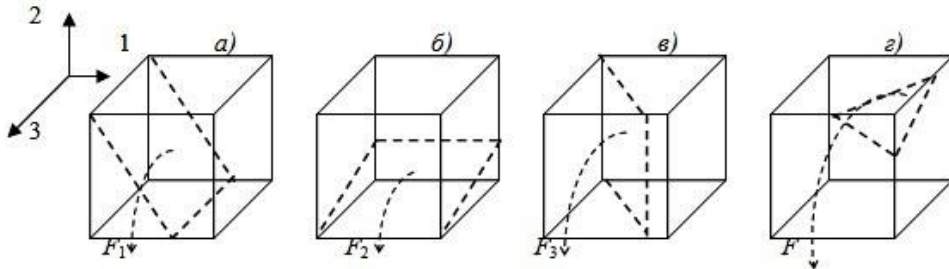


Рис. 213

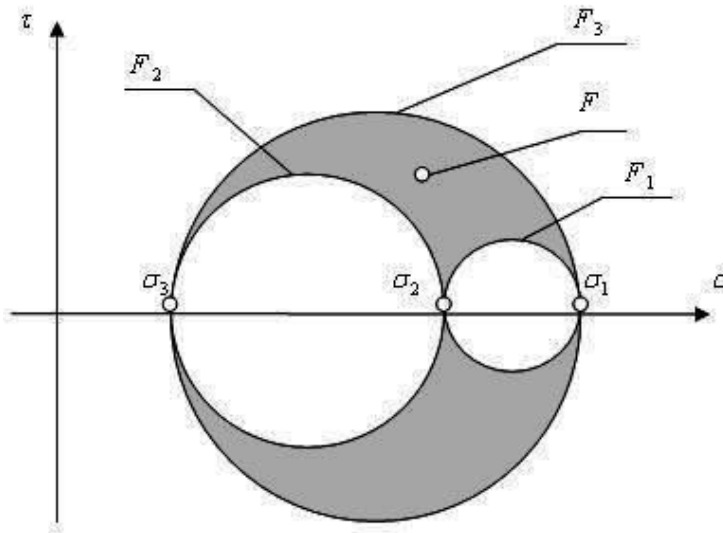


Рис. 214

3.1. Лінійний напружений стан

1. Для одновісного розтягу з напруженнями σ (Рис. 215), нормальні і дотичні напруження у зазначеному перерізі, нормаль якого утворює з віссю 1 кут α , описуються виразами:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha = \sigma \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\tau_{\alpha} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

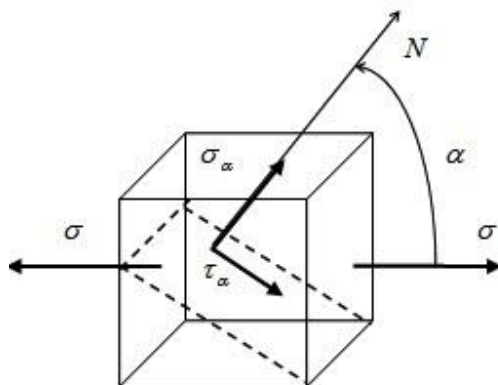


Рис. 215

2. У випадку лінійного розтягу, будуючи три круги Мора, як показано вище в пункті 6, можна переконатись, що два з них накладаються, а третє зводиться до точки як показано на Рис. 216.

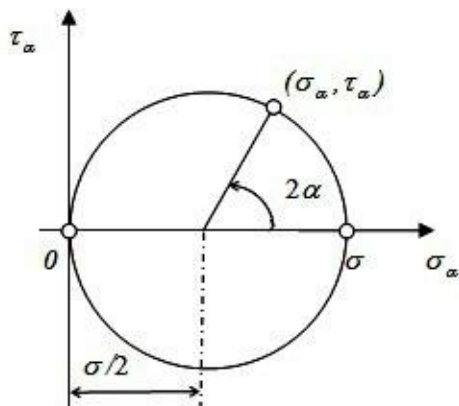


Рис. 216

247. У розтягнутій пластині $\sigma = 100$ МПа. Визначити нормальні і дотичні напруження на сторонах рівностороннього трикутника, показаного на Рис. 217.

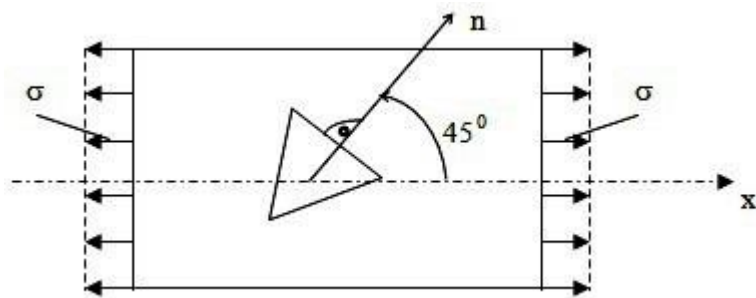


Рис. 217

Розв'язок

Нормалі до перерізів, які співпадають зі сторонами рівностороннього трикутника, показаного на Рис. 217, утворюють з віссю x кути 45° , 165° і 285° .

Нормальні і дотичні напруження на сторонах трикутника становлять:

– 45° :

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma \cos^2 \alpha = 100 \cos^2 45^\circ = 50 \text{ МПа},$$

$$\tau_{45^\circ} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = 100 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 50 \text{ МПа},$$

– 165° :

$$\sigma_{165^\circ} = 100 \cos^2 165^\circ = 93,3 \text{ МПа},$$

$$\tau_{165^\circ} = 100 \sin 165^\circ \cos 165^\circ = -25 \text{ МПа},$$

– 285° :

$$\sigma_{285^\circ} = 100 \cos^2 285^\circ = 6,7 \text{ МПа},$$

$$\tau_{285^\circ} = 100 \sin 285^\circ \cos 285^\circ = -25 \text{ МПа}.$$

Напруження на сторонах розглядуваного рівностороннього трикутника показано на Рис. 218.

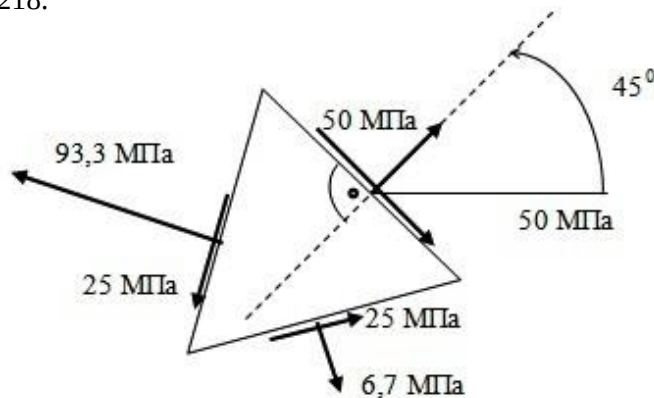


Рис. 218

248. В певному перерізі стержня, що стискається, діють напруження $\sigma_\alpha = -60$ МПа, $\tau_\alpha = 24$ МПа. Які екстремальні нормальні і дотичні напруження виникають в цьому стержні?

249. Стержень стискається напруженням $\sigma = -160$ МПа (Рис. 219). Для яких перерізів $|\tau_\alpha| = 40$ МПа?

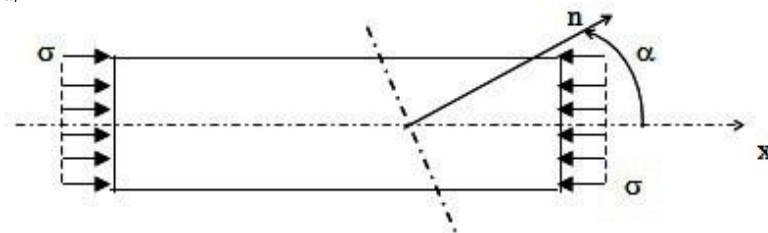


Рис. 219

250. Стержень з круговим перерізом розтягується силами $P = 90$ кН. Для якого діаметру стержня максимальні дотичні напруження не перевищать 80 МПа?
251. Якою може бути сила, яка розтягує призматичний стержень з поперечним перерізом 4 см^2 , якщо в жодному перерізі дотичні напруження не можуть перевищувати величини 60 МПа?
252. У поперечному перерізі розтягуваного призматичного стержня рівному 3 см^2 діють нормальні напруження 120 МПа. Розрахувати величину внутрішніх сил в перерізі, нормаль до якого утворює з віссю стержня кут 30° .
253. Пластина з поперечними розмірами $b \times h = 1 \text{ см} \times 4 \text{ см}$ розтягується силами $P = 80$ кН. Розрахувати нормальні, дотичні і повні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює з віссю стержня кут $\alpha = 45^\circ$.
254. В поперечному перерізі розтягуваного стержня діють напруження 200 МПа. Визначити графічно перерізи, в яких дотичні напруження є рівними 50 МПа.
255. Призматичний стержень з поперечним перерізом 8 см^2 розтягується силами 160 кН. Визначити перерізи, в яких повні напруження рівні 100 МПа.
256. Задано напружений стан, показаний на Рис. 220. Для якого τ це буде стан лінійного розтягу?

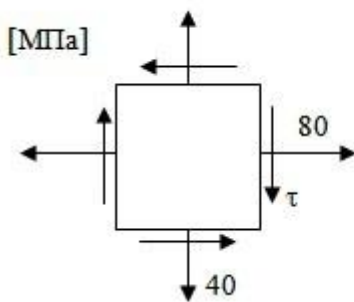


Рис. 220

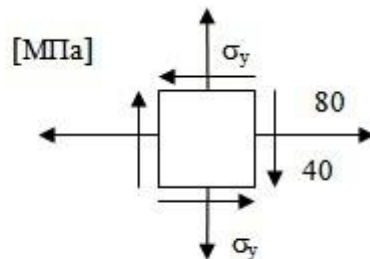


Рис. 221

257. Відомо, що напружений стан, показаний на Рис. 221, є лінійним розтягом. Визначити величину напружень σ_y .

3.2. Плоский напружений стан

1. Плоский напружений стан виникає тоді, коли два головні напруження відмінні від нуля.
2. Коли напруження є більшими нуля, наприклад напруження σ_1 і σ_2 , то зміну нормальних і дотичних напружень в перерізі, показаному на Рис. 222, у залежності від кута α показує круг Мора (Рис. 223).

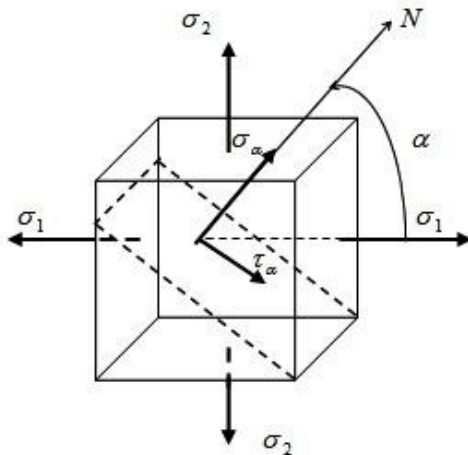


Рис. 222

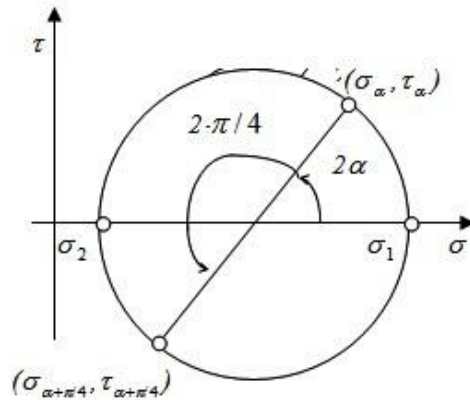


Рис. 223

З Рис. 222 і Рис. 223 слідує, що поворот показаного перерізу на кут α означає переміщення точки, що описує напружений стан на крузі Мора, на кут 2α . Отже, поворот перерізу на кут 90° означає поворот променя на кут 180° (Рис. 223).

Нормальні і дотичні напруження в перерізі, показаному на Рис. 222, описують виразами:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

3. З Рис. 223 слідує, що наявність складових напружень в плоскому напруженому стані на двох взаємно перпендикулярних площадках дозволяє побудувати круг Мора. Взаємозв'язок складових напружень на гранях прямокутного елемента показано на Рис. 224.

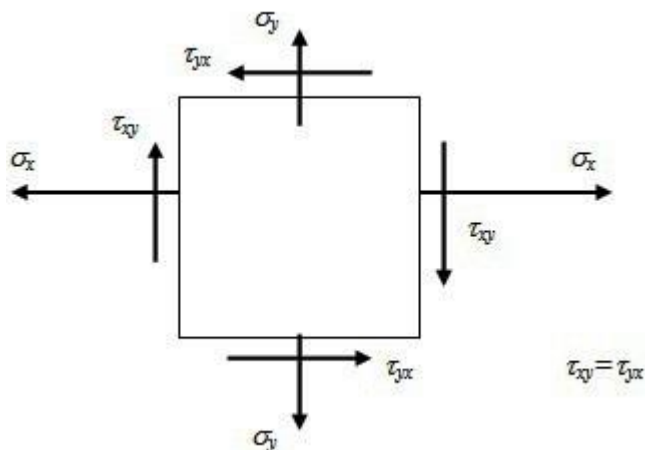


Рис. 224

4. Якщо плоский напружений стан в точці задано як на Рис. 224, то побудову круга Мора показано на Рис. 225.

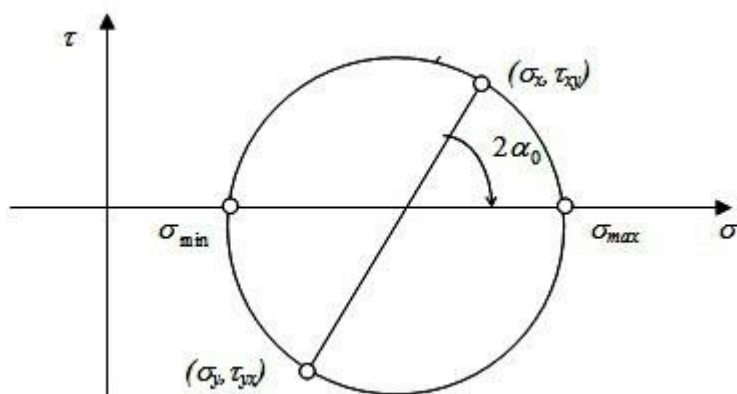


Рис. 225

Звідси слідує, що головні напруження σ_{max} і σ_{min} обчислюють із виразу

$$\sigma_{min}^{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

а кут α_0 , на який потрібно повернути елемент у напрямі за годинниковою стрілкою (Рис. 224), обчислюють із виразу

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

258. Визначити головні напруження σ_1 , σ_2 і σ_3 для напружених станів, показаних на Рис. 226.

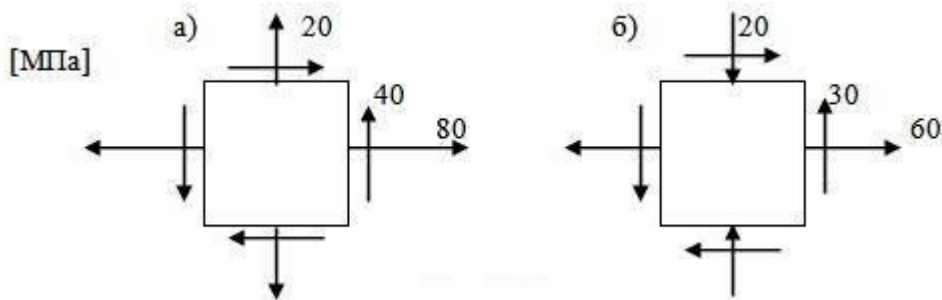


Рис. 226

Розв'язок

Величини нормальних максимальних і мінімальних напружень в перерізах, перпендикулярних до площини рисунка, визначаються з поданого вище виразу, а потім, враховуючи залежність між головними напруженнями ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), встановлюють їх значення.

Напружений стан на Рис. 226а

$\sigma_x = 80$ МПа; $\sigma_y = 20$ МПа; $\sigma_z = -40$ МПа.

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{80 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80 - 20}{2}\right)^2 + (-40)^2} = 50 \pm 50 \text{ МПа},$$

звідси $\sigma_{\max} = 100$ МПа; $\sigma_{\min} = 0$.

Остаточні значення головних напружень: $\sigma_1 = 100$ МПа; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Виявляється, що це буде стан осьового розтягу.

Напружений стан на Рис. 226б:

$\sigma_x = 60$ МПа; $\sigma_y = -20$ МПа; $\tau_{xy} = -30$ МПа.

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{60 + (-20)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - (-20)}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 20 \pm 50 \text{ МПа},$$

звідси $\sigma_{\max} = 70$ МПа; $\sigma_{\min} = -30$ МПа.

Остаточні буде: $\sigma_1 = 70$ МПа; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -30$ МПа.

259. На сторони прямокутного елемента діють напруження $\sigma_x = 40$ МПа і $\sigma_y = -40$ МПа. Визначити напруження, які діють на сторони елемента після повороту його на кут 45° .

260. Задано напружений стан $\sigma_x = 100$ МПа; $\sigma_y = -20$ МПа і $\tau_{xy} = 30$ МПа. Визначити головні напруження.

261. У плоских напружених станах на гранях прямокутних елементів діють головні напруження (МПа) відповідно рівні: а) 160; 80; б) 100; - 40; в) 80; - 80; г) - 20; - 100. Обчислити для всіх цих випадків напруження σ_x , σ_y і τ_{xy} на гранях елементів після повороту їх на кут $\alpha = 30^\circ$. Прийняти σ_x на грані, нормаль до якого утворює кут α з більшим із напружень.

262. Задані плоскі напружені стани, виражені через головні напруження: а) 120; 20; б) 100; 0; в) 40; - 40; д) 20; - 120. Обчислити для згаданих напружених станів нормальні, дотичні і повні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з більшим із головних напружень. Визначити також кут β , який утворює повне напруження з площиною цього перерізу.

263. Задано наступні плоскі напружені стани відповідно через складові σ_x , σ_y і τ_{xy} : а) 160; 80; 20; б) 100; 50; - 10; в) 80; - 40; 40; г) 50; 50; 20; д) - 20; - 80; - 20; е) - 40; 60; 30; є) 0; 0; 40; ж) 80; 0; 40; з) 0; 50; 20; і) - 20; - 20; - 20. Обчислити значення екстремальних напружень і кут α_0 , на який потрібно повернути координатні осі xu , щоб отримати ці значення.

264. В плоскому напруженому стані $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = -80$ МПа і $\tau_{xy} = 40$ МПа. Визначити графічно і аналітично положення перерізів, в яких повні напруження утворюють найменший кут з площиною перерізу. Кут подати відносно напрямку головних напружень σ_1 .

265. Задано напружений стан через його складові, що виникає на гранях елемента у вигляді рівностороннього трикутника (Рис. 227). Обчислити головні напруження.

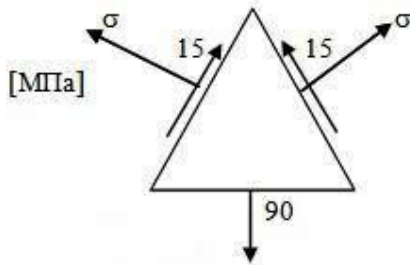


Рис. 227

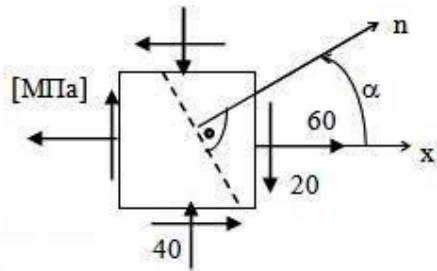


Рис. 228

266. Задано плоский напружений стан, показаний на Рис. 228. Вказати перерізи (кути α), в яких повні напруження рівні 50 МПа.
267. На прямокутний елемент діють напруження $\sigma_1 = 200$ МПа і $\sigma_3 = -100$ МПа. Які напруження діятимуть на гранях цього елемента після повороту його на кут $\alpha = -60^\circ$?
268. У плоскому напруженому стані (Рис. 229) задано $\sigma_x = 160$ МПа, $\sigma_y = 100$ МПа і $\tau_{xy} = 60$ МПа на гранях елемента. Подати епюру напружень σ_α і τ_α на зображеному колі.

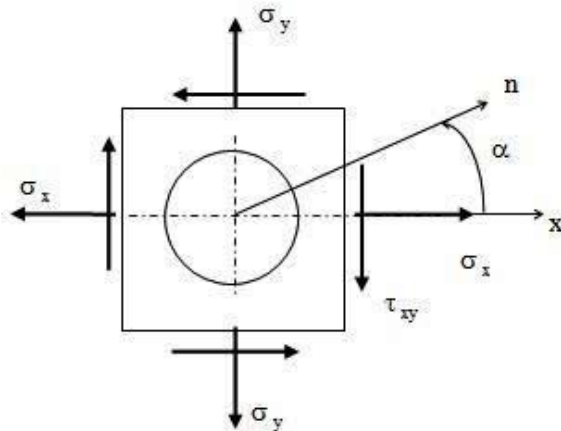


Рис. 229

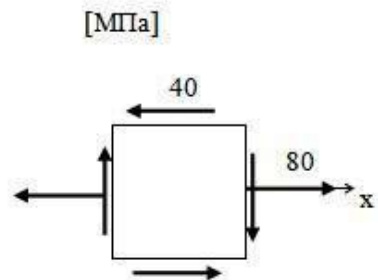


Рис. 230

269. Для показаного на Рис. 230 напруженого стану визначити головні напруження і кут, який утворює більше з них із віссю x.

270. Обчислити головні напруження для напруженого стану, поданого на Рис. 231.

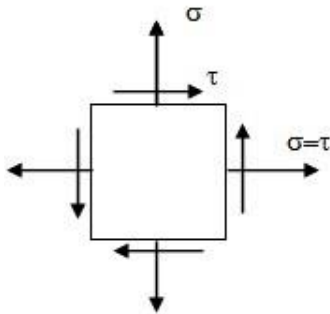


Рис. 231

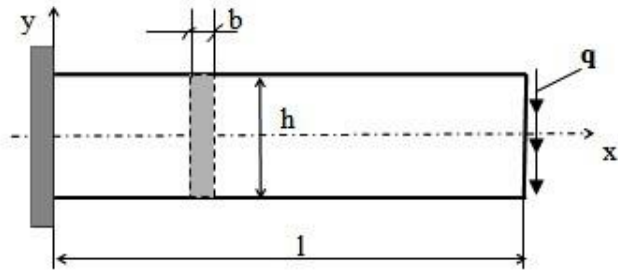


Рис. 232

271. На кінці консольної балки (Рис. 232) діє розподілене навантаження $q = q_0 \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right)$. Знайти рівняння кривої, для якої $\sigma_1 = \text{const} = 50$ МПа. Дані: $q_0 = 30$ кН/см; $h = 10$ см; $b = 4$ см; $l = 50$ см.

3.3. Об'ємний напружений стан

272. Обчислити головні напруження для напруженого стану, поданого на Рис. 233. Дані: $\tau = 100$ МПа.

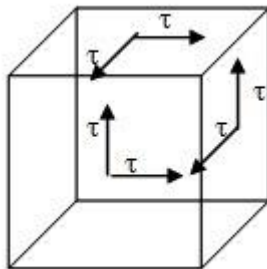


Рис. 233

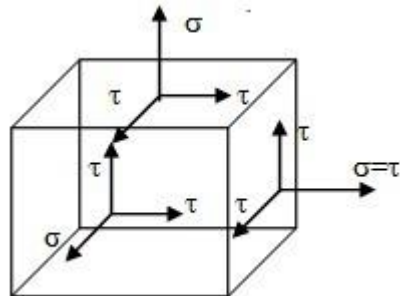


Рис. 234

273. Визначити головні напруження для напруженого стану, показаного на Рис. 234.

274. У тривісному напруженому стані головні напруження становлять $\sigma_1 = 200$ МПа; $\sigma_2 = 50$ МПа і $\sigma_3 = -100$ МПа. Визначити графічно та аналітично максимальні дотичні напруження, а також нормальні напруження і дотичні октаедричні.

275. Напружений стан в точці визначають головні напруження $\sigma_1 = 200$ МПа; $\sigma_2 = 100$ МПа і $\sigma_3 = -100$ МПа. Визначити графічно нормальні і дотичні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює однакові кути з напрямками головних напружень.

276. Визначити головні напруження для напруженого стану, показаного на Рис. 235.

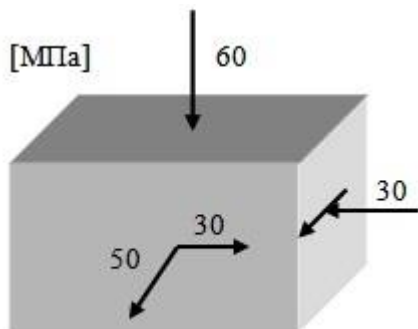


Рис. 235

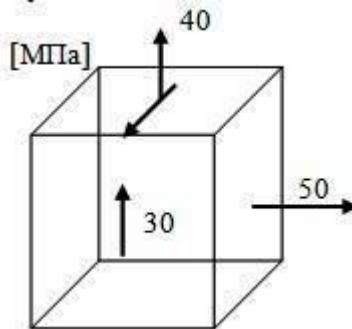


Рис. 236

277. Розрахувати головні напруження і максимальне дотичне напруження для напруженого стану, поданого на Рис. 236.

278. На елемент тонкостінної ємкості діють напруження як показано на Рис. 237. Розрахувати максимальні дотичні напруження і вказати переріз, в якому вони виникають.

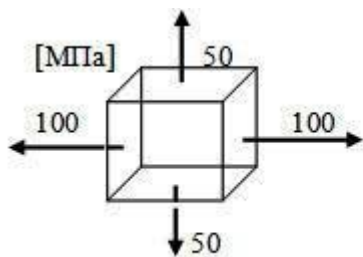


Рис. 237

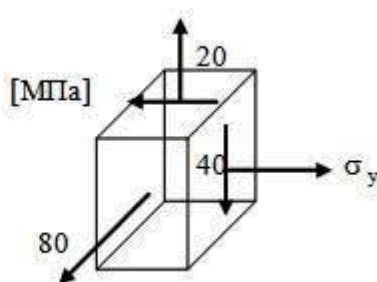


Рис. 238

279. На елементарний елемент діють напруження як показує Рис. 238. Для якого значення напруження σ_y це буде плоский напружений стан?

280. Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 70$ МПа, $\sigma_y = 100$ МПа, $\sigma_z = 120$ МПа, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{yz} = 40$ МПа, $\tau_{zx} = 30$ МПа, знайти головні напруження.

281. Складові напруженого стану в точці становлять: $\sigma_x = 120$ МПа, $\sigma_y = 80$ МПа, $\sigma_z = 160$ МПа, $\tau_{xy} = 30$ МПа, $\tau_{yz} = -40$ МПа, $\tau_{zx} = 60$ МПа. Розрахувати нормальні і дотичні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює кут 60° з віссю x , а 45° з віссю y .

282. Головні напруження в точці рівні: $\sigma_1 = 160$ МПа, $\sigma_2 = 100$ МПа, $\sigma_3 = 40$ МПа. Розрахувати нормальні, дотичні і повні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює з напрямками σ_1 і σ_2 кути 60° .

283. Напружений стан в точці описано складовими: $\sigma_x = 120$ МПа, $\sigma_y = 80$ МПа, $\sigma_z = -20$ МПа, $\tau_{xy} = 35$ МПа, $\tau_{yz} = 45$ МПа, $\tau_{zx} = 60$ МПа. Розрахувати нормальні, дотичні і повні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює кути 45° з віссю x і 60° з віссю y .

284. Складові напруженого стану в точці становлять: $\sigma_x = 36$ МПа, $\sigma_y = 72$ МПа, $\sigma_z = 120$ МПа, $\tau_{xy} = -20$ МПа, $\tau_{yz} = 70$ МПа, $\tau_{zx} = 30$ МПа. Розрахувати дотичні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює кут 45° з віссю x і 72° з віссю y .

285. Для напруженого стану зі складовими: $\sigma_x = 60$ МПа, $\sigma_y = 90$ МПа, $\sigma_z = 120$ МПа, $\tau_{xy} = 80$ МПа, $\tau_{yz} = 50$ МПа, $\tau_{zx} = 30$ МПа визначити головні напруження і побудувати круги Мора.

286. Для напруженого стану зі складовими: $\sigma_x = 50$ МПа, $\sigma_y = 110$ МПа, $\sigma_z = 120$ МПа, $\tau_{xy} = 60$ МПа, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 20$ МПа визначити максимальні дотичні напруження.

287. Головні напруження в точці становлять: $\sigma_1 = 150$ МПа, $\sigma_2 = 100$ МПа, $\sigma_3 = 50$ МПа. Визначити графічно нормальні і дотичні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює кут 60° з напрямком напружень σ_1 і кут 45° - з σ_2 .

Зауваження: з аналізу напруженого стану відомо

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \frac{1}{4} (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + [\sigma_1 (\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_2 \sigma_3] \cos^2 \alpha,$$

де: σ_n , τ_n – нормальні і дотичні напруження;

α – кут нормалі до перерізу з σ_1 .

288. Довести, використовуючи круги Мора, що існує рівність:

$$(\sigma_1 - \sigma_\alpha)(\sigma_\alpha - \sigma_3) = \tau_\alpha^2,$$

де: σ_1 , σ_3 – головні напруження,

σ_α , τ_α – нормальні і дотичні напруження в перерізі, нормаль до якого утворює з напрямком напружень σ_1 кут α .

3.4. Деформації

289. Квадратна плита площею $F = 100$ см², розтягувана напруженнями σ , зазнала відносного видовження $\varepsilon = 0,4 \cdot 10^{-3}$ (Рис. 239). Обчислити зміну площі поверхні плити. Дані: $\mu = 0,3$.

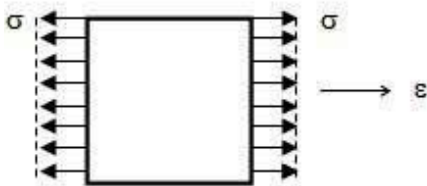


Рис. 239

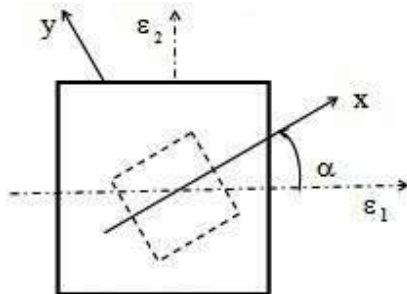


Рис. 240

290. Елемент, зображений на Рис. 240, зазнав деформацій $\varepsilon_1 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ і $\varepsilon_2 = 0,12 \cdot 10^{-3}$. Обчислити кут об'ємної деформації γ_{xy} для елемента, повернутого на кут $\alpha = 30^\circ$.

291. Тензометри (Рис. 241) показують відносні деформації $\varepsilon_I = 1,6 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{II} = -0,5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{III} = 2 \cdot 10^{-4}$. Зобразити круги Мора для цього деформованого стану, визначити головні деформації і кут α_0 . Яким головним напруженням відповідав би цей деформований стан для сталі Ст.3? Дані: $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$.

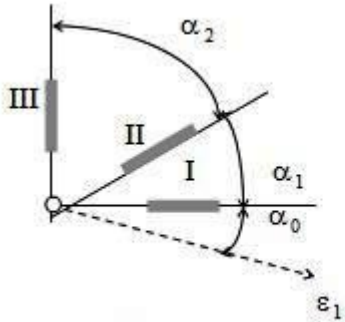


Рис. 241

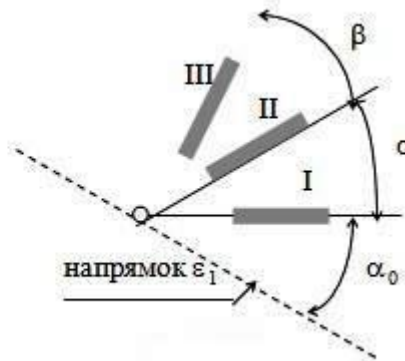


Рис. 242

292. Покази тензометрів, наклеєних на плоскому (Рис. 242) елементі, становлять: $\varepsilon_I = 2 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{II} = 3 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{III} = 4 \cdot 10^{-3}$. Визначити графічно головні деформації і їх напрямки. Дані: $\alpha = \beta = 30^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

3.5. Співвідношення між деформаціями, напруженнями і переміщеннями

293. Електричний тензометр з базою $a = 20$ мм наклеєно на сталеву пластину (Рис. 243). Розрахувати силу, що розтягує пластину, якщо видовження тензометра $\Delta a = 8 \cdot 10^{-3}$ мм. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; $b = 1$ см; $h = 4$ см; $\alpha = 30^\circ$.

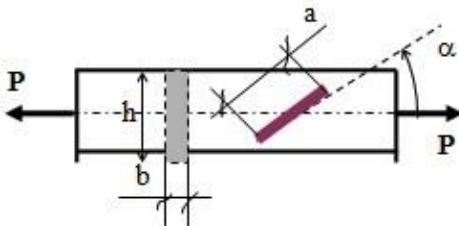


Рис. 243

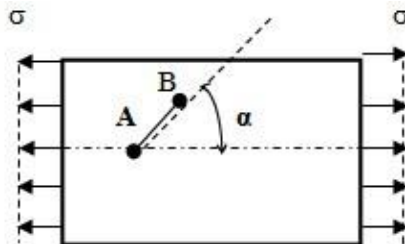


Рис. 244

294. Сталева пластина зазнає дії напружень σ (Рис. 244). Обчислити видовження відрізка АВ і кут повороту $\Delta\alpha$ цього відрізка. Дані: $\sigma = 100$ МПа; АВ = 2 см; $\alpha = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

295. У розтягуваному призматичному стержні лінійні деформації під кутом 30° становлять $0,2 \cdot 10^{-3}$. Обчислити максимальні нормальні і максимальні дотичні напруження, наявні в розтягуваному стержні. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

296. Квадратний елемент зазнає дії напружень $\sigma = 100$ МПа (Рис. 245). Для якого напруження, що діє вздовж осі у, тензометр, наклеєний вздовж діагоналі, не покаже жодного видовження?

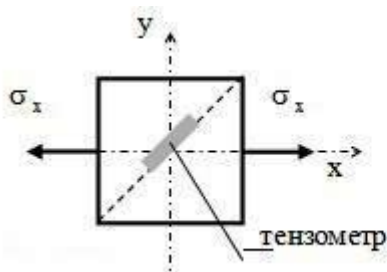


Рис. 245

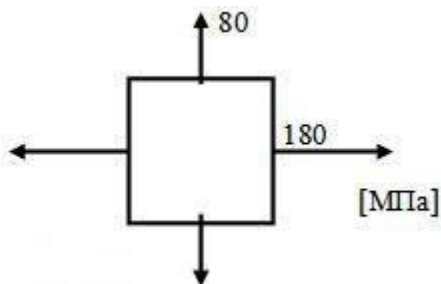


Рис. 246

297. Розміри квадратної плити становлять: довжина сторони $a = 2$ м і товщина $\delta = 1$ см. Розрахувати зміну її розмірів під впливом напружень, поданих на Рис. 246. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

298. У плоскому напруженому стані деформації становлять: $\varepsilon_x = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_y = -0,2 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_{xy} = 0,2 \cdot 10^{-3}$. Визначити головні напруження і деформації. Дані: $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

299. Місток з трьох тензометрів, зображений на Рис. 247, показав в плоскому напруженому стані такі деформації: $\varepsilon_I = 0,2 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{II} = 0,3 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{III} = 0,4 \cdot 10^{-3}$. Обчислити величини і напрямки головних напружень. Дані: $\alpha = \beta = 30^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

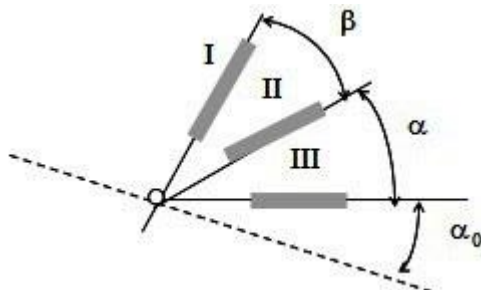


Рис. 247

300. Головні напруження в точці становлять $\sigma_1 = 200$ МПа; $\sigma_2 = 50$ МПа; $\sigma_3 = -100$ МПа. Розрахувати відносну зміну об'єму. Дані: $E = 1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,35$.

- 301.** Кубик з одиничними розмірами стискається як зображено на Рис. 248. Розрахувати відносну зміну площі поверхні бічної грані. Дані: $p = 250 \text{ МПа}$; $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,35$.

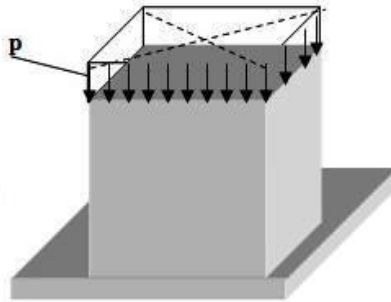


Рис. 248

- 302.** Два гумові елементи з одиничними розмірами, один вільний (а) і другий, розташований між двома недеформівними плитами (б), перебувають під дією тиску p (Рис. 249). Розрахувати одиничну зміну об'єму для обох випадків. Дані: $p = 1 \text{ МПа}$; $E = 5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,48$.

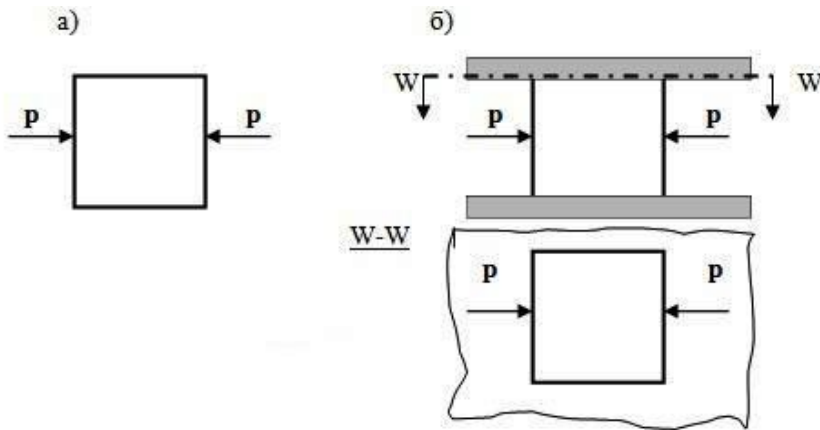


Рис. 249

- 303.** Мідна плитка, розташована в недеформівному пазі без зазору і без натягу, навантажена тиском $p = 100 \text{ МПа}$ (Рис. 250). Розрахувати видовження плитки в напрямку осі x і натиск на бічні грані. Дані: $h = 5 \text{ мм}$; $b = 4h$; $l = 10h$; $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,35$.

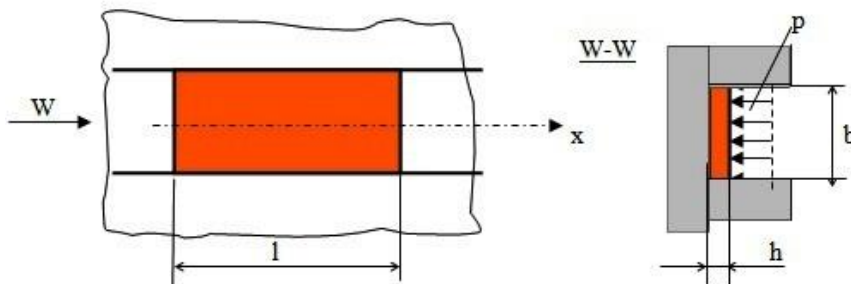


Рис. 250

- 304.** За показами тензометричного містка (Рис. 251) обчислити складові плоского напруженого стану σ_x , σ_y і τ_{xy} . Дані: $\varepsilon_a = -0,5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_b = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_c = 0,6 \cdot 10^{-3}$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$

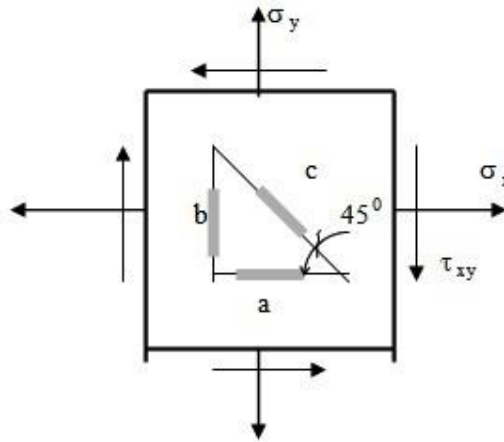


Рис. 251

- 305.** Кубічний елемент з одиничними розмірами вмонтовано без зазору і без натягу між двома недеформівними плитами і навантажено тиском p (Рис. 252). Розрахувати натиск на грані. Дані: $p = 100$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

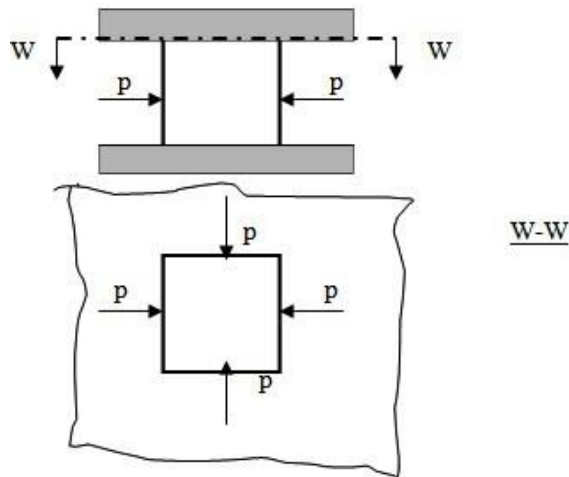


Рис. 252

- 306.** Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 30$ МПа; $\sigma_y = 40$ МПа; $\sigma_z = 50$ МПа; $\tau_{xy} = 40$ МПа; $\tau_{yz} = 30$ МПа; $\tau_{xz} = 30$ МПа, розрахувати головні деформації, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.
- 307.** Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 50$ МПа; $\sigma_y = 40$ МПа; $\sigma_z = 60$ МПа; $\tau_{xy} = 30$ МПа; $\tau_{yz} = 20$ МПа; $\tau_{xz} = 0$, зобразити круги Мора для деформацій і розрахувати максимальний кут об'ємної деформації. Дані: $E = 1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,34$.

- 308.** Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 160$ МПа; $\sigma_y = 140$ МПа; $\sigma_z = 80$ МПа; $\tau_{xy} = 70$ МПа; $\tau_{yz} = 0$; $\tau_{xz} = 30$ МПа, визначити максимальні дотичні напруження і максимальний кут об'ємної деформації. Дані: $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,35$.
- 309.** Покази прямокутного тензометричного містка, наклеєного на поверхні сталевго елемента, становлять: $\varepsilon_0 = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{45} = 0,18 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{90} = 1,2 \cdot 10^{-3}$. Обчислити головні напруження і зобразити круги Мора для деформацій і напружень в "точці" наклеювання тензометрів. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.
- 310.** Складові деформацій в точці у прямокутній системі координат хуz становлять: $\varepsilon_x = 1 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_y = 0,6 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_z = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_{xy} = 0,2 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_{yz} = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\gamma_{xz} = 0,3 \cdot 10^{-3}$. Обчислити головні напруження, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.
- 311.** У плоскому напруженому стані головні деформації становлять $0,2 \cdot 10^{-3}$ і $0,3 \cdot 10^{-3}$. Обчислити величину третьої головної деформації і максимальні дотичні напруження. Дані: $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,33$.

3.6. Енергія деформації

- 312.** Яким є відсоток енергії пружної об'ємної деформації відносно повної енергії для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 90$ МПа; $\sigma_y = 130$ МПа; $\sigma_z = 170$ МПа; $\tau_{xy} = 0$; $\tau_{yz} = 50$ МПа; $\tau_{xz} = 30$ МПа. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.
- 313.** Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 90$ МПа; $\sigma_y = 140$ МПа; $\sigma_z = 180$ МПа; $\tau_{xy} = 70$ МПа; $\tau_{yz} = 50$ МПа; $\tau_{xz} = 30$ МПа, визначити питому енергію пружної об'ємної і повної деформації. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

Розділ 4

Теорії міцності матеріалів

1. Теорії міцності матеріалів вирішують проблему оцінки міцності матеріалу, що знаходиться в складному напруженому стані, коли безпосередня оцінка, його міцності на підставі результатів досліджень, є складною або практично неможливою.
2. Характерним в теоріях міцності матеріалів є твердження, яке ґрунтується на основі практичного досвіду, результатів досліджень або інших припущень та вказує, що мірою міцності певного матеріалу може бути деяка фізична (не обов'язково напруження) величина.

4.1. Зведені напруження

1. Зведеними (еквівалентними) напруженнями σ_e називають такі розтягуючі напруження, за яких міцність матеріалу, згідно прийнятої теорії міцності (прийнятої фізичної величини як міри міцності матеріалу), є такою ж, як для даного складного напруженого стану.
2. Загальну формулу для обчислення зведених напружень відповідної теорії міцності отримують, порівнюючи загальні формули для обчислення даної фізичної величини для розтягу і складного напруженого стану.
3. Серед кількох десятків теорій міцності тільки декілька виявилися придатними для практичного застосування. Формули зведених напружень для деяких з них подано нижче:

- 1) теорія найбільших дотичних напружень $\tau_{\max}$** (Кулон-1776, Треск-1872, Квест-1900) - мірою міцності (руйнування) матеріалу є максимальне дотичне напруження; застосовується для пружно-пластичних матеріалів

$$\sigma_{e,\tau_{\max}} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

- 2) енергетична теорія Губера** (Губер-1904, Мізес-1913, Генкі-1925) - мірою міцності матеріалу є енергія об'ємної деформації (енергія зміни форми); застосовується для пружно-пластичних матеріалів

$$\sigma_{e,e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

або

$$\sigma_{e,e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2};$$

- 3) теорія Мора** (Мор-1900) - застосовується для пружно-крихких і пружно-пластичних матеріалів

$$\sigma_{e,M} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{Bp}}{\sigma_{Bc}} \sigma_3;$$

4) **теорія найбільших відносних видовжень** (Сен-Венан-1832, Пенселе-1839)

- мірою міцності матеріалу є найбільше видовження; застосовується для пружно-крихких матеріалів

$$\sigma_{e,s} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3);$$

5) **теорія Бужинського / визначників** (Бужинський-1928)

- міцність матеріалу описує функція двох визначників напруженого стану s і t ,

$$s = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z);$$

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)};$$

застосовується для пружно-пластичних і пружно-крихких матеріалів.

$$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{z} t; \text{ для } -\sqrt{2} \leq \frac{t}{s} \leq 0; \quad z = [\sigma]_c [\sigma]_p$$

$$\sigma_e = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{z+1}{z} t + \frac{3}{2} \frac{z+1}{z} s; \text{ для } -\infty \leq \frac{t}{s} \leq -\sqrt{2} \text{ і } \sqrt{2} \leq \frac{t}{s} \leq \infty;$$

$$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{t}{z} + 3 \frac{z-1}{z} s; \text{ для } 0 \leq \frac{t}{s} \leq \sqrt{2}.$$

314. Для напружених станів, поданих на Рис. 253, розрахувати зведені напруження згідно теорії $\tau_{\max}$.

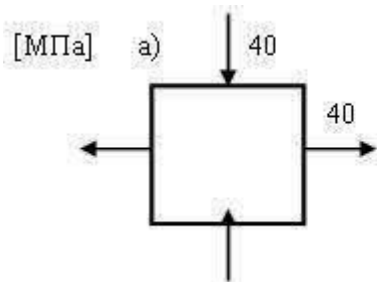


Рис. 253

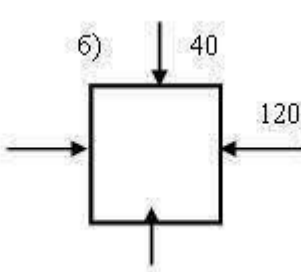
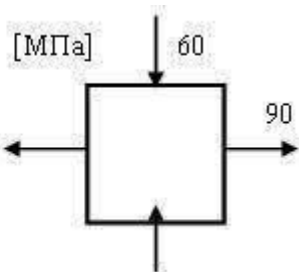


Рис. 254



315. Чавунний елемент знаходиться в напруженому стані як подано на Рис. 254. Обчислити еквівалентні напруження згідно з теорією міцності Мора і теорією відносного видовження (Сен-Венана). Дані: $\sigma_{Br} / \sigma_{Bc} = 3$; $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,28$.

316. Обчислити зведені напруження згідно з енергетичною теорією міцності для чистого зрізу, коли $\tau_{xy} = 80$ МПа.

317. Для напруженого стану зі складовими $\sigma_1 = 120$ МПа; $\sigma_2 = \sigma_3 = 40$ МПа, розрахувати еквівалентні напруження згідно з теорією найбільших відносних деформацій, Мора і Бужинського. Дані: $[\sigma_p] / [\sigma_c] = 4$; $\mu = 0,25$.

318. Напружений стан в точці визначений складовими $\sigma_1 = \sigma_2 = 80$ МПа і $\sigma_3 = -80$ МПа. Визначити еквівалентні напруження згідно з теорією найбільших дотичних напружень і теорією визначників. Прийняти $[\sigma_p]/[\sigma_c] = 3:1$.

319. Розрахувати еквівалентні напруження згідно з теорією Мора для напруженого стану, показаного на Рис. 255. $\sigma_{Br} / \sigma_{Bc} = 1/2$.

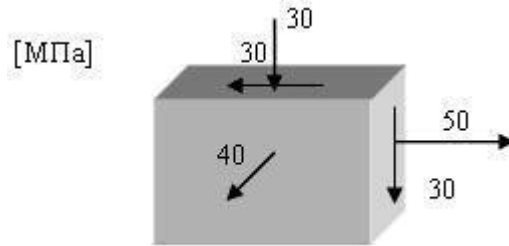


Рис. 255

320. Для напружених станів, поданих на Рис. 256, обчислити зведені напруження згідно з теорією найбільших дотичних напружень і енергетичною теорією.

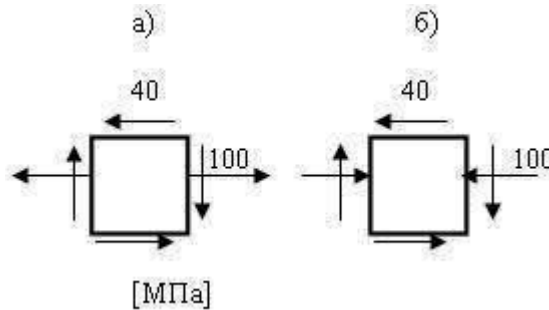


Рис. 256

321. Для плоского напруженого стану, визначеного складовими $\sigma_x = 80$ МПа, $\sigma_y = 60$ МПа і $\tau_{xy} = 40$ МПа, обчислити зведені напруження згідно з енергетичною теорією міцності і теорією τ_{max} .

322. Для напруженого стану, поданого на Рис. 257, обчислити еквівалентні напруження згідно теорії τ_{max} і енергетичної теорії міцності.

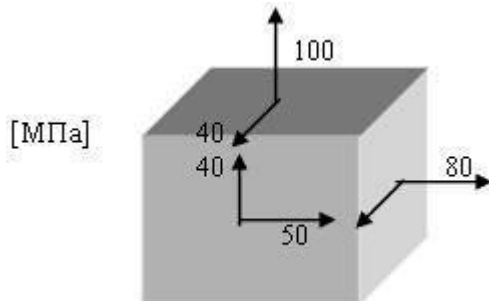


Рис. 257

323. Для напруженого стану, поданого на Рис. 258, обчислити зведені напруження згідно з енергетичною теорією міцності і теорією $\tau_{\max}$.

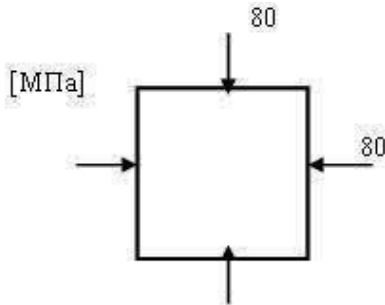


Рис. 258

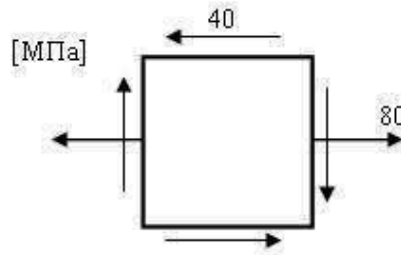


Рис. 259

324. Для напруженого стану, поданого на Рис. 259, розрахувати еквівалентні напруження згідно з теорією Бужинського і теорією міцності Мора. Прийняти: $\sigma_{Br} / \sigma_{Bc} = [\sigma_p] / [\sigma_c] = 1/3$.

325. Для напруженого стану, поданого на Рис. 260, обчислити значення зведених напружень згідно теорії міцності Мора. $[\sigma_p] / [\sigma_c] = 3$.

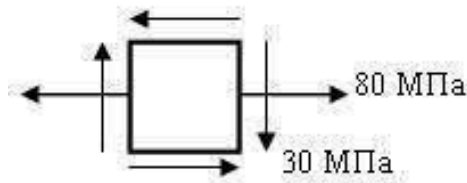


Рис. 260

326. Для наведених на Рис. 261 напружених станів розрахувати зведені напруження згідно з енергетичною теорією міцності і теорією $\tau_{\max}$.

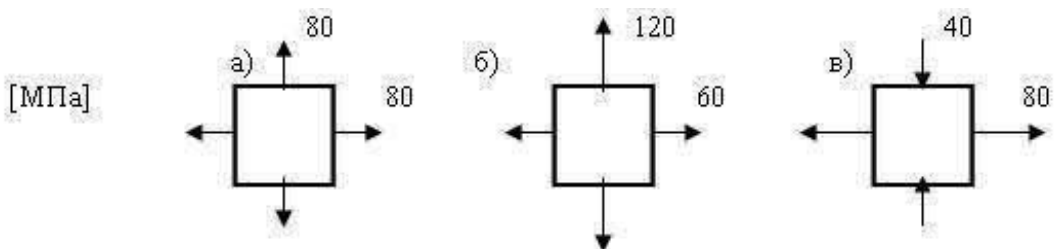


Рис. 261

327. Для поданого на Рис. 262 напруженого стану розрахувати зведені напруження згідно з енергетичною теорією міцності.

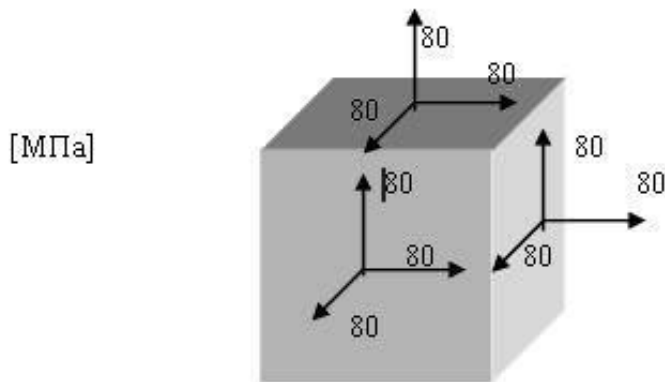


Рис. 262

328. Розрахувати зведені напруження згідно з теорією найбільших дотичних напружень для напруженого стану, поданого на Рис. 263.

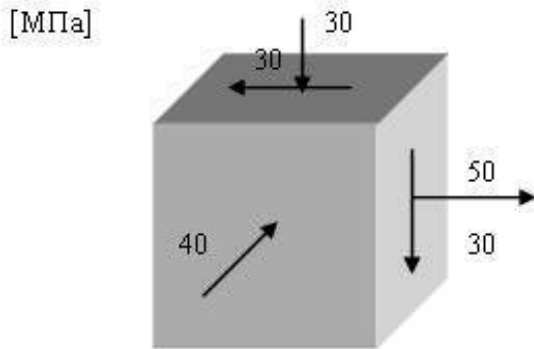


Рис. 263

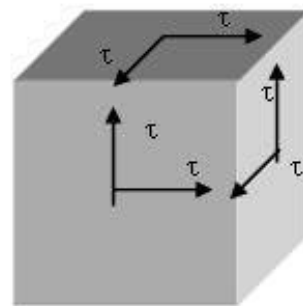


Рис. 264

329. Розрахувати для напруженого стану, наведеного на Рис. 264, зведені напруження згідно з теорією найбільших дотичних напружень. Дані: $\tau = 50$ МПа.

330. Для напруженого стану, визначеного складовими $\sigma_x = 30$ МПа; $\sigma_y = 50$ МПа; $\sigma_z = 60$ МПа; $\tau_{xy} = 40$ МПа; $\tau_{yz} = 30$ МПа; $\tau_{xz} = 10$ МПа, розрахувати зведені напруження згідно з теорією найбільших дотичних напружень і енергетичною теорією міцності.

4.2. Оцінка руйнування матеріалу

1. Безпосередньо з визначення еквівалентних напружень умова міцності для складного напруженого стану буде:

$$\sigma \leq [\sigma].$$

2. Коефіцієнт запасу міцності для складного напруженого стану відносно граничних значень обчислюється як для розтягу:

- відносно границі плинності σ_T ,

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_e},$$

- відносно границі міцності (на розтяг) σ_B ,

$$n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_e}.$$

3. У небагатьох випадках складного опору, наприклад кручення стержнів кругового перерізу, коли безпосередня оцінка руйнування матеріалу на підставі результатів досліджень є відносно простою, вибирають одну з двох умов міцності для проектного розрахунку конструкції. Мається на увазі, що потрібно скористатися в даному випадку умовою міцності на кручення, як більш достовірною, якщо відомо допустимі напруження кручення. Якщо відомо лише допустимі напруження на розтяг, тоді використовуються теорії міцності.

331. Обчислити коефіцієнти запасу міцності згідно з теорією найбільших дотичних напружень і енергетичною теорією міцності для напруженого стану, поданого на Рис. 265. $\sigma_T = 220$ МПа.

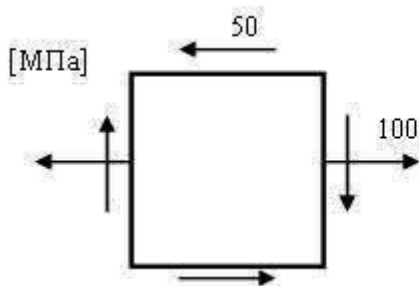


Рис. 265

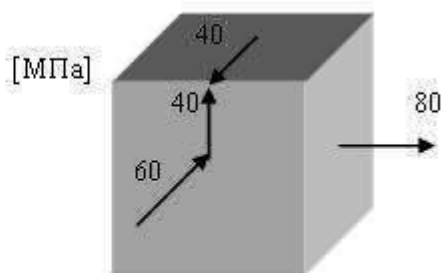


Рис. 266

332. Обчислити коефіцієнти запасу міцності згідно з теорією найбільших дотичних напружень і енергетичною теорією міцності відносно границі міцності на розтяг $\sigma_B = 360$ МПа для напруженого стану, поданого на Рис. 266.

333. Два напружені стани в точці визначені складовими:

1) $\sigma_x = 50$ МПа; $\sigma_y = -50$ МПа,

2) $\sigma_x = 50$ МПа; $\sigma_y = 50$ МПа.

Який із напружених станів є більш небезпечним згідно з енергетичною теорією міцності?

334. Обчислити коефіцієнт запасу міцності згідно з теорією міцності Мора для скляного кубика, для якого $[\sigma_p] = 60$ МПа; $[\sigma_c] = 600$ МПа, що знаходиться в напруженому стані: $\sigma_1 = 24$ МПа; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = 60$ МПа.

335. Який з поданих на Рис. 267 напружених станів є найбільш небезпечним згідно з теорією міцності Мора? $[\sigma_p] : [\sigma_c] = 1:2$.

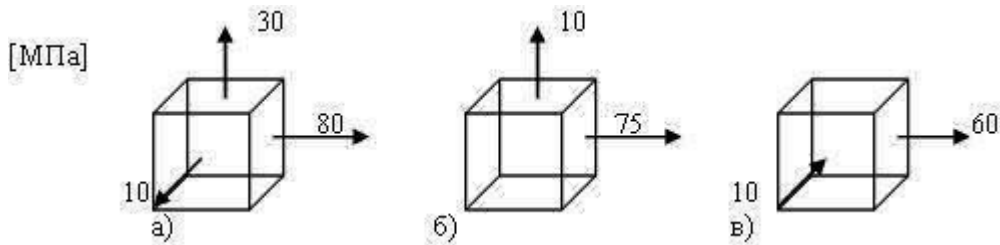


Рис. 267

336. На чавунний кубик, для якого $[\sigma_p] = 280$ МПа і $[\sigma_c] = 840$ МПа, діють напруження $\sigma_1 = -2 \sigma_3$ і $\sigma_2 = 0$. При якому значенні напружень σ_1 і σ_2 відбудеться руйнування кубика?
337. Для напруженого стану, поданого на Рис. 268, розрахувати коефіцієнти запасу міцності згідно з теорією найбільших дотичних напружень і енергетичною теорією міцності. $[\sigma_T] = 280$ МПа.

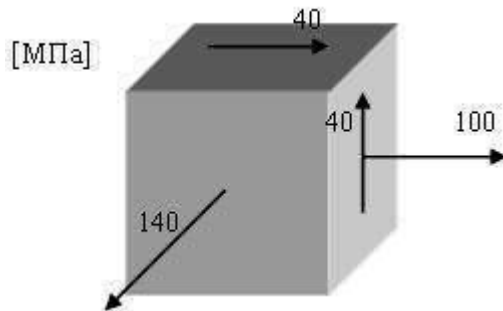


Рис. 268

338. Співвідношення головних напружень $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 4:2:-1$. Обчислити допустимі значення головних напружень σ_1 , σ_2 і σ_3 згідно з теорією міцності Мора для сталі, для якої $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 100$ МПа і для чавуну, для якого $[\sigma_p] = 80$ МПа і $[\sigma_c] = 320$ МПа.
339. Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 30$ МПа; $\sigma_y = 50$ МПа; $\sigma_z = 40$ МПа; $\tau_{xy} = 0$; $\tau_{yz} = 30$ МПа; $\tau_{zx} = 30$ МПа, розрахувати коефіцієнт запасу міцності згідно з теорією міцності Мора, якщо $\sigma_{тр} = 160$ МПа і $\sigma_{тс} = 320$ МПа.
340. Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 30$ МПа; $\sigma_y = 40$ МПа; $\sigma_z = 50$ МПа; $\tau_{xy} = 40$ МПа; $\tau_{yz} = 30$ МПа; $\tau_{zx} = 20$ МПа, розрахувати коефіцієнти запасу міцності згідно з енергетичною теорією та теорією τ_{max} , якщо $\sigma_T = 220$ МПа.
341. Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 80$ МПа; $\sigma_y = 120$ МПа; $\sigma_z = 160$ МПа; $\tau_{xy} = 80$ МПа; $\tau_{yz} = 50$ МПа; $\tau_{zx} = 20$ МПа, розрахувати коефіцієнт запасу міцності згідно з енергетичною теорією, якщо $\sigma_T = 250$ МПа.

342. Чавунний елемент, для якого $[\sigma_p] = 210$ МПа і $[\sigma_c] = 840$ МПа, піддано дії напружень, співвідношення величин яких $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 1:1:-2$. Обчислити допустимі значення цих напружень, якщо необхідний коефіцієнт запасу міцності $n = 2$.

343. Для напруженого стану, визначеного складовими: $\sigma_x = 40$ МПа; $\sigma_y = 30$ МПа; $\sigma_z = 50$ МПа; $\tau_{xy} = 30$ МПа; $\tau_{yz} = 0$; $\tau_{zx} = 40$ МПа, розрахувати коефіцієнт запасу міцності згідно з теорією найбільших відносних видовжень, якщо $\sigma_B = 480$ МПа і $\mu = 0,28$.

344. Для яких напружень σ_y поданий на Рис. 269 напружений стан буде безпечним згідно з теорією $\tau_{\max}$, якщо $[\sigma_p] = 200$ МПа?

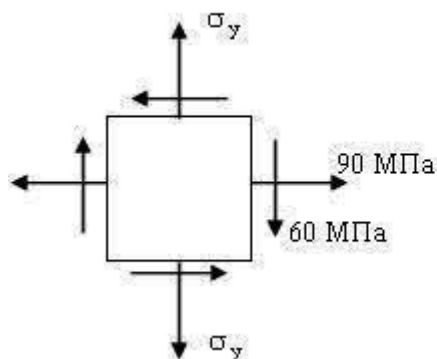


Рис. 269

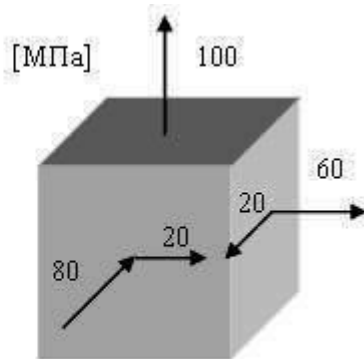


Рис. 270

345. Для поданого на Рис. 270 напруженого стану зобразити круги Мора, визначити головні напруження і обчислити коефіцієнти запасу міцності згідно з теорією $\tau_{\max}$ і енергетичною теорією міцності, якщо $\sigma_T = 240$ МПа.

346. Порівняти міцність матеріалу згідно з теорією міцності Мора і теорією найбільших відносних видовжень для напружених станів, наведених на Рис. 271. Дані: $[\sigma_p] = 120$ МПа; $[\sigma_c] = 480$ МПа; $\mu = 0,25$.

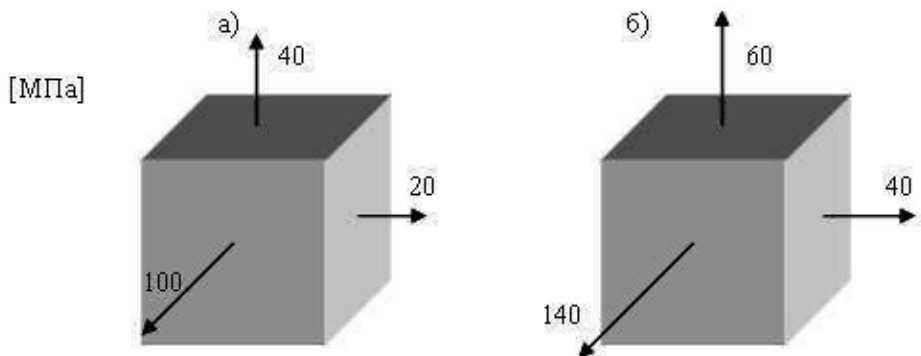


Рис. 271

347. Для наведеного на Рис. 272 напруженого стану обчислити значення напружень τ , щоб виконувалася умова $\sigma_{e, \tau_{\max}} \leq 200$ МПа.

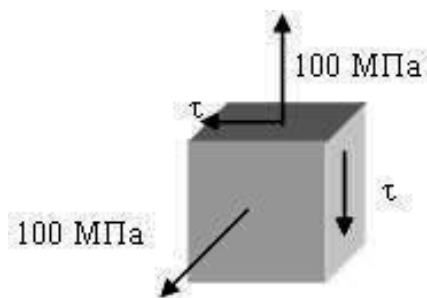


Рис. 272

348. Кубик одиничних розмірів (Рис. 273) стискається напруженнями σ за двома схемами: а) вільне розташування, б) вмонтований в недеформівний паз без зазору і без натягу. В якому випадку у матеріалі виникають більші напруження. Дані: $\sigma = 100$ МПа; $\mu = 0,3$; $[\sigma_p]/[\sigma_c] = 1$.

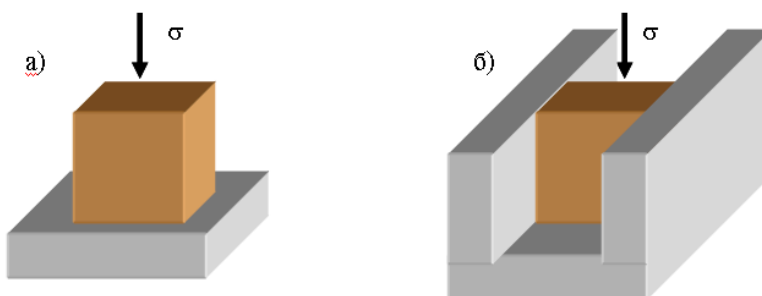


Рис. 273

4.3. Різні завдання

349. Який опір на зріз повинен мати, згідно з теорією міцності Мора, чавун, для якого $\sigma_t = 200$ МПа і $\sigma_c = 800$ МПа?
350. Задано допустимі напруження на розтяг $[\sigma_p]$. Які допустимі напруження на зріз $[\tau_{зр}]$ потрібно прийняти згідно з теоріями: а) $\tau_{\max}$, б) Мора, в) найбільших відносних видовжень?
351. Деформації, виміряні в плоскому напруженому стані за допомогою тензометричного містка у вигляді рівностороннього трикутника (Рис. 274), рівні: $\varepsilon_I = 0,8 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{II} = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{III} = 0,5 \cdot 10^{-3}$. Обчислити зведені напруження у вимірюваній точці А згідно з енергетичною теорією. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

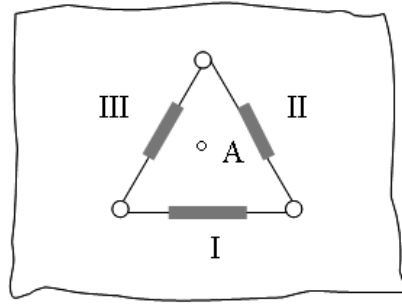


Рис. 274

352. Які напруження зрізу $[\tau_{зр}]$ є допустимими, якщо допустимі напруження на розтяг $[\sigma_p] = 100 \text{ МПа}$? $\mu = 0,3$.
353. Сталевий дріт довжиною 1000 м вільно звисає зануреним у воді. Розрахувати еквівалентні напруження згідно з теорією $\tau_{\max}$ в половині довжини дроту. Дані: $\gamma_c = 78 \text{ кН/м}^3$; $\gamma_v = 10 \text{ кН/м}^3$.
354. Встановити, чи завжди для всіх точок однієї і тієї ж ізохромі в еластооптичних дослідженнях зведені напруження згідно з теорією $\tau_{\max}$ матимуть однакові значення.

Розділ 5

Зріз

355. На шарнірне з'єднання діє сила P як показано на Рис. 275. Розрахувати максимально допустиме значення сили P , якщо для матеріалів з'єднання допустимі напруження розтягу, зрізу і зминання становлять відповідно: $[\sigma_p] = 120$ МПа; $[\tau_{зр}] = 80$ МПа; $[\sigma_{зм}] = 210$ МПа. Дані: $D = 24$ мм; $d = 20$ мм; $B = 44$ мм; $b = 30$ мм; $R = 20$ мм; $\delta = 8$ мм; $g = 12$ мм.

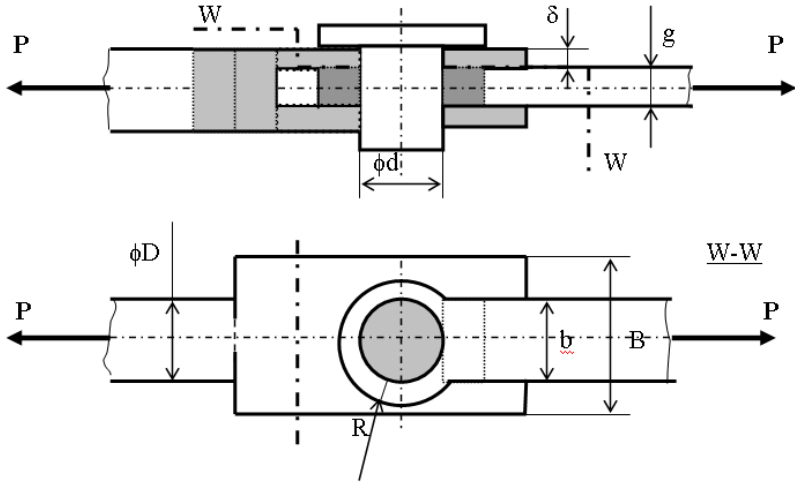


Рис. 275

356. Розрахувати максимальну силу P у шарнірному з'єднанні (Рис. 276). Дані: $b = 3$ см; $c = 3$ см; $d = 1$ см; $g = 1$ см; $[\sigma_p] = 120$ МПа; $[\tau_{3p}] = 60$ МПа; $[\sigma_{3M}] = 200$ МПа.

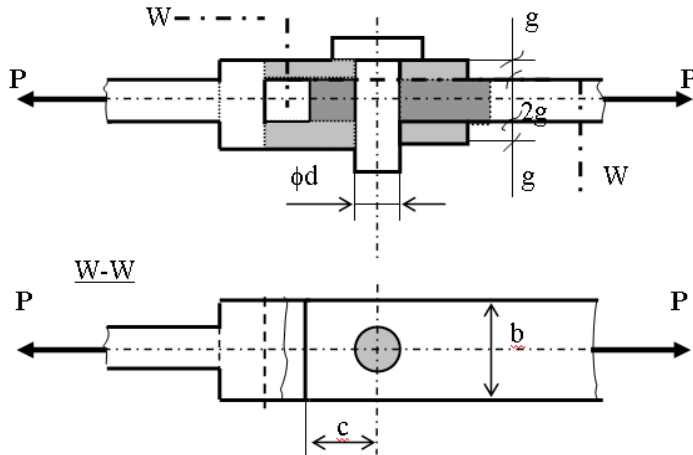


Рис. 276

357. Стержень, розтягуваний силою P , складається з двох швелерів № 18 за ГОСТ ($h = 180$ мм; $\delta = 5$ мм; $F = 20,5$ см²), які з'єднані з пластиною заклепками (Рис. 277). Розрахувати потрібне число заклепок за умови, що вони рівномірно навантажені. Дані: $P = 700$ кН; $d = 17$ мм; $g = 14$ мм; $[\tau_{зр}] = 140$ МПа (заклепки); $[\sigma_p] = 160$ МПа (швелер); $[p] = 320$ МПа (заклепка - швелер, заклепка - пластина).

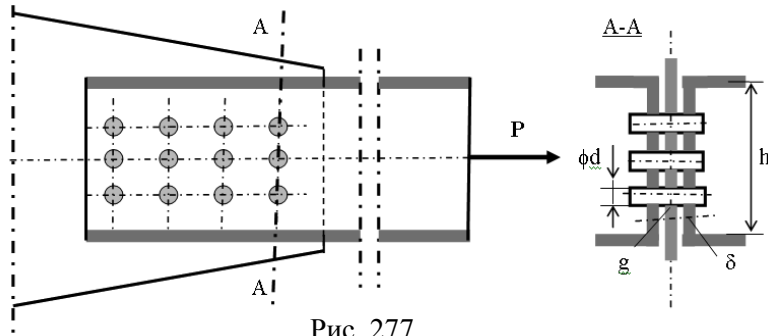


Рис. 277

358. Консоль з листового металу приклепана заклепками до плити (Рис. 278) і навантажена силою $P = 32$ кН. Розрахувати напруження зрізу в окремих заклепках. Дані: $d = 20$ мм; $t = 8$ см; $e = 80$ см.

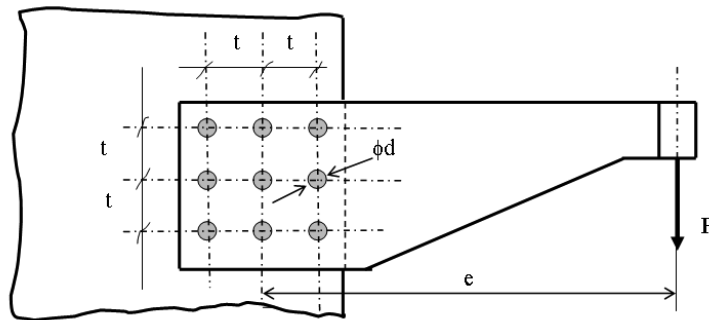


Рис. 278

359. Перевірити дотримання умов міцності для заклепкового з'єднання (Рис. 279), навантаженого силою $P = 280$ кН. Навантаження заклепок вважати рівномірним. Дані: $[\sigma_p] = 160$ МПа; $[\tau_{зр}] = 140$ МПа; $[p] = 320$ МПа; $b = 180$ мм; $t = 60$ мм; $a = 45$ мм; $\delta_1 = 14$ мм; $\delta_2 = 12$ мм; $d = 23$ мм.

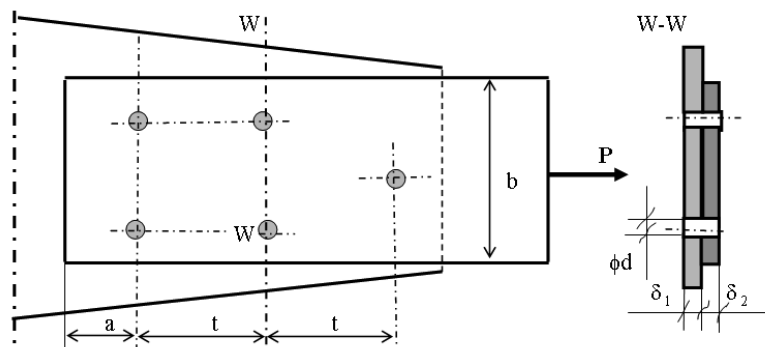


Рис. 279

360. Розрахувати максимальну силу P , яку може витримати заклепкове з'єднання (Рис. 280), при рівномірному навантаженні заклепок. Дані: $b = 280$ мм; $b_n = 250$ мм; $\delta = 14$ мм; $\delta_n = 8$ мм; $d = 23$ мм; $[\tau_{зр}] = 100$ МПа; $[\sigma_p] = 145$ МПа; $[\sigma_{зм}] = 240$ МПа.

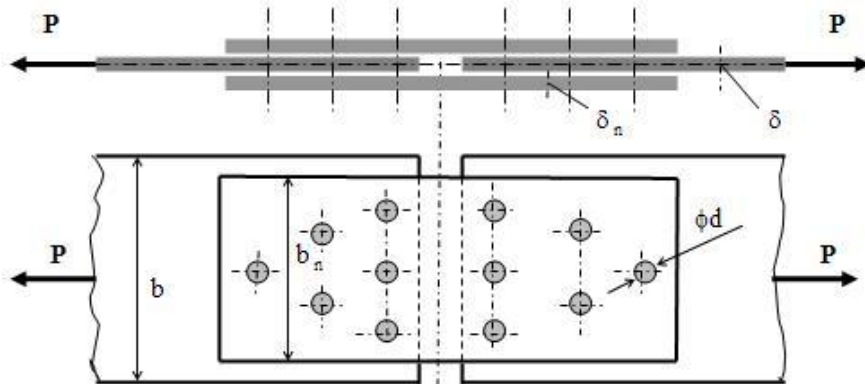


Рис. 280

361. Консоль з пластини приклепана шістьма рівномірно розташованими по колу заклепками, як показано на Рис. 281. Розрахувати допустиме значення сили P . Дані: $d = 8$ мм; $R = 10$ см; $e = 1$ м; $[\tau_{зр}] = 50$ МПа.

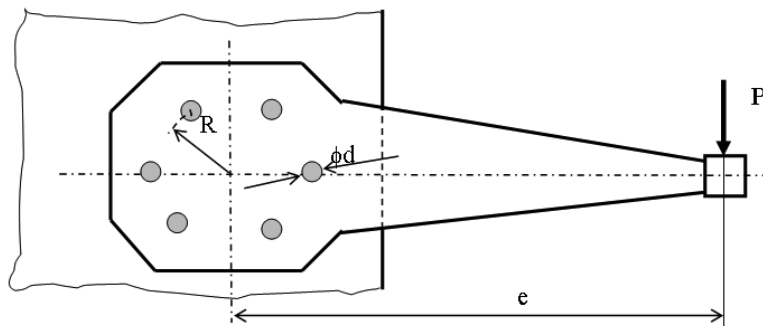


Рис. 281

362. Пластина приклепана і навантажена як показано на Рис. 282. Як зміняться напруження в заклепках 1, 2 і 3, якщо заклепка 4 зруйнується? Дані: $P = 8$ кН; $d = 10$ мм; $t = 48$ мм.

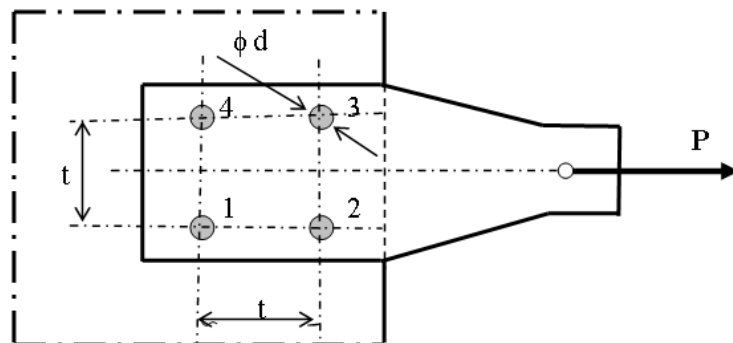


Рис. 282

- 363.** Провести перевірочний розрахунок на міцність штифтового з'єднання, показаного на Рис. 283. Дані: $P = 50 \text{ кН}$; $b = 60 \text{ мм}$; $g = 8 \text{ мм}$; $\delta = 5 \text{ мм}$; $[\tau_{зр}] = 100 \text{ МПа}$; $[\sigma_p] = 200 \text{ МПа}$; $[\sigma_{зм}] = 300 \text{ МПа}$.

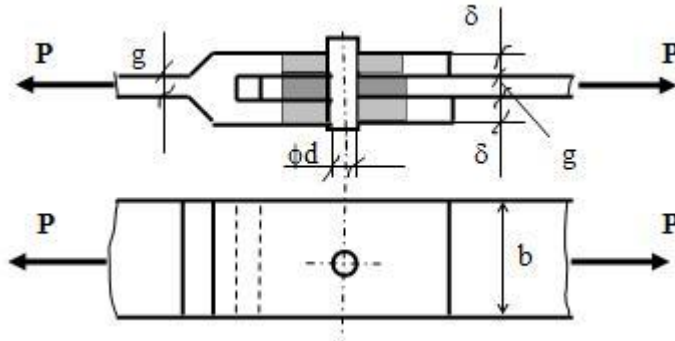


Рис. 283

- 364.** Фланцева муфта з'єднує два вали шістьма рівномірно розташованими заклепками на діаметрі D_3 . Розрахувати діаметр D_3 і діаметри валів d_v , якщо діаметри заклепок $d = 8 \text{ мм}$, крутний момент $M = 2,4 \text{ кНм}$, а допустимі для валів і для заклепок дотичні напруження $[\tau_{зр}] = 60 \text{ МПа}$.
- 365.** Два вали діаметром 80 мм з'єднано фланцевою муфтою з шістьма симетрично розташованими штифтами діаметром 20 мм на діаметрі 600 мм . Покладаючи навантаження штифтів однаковим, розрахувати дотичні напруження у штифтах і максимальні напруження зрізу у валах при крутному моменті 8 кНм .
- 366.** Фланцева муфта має вісім болтів діаметром 36 мм , розташованих симетрично на діаметрі 320 мм . Який крутний момент може передати це з'єднання, якщо допустимі напруження на зріз для болтів $[\tau_{зр}] = 60 \text{ МПа}$?
- 367.** Елемент, показаний на Рис. 284, вирізаний з пластини за допомогою штампа. Розрахувати потрібний натиск на штамп. Дані: $a = 20 \text{ мм}$; $R = a$; $\delta = 4 \text{ мм}$; $\tau_{зр} = 320 \text{ МПа}$ (напруження, при яких відбувається зріз пластини).

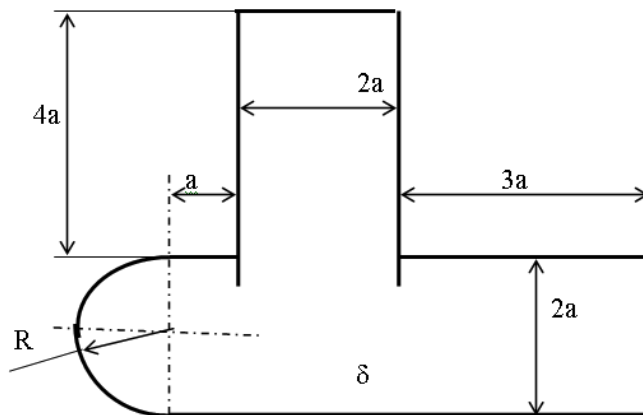


Рис. 284

- 368.** Якою максимальною вагою Q можна навантажити з'єднання, показане на Рис. 285. Дані: $c = 2 \text{ см}$; $b = 2c$; $a = 4c$; $d = c$; $h = 3c$; $k [\sigma_p] = 140 \text{ МПа}$; $[\tau_{зр}] = 70 \text{ МПа}$; $[\sigma_{зм}] = 240 \text{ МПа}$.

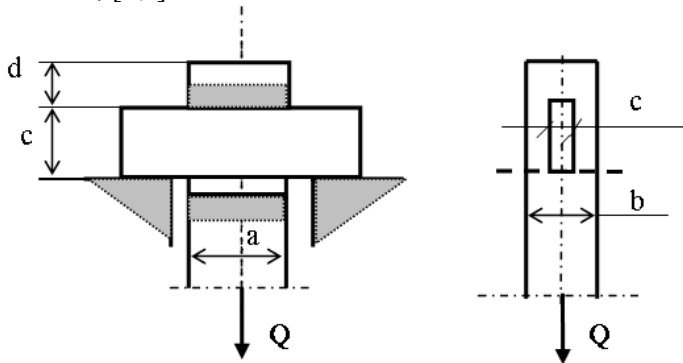


Рис. 285

- 369.** З'єднання двох дерев'яних балок (Рис. 286) навантажене силою $P = 80 \text{ кН}$. Обчислити розміри a , b , c з'єднання. Дані: $[\sigma_p] = 8 \text{ МПа}$; $[\tau_{зр}] = 0,8 \text{ МПа}$; $[\sigma_{зм}] = 6 \text{ МПа}$.

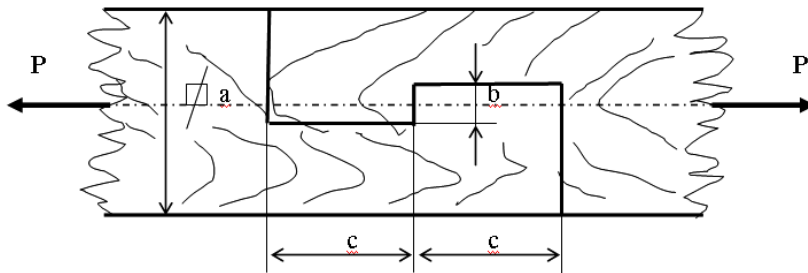


Рис. 286

Розділ 6 Кручення

6.1. Статика стержнів, що зазнають кручення

1. В питаннях, що стосуються статички скручуваних стержнів, зосереджуються на побудові епюр крутних моментів, які діють в окремих поперечних перерізах стержнів. Крутні моменти, що виникають в окремих перерізах, визначають так, як і інші внутрішні сили, застосовуючи метод перерізів. Правило щодо знаків крутних моментів подано на Рис. 287.

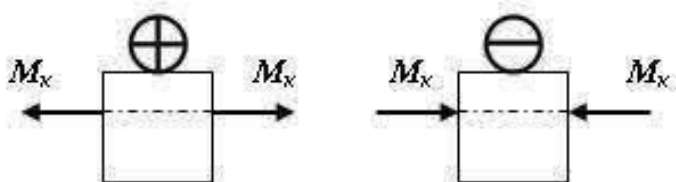


Рис. 287

- 370.** Для стержня, зображеного на Рис. 288, побудувати епюру крутних моментів.
Дані: $M = 4 \text{ кНм}$; $m = 4 \text{ кНм/м}$; $a = 1 \text{ м}$.

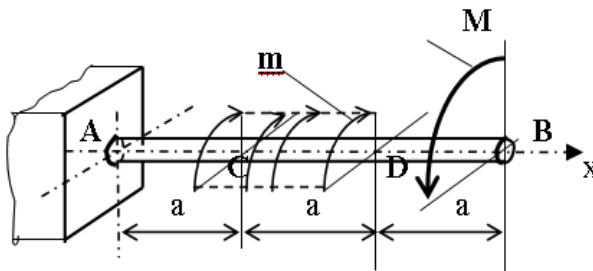


Рис. 288

Розв'язок

Наявні три проміжки зміни крутних моментів, на яких рівняння мають такий вигляд:

- відрізок BD, проміжок $2a \leq x \leq 3a$
 $M_k = M$;
- відрізок CD, проміжок $a \leq x \leq 2a$
 $M_k = M - m(2a - x)$;
- відрізок AC, проміжок $0 \leq x \leq a$
 $M_k = M - m(2a - a) = M - ma$.

Епюру крутних моментів із зазначенням екстремальних величин подано на Рис. 289

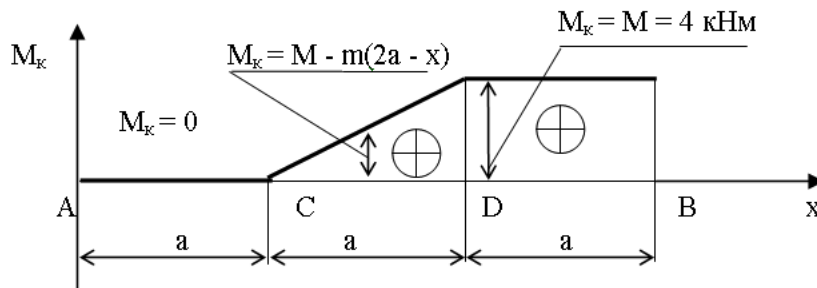


Рис. 289.

371. Для стержня, зображеного на Рис. 290, побудувати епюру крутних моментів.
Дані: $M = 2$ кНм; $l = 1$ м.

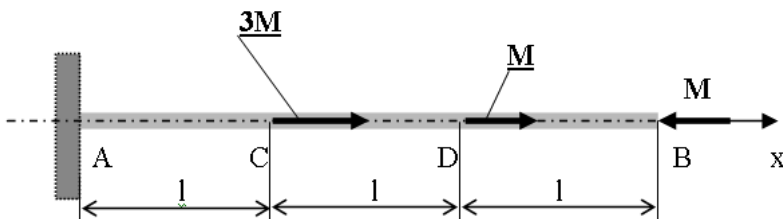


Рис. 290

6.2. Кручення стержнів з круговими перерізами

- Дотичні напруження в довільній точці поперечного перерізу обчислюють за формулою:

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho, \text{ або}$$

$$\tau = G \theta \rho,$$

де: M_k – крутний момент, I_p – полярний момент інерції перерізу, рівний $\pi d^4/32$ для суцільного перерізу діаметром d і $\pi D^4[1-(d/D)^4]/32$ для кільцевого перерізу із зовнішнім діаметром D і внутрішнім діаметром d , ρ – відстань точки від центру ваги перерізу, G – модуль пружності при зсуві матеріалу стержня, θ – відносний кут закручування стержня.

- Кут закручування φ стержня довжиною l і відносний кут закручування стержня θ обчислюють за формулами:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GI_p},$$

$$\theta = \frac{M_k}{GI_p}.$$

3. Умова міцності при крученні має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau_{\kappa p}] \sqrt{2},$$

де: W_p – полярний момент опору при крученні, рівний $\pi d^3/16$ для суцільних перерізів діаметром d і $\pi D^3[1-(d/D)^4]/16$ для кільцевих перерізів, $[\tau_{\kappa p}]$ – допустиме напруження на зріз.

4. Умова жорсткості при крученні має вигляд:

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{GI_p} \leq [\theta],$$

де: $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування.

372. Сталевий вал діаметром $d = 5$ см і довжиною $l = 4$ м скручується моментом $M_{\kappa} = 2$ кНм. Розрахувати максимальні дотичні напруження і кут закручування вала. Дані: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

373. Вал діаметром 16 см і довжиною 8 м скручено на кут 4° . Розрахувати максимальні дотичні напруження у валі. Дані: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

374. Який мінімальний діаметр повинен мати вал, що передає крутний момент $M_{\kappa} = 20$ кНм, якщо допустимі напруження на кручення $[\tau_{\kappa p}] = 60$ МПа?

375. Стержень діаметром $d = 2$ см і довжиною $l = 20$ см, навантажений моментом $M_{\kappa} = 4$ кНм, скручено на кут $\varphi = 0,2^\circ$. Обчислити модуль пружності G .

376. Вал повинен передавати крутний момент, рівний 9 кНм. Яким має бути його діаметр, якщо допустимий відносний кут закручування $0,5^\circ/\text{м}$ і дотичні напруження 80 МПа? $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

377. Вал із зовнішнім діаметром $D = 10$ см, внутрішнім $d = 6$ см і довжиною $l = 3$ м скручено на кут $\varphi = 1^\circ$. Розрахувати величину максимальних дотичних напружень. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

378. У скрученій сталевій трубі довжиною 8 м, зовнішнім діаметром 16 см і товщиною стінки 2 см максимальні дотичні напруження становлять 58,2 МПа. Розрахувати кут закручування труби. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

379. У трубчастому сталевому валі із зовнішнім діаметром $D = 16$ см, внутрішнім $d = 12$ см і довжиною $l = 8$ м максимальні дотичні напруження становлять 64 МПа. Розрахувати кут закручування вала і величину крутного моменту. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

380. Вал діаметром D скручується моментом M_{κ} . Який відсоток крутного моменту переносить зовнішня частина вала, у вигляді уявної втулки, вага якої складає 50% ваги цілого валу?

Розв'язок

Внутрішній діаметр d уявної втулки, що відповідає умові задачі, обчислюють з рівняння $\frac{\pi d^2}{4} = 0,5 \frac{\pi D^2}{4}$. Отримано $d = D / \sqrt{2}$.

Внутрішній діаметр втулки d є водночас зовнішнім діаметром уявного внутрішнього вала. Нехай крутний момент, що переноситься через внутрішню частину, становить M_0 . Максимальні дотичні напруження у внутрішній частині рівні мінімальним напруженням у втулці, тобто:

$$\frac{M_0}{\frac{\pi d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_k}{\frac{\pi D^4}{32}} \cdot \frac{d}{2},$$

звідкіля після підставлення $d/D = 1/\sqrt{2}$ отримано $M_0 = M_k / 4$.

Звідси виникає, що внутрішня частина переносить 25% крутного моменту M_k , а отже зовнішня частина, що становить 50% ваги цілого вала, переносить 75% крутного моменту.

- 381.** Середні дотичні напруження в поперечному перерізі тонкостінної втулки з товщиною стінки δ , середнім радіусом r_c , навантаженої крутним моментом M_k , обчислюють за формулою $\tau = \frac{M_k}{2\pi r_c^2 \delta}$. Розрахувати, для якого співвід-

ношення δ/r_c різниця максимальних напружень, знайдених за точною формулою і середніх, обчислених за вищезазначеною формулою, становитиме не більше, ніж 1% середніх напружень.

- 382.** Тонкостінна трубка з товщиною стінки $\delta = 2$ мм і середнім радіусом $r_c = 10$ см скручується моментом $M_k = 0,5$ кНм. Обчислити величину середніх дотичних напружень і відносний кут закручування. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

- 383.** Вал у вигляді тонкостінної труби із відношенням товщини стінки δ до середнього діаметру d_c , рівному 1:10, скручується моментом M_k . Якою буде похибка дотичних напружень в поперечному перерізі із товщиною стінки, визначеною за наближеною формулою $\tau_c = \frac{2M_k}{\pi d_c^2 \delta}$?

- 384.** Для стержня, зображеного на Рис. 291, побудувати епюри зміни величин: M_k , $\tau_{\max}$, θ і ϕ . Дані: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $M_k = 3,2$ кНм; $d = 8$ см; $d_o = 5$ см; $l = 40$ см.

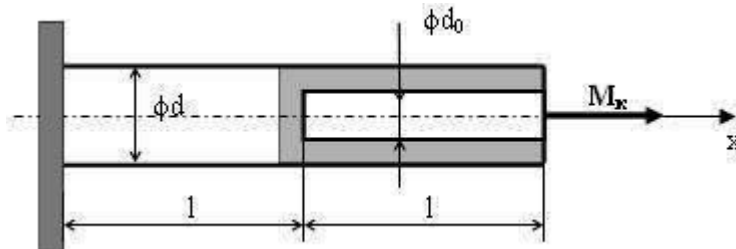


Рис. 291

- 385.** Ступінчастий стержень навантажено скручуючими моментами (Рис. 292). Побудувати епюри зміни вздовж стержня наступних величин: крутних моментів, максимальних дотичних напружень і кутів закручування перерізів. Дані: $M_1 = 1$ кНм; $M_2 = 2$ кНм; $M_3 = 4$ кНм; $d_1 = 6$ см; $d_2 = 5$ см; $d_3 = 8$ см; $a = 40$ см; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

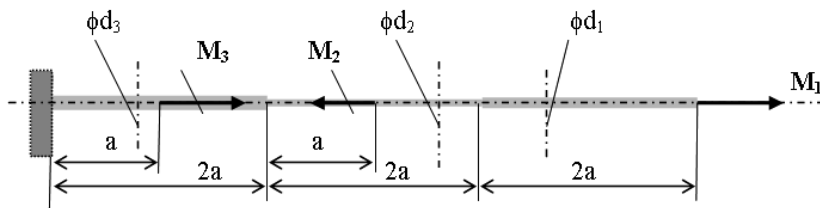


Рис. 292

- 386.** На який кут можна закрутити тонкостінну трубку довжиною 2 м, з товщиною стінки 1 мм і середнім радіусом 5 см, якщо допустимі напруження на кручення становлять 50 МПа? $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

- 387.** Труба, замурована одним кінцем, навантажена скручуючими моментами $M_1 = 5$ кНм і $M_2 = 2$ кНм (Рис. 293). Розрахувати зовнішній D і внутрішній d діаметри труби, якщо $d/D = 0,8$ і допустимі напруження на кручення $[\tau_{кр}] = 70$ МПа.

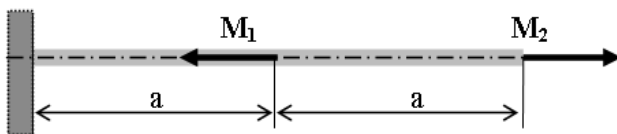


Рис. 293

- 388.** Труба, закріплена одним кінцем як показано на Рис. 294, навантажена скручуючими моментами $M_1 = 2$ кНм і $M_2 = 4$ кНм. Розрахувати максимальні дотичні напруження і кут повороту поперечного перерізу в точці А. Дані: $D = 8$ см; $\delta = 1$ см; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

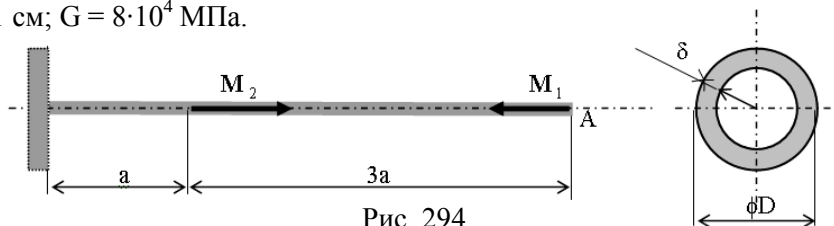


Рис. 294

- 389.** Обчислити кут закручування стержня, навантаженого рівномірно розподіленим скручуючим моментом $m_{ск}$ (Рис. 295). Дані: $m_{ск} = 200$ Нсм/см; $l = 180$ см; $d = 5$ см; $G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа.

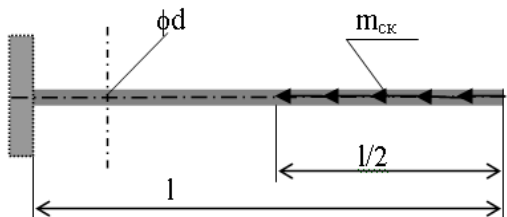


Рис. 295

390. Розміри поперечного перерізу стержня, що зазнає кручення, збільшено в два рази. Як зміняться: величина максимальних дотичних напружень, відносний кут закручування і закумуляована в стержні потенційна енергія пружної деформації?
391. Який відсоток матеріалу можна заощадити, виконуючи замість суцільного вала трубчастий вал із співвідношенням діаметрів $D/d = 5/4$?
392. Замість суцільного вала, що повинен передавати крутний момент M_k , виконано трубчастий вал із співвідношенням діаметрів $d/D = 0,8$. В якому випадку маємо важчий вал, а у якому жорсткіший і у скільки разів?
393. Вал, виготовлений з матеріалу з допустимими напруженнями на кручення $[\tau_{кр}]$, скручується моментом M_k . Який відсоток матеріалу заощадимо, якщо замість вала з суцільним круговим перерізом виконаємо трубчастий вал із співвідношенням діаметрів $D/d = 8/7$?
394. Замість суцільного валу виготовлено трубчастий вал з такого ж матеріалу і такої ж довжини із співвідношенням діаметрів внутрішнього до зовнішнього, рівним 0,7. Розрахувати, у скільки разів порожнистий вал жорсткіший на кручення від суцільного.
395. Стержень діаметром d навантажений скручуючим моментом M_1 і розподіленим моментом m (Рис. 296). Побудувати епюру крутних моментів, обчислити діаметр стержня, а також побудувати епюру кутів повороту перерізів стержня. Дані: $m = 60 \text{ кНм/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $M_1 = 1,5ma$; $[\tau_{кр}] = 100 \text{ МПа}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

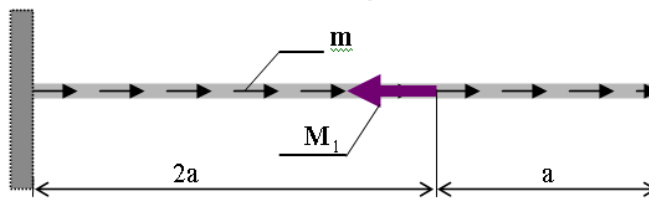


Рис. 296

Розв'язок

Приймається початок осі x у місці закріплення стержня (Рис. 297)

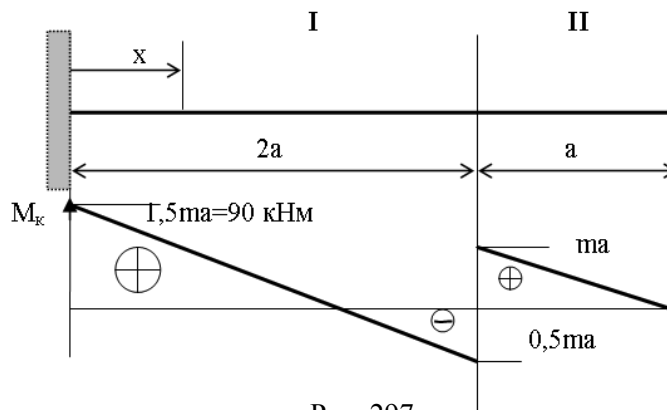


Рис. 297

Нааявними є два проміжки зміни крутного моменту:

- проміжок I: $0 \leq x \leq 2a$, де

$$M_k(x) = m(3a - x) - M_1 = m(3a - x) - 1,5ma = m(1,5a - x);$$

- проміжок II: $2a \leq x \leq 3a$, де

$$M_k(x) = m(3a - x).$$

Епюра крутних моментів зображена на Рис. 297.

Максимальний крутний момент, як слідує з епюри, буде при $x = 0$

$$M_{k,max} = m(1,5a - x) = 1,5ma = 1,5 \cdot 60 \cdot 1 = 90 \text{ кНм}.$$

З умови міцності для кручення

$$\frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_{кр}],$$

де $W_p = \pi d^3/16$, обчислюють діаметр стержня d :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau_{кр}]}} ,$$

де $M_k = 90 \text{ кНм} = 900 \text{ кНсм}$ і $[\tau_{кр}] = 100 \text{ МПа} = 10 \text{ кН/см}^2$.

Після підставлення числових даних отримано, що $d \geq 16,61 \text{ см}$. До подальших обчислень прийнято $d = 17 \text{ см}$.

Кут повороту перерізу стержня для довільного x з проміжку $0 \leq x \leq 2a$ обчислюють за формулою:

$$\varphi(x) = \int_0^x \theta(\xi) d\xi ,$$

де: ξ – довільна змінна на проміжку $(0, x)$; $\theta(\xi)$ – відносний кут закручування для координати ξ .

Підставляючи під знак інтеграла

$$\theta(\xi) = \frac{M_k(\xi)}{GI_p} = \frac{m(1,5a - \xi)}{GI_p} ,$$

після проведення обчислень, отримано:

$$\varphi(x) = \frac{m}{2GI_p} (3a - x)x .$$

Це є рівняння параболи, графік якої подано на Рис. 298.

Кут повороту перерізу стержня для довільного x з проміжку $2a \leq x \leq 3a$ обчислюють за формулою:

$$\varphi(x) = \varphi_B + \int_{2a}^x \theta(\xi) d\xi ,$$

де: $\varphi_B = \frac{ma^2}{GI_p}$ – кут повороту перерізу для $x = 2a$ (початку проміжку);

$$\theta(\xi) = \frac{m(3a - \xi)}{GI_p} .$$

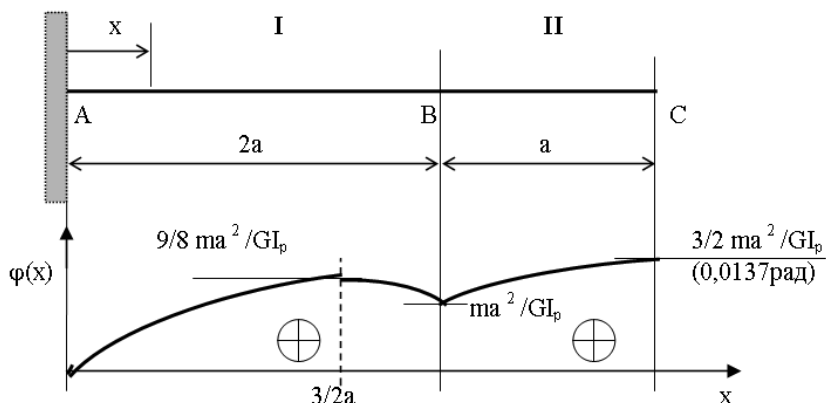


Рис. 298

Після підставлення вищезгаданих величин отримано формулу для кута повороту перерізу на другому проміжку:

$$\varphi(x) = \frac{ma^2}{GI_p} \left(3\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - 3 \right).$$

Це парабола, яка зображена на Рис. 298.

Максимальний кут повороту перерізу буде при $x = 3a$, тобто для точки C становить: $\varphi_C = \frac{3ma^2}{2GI_p}$, а після підставлення числових даних $\varphi_C = 0,0137 \text{ рад} = 0,786^\circ$.

396. Стержень кругового перерізу навантажено скручуючим моментом M і розподіленим моментом m як показано на Рис. 299. Обчислити діаметр вала, якщо допустимі напруження на кручення $[\tau_{кр}] = 100 \text{ МПа}$. Дані: $M = 12 \text{ кНм}$; $l = 1 \text{ м}$; $m = 2M/3l$.

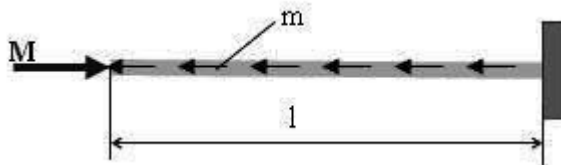


Рис. 299

397. Максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі суцільного вала діаметром 10 см становлять 60 МПа. Отвір якого діаметру вздовж осі вала можна просверлити для зменшення ваги, якщо допустиме перевищення максимальних напружень становить 20%? Який відсоток матеріалу тоді буде заощаджено?

398. Трубчастий вал із зовнішнім діаметром $D = 16 \text{ см}$ і внутрішнім $d = 12 \text{ см}$ скручується моментом $M = 12 \text{ кНм}$. Розрахувати найбільші і найменші еквівалентні напруження згідно теорії міцності $\tau_{\max}$.

399. Яким скручуючим моментом можна навантажити сталевий вал ($G = 8 \cdot 10^4$ МПа) діаметром 2 см і довжиною 4 м, якщо допустимий кут закручування 1° і допустимі напруження на розтяг $[\sigma_p] = 180$ МПа? Скористатися енергетичною теорією міцності.
400. Стержень діаметром 2 см скручується моментом 80 Нм. Яким є модуль пружності матеріалу стержня, якщо тензومتر, наклеєний на його поверхні під кутом 45° до його осі, вказав деформацію $1,8 \cdot 10^{-3}$?
401. Вал діаметром $d = 10$ см виконано з матеріалу з допустимими напруженнями на розтяг $[\sigma_p] = 200$ МПа. Яким скручуючим моментом можна навантажити цей вал: а) згідно теорії $\tau_{\max}$, б) згідно енергетичної теорії міцності?
402. Відомо, що теорія $\tau_{\max}$ є «обережніша» в оцінці міцності матеріалу, ніж енергетична теорія міцності. Який відсоток матеріалу заощадимо, якщо вал замість теорії $\tau_{\max}$ запроєкуємо згідно енергетичної теорії міцності? Дані: $[\sigma_p]$.
403. Сталевий зразок ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$) діаметром $d = 10$ мм і довжиною $l = 100$ мм досягає границі плинності при розтягу силою $P = 30$ кН. При якому орієнтовному куті закручування зразка буде границя плинності на кручення?
404. Який допустимий внутрішній діаметр d_0 можна прийняти в трубчастому ступінчастому валі, показаному на Рис. 300, якщо $[\tau_{кр}] = 120$ МПа і $[\theta] = 0,25^\circ/\text{м}$. Дані: $M = 1$ кНм; $d = 8$ см; $D = 10$ см; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

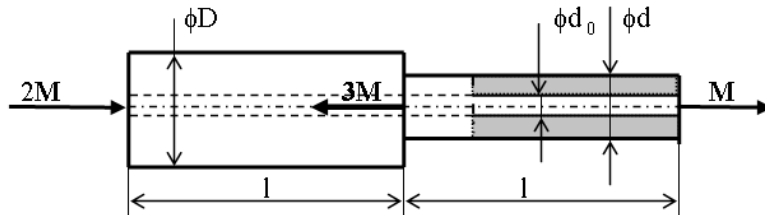


Рис. 300

405. Після запресування осердя у втулку (Рис. 301) виникли контактні тиски $p_k = 2$ МПа. Розрахувати максимальний скручуючий момент M , який можна прикласти на кінці осердя, а також побудувати епюру кутів повороту перерізів втулки. Дані: $d = 4$ см; $D = 5$ см; $a = 20$ см; $[\tau_{кр}] = 60$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $f = 0,1$ – коефіцієнт тертя між втулкою і осердям.

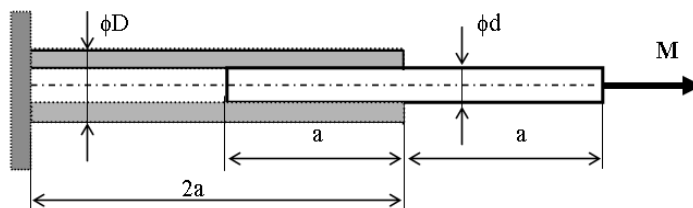


Рис. 301

406. Для стержня (Рис. 302), навантаженого розподіленим скручуючим моментом, побудувати епюри: максимальних дотичних напружень, відносних кутів закручування і кутів повороту поперечних перерізів. Дані: $m = 10 \text{ кНм/м}$; $l = 1 \text{ м}$; $d = 5 \text{ см}$; $D = 4d$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

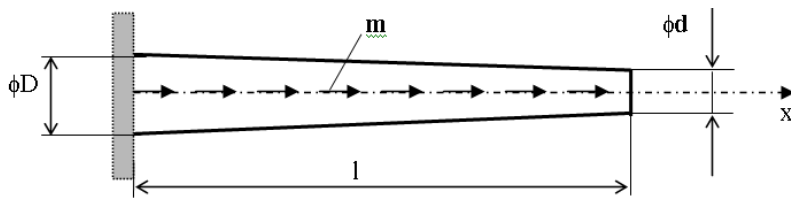


Рис. 302

407. Обчислити кут повороту поперечного перерізу у перерізі С, а також коефіцієнт запасу міцності згідно енергетичної теорії міцності для стержня, навантаженого скручуючими моментами як показано на Рис. 303. Дані: $M = 3,6 \text{ кНм}$; $d = 4 \text{ см}$; $D = 2d$; $l = 50 \text{ см}$; $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

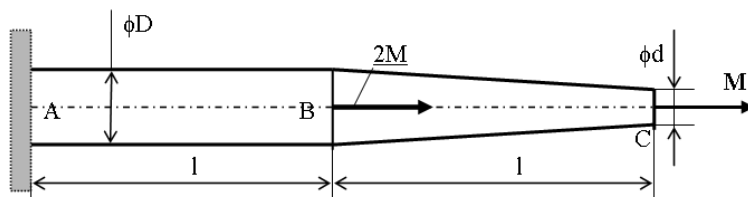


Рис. 303

Розв'язок

Кут повороту поперечного перерізу на кінці стержня рівний сумі кутів повороту циліндричної і конусної частини

$$\varphi = \frac{3Ml}{GI_p} + \int_0^l \theta(x) dx,$$

де: $\theta(x)$ – відносний кут закручування конусної частини на віддалі x від вільного кінця стержня С $\theta(x) = \frac{Ml}{GI_p(x)}$; $I_p = \frac{\pi d(x)^4}{32}$; $d(x) = \frac{D-d}{l} x$.

Після підставлення вказаних величин у формулу і проведення обчислень отримано:

$$\varphi = \frac{96Ml}{\pi G D^4} \left[1 + \frac{1}{15} \left(\frac{D}{D-d} \right)^4 \right] = \frac{96 \cdot 120 \cdot 50}{\pi \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot (8)^4} \left(1 + \frac{1}{15} \left(\frac{2d}{2d-d} \right)^4 \right) = 0,005595(1 + 16/15) = 0,01156 \text{ рад} = 0,66^\circ.$$

Шукаючи найменший коефіцієнт запасу міцності, обчислення проведено для двох випадків: коли переріз діаметром d скручується моментом M і коли переріз діаметром D скручується моментом $3M$.

$$1) \tau = M/W_p = \frac{16M}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 120}{\pi 4^3} = 9,55 \text{ кН/см}^2 = 95,5 \text{ МПа}.$$

Згідно енергетичної теорії міцності, напруженням $95,5 \text{ МПа}$ при крученні відповідають напруження при осьовому розтягу рівні

$\sigma = \sqrt{3}\tau = \sqrt{3} \cdot 95,5 \text{ МПа} = 165,4 \text{ МПа}$. Звідси коефіцієнт запасу міцності

$$n = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma} = \frac{200}{165,4} = 1,21.$$

$$2) \tau = 3M/W_p = \frac{16 \cdot 3M}{\pi(2d)^3} = 35,8 \text{ МПа}, \sigma = \sqrt{3} \cdot \tau = \sqrt{3} \cdot 35,8 \text{ МПа} = 60,0 \text{ МПа};$$

$$n = 200/60,0 = 3,33.$$

На підставі отриманих результатів підтверджено, що коефіцієнт запасу міцності для цілого стержня становить 1,21.

408. Вал турбокомпресора довжиною 60 см і діаметром 8 см передає потужність 600 кВт при числі обертів 3000 об./хв. Обчислити кут закручування вала. $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

409. Яку максимальну потужність може передати вал діаметром $d = 60 \text{ мм}$ при $n = 600 \text{ об./хв}$, якщо вимагається забезпечення умов міцності і жорсткості? Дані: $[\tau_{кр}] = 45 \text{ МПа}$; $[\theta] = 0,3^\circ/\text{м}$.

410. Розрахувати зовнішній D і внутрішній d діаметр трубчастого трансмісійного вала, який передає потужність N при кількості обертів n . Дані: $N = 40 \text{ кВт}$; $n = 800 \text{ об./хв}$; $d/D = 0,6$; $[\tau_{кр}] = 50 \text{ МПа}$; $[\theta] = 0,6^\circ/\text{м}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

411. Яку потужність може передати вал діаметром $d = 10 \text{ см}$ при частоті $n = 900 \text{ об./хв}$, якщо $[\tau_{кр}] = 80 \text{ МПа}$; $[\theta] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$?

412. Яку потужність може передати вал діаметром 8 см, якщо допустимий відносний кут закручування $[\theta] = 0,25^\circ/\text{м}$. $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$?

413. Потужність, що переноситься валом, описується виразом $N = -2,5 \cdot 10^{-6} n^2 + 2,5 \cdot 10^{-2} n - 12,5 \text{ [кВт]}$, де $n = 1000 \div 6000 \text{ об./хв}$. Розрахувати залежність відносного кута закручування вала від обертів, якщо діаметр вала $d = 3 \text{ см}$, модуль $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Побудувати епюри $N(n)$ і $\theta(n)$, а також обчислити максимальні дотичні напруження у валі і подати, при яких обертах вони виникнуть.

414. Привідний вал кругового перерізу має кут закручування $0,18^\circ$ на довжині 30 см при частоті $n = 3000 \text{ об./хв}$. Який діаметр має вал і яку передає потужність, якщо його zaproєктовано із використанням енергетичної теорії міцності? Дані: $[\tau_{кр}] = 180 \text{ МПа}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

415. Сталевий трубчастий вал із співвідношенням діаметрів $D/d = 4/3$ передає потужність $N = 12 \text{ кВт}$ при частоті $n = 900 \text{ об./хв}$. Якими повинні бути поперечні розміри вала, якщо $[\tau_{кр}] = 50 \text{ МПа}$; $[\theta] = 0,3^\circ/\text{м}$ і $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$?

416. Привідний вал із зовнішнім діаметром $d = 12 \text{ см}$ і товщиною стінки $\delta = 2 \text{ мм}$ передає потужність $N = 100 \text{ кВт}$ при частоті $n = 600 \div 3000 \text{ об./хв}$. Розрахувати максимальну величину дотичних напружень.

- 417.** Трансмісійний вал передає потужність $N = 90$ кВт на окремі привідні колеса як показано на Рис. 304 при $n = 200$ об./хв. Який відсоток матеріалу заощадимо, якщо замість суцільного валу виконаємо трубчастий вал із співвідношенням діаметрів $d/D = 0,7$? Дані: $N_1 = 40$ кВт; $N_2 = 27$ кВт; $N_3 = 23$ кВт; $\theta = 0,3^\circ/\text{м}$; $[\tau_{\text{кр}}] = 75$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

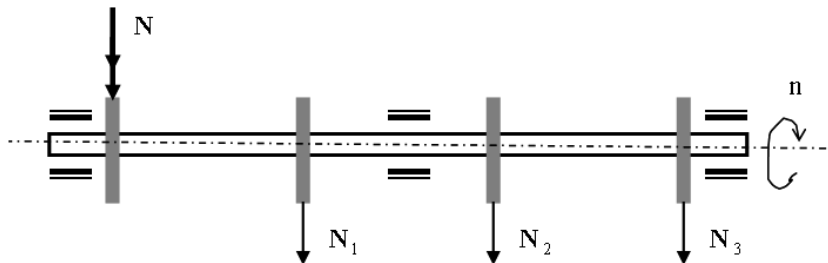


Рис. 304

- 418.** Сталевий вал діаметром $d = 100$ мм спроектовано, виходячи з того, що він буде передавати потужність 45 кВт при 100 об./хв. Як зміниться коефіцієнт запасу міцності валу, якщо його використано в іншому пристрої, що передає потужність 75 кВт при 500 об./хв?
- 419.** Електричний тензометр, наклеєний на вал діаметром $d = 10$ см під кутом 45° до його осі, показав під час обертання з частотою $n = 300$ об./хв відносне подовження $\varepsilon_{45} = 0,5 \cdot 10^{-3}$. Яку потужність передає вал і які виникають в ньому максимальні дотичні напруження? Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.
- 420.** Два вали діаметрами d з'єднано втулкою і штифтами (Рис. 305). Обчислити максимальну величину передаваного крутного моменту. Впливом отворів під штифти при обчисленні несучої здатності втулки і валів знехтувати. Дані: $d = 40$ мм; $D = 68$ мм; $d_1 = 10$ мм; $[\tau_{\text{кр}1}] = 40$ МПа (для вала); $[\tau_{\text{кр}2}] = 20$ МПа (для втулки); $[\tau_{\text{кр}3}] = 100$ МПа (для штифтів).

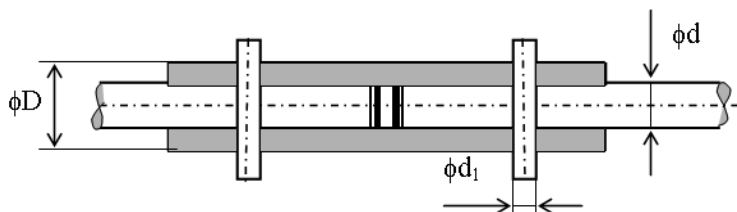


Рис. 305

- 421.** На двох однакових стержнях діаметром $d = 2$ см закріплено жорсткі важелі так, що проміжок між ними становить $\delta = 2$ мм (Рис. 306). До одного з важелів прикладено таку силу P , що точка її прикладання перемістилася на 2δ . Обчислити величину сили P . Дані: $G = 8,2 \cdot 10^4$ МПа; $l = 40$ см, $a = 10$ см.

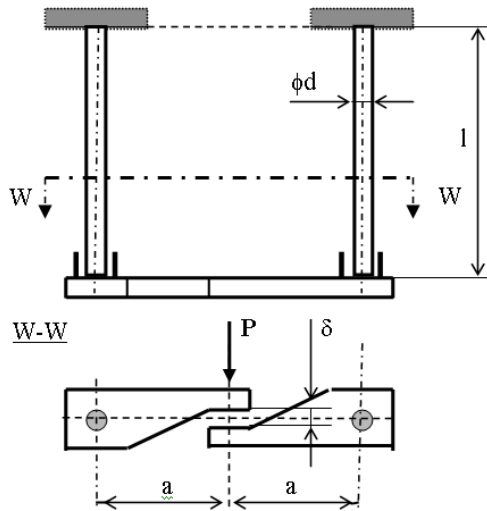


Рис. 306

- 422.** На кінець жорсткого важеля АВ діє сила P (Рис. 307). Розрахувати максимальні дотичні напруження у стержні ВС і переміщення кінця (т. А) важеля. Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $d = 5 \text{ см}$; $a = 50 \text{ см}$; $G = 8,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

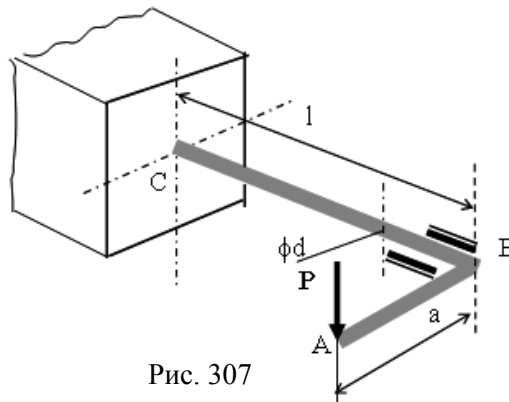


Рис. 307

- 423.** Обчислити діаметр d привідного вала АВ підйомної лебідки, що піднімає вантаж Q з швидкістю v . Обертний момент передається з вала на барабан лебідки діаметром D за допомогою зубчастої передачі як зображено на Рис. 308. Дані: $Q = 5 \text{ кН}$; $v = 0,5 \text{ м/с}$; $z_1 = 200$; $z_2 = 25$; $D = 30 \text{ см}$; $[\tau_{кр}] = 60 \text{ МПа}$.

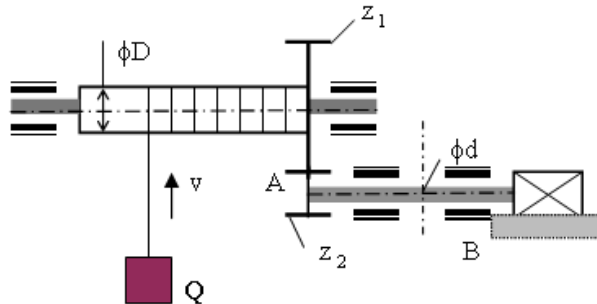


Рис. 308

6.3. Кручення стержнів з некруговими замкнутими перерізами

1. Детальний аналіз міцності при крученні призматичних стержнів з некруговими замкнутими перерізами виходить за межі основного курсу опору матеріалів і є предметом теорії пружності. Нижче наведено деякі рекомендації з теорії пружності, придатні для інженерної практики.
2. Розподіл дотичних напружень в поперечному перерізі стержня аналогічний з розкладом швидкості руху невязкої рідини, що знаходиться в обертovому русі в посудині з контурами у вигляді поперечного перерізу стержня. Це так звана гідрокінетична аналогія, яка дозволяє уявити орієнтовний якісний розподіл дотичних напружень в перерізі.
3. Максимальне дотичне напруження при крученні стержня прямокутного перерізу з розмірами $b \times h$ ($b \geq h$) виникає посередині більшої сторони (див. гідрокінетичну аналогію) і може бути подане наближеним виразом:

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{\alpha b h^2},$$

де: α – коефіцієнт, який знаходиться з таблиці для даного співвідношення b/h .

Близький результат дає також формула

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{b h^2} \left(3 + 1,8 \frac{h}{b} \right).$$

Відносний кут закручування обчислюють за наближеною формулою:

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{\beta G b h^3},$$

де β – коефіцієнт, який вибирають з таблиці.

Результат дуже близький до точного дає також формула

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{G b h^3} \left(3 + 1,25 \frac{h}{b} + 2,8 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \right).$$

У випадках прямокутних перерізів, де $b \geq 10h$, з достатньою точністю приймають $\alpha = \beta = 1/3$.

4. Формули для максимальних дотичних напружень в перерізі і відносний кут закручування для стержня з довільним поперечним перерізом мають вигляд:

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{W_c}; \quad \theta = \frac{M_{\kappa}}{G I_c},$$

де, наприклад, для еліпса $W_c = \frac{\pi a b^2}{2}$; $I_c = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$; a, b – півосі еліпса ($a \geq b$);

для шестикутника $W_c = 0,189s^3$; $I_c = 0,115s^4$; s – розхил ключа;

для рівностороннього трикутника $W_c = \frac{a^3}{20}$; $I_c = \frac{\sqrt{3}a^4}{80}$; a – довжина сторони.

5. Потенційна енергія пружності, що акумулюється при крученні стержня, обчислюється за формулою:

$$U = \frac{M_{\kappa}^2 I}{2GI_c}.$$

424. Для стержнів з перерізами, зображеними на Рис. 309, вказати точки, в яких напруження будуть найбільшими і найменшими. Використати гідрокінетичну аналогію.

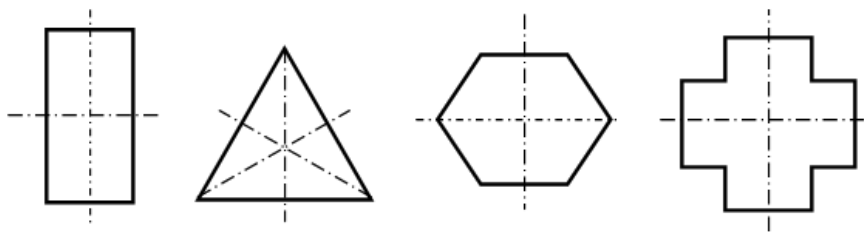


Рис. 309

425. Замість вала з квадратним поперечним перерізом виконано вал з круговим перерізом з такою ж площею перерізу. У якому випадку передаваний скручуючий момент буде більшим і у скільки разів, якщо в обох випадках допустимі максимальні дотичні напруження є однаковими?
426. Вал зі сталою площею поперечного перерізу виконаний на половині довжини з круговим перерізом, а на другій половині з квадратним перерізом. Розрахувати відсоткову частку частини вала з квадратним перерізом в куті закручування цілого вала.
427. Стержень довжиною $l = 2$ м і з квадратним поперечним перерізом зі стороною $a = 4$ см скручується моментом $M = 1,6$ кНм. Обчислити кут закручування вала і максимальні дотичні напруження. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.
428. Стержень довжиною $l = 2$ м і з поперечним перерізом у вигляді рівностороннього трикутника зі стороною $a = 5$ см закручено на кут $\varphi = 2^\circ$. Обчислити максимальні дотичні напруження. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.
429. Стержень з рівностороннім шестикутним поперечним перерізом скручується моментом M . Обчислити максимальну величину скручуючого моменту, якщо допускається відносний кут закручування $\theta = 0,4^\circ/\text{м}$. Дані: $G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа; $s = 24$ мм – величина розхилу ключа для шестикутного перерізу.
430. Стержень прямокутного перерізу 8 см $\times$ 4 см скручується моментом $M = 1,6$ кНм. Розрахувати максимальні дотичні напруження і відносний кут закручування. $G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа.

- 431.** Два вали виготовлено з однакового матеріалу і з однаковими площами поперечного перерізу – один з круговим, а другий з квадратним перерізом. В якому випадку крутний момент, розрахований з умови міцності, буде більшим і у скільки разів?
- 432.** Два стержні прямокутних перерізів з однаковою величиною площі поперечного перерізу, один з розмірами 8 см х 2 см, а другий 4 см х 4 см, зазнають кручення однаковим моментом $M = 1,2$ кНм. Обчислити для обох випадків відносний кут закручування, максимальні дотичні напруження і потенційну енергію пружної деформації, акумульовану в стержнях. Дані: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $l = 2$ м – довжина стержнів.
- 433.** Стержень прямокутного перерізу $b/h = 2,5$ скручується моментом $M = 2,5$ кНм. Розрахувати розміри поперечного перерізу стержня. Дані: $[\tau_{кр}] = 50$ МПа; $[\theta] = 0,5^\circ/\text{м}$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.
- 434.** Вал квадратного перерізу повинен передавати потужність $N = 100$ кВт при частоті обертання $n = 200$ об/хв. Розрахувати розміри поперечного перерізу вала, якщо допускається $[\tau_{кр}] = 80$ МПа; $[\theta] = 0,4^\circ/\text{м}$.
- 435.** Як зміниться жорсткість вала прямокутного перерізу на кручення, якщо, не змінюючи площу поперечного перерізу, змінити співвідношення сторін з 1:1 до 2:1?
- 436.** Замість стержня з квадратним поперечним перерізом 4 см х 4 см, виготовлено стержень з таким же сумарним перерізом, складений зі смуг розмірами 2 мм і 4 см. Як зміняться максимальні дотичні напруження, якщо в обох випадках відносний кут закручування $[\theta] = 0,8^\circ/\text{м}$? $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.
- 437.** Стержень квадратного поперечного перерізу зі стороною, виконаною з допуском $a = 20_{-0,5}^{+0,4}$, працює на кручення. Який найбільший і найменший скручуючий момент може перенести цей стержень, якщо $[\tau_{кр}] = 80$ МПа?

6.4. Кручення стержнів з тонкостінними незамкнутими перерізами

- 1. Поперечний переріз тонкостінного незамкнутого стержня, який, для прикладу, зображено на Рис. 310а, можливо умовно розчленувати на частини, як показано на Рис. 310б.*

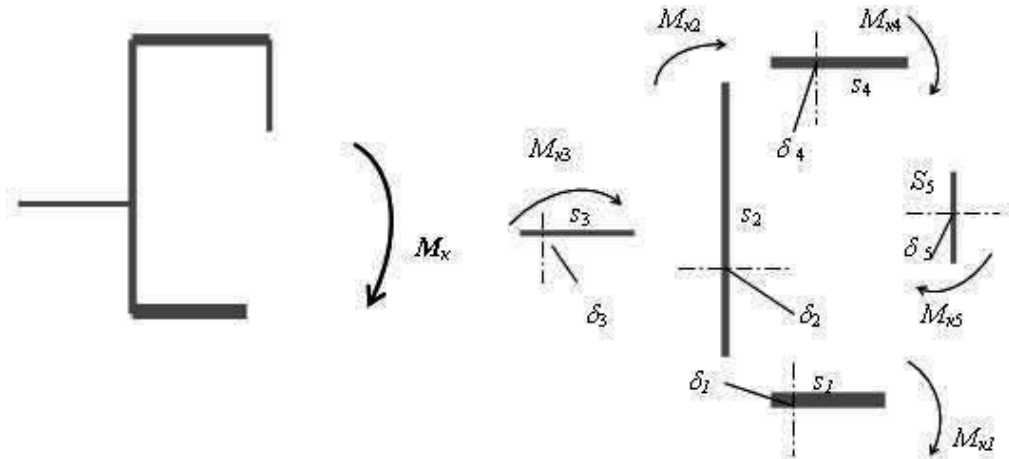


Рис. 310

$$M_k = \sum_{i=1}^5 M_{ki}$$

Покладають, що довжини складових елементів є значно більшими від їх товщини $s_i \gg \delta_i$ і є прямокутниками. Тоді можна прийняти при обчисленні кутів і максимальних дотичних напружень, що коефіцієнти $\alpha = \beta = 1/3$. Приймаючи, що кути закручування складових елементів перерізу рівні куту закручування цілого перерізу, отримаємо формулу для крутного моменту, що передається елементом за номером "i":

$$M_{ki} = \frac{s_i \delta_i^3}{\sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3} M_k.$$

- Відносний кут закручування стержня з тонкостінним незамкнутим перерізом обчислюють за наближеною формулою:

$$\theta = \frac{3M_k}{G \sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3}.$$

- Максимальні дотичні напруження в елементі з номером "i" (посередині сторони s_i) обчислюють із виразу

$$\tau_i = \frac{3M_{ki}}{s_i \delta_i^3} = \frac{3M_k \delta_i}{\sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3}.$$

- Умови міцності і жорсткості для кручення стержня з тонкостінним незамкнутим перерізом мають наступний вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_k \delta_{\max}}{\sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3} \leq [\tau_{kp}]; \quad \theta = \frac{3M_k}{G \sum_{i=1}^n s_i \delta_i^3} \leq [\theta].$$

5. Потенційну енергію пружної деформації, акумульовану при крученні у стержні з тонкостінним незамкнутим перерізом, обчислюють із виразу:

$$U = \frac{M_k^2 l}{2GI_c},$$

де: l – довжина стержня; $I_c = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=n} s_i \delta_i^3$.

438. Тонкостінний стержень з незамкнутим поперечним перерізом (Рис. 311) і довжиною $l = 2$ м закручено на кут $\varphi = 0,04$ рад. Обчислити максимальні дотичні напруження. Дані: $a = 2b = 20$ см; $\delta = 2$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

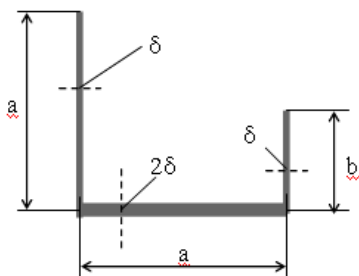


Рис. 311

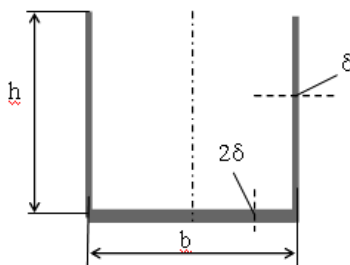


Рис. 312

439. У тонкостінному стержні з поперечним перерізом, зображеним на Рис. 312, при крученні виникли максимальні дотичні напруження 80 МПа. Вказати точки, в яких діють ці напруження, а також обчислити відносний кут закручування Дані: $\delta = 4$ мм; $b = h = 40\delta$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

440. У тонкостінному стержні з незамкнутим профілем у два рази зменшено довжину стінок і у стільки ж разів збільшено їх товщину. Як зміниться вага, жорсткість і міцність стержня при крученні при незмінній довжині цілого стержня?

441. Стержень (Рис. 313) довжиною $l = 2$ м скручується моментом $M = 0,2$ кНм. Обчислити найбільші дотичні напруження і кут закручування стержня. Дані: $\delta = 2$ мм; $h = 2b = 50\delta$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

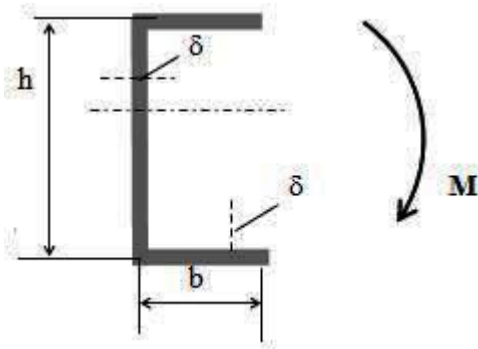


Рис. 313

442. Тензометр, наклеєний на швелері, що зазнає кручення (Рис. 314), показав відносне подовження $\varepsilon = 0,3 \cdot 10^{-3}$. Побудувати круги Мора для точки, де наклеєно тензометр, а також обчислити максимальні дотичні напруження і кут закручування швелера. Дані: $\delta = 5$ мм; $a = 20\delta$; $l = 2$ м; $\alpha = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

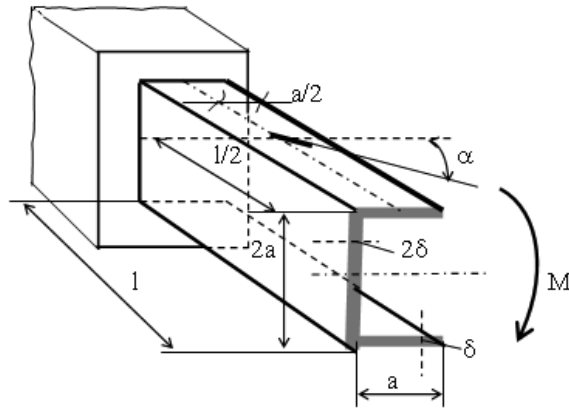


Рис. 314

Розв'язок

В точці наклеювання тензометра виникає стан чистого зрізу, для якого круги Мора зображено на Рис. 315а, а плоский напружений стан, що йому відповідає, показано на Рис. 315б суцільною лінією для елемента, розташованого вздовж осі стержня та пунктирною лінією для елемента, повернутого на кут 45° зі сторонами, що співпадають з напрямками головних напружень σ_1 і σ_3 .

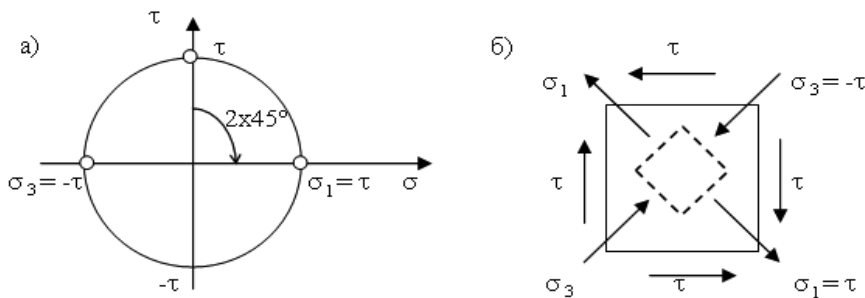


Рис. 315

Напружений стан, показаний на Рис. 315б пунктирною лінією, є плоским напруженим станом з головними напруженнями $\sigma_1 = \tau$ і $\sigma_3 = -\tau$. Тензометр наклеєно вздовж напрямку головних напружень. Деформація вздовж цього напрямку згідно із законом Гука описується виразом:

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1}{E}(\tau - \mu(-\tau)) = (1 + \mu) \frac{\tau}{E},$$

звідки отримано дотичні напруження в поперечному перерізі в місці наклеювання тензометра

$$\tau = \frac{\varepsilon E}{1 + \mu}.$$

Ці самі напруження можна також описати виразом:

$$\tau = \frac{3M_k \delta_i}{\sum_{i=1}^3 s_i \delta_i^3} = \frac{3M_k \cdot \delta}{a\delta^3 + 2a(2\delta)^3 + a\delta^3} = \frac{M_k}{6a\delta^2}.$$

Прирівнюючи праві сторони вищевказаних виразів, отримано

$$M_k = \frac{6}{1 + \mu} \varepsilon E a \delta^2 = \frac{120}{1 + \mu} \varepsilon E \delta^3.$$

Максимальні дотичні напруження діятимуть посередині сторони елемента з найбільшою товщиною, тобто елемента, що має розміри поперечного перерізу $2a \times 2\delta$. Ці напруження, згідно з поданим раніше виразом, рівні:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_k \delta_{\max}}{\sum_{i=1}^3 s_i \delta_i^3} = \frac{3M_k \cdot 2\delta}{18a\delta^3} = \frac{M_k}{3a\delta^2} = \frac{6\varepsilon E a \delta^2}{(1 + \mu)3a\delta^2} = \frac{2\varepsilon E}{1 + \mu};$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{1 + 0,3} = 92,3 \text{ МПа}.$$

Кут закручування швелера становить:

$$\begin{aligned} \varphi = \theta l &= \frac{3M_k l}{G \sum_{i=1}^3 s_i \delta_i^3} = \frac{3M_k l}{G \cdot 18a\delta^3} = \frac{M_k l}{6Ga\delta^3} = \frac{6\varepsilon E a \delta^2 l}{6(1 + \mu)Ga\delta^3} = \\ &= \frac{\varepsilon E}{(1 + \mu)G} \frac{l}{\delta} = \frac{\varepsilon E}{(1 + \mu) \frac{E}{2(1 + \mu)}} \frac{l}{\delta} = 2\varepsilon \frac{l}{\delta}; \end{aligned}$$

$$\varphi = 2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2000}{5} = 0,24 \text{ рад} = 13,8^\circ.$$

- 443.** Стержень двотаврового перерізу зазнає кручення (Рис. 316). Розрахувати кут закручування стержня і максимальні дотичні напруження. Дані: $M = 1,2 \text{ кНм}$; $m = 1 \text{ кНм/м}$; $\delta = 3 \text{ мм}$; $h = 2b = 80\delta$; $l = 2 \text{ м}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

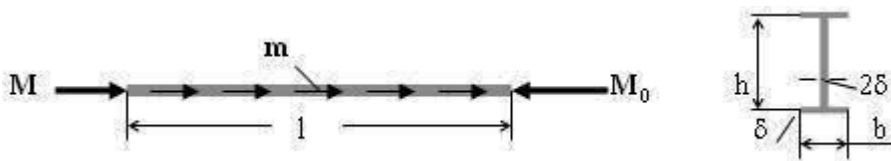


Рис. 316

- 444.** Розрахувати із завдання 443 потенційну енергію пружної деформації, акумульовану в стержні.

6.5. Кручення стержнів з тонкостінними замкнутими перерізами

1. Дотичні напруження в довільному місці перерізу тонкостінного стержня замкнутого профілю, (Рис. 317), у якому діє крутний момент M_κ , обчислюють із виразу:

$$\tau = \frac{M_\kappa}{2F^*\delta},$$

де: F^* – площа заповнення (Рис. 317), δ – товщина стінки.

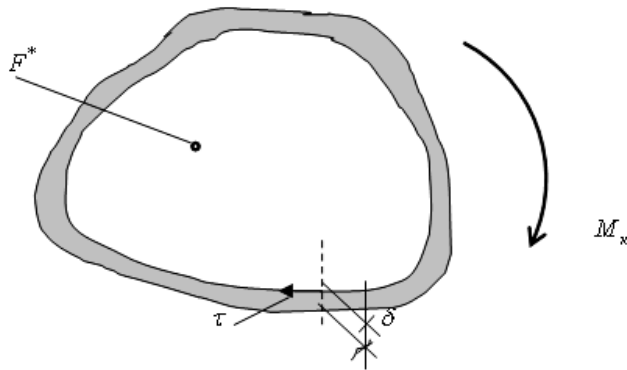


Рис. 317

З вищевказаного виразу слідує, що добуток напружень і товщини стінки, є сталою величиною:

$$\tau\delta = \frac{M_\kappa}{2F^*} = \text{const}.$$

2. Відносний кут закручування обчислюють із виразу:

$$\theta = \frac{M_\kappa}{4GF^{*2}} \oint_s \frac{ds}{\delta},$$

де: s – координата на обводі контура, δ – товщина стінки для координати s .

3. Умови міцності і жорсткості для тонкостінного замкнутого стержня при крученні повинні мають вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_\kappa}{2F^*\delta_{\min}} \leq [\tau_{\kappa p}]; \quad \theta = \frac{M_\kappa}{4GF^{*2}} \oint_s \frac{ds}{\delta} \leq [\theta].$$

4. Потенційна енергія пружної деформації, акумульована в скрученому стержні довжиною l рівна

$$U = \frac{M_\kappa^2 l}{8GF^{*2}} \oint_s \frac{ds}{\delta}.$$

445. Яким крутним моментом M_k можна навантажити трубу з тонкостінним замкнутим перерізом (Рис. 318). Дані: $\delta = 5$ мм; $b = 2h = 40\delta$; $[\tau_{кр}] = 60$ МПа.

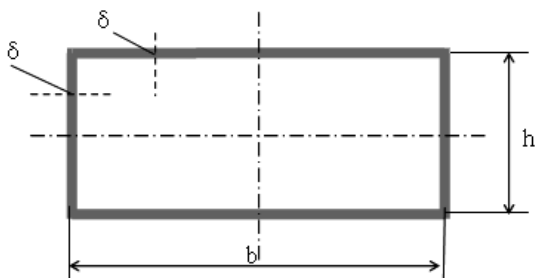


Рис. 318

446. Труба виготовлена і зварена з листового металу товщиною δ зазнає дії крутного моменту M_k (Рис. 319). Обчислити напруження у листі і у шві. Дані: $M_k = 27$ кНм; $a = 30$ см; $\delta = 3$ мм; $\delta_c = 4$ мм.

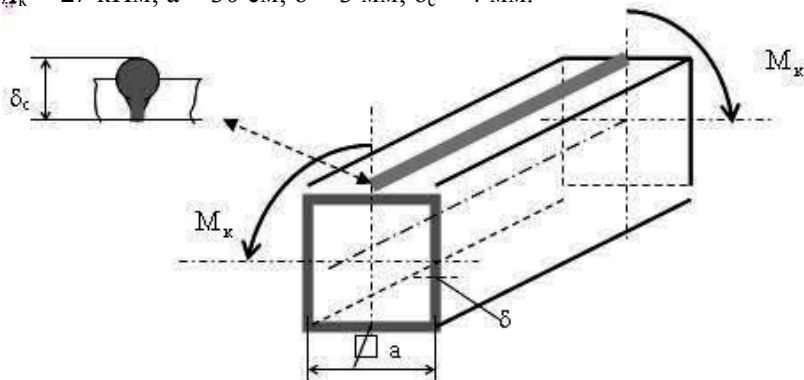


Рис. 319

447. Тонкостінну трубу прямокутного перерізу виготовлено з листа металу заклепковим з'єднанням (Рис. 320). Розрахувати величину сили, що діє на одну заклепку за умови рівномірного навантаження заклепок. Дані: $M_k = 10$ кНм; $b = 3/2h = 36$ см; $\delta = 3$ мм; $t = 25$ мм.

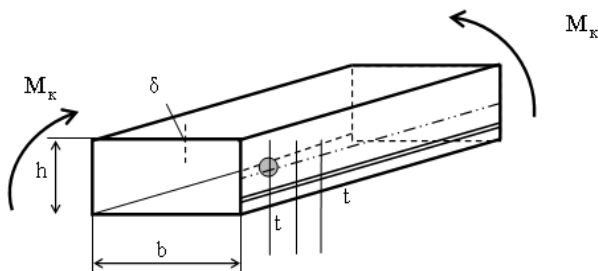


Рис. 320

448. Три тонкостінні труби з круговим, квадратним перерізом і перерізом у вигляді рівностороннього трикутника з однаковою довжиною, товщиною стінки і обводу скручуються моментом однакової величини. Яким буде співвідношення для цих випадків дотичних напружень і кутів закручування?

449. У тонкостінній трубі, зображеній на Рис. 321, навантаженій скручуючим моментом, вдвічі збільшено всі розміри за винятком товщини. Як зміниться вага труби, напруження і кут закручування?

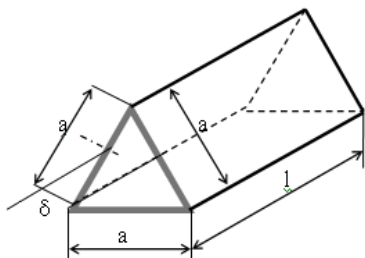


Рис. 321

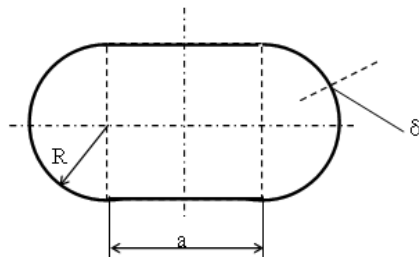


Рис. 322

450. Тонкостінна сталева труба з перерізом, показаним на Рис. 322, скручується моментом $M = 16$ кНм. Обчислити відносний кут закручування і коефіцієнт запасу міцності згідно енергетичної теорії міцності. Дані: $a = 2R = 20$ см; $\delta = 2$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа.
451. Тонкостінна труба кругового перерізу скручується моментом $M = 40$ кНм. Визначити розміри поперечного перерізу труби, якщо $[\tau_{кр}] = 80$ МПа і $[\theta] = 0,2^\circ/\text{м}$. Дані: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $D_c = 20\delta$ – середній діаметр труби (δ – товщина стінки труби).
452. Як і на скільки відсотків зміниться міцність на кручення кругової тонкостінної труби з діаметрами: зовнішній $D = 180$ мм і внутрішній $d = 172$ мм, якщо внаслідок неточного виконання ексцентриситет діаметрів становить $e = 1$ мм?
453. На елерон діють скручуючі моменти як показано на Рис. 323. Побудувати епюру крутних моментів. Розрахувати кут закручування елерона і коефіцієнт запасу міцності згідно енергетичної теорії. Дані: $M = 1,5$ кНм; $m = 200$ Нм/м; $a = 3b = 36$ см; $c = 10$ см; $\delta = 1$ мм; $l = 1$ м; $G = 2,8 \cdot 10^4$ МПа; $\sigma_T = 220$ МПа.

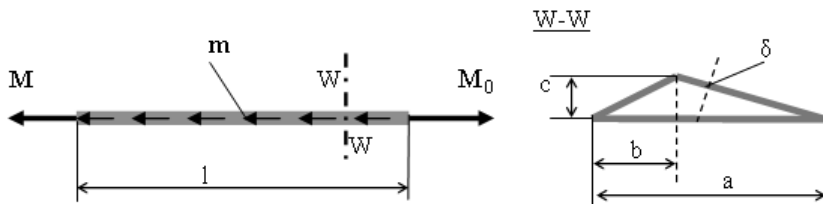


Рис. 323

454. Консольна балка з тонкостінним прямокутним замкнутим перерізом навантажена як показано на Рис. 324. Побудувати епюри крутних моментів і розрахувати допустиму величину моменту M . Дані: $m = M/l$; $\delta = 2$ мм; $a = 30 \delta$; $l = 1,2$ м; $[\tau_{кр}] = 100$ МПа.

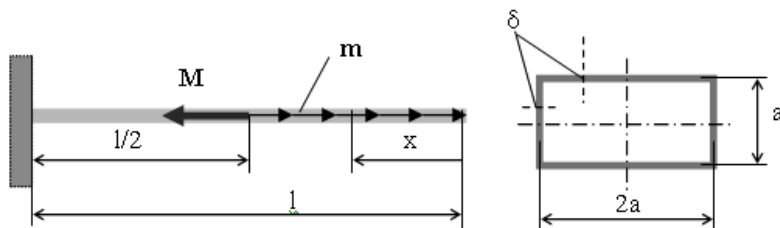


Рис. 324

Розв'язок

Приймається координата x від правого кінця балки (Рис. 324). Буде два проміжки зміни крутного моменту:

I) $0 \leq x \leq l/2$;

$$M_k = mx = \frac{M}{l} x.$$

II) $l/2 \leq x \leq l$;

$$M_k = ml/2 - M = \frac{M}{l} \frac{l}{2} - M = -\frac{M}{2}.$$

Епюра крутних моментів показана на Рис. 325.

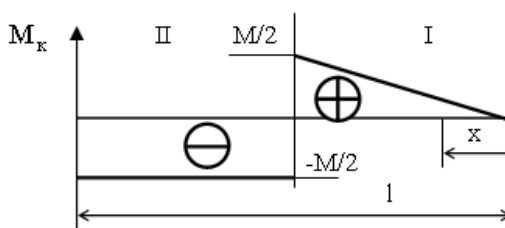


Рис. 325

Максимально допустима величина моменту M обчислюють з умови міцності

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{2F^* \delta_{\min}} \leq [\tau_{\text{кр}}];$$

де: $M_k = M/2$; $F^* = 2a \cdot a = 2a^2$; $\delta_{\min} = \delta$.

З умови після підставлення і обчислення отримано

$$\begin{aligned} M &\leq 8a^2 \delta [\tau_{\text{кр}}] = 8(30\delta)^2 \delta [\tau_{\text{кр}}] = 7200\delta^3 [\tau_{\text{кр}}] = 7200 \cdot (0,2)^3 \cdot 10 = \\ &= 576 \text{ кНсм} = 5,76 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

455. Трубу з середнім діаметром D_c , товщиною стінки δ і довжиною l виготовлено згортанням прямокутного листа і зварено вздовж твірної. Допустимі напруження на зріз для листа становлять $[\tau_{\text{зр}}]$, а шва $[\tau_{\text{зр}}]' = 0,8[\tau_{\text{зр}}]$. Який максимальний скручуючий момент може витримати труба і яке тоді напруження зрізу діє на зварне з'єднання? Дані: $D_c = 6$ см; $\delta = 1$ мм; $l = 50$ см; $[\tau_{\text{зр}}] = 60$ МПа.

456. Циліндрична труба середнім діаметром d і товщиною стінки $\delta = d/20$ скручується моментом M_k . Як зміниться міцність і жорсткість труби, якщо зробити розріз вздовж твірної по цілій її довжині?

457. Як зміниться міцність і жорсткість тонкостінної труби, показаної на Рис. 326а, якщо зробити розріз вздовж твірної (Рис. 326б)?

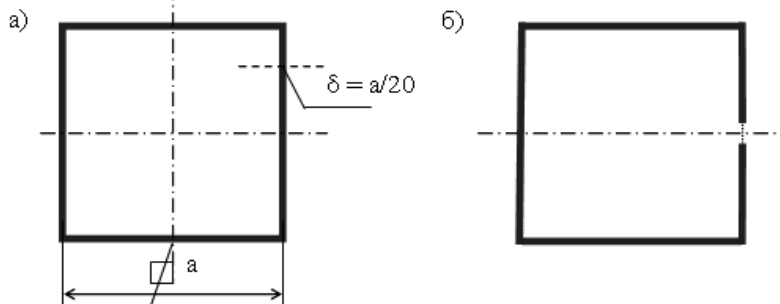


Рис. 326

458. Тонкостінний стержень у вигляді труби середнього діаметра $D = 6$ см і товщиною стінки $\delta = 3$ мм скручується моментом M . У скільки разів зменшиться міцність стержня на кручення, якщо розрізати його вздовж твірної? Яким скручуючим моментом можна буде навантажити стержень в обох випадках, якщо $[\tau_{\text{сп}}] = 80$ МПа?

459. Два тонкостінні стержні, виконані з одного і того ж матеріалу і з такими ж розмірами, причому один із замкнутим перерізом, а другий з незамкнутим (Рис. 327), мають такий самий кут закручування φ . Яким буде співвідношення крутних моментів?

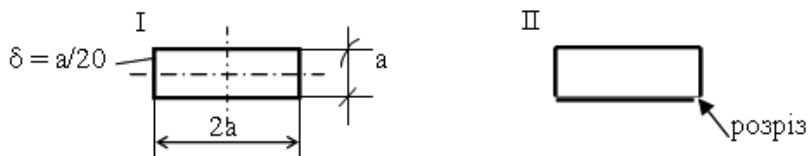


Рис. 327

460. Тензометр, наклеєний під кутом $\alpha = 45^\circ$ до осі скрученого тонкостінного стержня (Рис. 328), показав відносне подовження $\varepsilon = 0,2 \cdot 10^{-3}$. Обчислити дотичні напруження в поперечному перерізі і кут закручування стержня. Дані: $a = 10$ см; $\delta = a/50$; $l = 1$ м; $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,33$.

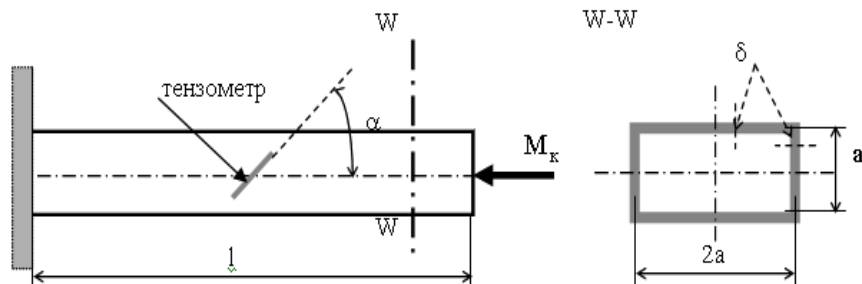


Рис. 328

- 461.** Тензометр, наклеєний на зовнішній поверхні тонкостінної (Рис. 329) труби, після її скручування показав деформацію $\varepsilon = -0,8 \cdot 10^{-3}$. Обчислити скручуючий момент і величину еквівалентних напружень згідно теорії $\tau_{\max}$. Дані: $\delta = 2$ мм; $a = 10 \delta$; $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,33$; $\alpha = 45^\circ$.

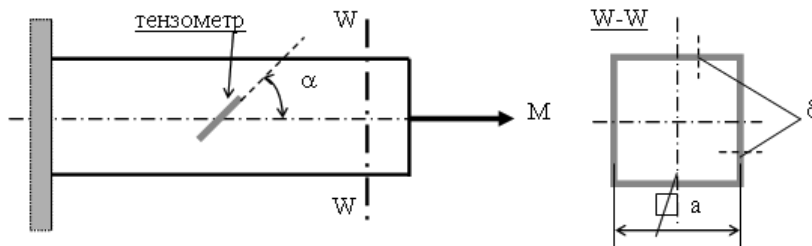


Рис. 329

Розв'язок

Плоский напружений стан в точці наклеювання тензометра є станом чистого зрізу. Цей стан на прямокутному елементі з двома паралельними гранями до осі стержня подано на Рис. 330а, а також він буде на елементі, повернутому відносно попереднього елементу на кут 45° (Рис. 330б).

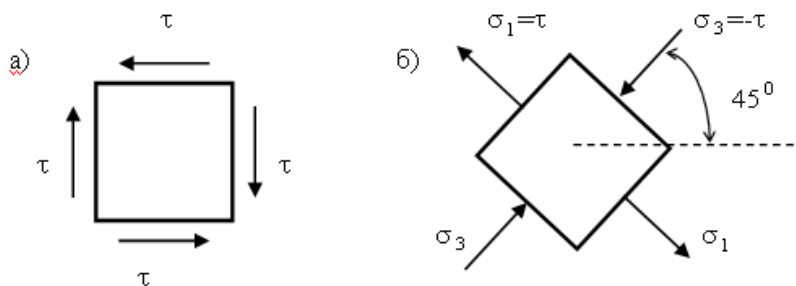


Рис. 330

Тензометр наклеєно вздовж лінії дії напружень σ_1 , а тому деформація вздовж цього напрямку згідно із законом Гука рівна:

$$\varepsilon_3 \equiv \varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1) = -(1 + \mu) \frac{\tau}{E}. \text{ Звідси дотичне напруження } \tau = -\frac{E\varepsilon}{1 + \mu}.$$

Також в даному випадку дотичне напруження можна виразити наступним чином:

$$\tau = \frac{M_k}{2F^*\delta}, \text{ де } F^* = 2a^2 = 100\delta^2. \text{ Прирівнюючи праві сторони цих виразів, отримано}$$

$$\text{вираз для крутного моменту: } M_k = -2F^*\delta \frac{E\varepsilon}{1 + \mu} = -200\delta^3 \frac{E\varepsilon}{1 + \mu}, \text{ а після підставлення}$$

$$\text{числових даних буде } M_k = -200 \cdot (0,2)^3 \frac{0,7 \cdot 10^4 (-0,8 \cdot 10^{-3})}{1 + 0,33} = 6,72 \text{ кНсм}.$$

Зведені напруження згідно теорії $\tau_{\max}$, описуються виразом:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau.$$

Після підставлення значень дотичних напружень отримано

$$\sigma_e = 2\tau = -\frac{2E\varepsilon}{1+\mu} = -\frac{2 \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot (-0,8 \cdot 10^{-3})}{1+0,33} = 84,2 \text{ МПа}.$$

- 462.** Тензометр, наклеєний на бічний тонкостінний стороні квадратної труби (Рис. 331), показав відносне видовження $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$. Обчислити величину крутного моменту, потенційну енергію пружної деформації, акумульовану в трубі, а також зведені напруження згідно теорії $\tau_{\max}$ і енергетичної теорії міцності. Дані: $\delta = 4 \text{ мм}$; $a = 25 \delta$; $l = 2 \text{ м}$; $\alpha = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,3$.

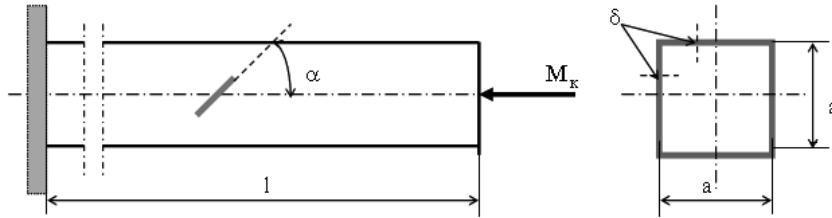


Рис. 331

- 463.** Розрахувати потенційну енергію пружної деформації, акумульовану в трубі довжиною 2 м, середнім діаметром 30 см і товщиною стінки 8 мм під дією моменту 50 кНм. $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

6.6. Статично невизначні задачі

- 464.** Двошаровий стержень, отриманий внаслідок запресування сталевго циліндра діаметром $d = 8 \text{ см}$ в мідну втулку із зовнішнім діаметром $D = 10 \text{ см}$, навантажено скручуючим моментом $M = 8 \text{ кНм}$. Розрахувати відносний кут закручування стержня, а також максимальні дотичні напруження в сталевому циліндрі і мідній втулці. $G_c = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $G_m = 3,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Розв'язок

Задача є один раз статично невизначною. Нехай M_c це момент, що переноситься сталевим циліндром, а M_m момент, що переноситься мідною втулкою. Отже, з рівняння статики

$$M = M_c + M_m.$$

Відносні кути закручування сталеві і мідної частини є такими ж. Звідси отримано залежність:

$$\frac{M_c}{G_c I_{oc}} = \frac{M_m}{G_m I_{om}}.$$

Розв'язуючи ці два рівняння, визначають моменти, що переносяться сталевим циліндром і мідною втулкою, які рівні

$$M_c = \frac{M}{1 + \frac{G_m I_{om}}{G_c I_{oc}}}; \quad M_m = \frac{M}{1 + \frac{G_c I_{oc}}{G_m I_{om}}}.$$

Відносний кут закручування стержня рівний відносному куту закручування циліндра або втулки і становить:

$$\theta = \frac{M_c}{G_c I_{oc}} = \frac{1}{1 + \frac{G_M I_{om}}{G_c I_{oc}}} \frac{M}{G_c I_{oc}}.$$

Максимальні дотичні напруження в сталевому циліндрі і мідній втулці становлять:

$$\tau_c = \frac{M_c}{W_{oc}} = \frac{M}{W_{oc} \left(1 + \frac{G_M I_{om}}{G_c I_{oc}} \right)};$$

$$\tau_M = \frac{M_M}{W_{om}} = \frac{M}{W_{om} \left(1 + \frac{G_c I_{oc}}{G_M I_{om}} \right)}.$$

Підставляючи у вищевказані рівняння числові дані, отримано, що

$$\frac{G_M}{G_c} = \frac{3,8}{8} = 0,475; \quad \frac{G_c}{G_M} = 2,1;$$

$$I_{oc} = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_{om} = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right];$$

$$\frac{I_{om}}{I_{oc}} = \left(\frac{D}{d} \right)^4 - 1 = \left(\frac{10}{8} \right)^4 - 1 = 2,44; \quad \frac{I_{oc}}{I_{om}} = 0,41;$$

$$W_{oc} = \frac{\pi d^3}{16}; \quad W_{om} = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

Підставляючи числові дані у вищеподані формули, отримано:

$$\theta = \frac{1}{1 + 0,475 \cdot 2,44} \frac{800}{8 \cdot 10^3 \frac{\pi(8)^4}{32}} = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = 2,1^\circ/\text{м};$$

$$\tau_c = \frac{800}{\frac{\pi(8)^3}{16} (1 + 0,475 \cdot 2,44)} = 3,69 \text{ кН/см}^2 = 36,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_M = \frac{800}{\frac{\pi(10)^3}{16} \left[1 - \left(\frac{8}{10} \right)^4 \right] (1 + 2,1 \cdot 0,41)} = 3,71 \text{ кН/см}^2 = 37,1 \text{ МПа}.$$

465. Сталевий вал і мідна втулка з'єднані як показано на Рис. 332, без початкових напружень. Обчислити коефіцієнт запасу міцності для втулки і осердя навантажених через жорстку плиту скручуючим моментом $M = 3 \text{ кНм}$ згідно теорії $\tau_{\max}$. Дані: $D = 65 \text{ мм}$; $d = 48 \text{ мм}$; $d_b = 40 \text{ мм}$; $\sigma_{T,c} = 210 \text{ МПа}$; $\sigma_{T,M} = 120 \text{ МПа}$; $G_c = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $G_M = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

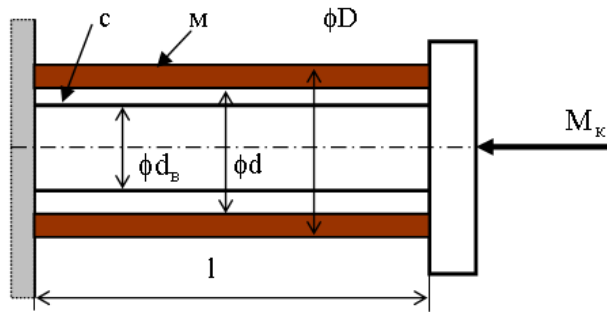


Рис. 332

466. Обчислити величину крутного моменту M_K , який поверне переріз стержня, у якому він діє (Рис. 333), на кут $\phi = 1^\circ$. Дані: $d = 4$ см; $l = 2,4$ м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

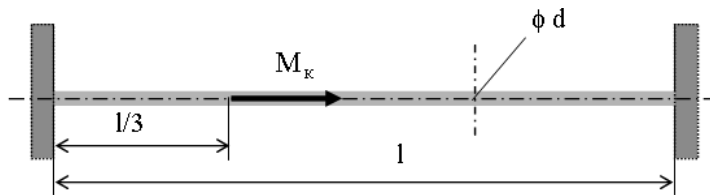


Рис. 333

467. Призматичний стержень, закріплений з обох сторін, навантажений скручуючим моментом $M = 8$ кНм (Рис. 334). Обчислити діаметр стержня, якщо $[\tau_{кр}] = 50$ МПа і $[\theta] = 0,25^\circ/\text{м}$. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

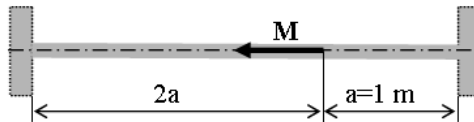


Рис. 334

468. Якою буде допустима величина моменту M , що скручує трубку, закріплену з обох сторін (Рис. 335)? Дані: $D = 6$ см; $d = 5$ см; $[\tau_{кр}] = 60$ МПа; $[\theta] = 0,3^\circ/\text{м}$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

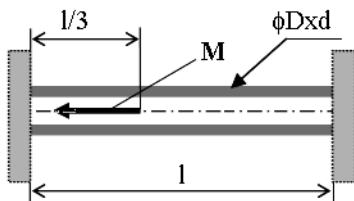


Рис. 335

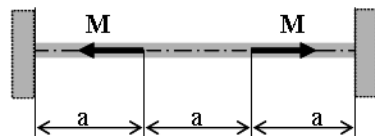


Рис. 336

469. Стержень кругового перерізу, жорстко закріплений з обох сторін, навантажено двома скручуючими моментами M як показано на Рис. 336. Обчислити діаметр стержня, якщо $[\tau_{кр}] = 60$ МПа.

470. Ступінчастий стержень закріплено з обох сторін і навантажено моментами M і $2M$ як показано на Рис. 337. Розрахувати допустиму величину M , якщо $[\tau_{кр}] = 60$ МПа. Дані: $D = 9$ см; $d = 6$ см.

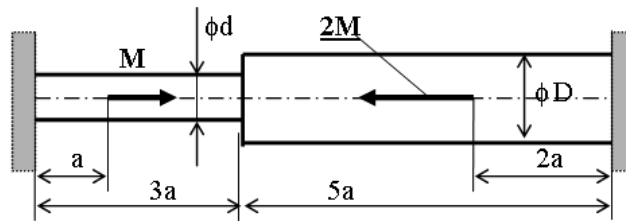


Рис. 337

471. Ступінчастий стержень закріплено з обох сторін і навантажено скручуючими моментами $M_1 = 5$ кНм і $M_2 = 20$ кНм як показано на Рис. 338. Побудувати епюри крутних моментів і кутів закручування перерізів. Дані: $d = 10$ см; $D = 2d$; $a = 40$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

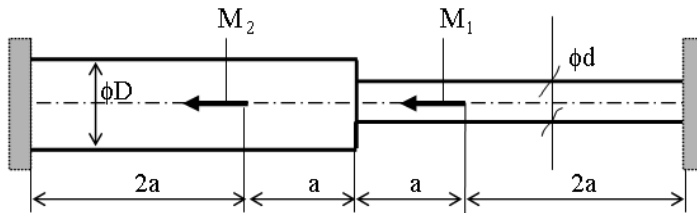


Рис. 338

472. На призматичний стержень діаметром d , закріплений з обох сторін, діє розподілений скручуючий момент m (Рис. 339). Побудувати епюри: крутних моментів, максимальних дотичних напружень і кутів закручування. Дані: $m = 0,8$ кНм/м; $d = 4$ см; $l = 2$ м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

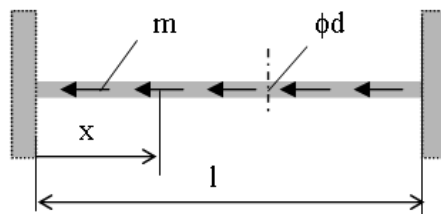


Рис. 339

473. Призматичний стержень діаметром d , що складається з трьох відрізків: мідного (1), дюралюмінієвого (2) і сталевго (3), закріплено з обох сторін і навантажено посередині розподіленим скручуючим моментом m як показано на Рис. 340. Побудувати епюру крутних моментів. Дані: $m = 2$ кНм/м; $D = 4$ см; $a = 80$ см; $G_1 = 3,3 \cdot 10^4$ МПа; $G_2 = 2,7 \cdot 10^4$ МПа; $G_3 = 8 \cdot 10^4$ МПа.

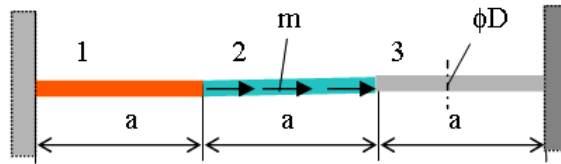


Рис. 340

6.7. Різні завдання

474. Стержень із зовнішнім діаметром D містить всередині сталеве (с) осердя діаметром d і насаджену на нього дюралеву (д) втулку. Якого діаметру повинно бути сталеве осердя, щоб 50% моменту, що скручує весь стержень, становив момент, що переноситься осердям? Дані: $D = 10$ см; $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_c = 0,3$; $E_d = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_d = 0,33$.

475. Рейка з поперечним перерізом, поданим на Рис. 341, скручується моментом $M = 2$ кНм. Розрахувати відносний кут закручування і максимальні дотичні напруження, а також вказати точки, в яких вони виникають. Дані: $b = 68$ мм; $h = 40$ мм; $\delta = 13$ мм; $s_1 = 116$ мм; $s_2 = 82$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

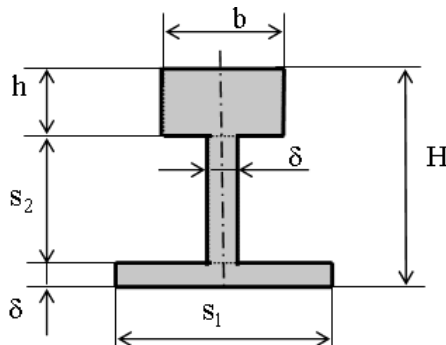


Рис. 341

476. Тонкостінний стержень з двоконтурним перерізом (Рис. 342) скручується моментом $M = 1,2$ кНм. Визначити закон зміни дотичних напружень в окремих частинах перерізу і обчислити їх значення. Дані: $\delta = 2$ мм; $a = 40$ δ; $b = 80$ δ; $h = 30$ δ.

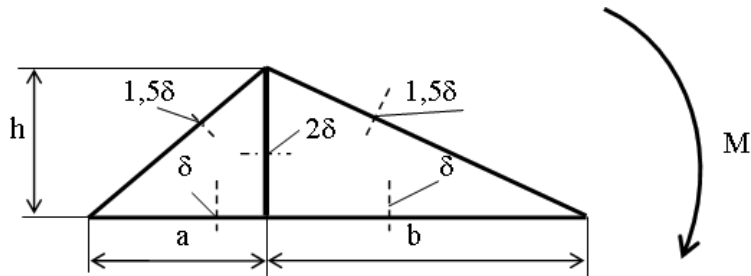


Рис. 342

477. Тонкостінний стержень з поперечним перерізом, показаним на Рис. 343, скручується моментом $M = 18$ кНм. Обчислити максимальні дотичні напруження і вказати точки, в яких вони виникають. Дані: $a = 30$ см; $\delta = 1$ мм.

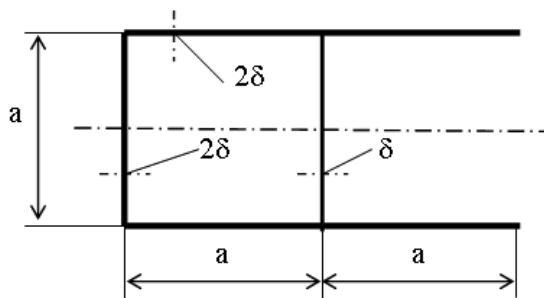


Рис. 343

Розділ 7

Згин

7.1. Статика зігнутих балок

1. Статика зігнутих балок охоплює задачі по визначенню реакцій опор та також внутрішніх сил в обраних перерізах балок.
2. Внутрішні сили визначають, застосовуючи метод уявних перерізів. Цей метод полягає в уявному перетині балки на певному відрізку, відкиданні однієї довільної частини балки і перенесенні всіх зовнішніх сил, що діють на відкинуту частину, до центру ваги частини балки, яка залишилася. Зведені у такий спосіб сили, як відомо рівні зведеним до центру ваги перерізу внутрішнім силам в перерізі, який залишився.
3. Для внутрішніх сил, які виникають у зігнутій балці, на Рис. 344 наведено правило знаків.

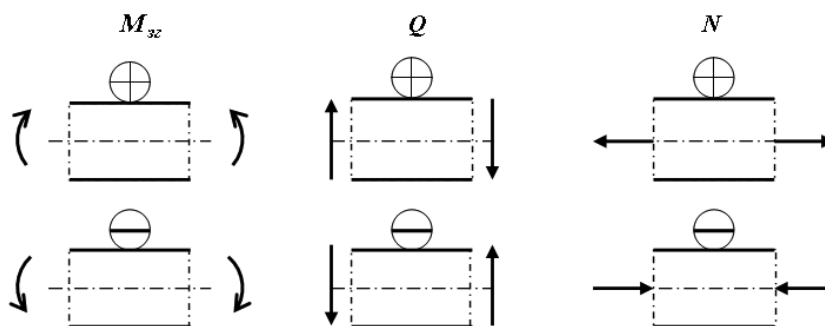


Рис. 344

4. Епюри згинальних моментів і поперечних сил можна виконати графічним методом із використанням силового многокутника. Координати многокутника вказують в певному масштабі величину згинальних моментів в довільному перерізі балки. Епюру поперечних сил отримують, проектуючи відповідно вершини силового многокутника на лінію дії сил. Графічний метод є доцільним для випадків, коли число діючих сил є значним. Практика показує, що похибка за цим методом максимального згинального моменту становить 1-2%.
- 478.** Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, показаної на Рис. 345. Дані: $P = 40$ кН; $l = 8$ м.

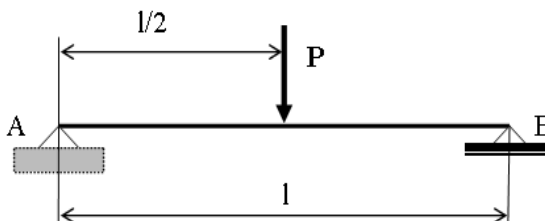


Рис. 345

Розв'язок

Реакції в опорах А і В є рівні і становлять $P/2$ (Рис. 346). Приймають початок координати x , що визначає положення перерізу балки в точці А, і її відлік проводять праворуч.

З рисунка видно, що наявні два проміжки зміни внутрішніх сил :

I: $0 \leq x \leq l/2$

$$M_{\text{зг}} = \frac{P}{2}x; \quad Q = \frac{P}{2}.$$

II: $l/2 \leq x \leq l$

$$M_{\text{зг}} = \frac{P}{2}x - P(x - l/2); \quad Q = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}.$$

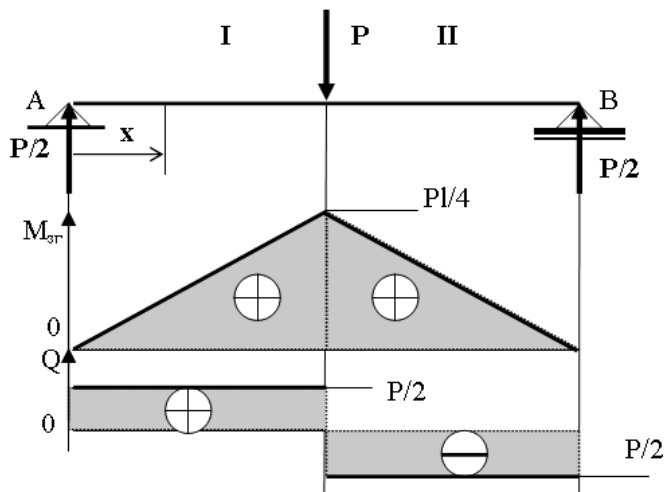


Рис. 346

Рівняння внутрішніх сил на проміжках I і II складено, відкидаючи в обох випадках ліву частину балки відносно уявного перерізу і приводячи зовнішні сили з відкинутих частин до правого перерізу зі збереженням умови щодо знаків сил.

Епюри згинальних моментів і поперечних сил показано на Рис. 346.

Максимальний згинальний момент рівний $\frac{Pl}{4} = \frac{40 \cdot 8}{4} = 80 \text{ кНм}$, а максимальна

поперечна сила $\frac{P}{2} = 20 \text{ кН}$.

Потрібно звернути увагу на той факт, що у місці прикладання сили P , тобто на границі проміжків I і II величина поперечної сили на епюрах при переході з одного проміжку до другого, змінюється на величину P .

479. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, показаної на Рис. 347. Дані: $P = 30 \text{ кН}$; $l = 6 \text{ м}$.

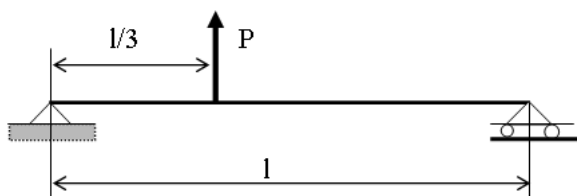


Рис. 347

480. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, показаної на Рис. 348. Дані: $P = 8 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $a = l/4$.

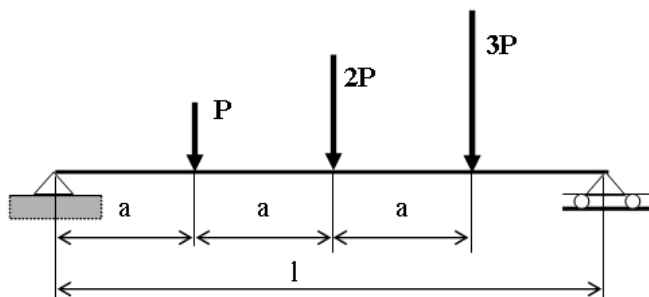


Рис. 348

481. Побудувати епюри внутрішніх сил для консольної балки, навантаженої на кінці силою P (Рис. 349). Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$.

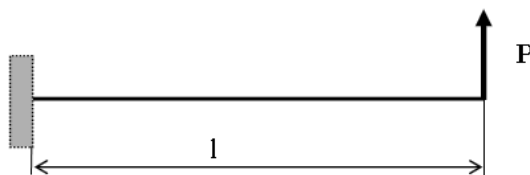


Рис. 349

Розв'язок

Тут буде один проміжок зміни внутрішніх сил. Відкидаючи праву частину балки від уявного перерізу на віддалі x від стіни (Рис. 350), отримано наступні вирази для внутрішніх сил: $M_{\text{зг}} = P(l - x)$; $Q = -P/2$.

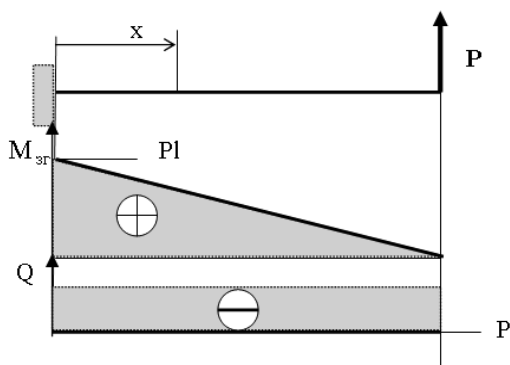


Рис. 350

- 482.** До консольної балки прикладено систему зосереджених сил (Рис. 351). Виконати методом суперпозиції епюри згинальних моментів і поперечних сил. Дані: $P = 240 \text{ кН}$; $a = 2 \text{ м}$.

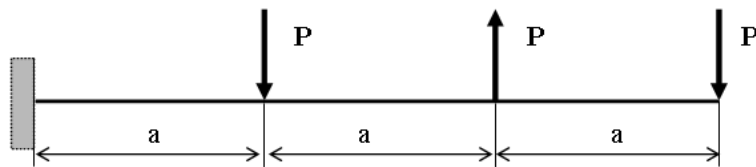


Рис. 351

- 483.** Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки на двох опорах і навантаженої посередині зосередженим моментом M (Рис. 352). Дані: $M = 8 \text{ кНм}$; $l = 4 \text{ м}$.

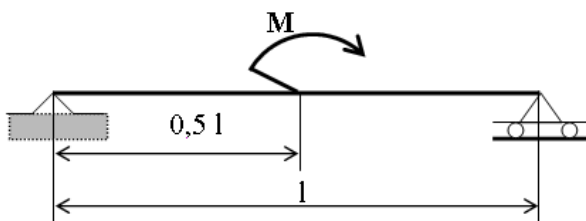


Рис. 352

Розв'язок

Реакції опор рівні M/l і скеровані як показано на Рис. 353. Рівняння внутрішніх сил наступні:

- проміжок $0 \leq x \leq l/2$ (відкидається ліва частина): $M_{\text{зг}} = -\frac{M}{l}x$; $Q = -\frac{M}{l}$;
- проміжок $0 \leq x \leq l/2$ (відкидається права частина): $M_{\text{зг}} = \frac{M}{l}(1-x)$; $Q = -\frac{M}{l}$.

Епюри внутрішніх сил і їх екстремальні значення подано на Рис. 353. Потрібно звернути увагу на той факт, що згинальний момент в місці дії зосередженого моменту M змінюється на епюрі при переході з одного проміжку до другого на величину M .

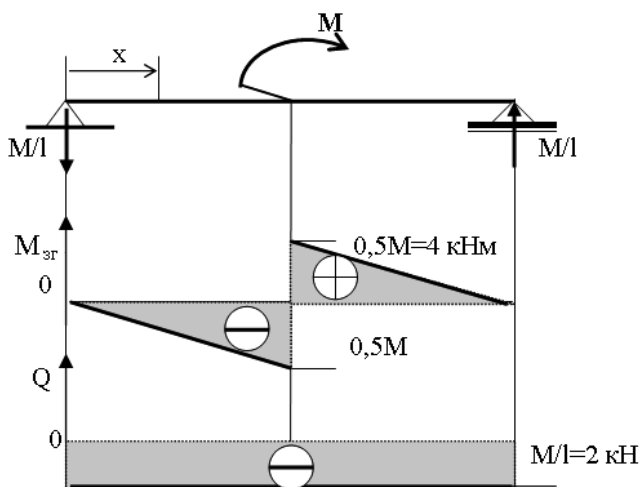


Рис. 353

- 484.** Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, навантаженої зосередженими моментами як показано на Рис. 354. Дані: $M_A = 2 \text{ кНм}$; $M_B = 6 \text{ кНм}$; $l = 9 \text{ м}$.

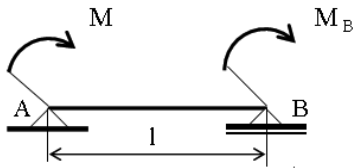


Рис. 354

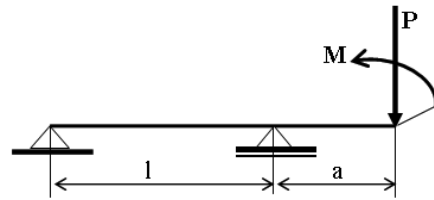


Рис. 355

- 485.** Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, навантаженої як показано на Рис. 355. Дані: $P = 8 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $a = l/2$; $M = Pa/2$.

- 486.** Сила P і зосереджений момент M діють на балку як показано на Рис. 356. Побудувати епюри внутрішніх сил. Дані: $P = 2 \text{ кН}$; $a = 6 \text{ м}$; $M = 2Pa$.

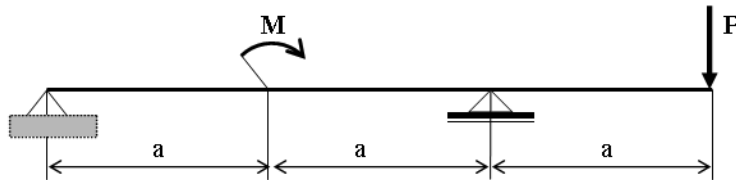


Рис. 356

- 487.** Балка навантажена зосередженим моментом M як показано на Рис. 357. На якій віддалі x_0 від лівої опори потрібно прикласти силу $P = 4 \frac{M}{l}$, щоб згинальний момент посередині балки був рівний нулю? Дані: $l = 9 \text{ м}$.

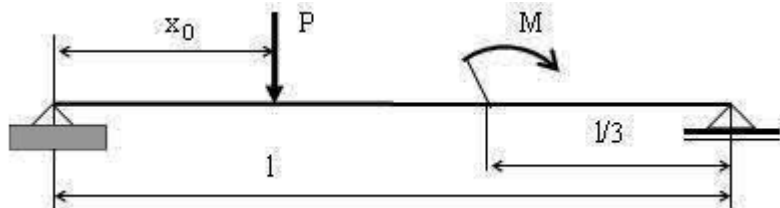


Рис. 357

- 488.** Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, показаної на Рис. 358. Дані: $P = 5 \text{ кН}$; $a = 1 \text{ м}$; $M = Pa$.

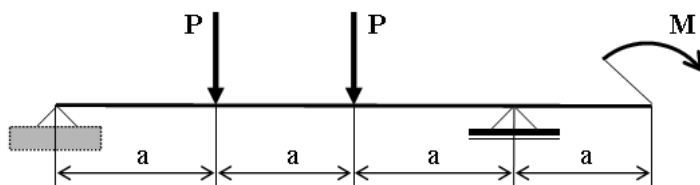


Рис. 358

489. Побудувати епюри внутрішніх сил для стержневої системи, показаної на Рис. 359. Дані: $P = 20 \text{ кН}$; $a = 4 \text{ м}$.

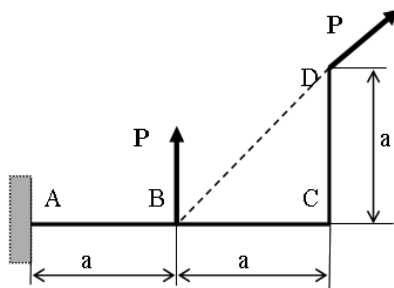


Рис. 359

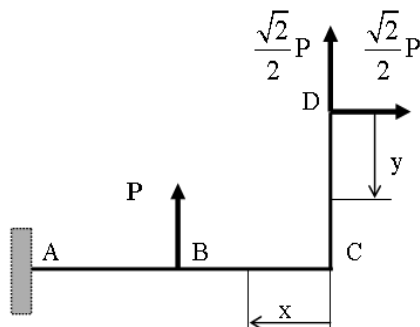


Рис. 360

Розв'язок

Силу P , що діє в точці D , розкладають для полегшення обчислень на дві складові - вертикальну і горизонтальну, що рівні $P\sqrt{2}/2$ (Рис. 360). На цьому рисунку відмічені також координати y і x , що визначають положення перерізу.

Складаючи рівняння внутрішніх сил, відкидають вільний кінець, оскільки зовнішні сили, що діють на цю частину, відомі.

$$\text{Відрізок DC : } M_{\text{зг}} = -P \frac{\sqrt{2}}{2} y; \quad Q = P \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad N = P \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Відрізок CB : } M_{\text{зг}} = -P \frac{\sqrt{2}}{2} a + P \frac{\sqrt{2}}{2} x; \quad Q = -P \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad N = P \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Відрізок BA : } M_{\text{зг}} = P(x - a) + \frac{\sqrt{2}}{2} P(x - a) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} P(x - a);$$

$$Q = -P \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad N = P \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Діаграми згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил подано на Рис. 361.

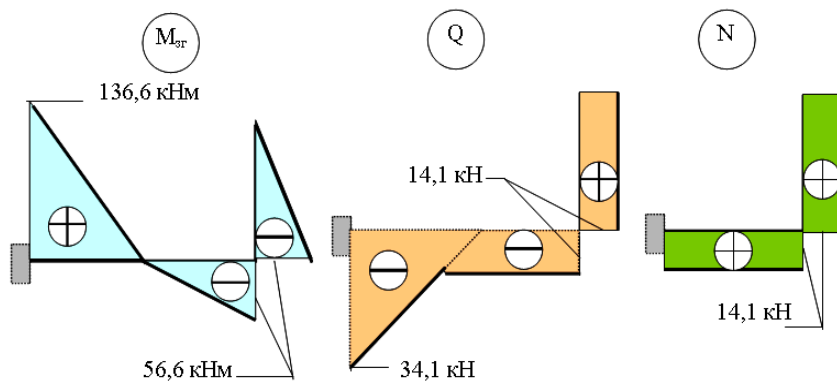


Рис. 361

490. Застосовуючи графічний метод, побудувати діаграми згинальних моментів і поперечних сил для балки на двох опорах, навантаженої як показано на Рис. 362. Дані: $P = 4 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$.

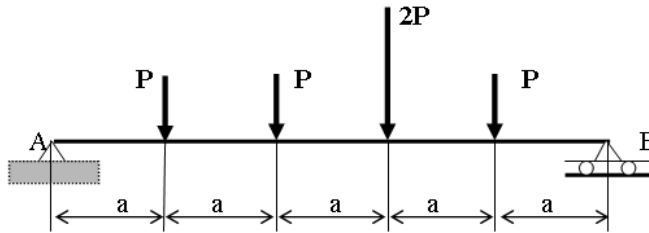


Рис. 362

Розв'язок

Силувий багатокутник в прийнятому масштабі сил зображено на Рис. 363б, а відповідний йому силувий багатокутник в масштабі довжини балки – на Рис. 363в. Результуючий промінь z визначає величини реакції опор R_A і R_B .

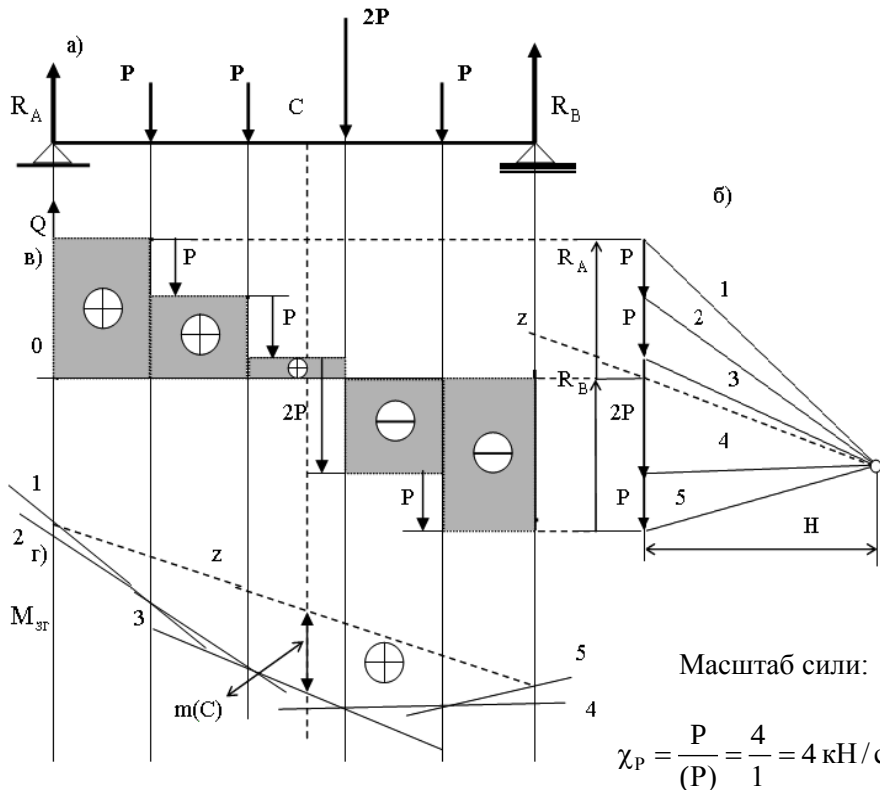


Рис. 363

З даних на діаграмах (Рис. 363) визначають значення поперечних сил і згинальних моментів :

$$Q = (Q)\chi_P ;$$

$$M_{зг} = m \cdot H = (m)\chi_m \cdot (H)\chi_P = \chi_m \chi_P (H) \cdot (m) = k \cdot (m) ;$$

де: $(Q), (m), (H)$ – рисункові величини поперечної сили, згинального моменту і полюсної відстані H ;

χ_P – масштаб сили, становить 4 кН/см;

χ_m – масштаб довжини, становить 62,5 см/см;

$k = \chi_m \chi_P (H)$ – стала величина для рисунка, $k = 62,5 \cdot 4 \cdot 4 = 1000$ кН.

Обчислимо, наприклад, значення поперечної сили і згинального моменту для перерізу С балки (Рис. 363) :

$$Q_C = 0,4 \cdot 4 = 1,6 \text{ кН};$$

$$M_{згC} = 1000 \cdot 1,9 = 1900 \text{ кНсм}.$$

491. Застосовуючи графічний метод, побудувати діаграму згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 364. Дані: $P = 60$ кН; $a = 1$ м.

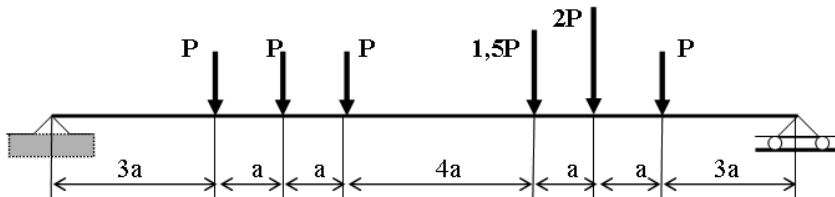


Рис. 364

492. Визначити графічно зміну згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 365. Дані: $P = 12$ кН; $a = 3$ м.

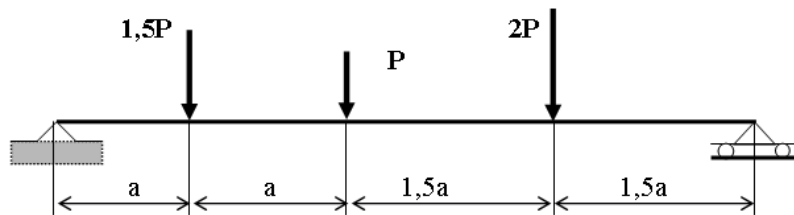


Рис. 365

493. Консольна балка навантажена як показано на Рис. 366. Побудувати графічно діаграму згинальних моментів у балці. Дані: $P = 48$ кН; $a = 2,4$ м.

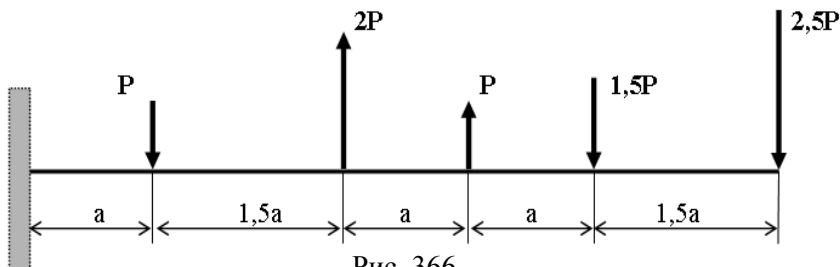


Рис. 366

494. Застосовуючи графічний метод, побудувати діаграму згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 367. Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 9 \text{ м}$; $a = 1 \text{ м}$.

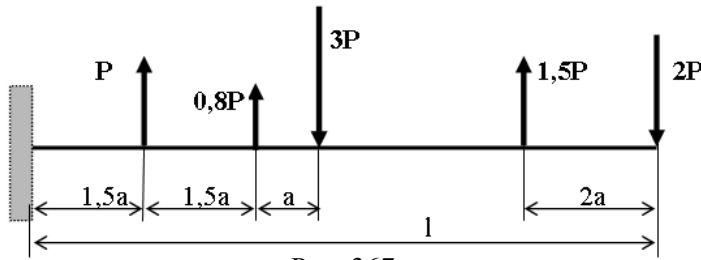


Рис. 367

495. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для консольної балки, навантаженої як показано на Рис. 368.

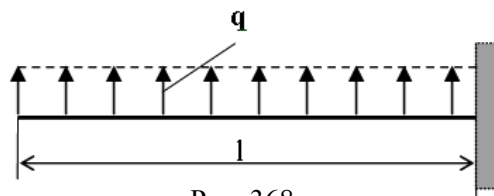


Рис. 368

Розв'язок

Тут є один проміжок зміни внутрішніх сил (Рис. 369). Скеровуючи координату x положення уявного перерізу від вільного кінця балки праворуч (Рис. 369), а також відкидаючи ліву частину балки і звівши сили з відкинутої частини, отримано:

$$M_{\text{зг}} = qx \cdot \frac{x}{2} = q \frac{x^2}{2}; \quad Q = qx.$$

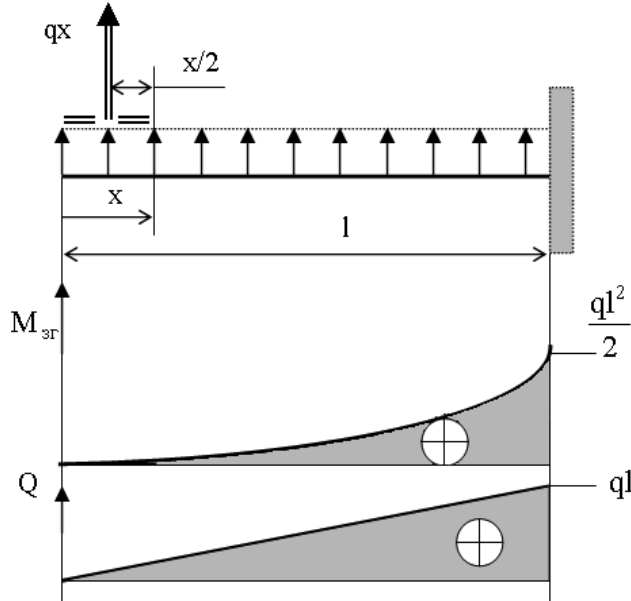


Рис. 369

496. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, навантаженої як показано на Рис. 370. Дані: $q = 32 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $M = ql^2/16$.

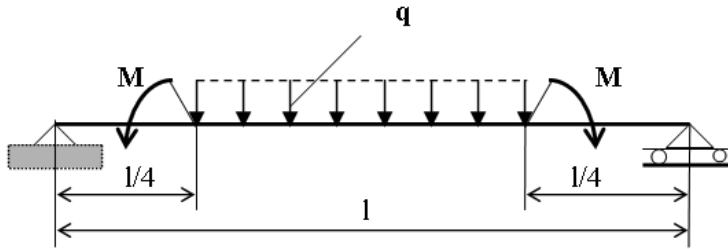


Рис. 370

497. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, показаної на Рис. 371. Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $P = qa$; $M = 2qa^2$.

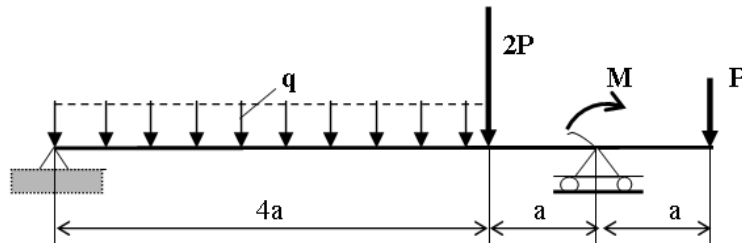


Рис. 371

498. Розподілене навантаження q , що діє на ділянці $l/2$, переміщено з положення (а) у положення (б) (Рис. 372). Встановити як зміниться і у скільки разів екстремальне значення згинального моменту?

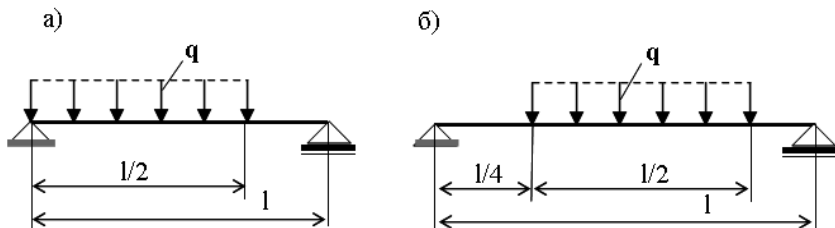


Рис. 372

499. Знайти такі значення сили P (Рис. 373), щоб згинальний момент посередині балки був рівний нулю. Побудувати для такого випадку епюри згинальних моментів і поперечних сил. Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$.

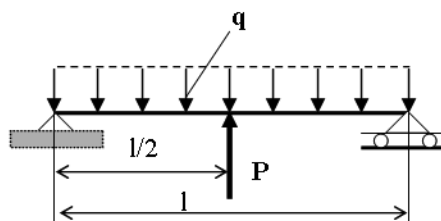


Рис. 373

500. Для балки на двох опорах, навантаженої як показано на Рис. 374, побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил, а також визначити їх екстремальні значення. Дані: $q = 60 \text{ кН/м}$; $a = 2 \text{ м}$; $P = qa$.

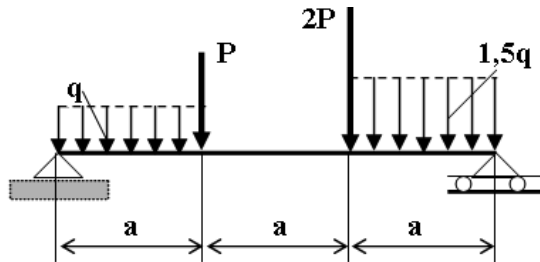


Рис. 374

501. Для балки, показаної на Рис. 375, побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил, а також обчислити їх екстремальні значення. Дані: $q = 8 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $P = ql/4$.

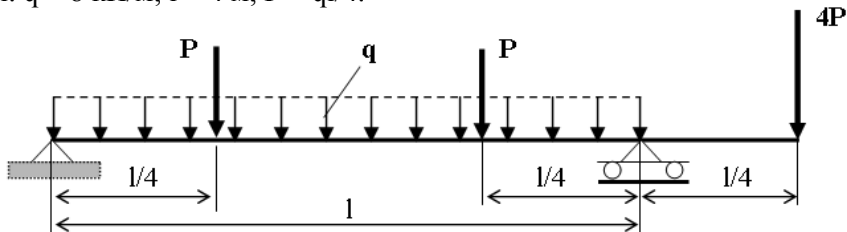


Рис. 375

502. Побудувати епюри внутрішніх сил для балки, навантаженої як показано на Рис. 376. Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $P = ql/2$; $M = ql^2/8$.

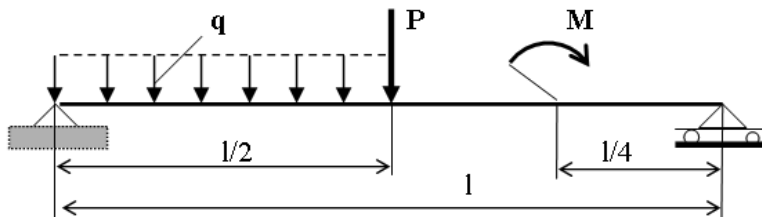


Рис. 376

503. Як зміниться екстремальний згинальний момент у балці, показаній на Рис. 377, якщо опори А і В перемістити відповідно у положення С і D?

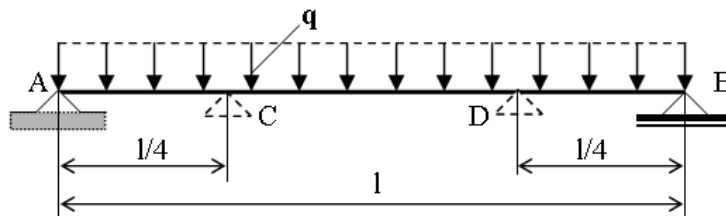


Рис. 377

504. Обчислити екстремальну величину згинального моменту в балці, навантаженій як показано на Рис. 378. Дані: $q = 30 \text{ кН/м}$; $P = 4qa$.

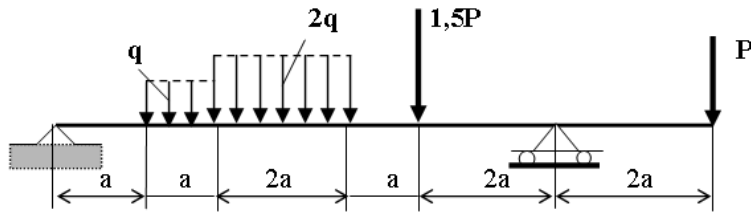


Рис. 378

505. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, показаної на Рис. 379. Дані: $q = 100 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $P = 2qa$.

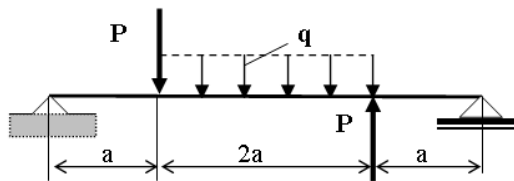


Рис. 379

506. Для балки, навантаженої як показано на Рис. 380, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів. Вказати перерізи, у яких згинальний момент досягає екстремального значення і у якому дорівнює нулю.

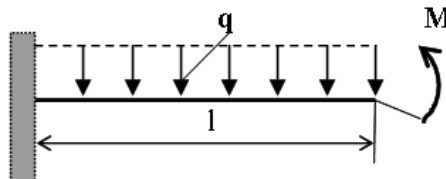


Рис. 380

507. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, навантаженої як показано на Рис. 381. Дані: $q = 24 \text{ кН/м}$; $l = 12 \text{ м}$; $M = ql^2/2$.

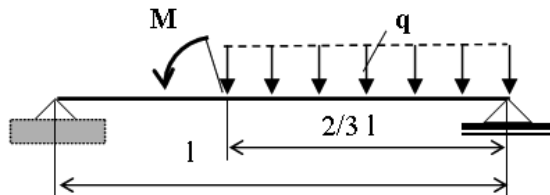


Рис. 381

508. Обчислити екстремальні значення згинального моменту для балки (Рис. 382). Дані: $q = 16 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $M_A = ql^2/16$; $M_B = ql^2/8$.

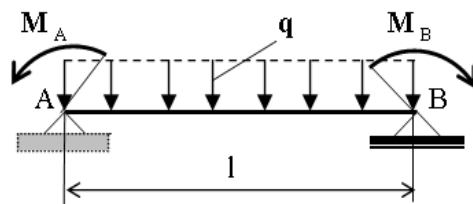


Рис. 382

509. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, (Рис. 383). Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $P = ql/2$; $M = ql^2/4$.

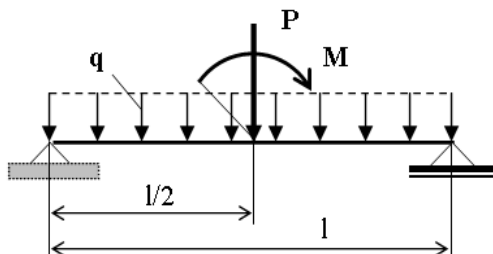


Рис. 383

510. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 384. Дані: $q = 4 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $P = qa$; $M = qa^2$.

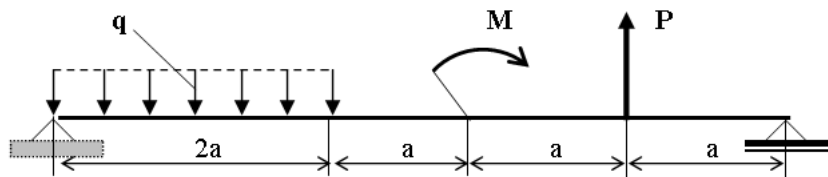


Рис. 384

511. Обчислити екстремальні значення згинальних моментів і поперечних сил для балки на двох опорах, навантаженої як показано на Рис. 385.

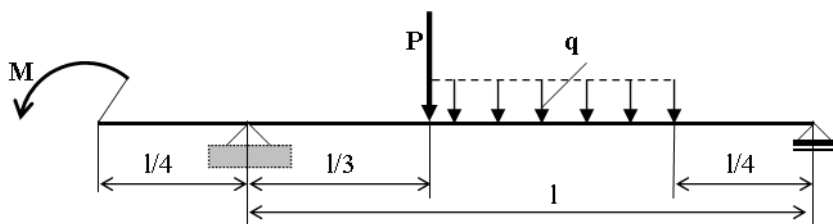


Рис. 385

512. На консольну балку діють розподілені навантаження як показано на Рис. 386. Побудувати епюри внутрішніх сил і обчислити їх екстремальні значення. Дані: $q = 12 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$.

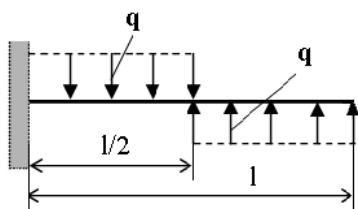


Рис. 386

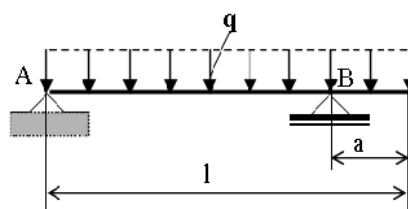


Рис. 387

513. Покладаючи, що опора В балки, показаної на Рис. 387, є рухомою, обчислити відстань a опори В від вільного кінця балки, для якої екстремальний згинальний момент є найменшим. Дані: $l = 10$ м.

514. Для балки, показаної на Рис. 388, побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил. Розрахувати екстремальні величини. Дані: $q = 80$ кН/м; $l = 16$ м.

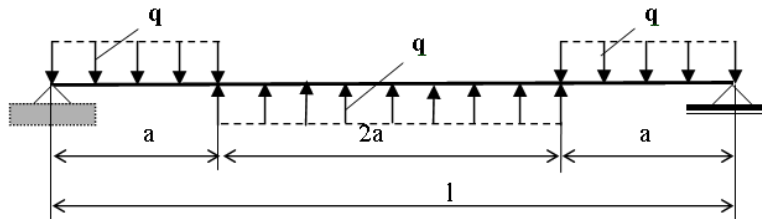


Рис. 388

515. Побудувати епюри внутрішніх сил для стержнів АВ і ВС, навантажених як показано на Рис. 389. Дані: $q = 36$ кН/м; $l = 6$ м; $P = ql/2$; $\alpha = 45^\circ$.

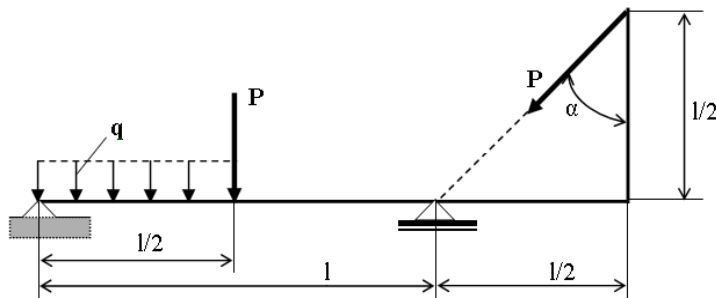


Рис. 389

516. Як зміняться екстремальні значення згинальних моментів і поперечних сил, якщо розподілене навантаження величиною q переміститься з положення, показаного на Рис. 390а, у положення, показане на Рис. 390б?

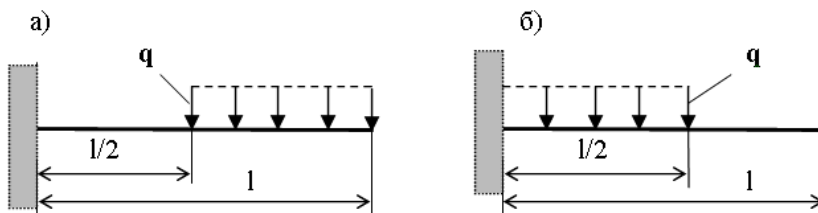


Рис. 390

517. Застосовуючи графічний метод, побудувати діаграму згинальних моментів для балки, зображеної на Рис. 391. Дані: $q = 16$ кН/м; $l = 12$ м; $P = ql/2$.

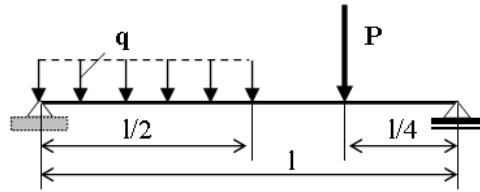


Рис. 391

Розв'язок

Розподілене навантаження балки, поділяють на декілька частин, замінюючи його зосередженими силами. Подальший хід розв'язку при застосуванні графічного методу для побудови діаграми згинальних моментів ідентичний тому, який подано раніше. Достовірність результатів є тим більшою, чим більшим є число частин, на які поділено розподілене навантаження. В даному випадку розподілене навантаження поділяють на три частини (Рис. 392а).

На Рис. 392б зображений багатокутник зовнішніх сил, що діють на балку, а на Рис. 392в – силовий багатокутник, тобто у визначеному масштабі епюра згинальних моментів.

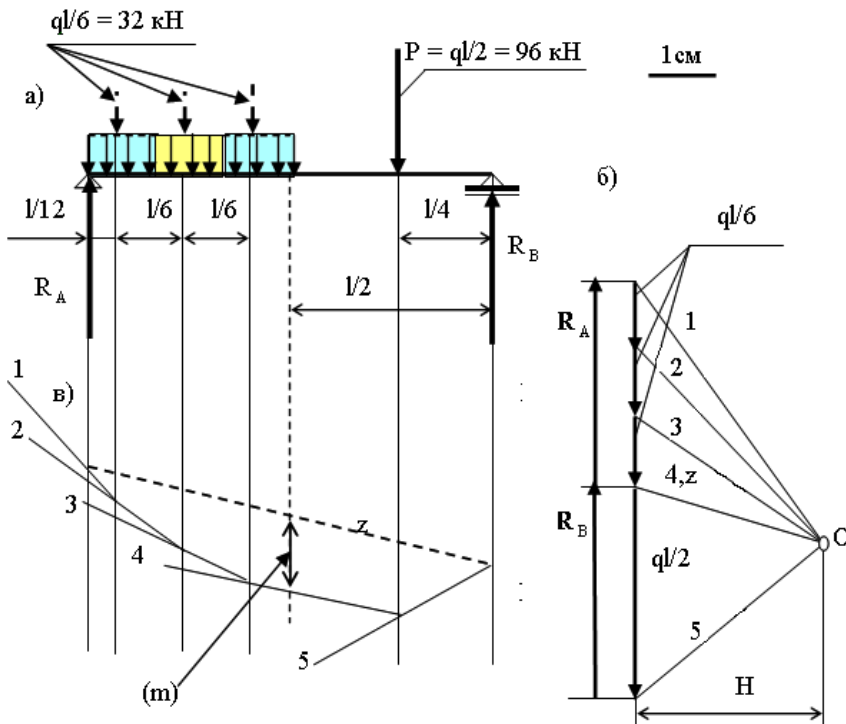


Рис. 392

З діаграми масштаб сил $\chi_P = 32 \text{ кН/1 см} = 32 \text{ кН/см}$; масштаб довжини $\chi_M = 12 \text{ м/6 см} = 2000 \text{ см/см}$; прийнята полюсна відстань (H) = 4 см. Звідси величина k , на яку потрібно множити кожен координату силового багатокутника (m), щоб

отримати дійсну величину згинального моменту. В даному випадку буде:
 $k = \chi_P \chi_m \cdot (H) = 256 \cdot 10^3 \text{ кН}$.

Наприклад, на половині довжини балки на рисунку (m) = 1,1 см, отже
 $M_{зг} = k(m) = 281,6 \cdot 10^3 \text{ кНсм}$.

Отримана величина, як легко перевірити, близька до величини, отриманої аналітичним способом, яка рівна $288 \cdot 10^3 \text{ кНсм}$.

- 518.** Застосовуючи графічний метод, побудувати діаграму згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 393. Дані: $q = 80 \text{ кН/м}$; $a = 4 \text{ м}$; $P = qa$.

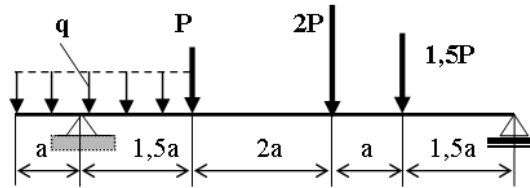


Рис. 393

- 519.** Балка АВ шарнірно закріплена до стіни і підперта стержнем CD (Рис. 394). Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, що знаходиться під дією розподіленого навантаження інтенсивністю q . Дані: $q = 200 \text{ кН/м}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 3/2a$.

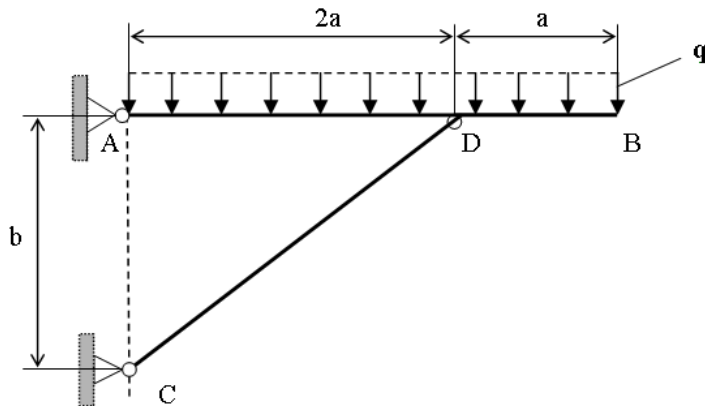


Рис. 394

- 520.** Застосовуючи принцип суперпозиції, побудувати епюри згинальних моментів для балок, показаних на Рис. 395. Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $P = 80 \text{ кН}$; $l = 10 \text{ м}$.

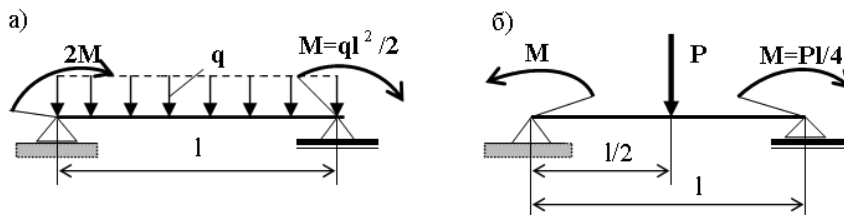


Рис. 395

521. Використовуючи принцип суперпозиції, побудувати епюри згинальних моментів для балок, показаних на Рис. 396. Дані: $M = 2 \text{ кНм}$; $l = 6 \text{ м}$.

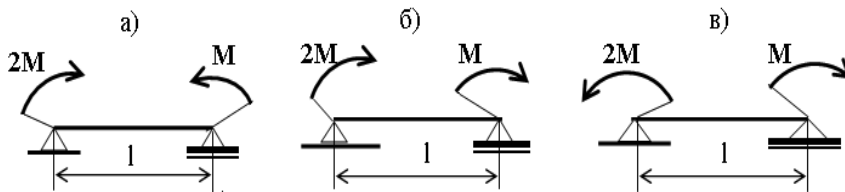


Рис. 396

522. Для показаних на Рис. 397 розподілів поперечних сил у балках побудувати епюри згинальних моментів, що їм відповідають.

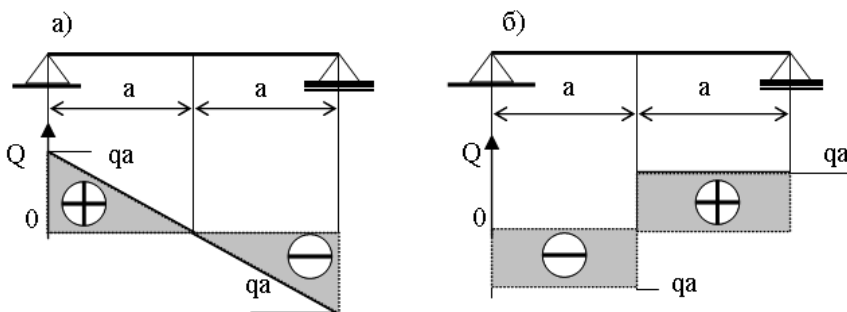


Рис. 397

523. Для поданого на Рис. 398 розподілу поперечних сил у балці побудувати епюру згинальних моментів, що йому відповідає.

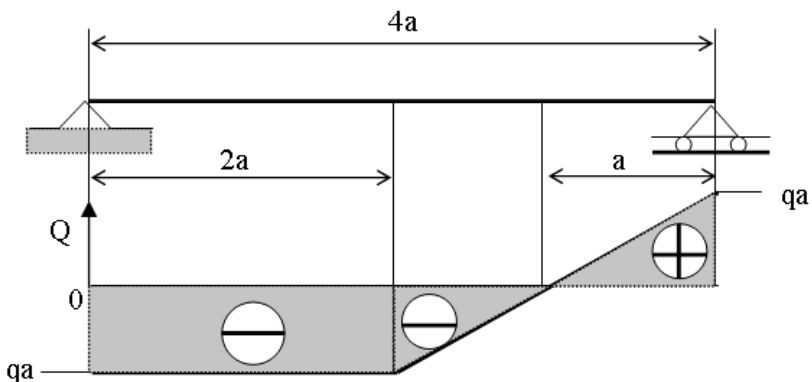


Рис. 398

524. Подано епюру поперечних сил в консольній балці (Рис. 399). Визначити навантаження балки при умові, що не діють зосереджені моменти. Побудувати для цього навантаження епюру згинальних моментів.

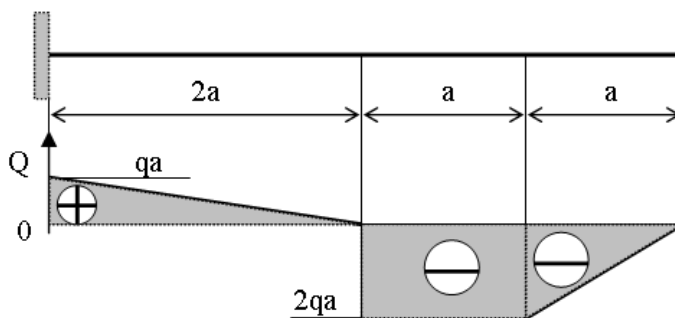


Рис. 399

525. Застосовуючи графічний метод, побудувати епюру згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 400. Дані: $q = 12 \text{ кН/м}$; $l = 9 \text{ м}$.

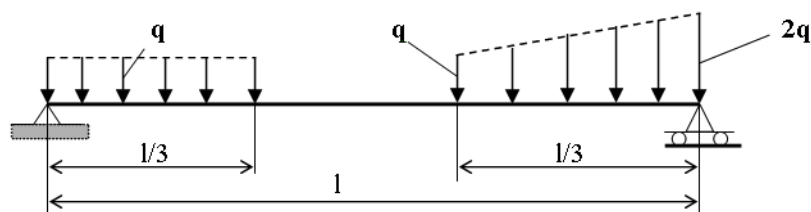


Рис. 400

526. Обчислити екстремальні значення згинального моменту і поперечної сили для балки, навантаженої як показано на Рис. 401. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$.

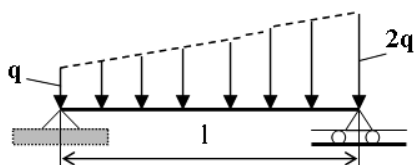


Рис. 401

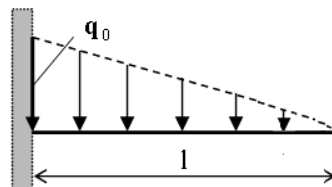


Рис. 402

527. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для балки, показаної на Рис. 402. Дані: $q_0 = 4 \text{ кН/м}$; $l = 5 \text{ м}$.

528. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для консольної балки, навантаженої як показано на Рис. 403. Дані: $q_0 = 40 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$.

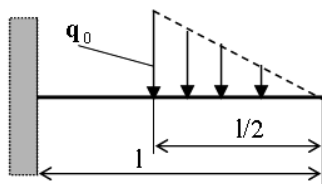


Рис. 403

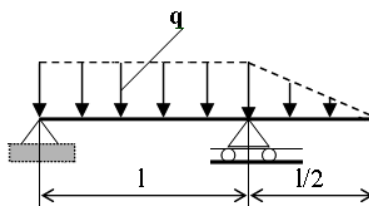


Рис. 404

529. Розрахувати реакції опор і побудувати епюри внутрішніх сил для балки, показаної на Рис. 404. Дані: $q = 18 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$.

530. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 405, і обчислити екстремальні значення. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$.

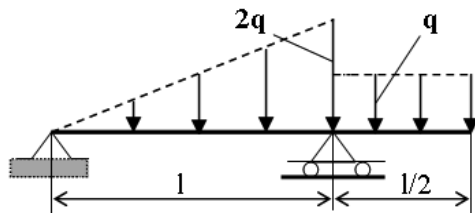


Рис. 405

531. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на Рис. 406. Дані: $q = 48 \text{ кН/м}$; $a = 4 \text{ м}$.

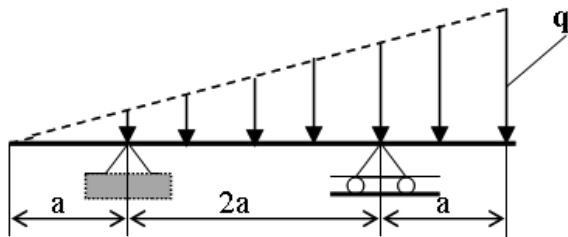


Рис. 406

532. Обчислити максимальне значення згинального моменту для балки, показаної на Рис. 407. Дані: $q = 30 \text{ кН/м}$; $l = 12 \text{ м}$.

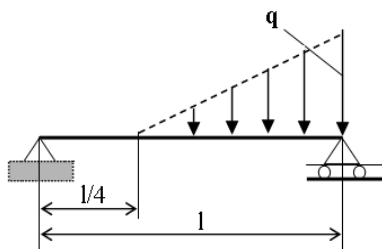


Рис. 407

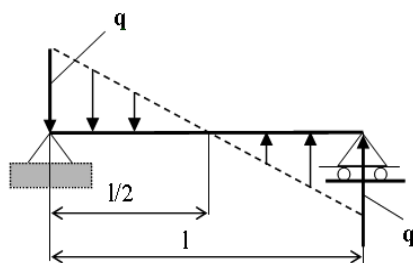


Рис. 408

533. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, навантаженої як показано на Рис. 408. Дані: $q = 90 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$.

534. На консольну балку, показану на Рис. 409, діє розподілене навантаження змінної інтенсивності, що описується рівнянням $q(x) = q_0 \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2$.

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів у цій балці, а також обчислити їх екстремальні значення. Дані: $q_0 = 40 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$.

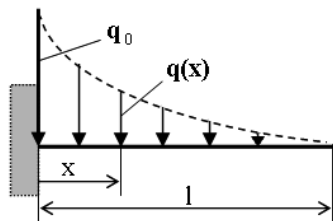


Рис. 409

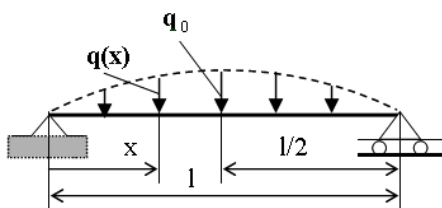


Рис. 410

535. На балку діє розподілене навантаження, зміна якого описується параболою $q_0 \frac{x}{1} \left(1 - \frac{x}{1}\right)$ як показано на Рис. 410. Побудувати для цієї балки епюри поперечних сил і згинальних моментів, а також обчислити екстремальні значення. Дані: $q_0 = 32 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$.

536. Розподілене навантаження змінної інтенсивності, що описується рівнянням $q(x) = \left(\frac{x}{1}\right)^2$, діє на балку як показано на Рис. 411. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для цієї балки. Дані: $q_0 = 48 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$.

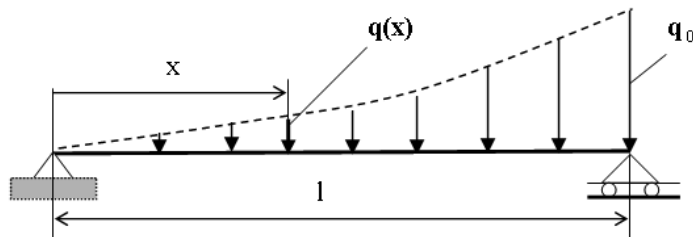


Рис. 411

537. Балка із шарніром С навантажена зосередженим моментом M , як показано на Рис. 412. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки АСВ. Дані: $M = 16 \text{ кНм}$; $l = 4 \text{ м}$.

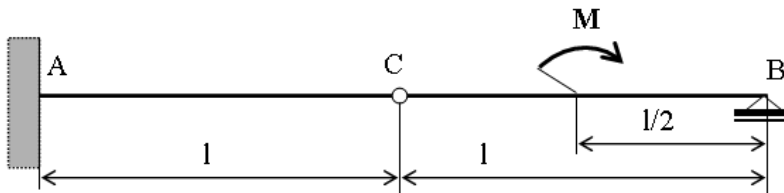


Рис. 412

538. У якому положенні x візка, що пересувається по балці АВ із шарніром С (Рис. 413), виникне найбільший за величиною згинальний момент? Побудувати для цього положення візка епюри поперечних сил і згинальних моментів у балці АВ. Дані: $P = 20 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $a = l/2$.

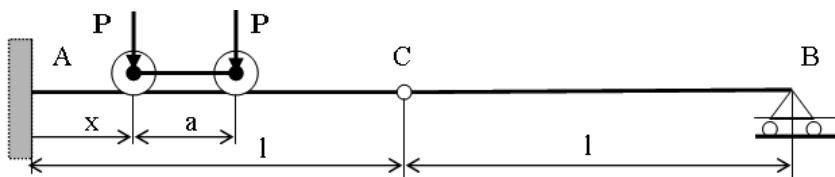


Рис. 413

539. Для якого положення x_c шарніра С екстремальний згинальний момент у балці АВ, показаній на Рис. 414, буде найменший? Дані: $l = 8$ м.

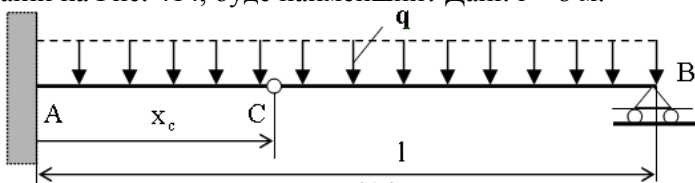


Рис. 414

540. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки із шарніром, показаній на Рис. 415. Дані: $q = 120$ кН/м; $l = 2$ м.

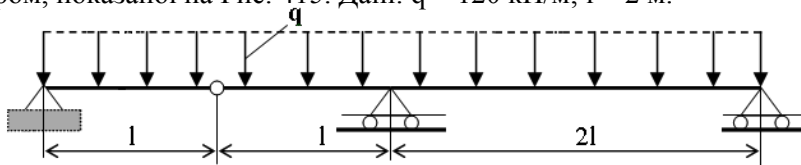


Рис. 415

541. Визначити реакції опор, а також побудувати епюри внутрішніх сил для балки, показаній на Рис. 416. Дані: $q = 24$ кН/м; $l = 4$ м.

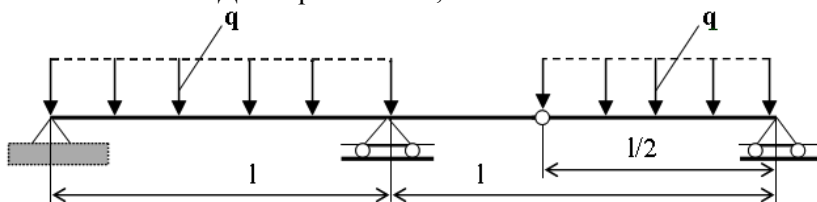


Рис. 416

542. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для закріпленої і навантаженої балки із шарніром (Рис. 417). Дані: $q = 80$ кН/м; $l = 2$ м; $M = ql^2/2$.

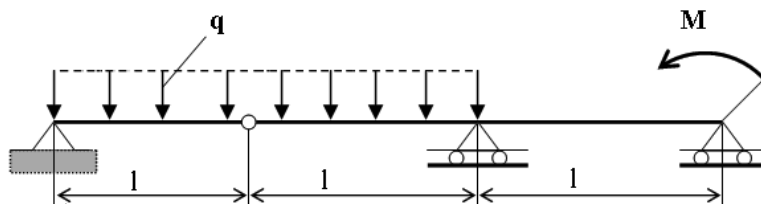


Рис. 417

543. Визначити реакції опор і реакцію в точці D, а також побудувати епюри внутрішніх сил для балки, показаній на Рис. 418. Дані: $q = 8$ кН/м; $a = 2$ м; $P = qa$.

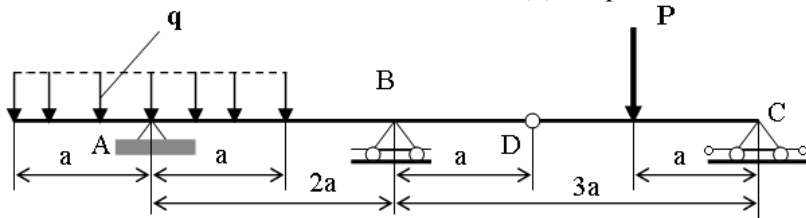


Рис. 418

7.2. Геометричні характеристики перерізів стержнів при згині

1. З посеред геометричних характеристик плоских фігур, що є поперечними перерізами балок, які найчастіше зустрічаються у задачах на згин, належать осьові моменти і відцентрові моменти інерції, площа перерізу, статичні моменти перерізу відносно осей і інші.
2. Схеми для запису моментів інерції відносно осі x і y та відцентрового моменту подана на Рис. 419.

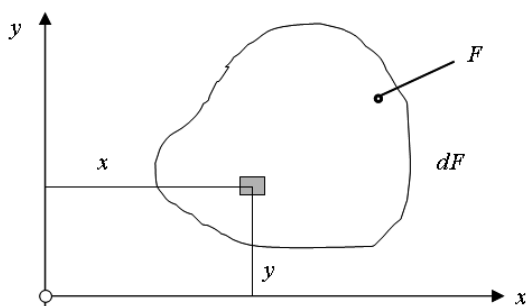


Рис. 419

$$I_x = \int_F y^2 dF \text{ — момент інерції перерізу } F \text{ відносно осі } x;$$

$$I_y = \int_F x^2 dF \text{ — момент інерції перерізу } F \text{ відносно осі } y;$$

$$I_{xy} = \int_F xy dF \text{ — відцентрований момент інерції перерізу } F \text{ відносно осей } x \text{ і } y.$$

3. Момент інерції перерізу F відносно осі x , паралельної до осі x_c , яка проходить через центр його ваги і віддаленої від неї на відстань a (Рис. 420), рівний (твердження Штейнера) :

$$I_x = I_{x_c} + a^2 F.$$

Відповідно відцентровий момент:

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + abF.$$

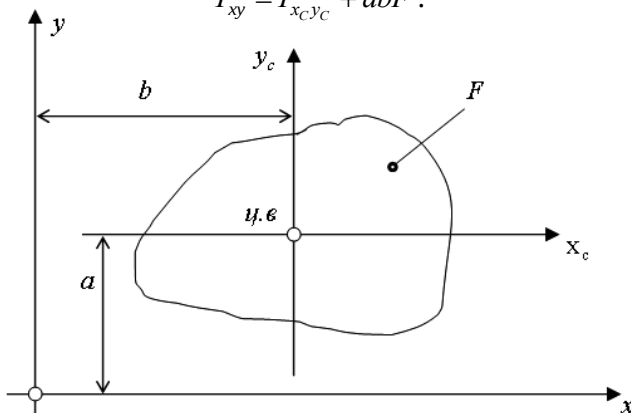


Рис. 420

4. Якщо відомо моменти інерції I_x , I_y і I_{xy} перерізу у прямокутній системі координат xu , то моменти інерції перерізу у прямокутній системі координат uv , повернутій на кут α (Рис. 421), будуть рівні:

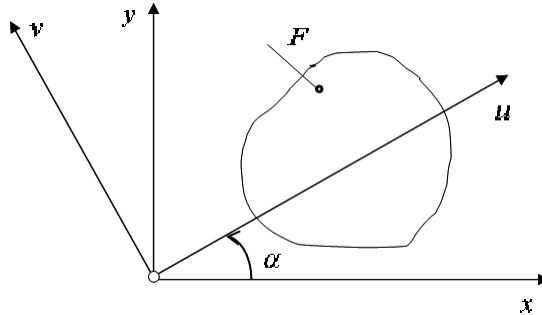


Рис. 421

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha ,$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha ,$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha .$$

Осі uv називають головними, коли відцентровий момент I_{uv} рівний нулю. Цей випадок має місце, коли кут повороту α_0 осей uv описується рівнянням

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} .$$

5. Для головних осей, положення яких визначає кут α_0 , один з осьових моментів інерції досягає максимального значення, а другий мінімального. Величину цих моментів інерції обчислюють за формулою

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} .$$

6. Вирази в п. 4 для моментів інерції I_u , I_v і I_{uv} мають ідентичний вигляд, як вирази для напружень при плоскому напруженому стані. Отже, так як і для напружень, покладаючи відповідні аналогії між напруженнями і моментами інерції, можна побудувати круги Мора для моментів інерції, як подано на Рис. 422.

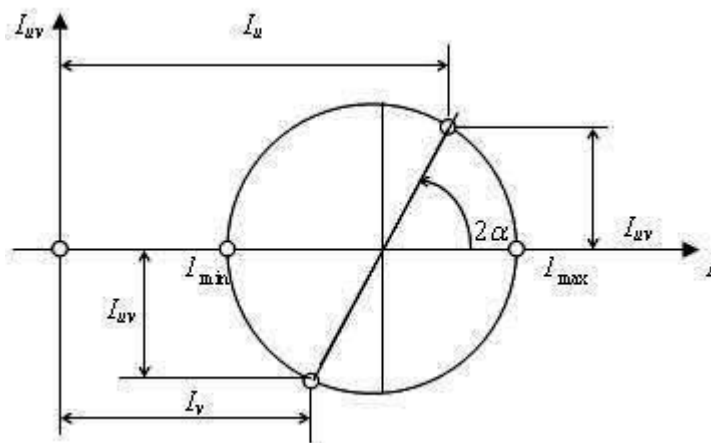


Рис. 422

7. Головні осі, початок яких знаходиться у центрі ваги перерізу, називають головними центральними осями. Розташування головних центральних осей важливе при обчисленні стержнів на згин.

Щоб визначити положення головних центральних осей для довільного перерізу необхідно:

- 1) знайти положення центру ваги перерізу;
- 2) знайти величину осьових моментів інерції і відцентрового моменту інерції для довільних осей x, y , початок яких знаходиться в центрі ваги перерізу;
- 3) знайти кут α_0 , на який потрібно повернути осі x, y , щоб отримати головні центральні осі.

У випадку, коли переріз має вісь симетрії, то ця вісь є однією з головних центральних осей. Коли переріз має більше ніж дві осі симетрії, то він має нескінченно багато головних центральних осей, а осьові моменти відносно цих осей є рівні між собою.

Можливо також довести, що переріз, який має принаймні три центральні осі, відносно яких осьові моменти інерції є рівні, має нескінченно багато головних центральних осей з рівними за величиною осьовими моментами інерції.

8. Осьові моменти інерції окремих перерізів і вибраних осей подано на Рис. 423.

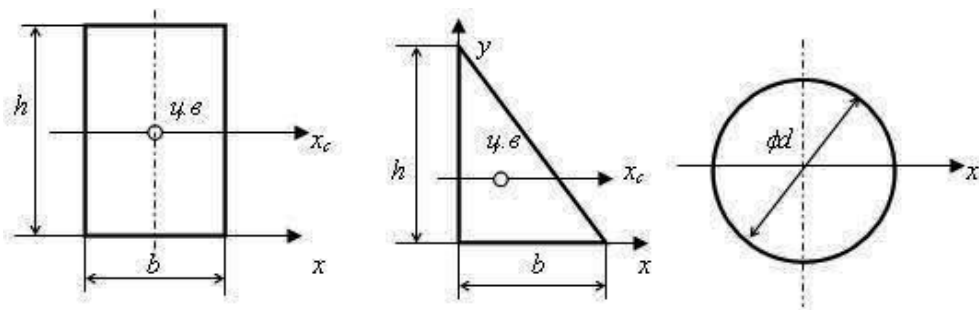


Рис. 423

$$I_x = \frac{bh^3}{3}; I_{x_c} = \frac{bh^3}{12} \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24}; I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad I_x = \frac{\pi d^4}{64}.$$

544. Визначити осьові моменти інерції прямокутного трикутника відносно центральних осей x і y , розташованих як подано на Рис. 424. Дані: $b = 3$ см; $h = 4$ см.

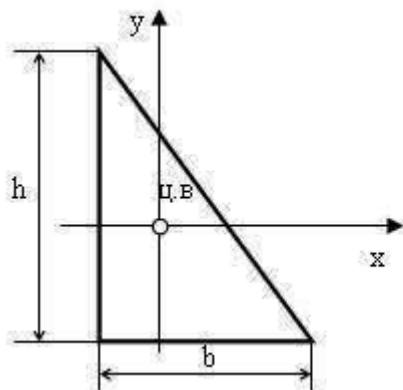


Рис. 424

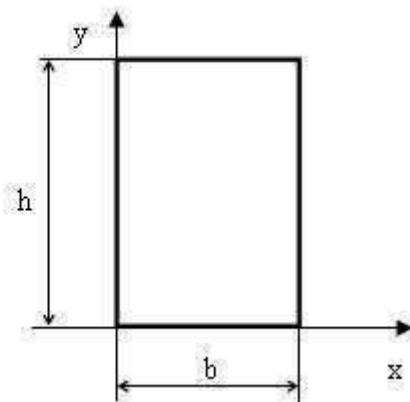


Рис. 425

545. Добрати h висоту прямокутного перерізу (Рис. 425), щоб момент відносно осі x був у два рази більший за момент відносно осі y . Встановити для такого прямокутника відцентровий момент I_{xy} . Дані: $b = 10$ см.

546. Визначити осьові моменти інерції перерізу (Рис. 426), відносно осей x і y . Дані: $b = 6$ см; $h = 2b$; $h_1 = 2/3b$.

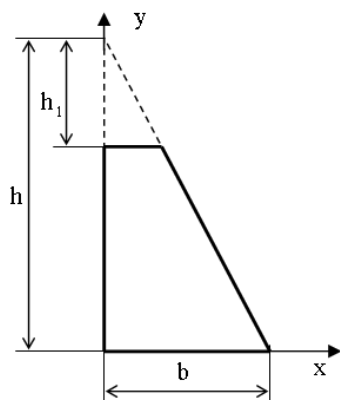


Рис. 426

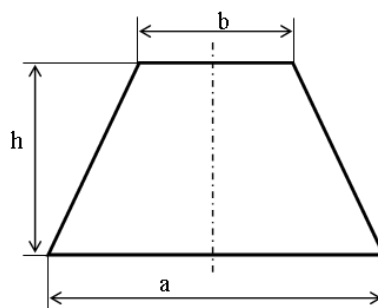


Рис. 427

547. Обчислити головні центральні моменти інерції трапецевидного перерізу з розмірами, як на Рис. 427. Дані: $b = 8$ см; $h = b$; $a = 2b$.

548. Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу у вигляді рівностороннього трикутника, поданого на рис. 428.
Дані: $a = 10$ см.

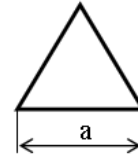


Рис. 428

549. Встановити моменти інерції I_x , I_y і I_{xy} для перерізу відносно і осей x , y , вказаних на Рис. 429. Дані: $a = 2$ см.

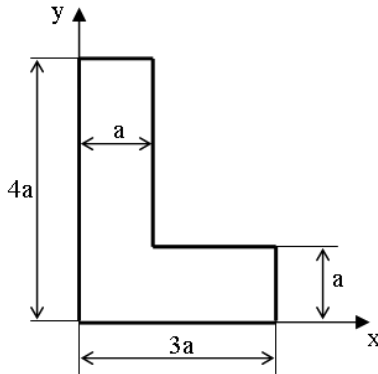


Рис. 429

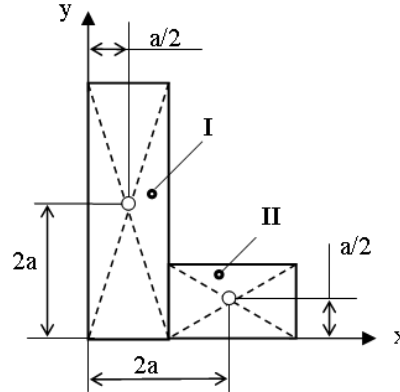


Рис. 430

Розв'язок

Переріз поділяють на два прямокутники I і II (Рис. 430). Обчислюють окремі моменти інерції перерізу, додаючи моменти для прямокутників I і II. Для цього використовують готові вирази та твердження Штейнера.

$$I_x = \frac{a \cdot (4a)^3}{3} + \frac{2a \cdot a^3}{3} = 21a^4 = 21 \cdot 2^4 = 336 \text{ см}^4,$$

$$I_y = \frac{4a \cdot a^3}{3} + \frac{a \cdot (2a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot a \cdot 2a = 10a^4 = 10 \cdot 2^4 = 160 \text{ см}^4,$$

$$I_{xy} = \frac{a}{2} \cdot 2a \cdot 4a^2 + 2a \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a^2 = 6a^4 = 6 \cdot 2^4 = 96 \text{ см}^4.$$

550. Обчислити моменти інерції перерізу, показаного на Рис. 431, відносно осей x і y . Дані: $b = 4$ см; $B = 6$ см; $h = 8$ см; $H = 10$ см.

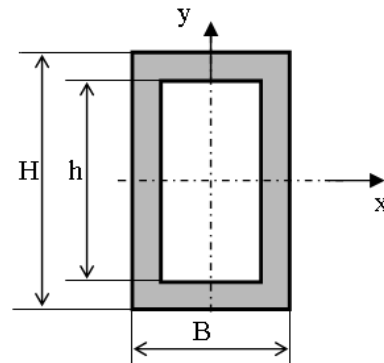


Рис. 431

551. Визначити головні центральні моменти інерції Т - подібного перерізу, зображеного на Рис. 432. Дані: $b = 120$ мм; $h = 150$ мм; $\delta = 15$ мм.

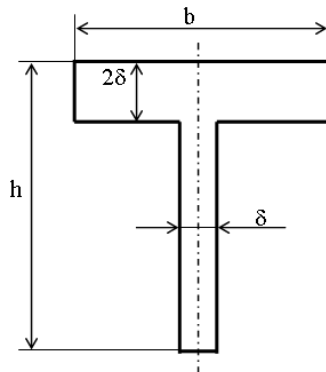


Рис. 432

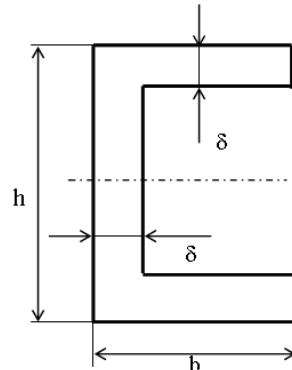


Рис. 433

552. Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу, поданого на Рис. 433. Дані: $\delta = 1$ см; $b = 4\delta$; $h = 6\delta$.

553. Встановити моменти інерції відносно осей x і y перерізу, поданого на Рис. 434. Дані: $r = 5$ см; $b = 3r$; $h = 4r$.

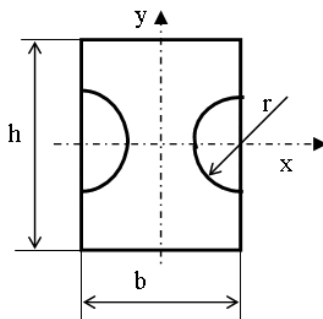


Рис. 434

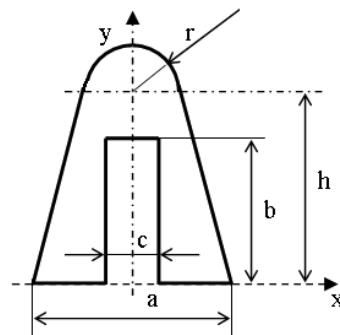


Рис. 435

554. Для заданого перерізу (Рис. 435), обчислити значення моментів інерції відносно осей x і y . Дані: $r = 40$ см; $a = 4r$; $b = 3r$; $c = r$; $h = 9/2r$.

555. Обчислити моменти інерції I_x , I_y і I_{xy} перерізу (Рис. 436). Дані: $a = 4$ см.

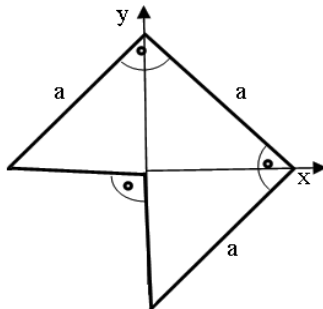


Рис. 436

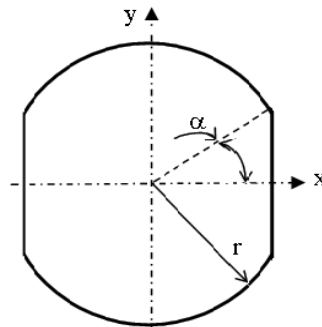


Рис. 437

556. Обчислити моменти інерції I_x і I_y перерізу (Рис. 437). Дані: $r = 10$ см; $\alpha = 45^\circ$.

557. Обчислити момент інерції перерізу, зображеного на Рис. 438, відносно осі x . Дані: $\angle 100 \times 63 \times 10$ згідно ГОСТ ($I_{x'} = 154$ см⁴; $i_y = 1,75$ см; $F = 15,5$ см²).

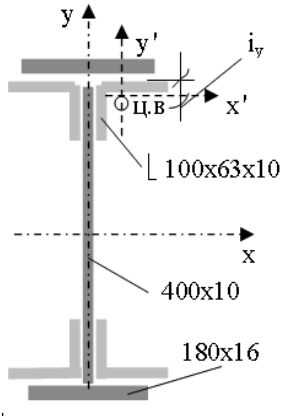


Рис. 438

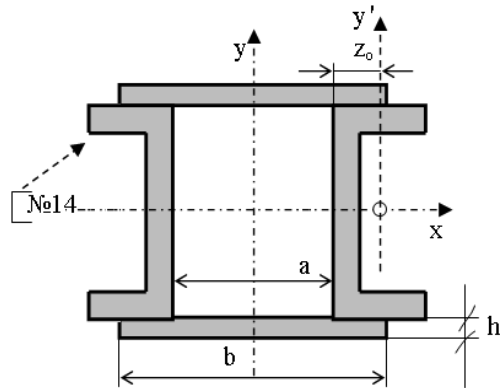


Рис. 439

558. Балка, виконана з двох швелерів і двох пластин (Рис. 439). Якою має бути відстань a між швелерами, щоб моменти інерції перерізу I_x і I_y були рівні між собою? Дані: $b = 160$ мм; $h = 10$ мм; (№14 згідно ГОСТ ($I_x = 489$ см⁴; $I_y = 45,1$ см⁴; $F = 15,7$ см²; $z_0 = 1,67$ см).

559. При якій величині b моменти інерції перерізу, показаного на Рис. 440, відносно головних центральних осей xu будуть рівні між собою? Обчислити значення цього моменту. Дані: $\delta = 2$ мм; $c = 9\delta$; $h = 40\delta$.

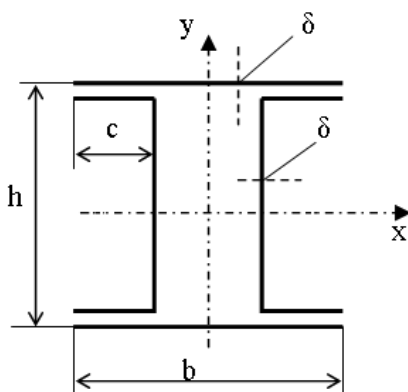


Рис. 440

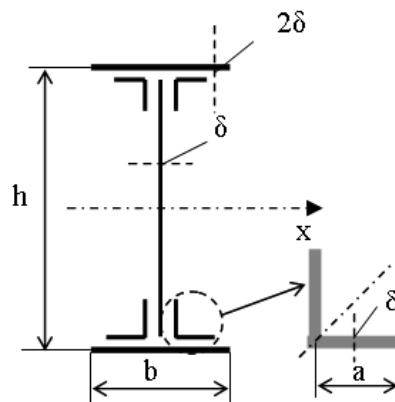


Рис. 441

560. Обчислити момент інерції перерізу (Рис. 441) відносно осі x . Дані: $\delta = 2$ мм; $b = 32\delta$; $h = 80\delta$.

561. Обчислити головні центральні моменти інерції для перерізу у вигляді правильного п'ятикутника (Рис. 442). Дані: $r = 8$ см.

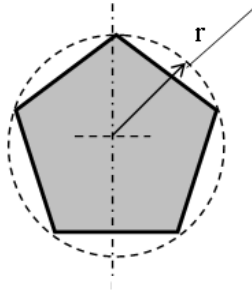


Рис. 442

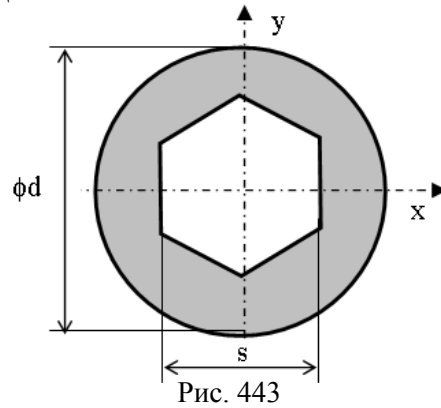


Рис. 443

562. Обчислити моменти інерції відносно осей x і y перерізу, поданого на Рис. 443. Дані: $s = 16$ мм; $d = 30$ мм.

563. Визначити положення головних центральних осей перерізу, зображеного на Рис. 444 і встановити осьові моменти інерції відносно цих осей. Дані: $\delta = 2$ см; $a = 6\delta$; $b = 5\delta$; $c = 3\delta$.

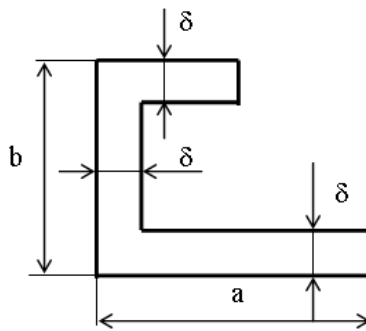


Рис. 444

564. Обчислити значення головних центральних моментів трикутного перерізу (Рис. 445). Дані: $b = 10$ см; $h = 20$ см.

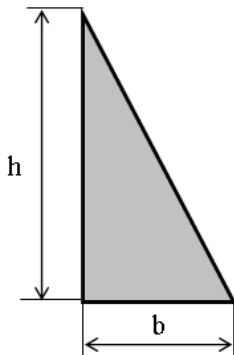


Рис. 445

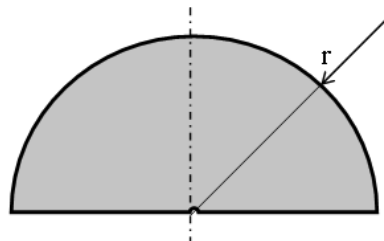


Рис. 446

565. Обчислити головні центральні моменти інерції півкруга (Рис. 446). Дані: $r = 10$ см.

566. Визначити положення головних центральних осей перерізу, зображеного на Рис. 447. Дані: $a = 20$ см; $b = c = a / 4$; $d = a\sqrt{2} / 4$.

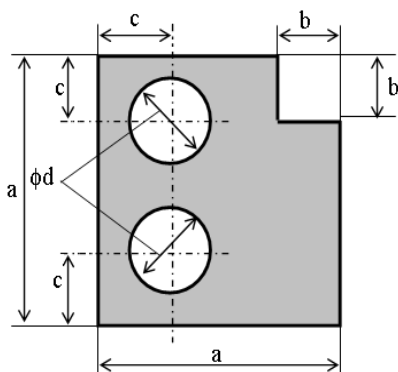


Рис. 447

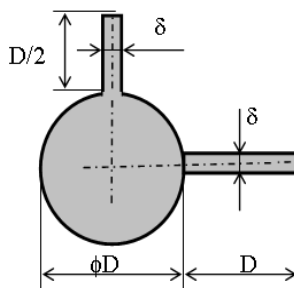


Рис. 448

567. Обчислити моменти інерції відносно головних центральних осей перерізу, поданого на Рис. 448. Дані: $D = 8$ см; $\delta = D / 8$.

568. Знайти положення головних центральних осей перерізу (Рис. 449), а також числові значення моментів інерції відносно цих осей. Дані: $r = 20$ мм; $a = 30$ мм.

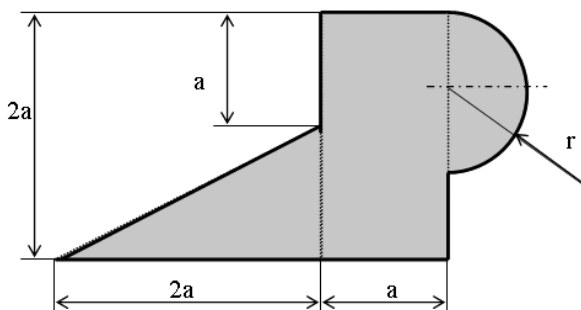


Рис. 449

569. Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу, зображеного на Рис. 450. Дані: $\delta = 1$ см; $r = 5\delta$; $a = 10\delta$.

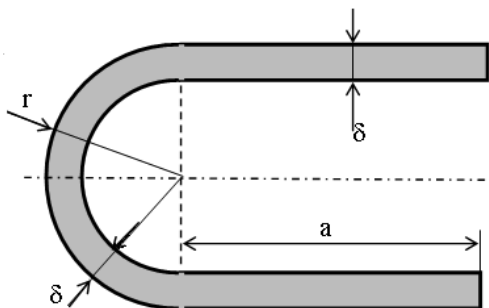


Рис. 450

570. Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу, вказаного на Рис. 451.
Дані: $r = 6$ см; $d = r$; $a = 3/2r$.

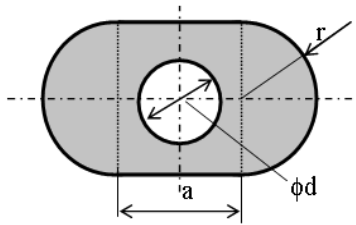


Рис. 451

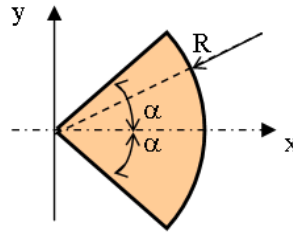


Рис. 452

571. Визначити головні моменти інерції сегменту кола (Рис. 452), відносно осей x і y . Дані: $R = 8$ см; $\alpha = 60^\circ$.

572. Встановити головні центральні моменти перерізу, поданого на Рис. 453.
Дані: $r = 3$ см; $h = 6$ см; $b = 10$ см.

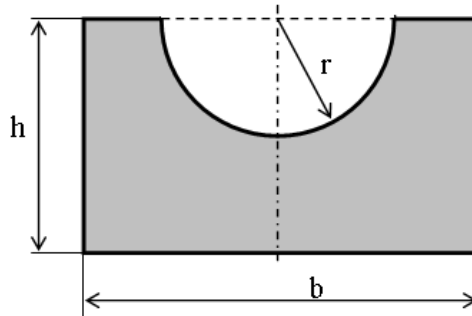


Рис. 453

573. Обчислити головні центральні моменти частини кола, показаної на Рис. 454.
Дані: $R = 10$ см; $\alpha = 60^\circ$.

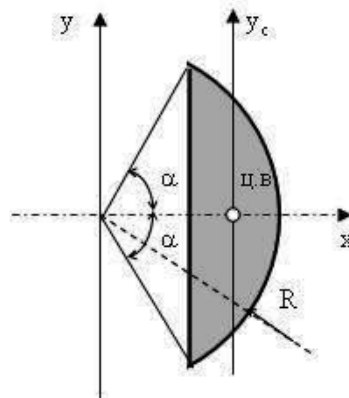


Рис. 454

574. Обчислити моменти інерції відносно осей x і y площини, обмеженої параболою, що описується рівнянням $y = \frac{x^2}{4} + 4$, а також прямими: $x = 0$; $x = 2$ і $y = 0$.

575. Розрахувати статичні моменти і моменти інерції відносно осей x і y фігури, поданої на Рис. 455. Дані: $l = 8$ см; $h = 6$ см.

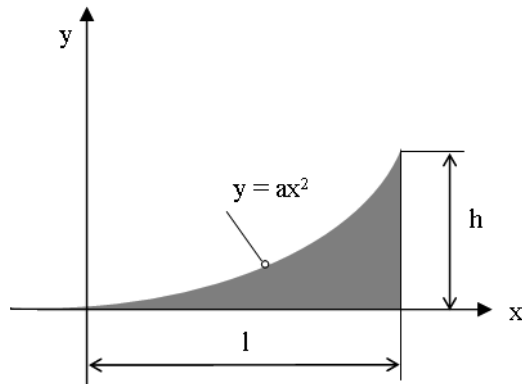


Рис. 455

7.3. Прямий згин

Згин називають прямим, коли площина дії згинального моменту співпадає з однією з головних центральних осей перерізу.

7.3.1. Чистий згин

1. Згин називають чистим, коли даний переріз стержня навантажений тільки згинальним моментом.
2. Напруження в довільній точці перерізу у випадку прямого чистого згину балки (Рис. 456) описується виразом

$$\sigma = \frac{M_{yz}}{I_z} y,$$

а при відомому радіусі кривини (в місці дії згинального моменту M_{yz}) їх можна обчислити так:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}.$$

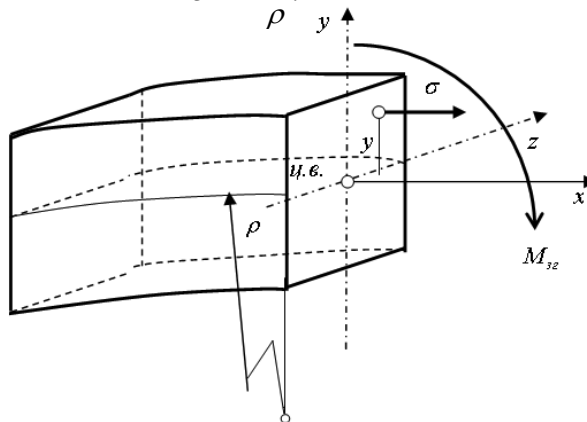


Рис. 456

3. Умова міцності при згині має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{зг}}{W_z} \leq [\sigma_{зг}] \text{ або ж } \sigma = \frac{M_{зг}}{W_z} \leq [\sigma_{p,c}],$$

де: $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$ – осьовий момент опору перерізу при згині.

576. Яким має бути допустиме значення згинального моменту $M_{зг}$, що діє в площині АВ перерізу, показаного на Рис. 457, щоб верхні волокна стискалися, а нижні розтягувалися. Дані: $\delta = 2$ см; $b = 5\delta$; $h = 6\delta$; $[\sigma_p] = 80$ МПа; $[\sigma_c] = 240$ МПа?

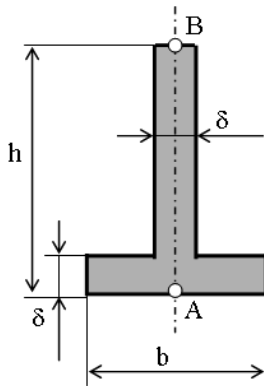


Рис. 457

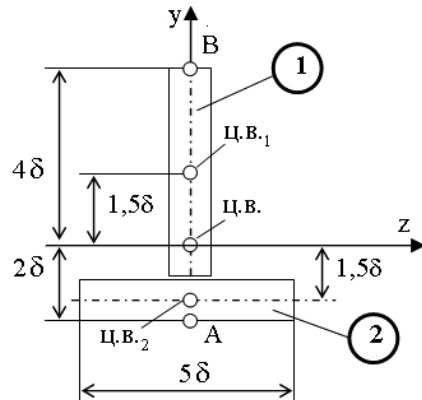


Рис. 458

Розв'язок

Розділивши аналізований переріз на два прямокутники 1 і 2 (Рис. 458), помітно, що вони мають однакові площі, а тому легко знаходиться положення центру ваги цілого перерізу, розділяючи відстань між центрами ваги складових перерізів навпіл. Положення центру ваги перерізу і головних центральних осей координат показано на Рис. 458.

Допустимий згинальний момент розраховується для точок А і В перерізу. Розв'язком задачі, очевидно, буде менша з цих двох величин.

Момент інерції перерізу відносно осі z рівний

$$I_z = \frac{\delta(5\delta)^3}{12} + (1,5\delta)^2 5\delta \cdot \delta + \frac{5\delta \cdot \delta^3}{12} + (1,5\delta)^2 5\delta \cdot \delta = \frac{100}{3} \delta^4.$$

Осьовий момент опору згину у точці А

$$W_{z,A} = \frac{I_z}{y_A} = \frac{\frac{100}{3} \delta^4}{2\delta} = \frac{50}{3} \delta^3 = \frac{50}{3} 2^3 = \frac{400}{3} \text{ см}^3.$$

Осьовий момент опору згину у точці В

$$W_{z,B} = \frac{I_z}{y_B} = \frac{\frac{100}{3} \delta^4}{4\delta} = \frac{200}{3} \text{ см}^3.$$

З умов міцності на згин для точок А і В отримано:

$$\sigma_A = \frac{M'_{зг}}{W_{z,A}} \leq [\sigma_p]; \quad M'_{зг} = [\sigma_p] \cdot W_{z,A} = 8 \cdot \frac{400}{3} = 1066,7 \text{ кНсм};$$

$$\sigma_B = \frac{M''_{зг}}{W_{z,B}} \leq [\sigma_c]; \quad M''_{зг} = [\sigma_c] \cdot W_{z,B} = 24 \cdot \frac{200}{3} = 1600 \text{ кНсм};$$

Переріз можна навантажити згинальним моментом:

$$M_{зг} = \min(1066,7 \text{ кНсм}; 1600 \text{ кНсм}) = 1066,7 \text{ кНсм}.$$

577. Для якого положення балки квадратного (а) чи (б) перерізів (Рис. 459) можна допустити більше значення згинального моменту в площині, що проходить через вісь стержня і координатну вісь у?

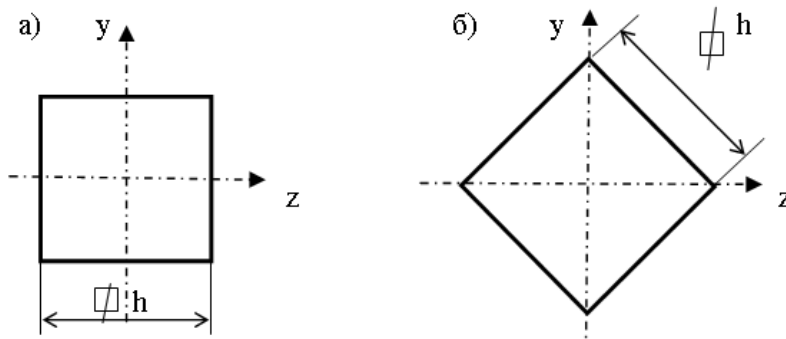


Рис. 459

578. Згинальний момент діє у вертикальній площині (Рис. 460). Як і на скільки відсотків зміниться допустима величина згинального моменту, якщо поперечний переріз повернути на кут 45° . Дані: a ; $d = a/3$.

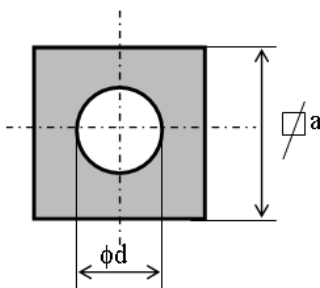


Рис. 460

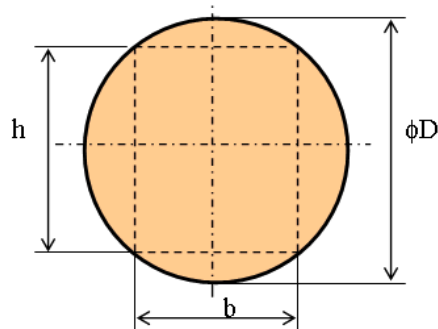


Рис. 461

579. Які розміри b і h (Рис. 461) повинна мати балка прямокутного перерізу, вирізана з круглого стовбура дерева діаметром D , щоб її міцність на згин була найбільша? Дані: $D = 50 \text{ см}$.

580. З дерев'яної балки кругового перерізу необхідно вирізати балку трикутного перерізу (Рис. 462), що має максимальний момент опору при її згині моментом, що діє в площині, яка проходить через вісь балки і ординату y . Обчислити розміри a і h , що задовольнятимуть таку умову. Дані: $D = 50$ см.

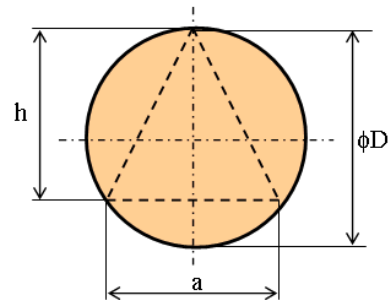


Рис. 462

581. Для забезпечення наявного згинального моменту $M_{зг}$ замість стержня з повним круговим перерізом виконано стержень з трубчастим перерізом із співвідношенням діаметрів $d/D = 0,9$. Який відсоток матеріалу заощаджено?
582. На барабан діаметром $D = 1$ м накручений сталевий ($E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа) дріт діаметром $d = 2$ мм. Розрахувати максимальні напруження в поперечному перерізі дроту.
583. Обчислити момент інерції рівнобедреного трикутника (Рис. 463) відносно осі x , що проходить через центр ваги, а також момент опору при згині для точок A і B . Дані: $b = 6$ см; $h = 9$ см.

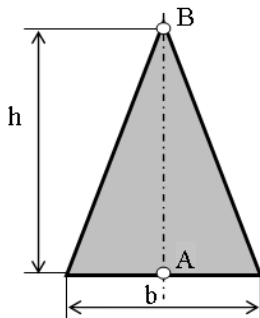


Рис. 463

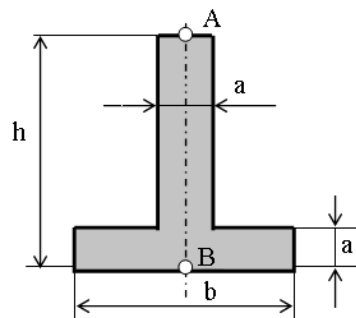


Рис. 464

584. Обчислити момент опору для точок A і B перерізу, показаного на Рис. 464. Дані: $a = 2$ см; $b = h = 5$ а.
585. Обчислити момент опору W_x для точок A і B перерізу, поданого на Рис. 465. Дані: $b = 8$ см; $h = 10$ см; $\delta = 2$ см.

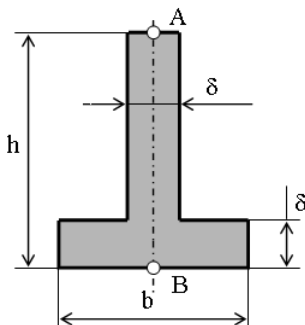


Рис. 465

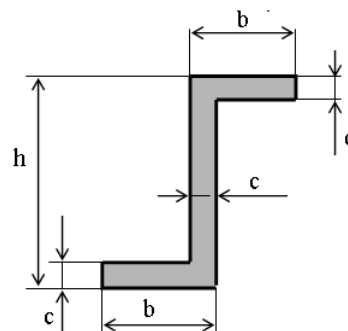


Рис. 466

586. Обчислити момент опору відносно головних центральних осей для профілю, зображеного на Рис. 466. Дані: $c = 4$ см; $b = 5$ см; $h = 10$ см.

587. Для двох положень перерізу правильного шестикутника (Рис. 467) обчислити моменти інерції відносно осі x і моменти опору при згині моментом, що діє у вертикальній площині. Дані: $a = 1$ см.

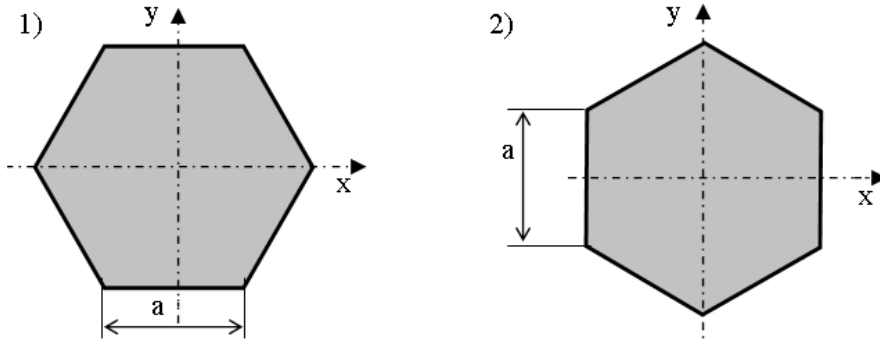


Рис. 467

588. Обчислити момент опору W_x перерізу, показаного на Рис. 468, і величину допустимого згинального моменту, що діє в площині, яка проходить через вісь стержня і ординату y . Дані: $r = 10$ см; $H = 7r$; $B = 4r$; $h = 3r$; $[\sigma_p] = 160$ МПа; $[\sigma_c] = 400$ МПа.

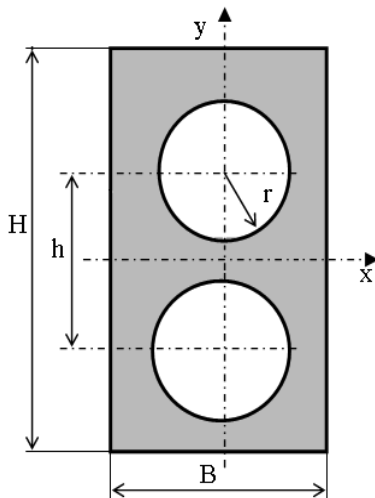


Рис. 468

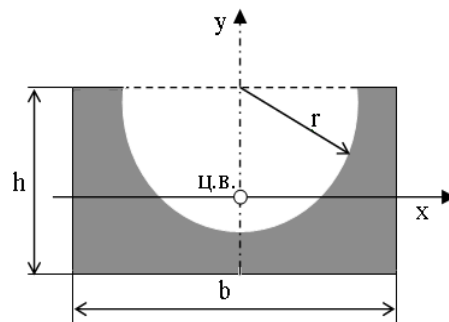


Рис. 469

589. Розрахувати верхній і нижній моменти опору W_x на згин перерізу, зображеного на Рис. 469. Дані: $b = 30$ см; $h = 15$ см; $r = 10$ см.

7.3.2. Згин без врахування дії поперечної сили

1. У більшості випадків при згині, де домінуючим навантаженням є згинальний момент, також виникає поперечна сила.
2. Частка від дії поперечної сили в міцності матеріалу в порівнянні з часткою від дії згинального моменту становить для довгих балок малий відсоток і тому нею нехтують. Балку вважають довгою, коли її довжина в декілька разів більша від висоти її поперечного перерізу.

590. Балка прямокутного перерізу навантажена силами P як показано на Рис. 470. Визначити розміри поперечного перерізу балки. Дані: $P = 20$ кН; $a = 1$ м; $h = 3b$; $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа.

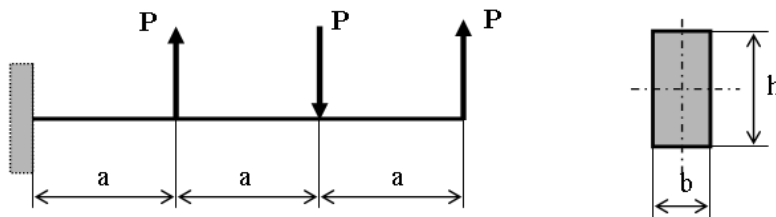


Рис. 470

Розв'язок

Епюра згинальних моментів для цієї балки подана на Рис. 471.

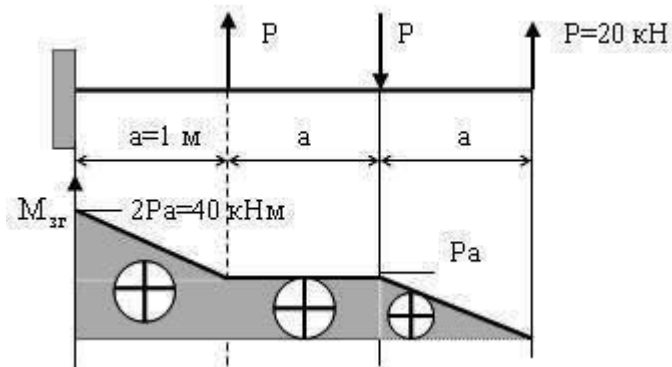


Рис. 471

Максимальний згинальний момент у балці, який буде враховуватись при подальших обчисленнях, становить 40 кНм.

Осьовий момент опору на згин поперечного перерізу балки становить

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{3}{2}b^3.$$

Умова міцності для балки матиме вигляд

$$\sigma = \frac{M_{зг \max}}{W} \leq [\sigma_{зг}];$$

звідки $W = \frac{3}{2}b^3 \geq \frac{M_{зг\max}}{[\sigma_{зг}]}$ і

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_{зг\max}}{3 \cdot [\sigma_{зг}]} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 4000}{3 \cdot 16}} = 5,5 \text{ см.}}$$

Мінімальні розміри поперечного перерізу балки $b = 5,5 \text{ см}$; $h = 3b = 16,5 \text{ см}$.

- 591.** До балки на двох опорах прикладена сила P як показано на Рис. 472. Розрахувати максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі балки. Дані: $P = 20 \text{ кН}$; $l = 6 \text{ м}$; $b = 6 \text{ см}$; $h = 2b$; $e = 8 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$.

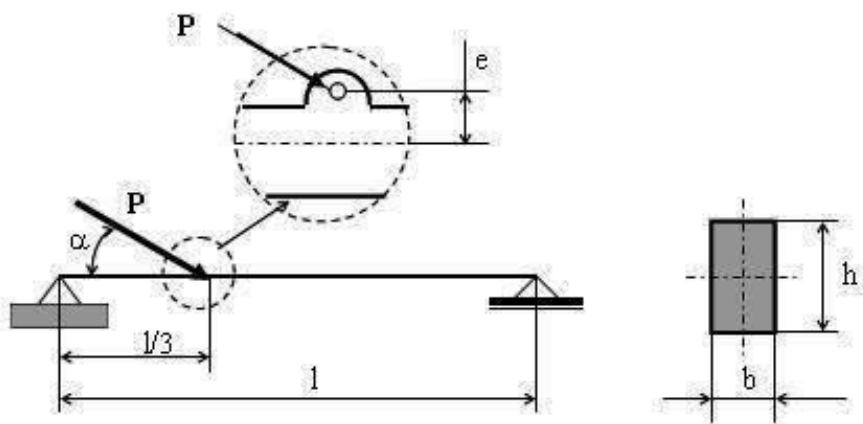


Рис. 472

Розв'язок

Сила P розкладається на вертикальну і горизонтальну складові та вони зводяться до центру ваги поперечного перерізу балки. Отримано навантаження на балку: вертикальну силу $P \sin \alpha$, горизонтальну силу $P \cos \alpha$ і зосереджений момент $P \sin \alpha \cdot e$ (Рис. 473).

Максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі виникатимуть в нижніх волокнах перерізу по перевищенні відстані $l/3$ від лівої опори. Це будуть розтягуючі напруження. Вони викликають, як помітно з епюр внутрішніх сил, два згинальні моменти і розтягуючу силу, які дорівнюють:

$$\sigma = \frac{\frac{2}{9}Pl \cdot \sin \alpha}{W} + \frac{\frac{2}{3}Pe \cdot \sin \alpha}{W} + \frac{P \cos \alpha}{F}, \text{ де } W = \frac{bh^2}{6}; F = bh.$$

Після підставлення величин W і F отримано:

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{Pl}{bh^2} \sin \alpha \left(1 + 3 \frac{e}{l} + \frac{3}{4} \frac{h}{l} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

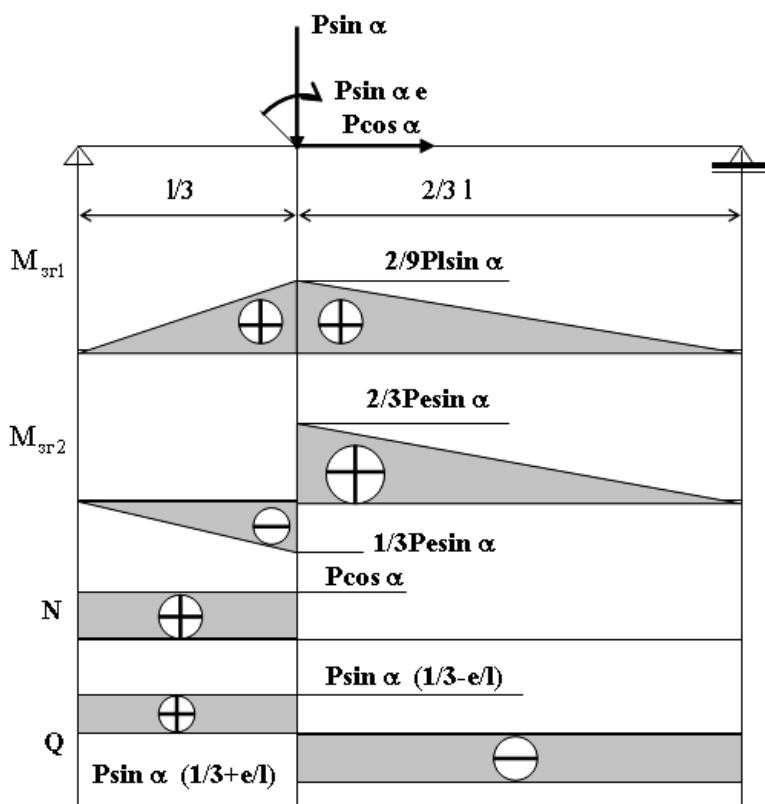


Рис. 473

Підставляючи числові значення, отримано:

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{20 \cdot 600}{6 \cdot 12^2} \sin 30^\circ \left(1 + 3 \frac{8}{600} + \frac{3}{4} \frac{12}{600} \operatorname{ctg} 30^\circ \right) =$$

$$= 9,26(1 + 0,04 + 0,026) = 9,87 \text{ кН/см}^2 = 98,7 \text{ МПа}$$

592. Обчислити необхідний момент опору згину поперечного перерізу для балки, показаної на Рис. 474. Дані: $P = 20 \text{ кН}$; $a = 1 \text{ м}$; $l = 4a$; $[\sigma_{\text{гр}}] = 240 \text{ МПа}$.

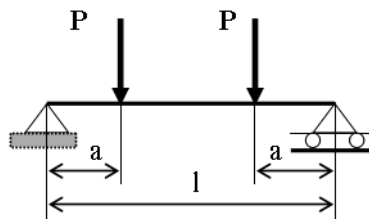


Рис. 474

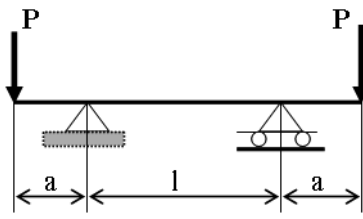


Рис. 475

593. Обчислити діаметр стержня, навантаженого як подано на Рис. 475. Дані: $l = 1,4 \text{ м}$; $a = 40 \text{ см}$; $P = 40 \text{ кН}$; $[\sigma_{\text{гр}}] = 100 \text{ МПа}$.

594. На валу діаметром d знаходяться два симетрично розташовані елементи масами m (Рис. 476). Якою буде допустима кількість обертів вала, якщо для його матеріалу $[\sigma_{зг}] = 120$ МПа. Дані: $m = 10$ кг; $l = 1,2$ м; $d = 4$ см; $r = 20$ см.

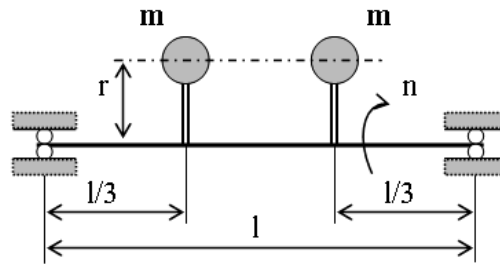


Рис. 476

595. Провести перевірочний розрахунок на міцність балки, показаної на Рис. 477. Дані: $P = 7,5$ кН; $l = 1,1$ м; $a = 0,2$ м; $d = 60$ мм; $[\sigma_{зг}] = 120$ МПа.

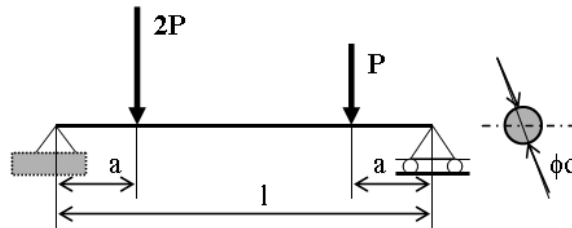


Рис. 477

596. Провести перевірочний розрахунок для ступінчастого вала, зображеного на Рис. 478. Дані: $P = 20$ кН; $\sigma_T = 330$ МПа; $n = 3$ – коефіцієнт запасу міцності.

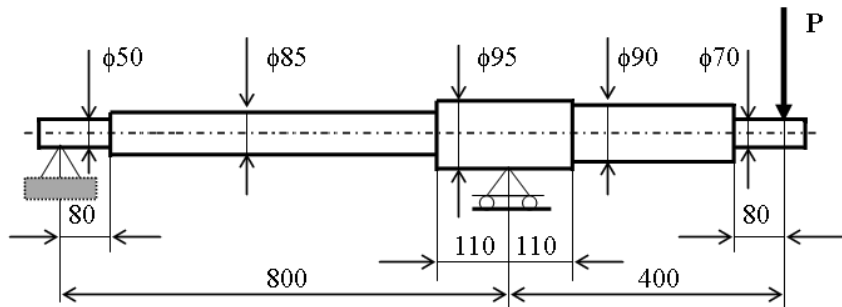


Рис. 478

597. Знайти допустиму величину сили P для випадку навантаження балки, поданого на Рис. 479. Дані: $l = 6$ м; $b = 6$ см; $h = 5/3b$; $r = b/3$; $[\sigma_{зг}] = 200$ МПа.

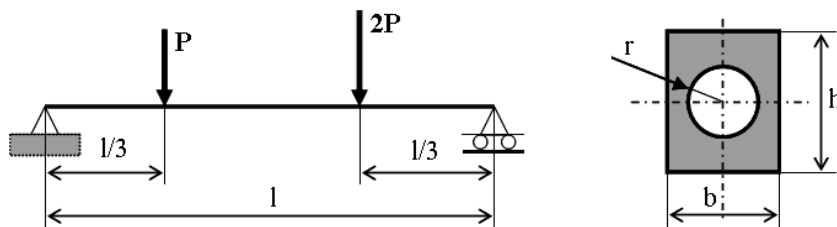


Рис. 479

598. Балка у вигляді труби з внутрішнім діаметром $d = 10$ см навантажена як показано на Рис. 480. Розрахувати зовнішній діаметр D труби. Дані: $P = 6$ кН; $l = 9$ м; $[\sigma_{зг}] = 120$ МПа.

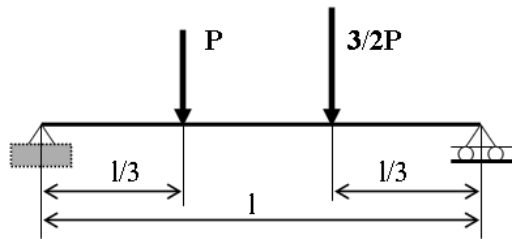


Рис. 480

599. Чавунна балка поперечного перерізу (Рис. 481) навантажена згинальним моментом, який діє у вертикальній площині симетрії перерізу так, що у верхніх волокнах виникли допустимі напруження на стиск, а у нижніх – допустимі напруження на розтяг. Яким має бути розмір h , якщо міцність чавуну на стиск у 3 рази більша, ніж на розтяг? Дані: $b = 8$ см; $a = 2$ см; $c = 1$ см; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 300$ МПа.

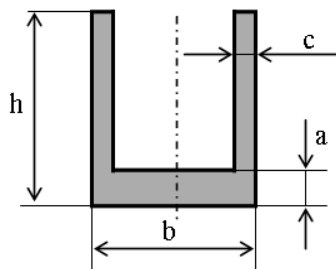


Рис. 481

600. Обчислити екстремальні нормальні напруження в найбільш напруженому поперечному перерізі балки, навантаженої як показано на Рис. 482. Дані: $P = 20$ кН; $l = 4$ м; $\delta = 2$ см; $h = 10\delta$; $b = 8\delta$.

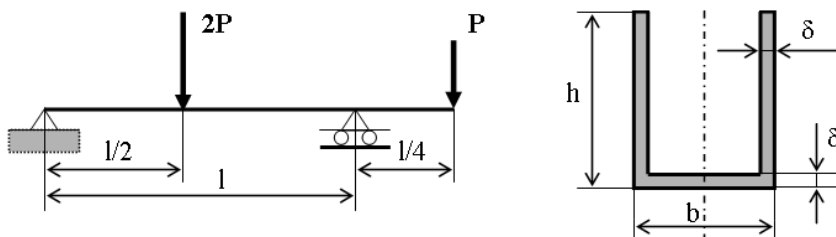


Рис. 482

601. Визначити допустимі навантаження для чавунної балки, показаної на Рис. 483, приймаючи більш вигідне з точки зору міцності положення поперечного перерізу - а) або б). Дані: $M = Pa$; $l = 2$ м; $a = l/4$; $\delta = 16$ мм; $b = 8\delta$; $h = 10\delta$; $[\sigma_p] = 80$ МПа; $[\sigma_c] = 240$ МПа.

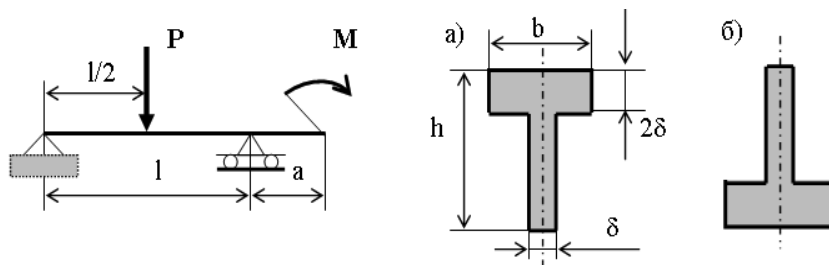


Рис. 483

602. Як зміняться коефіцієнти запасу міцності розтягнених і стиснених волокон балки, навантаженої як показано на Рис. 484, якщо поперечний переріз повернути з положення I у положення II. Дані: $P = 50 \text{ кН}$; $l = 8 \text{ м}$; $\delta = 4 \text{ см}$; $b = 3\delta$; $h = 4\delta$; $\sigma_{\text{тп}} = 220 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{тс}} = 400 \text{ МПа}$.

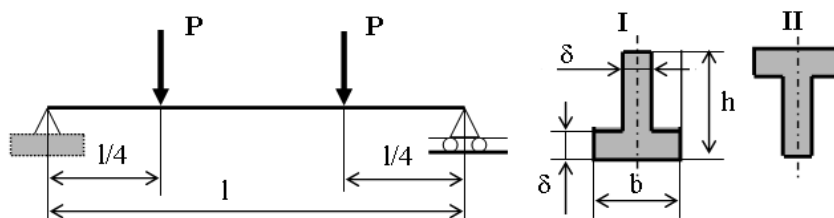


Рис. 484

603. Дерев'яна опора навантажена зосередженими силами як показано на Рис. 485. Розрахувати максимальні нормальні напруження в поперечних перерізах. Дані: $P_1 = 3 \text{ кН}$; $P_2 = 2 \text{ кН}$; $h = 6 \text{ м}$; $d = 24 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$.

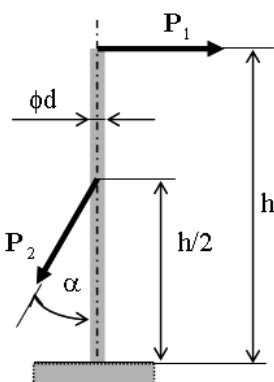


Рис. 485

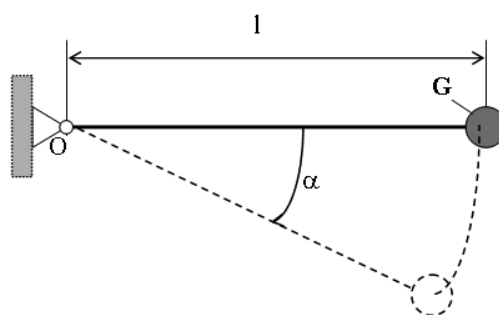


Рис. 486

604. Стержень довжиною l , діаметром d і вагою G на кінці може вільно обертатися навколо осі O (Рис. 486). Для якого кута α максимальні напруження від згину будуть рівні напруженням від розтягу? Дані: $G = 2 \text{ кН}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $d = 4 \text{ см}$.

- 605.** Замість навантаження балки парою сил (Рис. 487а) прикладено зосереджений момент M (Рис. 487б) такої ж величини. Як зміняться максимальні напруження від згину?

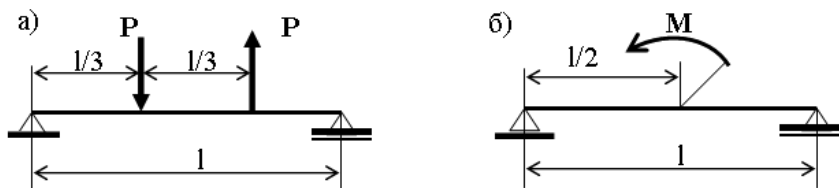


Рис. 487

- 606.** Визначити допустиме значення моменту M для балки, показаної на Рис. 488. Дані: $l = 5$ м; $a = 3/5l$; $\delta = 2$ см; $h = 2b = 10\delta$; $[\sigma_{зг}] = 150$ МПа.

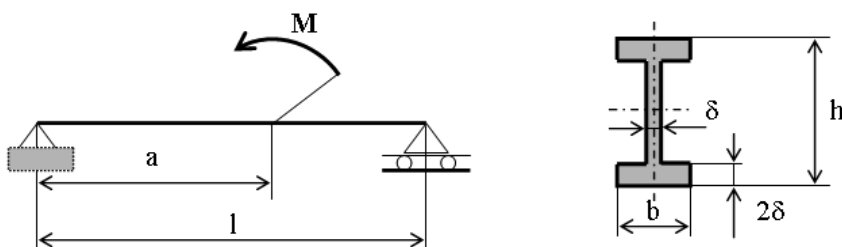


Рис. 488

- 607.** Обчислити екстремальні напруження в поперечному перерізі балки, показаної на Рис. 489. Дані: $M = 1$ кНм; $l = 3$ м; $\delta = 2$ мм; $h = 20\delta$; $\alpha = 60^\circ$.

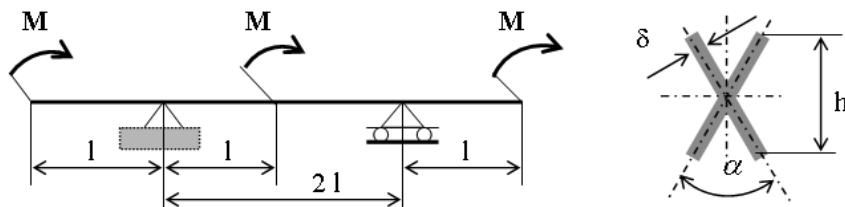


Рис. 489

- 608.** Розрахувати розмір a поперечного перерізу тонкостінної балки у вигляді рівностороннього трикутника (Рис. 490). Дані: $P = 24$ кН; $l = 2$ м; $\delta = 3$ мм; $[\sigma_{зг}] = 180$ МПа.

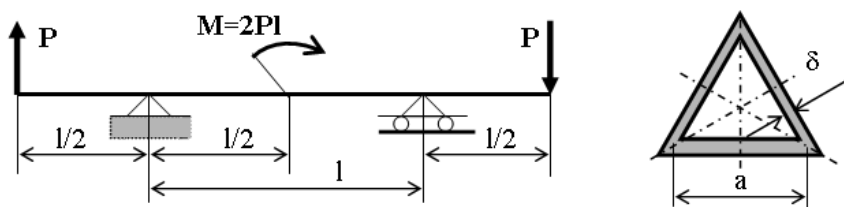


Рис. 490

609. Обчислити розміри поперечного перерізу балки, показаної на Рис. 491. Дані: $q = 4 \text{ кН/м}$; $l = 3 \text{ м}$; $b = 5\delta$; $h = 8\delta$; $[\sigma_p] = 100 \text{ МПа}$; $[\sigma_c] = 300 \text{ МПа}$.

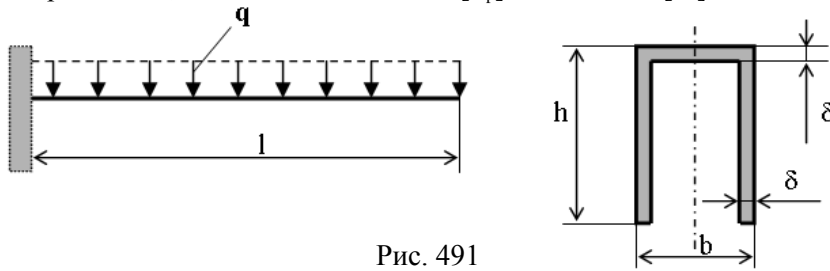


Рис. 491

610. Якою буде допустима величина розподіленого навантаження q для консольної балки, показаної на Рис. 492. Дані: $l = 2 \text{ м}$; $\delta = 10 \text{ мм}$; $b = 4\delta$; $h = 5\delta$; $[\sigma_p] = 120 \text{ МПа}$; $[\sigma_c] = 200 \text{ МПа}$.

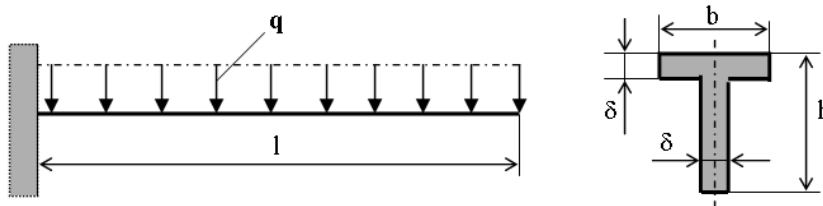


Рис. 492

611. Як зміниться міцність на згин балки, показаної на Рис. 493, навантаженої власною вагою, якщо всі її розміри збільшити у два рази?

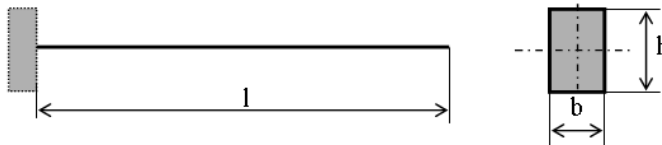


Рис. 493

612. При якій ширині b основи дамби (Рис. 494) в нижньому перерізі основи не діятимуть розтягуючі напруження. Дані: $\gamma_6 = 24 \text{ кН/м}^3$; $\gamma_b = 10 \text{ кН/м}^3$; $H = 9 \text{ м}$; $h = 8 \text{ м}$; $a = 2 \text{ м}$.

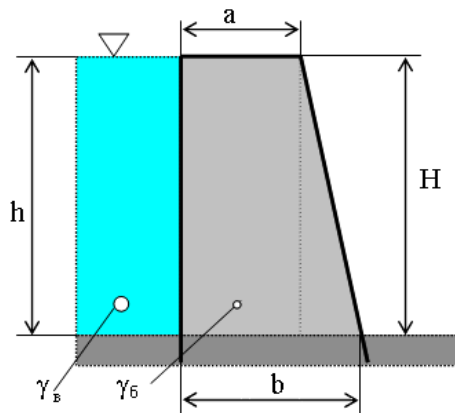


Рис. 494

- 613.** При якій висоті h греблі напруження в точці В перерізу А-А (Рис. 495) будуть рівні нулю, якщо вона навантажена тиском води і власною вагою? Дані: $a = 4$ м; $b = a$; $c = 2a$; $\gamma_{\text{в}} = 10$ кН/м³; $\gamma_{\text{г}} = 20$ кН/м³.

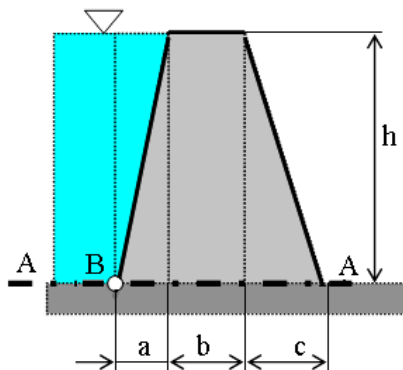


Рис. 495

- 614.** Дерев'яний стовп навантажений рівномірно по висоті натиском вітру $q = 100$ Н/м. Яку максимальну силу P можна прикласти на вершині стовпа (Рис. 496)? Дані: $H = 12$ м; $d = 30$ см; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 5$ МПа.

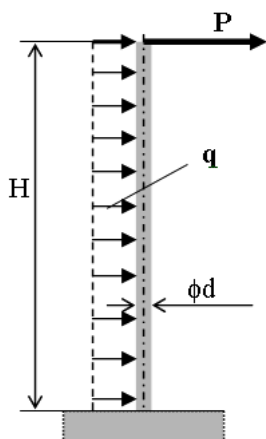


Рис. 496

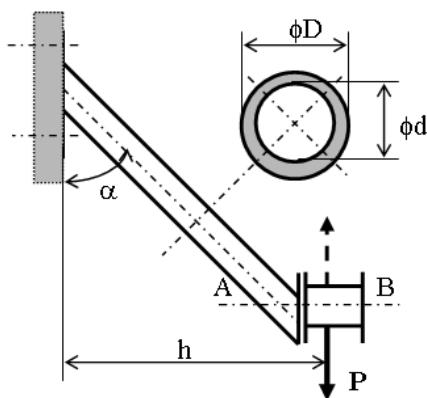


Рис. 497

- 615.** На кінці трубки, закріпленої під кутом α до стіни (Рис. 497), яка може обертатися навколо горизонтальної осі АВ, діє сила P . При якому положенні сили P діятимуть найбільші нормальні напруження в поперечному перерізі трубки і скільки вони становитимуть? Дані: $P = 500$ Н; $h = 20$ см; $D = 20$ мм; $d = 16$ мм; $\alpha = 45^\circ$.
- 616.** Балка АВ навантажена за допомогою стержнів CD і CE як показано на Рис. 498. Обчислити максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі балки АВ. Дані: $P = 2$ кН; $l = 8$ м; $D = 40$ мм; $d = 0,8D$.

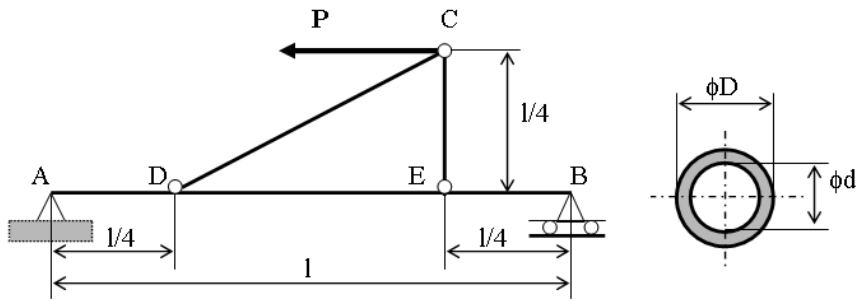


Рис. 498

617. Яку швидкість вітру витримає фабричний димар висотою $h = 40$ м у вигляді зрізаного конуса з розмірами діаметрів: зовнішнім і внутрішнім $D = 4$ м і $d = 1,5$ м внизу, а також $D = 2$ м і $d = 1,5$ м вверху, якщо в жодній точці не можуть виникнути розтягуючі напруження? Прийняти питому вагу кладки $\gamma = 20$ кН/м³, а також скористатися емпіричним виразом для зведеної сили натиску вітру $q = \frac{v^2}{1,6}$ (Н/м), де v (м/с) – швидкість вітру.

618. Яку висоту може мати огорожа з цегли товщиною $h = 12$ см, якщо питома вага цегли $\gamma = 1,8$ кН/м³, передбачуваний зведений натиск вітру $q = 400$ Н/м і допустимі напруження $[\sigma_p] = 0,1$ МПа; $[\sigma_c] = 1,5$ МПа.

619. Труба для відводу води закріплена одним кінцем (Рис. 499). Розрахувати допустиму довжину l труби, враховуючи навантаження вагою води і власною вагою. Дані: $\gamma_v = 10$ кН/м³; $\gamma_c = 78,5$ кН/м³; $D = 40$ мм; $d = 36$ мм; $[\sigma_{зг}] = 100$ МПа.

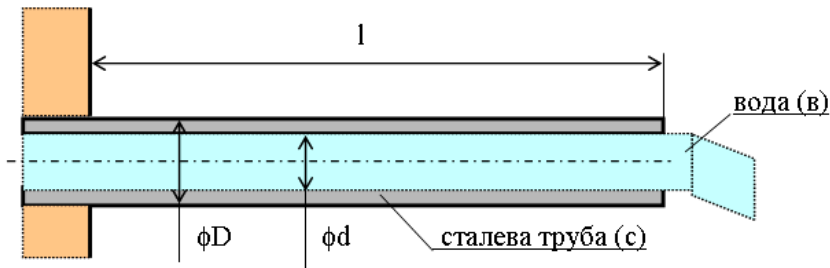


Рис. 499

620. При якій відстані a між опорами можна допустити найбільше розподілене навантаження q балки (Рис. 500) і скільки воно становитиме? Дані: $l = 8$ м; $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа.

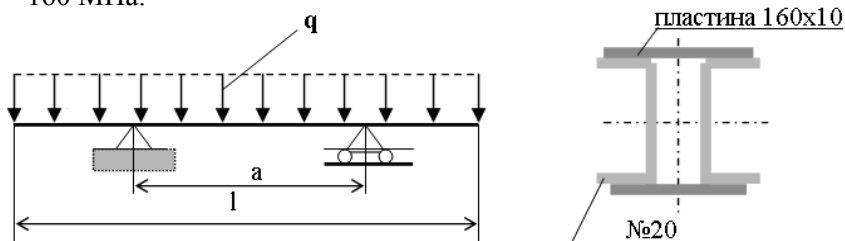


Рис. 500

621. Стержень довжиною l і діаметром d вільно опертий на кінцях і навантажений власною вагою. Якою формулою описуються максимальні напруження згину, якщо питома вага матеріалу становить γ ? У скільки разів потрібно збільшити пропорційно всі розміри стержня, щоб напруження від згину зросли вдвічі?

622. Балка довжиною L розташована на двох опорах (Рис. 501). Приймаючи, що існує можливість переміщення опори В, розрахувати, для якого l можна буде допустити найбільше розподілене навантаження q балки? Дані: $L = 12$ м.

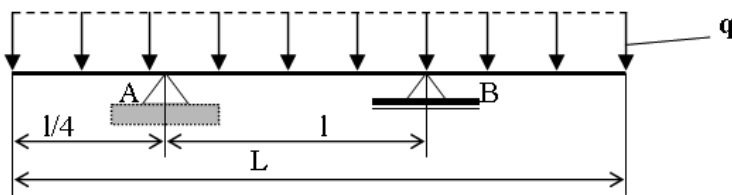


Рис. 501

623. Яким буде максимально допустиме навантаження q балки, показаної на Рис. 502, якщо $[\sigma_{зг}] = 180$ МПа? Дані: $l = 6$ м; $b = 8$ см; $h = 15$ см.

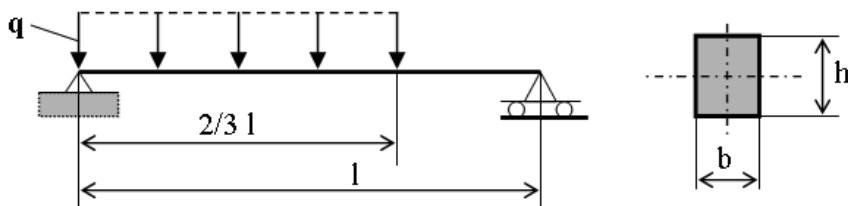


Рис. 502

624. Обчислити допустиме значення розподіленого навантаження q для балки, (Рис. 503). Дані: $l = 6$ м; $\delta = 4$ мм; $b = h = 10\delta$; $[\sigma_p] = 2[\sigma_c] = 200$ МПа.

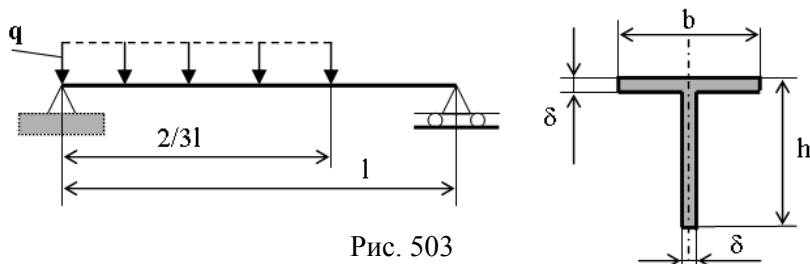


Рис. 503

625. Обчислити розміри поперечного перерізу балки, показаної на Рис. 504, якщо необхідний коефіцієнт запасу міцності $n = 2$. Дані: $q = 10$ кН/м; $l = 1$ м; $b = h = 5a$; $\sigma_T = 320$ МПа.

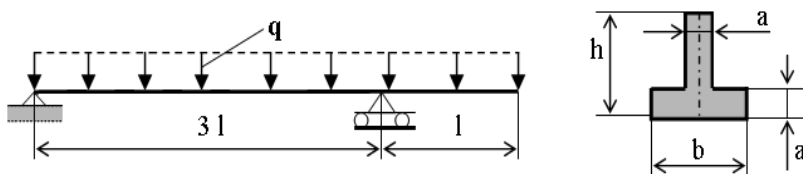


Рис. 504

626. Визначити розміри поперечного перерізу балки, навантаженої як показано на Рис. 505. Дані: $q = 24 \text{ кН/м}$; $b = h = 4\delta$; $[\sigma_p] = 2[\sigma_c] = 200 \text{ МПа}$.

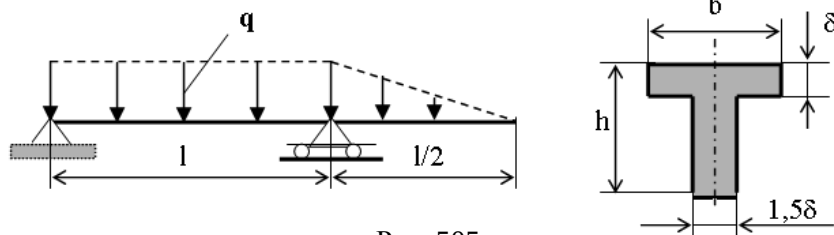


Рис. 505

627. Яким буде допустиме значення розподіленого навантаження q для балки, (Рис. 506). Дані: $l = 6 \text{ м}$; $r = 3 \text{ см}$; $b = 3r$; $h = 6r$; $[\sigma_p] = 2[\sigma_c] = 200 \text{ МПа}$.

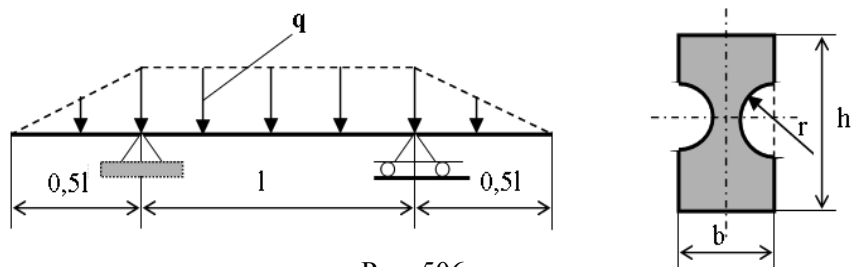


Рис. 506

628. При проектуванні балки розглядається два варіанти поперечного перерізу I або II (Рис. 507). Який з варіантів більше заощаджує матеріалу і на скільки відсотків? Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $l = 6a$; $P = 3/2qa$; $[\sigma_{зг}] = 160 \text{ МПа}$.

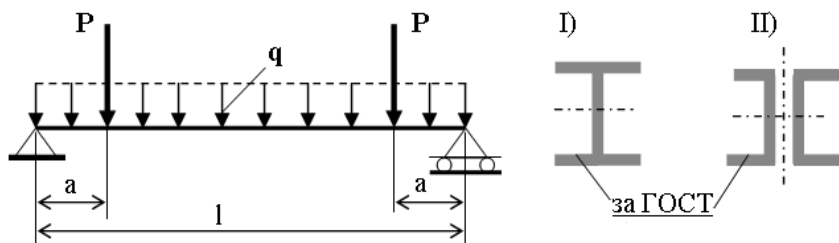


Рис. 507

629. Обчислити допустимі значення навантажень q і P для балки у вигляді тонкостінної труби, показаної на Рис. 508. Дані: $l = 4 \text{ м}$; $\delta = 5 \text{ мм}$; $a = 16\delta$; $[\sigma_{зг}] = 160 \text{ МПа}$.

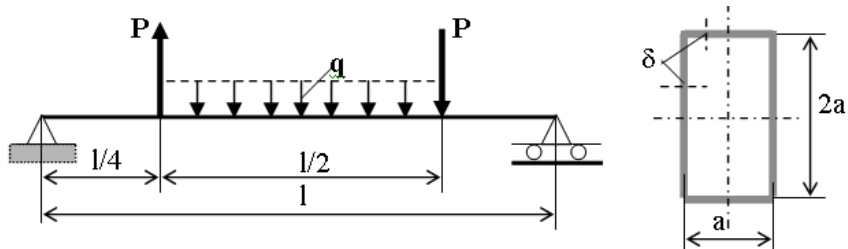


Рис. 508

630. Для балки, показаної на Рис. 509, побудувати епюри внутрішніх сил і обчислити необхідний момент опору на згин поперечного перерізу. Дані: $q = 2 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $P = ql$; $[\sigma_{зг}] = 140 \text{ МПа}$.

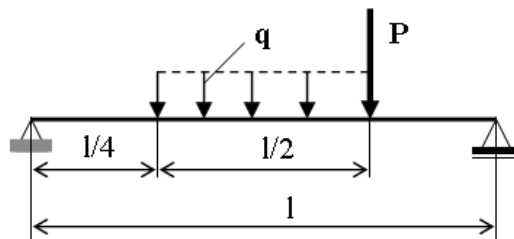


Рис. 509

631. Труба зі співвідношенням діаметрів $D/d = 5/4$ є балкою, навантаженою як показано на Рис. 510. Розрахувати діаметри D і d . Дані: $q = 4 \text{ кН/м}$; $P = qa$; $M = Pa$; $[\sigma_{зг}] = 120 \text{ МПа}$.

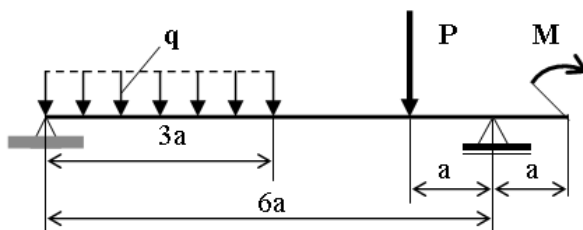


Рис. 510

632. Балка прямокутного перерізу, навантажена, як показано на Рис. 511. Для якого x_0 напруження в точці з координатами $(3/4l, -h/2, 0)$ будуть найбільшими? Дані: $l = 2 \text{ м}$.

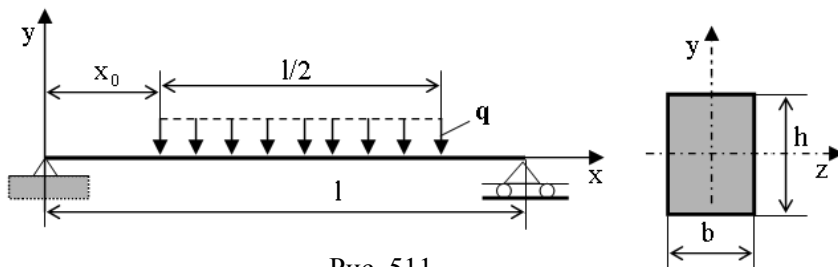


Рис. 511

633. Побудувати епюри внутрішніх сил і розрахувати необхідні розміри поперечного перерізу балки, показаної на Рис. 512. Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $M = ql^2/24$; $D = 4/3d$; $[\sigma_{зг}] = 160 \text{ МПа}$.

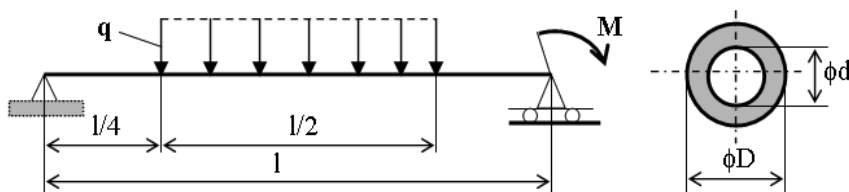


Рис. 512

634. Розрахувати розміри поперечного перерізу балки, показаної на Рис. 513. Дані: $q = 4 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$; $M = ql^2/12$; $a = 10\delta$; $[\sigma_{зг}] = 150 \text{ МПа}$.

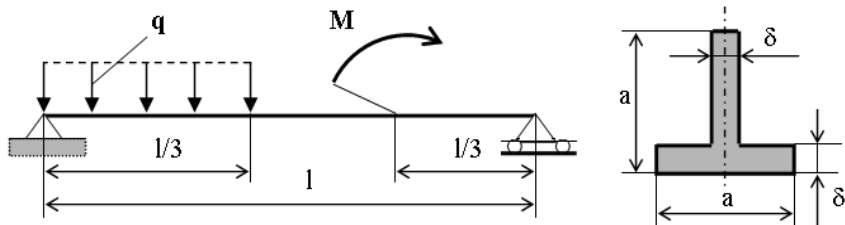


Рис. 513

635. Двотаврова балка № 28 навантажена як показано на Рис. 514. Перевірити, чи підбір поперечного перерізу балки є вірний, якщо необхідний коефіцієнт запасу міцності $n = 1,8$. Дані: $q = 30 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $M = \frac{4}{3}qa^2$; $\sigma_r = 220 \text{ МПа}$.

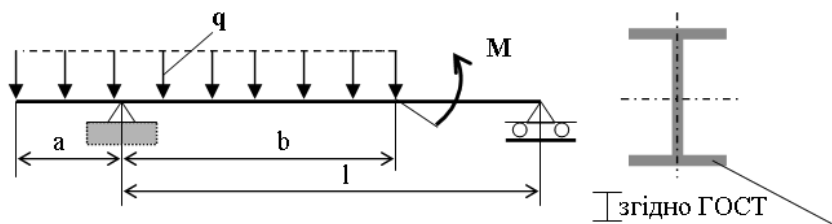


Рис. 514

636. Перевірити чи балка, показана на Рис. 515, витримає задане навантаження. Дані: $q = 16 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $P = ql/4$; $M = ql^2/8$; $r = 1 \text{ см}$; $b = 5r$; $h = 10r$; $a = 6r$; $[\sigma_{зг}] = 200 \text{ МПа}$.

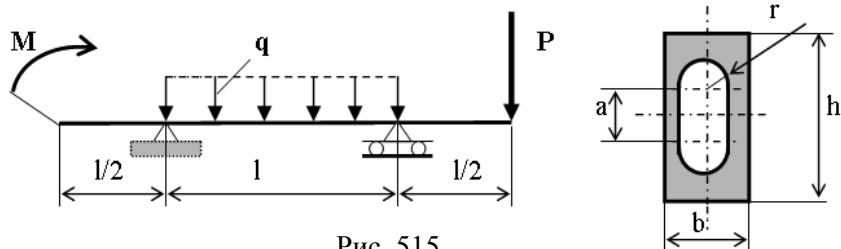


Рис. 515

637. Для балки, навантаженої як показано на Рис. 516, побудувати епюри внутрішніх сил і розрахувати потрібний момент опору при згині поперечного перерізу балки. Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $P = ql/2$; $M = ql^2/2$; $[\sigma_{зг}] = 140 \text{ МПа}$.

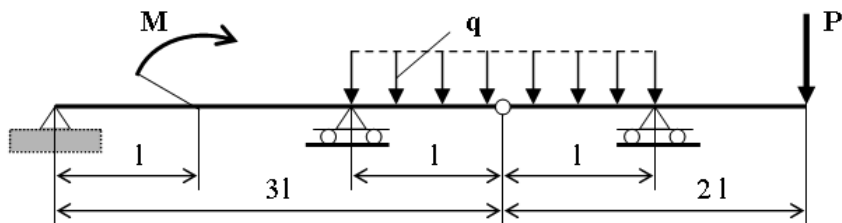


Рис. 516

- 638.** Дві балки, одна АВ трубчастого перерізу зі співвідношенням діаметрів $D/d = 10/8$ і друга ВС кругового повного перерізу діаметром d' , з'єднані і навантажені як показано на Рис. 517. Розрахувати розміри поперечних перерізів балок. Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 120 \text{ МПа}$.

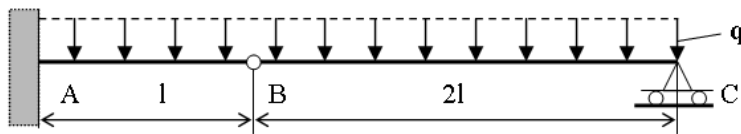


Рис. 517

- 639.** Балка з шарніром С сталого кругового перерізу на відрізку АС і сталого прямокутного перерізу на відрізку ВС переносить розподілене навантаження q (Рис. 518). Розрахувати поперечні перерізи обох частин балки. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $h = 2b$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 160 \text{ МПа}$.

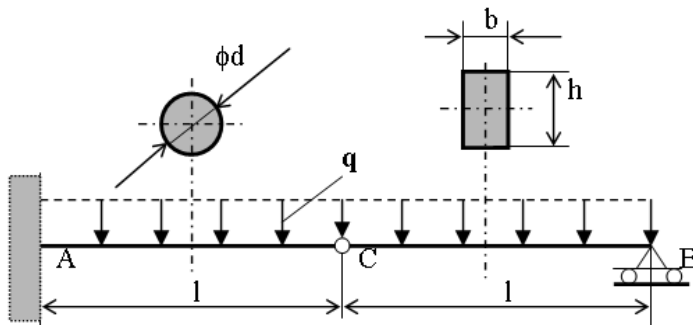


Рис. 518

- 640.** Балка сталого перерізу з шарніром навантажена як показано на Рис. 519. Розрахувати необхідні розміри поперечного перерізу. Дані: $q = 6 \text{ кН/м}$; $l = 3 \text{ м}$; $h = 3/2b$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 120 \text{ МПа}$.

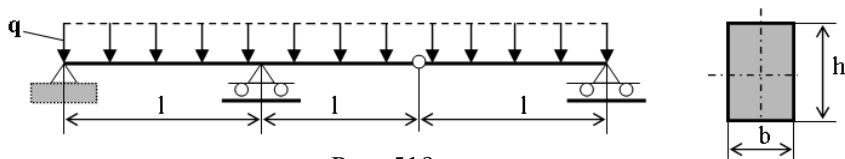


Рис. 519

- 641.** Для балки з шарніром, показаної на Рис. 520, побудувати епюри внутрішніх сил і розрахувати максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі. Дані: $q = 8 \text{ кН/м}$; $l = 1 \text{ м}$; $P = ql$; $R = 4 \text{ см}$.

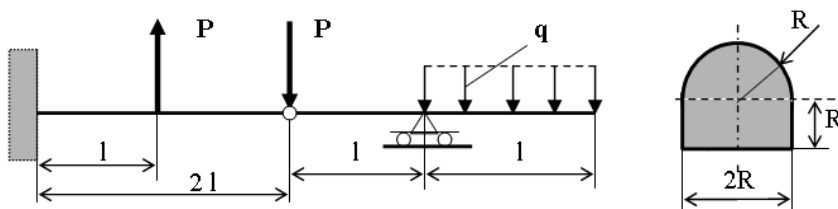


Рис. 520

642. Яку величину навантаження q_0 можна допустити для балки, показаної на Рис. 521. Дані: $l = 4$ м; $\delta = 2$ см; $b = 4\delta$; $h = 6\delta$; $[\sigma_{зг}] = 140$ МПа.

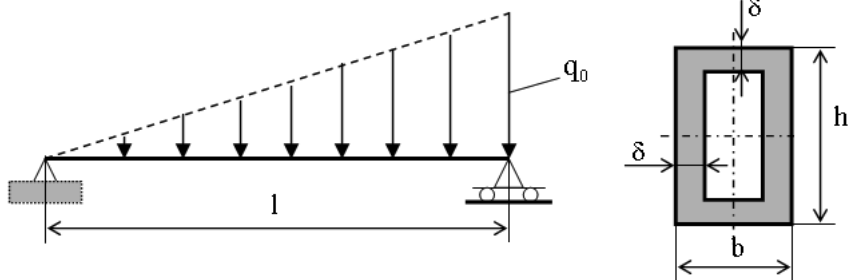


Рис. 521

643. Побудувати епюри згинальних моментів $M_{зг}(x)$, поперечних сил $Q(x)$, а також максимальних напружень згину $\sigma(x)$ в поперечних перерізах балки, показаної на Рис. 522. Дані: $q_0 = 20$ кН/м; $l = 2$ м; $\delta = 5$ мм; $b = 10\delta$; $h = 2b$.

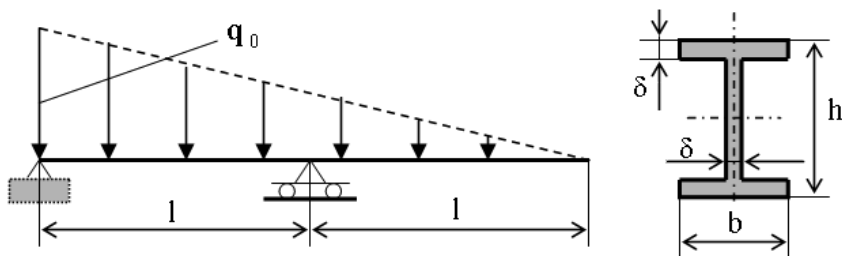


Рис. 522

644. Балка АВ з шарніром С навантажена як показано на Рис. 523. Побудувати епюри внутрішніх сил і обчислити допустиме значення навантаження q_0 . Дані: $l = 4$ м; $d = 5$ см; $[\sigma_{зг}] = 200$ МПа.

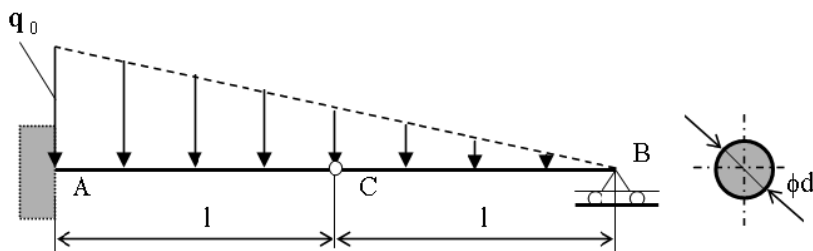


Рис. 523

7.3.3. Згин з врахуванням дії поперечної сили

1. Поперечна сила при згині викликає в перерізі нерівномірний розподіл дотичних напружень.
2. У випадку дії поперечної сили Q на поперечний переріз F з віссю симетрії y , як показано на Рис. 524, вертикальну складову дотичних напружень в довільній

точці перерізу, віддаленій на y від осі z , обчислюють за формулою Журавського:

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b},$$

де: S_z^* – статичний момент заштрихованого відрізаного перерізу F^* (Рис. 524) відносно осі z ; I_z – момент інерції поперечного перерізу F відносно осі z ; b – ширина перерізу F на віддалі y від осі z .

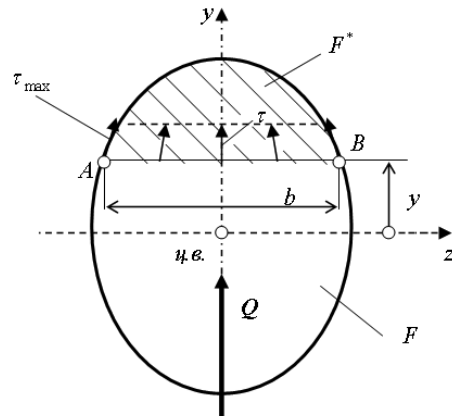


Рис. 524

3. З Рис. 524 видно, що оскільки вертикальна складова дотичних напружень для всіх точок на ширині b є однаковою, то максимальні дотичні напруження діятимуть на зовнішній поверхні в даному випадку в точках А і В.
4. Приклади розподілу дотичних напружень для точок на вертикальній осі симетрії, коли поперечна сила Q діє уздовж цієї осі, для прямокутного, кругового і двотаврового перерізів показано на Рис. 525.

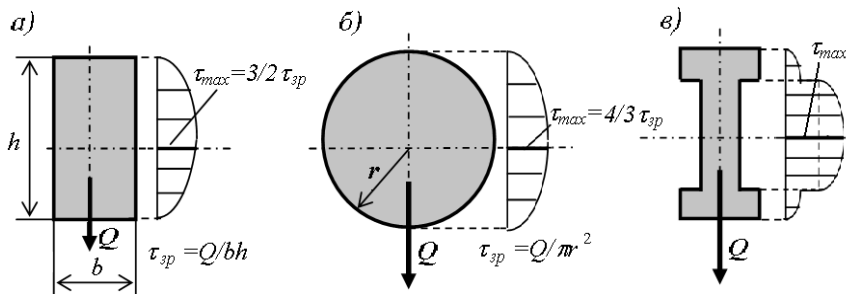


Рис. 525

645. При якій довжині балки, показаної на Рис. 526, максимальне напруження від згину буде рівне максимальному дотичному напруженню? Дані: $b = 8$ см; $h = 2b$.

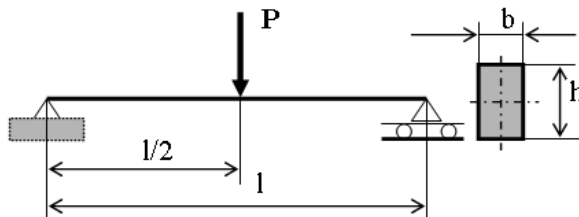


Рис. 526

Розв'язок

Епюри згинальних моментів і поперечних сил для заданої балки подано на Рис. 527. Помітно, що максимальні значення згинального моменту і поперечної сили становлять

$$\text{відповідно } M_{\text{зг}} = \frac{Pl}{4} \text{ і } Q = \frac{P}{2}.$$

З умовами задачі необхідно порівняти максимальні напруження від згину з максимальними напруженнями від зрізу:

$$\sigma_{\text{зг max}} = \tau_{\text{max}}; \text{ тобто } \frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{\frac{P}{2}}{2bh};$$

$$\text{звідки отримано довжину } l = \frac{h}{2}.$$

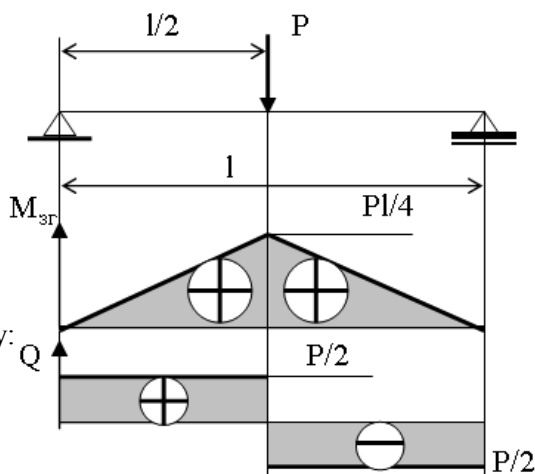


Рис. 527

Виявляється, що у балці на двох опорах навантаженій посередині зосередженою силою, з довжиною, рівною половині висоти прямокутного поперечного перерізу, максимальні напруження від згину рівні максимальним напруженням від зрізу. Крім того, екстремальні напруження від згину діють у крайніх точках, а максимальні напруження від зрізу - в точках, що знаходяться посередині перерізу.

Слід підкреслити, що максимальні дотичні напруження не залежать від довжини балки, натомість напруження від згину зростають при збільшенні довжини балки. Це означає, що вплив напружень від зрізу в напруженому стані матеріалу в порівнянні з впливом напружень від згину зменшується із зростанням довжини балки і ним нехтують для довгих балок.

- 646.** Обчислити нормальні і дотичні напруження в поперечному перерізі балки (Рис. 528) для точок з координатами $(l/4; h/4; 0)$. Дані: $P = 5 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $b = 8 \text{ см}$; $h = 2b$.

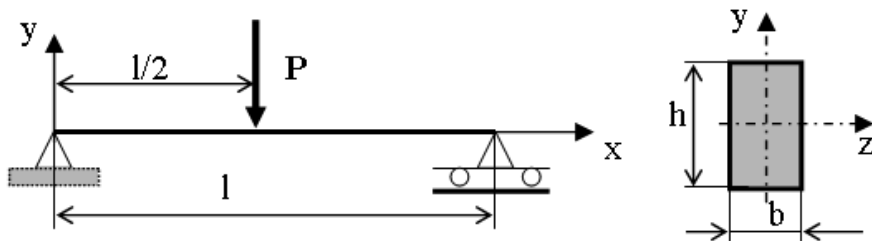


Рис. 528

647. Для балки, показаної на Рис. 529, обчислити максимальні нормальні і дотичні напруження, а також вказати перерізи і точки, в яких вони виникають. Дані: $P = 30 \text{ кН}$; $l = 6 \text{ м}$; $b = 6 \text{ см}$; $h = 10 \text{ см}$.

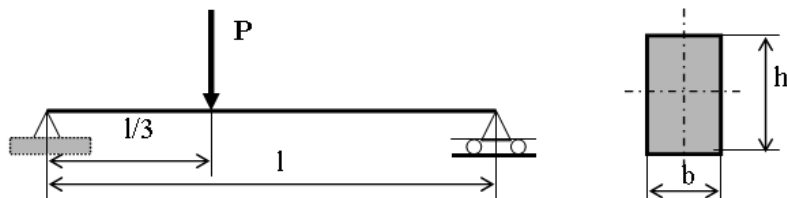


Рис. 529

648. Сталева балка ($\rho = 78,5 \text{ кН/м}^3$) квадратного поперечного перерізу $4 \text{ см} \times 4 \text{ см}$ і довжиною 4 м вільно оперта на кінцях. Обчислити максимальні нормальні і дотичні напруження, спричинені власною вагою балки, а також вказати перерізи і точки, в яких вони виникають.

649. Дерев'яна балка склеєна з двох частин з поперечними розмірами $b \times h$ як показано на Рис. 530. Провести перевірочний розрахунок балки. Дані: $P = 4 \text{ кН}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $b = 6 \text{ см}$; $h = 5 \text{ см}$; $[\sigma_p] = 10 \text{ МПа}$ – міцність деревини на розтяг; $[\tau_{zp}] = 1,2 \text{ МПа}$ – міцність клею на зріз.

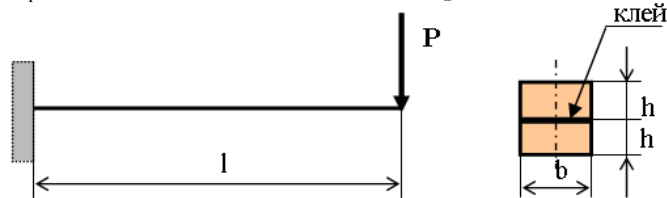


Рис. 530

Розв'язок

Епюру поперечних сил і згинальних моментів у балці подано на Рис. 531.

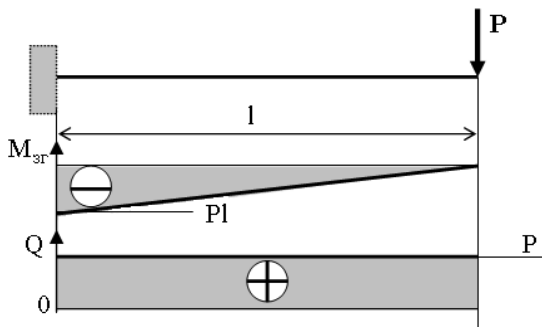


Рис. 531

Екстремальний згинальний момент рівний $M_{\text{зr}} = Pl$, а екстремальна поперечна сила $Q = P$. Максимальні розтягуючі напруження, спричинені згинальним моментом, виникають у верхніх волокнах поперечного перерізу у місці закріплення балки і рівні:

$$\sigma = \frac{Pl}{W} = \frac{Pl}{\frac{b(2h)^2}{6}} = \frac{4 \cdot 50}{\frac{6(2 \cdot 5)^2}{6}} = 20 \text{ МПа}.$$

Максимальні дотичні напруження виникають посередині поперечного перерізу і вони рівні дотичним напруженням в клеї. Ці напруження для прямокутного поперечного перерізу становлять:

$$\tau = \frac{3}{2} \tau_{\text{сп}} = \frac{3}{2} \frac{P}{b \cdot 2h} = \frac{3}{2} \frac{4}{6 \cdot 10} = 0,1 \text{ кН/см}^2 = 1 \text{ МПа}.$$

З вищенаведених обчислень слідує, що максимальні напруження в клеї становлять 1 МПа і менші від допустимих напружень, рівних 1,2 МПа. Натомість напруження від згину становлять 20 МПа і вдвічі перевищують допустимі напруження на розтяг. Очевидним є висновок, що не можна прийняти заданих навантажень для балки.

650. Дерев'яна консольна балка квадратного поперечного перерізу і довжиною l навантажена на кінці силою P . Розрахувати поперечні розміри балки, якщо допустимі напруження для її матеріалу $[\sigma_{\text{зг}}] = 10 \text{ МПа}$; $[\tau_{\text{зр}}] = 2 \text{ МПа}$. Дані: $P = 50 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$.

651. Дерев'яна балка склеєна з двох частин як показано на Рис. 532. Яким може бути допустиме розподілене навантаження q , якщо допустиме напруження клею на зріз $[\tau_{\text{зр}}] = 0,8 \text{ МПа}$, а деревини на розтяг $[\sigma_{\text{р}}] = 6 \text{ МПа}$? Дані: $l = 2 \text{ м}$; $b = 5 \text{ см}$.

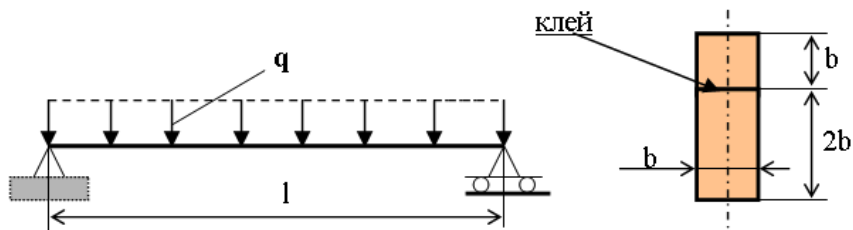


Рис. 532

652. Розрахувати найбільші нормальні і дотичні напруження в поперечних перерізах дерев'яної балки (Рис. 533). Отримані результати порівняти з допустимими значеннями для соснової деревини $[\sigma_{\text{р}}] = 9 \div 10 \text{ МПа}$; $[\tau_{\text{зр}}] = 1 \div 1,2 \text{ МПа}$. Дані: $P = 2 \text{ кН}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $l = 4a$; $b = 6 \text{ см}$; $h = 3b$.

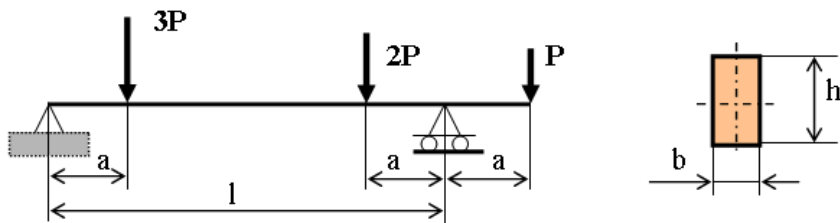


Рис. 533

653. Розрахувати максимальну величину дотичних напружень τ_{max} , спричинених поперечною силою, а також вказати всі точки, в яких напруження від поперечної сили знаходяться в межах $\tau_{\text{max}} \div 0,5\tau_{\text{max}}$ для балки, показаної на Рис. 534. Дані: $b = 4 \text{ см}$; $h = 2b$; $l = 10h$.

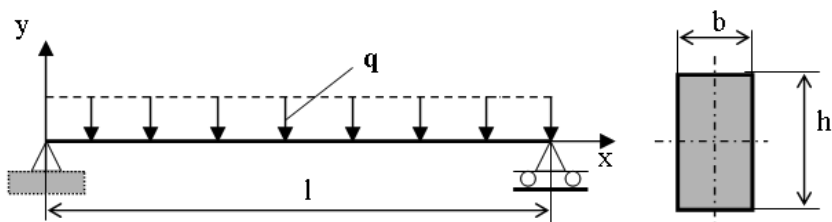


Рис. 534

654. Розрахувати максимальні дотичні напруження в перерізі CC' балки, показаної на Рис. 535. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $b = 8 \text{ см}$; $h = 4b$; $\alpha = 45^\circ$.

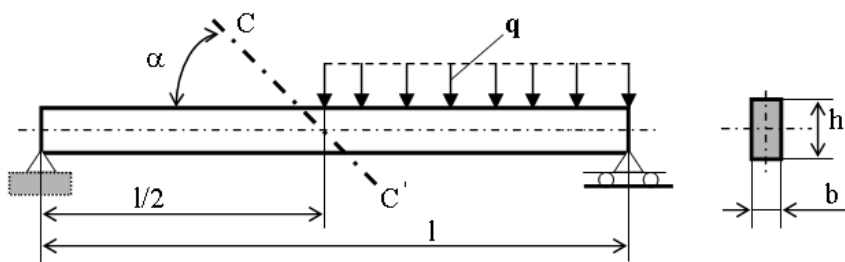


Рис. 535

655. Для якої довжини балки l , показаної на Рис. 536, максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі становитимуть 10% максимальних напружень від згину? Дані: $\delta = 5 \text{ мм}$; $b = 20\delta$; $h = 40\delta$.

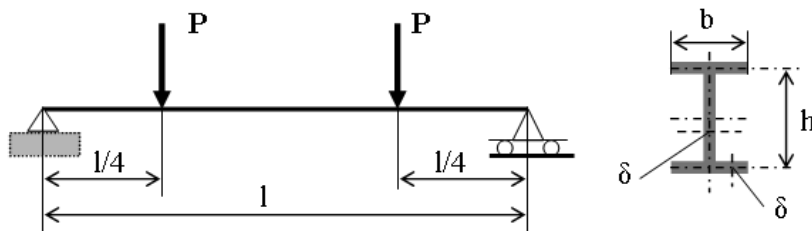


Рис. 536

656. Як зміняться максимальні дотичні напруження, якщо переріз, навантажений поперечною силою Q як показано на Рис. 537а, повернути у положення, показане на Рис. 537б?

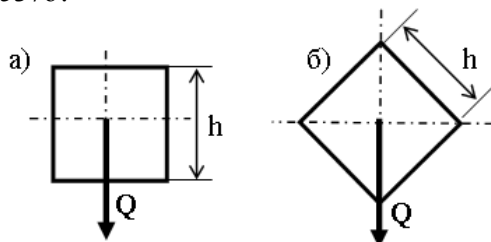


Рис. 537

657. У балці квадратного поперечного перерізу вдвічі збільшено висоту. Як зміниться величина максимальних дотичних напружень для випадку згину при наявності поперечної сили при її незмінній величині?

658. Балка кругового перерізу навантажена поперечною силою Q і згинальним моментом $M_{зг}$. Побудувати епюру дотичних напружень для точок на діаметрі перерізу, що співпадає з напрямком дії поперечної сили Q .

659. У поперечному перерізі балки, показаної на Рис. 538, діє сила P вздовж осі y . Визначити розподіл дотичних напружень в цьому перерізі для точок на осі y і обчислити їх максимальне значення. Дані: $P = 20$ кН; $b = 6$ см; $h = 10$ см.

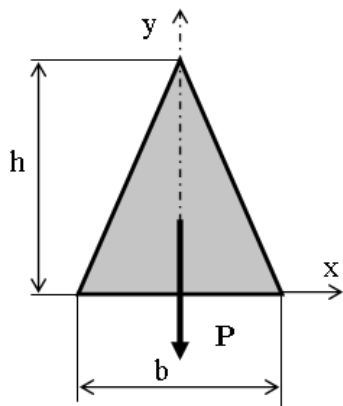


Рис. 538

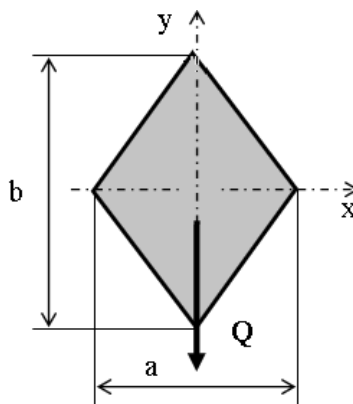


Рис. 539

660. У поперечному перерізі балки у вигляді ромба (Рис. 539) діє поперечна сила Q та згинальний момент. Визначити розподіл дотичних напружень для точок перерізу, що лежать на осі y і розрахувати їх максимальне значення. Дані: $Q = 40$ кН; $a = 4$ см; $b = 8$ см.

661. В перерізі балки у вигляді півкруга діє поперечна сила Q як показано на Рис. 540. Визначити розподіл дотичних напружень для точок перерізу, розташованих на осі y , а також обчислити максимальні дотичні напруження і їх місцезнаходження. Дані: $Q = 30$ кН; $R = 4$ см.

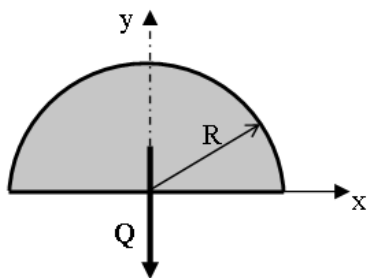


Рис. 540

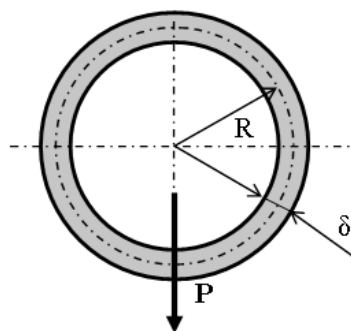


Рис. 541

662. У поперечному перерізі балки діє сила P як показано на Рис. 541. Обчислити максимальні напруження зрізу в цьому перерізі. Дані: $P = 9,42$ кН; $\delta = 5$ мм; $R = 10\delta$.

663. Як зміняться величини дотичних напружень в поперечному перерізі балки від поперечної сили, якщо всі розміри перерізу збільшити у два рази?

664. У двотавровому перерізі діє поперечна сила Q як показано на Рис. 542. Розрахувати максимальні дотичні напруження в цьому перерізі. Дані: $Q = 100$ кН; $h = 20$ см; $b = 9$ см; $\delta = 8$ мм; $\delta_1 = 10$ мм.

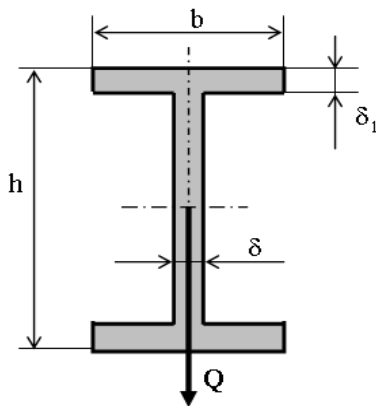


Рис. 542

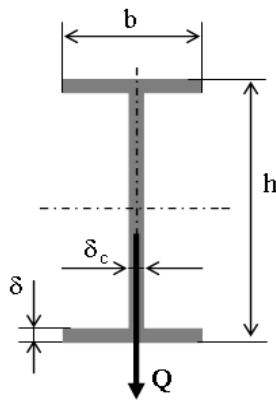


Рис. 543

665. Двотавровий переріз балки, показаний на Рис. 543, зрізається силою Q . Обчислити максимальні напруження зрізу і відсоток сили Q , яка передається вертикальною стінкою. Дані $Q = 120$ кН; $\delta = 10$ мм; $h = 20\delta$; $b = 9\delta$; $\delta_c = 0,8\delta$.

666. Визначити розподіл дотичних напружень в перерізі балки, показаній на Рис. 544, спричинених дією сили Q і обчислити їх максимальне значення. Дані: $Q = 160$ кН; $H = 100$ мм; $h = 80$ мм; $B = 50$ мм; $b = 30$ мм.

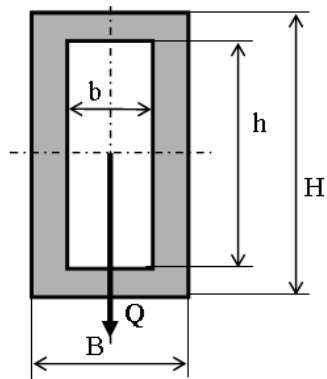


Рис. 544

667. Балка виконана з двох швелерів № 20 згідно з ГОСТ ($F = 23,4$ см²; $I_x = 1520$ см⁴) і двох пластин, зклепаних разом як показано на Рис. 545. На поперечний переріз балки діє поперечна сила Q . Розрахувати крок заклепкового з'єднання. Дані: $Q = 80$ кН; $b = 200$ мм; $g = 8$ мм; $d = 10$ мм – діаметр заклепки; $[\tau_{зр}] = 50$ МПа – допустиме напруження на зріз матеріалу заклепок.

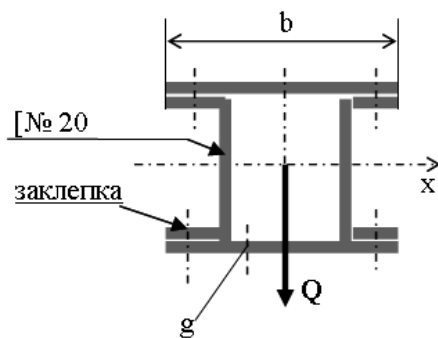


Рис. 545

- 668.** Обчислити максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі балки, показаному на Рис. 546, в якому діє поперечна сила Q . Дані: $Q = 160$ кН; $\delta = 1$ см; $h = 16\delta$; $b_1 = 10\delta$; $b_2 = 6\delta$.

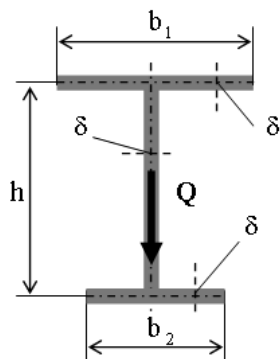


Рис. 546

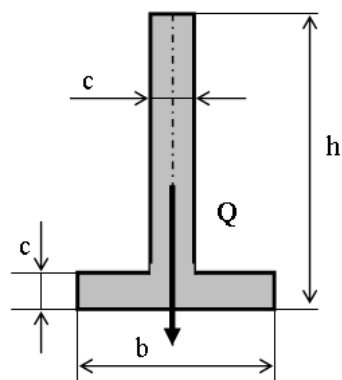


Рис. 547

- 669.** На Т-подібний переріз балки діє поперечна сила як показано на Рис. 547. Обчислити максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі. Дані: $Q = 112$ кН; $c = 2$ см; $b = 5c$; $h = 10c$.
- 670.** Обчислити максимальні дотичні напруження і дотичні напруження в точках А і В перерізу під впливом поперечної сили Q (Рис. 548). Дані: $Q = 180$ кН; $\delta = 10$ мм; $b = 10\delta$; $h = 22\delta$; $c = 5\delta$.

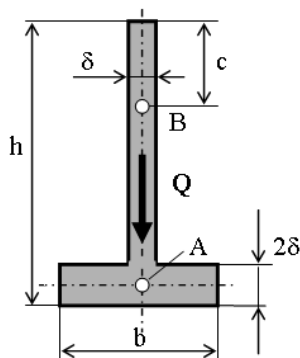


Рис. 548

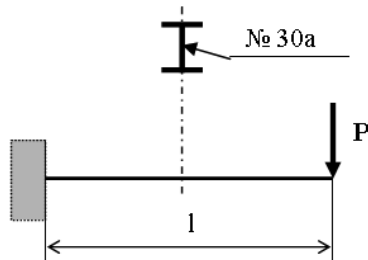


Рис. 549

671. При якій довжині l консольної двотаврової балки № 30а згідно з ГОСТ, навантаженої на кінці силою P як показано на Рис. 549, максимальні напруження від згину будуть рівні максимальним дотичним напруженням від поперечної сили?

Розв'язок

Двотаврова балка № 30а згідно з ГОСТ має наступні характеристики: $I_x = 7780 \text{ см}^2$; $W_x = 518 \text{ см}^3$; $i_x = 12,5 \text{ см}$; $F = 49,9 \text{ см}^2$; $h = 300 \text{ мм}$; $t = 10,7 \text{ мм}$.

Максимальні напруження від згину виникають у верхніх точках поперечного перерізу в місці закріплення балки і рівні:

$$\sigma = \frac{Pl}{W_x}.$$

Максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі від поперечної сили P виникають посередині перерізу і рівні:

$$\tau = \frac{PS_x^*}{I_x \delta_s}.$$

Порівнюючи праві сторони вищевказаних виразів згідно з умовами задачі отримано наступний вираз для довжини балки, при якій відповідні напруження будуть рівними:

$$l = \frac{W_x S_x^*}{I_x \delta_s}, \text{ де: } W_x = \frac{I_x}{h}; S_x^* = \frac{F}{2} i_x.$$

Після підстановки цих залежностей і спрощення отримано:

$$l = \frac{W_x S_x^*}{I_x \delta_s} = \frac{69,1 \cdot 11,9}{30 \cdot 1,08} = 25,4 \text{ см}.$$

Балка повинна мати довжину 19,4 см, отже дуже малу в порівнянні із висотою поперечного перерізу.

672. Балка складена з двох швелерів і двох пластин, з'єднаних заклепками, навантажена силою P як показано на Рис. 550. Яку поперечну силу переносять всі заклепки, що з'єднують пластину зі швелерами? Дані: $P = 200 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$.

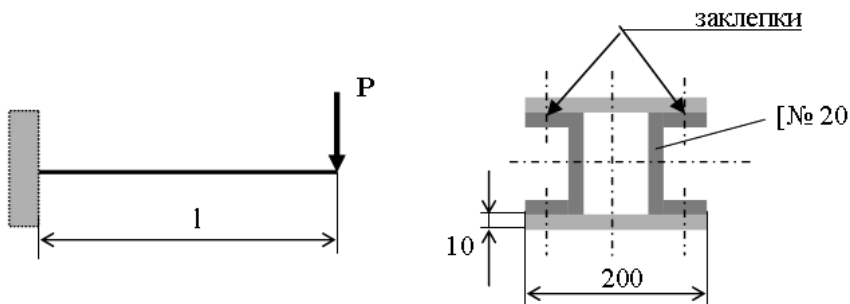


Рис. 550

Розв'язок

Швелер № 20 згідно з ГОСТ має наступні параметри: $h = 200$ мм; $b = 80$ мм; $F = 25,0$ см²; $I_x = 1660$ см⁴; $i_x = 8,16$ см.

Сила, що переноситься усіма заклепками P_3 , які з'єднують верхню пластину з двома швелерами, дорівнює добутку дотичних напружень, які виникли б в місці стику пластини зі швелерами, якщо б з'єднані елементи були б цілісним перерізом з площею перерізу цього з'єднання $2sl$. Отже

$$P_3 = \tau \cdot 2sl, \text{ де } \tau = \frac{PS_x^P}{I_x 2s}.$$

Після підстановки і спрощень отримано вираз для сили, що передається заклепками:

$$P_3 = \frac{S_x^P l}{I_x} P.$$

Статичний момент перерізу верхнього шару відносно осі x становить $S_x^P = 20 \cdot 1 \cdot 10,5 = 210$ см³. Момент інерції цілого поперечного перерізу, нехтуючи моментами шарів відносно їх власних головних центральних осей, становить $I_x = 2[1910 + 20 \cdot 10,5^2] = 8230$ см⁴.

Остаточно, підставляючи числові дані, отримаємо силу, що передається усіма заклепками:

$$P_3 = \frac{210 \cdot 400}{8230} \cdot 200 \text{ кН} = 2041 \text{ кН}.$$

- 673.** Обчислити, яку величину навантаження P можна допустити для балки, показаної на Рис. 551, якщо $[\sigma_{зг}] = 180$ МПа. Які тоді діятимуть максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі балки? Дані: $l = 3$ м; $\delta = 1$ см; $b = 8\delta$; $h = 14\delta$.

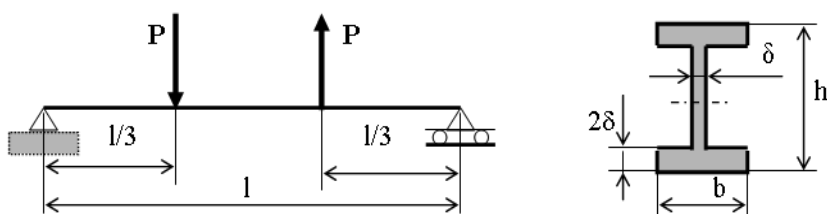


Рис. 551

- 674.** Двотаврова балка виконана з плоских елементів, з'єднаних зварними переривистими швами довжиною $l_{ш}$ з кроком t як показано на Рис. 552. Обчислити допустиму величину сили P з умови міцності $\sigma_{\max} \leq [\sigma_p]$, а потім визначити найменші допустимі відношення $l_{ш}/t$. Дані: $l = 1$ м; $h = 12$ см; $a = 8$ см; $\delta = 4$ мм; $\delta_{ш} = 0,7\delta$; $[\sigma_p] = 200$ МПа; $[\tau_{зп}] = 100$ МПа – допустимі дотичні напруження для матеріалу шва.

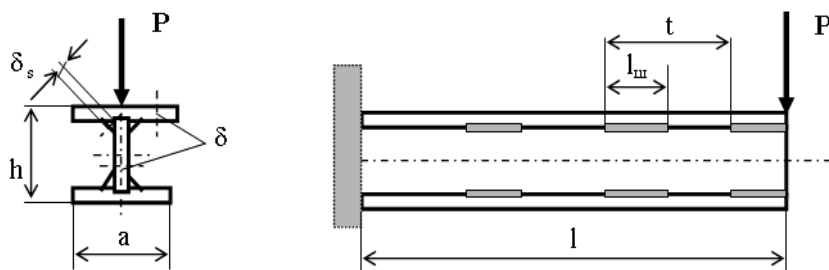


Рис. 552

675. Візок рухається вздовж балки (Рис. 553). Підібрати розміри поперечного перерізу балки, якщо допускається $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа і $[\tau_{зп}] = 80$ МПа. Дані: $P = 100$ кН; $l = 8$ м; $a = 1$ м; $b = 5\delta$; $h = 16\delta$.

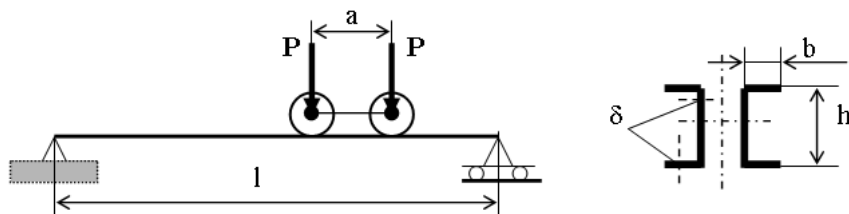


Рис. 553

676. Якою буде допустима максимальна величина розподіленого навантаження q для балки, показаної на Рис. 554, якщо $[\sigma_{зг}] = 120$ МПа і $[\tau_{зп}] = 60$ МПа? Дані: $a = 18$ см; $d = 2/3a$; $l = 20a$.

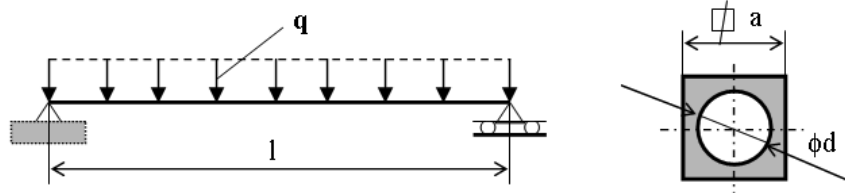


Рис. 554

677. Балка з двотавровим поперечним перерізом, виконаним зварюванням двох пластин і стінки, навантажена як показано на Рис. 555. Обчислити напруження у швах, а також найбільші нормальні і дотичні напруження в поперечному перерізі балки. Дані: $q = 2$ кН/м; $l = 6$ м; $P = 3/2ql$; $h = 600$ мм; $b = 280$ мм; $g = 16$ мм; $g_{ш} = 10$ мм; $a = 8$ мм.

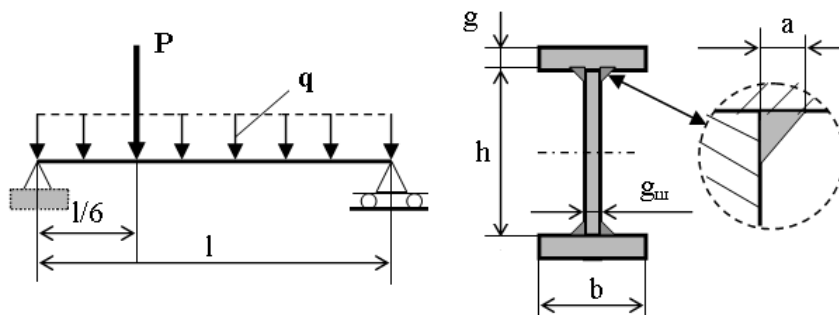


Рис. 555

678. Які навантаження можна допустити для двотаврової балки № 45 згідно ГОСТ, показаної на Рис. 556, якщо вимагається забезпечення умов міцності на згин і зріз? Дані: $a = 0,5$ м; $l = 12a$; $P = 6qa$; $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа; $[\tau_{зр}] = 80$ МПа.

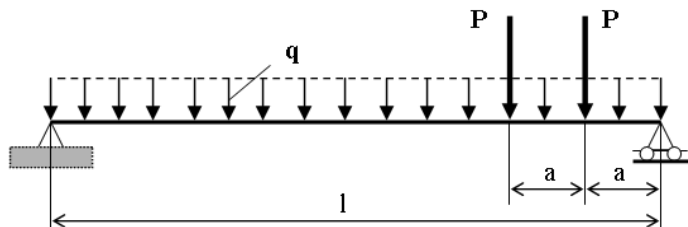


Рис. 556

679. Обчислити найбільші нормальні і дотичні напруження в поперечних перерізах балки, показаної на Рис. 557. Дані: $q_0 = 20$ кН/м; $l = 4$ м; $\delta = 2$ см; $h = 2b = 5\delta$.

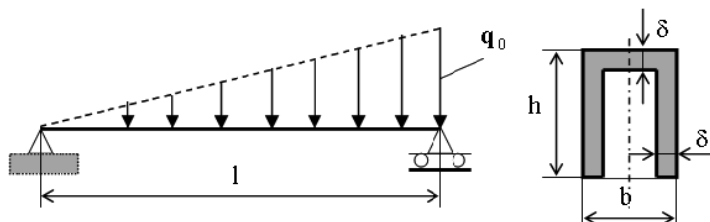


Рис. 557

680. Прямокутний поперечний переріз балки $b \times h$ навантажений поперечною силою Q і згинальним моментом $M_{зг}$, які діють в площині, що проходить через вісь балки і головну центральну вісь, паралельну стороні h . Побудувати епюру напружень за теорією максимальних дотичних напружень для точок головної центральної осі, яка співпадає з площиною дії згинального моменту. Обчислити максимальне значення. Дані: $Q = 320$ кН; $M_{зг} = 950$ кНсм; $b = 5$ см; $h = 8$ см.

681. Розрахувати еквівалентні напруження, згідно теорії τ_{max} в точках А, В і С пластини, зображеної на Рис. 558. Дані: $q = 200$ кН/м; $l = 40$ см; $b = 2$ см; $h = 8$ см.

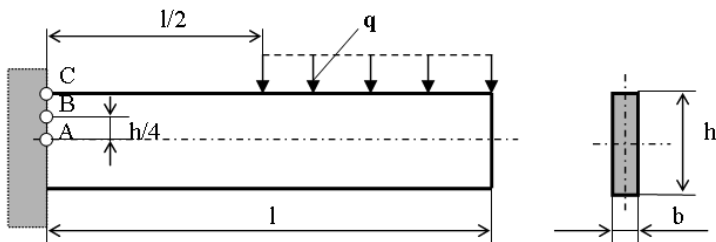


Рис. 558

682. Яку величину сили P , що діє на коротку консольну балку (Рис. 559), можна допустити згідно теорії τ_{max} ? Дані: $l = h = 10$ см; $b = h/2$; $[\sigma_p] = 100$ МПа.

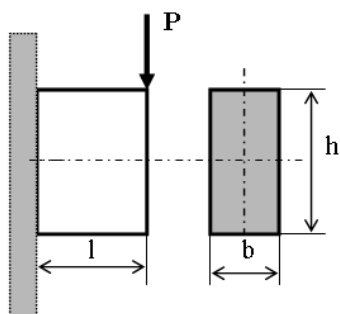


Рис. 559

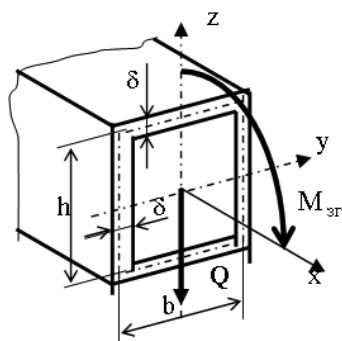


Рис. 560

683. В перерізі балки, зображений на Рис. 560, діють згинальний момент $M_{зг}$ і поперечна сила Q . Визначити точки, в яких еквівалентні напруження згідно енергетичної теорії будуть найбільшими і обчислити їх значення. Обчислити також головні напруження в цих точках. Дані: $M_{зг} = 200$ кНм; $Q = 400$ кН; $\delta = 2$ см; $b = 10\delta$; $h = 20\delta$.

684. Консольна балка зі сталім двотавровим перерізом закріплена і навантажена як показано на Рис. 561. Розрахувати поперечні розміри балки, використовуючи енергетичну теорію міцності. Дані: $P = 4$ кН; $l = 1,6$ м; $b = 10\delta$; $h = 24\delta$; $[\sigma_{зг}] = 180$ МПа.

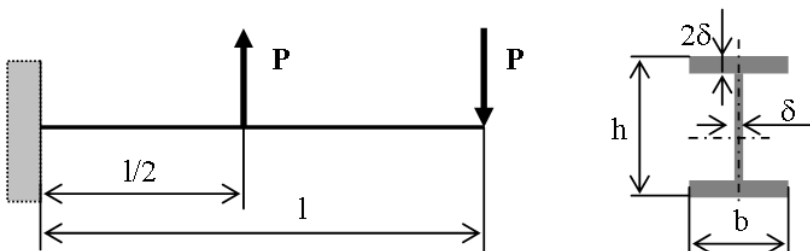


Рис. 561

685. Балка двотаврового перерізу навантажена зосередженим моментом M_A як показано на Рис. 562. Визначити максимальні еквівалентні напруження згідно теорії $\tau_{\max}$ на полках і стінці балки в перерізі C-C та вказати точки, в яких вони виникають. Дані: $M_A = 8$ кНм; $l = 4$ м; $\delta = 1$ см; $b = 5\delta$; $h = 10\delta$.

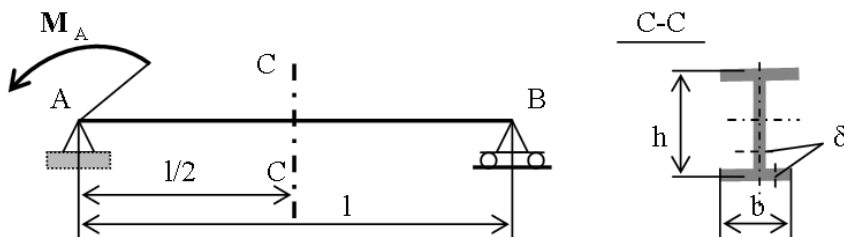


Рис. 562

7.4. Прямий згин з врахуванням переміщень

7.4.1. Прогин балок і кути повороту поперечних перерізів

1. Диференціальне рівняння прогину зігнутої осі балки має вигляд:

$$\frac{y'}{(1+y')^{3/2}} = \frac{M_{z2}(x)}{EI_z},$$

де: $y' \equiv \theta$ – кут, що утворює дотична до зігнутої осі балки у для даного x з координатною віссю x , який водночас є кутом повороту поперечного перерізу балки (Рис. 563).

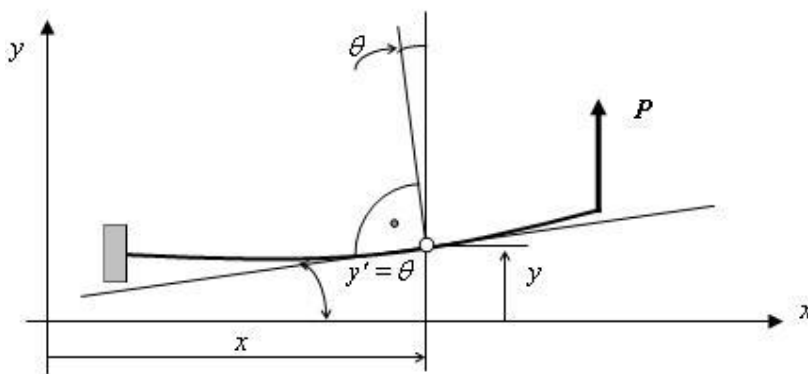


Рис. 563

2. Для малих кутів $\theta \equiv y' \ll 1$, що спостерігається при згині балок, диференціальне рівняння прогину можна спростити до вигляду:

$$EI_z y'' = M_{z2}(x).$$

Розв'язок рівняння отримується при його дворазовому інтегруванні та визначенні сталих інтегрування з початкових умов. Після першого інтегрування отримують рівняння кутів повороту поперечних перерізів балки.

3. У випадку дії на балку багатьох сил, а тим самим наявності багатьох проміжків зміни згинальних моментів, запис початкових умов і обчислення сталих інтегрування стає дуже громіздким. Наприклад, коли на балку на двох опорах діють дві зосереджені сили, маємо три рівняння прогину з шістьма сталими інтегрування, визначення яких проводиться після підставлення початкових умов шляхом розв'язку шести рівнянь з шістьма невідомими. Розв'язок такої системи рівнянь у загальному є достатньо складним.

У випадках багатьох сил, які діють на балку, застосовують метод Клебша для визначення рівнянь прогину і кутів повороту поперечних перерізів.

Метод Клебша вимагає дотримання додаткових процедур, а саме:

- 1) початок системи координат приймають на початку балки;
- 2) рівняння згинальних моментів складають так, щоб рівняння згинального моменту в наступному проміжку було таке ж, як в попередньому плюс новий складник; це відображено на рисунку та наведено приклад рівнянь для декількох проміжків.

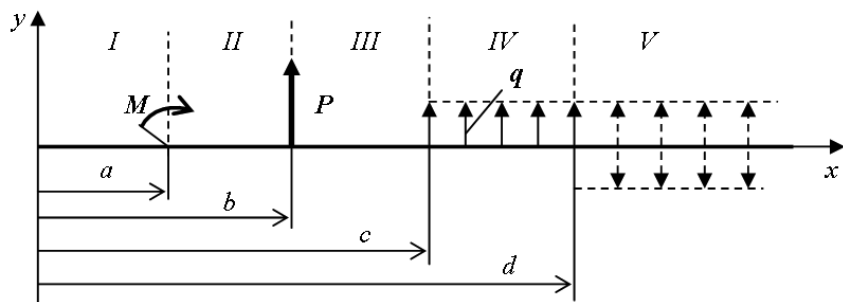


Рис. 564

- I. $M_{3z} = 0,$
- II. $M_{3z} = M(x-a)^0,$
- III. $M_{3z} = M(x-a)^0 + P(x-b),$
- IV. $M_{3z} = M(x-a)^0 + P(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2},$
- V. $M_{3z} = M(x-a)^0 + P(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2} - q \frac{(x-d)^2}{2}.$

Щоб рівняння згинального моменту на проміжку V виконувало умови подібності до попереднього рівняння була продовжена дія розподіленого навантаження q та водночас, щоб не змінити умов навантаження балки на цьому проміжку прикладено навантаження q протилежного напрямку (складник $-q(x-d)^2/2$).

3) при інтегруванні не відкривають дужок.

Після проведення інтегрування рівнянь на окремих проміжках в кожному з них будуть дві сталі інтегрування. Підставляючи початкові умови, встановлено, що сталі інтегрування на окремих проміжках рівні між собою. Крім того слід зазначити, що перша стала інтегрування рівна куту повороту поперечного перерізу в початку системи координат, помноженому на жорсткість EI балки на згин, а друга стала інтегрування рівна прогину балки в початку системи координат, помноженому також на жорсткість балки на згин.

Процедури, яких слід дотримуватись при записі рівнянь згинальних моментів, а також факт, що відповідні сталі інтегрування рівні між собою на окремих проміжках, спричиняють, що, розташовуючи сталі інтегрування на початку рівняння, можна всі рівняння об'єднати в одному. Наприклад, для п'яти проміжків балки, показаної на Рис. 564, буде:

- універсальне рівняння кутів повороту поперечних перерізів:

$$EIy' = C_I + M(x-a)_I + P \frac{(x-b)^2}{2}_{II} + q \frac{(x-c)^3}{6}_{IV} - q \frac{(x-d)^3}{6}_V,$$

- універсальне рівняння прогину лінії балки:

$$EIy = D + Cx_I + M \frac{(x-a)^2}{2}_{II} + P \frac{(x-b)^3}{6}_{III} + q \frac{(x-c)^4}{24}_{IV} - q \frac{(x-d)^4}{24}_V$$

Індекси I, II, III, IV, V вказують, до якого місця застосовується рівняння для вибраного проміжку. Сталі інтегрування C і D мають фізичний зміст такий, як було зазначено вище, і рівні:

$$C = y'_{x=0} \cdot EI; \quad D = y_{x=0} \cdot EI.$$

4. **Графічний метод** визначення лінії прогину зігнутих балок полягає у використанні схожості диференціальних рівнянь кривої провисання гнучкої нитки і лінії прогину балки:

$$Hy'' = q(x),$$

$$EIy'' = M_{32}(x).$$

Натягу H відповідає жорсткість балки EI, а розподіленому навантаженню $q(x)$ відповідає згинальний момент $M_{32}(x)$. Трактуючи згинальний момент як вторинне навантаження, зване також фіктивним, а жорсткість EI як натяг зображають криву провисання, яка в цьому випадку є лінією прогину балки. З отриманої лінії прогину можна визначити, враховуючи відповідний масштаб, дійсний прогин балки і кути повороту поперечних перерізів з точністю $\pm 2\%$.

Графічний метод особливо придатний у випадках, коли на балку діє багато силових факторів або коли балка має відрізки різної жорсткості. У цьому другому випадку диференціальне рівняння лінії прогину матиме вигляд:

$$y'' = \frac{1}{EI} \left[M_{32}(x) \frac{EI}{EI(x)} \right],$$

де: EI - обрана жорсткість на одному з відрізків балки, а вираз в квадратній дужці трактують як модифіковане навантаження.

Подальший розрахунок проводиться ідентично як для балки зі сталою жорсткістю.

5. **Графо-аналітичний метод** визначення прогинів і кутів повороту поперечних перерізів балок полягає у відповідному використанні диференціальних залежностей Шведлера щодо сил, які діють на балку:

$$\frac{dM_{32}}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{d^2 M_{32}}{dx^2} = -q.$$

Якщо прийняти згинальний момент як певне розподілене фіктивне навантаження $q_\phi = -M_{32}$ то, враховуючи вищевказані залежності, можна записати диференціальне рівняння прогину балки у вигляді:

$$EIy'' = \frac{d^2 M_\phi}{dx^2},$$

де: M_ϕ – вторинний згинальний момент, (фіктивний) від розподіленого навантаження q_ϕ .

У результаті подвійного інтегрування, отримано:

$$EIy' = \frac{dM_\phi}{dx} + C = Q_\phi + C,$$

$$EIy = M_\phi + Cx + D.$$

Вигляд кривої провисання лінії і прогину балки будуть ідентичними, якщо сталі інтегрування C і D дорівнюватимуть нулю. Це відбудеться тоді, коли

дійсну балку замінено фіктивною балкою. Перетворення балки на фіктивну полягає в заміні вільного кінця жорстко закріпленим і навпаки, а також заміна рухомої опори шарніром і навпаки. Шарнірну нерухому опору залишають без змін. Тоді кути повороту і переміщення обчислюють із виразів:

$$y' = \frac{Q_{\phi}}{EI}, y = \frac{M_{\phi}}{EI}.$$

Графо-аналітичний метод придатний у випадках, коли потрібно розрахувати переміщення або кути повороту поперечних перерізів у визначених місцях.

- 686.** Знайти рівняння лінії прогину і кутів повороту поперечних перерізів консольної балки, навантаженої на кінці силою P як показано на Рис. 565. Розрахувати екстремальні величини. Дані: P ; l ; EI .

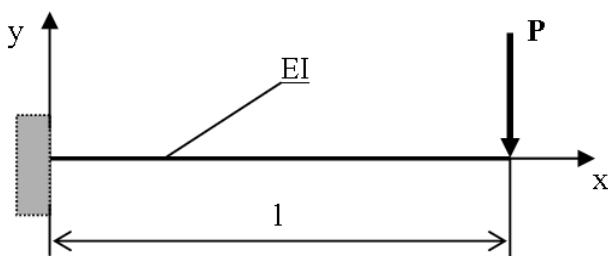


Рис. 565

Розв'язок

Для прийнятої на Рис. 565 системи координат згинальний момент для довільного x рівний $M_{зг} = -P(1-x)$. Звідси диференціальне рівняння прогину балки

$$EIy'' = -P(1-x).$$

Після першого і другого інтегрування отримано:

$$EIy' = -Plx + P\frac{x^2}{2} + C; \quad EIy = -Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6} + Cx + D.$$

Підставляючи початкові умови:

1) $y'_{x=0} = 0$; 2) $y_{x=0} = 0$ встановлено, що $C = D = 0$. Остаточні рівняння кутів повороту поперечних перерізів і прогину балки повинні мати вигляд:

$$EIy' = -Plx + P\frac{x^2}{2}; \quad EIy = -Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6}.$$

Екстремальні значення будуть при $x = l$ і є рівними:

$$y'_{x=l} = -\frac{Pl^2}{2EI};$$

$$y_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3EI}.$$

687. Знайти рівняння лінії прогину і кутів повороту поперечних перерізів для балки, показаної на Рис. 566, а також розрахувати екстремальні значення. Дані: P ; l ; EI .

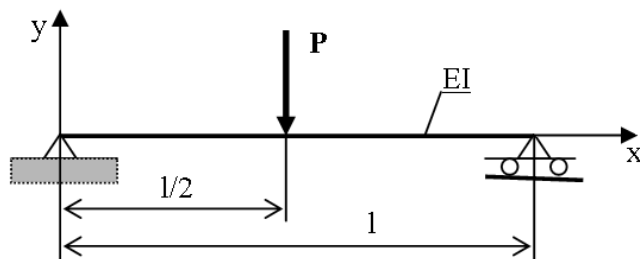


Рис. 566

Розв'язок

Балка навантажена посередині зосередженою силою P , а це означає, що прогин балки є симетричним. Отже, достатньо написати зазначені рівняння для першого проміжку (Рис. 567).

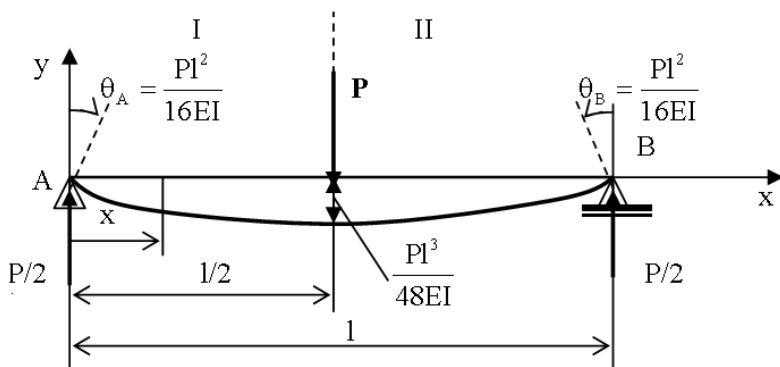


Рис. 567

Проміжок I:

$$EIy'' = \frac{P}{2}x; EIy' = P\frac{x^2}{4} + C; EIy = P\frac{x^3}{12} + Cx + D.$$

Початкові умови: 1) $y_{x=0} = 0$; 2) $y'_{x=\frac{l}{2}} = 0$. Після підставлення початкових

умов отримано $C = -\frac{Pl^2}{16}$; $D = 0$. Після підставлення сталих інтегрування отримують наступні рівняння для кутів повороту поперечних перерізів і прогину балки:

$$EIy' = P\frac{x^2}{4} - \frac{Pl^2}{16};$$

$$EIy = P\frac{x^3}{12} - \frac{Pl^2}{16}x.$$

Екстремальний кут повороту поперечного перерізу буде при $x = 0$ і згідно симетрії рівний за абсолютною величиною куту повороту перерізу на опорі В :

$$y'_{x=0} \equiv \theta_A = -\theta_B = -\frac{Pl^2}{16EI}.$$

Найбільший прогин за абсолютною величиною виникає посередині балки і дорівнює:

$$y_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Pl^3}{48EI}.$$

- 688.** Консольна балка переносить розподілене навантаження (Рис. 568). Визначити рівняння прогину і кутів повороту поперечних перерізів, а також розрахувати їх екстремальні значення. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $EI = 2 \cdot 10^7 \text{ кНсм}^2$.

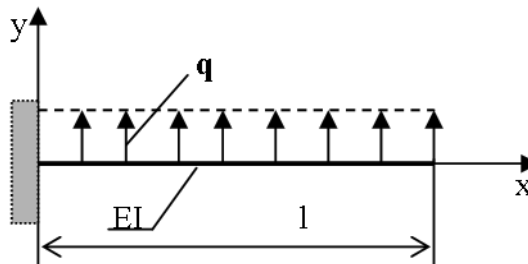


Рис. 568

- 689.** Обчислити взаємні кути поворотів поперечних перерізів балки А і С, а також В і С у випадку навантаження її на кінці зосередженим моментом M як показано на Рис. 569. Дані: $M = 10 \text{ кНм}$; $l = 2 \text{ м}$; $EI = 400 \text{ кНм}^2$.

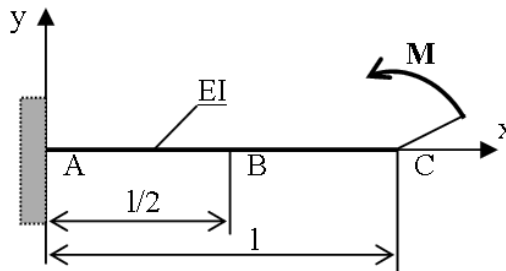


Рис. 569

Розв'язок

У прийнятій системі координат (Рис. 570), приймаючи до уваги, що згинальний момент в кожному перерізі рівний M , буде наступне диференціальне рівняння прогину балки:

$$EIy'' = M.$$

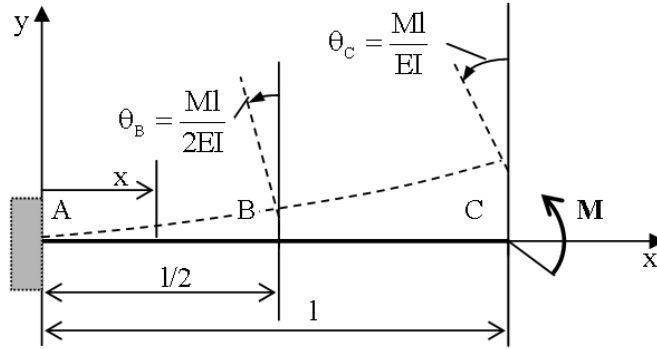


Рис. 570

Після першого інтегрування: $EIy' = Mx + C$.

З початкової умови $y'_{x=0} = 0$ отримуємо $C = 0$ і остаточний вид рівняння кутів повороту поперечних перерізів балки буде: $EIy' = Mx$.

Кути повороту поперечних перерізів для точок А, В і С рівні:

$$y'_{x=0} \equiv \theta_A = 0; \quad y'_{x=\frac{l}{2}} \equiv \theta_B = \frac{Ml}{2EI}; \quad y'_{x=l} \equiv \theta_C = \frac{Ml}{EI}.$$

Шукані взаємні кути повороту поперечних перерізів:

$$\theta_{AC} = \theta_C - \theta_A = \frac{Ml}{EI} = \frac{10^3 \cdot 200}{4 \cdot 10^6} = 0,05 \text{ рад} = 2,9^\circ;$$

$$\theta_{BC} = \theta_C - \theta_B = \frac{Ml}{2EI} = 0,025 \text{ рад} = 1,45^\circ.$$

690. Обчислити прогин посередині балки (Рис. 571) і кути повороту поперечних перерізів на опорах А і В. Дані: $q = 24 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $EI = 2000 \text{ кНм}^2$.

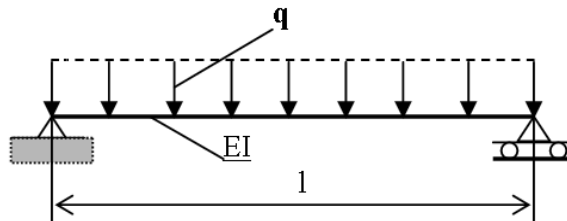


Рис. 571

Розв'язок

Для прийнятої системи координат (Рис. 572) згинальний момент на відстані x від опори А рівний $\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$ і тому диференціальне рівняння прогину матиме вигляд:

$$EIy'' = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

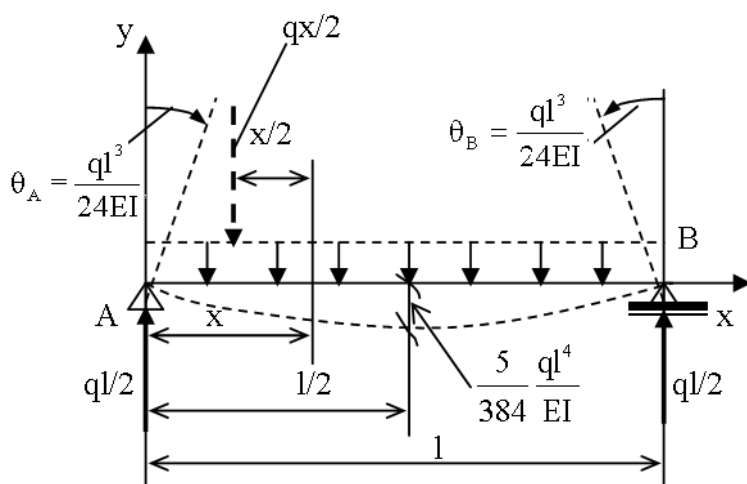


Рис. 572

Інтегруючи двічі, отримано:

$$EIy' = \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C,$$

$$EIy = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + Cx + D.$$

Підставляючи початкові умови: 1) $y_{x=0} = 0$; 2) $y'_{x=0,5} = 0$, обчислюють сталі

інтегрування $C = -\frac{ql^3}{24}$; $D = 0$.

Отже отримано наступні рівняння переміщень :

$$EIy' = \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} - \frac{ql^3}{24},$$

$$EIy = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3}{24}x.$$

Прогин посередині балки дорівнює:

$$y_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

Кути поворотів поперечних перерізів на опорах рівні:

$$\theta_B = -\theta_A = y'_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

Числові значення переміщень :

$$y_{x=0,5} = -\frac{5}{384} \frac{24 \cdot 2^4}{2 \cdot 10^3} = 0,5 \text{ см}; \quad \theta_B = -\theta_A = \frac{24 \cdot 4^3}{24 \cdot 2 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,1^\circ.$$

- 691.** На якій відстані x_0 від стіни потрібно прикласти силу P до консольної балки, показаної на Рис. 573, щоб переміщення кінця балки B було в два рази більше від переміщення точки прикладання сили? Дані: $l = 5$ м.

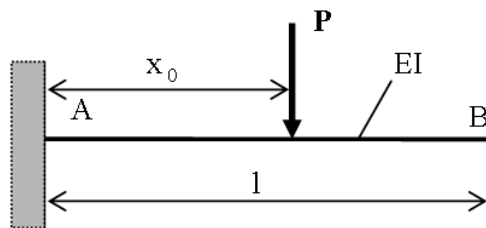


Рис. 573

692. Обчислити прогин і кут повороту поперечного перерізу вільного кінця консольної балки, показаної на Рис. 574. Дані: $M = 0,9$ кНм; $l = 3$ м; $EI = 3,6 \cdot 10^5$ кНсм².

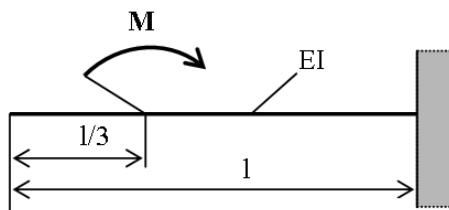


Рис. 574

693. Розрахувати стрілу прогину балки, показаної на Рис. 575, а також кути повороту поперечних перерізів A і C. Дані: $P = 3$ кН; $l = 1$ м; $M = Pl$; $EI = 2 \cdot 10^4$ кНсм².

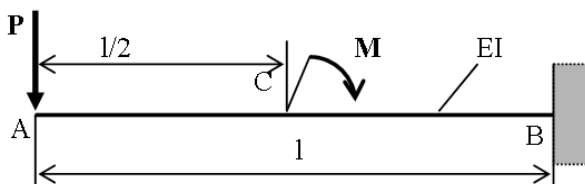


Рис. 575

Розв'язок

Визначення рівнянь прогину балки і кутів повороту поперечних перерізів проводиться із застосуванням методу Клебша. Початок системи координат знаходиться на початку вільного кінця балки як показано на Рис. 576.

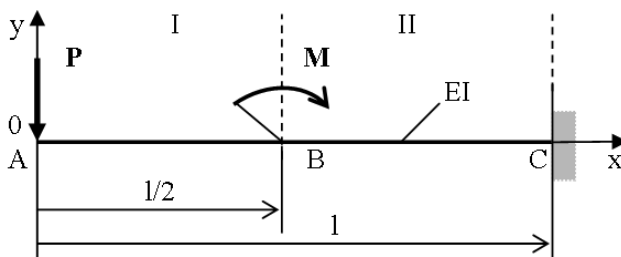


Рис. 576

Диференціальне рівняння прогину балки для проміжків I і II:

$$EIy'' = -Px|_I + M(x - l/2)|_II.$$

Інтегруючи двічі, отримано:

$$EIy' = C - P\frac{x^2}{2}|_I + M(x - l/2)|_II, \quad EIy = Cx + D - P\frac{x^3}{6}|_I + M\frac{(x - l/2)^2}{2}|_II.$$

Наявні початкові умови: 1) $y'_{x=0} = 0$; 2) $y_{x=l} = 0$. Після їх підставлення отримано два рівняння:

$$0 = C - P\frac{l^2}{2} + M\frac{1}{2}; \quad 0 = Cl + D - P\frac{l^3}{6} + M\frac{l^2}{8}.$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримано: $C = P\frac{l^2}{2} - M\frac{1}{2}$; $D = P\frac{l^3}{6} - M\frac{l^2}{8}$. Після підстановки сталих інтегрування до вихідних рівнянь і, враховуючи, що $M = Pl$:

$$EIy' = -P\frac{x^2}{2}|_I + Pl\left(x - \frac{1}{2}\right)|_II, \quad EIy = \frac{Pl^3}{24} - P\frac{x^3}{6}|_I + Pl\frac{(x - l/2)^2}{2}|_II.$$

З рівнянь переміщень слідує, що в проміжку I максимальний прогин буде при $x = 0$ і дорівнює $y_{x=0} = \frac{Pl^3}{24EI} = 6,25 \text{ см}$. В проміжку II переміщення зменшуються від 3,125 см до 0, а кути повороту поперечного перерізу в обох проміжках мають від'ємні значення. Звідси висновок, що підрахований прогин є екстремальним, отже є стрілою прогину балки.

Шукані кути повороту поперечних перерізів рівні:

$$y'_{x=0} \equiv \theta_A = 0;$$

$$y'_{x=\frac{l}{2}} \equiv \theta_B = -\frac{Pl^2}{8EI} = -\frac{3 \cdot 1^3}{8 \cdot 2 \cdot 10^4} = -\frac{3}{16} = -0,1875 \text{ рад} = -10,7^\circ.$$

694. Стержень кругового перерізу і довжиною $l = 2 \text{ м}$, навантажений скручуючим моментом $M_{ск} = 20 \text{ кНм}$, закручено на кут $\varphi = 1,3^\circ$. Скільки становитиме стріла прогину цього стержня, що буде консольною балкою, навантаженою на кінці силою $P = 30 \text{ кН}$? Дані: $\mu = 0,3$.

695. Зосереджений момент M діє на відстані a від лівої опори балки (Рис. 577). Для якої відстані a різниця абсолютних величин кутів повороту поперечних перерізів балки у місці прикладання моменту M і на опорі В буде найбільша і скільки буде становити? Дані: $l = 12 \text{ м}$.

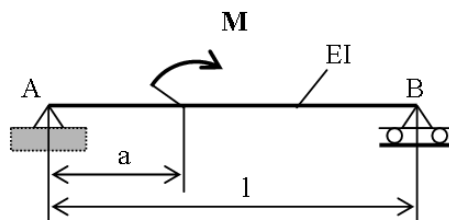


Рис. 577

696. Записати універсальне рівняння прогину балки і кутів повороту поперечних перерізів балки, показаної на Рис. 578. Розрахувати кути повороту поперечних перерізів А, В, С і D. Дані: $P = 1,5 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $h = 4 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

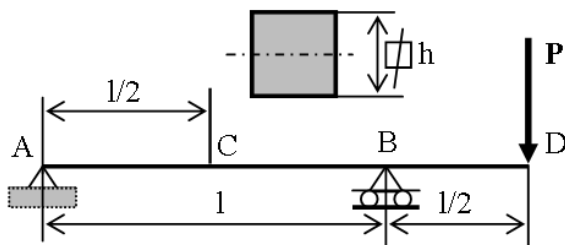


Рис. 578

697. Обчислити прогин і кути повороту поперечних перерізів А, В і С балки, показаної на Рис. 579. Дані: $P = 2,4 \text{ кН}$; $l = 1,5 \text{ м}$; $EI = 4 \cdot 10^5 \text{ кНсм}^2$.

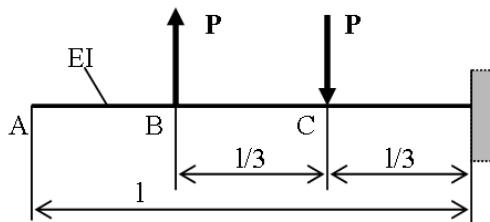


Рис. 579

698. Приймаючи наближене рівняння прогину балки у вигляді $y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$, навантаженої як показано на Рис. 580, розрахувати прогин посередині балки. Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 3 \text{ м}$; $EI = 8 \cdot 10^6 \text{ кНсм}^2$.

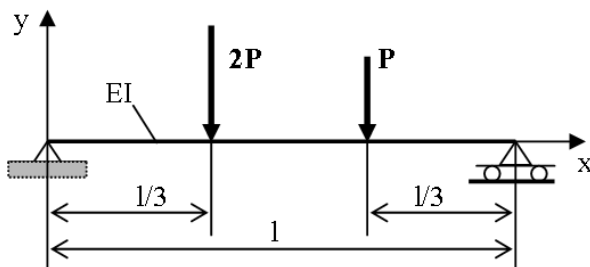


Рис. 580

699. Тензометр, наклеєний на нижній полиці двотавра в перерізі С вздовж осі балки (Рис. 581), показав відносне видовження $\epsilon = 0,2 \cdot 10^{-3}$. Обчислити величину сил P і стрілу прогину балки. Дані: $l = 6 \text{ м}$; $h = 20 \text{ см}$; $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $EI = 4,5 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

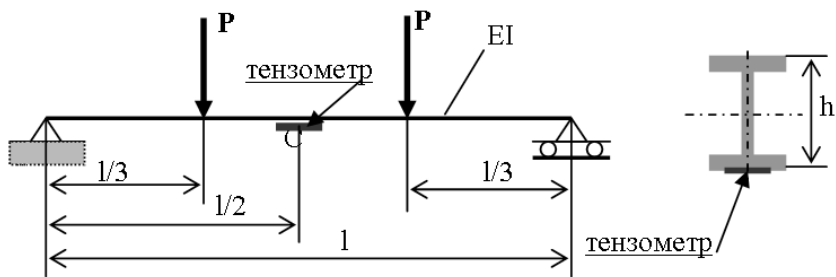


Рис. 581

- 700.** Балка закріплена і навантажена як показано на Рис. 582. Обчислити відносний кут, на який повернуться взаємно поперечні перерізи опор А і В. Дані: $P = 30$ кН; $l = 2$ м; $a = l/5$; $b = 8$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

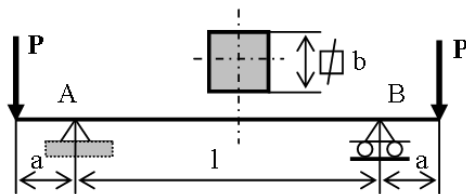


Рис. 582

- 701.** Записати універсальне рівняння кутів повороту поперечних перерізів і прогину балки, показаної на Рис. 583, а також розрахувати величини кутів повороту поперечних перерізів на опорах і стрілу прогину балки. Дані: $P = 40$ кН; $l = 6$ м; $EI = 4,8 \cdot 10^5$ кНм².

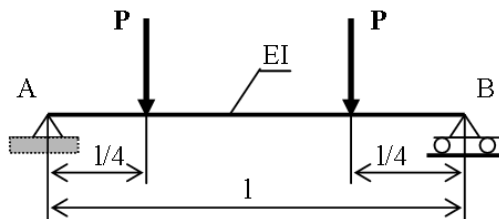


Рис. 583

- 702.** Розрахувати стрілу прогину балки, навантаженої зосередженими моментами M і $2M$ як показано на Рис. 584. Дані: $M = 20$ кНм; $l = 3$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $I = 4 \cdot 10^3$ см⁴.

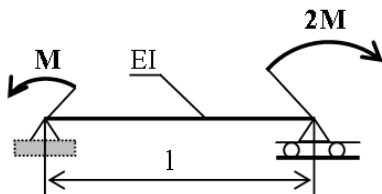


Рис. 584

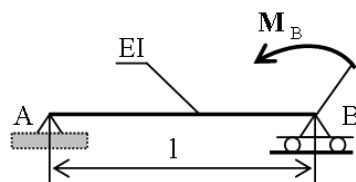


Рис. 585

703. Балка навантажена зосередженим моментом M_B (Рис. 585). Визначити кути повороту перерізів опор і стрілу прогину балки. Порівняти стрілу прогину з прогином посередині балки. Дані: $M_B = 40$ кНм; $l = 4$ м; $EI = 8 \cdot 10^3$ кНм².

704. Якою має бути жорсткість на згин EI балки, показаної на Рис. 586, щоб її прогин посередині між опорами досягнув значення 2 см? Дані: $q = 10$ кН/м; $l = 4$ м; $P = ql/2$.

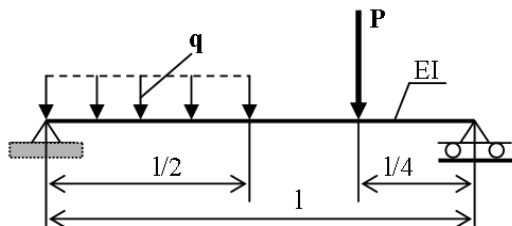


Рис. 586

705. Сила P діє на балку як показано на Рис. 587. Для якої відстані c кут повороту поперечного перерізу опори А досягне екстремального значення? Дані: $l = 12$ м.

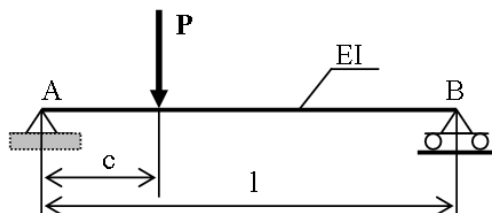


Рис. 587

706. Записати рівняння прогину балки АВ, навантаженої силою P через консоль (Рис. 588). Розрахувати прогин в точці С балки. Дані: $P = 20$ кН; $l = 4$ м; $EI = 2,5 \cdot 10^5$ Нм².

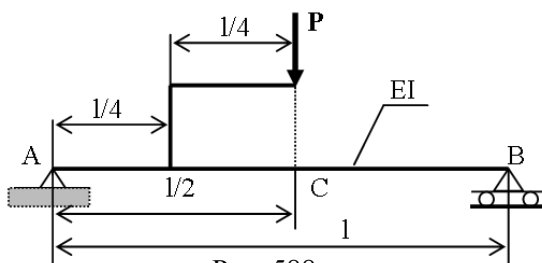


Рис. 588

707. Встановити прогин і кути повороту поперечних перерізів на кінці та посередині консольної балки, навантаженої як показано на Рис. 589. Дані: $q = 24$ кН/м; $l = 4$ м; $P = ql$; $EI = 1,2 \cdot 10^3$ кНм².

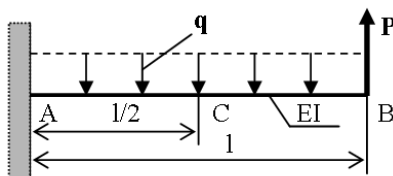


Рис. 589

708. Обчислити кути повороту поперечних перерізів і прогин в місцях прикладання зосереджених сил для консольних балок, показаних на Рис. 590. Дані: P , l , EI .

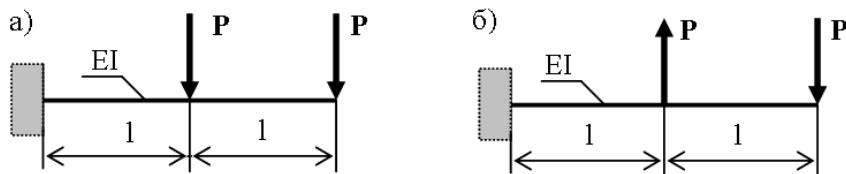


Рис. 590

709. Розрахувати кути повороту поперечних перерізів і прогин посередині та на кінцях консольних балок, показаних на Рис. 591. Порівняти отримані результати. Дані: q , l , EI .

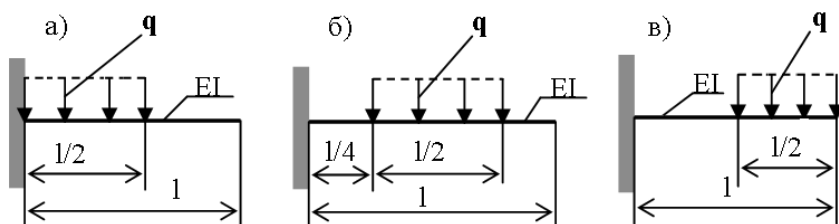


Рис. 591

710. Обчислити прогин і кути повороту поперечних перерізів А і D балки, показаної на Рис. 592. Дані: $M = 4$ кНм; $l = 1$ м; $EI = 5 \cdot 10^5$ кНсм².

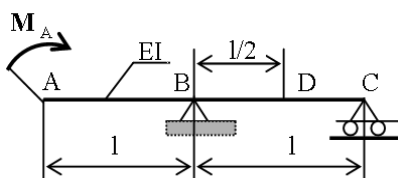


Рис. 592

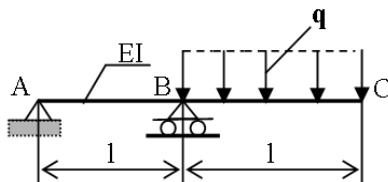


Рис. 593

711. Записати рівняння прогину осі балки, показаної на Рис. 593, а також обчислити значення прогинів між опорами А і В та на її кінці в точці С. Дані: $q = 20$ кН/м; $l = 2$ м; $EI = 5 \cdot 10^5$ кНсм².

712. Балка симетрично навантажена силами P як показано на Рис. 594. Для якого значення a прогини в точках С і D будуть рівні між собою за абсолютною величиною? Дані: $l = 6$ м.

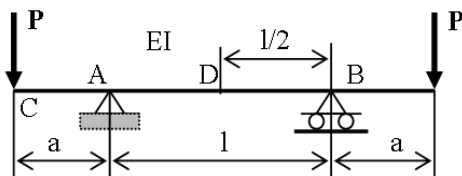


Рис. 594

713. Знайти універсальне рівняння прогину і кутів повороту поперечних перерізів балки, показаної на Рис. 595. Обчислити екстремальні значення. Дані: $P = 32 \text{ кН}$; $l = 6 \text{ м}$; $EI = 4 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

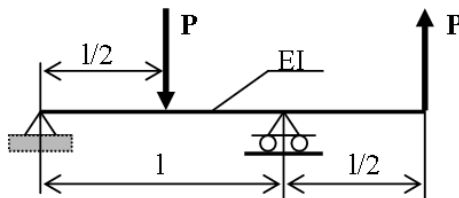


Рис. 595

714. Дві консольні балки закріплені як показано на Рис. 596. З якою силою впливатимуть на себе кінці балок, якщо до верхньої балки прикладемо силу P , що викликає стрілу прогину цієї балки рівну 2δ ? Дані: $l = 4 \text{ м}$; $\delta = 2 \text{ см}$; $EI = 3 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

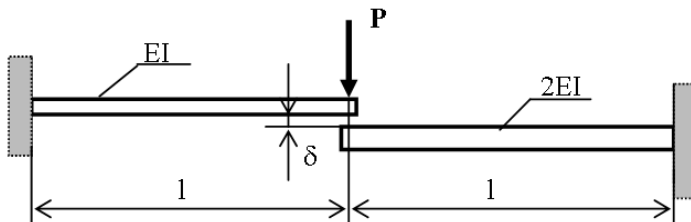


Рис. 596

715. Жорстка балка BC вагою G закріплена на двох консольних балках як показано на Рис. 597. Обчислити співвідношення вертикальних переміщень точок B і C. Дані: G , l , EI .

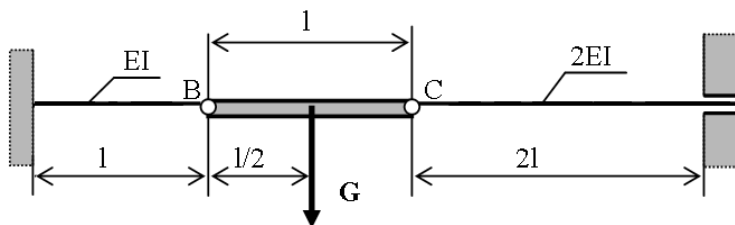


Рис. 597

716. Обчислити стрілу прогину і кут повороту перерізу B для балки, показаної на Рис. 598. Дані: $q_0 = 18 \text{ кН/м}$; $l = 3 \text{ м}$; $EI = 2,7 \cdot 10^7 \text{ Нм}^2$.

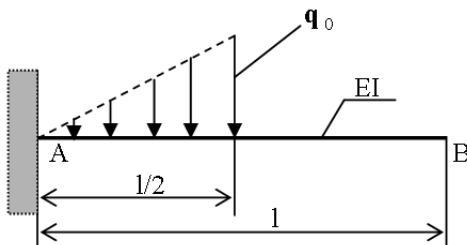


Рис. 598

717. Обчислити відстань b стріли прогину f від середини балки, якщо сила P діє так як показано на Рис. 599. Дані: $l = 8$ м; $a = 1/4$.

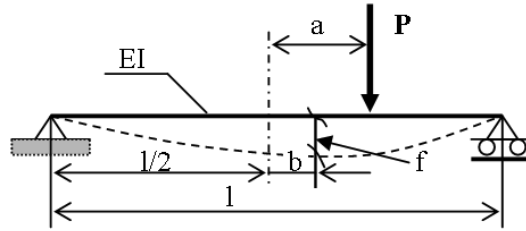


Рис. 599

718. Для закріпленої і навантаженої балки, показаної на Рис. 600, записати універсальне рівняння прогину. Обчислити кути повороту поперечних перерізів на опорах, а також прогин балки в точці С. Дані: $q = 36 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $P = 2qa$; $M = qa^2$; $EI = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

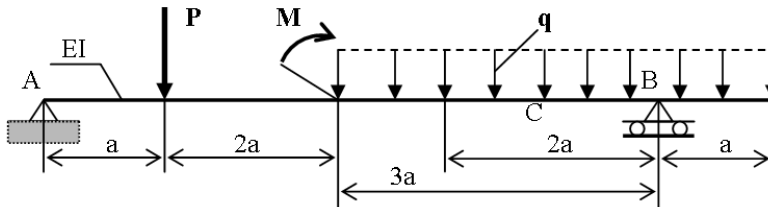


Рис. 600

719. Записати рівняння прогину балки, показаної на Рис. 601, і обчислити вертикальне переміщення точки С. Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $M = ql^2/8$; $EI = 4 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$.

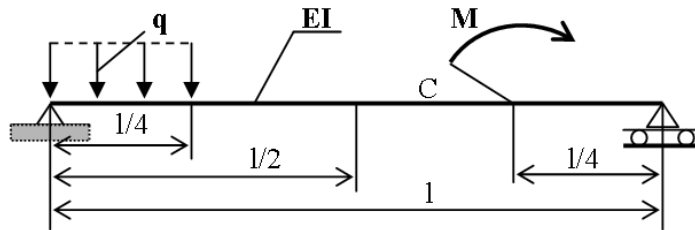


Рис. 601

720. Для якого значення сили P стріла прогину балки буде посередині між опорами (Рис. 602)? Обчислити величину цієї стріли прогину. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 3,3 \text{ м}$; $EI = 1000 \text{ кНм}^2$.

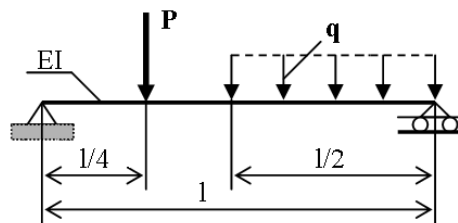


Рис. 602

721. При яких значеннях симетрично розташованих сил P (Рис. 603) не буде вертикального переміщення середини балки. Дані: $q = 15 \text{ кН/м}$; $l = 9 \text{ м}$; $EI = \text{const}$.

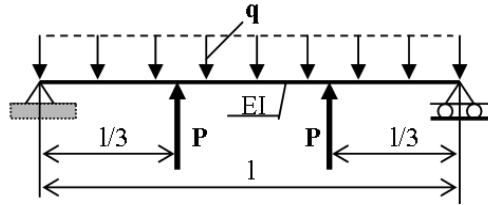


Рис. 603

722. Записати універсальне рівняння прогину балки, показаної на Рис. 604. Розрахувати величину прогину балки і кути повороту поперечних перерізів для точок A і D . Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$; $P = ql/3$; $M = ql^2/6$; $EI = 8 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

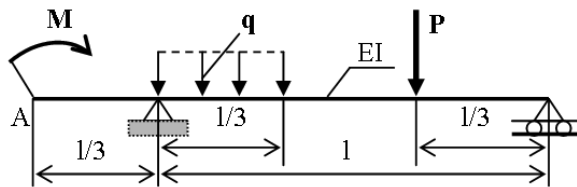


Рис. 604

723. На балку діє розподілене навантаження q як показано на Рис. 605. Записати універсальне рівняння прогину балки, а також встановити значення прогину і кута повороту поперечного перерізу, де кривина прогину зігнутої осі балки змінює свій знак. Дані: $q = 18 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$; $EI = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$.

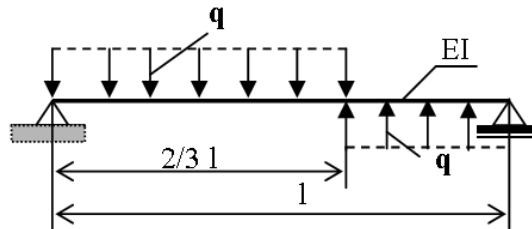


Рис. 605

724. Балка закріплена і навантажена як показано на Рис. 606. Обчислити, на якій відстані від опори A буде стріла прогину балки і скільки вона становитиме, а також на якій відстані від тієї ж опори буде найбільша кривина осі балки і скільки вона буде становити. Дані: $q = 4 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$; $b = 10 \text{ см}$; $h = 15 \text{ см}$; $\delta = 2 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

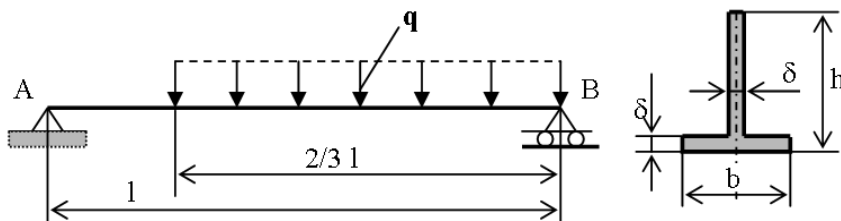


Рис. 606

725. Записати рівняння прогину балки, показаної на Рис. 607. Обчислити прогин і кут повороту поперечного перерізу вільного кінця балки. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $EI = 2 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

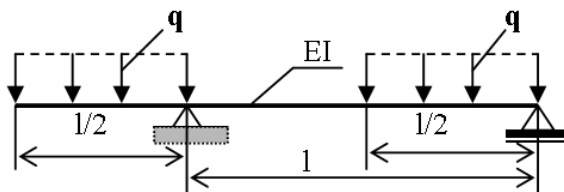


Рис. 607

726. Для балки, показаної на Рис. 608, обчислити прогин в точках С і D. Дані: $q = 30 \text{ кН/м}$; $l = 3 \text{ м}$; $EI = 2 \cdot 10^5 \text{ Нм}^2$.

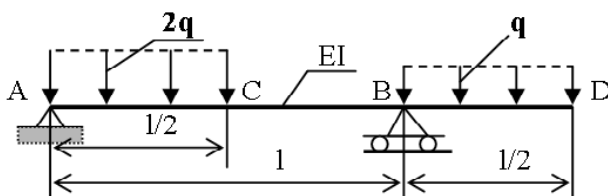


Рис. 608

727. Записати універсальне рівняння прогину і кутів повороту поперечних перерізів балки (Рис. 609). Розрахувати величину прогинів в точках А і D, а також кути повороту перерізів А, В і С. Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $M = 3/8ql^2$; $EI = 2 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

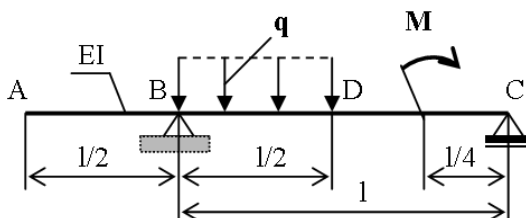


Рис. 609

728. Жорсткість балки на згин змінюється лінійно від опори А до опори В. Записати рівняння прогину зігнутої осі балки, коли на неї діє розподілене навантаження q як показано на Рис. 610. Обчислити стрілу прогину балки і величину кутів повороту поперечних перерізів на опорах. Дані: $q = 64 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $EI_B = 2EI_A = 4 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

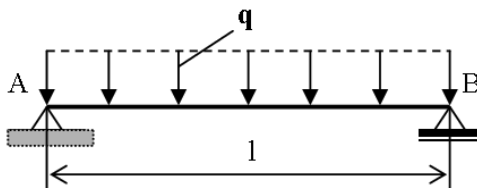


Рис. 610

729. Застосовуючи графічний метод, зобразити прогин зігнутої осі балки, показаної на Рис. 611. Визначити прогин посередині балки і кути повороту поперечних перерізів на опорах А і В. Дані: $P = 12 \text{ кН}$; $l = 6 \text{ м}$; $EI = 2 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$.

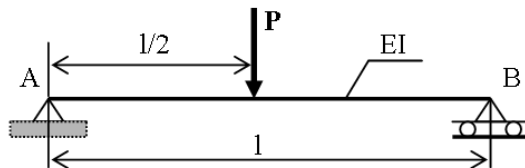


Рис. 611

Розв'язок

Епюра згинальних моментів, як вторинного навантаження, подана на Рис. 612.

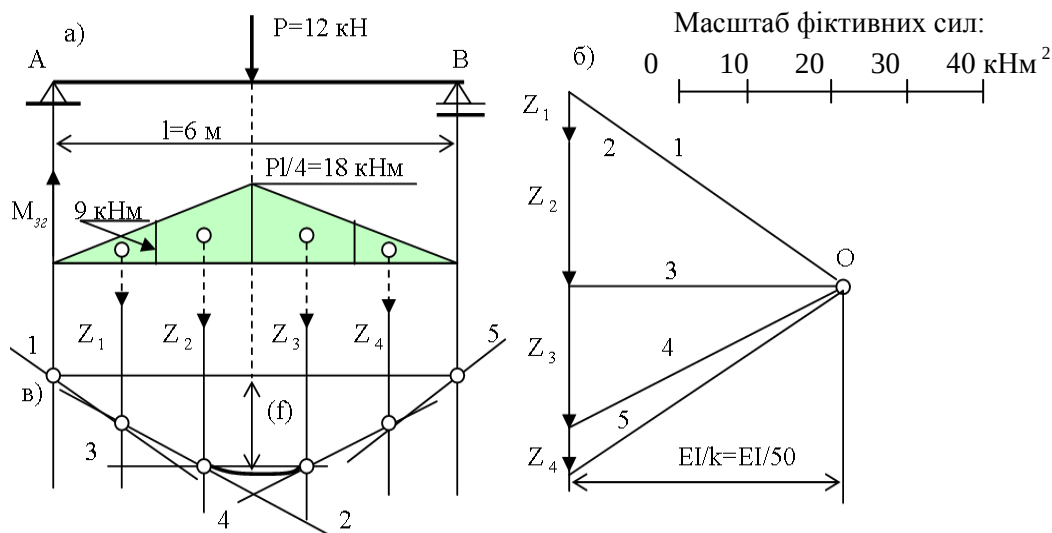
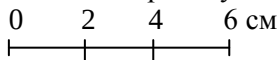


Рис. 612

Масштаб прогину балки:



Обчислюють значення фіктивних сил, поданих на Рис. 612а:

$$Z_1 = Z_4 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1,5 = 6,75 \text{ кНм}^2;$$

$$Z_2 = Z_3 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 - 6,75 = 20,25 \text{ кНм}^2.$$

На Рис. 612б зображено багатокутник фіктивних сил з полюсною відстанню EI . Розмірність фіктивних сил і полюсної відстані є однаковою - кНм^2 . Оскільки числове значення полюсної відстані значно перевищує значення фіктивних сил, EI ,

для зручності побудови рисунка, ділиться на стале число k . В цьому випадку прийнято $k = 50$.

Многокутник, тотожний прогину зігнутої осі балки, зображено на Рис. 612в.

Дійсну стрілу прогину (прогин посередині балки) обчислюють за формулою:

$$f = \frac{(f)\chi_l}{k},$$

де: (f) – величина (на рисунку) стріли прогину, k – дільник відстані EI , $\chi_l = \frac{1}{(l)}$ – масштаб довжини балки.

Кут повороту поперечного перерізу приблизно рівний тангенсу кута, який утворює дотична в даній точці з горизонтальною лінією віднесення. Реально цей кут є в k разів менший.

Наприклад, для опори А буде

$$\theta_A \cong \frac{\text{tg}(\theta_A)}{k} = \frac{6,5 / 10,0}{50} = 0,013 \text{ рад} = 0,74^\circ.$$

Кут повороту поперечного перерізу опори В, як видно з Рис. 612в, з огляду на симетрію, рівний за абсолютною величиною куту на опорі А.

Стріла прогину балки рівна

$$f = \frac{(f)\chi_l}{k} = \frac{1,4(600/6)}{50} = 2,8 \text{ см}.$$

- 730.** Застосовуючи графічний метод, визначити стрілу прогину і кут повороту поперечного перерізу на опорі В балки, зображеної на Рис. 613. Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $EI = 2 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

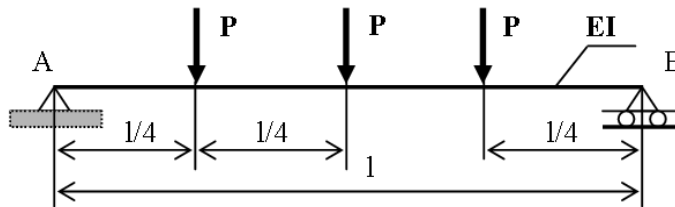


Рис. 613

- 731.** Застосовуючи графічний метод, визначити стрілу прогину і кут повороту поперечного перерізу опори А балки зі змінною жорсткістю, показаної на Рис. 614. Дані: $P = 4 \text{ кН}$; $a = 2 \text{ м}$; $EI = 2,5 \cdot 10^6 \text{ кНсм}^2$.

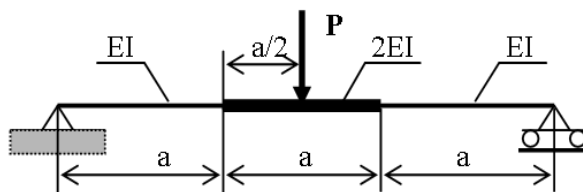


Рис. 614

Розв'язок

Епюру згинальних моментів зображено на Рис. 615а, а модифіковану епюру згинальних моментів $M_{зг} = \frac{EI}{EI(x)}$ - на Рис. 615б. Як жорсткість віднесення прийнято жорсткість EI , яка буде в першому і в третьому проміжку балки.

Фіктивні сили (Рис. 615б), рівні:

$$Z_1 = Z_4 = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 = 4 \text{ кНм}^2; \quad Z_2 = Z_3 = \frac{1}{2} 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = 2,5 \text{ кНм}^2.$$

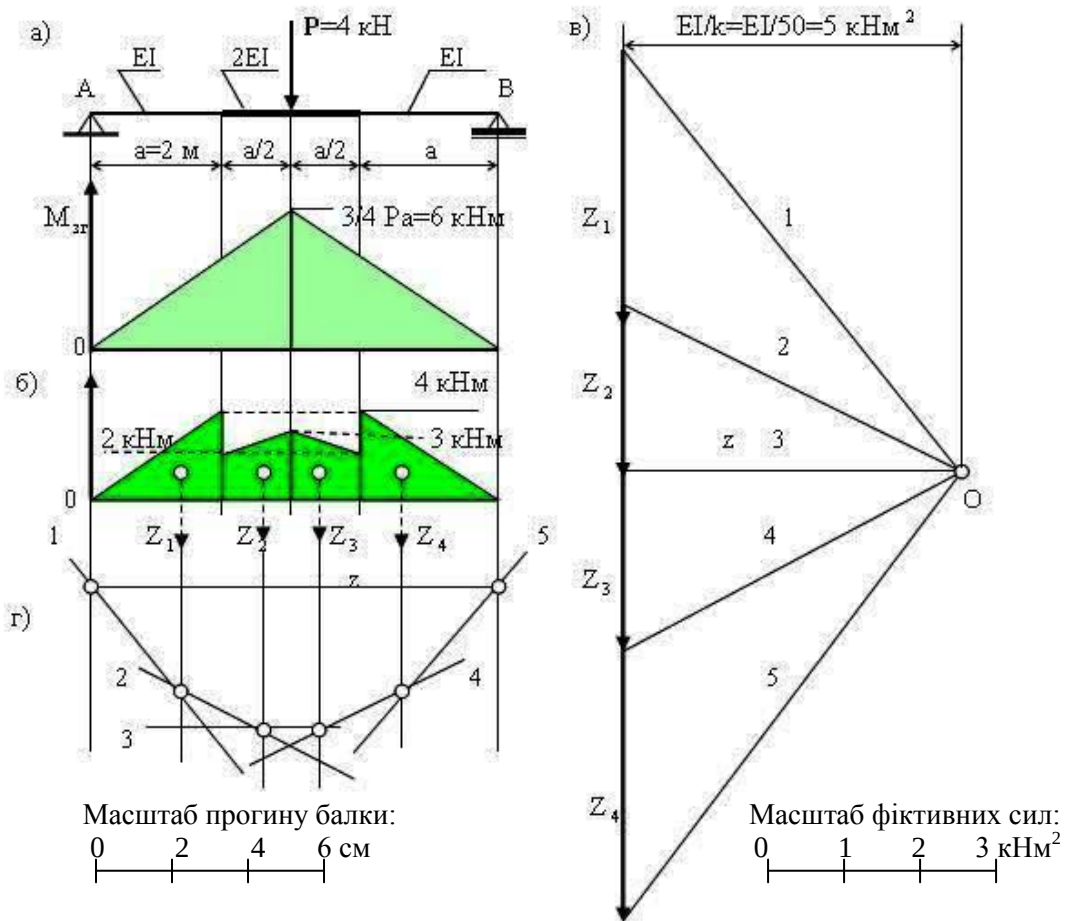


Рис. 615

Многокутник фіктивних сил з полюсною відстанню $\frac{EI}{k} = \frac{2,5 \cdot 10^2}{50} = 5 \text{ кНм}^2$ подано на Рис. 615в, а відповідний йому графічний многокутник, який тотожний прогину балки, зображено на Рис. 615г.

Стріла прогину балки рівна

$$f = \frac{(f) \chi_1}{k} = \frac{2,2(600/6)}{50} = 4,4 \text{ см}.$$

Кут повороту поперечного перерізу на опорі А буде

$$\theta_A \cong \frac{\frac{16,5}{k} \cdot \text{tg}(\theta_A)}{50} = \frac{12,5}{50} = 0,0264 \text{ рад} = 1,5^\circ.$$

732. Визначити графічно прогин зігнутої осі балки. Подати числове значення прогину і кута повороту поперечного перерізу для вільного кінця балки, показаної на Рис. 616. Дані: $P = 6 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $EI = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$.

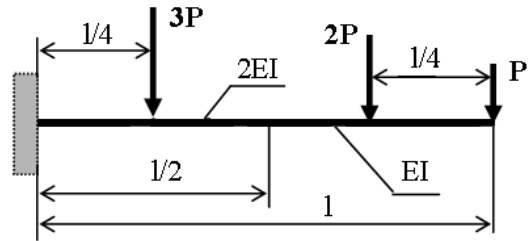


Рис. 616

733. Застосовуючи графічний метод, визначити прогин зігнутої осі балки, показаної на Рис. 617. Визначити стрілу прогину. Дані: $q = 12 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $EI = 8 \cdot 10^6 \text{ кНсм}^2$.

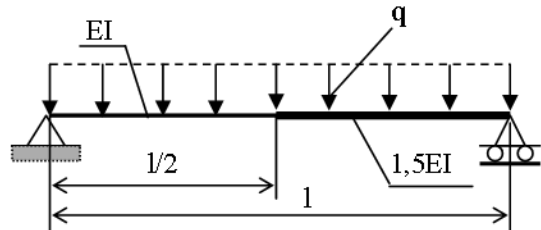


Рис. 617

734. Визначити графічно прогин зігнутої осі балки зі змінною жорсткістю, показаної на Рис. 618. Визначити величину прогину посередині балки і кути повороту поперечних перерізів на опорах. Дані: $q = 16 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$; $EI = 2 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$.

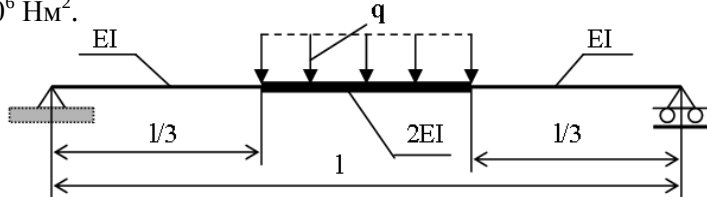


Рис. 618

735. Застосовуючи графічний метод, визначити прогин балки, показаної на Рис. 619. Визначити величину прогинів під силами, а також стрілу прогину балки. Дані: $P = 30 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $I = 3000 \text{ см}^4$.

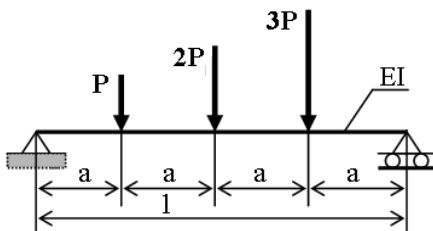


Рис. 619

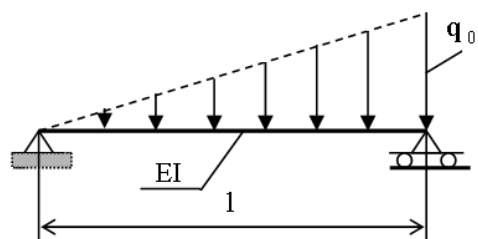


Рис. 620

736. Побудувати епюру згинальних моментів і прогин балки, показаної на Рис. 620. Визначити величину максимального згинального моменту і стрілу прогину балки. Дані: $q_0 = 12 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $EI = 4 \cdot 10^5 \text{ Нм}^2$.

737. Застосовуючи графо-аналітичний метод, визначити прогин і кут повороту поперечного перерізу вільного кінця балки, показаної на Рис. 621. Дані: $P = 6 \text{ кН}$; $l = 8 \text{ м}$; $EI = 3,2 \cdot 10^4 \text{ кНм}^2$.

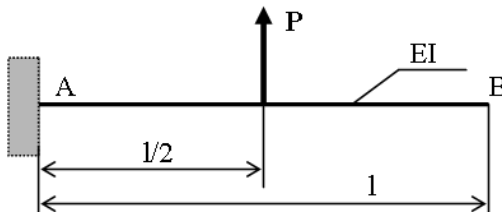


Рис. 621

Розв'язок

Епюра згинальних моментів для дійсної балки зображена на Рис. 622а, а фіктивну балку зі згинальним моментом, як вторинним навантаженням, подано на Рис. 622б.

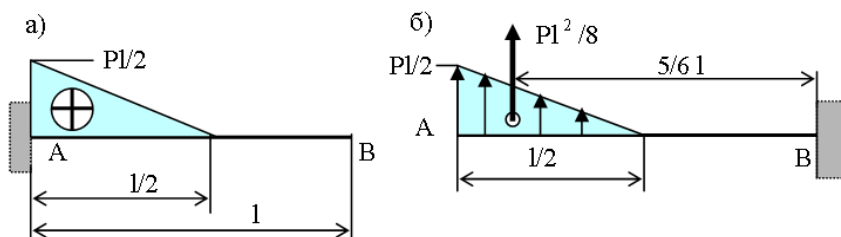


Рис. 622

Враховуючи правило знаків для поперечної сили і згинального моменту для фіктивної балки, отримано шукані переміщення:

- кут повороту поперечного перерізу

$$\theta_B = \frac{Q_{f,B}}{EI} = \frac{Pl^2}{8EI} = \frac{18 \cdot 8^2}{8 \cdot 3,2 \cdot 10^4} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,26^\circ;$$

- прогин на кінці балки

$$v_B = \frac{M_{f,B}}{EI} = \frac{\frac{Pl^2}{8} \cdot \frac{5}{6} l}{EI} = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EI} = \frac{5}{48} \frac{18 \cdot 8^3}{3,2 \cdot 10^4} = 3 \text{ см}.$$

738. Застосовуючи графо-аналітичний метод, визначити кути поворотів поперечних перерізів опор А і В, а також прогин в точці С балки, показаної на Рис. 623. Дані: $P = 12 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $EI = 6,4 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

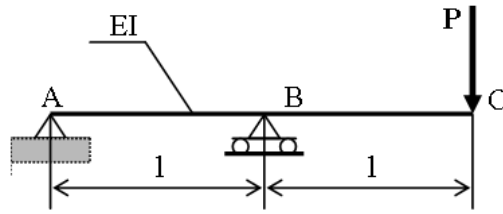


Рис. 623

739. Використовуючи графо-аналітичний метод, обчислити кут повороту поперечного перерізу опори С і прогин в точці В балки, поданої на Рис. 624. Дані: $P = 24 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $EI = 800 \text{ кНм}^2$.

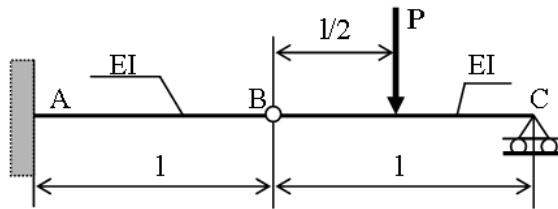


Рис. 624

740. Визначити графо-аналітичним методом прогин і кут повороту поперечного перерізу вільного кінця балки, показаної на Рис. 625. Дані: $P = 4,8 \text{ кН}$ $l = 4 \text{ м}$; $M = Pl/4$; $EI = 1,2 \cdot 10^8 \text{ кНсм}^2$.

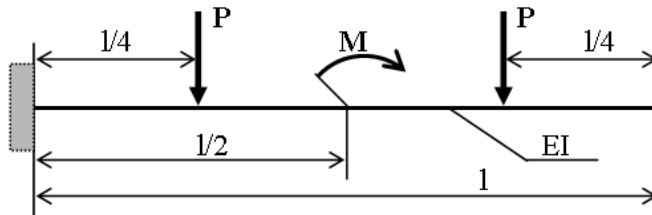


Рис. 625

741. Застосовуючи графо-аналітичний метод, обчислити прогин посередині балки (Рис. 626) і кут повороту поперечного перерізу опори В. Дані: $q = 12 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $EI = 250 \text{ кНм}^2$.

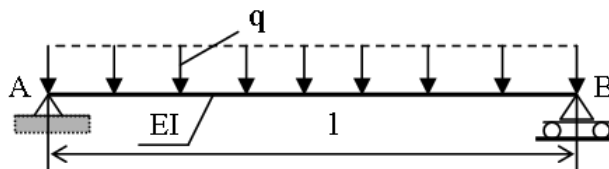


Рис. 626

Розв'язок

Фіктивна балка, тотожна дійсній балці, разом з фіктивним навантаженням, що відповідає розподіленому навантаженню q , показана на Рис. 627.

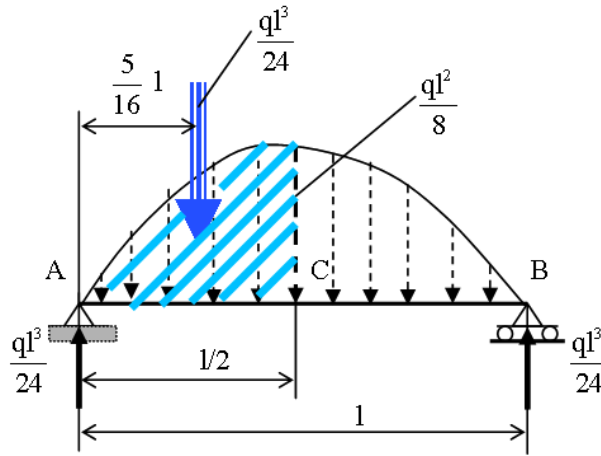


Рис. 627

Прогин посередині балки рівний

$$f = \frac{M_{f,C}}{EI}, \text{ де } M_{f,C} = \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{1}{2} - \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{3}{16}l = \frac{5}{384}ql^4.$$

Після підставлення числових даних отримано:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{12 \cdot 2^4}{24 \cdot 250} = 1 \text{ см.}$$

Кут повороту поперечного перерізу опори В становить:

$$\theta_B = \frac{Q_{f,B}}{EI} = \frac{ql^3}{24EI} = \frac{12 \cdot 2^3}{24 \cdot 250} = 0,016 \text{ рад} = 0,92^\circ.$$

742. Застосовуючи графо-аналітичний метод, визначити прогин посередині між опорами і в точці С балки (Рис. 628). Дані: $q = 12 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $P = ql/2$; $EI = 200 \text{ кНм}^2$.

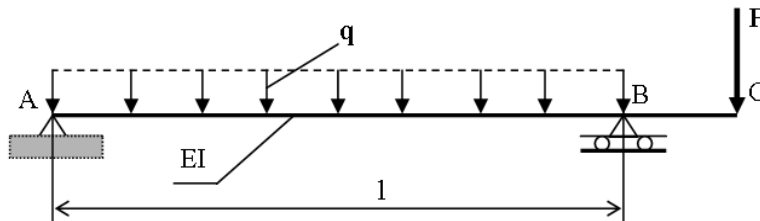


Рис. 628

7.4.2. Розрахунок балок з врахуванням переміщень

1. У випадку розрахунку зігнутих балок істотною буває також умова жорсткості. Ця умова формулюється у вигляді допустимих лінійних або кутових переміщень. Часто зустрічається умова з допустимою стрілою прогину балки, яка зазвичай описується виразом:

$$f \leq f_{\text{дон}} = \frac{l}{200 \div 2000},$$

де: l – довжина балки.

- 743.** Підібрати розміри поперечного перерізу балки, показаної на Рис. 629, такі, щоб стріла прогину забезпечувала умову $f \leq \frac{l}{2000}$. Обчислити для цієї балки максимальні напруження від згину. Дані: $P = 16$ кН; $l = 4$ м; $h = 3/2b$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

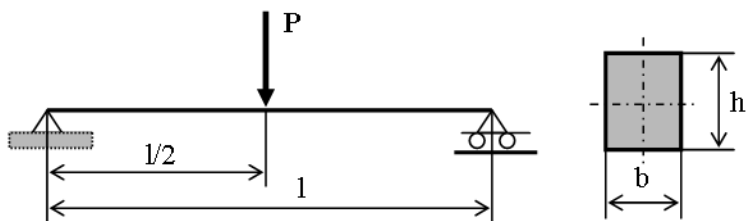


Рис. 629

Розв'язок

Умова жорсткості для цієї балки, повинна мати вигляд:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} \leq \frac{l}{2000}; \text{ звідки } I \geq \frac{2000}{48} \frac{Pl^2}{E}.$$

Враховуючи, що $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{b\left(\frac{3}{2}b\right)^3}{12} = \frac{9}{32}b^4$, отримано:

$$b \geq \sqrt[4]{\frac{2000}{48} \frac{32}{9} \frac{Pl^2}{E}} = \sqrt[4]{\frac{4000}{27} \frac{16 \cdot 400^2}{2 \cdot 10^4}} = 8,3 \text{ см};$$

$$h = 3/2b = \frac{3}{2} 8,3 = 12,4 \text{ см}.$$

Мінімальні розміри поперечного перерізу повинні становити $b \times h = 8,3$ см $\times$ 12,4 см. Максимальні напруження від згину для балки, що розглядається, дорівнюють:

$$\sigma = \frac{M_{\text{зг max}}}{W} = \frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2} \frac{Pl}{bh^2} = \frac{3}{2} \frac{16 \cdot 400}{8,3 \cdot 12,4^2} = 75,2 \text{ МПа}.$$

744. Для балки, показаної на Рис. 630, допускається стріла прогину $f = 1/500$. Обчислити екстремальні напруження від згину у балці. Дані: $l = 2$ м; $h = 100$ мм; $e = 27,4$ мм; $I_z = 179$ см⁴; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

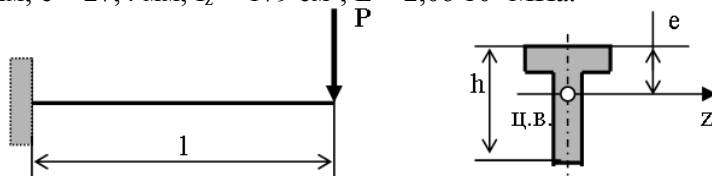


Рис. 630

745. Тензометр, наклеєний на осі балки (Рис. 631), показав відносне видовження $\varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}$. Обчислити величину навантаження q . Визначити максимальні нормальні і дотичні напруження в поперечних перерізах балки і вказати точки, в яких вони виникають. Дані: $l = 1$ м; $h = 10$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

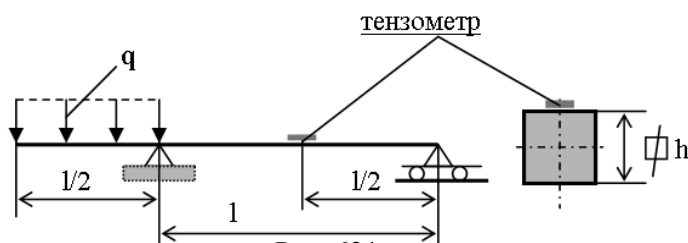


Рис. 631

746. Стріла прогину балки довжиною $l = 2$ м і діаметром $d = 10$ см, що знаходиться на двох опорах і навантажена посередині силою P , становить 0,4 см. Обчислити максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі балки. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

747. Як зміниться міцність і жорсткість балки (Рис. 632) на згин, якщо замість квадратного перерізу застосуємо круговий переріз з такою ж площею?

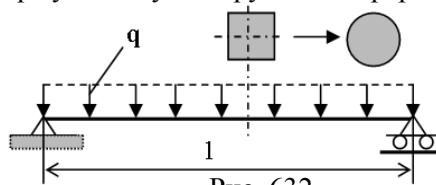


Рис. 632

748. Тензометр, наклеєний як показано на Рис. 633 вздовж осі балки, навантаженої посередині зосередженою силою P , вказав відносне видовження $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$. Розрахувати величину максимальних напружень в найбільш навантаженому перерізі і величину сили P . Дані: $l = 2$ м; $h = 2b = 20$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

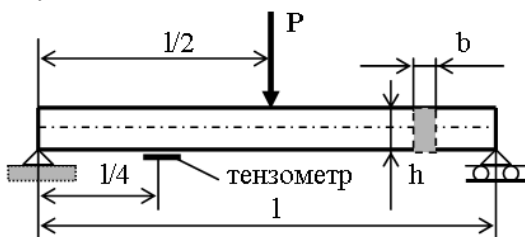


Рис. 633

749. Обчислити величину допустимого навантаження q для балки, показаної на Рис. 634, якщо допускається $[\sigma_{зг}] = 140$ МПа і стріла прогину $f = 1/600$. Дані: $l = 6$ м; $I_z = 9840$ см⁴; $W_z = 597$ см³; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

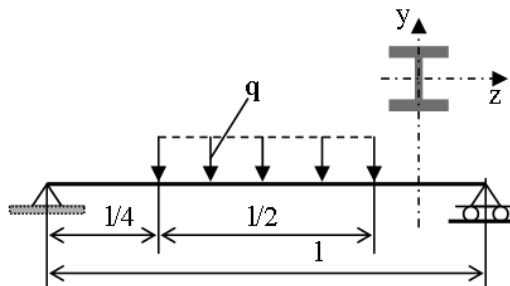


Рис. 634

750. У певному поперечному перерізі С балки (Рис. 635) діють максимальні напруження $\sigma = 220$ МПа. Розрахувати радіус кривини ρ балки в цьому місці. Також дано: $d = 4$ см; $a = 3/2d$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

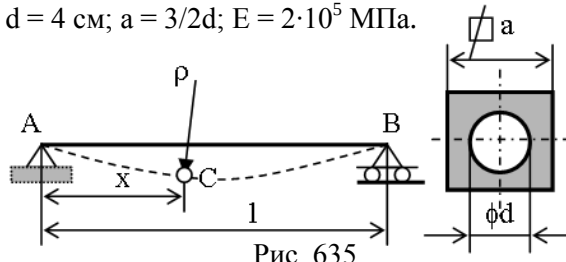


Рис. 635

751. Обчислити стрілу прогину двотаврової консольної балки під впливом розподіленого навантаження як показано на Рис. 636, якщо максимальні напруження від згину, отримані з вимірів, виявилися рівними 120 МПа. Також дано: $l = 2$ м; $I_z = 244$ см⁴; $W_z = 45,8$ см³; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

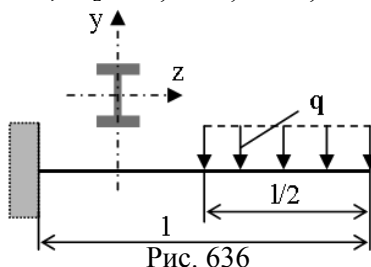


Рис. 636

752. Яким моментом M можна навантажити балку, показану на Рис. 637, якщо допускається стріла прогину $[f] = 1/1000$? Дані: $l = 6$ м; $b = 12$ см; $h = 3/2b$; $r = b/3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

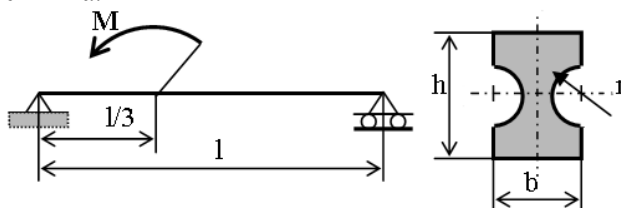


Рис. 637

753. Записати рівняння зігнутої осі балки, показаної на Рис. 638, і обчислити допустиму величину навантаження q , якщо допустима стріла прогину $[f] \leq 1/500$. Дані: $l = 2$ м; $d = 4$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

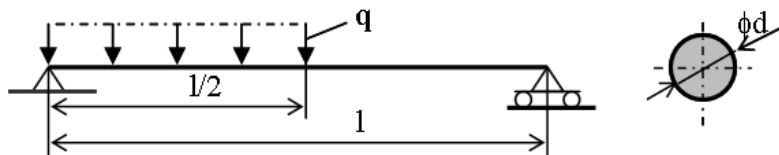


Рис. 638

754. Підібрати поперечні розміри балки, навантаженої як показано на Рис. 639, якщо вимагається забезпечення умови міцності і жорсткості. Дані: $P = 16$ кН; $l = 2$ м; $a = 0,8$ м; $[f] = 1/2000$; $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

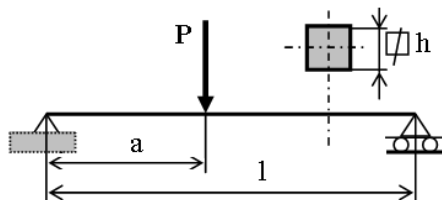


Рис. 639

755. Яким розподіленим навантаженням q можна навантажити балку, показану на Рис. 640, якщо допускається вертикальне переміщення точки С рівне $1/500$? Розрахувати для цього випадку максимальні напруження від згину. Дані: $l = 4$ м; $h = 20$ см; $I_z = 2140$ см⁴; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

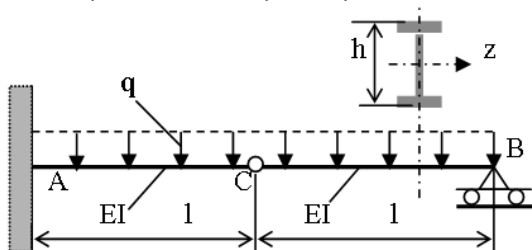


Рис. 640

756. Напруження, виміряні тензометром, наклеєним в точці С уздовж балки, навантаженої як показано на Рис. 641, становлять 160 МПа. Обчислити стрілу прогину балки. Дані: $l = 9$ м; $h = 450$ мм; $I_z = 27450$ см⁴; $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

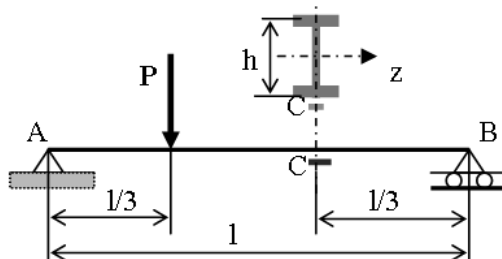


Рис. 641

757. Для балки, навантаженої як показано на Рис. 642, підібрати двотавровий переріз згідно з ГОСТ, якщо допустима стріла прогину $[f] = l/600$. Перевірити чи не перевищено напруження $[\sigma_{\text{зг}}] = 160 \text{ МПа}$. Також дано: $q = 30 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $l = 4a$; $P = 4/3ql$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

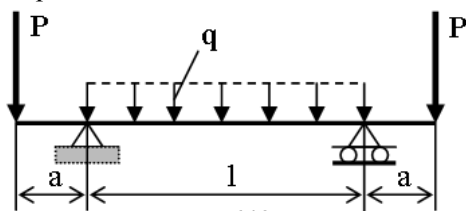


Рис. 642

758. Знайти допустимі значення сил для двотаврової балки № 33 згідно ГОСТ, показаної на Рис. 643, якщо вимагається забезпечення умови жорсткості $f \leq l/800$. Які будуть тоді найбільші нормальні напруження в поперечному перерізі балки? Дані: $a = 0,6 \text{ м}$; $l = 8a$; $h = 300 \text{ мм}$; $I_z = 9840 \text{ см}^4$; $W_z = 597 \text{ см}^3$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

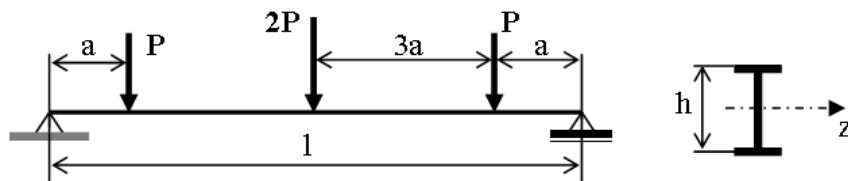


Рис. 643

759. Провести перевірочний розрахунок двотаврової балки, показаної на Рис. 644. Дані: $P = 30 \text{ кН}$; $q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $h = 500 \text{ мм}$; $I_z = 39120 \text{ см}^4$; $W_z = 1560 \text{ см}^3$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 140 \text{ МПа}$; $[f] \leq l/600$.

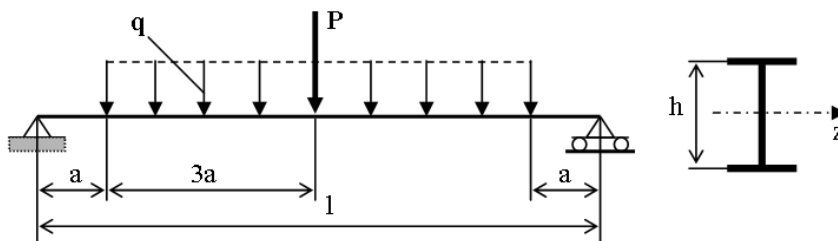


Рис. 644

760. Провести перевірочний розрахунок для балки, показаної на Рис. 645. Дані: $P = 6 \text{ кН}$; $a = 35 \text{ см}$; $b = 3/5a$; $l = 3a$; $d = 60 \text{ мм}$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 120 \text{ МПа}$; $f \leq l/1000$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

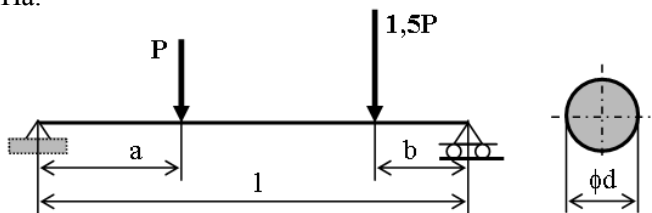


Рис. 645

7.5. Косий згин

1. Згин, при якому площина, в якій діє згинальний момент, не співпадає з жодною з головних центральних осей перерізу, називають косим згином.
2. Згинальний момент при косому згині, розкладають на два моменти, які діють в площинах, що співпадають з головними центральними осями поперечного перерізу. У цей спосіб косий згин зводиться до суперпозиції двох прямих згинів.
3. Характерним для косого згину є факт, що нейтральна лінія не є перпендикулярною до площини дії згинального моменту, як це буде у випадку прямого згину. Тим самим зігнута вісь балки не співпадає з площиною дії згинального моменту.

761. Визначити положення нейтрального шару в перерізі, що згинається моментом M як показано на Рис. 646. Дані: $a = 8$ см.

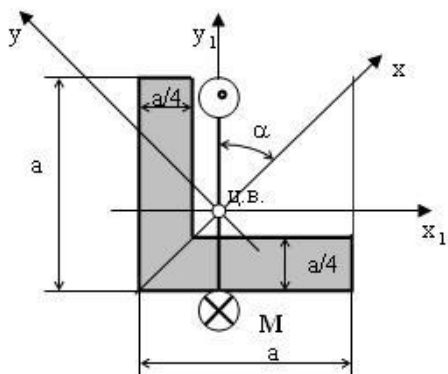


Рис. 646

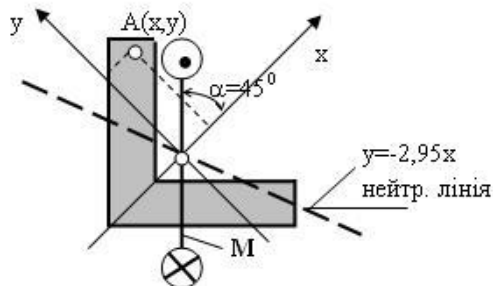


Рис. 647

Розв'язок

Переріз, зображений на Рис. 646, є рівнобоким кутиком, а отже осі x , y , показані на Рис. 647, є головними центральними осями.

Косий згин під дією моменту M розкладають на два прямі згини – відносно осі x моментом $M_x = M \sin \alpha$ і відносно осі y моментом $M_y = M \cos \alpha$. Напруження в довільній точці $A(x, y)$ визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{M \sin \alpha}{I_x} y + \frac{M \cos \alpha}{I_y} x.$$

На нейтральному шарі, згідно з його визначенням, нормальні напруження $\sigma = 0$. Прирівнюючи до нуля вищеподаний вираз і спрощуючи його, отримано рівняння нейтрального шару:

$$\frac{y \sin \alpha}{I_x} + \frac{x \cos \alpha}{I_y} = 0$$

або

$$y = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{I_x}{I_y} x.$$

Рівняння прямої, яка описує в системі координат xu площину дії згинального моменту M , має вигляд $y = \operatorname{tg} \alpha x$, а отже перпендикулярна до неї лінія матиме вигляд:

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} x.$$

Коефіцієнт нахилу нейтральної лінії відрізняється від коефіцієнта нахилу нормалі до площини дії згинального моменту на множник $\frac{I_x}{I_y}$. Звідси слідує, що коли $I_x \neq I_y$, то нейтральна лінія не буде перпендикулярною до площини дії згинального моменту.

Після попереднього обчислення відстані центру ваги перерізу від основи, яка, як зазначено на Рис. 647, становить $\frac{11}{28}a$, можливо обчислити значення моментів інерції перерізу відносно головних центральних осей з наступних виразів:

$$I_x = \frac{a^4}{12} - \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^4}{12} = \frac{175}{12 \cdot 256} a^4 = 233,3 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \left[\frac{a^4}{12} + a^2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{28} a \right)^2 \right] - \left[\frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^4}{12} + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 \left(\frac{6,5\sqrt{2}}{28} a \right)^2 \right] = 79 \text{ см}^4.$$

Підставляючи числові значення, отримано рівняння нейтральної лінії

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} \frac{233,3}{79} = -2,95x.$$

Розташування нейтральної лінії показано штриховою лінією на Рис. 647.

- 762.** Під впливом вертикально прикладеної сили P (Рис. 648) кінець балки перемістився по вертикалі на $v_C = 5$ мм. Обчислити екстремальні значення напружень в поперечному перерізі балки і абсолютне переміщення центру ваги перерізу C . Дані: $\delta = 4$ мм; $b = 5\delta$; $h = 8\delta$; $l = 50\delta$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

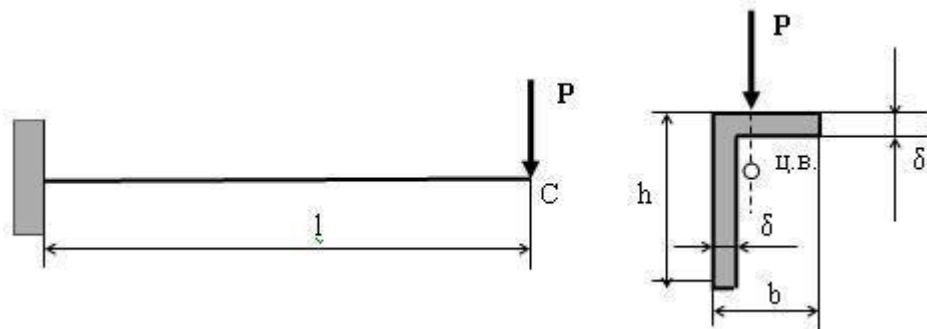


Рис. 648

763. Якою максимальною силою P можна навантажити консольну балку, показану на Рис. 649, якщо $[\sigma_{\text{зг}}] = 200 \text{ МПа}$? Розрахувати складові переміщення і абсолютне переміщення центру ваги кінцевого перерізу балки. Дані: $l = 2 \text{ м}$; $\delta = 1 \text{ см}$; $h = 2a = 10\delta$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

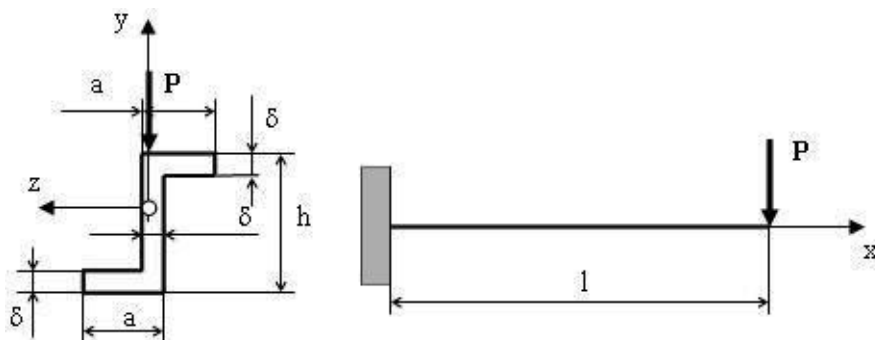


Рис. 649

764. Якою буде допустима довжина консольної балки із Z-подібним перерізом, показаній на Рис. 650, навантаженої власною вагою, якщо $[\sigma_{\text{зг}}] = 100 \text{ МПа}$? Також дано: $b = 4 \text{ см}$; $h = 6 \text{ см}$; $\delta = 4 \text{ мм}$; $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$.

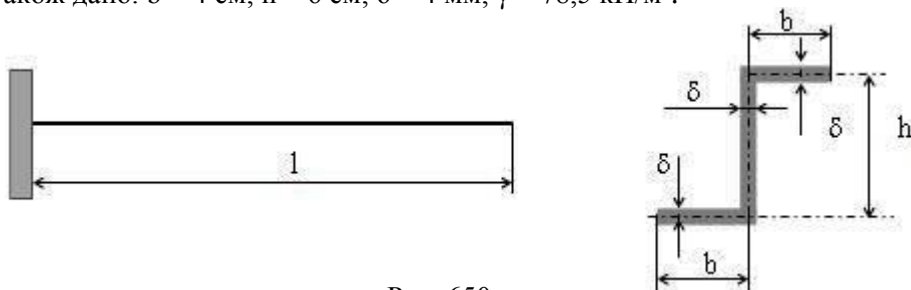


Рис. 650

765. Обчислити вертикальне переміщення консольної балки, навантаженої власною вагою (Рис. 651). Дані: $b = 8 \text{ см}$; $h = 3/2b$; $l = 8 \text{ м}$; $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

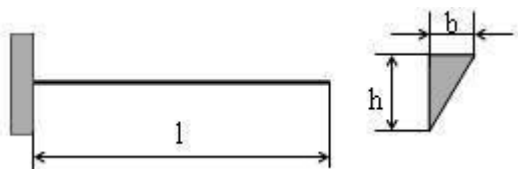


Рис. 651

766. Консольна балка прямокутного перерізу навантажена на кінці силою P як показано на Рис. 652. Розрахувати величину і напрямок сили P , якщо покази тензометрів, наклеєних вздовж осі стержня в точках А і В, становлять відповідно $\epsilon_A = 0,2 \cdot 10^{-3}$ і $\epsilon_B = 0,25 \cdot 10^{-3}$. Також дано: $l = 80 \text{ см}$; $b = 6 \text{ см}$; $h = 4/3b$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

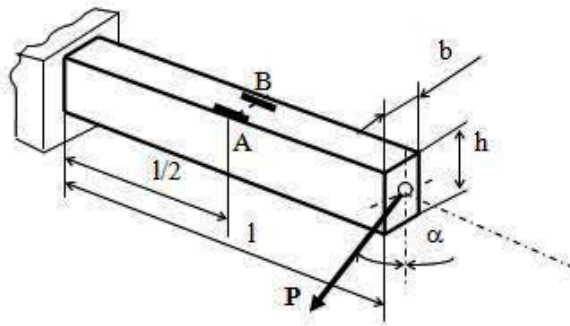


Рис. 652

767. Визначити положення нейтральних ліній для поданих на Рис. 653 випадків косого згину.

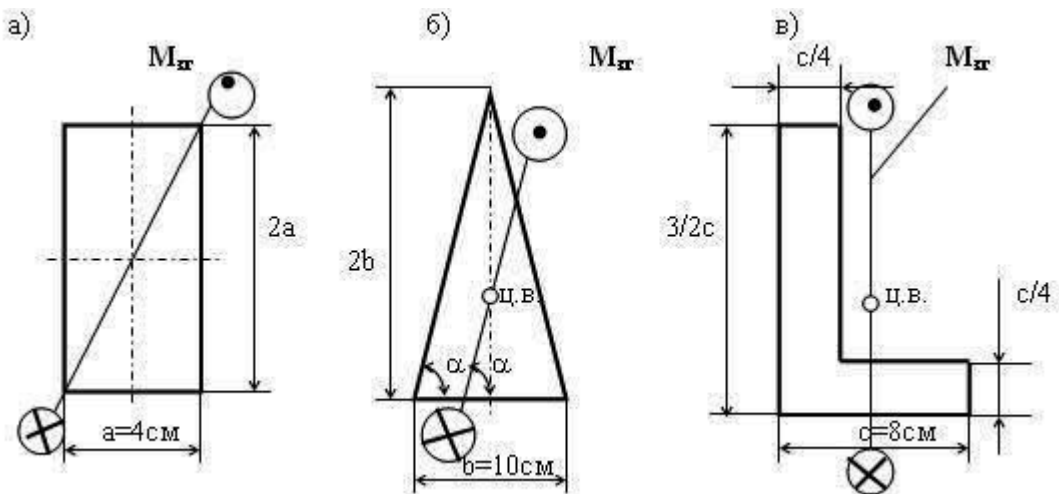


Рис. 653

768. Яку траєкторію окреслить центр ваги кінця поперечного перерізу консольної балки, якщо прикладена у ньому сила (Рис. 654) повернеться на 360° ? Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$; $l = 2 \text{ м}$; $b = 8 \text{ см}$; $h = 3/2b$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

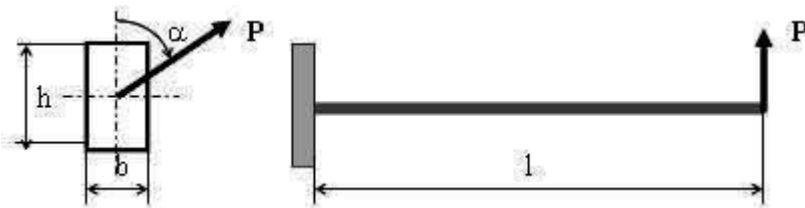


Рис. 654

769. Розрахувати допустиму величину сили P , що діє на балку, показану на Рис. 655. Дані: $r = 5$ см; $l = 32$ р; $\alpha = 30^\circ$; $[\sigma_{zg}] = 120$ МПа.

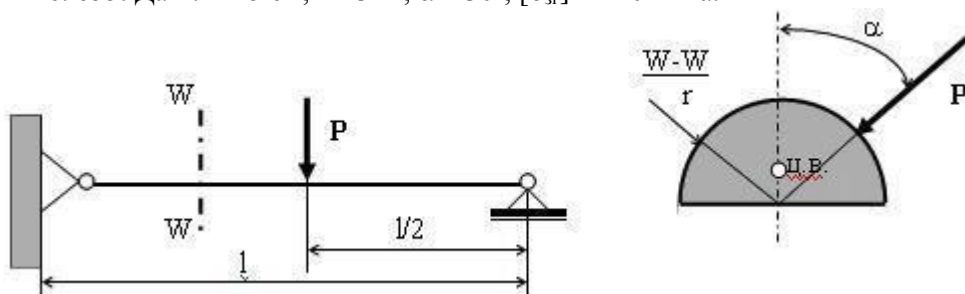


Рис. 655

770. На балку з прямокутним поперечним перерізом діє розподілене навантаження q під кутом α до вертикалі (Рис. 656). Обчислити максимальні напруження від згину і абсолютний прогин посередині балки. Дані: $q = 15$ кН/м; $l = 2$ м; $b = 8$ см; $h = 10$ см; $\alpha = 30^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

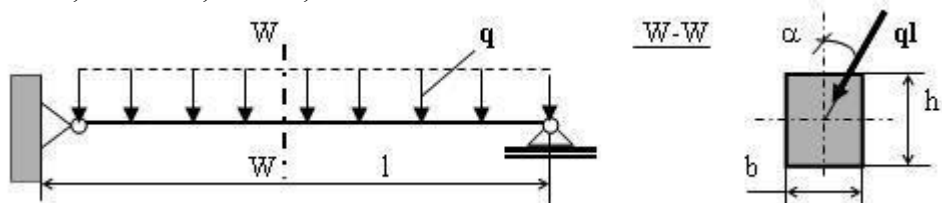


Рис. 656

771. На балку діють дві сили P з напрямками вздовж діагоналі прямокутного поперечного перерізу як показано на Рис. 657. Розрахувати розміри поперечного перерізу балки, якщо $[\sigma_{zg}] = 200$ МПа. Яким буде прогин посередині цієї балки? Інші дані: $P = 20$ кН; $l = 8$ м; $h = 4/3b$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

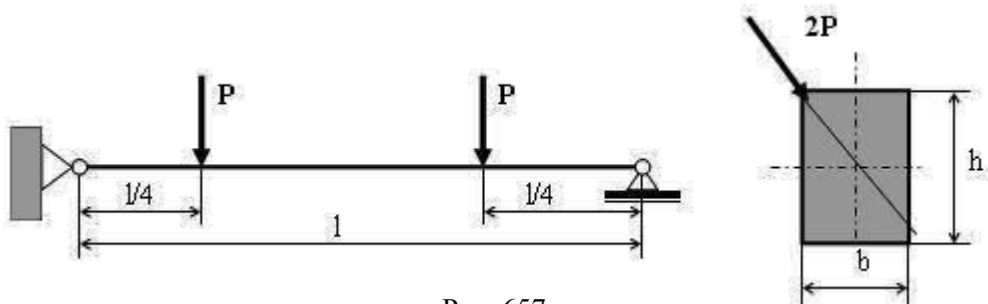


Рис. 657

7.6. Позацентровий розтяг/стиск

1. Розтяг називають позацентровим, коли сили, що розтягують стержень, не співпадають з його віссю (Рис. 658). Сила P прикладена в точці з координатами (x_0, y_0) . В такому випадку, привівши силу P до центру ваги перерізу F , матимемо розтяг стержня силою P , а також згин моментами $M_x = Py_0$ і $M_y = Px_0$.

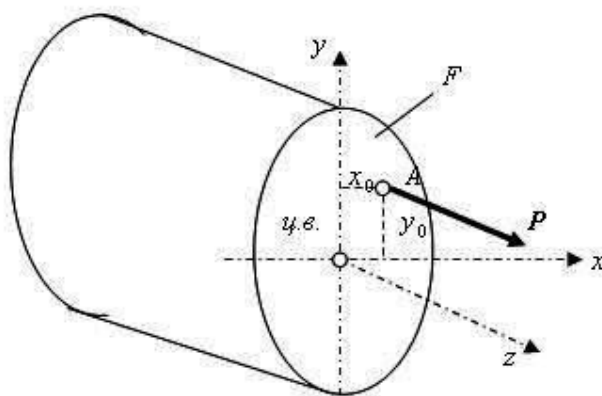


Рис. 658

Нормальні напруження в довільній точці перерізу з координатами x, y рівні:

$$\sigma = \frac{Px_0}{I_y}x + \frac{Py_0}{I_x}y + \frac{P}{F}.$$

2. Нейтральна лінія, на якій $\sigma = 0$, виражається рівнянням:

$$\frac{x_0x}{I_y} + \frac{y_0y}{I_x} + \frac{1}{F} = 0.$$

3. Положення нейтральної лінії і спосіб пошуку точок з екстремальними напруженнями подано на Рис. 659.

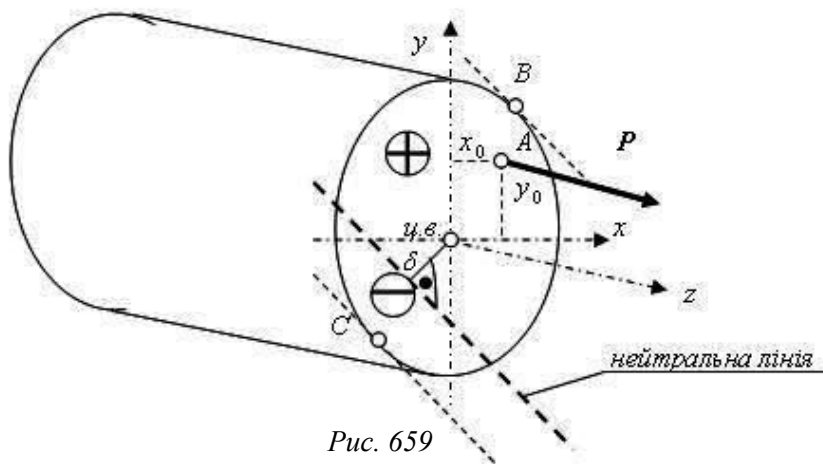


Рис. 659

Точки B і C з екстремальними напруженнями визначаються (див. рисунок) дотичними до контура поперечного перерізу та паралельними до нейтральної лінії. Відстань нейтральної лінії δ від початку системи координат обчислюють із виразу

$$\delta = -\frac{1}{F} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{I_y^2} + \frac{y_0^2}{I_x^2}}}.$$

4. Якщо точка прикладання сили P переміщається до початку системи координат, то згідно вищеподаної формули, відстань δ нейтральної лінії від центру ваги збільшується і в певний момент виходить за межі перерізу, прямуючи у нескінченність. Практично це означає, що коли нейтральна лінія є дотичною до контуру перерізу, то в цілому перерізі виникають напруження однакового знаку.

Геометричне місце точок, в яких прикладена розтягуюча / стиску-юча сила викликає напруження однакового знаку в цілому попереч-ному перерізі стержня, називаємо ядром перерізу.

772. Пластина з перерізом, показаним на Рис. 660, розтягується силами P . Обчислити екстремальні нормальні напруження в ослабленому поперечному перерізі. Дані: $P = 100$ кН; $h = 8$ см; $b = 1$ см.

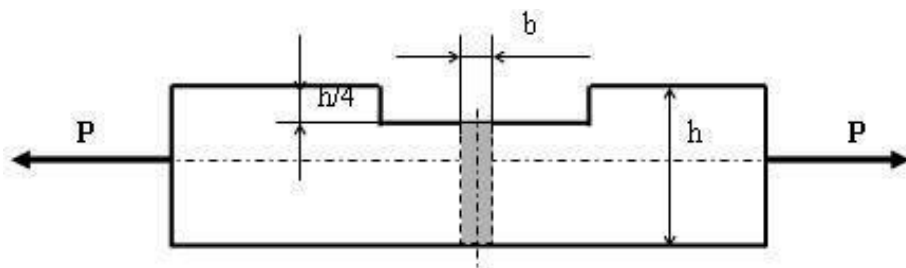


Рис. 660

Розв'язок

Уявно розрізають пластину у звуженні та відкидають праву частину, а сили P з відкинutoї частини зводять до центру ваги перерізу частини, яка залишилася (Рис. 661).

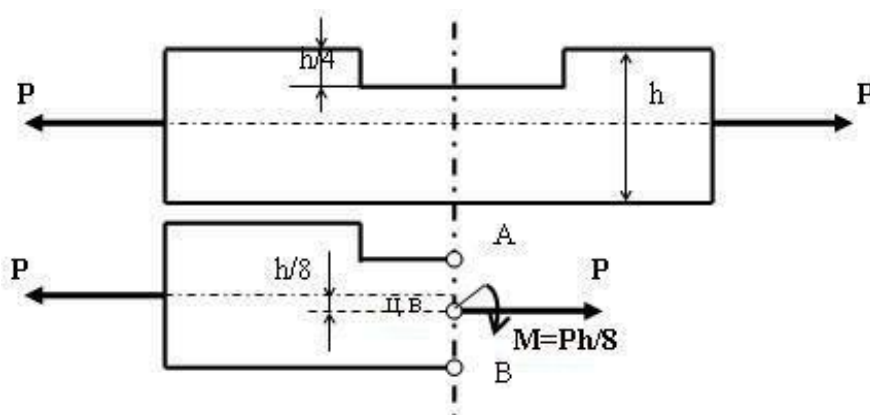


Рис. 661

Прямокутний переріз $b \times 3/4h$ навантажений розтягуючою силою P і згинальним моментом $M = Ph/8$. Екстремальні напруження будуть в точках А і В перерізу.

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{P}{b \cdot \frac{3}{4}h} + \frac{\frac{Ph}{8}}{\frac{b}{6} \left(\frac{3}{4}h \right)^2} = \frac{8}{3} \frac{P}{bh} = \frac{4}{3} \frac{100 \text{ кН}}{1 \text{ см} \cdot 8 \text{ см}} = 4,17 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 41,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{P}{F} - \frac{M}{W} = \frac{4}{3} \frac{P}{bh} - \frac{4}{3} \frac{P}{bh} = 0.$$

773. Довести, що розподіл напружень в перерізі А-А позацентрово розтягуваного призматичного стержня (Рис. 662) не може бути рівномірним.

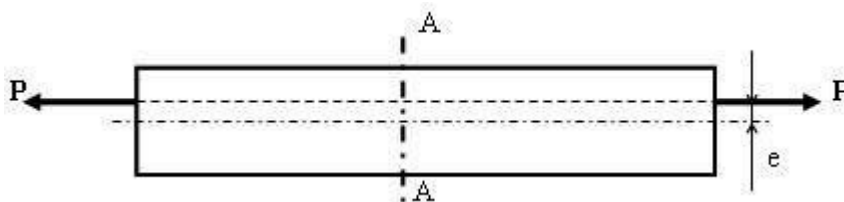


Рис. 662

774. Пластина з вирізом (Рис. 663) розтягується силами P . На скільки відсотків максимальні напруження в перерізі з вирізом будуть більші від напружень в повному перерізі? Перевірити чи доцільним було б виконання другого симетричного вирізу (переривиста лінія на Рис. 663). Дані: P ; b ; h ; $r = h/6$.

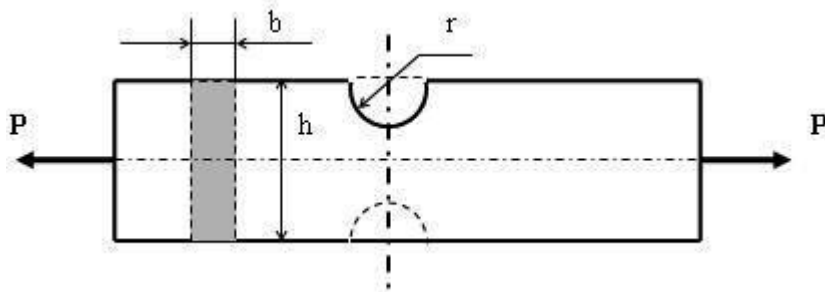


Рис. 663

775. Стержень кругового перерізу розтягується позацентрово (Рис. 664). Визначити розподіл напружень в поперечному перерізі стержня і положення нейтральної лінії. Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $d = 2 \text{ см}$; $e = d/4$.

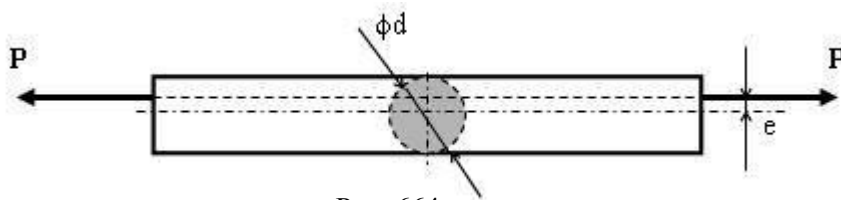


Рис. 664

776. Дві пластини, одна з одним вирізом, друга з двома вирізами, розтягуються силами P (Рис. 665). В якому випадку екстремальні напруження в перерізі А-А будуть більші і у скільки разів? Дані: P ; h ; $b = h/4$.

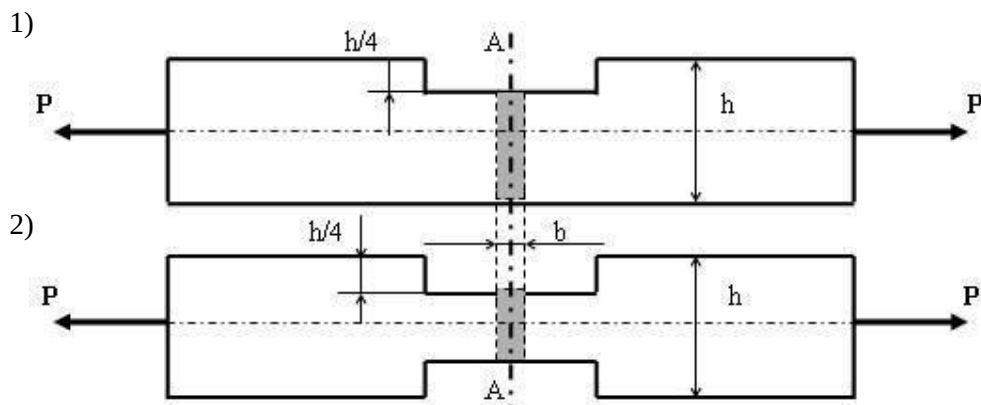


Рис. 665

777. Пластина розтягується силами P (Рис. 666). Як зміняться напруження в поперечному перерізі пластини, якщо відняти сили P , які діють вздовж лінії АВ?

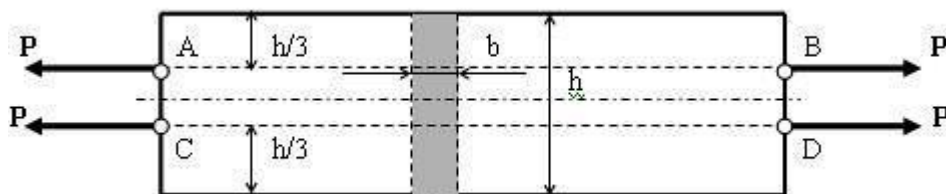


Рис. 666

778. Як зміняться максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі стержня, показаного на Рис. 667, якщо розтягуючу силу P прикласти не вздовж осі, а в точці А перерізу? Дані: $P = 500$ кН; $B = 10$ см; $b = 6$ см; $H = 20$ см; $h = 16$ см.

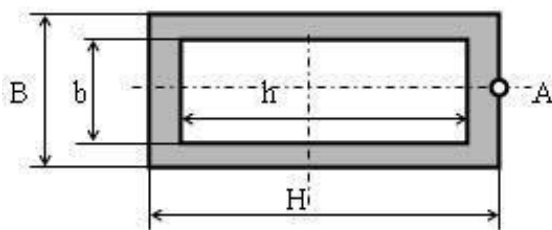


Рис. 667

779. Визначити ядро перерізу стержня діаметром $d=16$ см.

Розв'язок

Очевидно, що для кругового перерізу відстань від точки прикладання позacentрової розтягуючої сили до центру кола, коли нейтральна лінія знаходиться за межею перерізу, є завжди однакою, незалежно від напрямку зближення точки прикладання розтягуючої сили до центру кола. Звідси висновок, що ядро кругового перерізу є колом.

Покладається, що точка прикладання розтягуючої сили, коли нейтральна лінія знаходиться за межею кругового перерізу, має координати $(0, y_0)$ (Рис. 668).

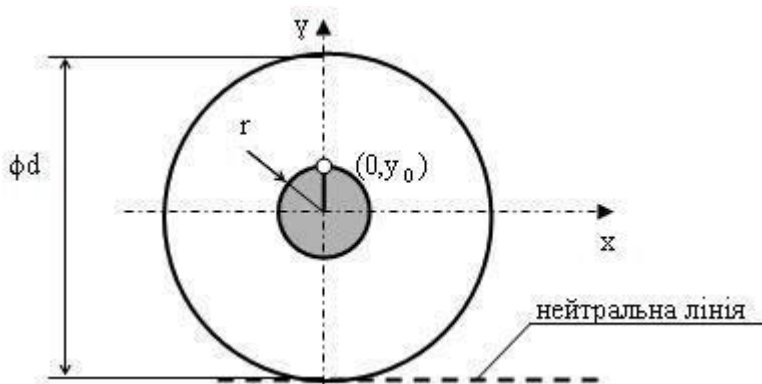


Рис. 668

Рівняння відстані нейтральної лінії від початку системи координат приводиться в цьому випадку до вигляду

$$\delta = \frac{I_x}{y_0 F},$$

де: $y_0 \equiv r$ – радіус ядра перерізу; $\delta = d/2$; $F = \frac{\pi d^2}{4}$; $I_x = \frac{\pi d^4}{64}$.

Після підставлення і спрощення отримано

$$r = \frac{d}{8} = \frac{16}{8} = 2 \text{ см.}$$

Ядро перерізу є колом радіуса 2 см.

780. Визначити ядро перерізу стержня прямокутного перерізу $b \times h=12$ см $\times$ 18 см.

Розв'язок

Приймається, що точка прикладання розтягуючої стержень сили (x_0, y_0) , переміщується вздовж напрямку k до початку системи координат xu . Нейтральна лінія для певної малої відстані розтягуючої сили від початку системи координат, виходить за межі перерізу на ребрі в третій чверті, як показано на Рис. 669.

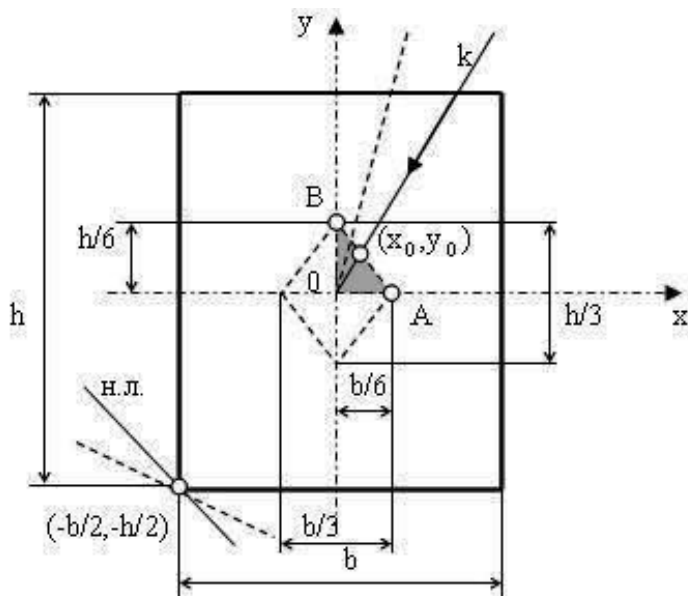


Рис. 669

Для іншого напрямку переміщення розтягуючої сили, вказаного штриховою лінією, нейтральна лінія з іншим рівнянням, яка також вказана штриховою лінією, вийде за межі перерізу на тій же вершині з координатами $(-b/2; -h/2)$.

Рівняння нейтральної лінії матиме вигляд:

$$\frac{x_0 x}{I_y} + \frac{y_0 y}{I_x} + \frac{1}{F} = 0.$$

У вищевказаному рівнянні для положення, коли нейтральна лінія виходить за межі перерізу, тільки одна її точка з координатами $x = -b/2$ і $y = -h/2$ належатиме до перерізу. Водночас при виході нейтральної лінії за межі перерізу для різних напрямків наближення розтягуючої сили до центру системи координат координати (x_0, y_0) мають різні значення.

У рівнянні нейтральної лінії, коли вона виходить за межі перерізу, координати $(-b/2; -h/2)$ є сталими, а координати (x_0, y_0) змінними. Відбувається заміна змінних в поданому вище рівнянні. Це є рівняння лінії зі змінними x_0, y_0 , що обмежує ядро перерізу в першій чверті системи координат. Аналогічний розгляд можна провести для інших чвертей системи координат.

Встановлюються координати точок А і В. Для точки А буде:

$$(x_0, y_0) = (x_A, 0); (x, y) = (-b/2, -h/2); I_x = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{12}; F = bh;$$

Звідки після підставлення і обчислення отримано $x_A = b/6 = 12/6 = 2$ см.

Для точки В буде: $(x_0, y_0) = (0, y_0)$; інші дані такі ж, як вище. Після підставлення даних і обчислень отримано: $y_B = h/6 = 18/6 = 3$ см.

Доповнюючи за принципом симетрії границю ядра перерізу в інших чвертях системи координат отримано, що ядром прямокутного перерізу $b \times h$ є ромб з діагоналями $b/3$ і $h/3$ (Рис. 669). У випадку, що розглядається, це ромб з діагоналями 4 см і 6 см.

Спосіб пошуку ядра прямокутного перерізу приводить дозволяє зробити висновок, що ромбом є також ядро перерізу двотавра, труби прямокутного перерізу і т.п. Розміри діагоналей цих ромбів залежать від конкретних розмірів даного перерізу. Ядром таврового перерізу є дельтоїд, а трикутного – трикутник.

781. Визначити чи в стержні радіусом $R = 10$ см можна просвердлити отвір радіусом, рівним радіусу ядра перерізу.

782. Знайти ядро перерізу для стержня з поперечним перерізом у вигляді рівнобедреного трикутника (Рис. 670). Дані: $b = 16$ см; $h = b$.

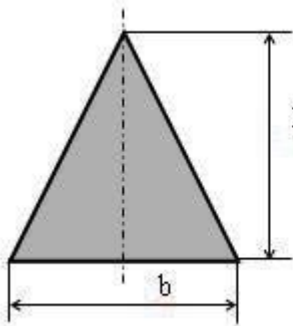


Рис. 670

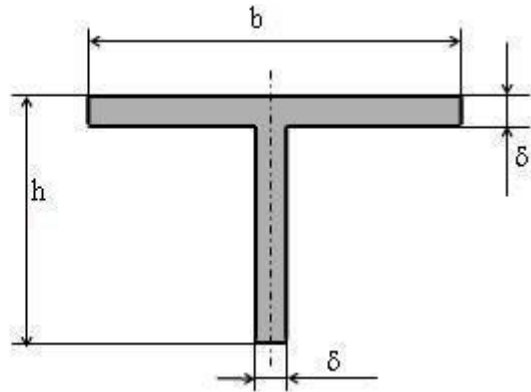


Рис. 671

783. Визначити ядро перерізу для стержня поперечного перерізу, поданого на Рис. 671. Дані: $\delta = 4$ мм; $h = 8\delta$; $b = 12\delta$.

784. Для опори з перерізом, показаним на Рис. 672а, визначити ядро перерізу. Дані: $c = 20$ см; $b = 3c$; $a = 4c$.

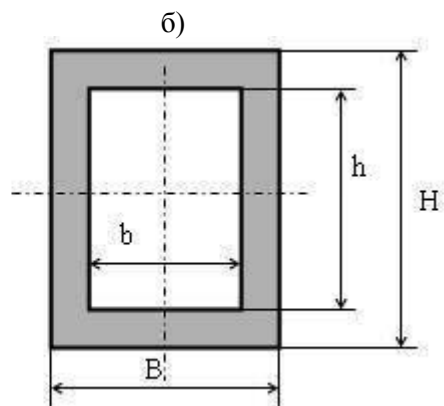
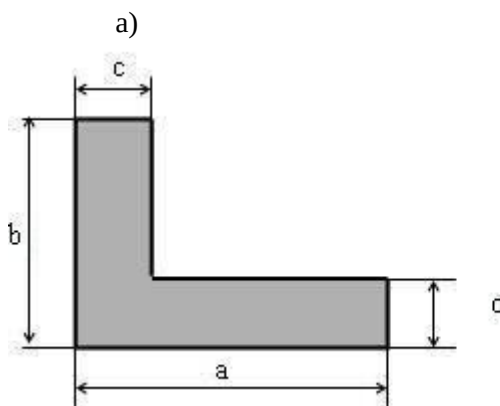


Рис. 672

785. Визначити ядро перерізу для опори з перерізом, показаним на Рис. 672б. Дані: $B = 12$ см; $b = 8$ см; $H = 16$ см; $h = 12$ см.

786. Визначити ядро перерізу для стержня з трубчастим поперечним перерізом (Рис. 673). Дані: $D = 8 \text{ см}$; $\delta = 2 \text{ см}$.

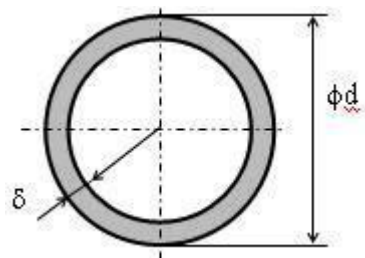


Рис. 673

787. Труба з вирізом (Рис. 674) розтягується силами P . Визначити розподіл нормальних напружень в поперечному перерізі А-А. Обчислити екстремальні значення нормальних напружень. Дані: $P = 160 \text{ кН}$; $R = 12 \text{ см}$; $\delta = 4 \text{ мм}$.

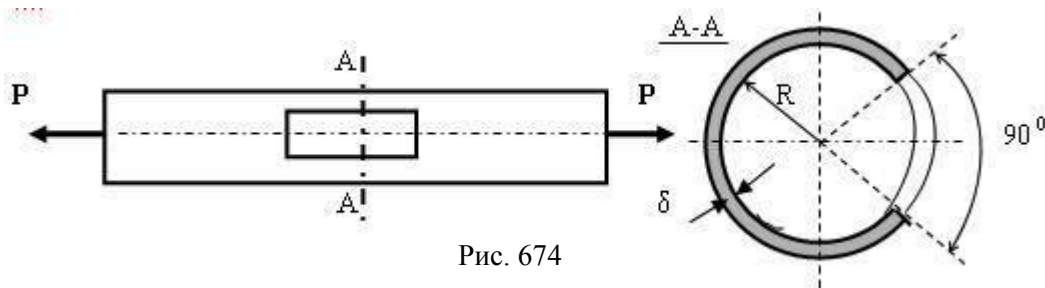


Рис. 674

788. На підставі тензометричних вимірів визначено лінійні деформації в точках А і В вздовж пластини, навантаженої як показано на Рис. 675. Розрахувати величину розподіленого навантаження q і відрізок a , на якому воно діє. Дані: $\epsilon_A = 0,2 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_B = 0,8 \cdot 10^{-3}$; $b = 2 \text{ см}$; $h = 6 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

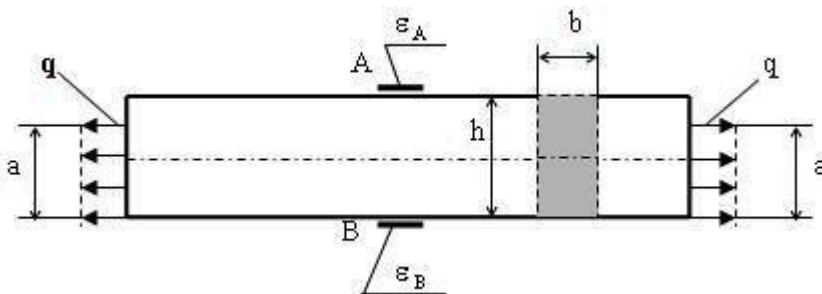


Рис. 675

789. Стержень кругового перерізу з вирізом (Рис. 676) розтягуваний силами P . Обчислити очікувані покази тензометрів a , b і c , наклеєних вздовж осі стержня в поперечному перерізі А-А. Дані: $P = 500 \text{ кН}$; $r = 40 \text{ мм}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

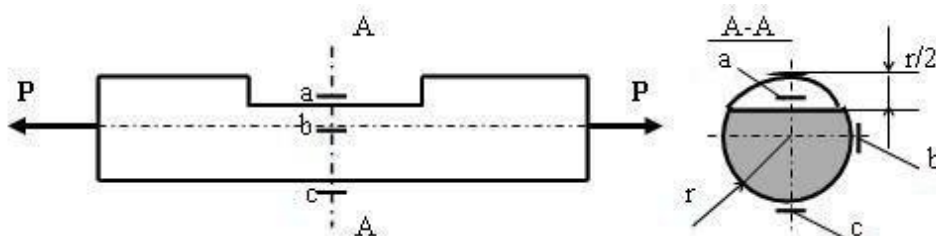


Рис. 676

790. Стержень, складений із двох рівнобоких кутиків 80x80x8 згідно ГОСТ 8509-57 (Рис. 677), розтягуваний силою $P = 200$ кН, прикладеною в точці А поперечного перерізу. Обчислити екстремальні значення нормальних напружень у поперечному перерізі цього стержня.

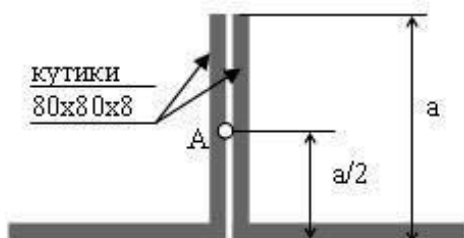


Рис. 677

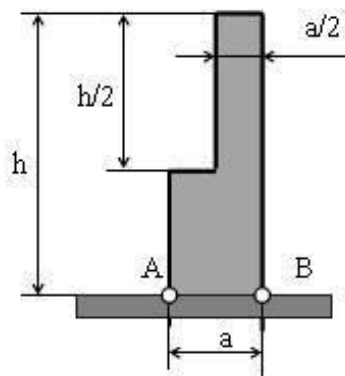


Рис. 678

791. Бетонна стіна ступінчатої товщини (Рис. 678) навантажена власною вагою. Обчислити напруження в точках А і В. Дані: $h = 8$ м; $a = 1$ м; $\gamma = 18$ кН/м³ – питома вага бетону.
792. На колону кругового перерізу діє рівномірно розподілена сила P на половині верхнього перерізу як подано на Рис. 679. Розрахувати напруження в точках А, В, С і D. Дані: $P = 400$ кН; $d = 20$ см.

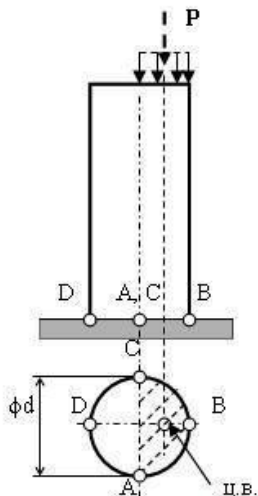


Рис. 679

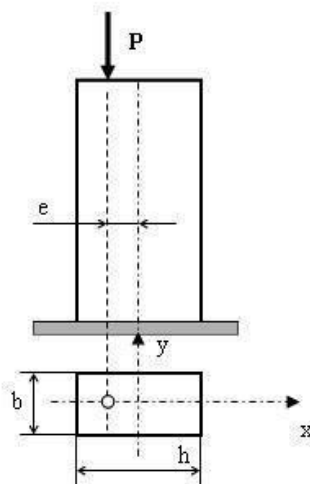


Рис. 680

793. Бетонна колона прямокутного перерізу стискається позакентровою силою P (Рис. 680). Обчислити екстремальні значення напружень в поперечному перерізі біля основи і визначити положення нейтральної лінії. Власною вагою колони знехтувати. Дані: $P = 160$ кН; $h = 2b = 80$ см; $e = 12$ см.

794. Стовп прямокутного перерізу стискається силою P як показано на Рис. 681. Визначити розподіл напружень в поперечному перерізі і подати рівняння нейтральної лінії в площині xu . Власною вагою стовпа знехтувати. Дані: $P = 600$ кН; $b = 20$ см; $h = 30$ см.

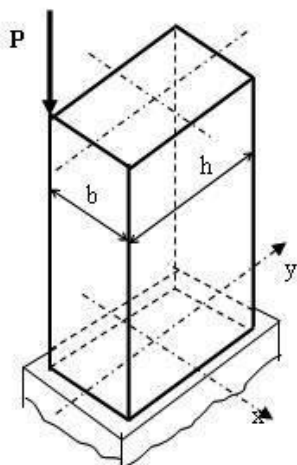


Рис. 681

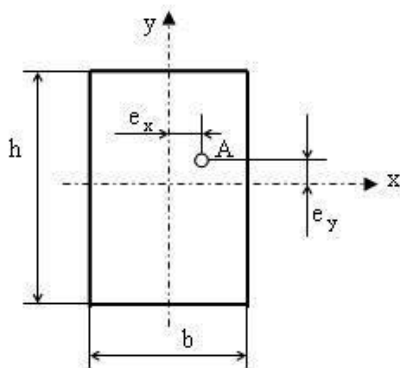


Рис. 682

795. Дерев'яний стовп прямокутного перерізу $b \times h = 20$ см $\times$ 30 см стискається силою $P = 120$ кН, прикладеною в точці А як показано на Рис. 682. Визначити розподіл напружень на гранях перерізу і положення нейтральної лінії. Інші дані: $e_x = 4$ см; $e_y = 4$ см.

796. Массивний чавунний стержень з прямокутним отвором зазнає позacentрового стиску як показано на Рис. 683. Розрахувати допустиму величину сили P . Дані: $b = 60$ мм; $h = 3/2b$; $d = 2b$; $[\sigma_p] = 80$ МПа; $[\sigma_c] = 240$ МПа.

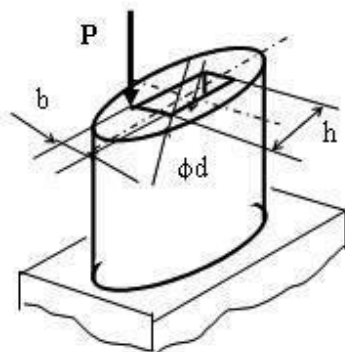


Рис. 683

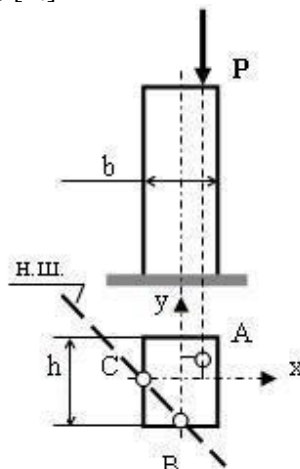


Рис. 684

797. Стовп прямокутного поперечного перерізу стискається позacentрово силою P (Рис. 684). Обчислити координати точки А, в якій потрібно прикласти силу P , щоб нейтральна лінія проходила через точки В і С перерізу. Дані: $h = 60$ см; $b = 2/3h$.

798. Рівнобічний кутик з поперечним перерізом, показаним на Рис. 685, розтягується силою P , прикладеною в точці C . Подати рівняння нейтральної лінії і обчислити екстремальні значення напружень в поперечному перерізі. Дані: $P = 50$ кН; $I_x = I_y = 13,1$ см⁴; $F = 5,7$ см²; $e = 1,5$ см; $a = 50$ мм; $g = 6$ мм.

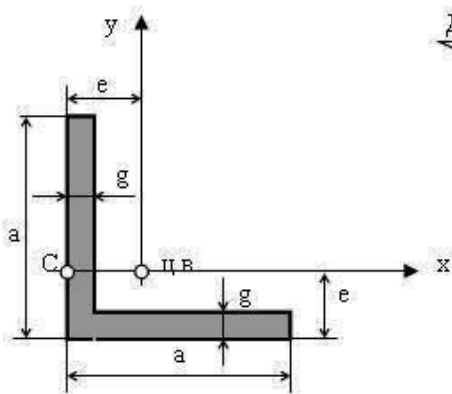


Рис. 685

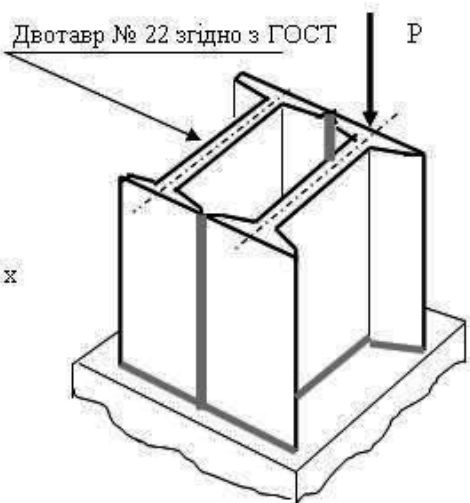


Рис. 686

799. Сталевий стовп, зварений з двох двотаврів, стискається силою $P = 250$ кН, прикладеною як показано на Рис. 686. Перевірити чи в поперечному перерізі не буде перевищено допустимих напружень $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа.
800. Тонкостінний стержень з вирізом (Рис. 687) скручується моментом $M = 1$ кНм. При якому значенні розтягуючої сили P максимальні еквівалентні напруження згідно енергетичної теорії в поперечному перерізі на місці вирізу будуть такі ж, як при навантаженні крутним моментом M ? Дані: $a = 20\delta$.

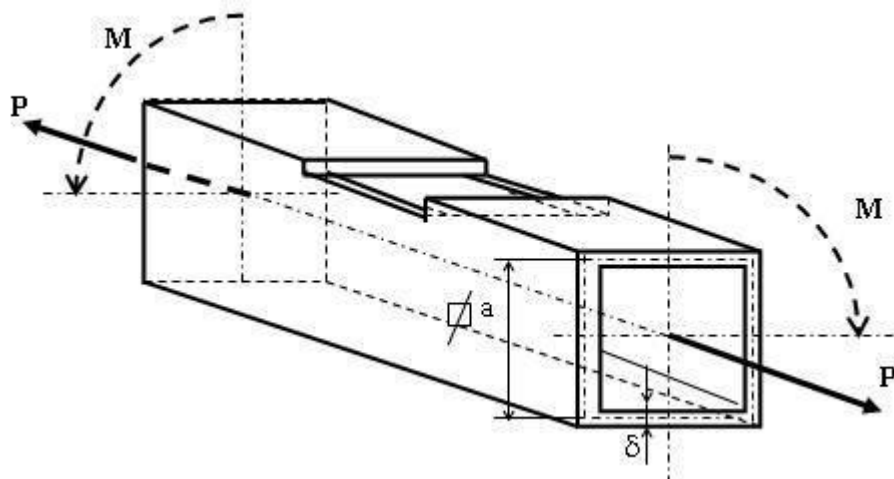


Рис. 687

7.7. Стержні з криволінійною віссю

1. Мірою викривлення стержня є відношення висоти поперечного перерізу h в площині кривини осі стержня до радіуса кривини ρ_0 його осі. Ці величини показано на Рис. 688.

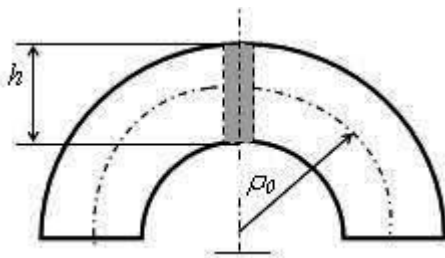


Рис. 688

У практичних обчисленнях приймають, що стержень є значно викривленим, якщо

$$\frac{h}{\rho_0} \geq 0,2.$$

2. Нормальні напруження в поперечному перерізі значно викривленого стержня (Рис. 689), який зазнає згину, обчислюють за формулою:

$$\sigma = \frac{M_{зг}}{F \cdot e r_0 + y},$$

де: F – площа поперечного перерізу стержня,

e – відстань нейтральної лінії від осі стержня,

y – відстань точки, в якій обчислюємо напруження, від нейтральної лінії,

r_0 – радіус кривини нейтральної лінії перед навантаженням згинальним моментом.

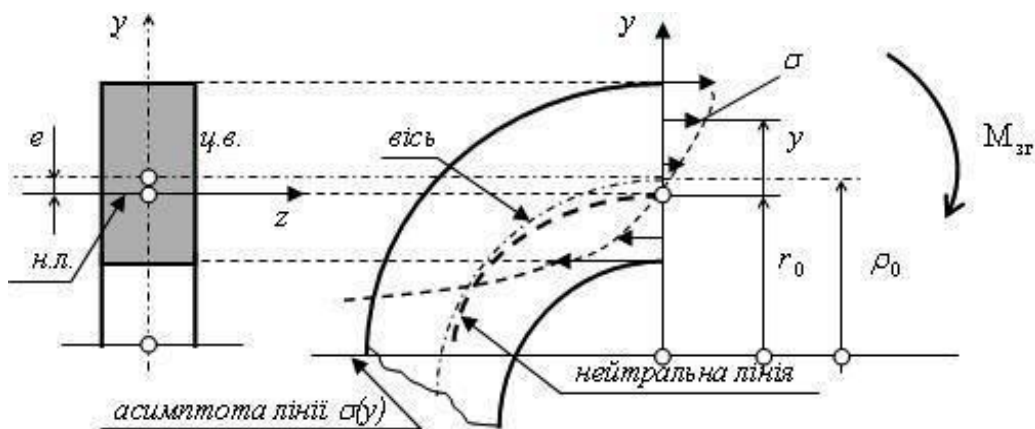


Рис. 689

Радіус кривини нейтральної лінії r_0 обчислюють за формулою:

$$r_0 = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}},$$

де: u – відстань площі dF від центра кривини.

Відстань нейтральної лінії від центру ваги перерізу e (Рис. 689)

$$e = \rho_0 - r_0.$$

Для стержнів, в яких $\frac{h}{\rho_0} \leq 0,5$, можна з достатньою для практики точ-

ністю обчислювати відстань нейтральної лінії від центру ваги перерізу з наступного виразу:

$$e \cong \frac{I_z}{\rho_0 F}.$$

У вищевказаному виразі I_z обчислено відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу.

3. Приклади відстаней нейтральної лінії від центру ваги для деяких перерізів.
Прямокутний переріз висотою h :

$$e = \rho_0 - \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + 0,5h}{\rho_0 - 0,5h}}.$$

Круговий переріз радіуса R :

$$e = \frac{1}{2} \left(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - R^2} \right).$$

- 801.** Отримані у результаті вимірів нормальні напруження в точці А перерізу С-С значно викривленого стержня (Рис. 690), навантаженого згинальним моментом M , становлять $\sigma_A = -100$ МПа. Розрахувати нормальні напруження в точці В перерізу. Дані: $R = 24$ см; $d = 12$ см.

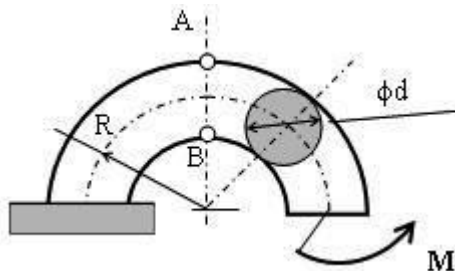


Рис. 690

Розв'язок

Приймаючи до уваги, що в даному випадку $\frac{h}{\rho_0} = \frac{d}{R} = \frac{12}{24} = 0,5$, відстань нейтральної лінії від центру ваги перерізу обчислюють з наближеного виразу:

$$e = \frac{I_z}{\rho_0 F} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{R \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d^2}{16R} = 0,375 \text{ см.}$$

Напруження в точці А описуються виразом

$$\sigma_A = \frac{M}{F \cdot e} \frac{y_A}{r_0 + y_A}.$$

$$\text{Звідси } M = F e \sigma_A \frac{r_0 + y_A}{y_A}.$$

Напруження в точці В рівні:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M}{F \cdot e} \frac{y_B}{r_0 + y_B} = \frac{F \cdot e \cdot \sigma_A \frac{r_0 + y_A}{y_A}}{F \cdot e} \frac{y_B}{r_0 + y_B} = \sigma_A \frac{y_B}{y_A} \frac{r_0 + y_A}{r_0 + y_B} = \sigma_A \frac{y_B}{y_A} \frac{R + d/2}{R - d/2} = \\ &= -100 \frac{-5,625 \cdot 30}{6,375 \cdot 18} = 147 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

- 802.** Якою буде похибка при обчисленні напружень в точці А поперечного перерізу стержня, показаного на Рис. 691, при використанні замість виразу для значно викривлених стержнів вираз для прямих стержнів? Дані: $R = 4d$.

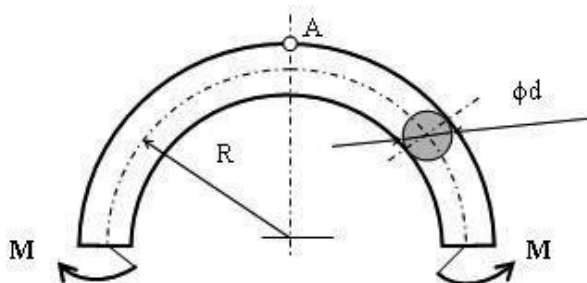


Рис. 691

- 803.** Якими силами Р можна навантажити розрізане кільце, показане на Рис. 692? Дані: $R = 20 \text{ см}$; $h = 12 \text{ см}$; $b = 3 \text{ см}$; $[\sigma_{\text{ст}}] = 200 \text{ МПа}$.

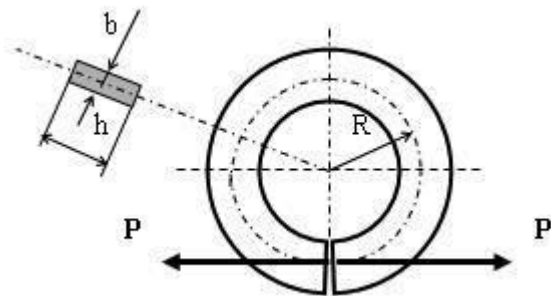


Рис. 692

Розв'язок

Внутрішні сили в найбільш навантаженому поперечному перерізі, що проходить через точки А і В, показано на Рис. 693.

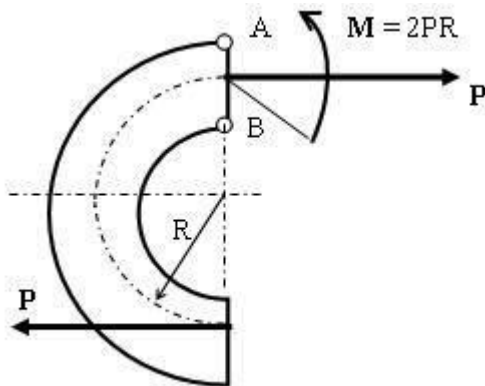


Рис. 693

Напруження в точках А і В є сумою напружень від розтягу перерізу силою Р і згину моментом $M = 2PR$. Більше за абсолютною величиною напруження в точках А і В, при однаковій величині допустимих напружень, послужить до обчислення допустимої величини сили Р.

$$\sigma_A = \frac{P}{bh} + \frac{M}{Fe r_0 + y_A} = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{2R}{e} \frac{y_A}{R + \frac{h}{2}} \right).$$

$$\sigma_B = \frac{P}{bh} + \frac{M}{Fe r_0 + y_B} = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{2R}{e} \frac{y_B}{R - \frac{h}{2}} \right).$$

Відстань нейтральної лінії при $\frac{h}{R} = \frac{12}{20} = 0,6 > 0,5$ обчислюється з наступного виразу:

$$e = \rho_0 - r_0 = R - \frac{h}{\ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}}} = 20 - \frac{12}{\ln \frac{26}{14}} = 20 - 19,38 = 0,62 \text{ см.}$$

Для порівняння абсолютних значень напружень в точках А і В обчислюють і порівнюють величини вказані вище в дужках:

$$1 - \frac{2R}{e} \frac{y_A}{R + \frac{h}{2}} = 1 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 6,62}{0,62 \cdot 26} = 15,4; \quad 1 - \frac{2R}{e} \frac{y_B}{R - \frac{h}{2}} = 1 - \frac{2 \cdot 20 \cdot (-5,38)}{0,62 \cdot 14} = 25,8.$$

Напруження в точці В більші за величиною від напружень в точці А. Відповідно умова міцності:

$$\sigma_B = 25,8 \frac{P}{bh} \leq [\sigma_{zg}], \text{ звідки } P \leq \frac{bh \cdot [\sigma_{zg}]}{25,8} = \frac{3 \cdot 12 \cdot 20}{25,8} = 27,9 \text{ кН}.$$

Кільце можна навантажити силами $P \leq 27,9 \text{ кН}$.

- 804.** Чавунний стержень значної кривини навантажений силами P як показано на Рис. 694. Обчислити максимальні величини сил P , якщо необхідний коефіцієнт запасу міцності рівний 2. Дані: $r = 20 \text{ см}$; $h = 10 \text{ см}$; $[\sigma_p] = 200 \text{ МПа}$; $[\sigma_c] = 600 \text{ МПа}$.

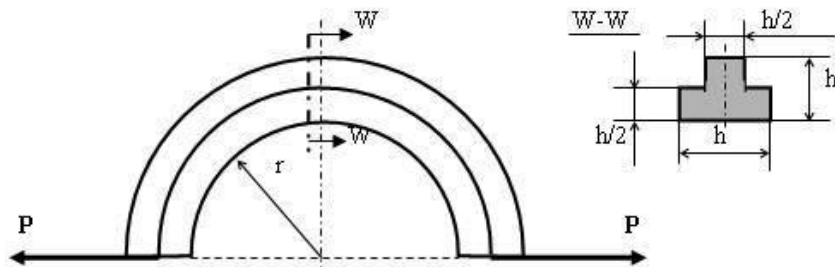


Рис. 694

- 805.** Обчислити, при яких значеннях стискаючих сил P півкільце, показане на Рис. 695, зазнає руйнування. Дані: $R = 16 \text{ см}$; $r = 12 \text{ см}$; $[\sigma_p] = 200 \text{ МПа}$; $[\sigma_c] = 800 \text{ МПа}$.

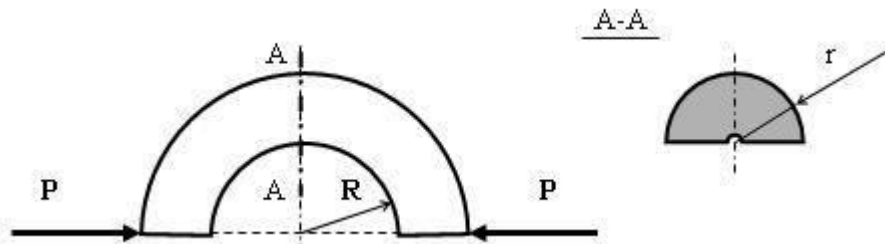


Рис. 695

- 806.** Тензометр, наклеєний в точці А гака, показаного на Рис. 696, показав відхилення $\varepsilon = 0,4 \cdot 10^{-3}$. Обчислити навантаження P гака. Дані: $h = 6 \text{ см}$; $b = 2 \text{ см}$; $\rho_0 = 10 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

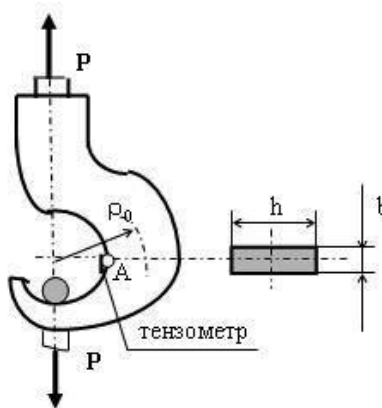


Рис. 696

807. Обчислити напруження в точці А поперечного перерізу гака, показаного на Рис. 697, навантаженого силою Р. Дані: $P = 20 \text{ кН}$; $b_1 = 4 \text{ см}$; $b_2 = 1 \text{ см}$; $u_1 = 3 \text{ см}$; $u_2 = 10 \text{ см}$.

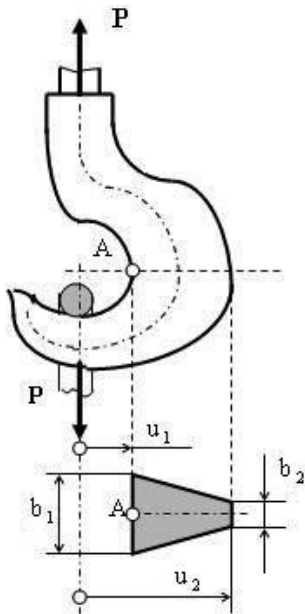


Рис. 697

7.8. Статично невизначні задачі

1. Розв'язок статично невизначних задач вимагає застосування принципу суперпозиції кутових чи лінійних переміщень.

808. Для балки, показаної на Рис. 698, побудувати епюру згинальних моментів і поперечних сил. Перевірити чи підбір перерізу балки властивий щодо її міцності. Дані: $q = 20 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$; $[\sigma_{\text{ст}}] = 160 \text{ МПа}$; $W_z = 947 \text{ см}^3$.

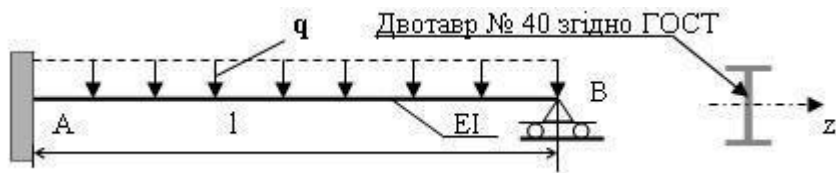


Рис. 698

Розв'язок

Система є один раз статично невизначною. Основна система подана на Рис. 699. Величиною статично невизначною є реактивний момент M_A опори А.

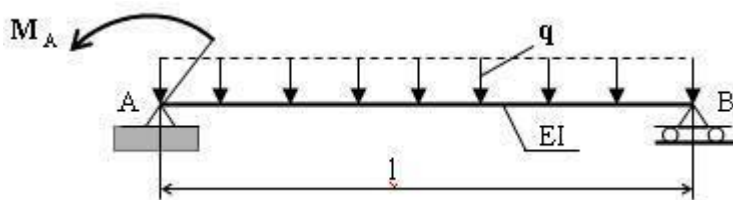


Рис. 699

Додатковим рівнянням може бути суперпозиція кутів повороту поперечного перерізу на опорі А від всіх зовнішніх навантажень, тобто розподіленого навантаження q і зосередженого моменту M_A . Це рівняння має загальний вигляд:

$$\theta_{A,M_A} + \theta_{A,q} = 0,$$

а після підставлення відповідних залежностей отримано:

$$\frac{M_A l}{3EI} - \frac{ql^3}{24EI} = 0, \text{ звідки } M_A = \frac{ql^2}{8}.$$

Епюри внутрішніх сил будуються за методом суперпозиції епюр, попередньо виконаних від розподіленого навантаження q та від зосередженого моменту, який виникає в опорі А. Результат такого додавання зображено на Рис. 700.

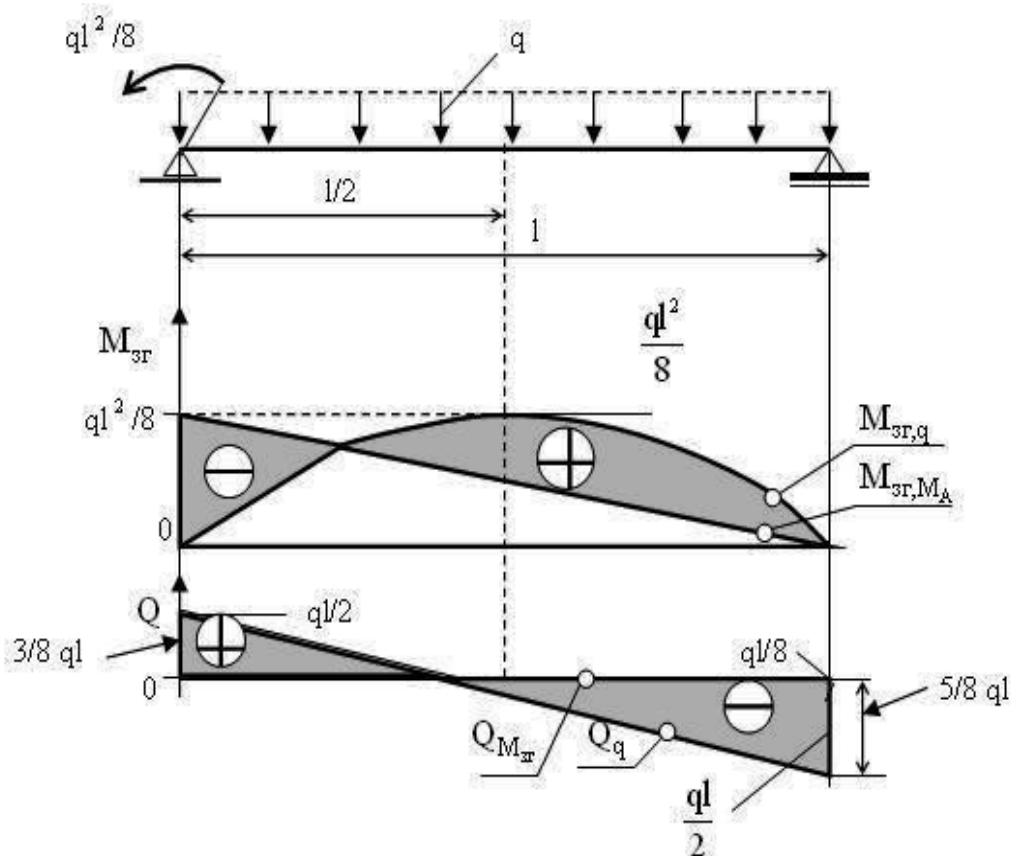


Рис. 700

Максимальний згинальний момент становить $\frac{ql^2}{8}$. З умови міцності

$$\sigma = \frac{M_{зг\max}}{W_z} \leq [\sigma_{зг}] \text{ необхідний момент опору на згин становить:}$$

$$W_z \geq \frac{ql^2}{8[\sigma_{зг}]} = \frac{20 \cdot 10^{-2} \cdot 600}{8 \cdot 16} = 1125 \text{ см}^3 > 947 \text{ см}^3.$$

Необхідний момент опору як мінімум більший від моменту опору двотавра № 40 згідно ГОСТ. Потрібно підібрати найближчий в ряду більший двотавр № 45, для якого $W_z = 1220 \text{ см}^3$.

- 809.** Який зосереджений момент M потрібно прикласти посередині балки, закріпленої як показано на Рис. 701, щоб поперечний переріз, в якому він діє, повернувся на кут $\theta_c = 0,18^\circ$? Дані: $l = 4 \text{ м}$; $EI = 200 \text{ кНм}^2$.

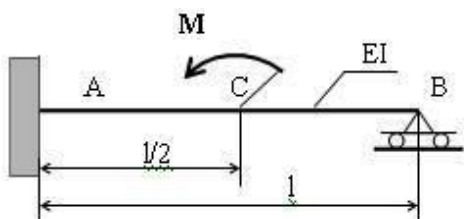


Рис. 701

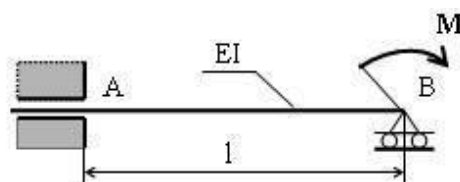


Рис. 702

- 810.** Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил для закріпленої і навантаженої зосередженим моментом балки, показаної на Рис. 702.

- 811.** Обчислити реакції опор балки, показаної на Рис. 703. Дані: $P = 12 \text{ кН}$; $l = 6 \text{ м}$; $EI = \text{const}$.

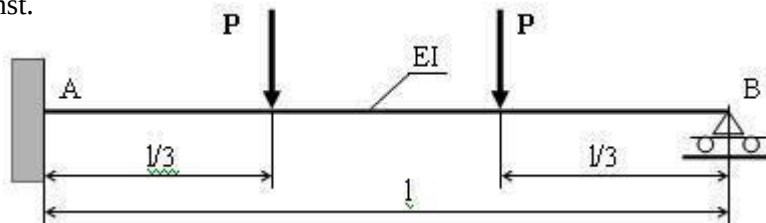


Рис. 703

- 812.** Побудувати епюри внутрішніх сил для закріпленої і навантаженої балки, показаної на Рис. 704. Дані: $q = 16 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $EI = \text{const}$.

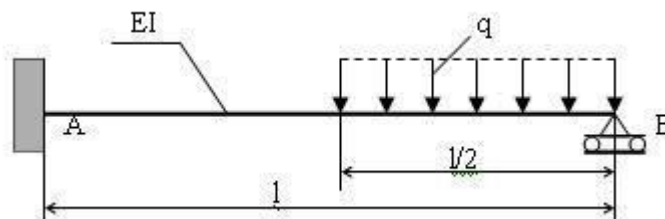


Рис. 704

Розв'язок

Система є один раз статично невизначною. Приймаємо основну систему як показано на Рис. 705.

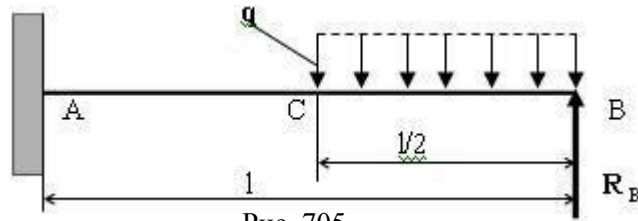


Рис. 705

Вертикальне переміщення точки В відоме і дорівнює нулю. Звідси додаткове рівняння переміщень:

$$v_{B,R_B} + v_{B,q} = 0,$$

$$\text{де: } v_{B,R_B} = \frac{R_B l^3}{3EI};$$

$$v_{B,q} = \frac{ql^4}{8EI} - \left[\frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI} + \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6EI} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{41}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

Спосіб обчислення переміщення $v_{B,q}$ пояснює Рис. 706

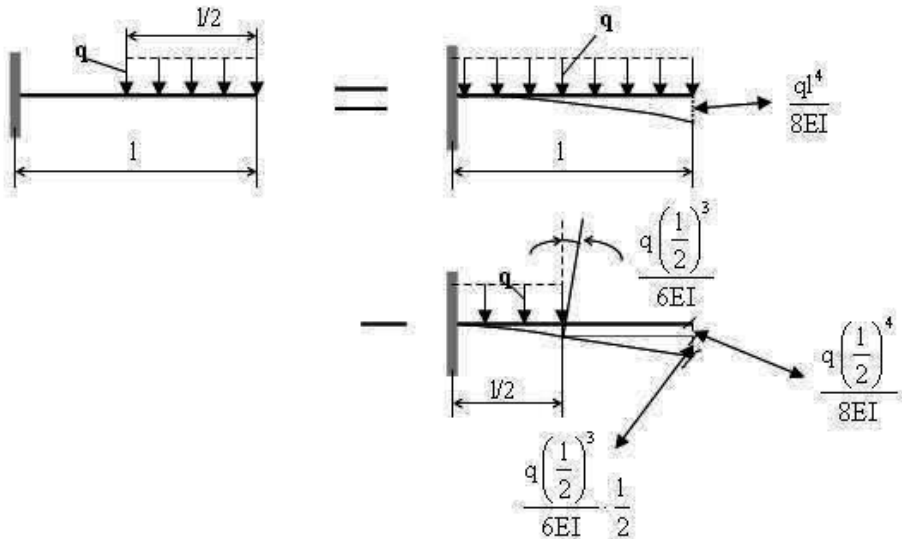


Рис. 706

Після підставлення виразів переміщень у вихідне рівняння з відповідними знаками отримано: $\frac{R_B l^3}{3EI} - \frac{41}{384} \frac{ql^4}{EI} = 0$, звідки $R_B = \frac{41}{128} ql$.

Балка навантажена силами, як показано на Рис. 707.

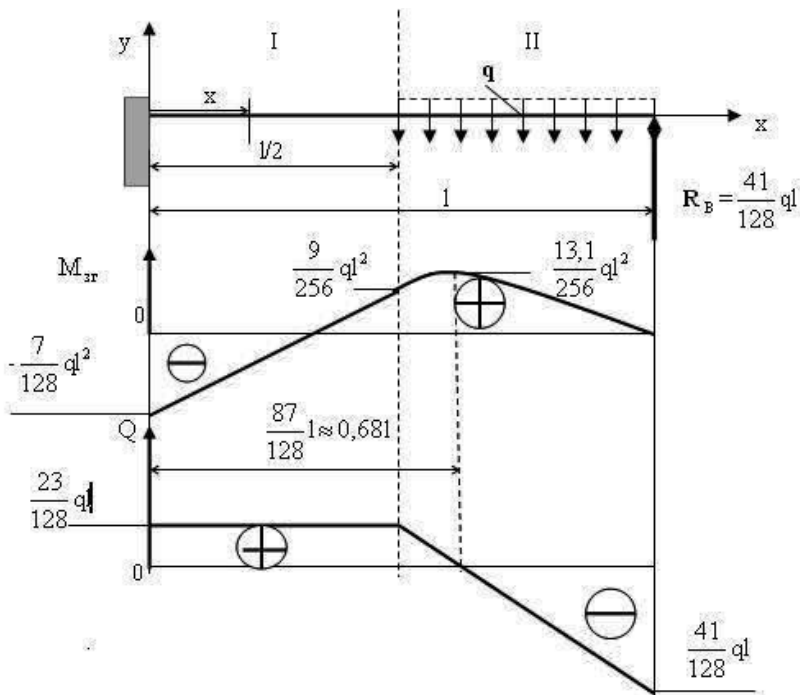


Рис. 707

Рівняння внутрішніх сил для проміжків I і II є наступними:

$$\text{I. } M_{зг} = \frac{41}{128} ql(l-x) - \frac{ql}{2} \left(\frac{3}{4} l - x \right); \quad Q = \frac{ql}{2} - \frac{41}{128} ql = \frac{23}{128} ql;$$

$$\text{II. } M_{зг} = \frac{41}{128} ql(l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}; \quad Q = q(l-x) - \frac{41}{128} ql.$$

Екстремальні значення згинальних моментів становлять:

$$M_{зг, x=0} = -\frac{7}{128} ql^2 = -56 \text{ кНм}; \quad M_{зг, x=\frac{87}{128}l} = \frac{13,1}{256} ql^2 = 52,4 \text{ кНм}.$$

Екстремальні значення поперечних сил:

$$Q_{x=0} = \frac{23}{128} ql = 23 \text{ кН}; \quad Q_{x=l} = -\frac{41}{128} ql = -41 \text{ кН}.$$

- 813.** Консольна балка, навантажена силою P (Рис. 708), має опору, що обмежує її вертикальне переміщення. Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил. Дані: $P = 32 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$; $\Delta = \frac{Pl^3}{24EI}$; $EI = \text{const}$.

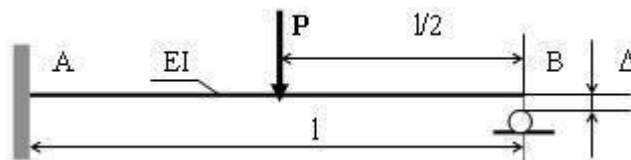


Рис. 708

- 814.** Балка жорстко закріплена одним кінцем, а другим шарнірно навантажена посередині силою P (Рис. 709). Обчислити стрілу прогину балки. Дані: $P = 60$ кН; $l = 4$ м; $EI = 7 \cdot 10^3$ кНм².

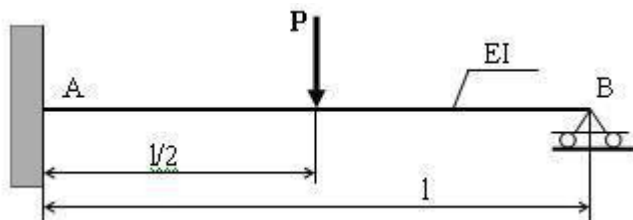


Рис. 709

- 815.** Прогин вільного кінця балки, показаної на Рис. 710а, у два рази більший, ніж його прогин після підкладання пружинистої опори як показує Рис. 710б. Обчислити коефіцієнт пружності k опори. Дані: $P = 10$ кН; $l = 2$ м; $EI = 500$ кНм².

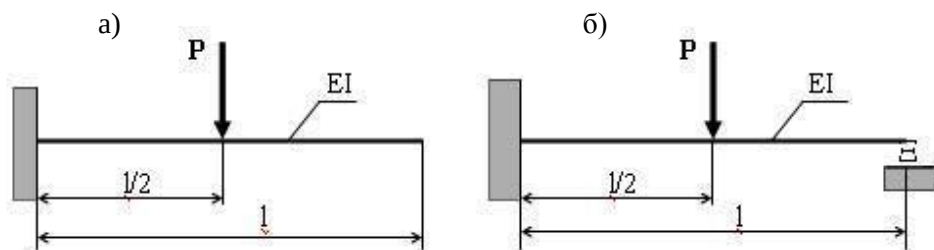


Рис. 710

- 816.** При якій відстані δ опори В від вільного кінця ненавантаженої балки вертикальні реакції на обох опорах будуть однакові після навантаження балки силою P як показано на Рис. 711? Дані: $P = 4$ кН; $l = 3$ м; $EI = 3,1 \cdot 10^3$ кНм².

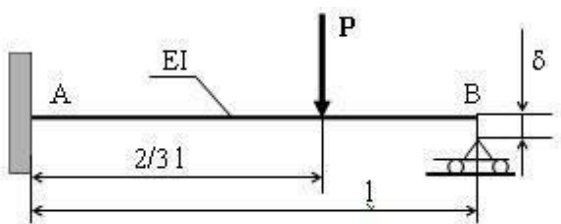


Рис. 711

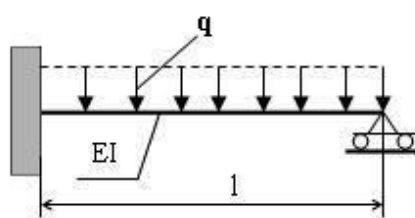


Рис. 712

- 817.** Розрахувати стрілу прогину балки, показаної на Рис. 712. Дані: $q = 37$ кН/м; $l = 5$ м; $EI = 1,25 \cdot 10^4$ кНм².

- 818.** Балку, показану на Рис. 713, навантажено силою P в два рази більшою від сили, потрібної для ліквідації зазору Δ на опорі В. Визначити реакції опор і побудувати епюру згинальних моментів для балки АВ. Дані: $l = 1,2$ м; $\Delta = 1$ см; $EI = 2,4 \cdot 10^6$ кНсм².

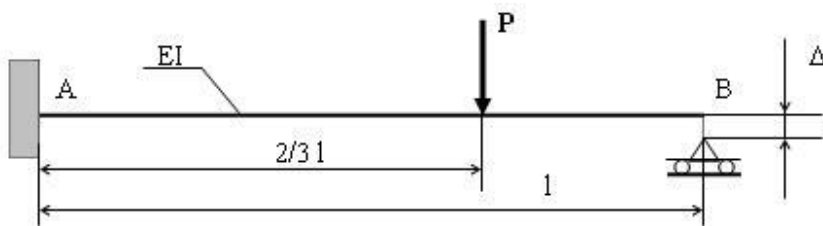


Рис. 713

819. Записати рівняння зігнутої осі балки, навантаженої моментом M_A як показано на Рис. 714 і підпертої посередині пружинистою опорою з жорсткістю k . Розрахувати прогин посередині балки. Дані: $M_A = 2 \text{ кНм}$; $l = 4 \text{ м}$; $EI = 2 \text{ кНм}^2$;

$$k = \frac{48EI}{l^3}.$$

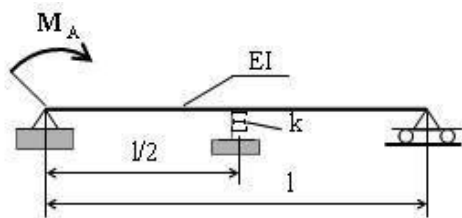


Рис. 714

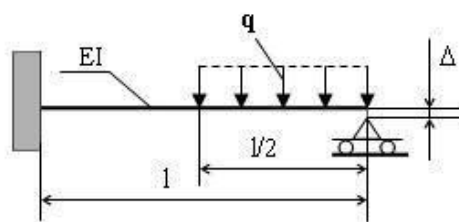


Рис. 715

820. Побудувати епюри внутрішніх сил для навантаженої балки, показаної на

Рис. 715. Дані; $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 8 \text{ м}$; $\Delta = \frac{3ql^4}{128EI}$.

821. Розподілене навантаження діє на двотаврову балку як показано на Рис. 716. Побудувати епюри внутрішніх сил. Розрахувати прогин посередині балки і величину максимальних нормальних напружень в поперечному перерізі. Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 6 \text{ м}$; $I_z = 2530 \text{ см}^2$; $W_z = 230 \text{ см}^3$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

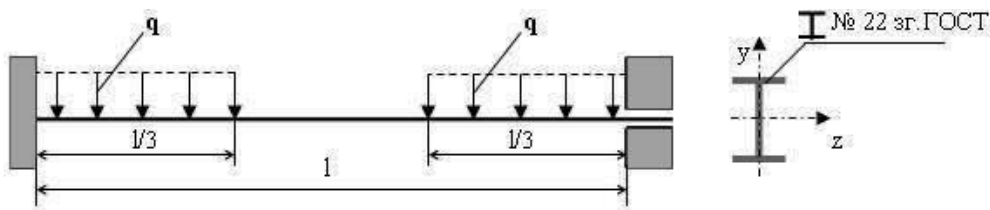


Рис. 716

Розв'язок

Задача є двічі статично невизначною. Приймаємо основну систему як подано на Рис. 717. Статично невизначними величинами тут є реакція R_B і момент M_B , які виникають у стінці.

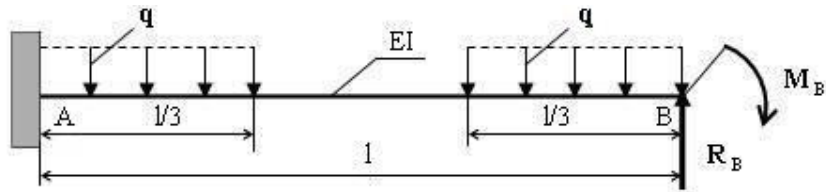


Рис. 717

Із умов закріплення балки помітно, що кут повороту поперечного перерізу в опорі В дорівнює нулю, а також вертикальне переміщення кінця В дорівнює нулю. Тому два рівняння переміщень будуть наступними:

$$\theta_{B,M_B} + \theta_{B,R_B} + \theta_{B,q} = 0,$$

$$v_{B,M_B} + v_{B,R_B} + v_{B,q} = 0.$$

Підставляючи необхідні вирази, отримано:

$$-\frac{M_B l}{EI} + \frac{R_B l^2}{2EI} - \left[\frac{ql^3}{6EI} - \frac{q\left(\frac{2l}{3}\right)^3}{6EI} + \frac{q\left(\frac{l}{3}\right)^3}{6EI} \right] = 0,$$

$$-\frac{M_B l^2}{2EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} - \left[\frac{ql^4}{8EI} - \left(\frac{q\left(\frac{2l}{3}\right)^4}{8EI} + \frac{q\left(\frac{2l}{3}\right)^3}{6EI} \frac{l}{3} \right) + \frac{q\left(\frac{l}{3}\right)^4}{8EI} + \frac{q\left(\frac{l}{3}\right)^3}{6EI} \frac{2l}{3} \right] = 0.$$

Спосіб обчислення переміщень від розподіленого навантаження q показано на Рис. 718.

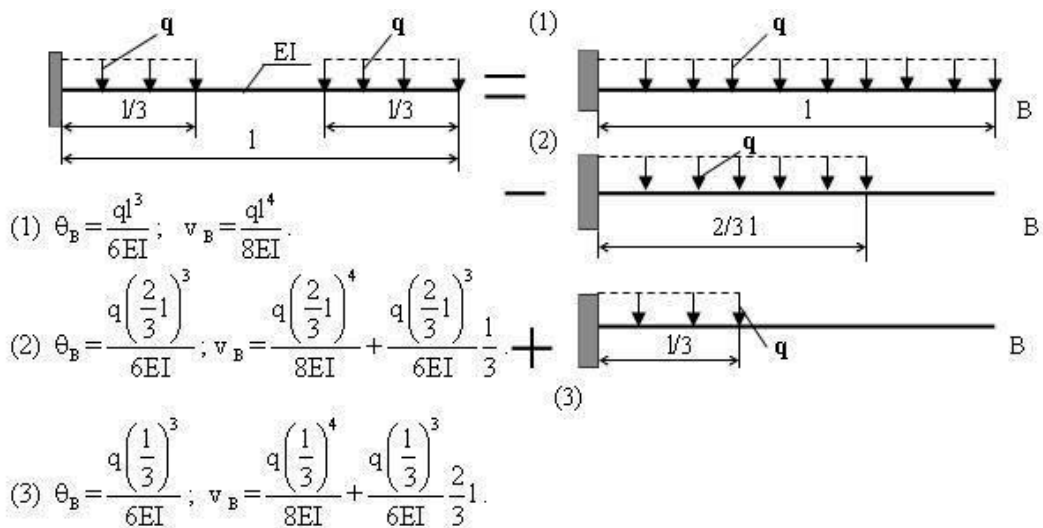


Рис. 718

З двох рівнянь переміщень отримано $R_B = \frac{ql}{3}$ і $M_B = \frac{7}{162} ql^2$.

З рівнянь статки для основної системи після підставлення величин R_B і M_B слідує, що величини реакцій в опорі А симетрично рівні відповідним реакціям в опорі В. Це підтверджує співпадіння обчислених та логічно очікуваних симетричних реакцій для симетричної системи, навантаженої симетрично.

Рівняння згинальних моментів і поперечних сил для проміжків І і ІІ, показаних на Рис. 719, матимуть вигляд:

$$\text{I.} \quad M_{зг} = \frac{ql}{3}x - \frac{7}{162}ql^2 - \frac{qx^2}{2}; \quad Q = \frac{ql}{3} - qx;$$

$$\text{II.} \quad M_{зг} = \frac{ql}{3}x - \frac{7}{162}ql^2 - \frac{ql}{3}\left(x - \frac{l}{6}\right) = \frac{ql^2}{81}; \quad Q = 0.$$

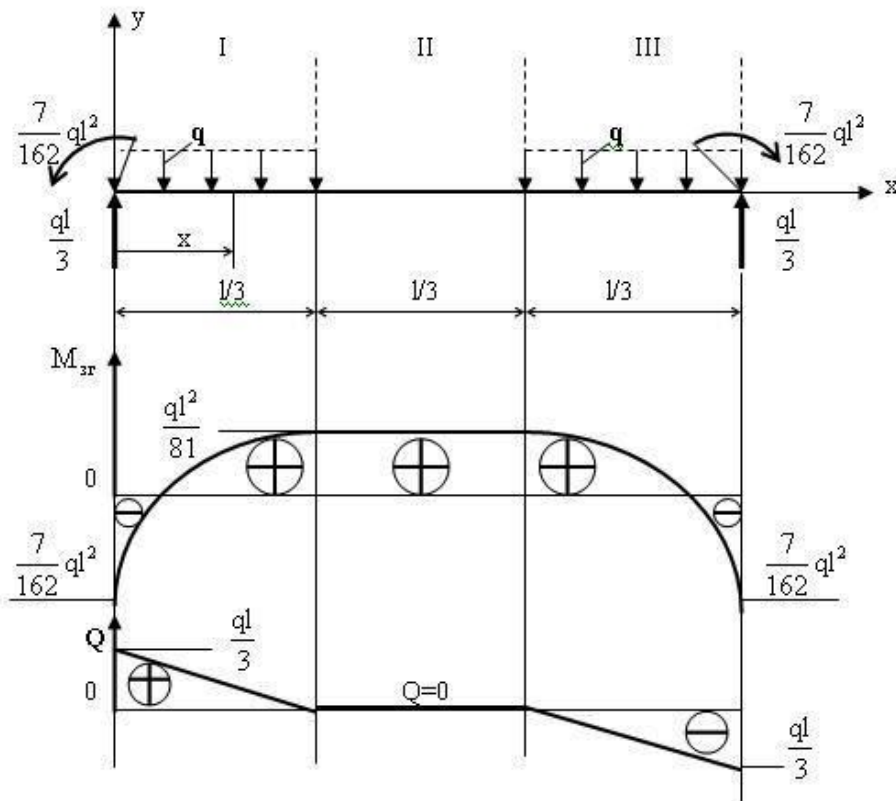


Рис. 719

Епюри внутрішніх сил на проміжку ІІ виконано з уваги на симетрію системи. Найбільший за величиною згинальний момент діятиме на місці закріплення балки і є рівний $\frac{7}{162} ql^2$. Максимальні напруження в цьому перерізі становлять:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зг, \max}}{W_z} = \frac{7}{162} \frac{ql^2}{W_z} = \frac{7}{162} \frac{0,1 \cdot 6^2 \cdot 10^4}{230} = 4,73 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 4,73 \text{ МПа}.$$

Універсальне рівняння зігнутої осі балки на проміжку I і II має вигляд:

$$EIy'' = \frac{ql}{3}x - \frac{7}{162}ql^2 - \frac{qx^2}{2} \Big|_I + \frac{q\left(x - \frac{l}{3}\right)^2}{2} \Big|_{II};$$

$$EIy' = C + \frac{ql}{6}x^2 - \frac{7}{162}ql^2x - \frac{qx^3}{6} \Big|_I + \frac{q\left(x - \frac{l}{3}\right)^3}{6} \Big|_{II};$$

$$EIy = Cx + D + \frac{ql}{18}x^3 - \frac{7}{324}ql^2x^2 - \frac{qx^4}{24} \Big|_I + \frac{q\left(x - \frac{l}{3}\right)^4}{24} \Big|_{II}.$$

З умов закріплення слідує, що $C = D = 0$. Звідси прогин посередині балки:

$$EIy_{x=\frac{l}{2}} \cong -1,06 \cdot 10^{-3} ql^4;$$

$$y_{x=\frac{l}{2}} = -1,06 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI} = -1,06 \cdot 10^{-3} \frac{0,1 \cdot 600^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 2530} = -0,27 \text{ см.}$$

- 822.** Застосовуючи принцип суперпозиції переміщень, визначити реакції опор, а також побудувати епюру згинальних моментів для балки, зображеної на Рис. 720. Дані: $q = 64 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$; $EI = \text{const}$.

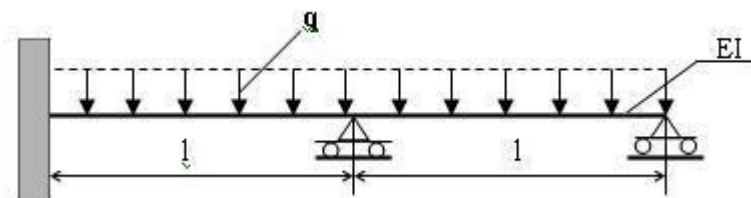


Рис. 720

- 823.** Обчислити допустиме навантаження на балку, показану на Рис. 721. Дані: $M = Pl/3$; $l = 4 \text{ м}$; $[\sigma_{зг}] = 140 \text{ МПа}$; $W_z = 120 \text{ см}^3$.

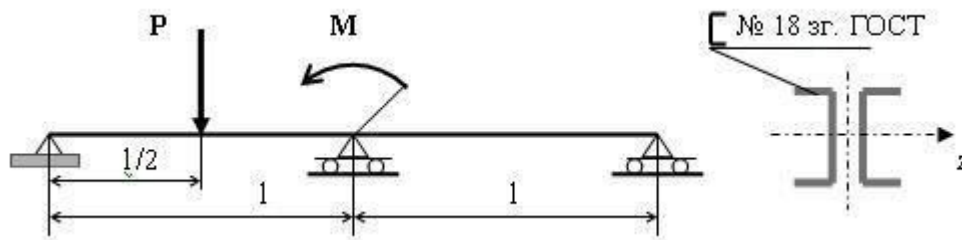


Рис. 721

- 824.** Як зміниться стріла прогину балки, якщо розподілене навантаження q (Рис. 722а) переміститься з першого прольоту у другий як показано на Рис. 722б Дані: q, l, EI .

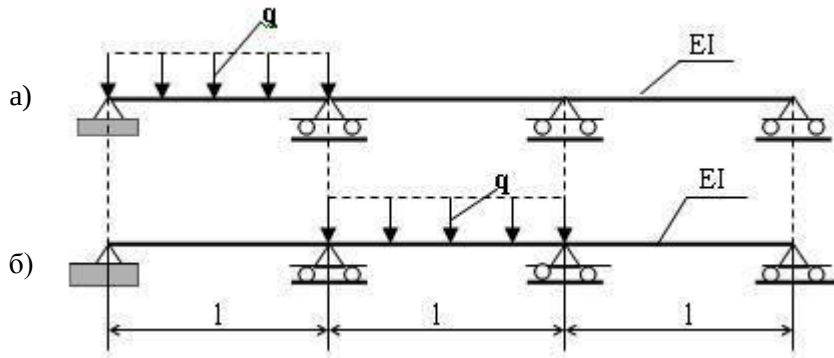


Рис. 722

- 825.** Балка, навантажена як показано на Рис. 723, розташована на жорстких опорах А і В, а також пружній опорі С. При якій жорсткості k опори С реакції на всіх опорах будуть однакові? Дані: $q = 30$ кН/м; $l = 2$ м; $b = 10$ см; $h = 2b$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

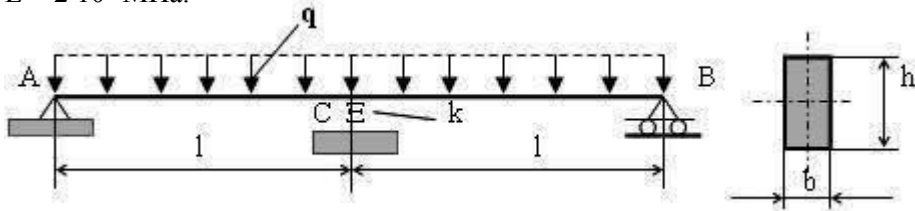


Рис. 723

- 826.** Консольна балка підтримується пружними опорами з жорсткістю k і $2k$ (Рис. 724). Побудувати епюри згинальних моментів і обчислити величини реакцій, коли на балку діє розподілене навантаження q . Дані: $q = 48$ кН/м; $l = 2$ м; $EI = 800$ кНм²; $k = 4 \cdot 10^3$ кН/м.

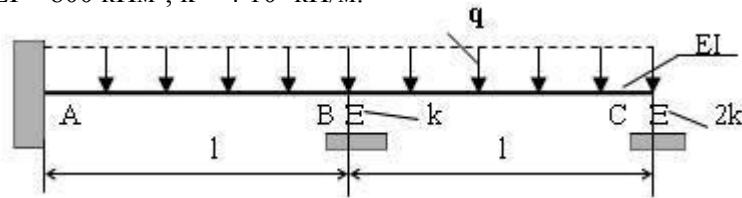


Рис. 724

- 827.** Підібрати двотавровий переріз балки згідно ГОСТ, закріпленої і навантаженої як показано на Рис. 725. Дані: $q = 60$ кН/м; $a = 1$ м; $P = 4/3qa$; $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа.

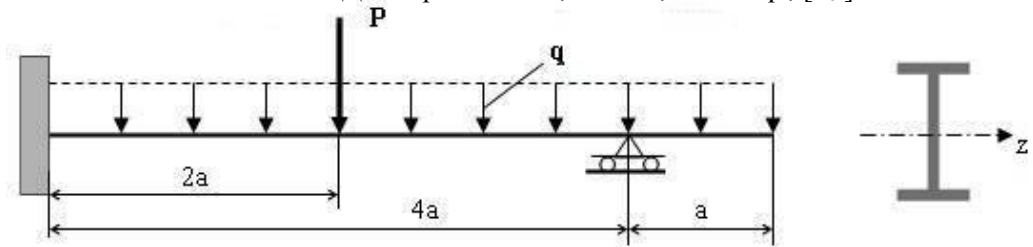


Рис. 725

828. Застосовуючи метод суперпозиції переміщень, визначити для балки, показаної на Рис. 726, реакції опор і побудувати епюру згинальних моментів. Дані: $q = 18 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $M = ql^2/4$; $EI = \text{const}$.

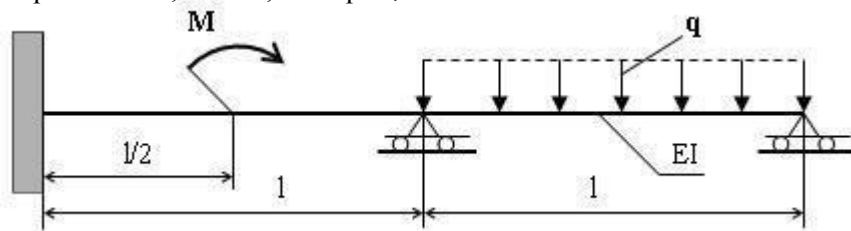


Рис. 726

7.9. Різні завдання

829. Консольна балка (Рис. 727) навантажена власною вагою. Для якого положення поперечного перерізу (1) чи (2) потенційна енергія пружності у балці від згину буде більша і у скільки разів? Дані: $h = 3b$; $l = 80b$.

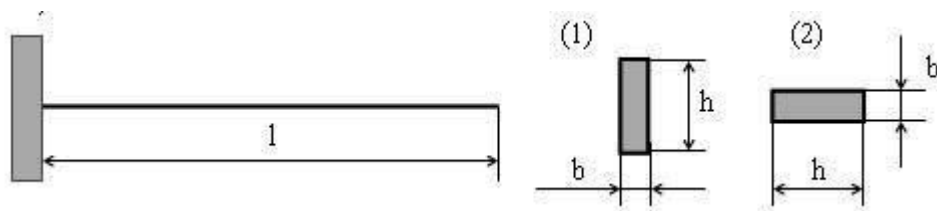


Рис. 727

Розв'язок

Епюра згинальних моментів у консольній балці, навантаженій власною вагою, подана на Рис. 728.

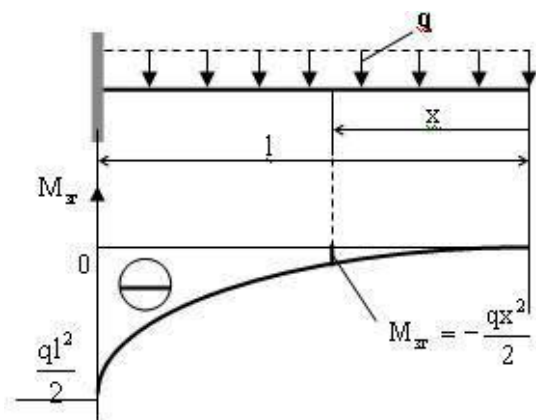


Рис. 728

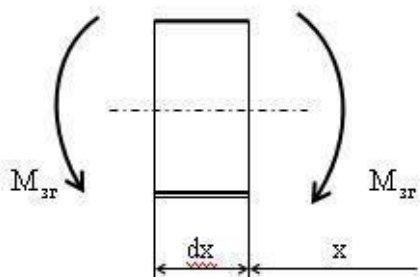


Рис. 729

Потенційна енергія пружності в зігнутому елементарному відрізку балки dx , показаному на Рис. 729, буде $dU = \frac{M_{зг}^2 dx}{2EI}$.

Потенційна енергія пружності цілої балки:

$$U = \int_0^l \frac{M_{зг}^2 dx}{2EI}.$$

У задачі згинальний момент для випадків (1) і (2) є однаковим і визначається за виразом $M_{зг} = -\frac{qx^2}{2}$. Різними є, натомість, жорсткості на згин внаслідок іншого значення моменту інерції поперечного перерізу.

Для випадку (1) маємо:

$$U_1 = \int_0^l \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)^2 dx}{2EI_1} = \frac{5}{40} \frac{q^2 l^5}{EI_1},$$

а по аналогії для випадку (2) - $U_2 = \frac{5}{40} \frac{q^2 l^5}{EI_2}$.

$$\text{З вищевказаних обчислень відношення енергій } \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{b(3b)^3}{12}}{\frac{3b \cdot b^3}{12}} = 9.$$

Це означає, що в другому випадку положення поперечного перерізу стержня потенційна енергія пружності буде акумульована в 9 разів більша, ніж в першому.

830. Сталевий стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$) діаметром 2 см розтягується силами 40 кН. Обчислити: 1) зміну діаметра стержня після навантаження, 2) коефіцієнт запасу міцності, якщо границя плинності $\sigma_T = 240$ МПа, 3) величину скручуючого моменту, який спричинить таке ж максимальне головне напруження, як розтяг, 4) величину згинального моменту, для якого потенційна енергія пружності в стержні буде такою ж, як при розтягу.

831. Стержень, навантажений власною вагою, вільно лежить на жорсткій плиті (Рис. 730). Обчислити потенційну енергію пружності в стержні, спричинену згином. Дані: $l = 6$ м; $d = 1$ см; $\gamma = 78,5$ кН/м³; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

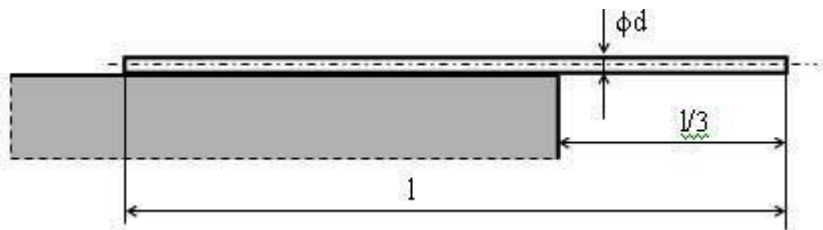


Рис. 730

832. Прогин стержня діаметром d , висунутого на довжину l та навантаженого власною вагою, становить δ (Рис. 731а). Записати рівняння зігнутої осі цієї балки, якщо її довжину збільшити у два рази, а прогин кінця балки утримати рівним δ , підтримуючи його рухомою опорою В (Рис. 731б). Дані: $d = 1$ см; $l = 2$ м; $\gamma = 78,5$ кН/м³.

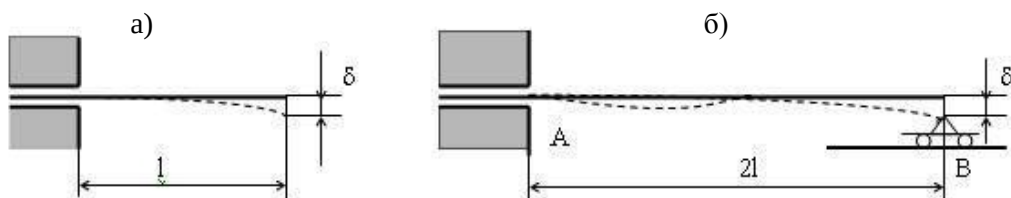


Рис. 731

833. Верхня поверхня консольної балки (Рис. 732) покрита тонким шаром крихкого матеріалу, в якому з'являються тріщини при повздовжній деформації ϵ_0 . На якій відстані x від барабана з'являться перші тріщини. Дані: $\epsilon_0 = 5 \cdot 10^{-4}$; $f = 0,9$ см; $l = 60$ см; $h = 4$ см.

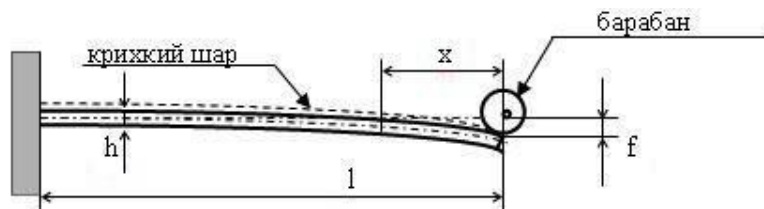


Рис. 732

834. При монтажі балки виявилось, що опора С перемістилась на величину δ (Рис. 733). Яке розподілене навантаження q має діяти на балку (Рис. 733), щоб реакції всіх опор були однакові. Дані: $l = 2$ м; $\delta = 1$ см; $EI = 800$ кНм².

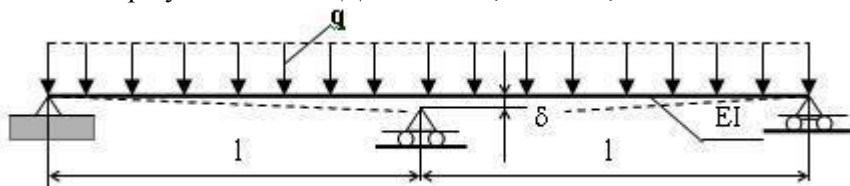


Рис. 733

835. Записати рівняння зігнутої осі консольної балки, складеної з двох відрізків з різною жорсткістю і навантаженої як показано на Рис. 734. Розрахувати прогин і кут повороту поперечного перерізу кінця балки. Дані: $P = 18$ кН; $l = 2$ м; $EI = 2000$ кНм².

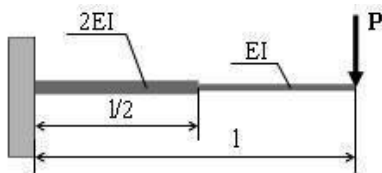


Рис. 734

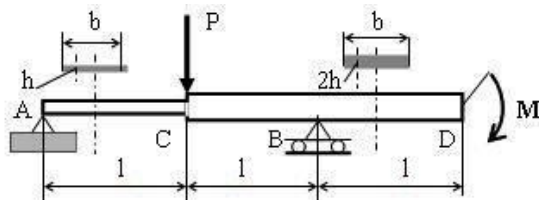


Рис. 735

836. Розрахувати прогин балки, показаної на Рис. 735, в точках С і D. Дані: $P = 8 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $M = Pl/4$; $b = 5 \text{ см}$; $h = 2 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

837. Обчислити прогин і кут повороту поперечного перерізу вільного кінця консольної балки зі змінним перерізом (Рис. 736). Прийняти, що балка навантажена тільки власною вагою. Дані: $l = 4 \text{ м}$; $d = 2 \text{ см}$; $D = 2d$; $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

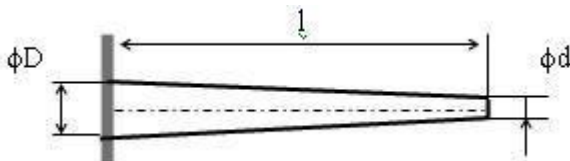


Рис. 736

838. Рівномісна балка, навантажена на кінці силою P (Рис. 737), має сталий зовнішній діаметр і змінний внутрішній діаметр. Розрахувати стрілу прогину балки. Дані: $l = 40 \text{ см}$; $D = 4 \text{ см}$; $[\sigma_{зг}] = 200 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

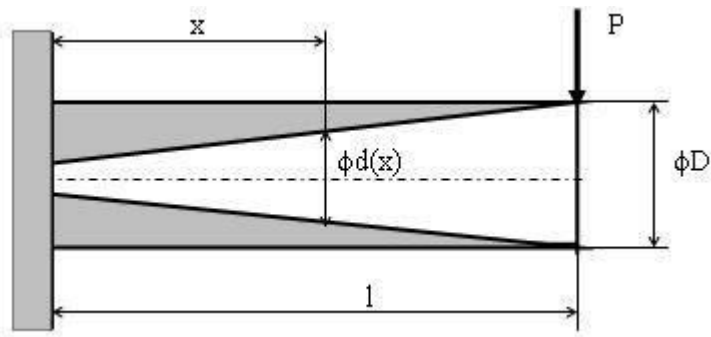


Рис. 737

839. Обчислити стрілу прогину консольної балки, показаної на Рис. 738, під впливом власної ваги. Дані: $l = 4 \text{ м}$; $b = 1/8$; $h = 2 \text{ см}$; $\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

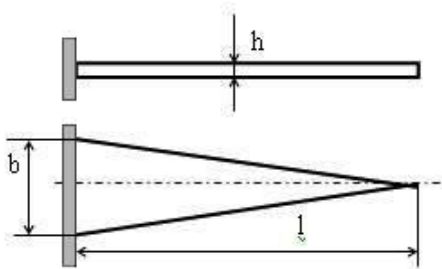


Рис. 738

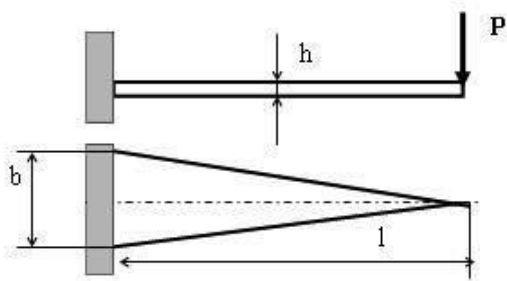


Рис. 739

840. Консольна балка зі сталим моментом опору навантажена силою P , як показано на Рис. 739. Визначити стрілу прогину балки. Дані: $l = 1 \text{ м}$; $h = 4 \text{ см}$; $[\sigma_{зг}] = 200 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

- 841.** Консольна балка зі сталим моментом опору на згин навантажена двома силами P як показано на Рис. 740. Обчислити ширину поперечного перерізу балки. Дані: $P = 0,8 \text{ кН}$; $l = 1,6 \text{ м}$; $h = 2 \text{ см}$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 120 \text{ МПа}$.

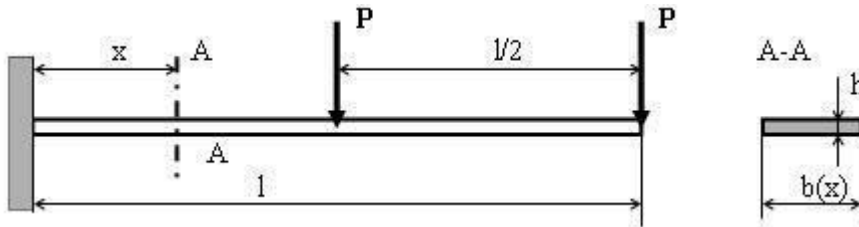


Рис. 740

- 842.** Розрахувати стрілу прогину консольної балки кругового перерізу з рівною міцністю на згин, навантаженої на кінці силою P (Рис. 741). Порівняти отриманий результат із стрілою прогину, яка була б у такій самій балці зі сталим перерізом. Дані: $P = 30 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 100 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

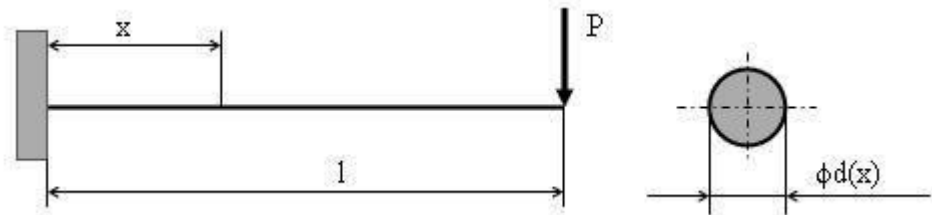


Рис. 741

- 843.** Замість балки зі сталим прямокутним перерізом, показаної на Рис. 742а, навантаженої посередині силою P , взято балку зі сталим моментом опору як показано на Рис. 742б. Як зміниться стріла прогину балки? Дані: P , l , h , E , $[\sigma_{\text{зг}}]$.

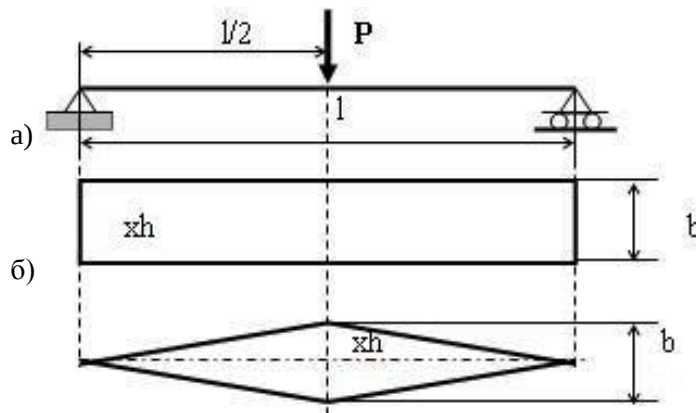


Рис. 742

- 844.** Балка кругового перерізу зі сталим моментом опору на згин навантажена як показано на Рис.743. Записати рівняння зігнутої осі балки і кутів повороту поперечного перерізу, а також обчислити характеристичні величини. Дані: $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 4 \text{ м}$; $[\sigma_{зг}] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

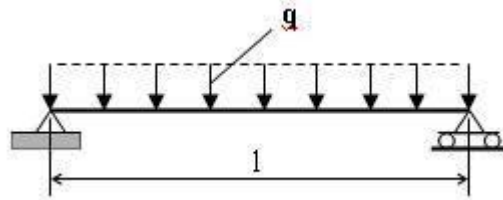


Рис. 743

- 845.** Який відсоток матеріалу можна заощадити, якщо консольну балку з круговим перерізом, навантажену на кінці зосередженою силою P , замість зі сталим перерізом виконати зі сталим моментом опору на згин?

- 846.** Балка кругового перерізу, що знаходиться на двох опорах, навантажена посередині силою P (Рис. 744). Скільки матеріалу можна заощадити, якщо замість балки зі сталим круговим перерізом взяти балку зі сталим моментом опору? Дані: $P = 4 \text{ кН}$; $l = 80 \text{ см}$; $[\sigma_{зг}] = 200 \text{ МПа}$.

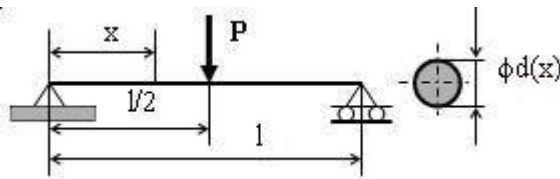


Рис. 744

- 847.** Дерев'яна балка, зображена на Рис. 745, підсилена на верхній і нижній поверхнях сталевими пластинами. Розрахувати допустиму величину розподіленого навантаження q і стрілу прогину балки. Врахувати, що справджується гіпотеза плоских перерізів. Дані: $l = 4 \text{ м}$; $h = 20 \text{ см}$; $b = 12 \text{ см}$; $\delta = 4 \text{ мм}$; $[\sigma_{р,д}] = 10 \text{ МПа}$; $[\sigma_{р,с}] = 120 \text{ МПа}$; $E_d = 1,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $E_c = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

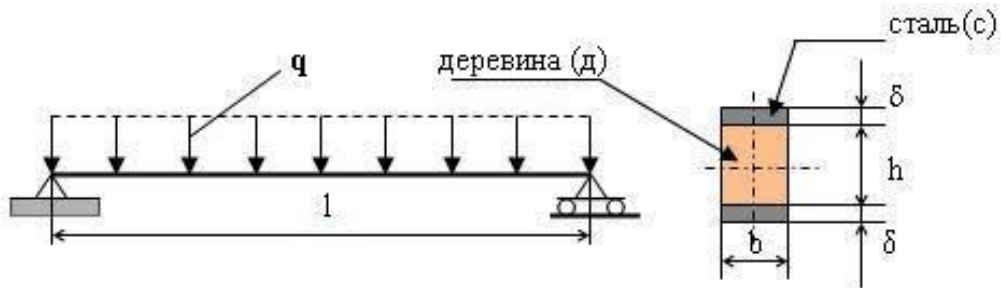


Рис. 745

848. Побудувати епюру згинальних моментів для рами, показаної на Рис. 746. Дані: $P = 200 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$.

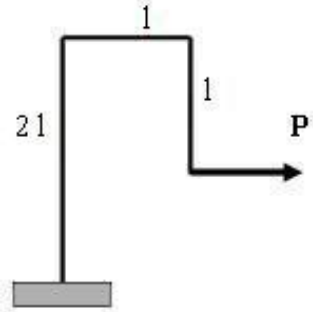


Рис. 746

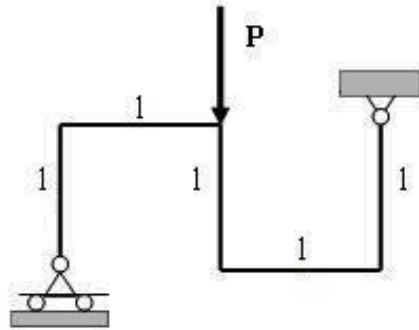


Рис. 747

849. Побудувати епюру згинальних моментів, поперечних і нормальних сил для рами, показаної на Рис. 747. Дані: $P = 160 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$.

850. Стержень АВ діаметром d розташований на нерухомій опорі А і рухомій В, що є плоскою пружиною, виконаною з дроту квадратного перерізу (Рис. 748). Розрахувати вертикальне переміщення точки С балки після прикладання до неї сили P . Дані: $P = 0,2 \text{ кН}$; $l = 160 \text{ см}$; $a = 5 \text{ см}$; $d = 2 \text{ см}$; $h = 1 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

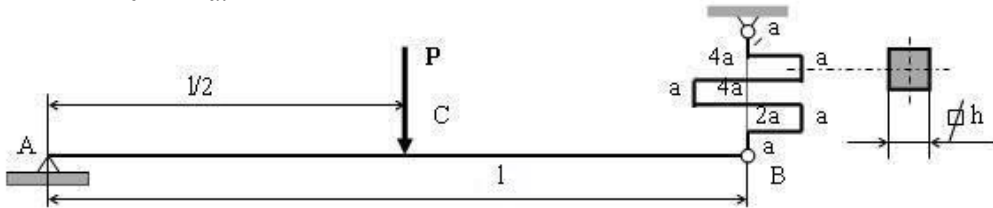


Рис. 748

851. Побудувати епюри внутрішніх сил для незамкненої рами у вигляді рівностороннього трикутника, показаної на Рис. 749. Дані: $P = 18 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$.

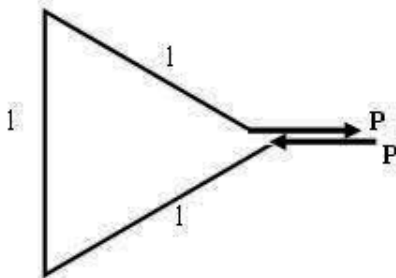


Рис. 749

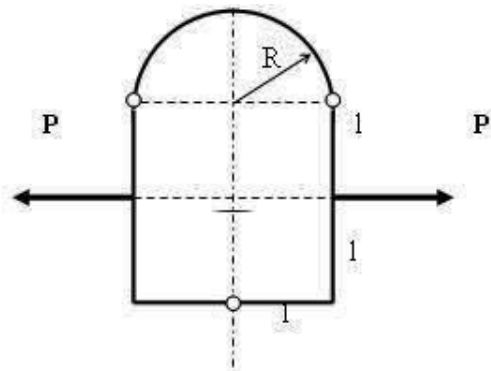


Рис. 750

852. Симетрична стержнева система із шарнірами навантажена силами P як показано на Рис. 750. Побудувати епюри внутрішніх сил. Дані: $P = 12 \text{ кН}$; $l = R = 3 \text{ м}$.

- 853.** Із сталевих стержнів з однаковими поперечними перерізами складено дві конструкції, кожна з яких може переносити горизонтальну силу P , яка розташована на однаковій відстані від опори (Рис. 751). Визначити та порівняти максимальні нормальні напруження в поперечних перерізах зображених стержневих конструкцій. Дані: $P = 50 \text{ кН}$; $l = 1,6 \text{ м}$; $R = 1$; $F = 25 \text{ см}^2$ – поперечний переріз стержня; $W = 400 \text{ см}^3$ – момент опору поперечного перерізу стержня на згин.

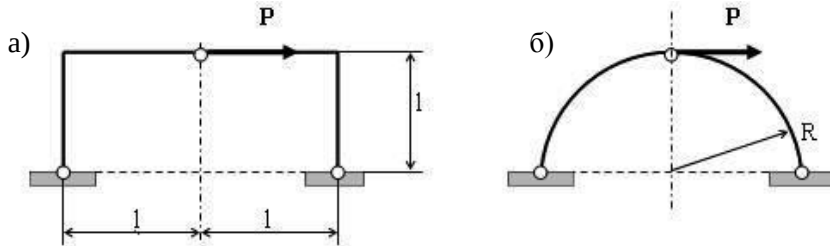


Рис. 751

- 854.** Розрахувати потенційну енергію пружності у консольній балці довжиною l і діаметром d , спричинену згином власною вагою. Дані: $l = 4 \text{ м}$; $d = 3 \text{ см}$; $\gamma = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^3$; $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

- 855.** Для рами, показаної на Рис. 752, побудувати епюри згинальних моментів, поперечних і розтягуючих сил. Дані: $P = 60 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$.

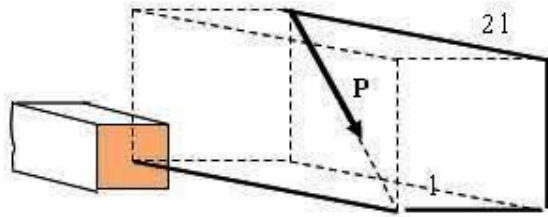


Рис. 752

- 856.** Побудувати епюри внутрішніх сил для рами, показаної на Рис. 753. Дані: $P = 80 \text{ кН}$; $l = 4 \text{ м}$.

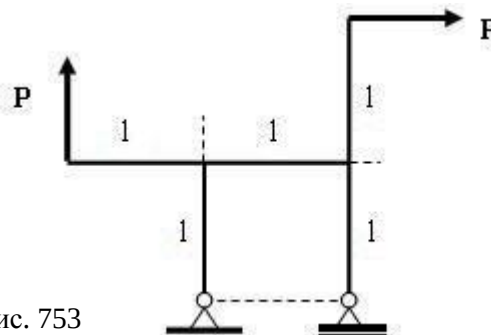


Рис. 753

- 857.** Обчислити реакції опор A і B , а також побудувати епюри внутрішніх сил для рами, показаної на Рис. 754. Дані: $q = 40 \text{ кН/м}$; $l = 2 \text{ м}$.

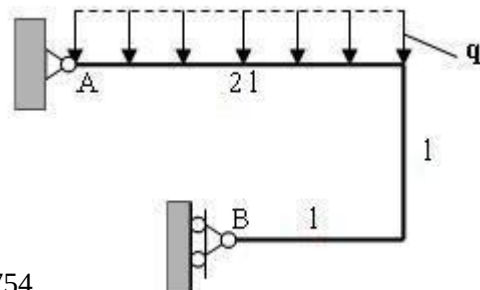


Рис. 754

- 858.** Побудувати епюри внутрішніх сил ($M_{зг}$, N , Q) для рами, зображеної на Рис. 755. Дані: $P = 120$ кН; $q = 60$ кН/м; $l = 3$ м.

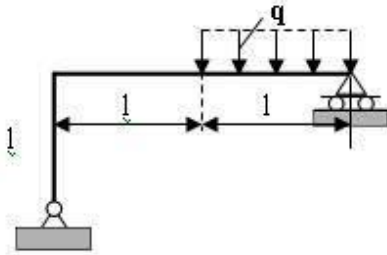


Рис. 755

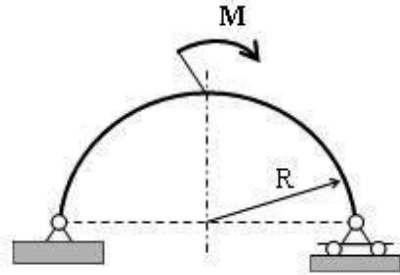


Рис. 756

- 860.** Стержень у вигляді півкола навантажений зосередженим моментом M (Рис. 756). Побудувати епюри внутрішніх сил в поперечних перерізах стержня. Дані: $M = 20$ кНм; $R = 80$ см.

- 861.** Побудувати епюри згинальних моментів, поперечних і нормальних сил для рами, показаної на Рис. 757. Дані: $P = 50$ кН; $R = l = 2$ м.

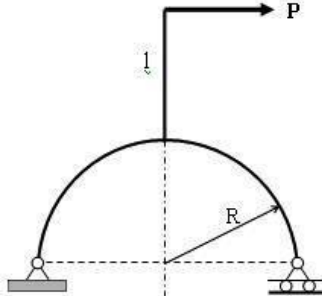


Рис. 757

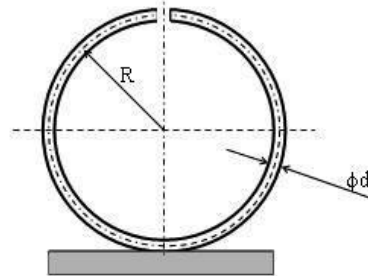


Рис. 758

- 862.** Розрізане кільце знаходиться на гладкій жорсткій плиті (Рис. 758). Побудувати епюри внутрішніх сил, спричинених власною вагою кільця. Дані: $R = 80$ см; $d = 1$ см; $\gamma = 78,5$ кН/м³.

- 863.** На кільце з розрізом (Рис. 759) діє розподілене навантаження, яке описується рівнянням $q = q_0 \sin \alpha / 2$. Визначити розподіл внутрішніх сил у кільці. Дані: $q_0 = 10$ кН/м; $r = 80$ см.

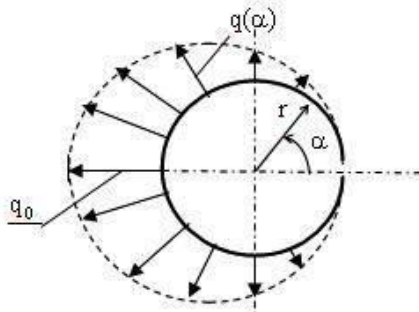


Рис. 759

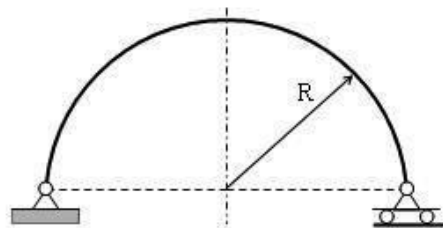


Рис. 760

864. Кільце зі сталевго дроту діаметром d закріплено, як показано на Рис. 760. Визначити розподіл внутрішніх сил, спричинених власною вагою кільця. Дані: $R = 50$ см; $d = 4$ мм; $\gamma = 78,5$ кН/м³.

865. Побудувати епюри внутрішніх сил ($M_{зг}$, $M_{кр}$, Q) для вигнутого стержня у вигляді півкруга, закріпленого і навантаженого як показано на Рис. 761. Дані: $P = 8$ кН; $r = 60$ см.

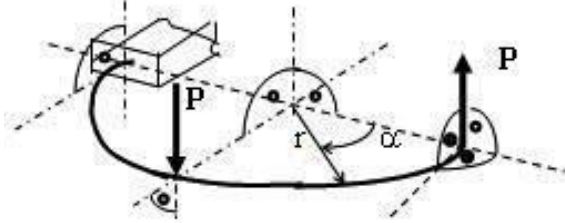


Рис. 761

866. Довгу балку з жорсткістю на згин EI , що лежить на платформі з пружною жорсткістю χ , навантажено силою P як показано на Рис. 762. Визначити рівняння зігнутої осі балки і рівняння згинальних моментів, а також обчислити максимальні напруження згину. Дані: $P = 100$ кН; $\chi = 80 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ - коефіцієнт пружної жорсткості; $b = 20$ см; $h = 2$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

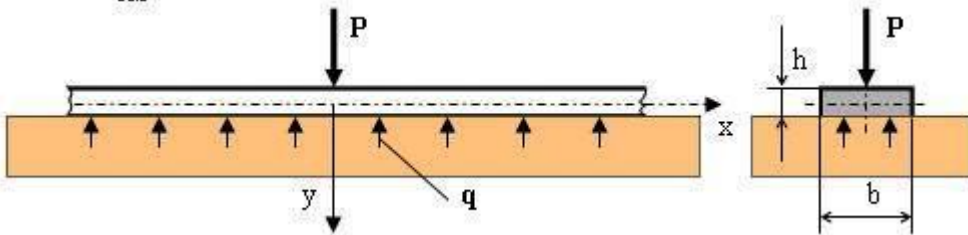


Рис. 762

Розв'язок

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки на пружній основі має вигляд:
 $EIy^{IV} = q$.

В даному випадку розподілене навантаження q відображає тільки вплив пружної основи, який згідно з гіпотезою Вінклера є прямо пропорційним переміщенням і рівний $q = -\chi y$ (Рис. 763).

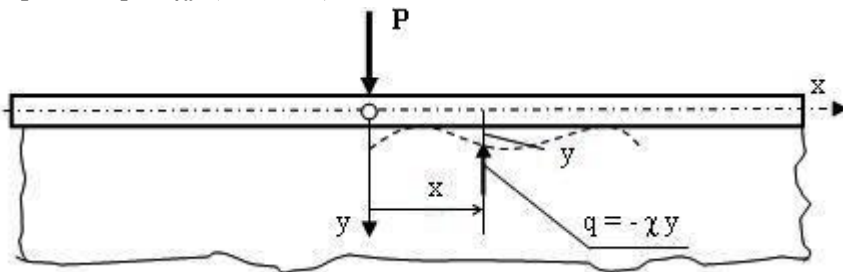


Рис. 763

Підставляючи отриманий вираз у диференціальне рівняння зігнутої осі і позначаючи $\frac{\chi}{EI} = 4k^4$, отримано рівняння у вигляді:

$$y^{IV} + 4k^4 y = 0.$$

Розв'язок вищевказаного диференціального рівняння можна записати наступним чином:

$$y = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{+kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + y^*,$$

де: y^* – загальний розв'язок диференціального рівняння.

В даному випадку при відсутності зовнішнього розподіленого навантаження $y^* = 0$. З поданого загального розв'язку слідує, що для великих значень x вже при $kx \geq 5$ вплив величини другої складової зі сталими інтегрування C_3 і C_4 на зміну величин міцності при малих значеннях x буде несуттєвим. Тому для подальших обчислень приймається наступний розв'язок:

$$y = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx).$$

Початкові умови:

$$y'_{x=0} = 0; \quad EI y'''_{x=0} = Q = -\frac{P}{2}.$$

Після обчислення першої і третьої похідної y , а також підстановки початкових умов, отримано $C_1 = C_2 = \frac{P}{8k^3 EI}$. Підставляючи сталі інтегрування, отримано рівняння зігнутої осі балки:

$$y = -\frac{P}{8k^3 EI} e^{-kx} (\sin kx + \cos kx).$$

Згинальний момент у балці рівний

$$M_{зг} = -EI y'' = \frac{P}{4k} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx).$$

Графік зміни прогинів і згинальних моментів балки зображено на Рис. 764.

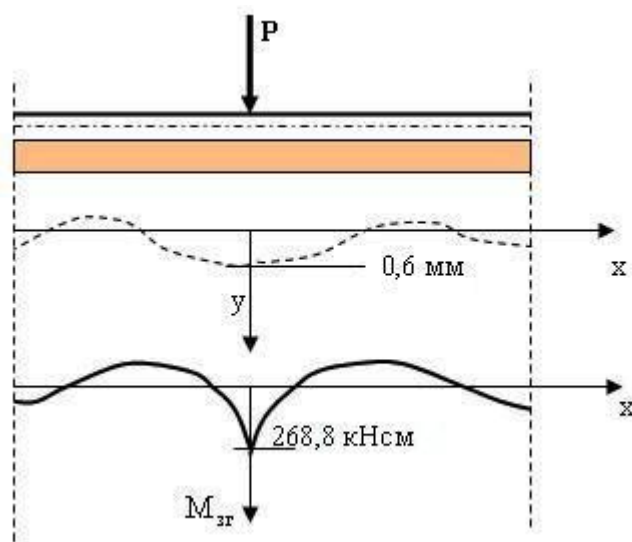


Рис. 764

Обчислюємо екстремальні значення прогину, згинального моменту і напружень від згину:

$$y_{\text{екстр}} = y_{x=0} = -\frac{P}{8k^3 EI};$$

$$\text{де: } k = \sqrt[4]{\frac{\chi}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{80}{4 \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{20 \cdot 2^3}{12}}} = 0,093 \frac{1}{\text{см}}.$$

$$y_{x=0} = -\frac{100}{8(0,093)^3 \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{20 \cdot 2^3}{12}} = -0,06 \text{ см} = -0,6 \text{ мм}.$$

$$M_{\text{зг, max}} = M_{\text{зг, x=0}} = \frac{P}{4k} = \frac{100}{4 \cdot 0,093} = 268,8 \text{ кНсм}.$$

$$\sigma_{\text{зг, max}} = \frac{6M_{\text{зг, max}}}{bh^2} = \frac{6 \cdot 268,8}{20 \cdot 2^2} = 20,2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 202 \text{ МПа}.$$

- 867.** Дерев'яна дошка довжиною l і поперечними розмірами $b \times h$ плаває по воді. Записати рівняння зігнутої осі і розподілу згинальних моментів після навантаження дошки посередині силою P (Рис. 765). Дані: $l = 4 \text{ м}$; $b = 20 \text{ см}$; $h = 4 \text{ см}$; $\gamma_B = 10 \text{ кН/м}^3$; $\gamma_D = 4 \text{ кН/м}^3$; $P = 0,5bhl(\gamma_B - \gamma_D)$; $E_D = 8000 \text{ МПа}$.

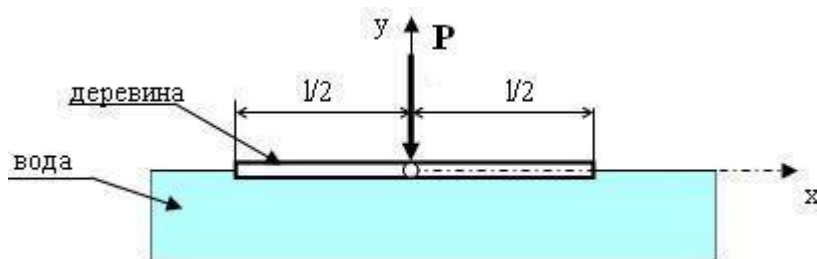


Рис. 765

- 868.** Довга балка з жорсткістю на згин EI лежить на платформі з пружною жорсткістю χ . Записати рівняння зігнутої осі балки і розподілу згинальних моментів у балці після прикладання до неї розподіленого навантаження q на довжині l як показано на Рис. 766. Дані: $q = 200 \text{ кН/м}$; $l = 80 \text{ см}$; $EI = 3 \cdot 10^6 \text{ кНсм}^2$; $\chi = 100 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

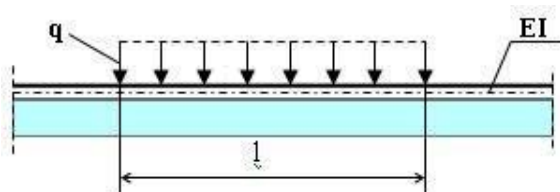


Рис. 766

- 869.** Довга дерев'яна дошка з поперечними розмірами $b \times h$ і питомій вазі γ_d плаває по воді. Знайти рівняння зігнутої осі балки і рівняння згинальних моментів, коли дошка навантажена силами P як показано на Рис. 767. Дані: $b = 24$ см; $h = 6$ см; $a = 100$ см; $\gamma_d = 4$ кН/м³; $E_d = 7,8 \cdot 10^3$ МПа; $P = 0,4bha(\gamma_B - \gamma_d)$.

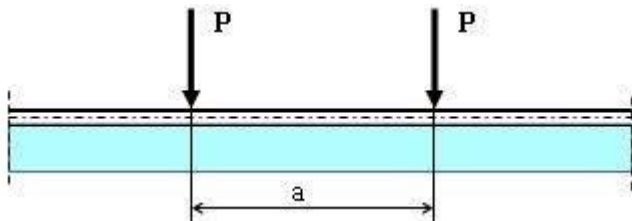


Рис. 767

Розділ 8

Вибрані випадки складного опору

8.1. Згин із крученням

1. У випадку одночасного згину і кручення стержня виникає напружений стан, який показано на Рис. 768.

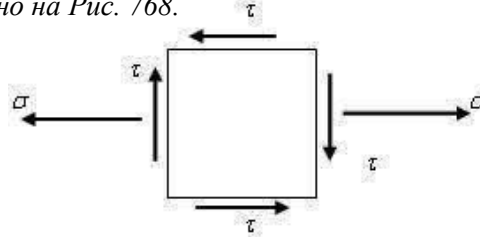


Рис. 768

Еквівалентні напруження для вищевказаного напруженого стану, згідно теорії $\tau_{\max}$ і енергетичної теорії міцності обчислюють із виразів:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

2. У випадку згину з крученням стержня з круговим перерізом вирази для максимальних нормальних і дотичних напружень є наступними:

$$\sigma = \frac{M_{32}}{W} \text{ і } \tau = \frac{M_{\kappa}}{W_0} = \frac{M_{\kappa}}{2W},$$

Підставляючи їх у вирази для еквівалентних напружень, отримано:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{32}^2 + M_{\kappa}^2}}{W}, \quad \sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{M_{32}^2 + 0,75M_{\kappa}^2}}{W}.$$

Тут $W = \pi d^3/32$.

- 870.** Розрахувати діаметр вала згідно теорії $\tau_{\max}$ і енергетичної теорії міцності, якщо він навантажений згинальним моментом $M_{32} = 1,2$ кНм і скручувальним моментом $M_{\kappa} = 0,8$ кНм. $[\sigma_p] = 120$ МПа.

Розв'язок

Згідно теорії $\tau_{\max}$ необхідний діаметр вала обчислюється з умови міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{32}^2 + M_{\kappa}^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq [\sigma_p],$$

$$d \geq \left(\frac{32 \sqrt{M_{32}^2 + M_{\kappa}^2}}{\pi [\sigma_p]} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32 \sqrt{120^2 + 80^2}}{\pi \cdot 12} \right) = 2,3 \text{ см}.$$

Згідно енергетичної теорії діаметр вала обчислюється з умови:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{M_{\text{зг}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq [\sigma_p].$$

$$d \geq \left(\frac{32 \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}}{\pi [\sigma_p]} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32 \sqrt{120^2 + 0,75 \cdot 80^2}}{\pi \cdot 12} \right) = 2,27 \text{ см}.$$

З отриманих величин діаметрів слідує, що діаметр вала згідно енергетичної теорії міцності менший від діаметру, отриманого згідно теорії максимальних дотичних напружень. Це означає, що енергетична теорія є більш економною у використанні матеріалу.

871. Вал діаметром $d = 10$ см навантажений згинальним моментом $M_{\text{зг}} = 20$ кНм і скручувальним моментом. Якою має бути величина скручувального моменту, якщо вплив обох навантажень на міцність матеріалу згідно з енергетичною теорією має бути однаковим? Обчислити значення еквівалентних напружень.

872. У двох сталевих стержнях кругового перерізу і ідентичних розмірів, один з яких зазнає дії кручення, а другий згину, виникли однакові максимальні еквівалентні напруження, обчислені за теорією τ_{max} . В якому стержні акумульовано більшу потенційну енергію пружності і у скільки разів? $\mu = 0,3$.

873. Стержень діаметром $d = 10$ см згинається моментом $M_{\text{зг}} = 500$ кНсм і скручується моментом $M_{\text{ск}} = 2M_{\text{зг}}$. Яка сила розтягу такого ж стержня, спричинить еквівалентні напруження згідно з енергетичною теорією, рівні напруженням, спричиненим заданим навантаженням?

874. Розрахувати еквівалентні напруження згідно з теорією τ_{max} в точці А стержня, навантаженого силою P як показано на Рис. 769? Дані: $P = 40$ кН; $d = 8$ см; $l = 4d$.

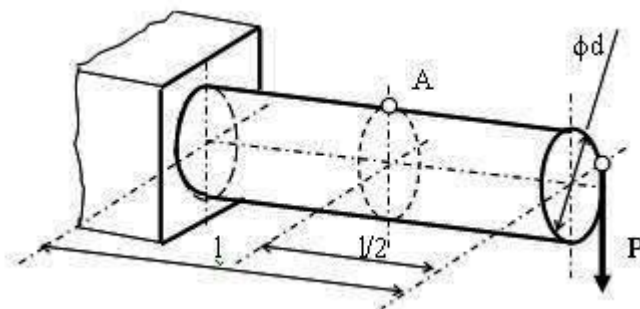


Рис. 769

875. Консольна балка діаметром d і довжиною $l = 4d$ навантажена на кінці силою P , яка може бути прикладена в поперечному перерізі як показано на Рис. 770а та Рис. 770б. В якому випадку максимальні еквівалентні напруження за теорією τ_{max} будуть більшими і у скільки разів?

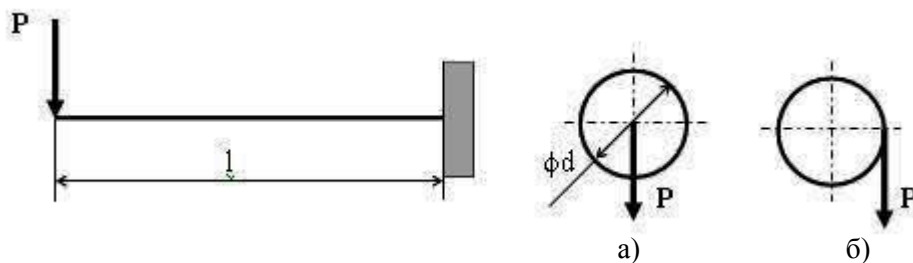


Рис. 770

876. Стержень квадратного перерізу зі стороною $a = 6$ см навантажено згинальним моментом $M_{зг} = 3$ кНм і скручувальним моментом $M_{ск} = 4$ кНм. Розрахувати еквівалентні напруження за енергетичною теорією міцності в найбільш навантаженій точці перерізу.

877. Якою силою P згідно з енергетичною теорією міцності можна навантажити консольну балку квадратного поперечного перерізу аха, показану на Рис. 771. Дані: $l = 30$ см; $a = 3$ см; $[\sigma_{зг}] = 150$ МПа.

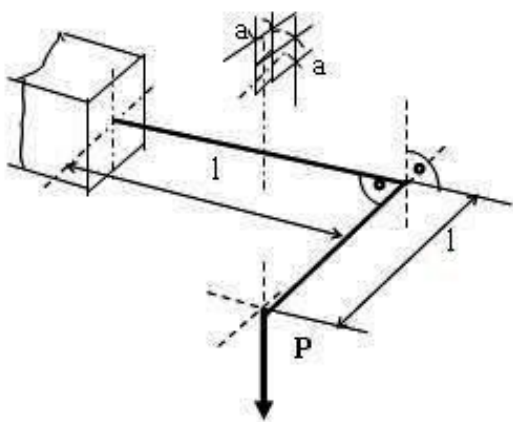


Рис. 771

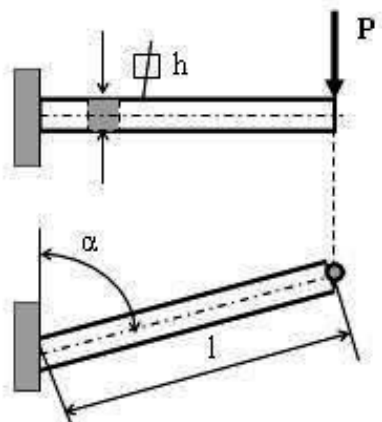


Рис. 772

878. Розрахувати максимальні еквівалентні напруження за теорією $\tau_{\max}$, які виникнуть у балці, показаній на Рис. 772. Дані: $P = 600$ Н; $l = 60$ см; $h = 3$ см; $\alpha = 60^\circ$.

879. Вал діаметром $d = 45$ мм передає потужність $N = 30$ кВт при частоті обертання $n = 600$ об./хв (Рис. 773). Розрахувати коефіцієнт запасу міцності згідно з енергетичною теорією міцності. Інші дані: $l = 9$ м; $D = 90$ мм; $\sigma_T = 300$ МПа.

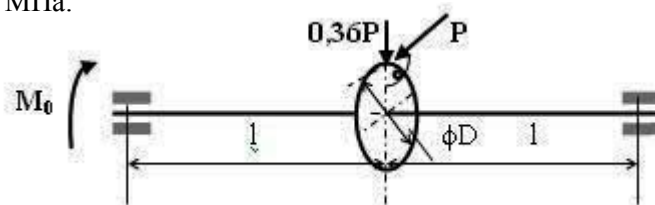


Рис. 773

- 880.** Обчислити діаметр вала із зубчастим колесом, навантаженим як показано на Рис. 774. Дані: $P = 2 \text{ кН}$; $a = 10 \text{ см}$; $D = 8 \text{ см}$; $[\sigma_p] = 160 \text{ МПа}$.

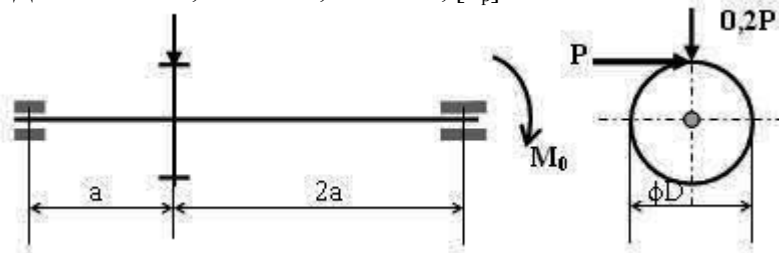


Рис. 774

- 881.** Шківні пасових передач закріплені на валу однакового діаметру і навантажені як показано на Рис. 775. Визначити діаметр вала за енергетичною теорією міцності. Дані: $a = 15 \text{ см}$; $D_1 = 300 \text{ мм}$; $D_2 = 600 \text{ мм}$; $D_3 = 360 \text{ мм}$; $S_1 = 6 \text{ кН}$; $S_2 = 4,8 \text{ кН}$; $S_3 = 3 \text{ кН}$; $[\sigma_p] = 100 \text{ МПа}$.

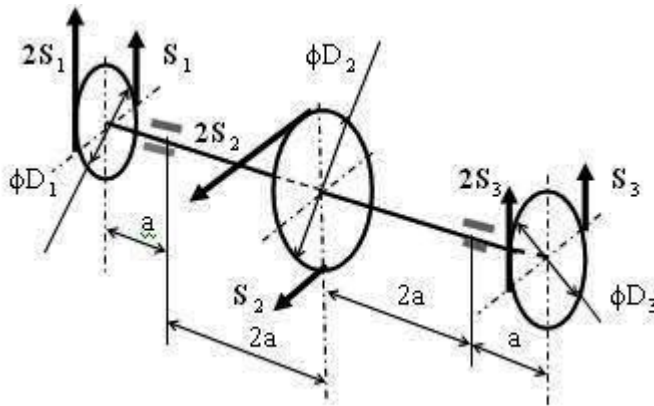


Рис. 775

- 882.** Привідний вал з двома шківками навантажений як показано на Рис. 776. Визначити діаметр вала за енергетичною теорією міцності. Дані: $P = 1,5 \text{ кН}$; $a = 50 \text{ см}$; $D_1 = 80 \text{ см}$; $D_2 = 40 \text{ см}$; $[\sigma_p] = 80 \text{ МПа}$.

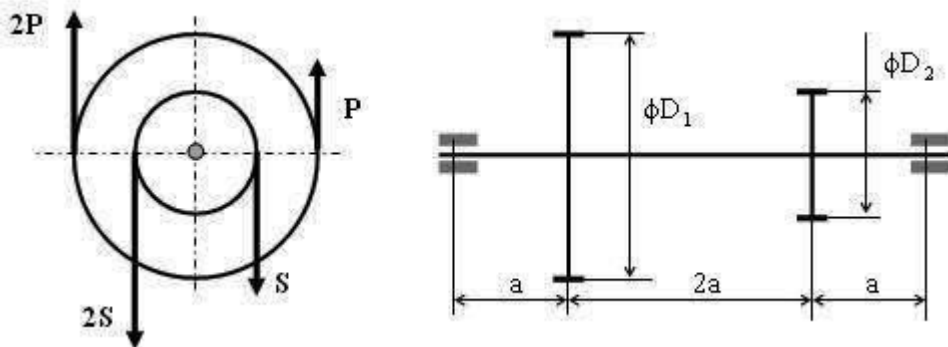


Рис. 776

883. Розрахувати діаметр вала АВ зубчастої передачі, показаної на Рис. 777, за теорією $\tau_{\max}$. Дані: $M = 2,5$ кНм; $a = 80$ см; $b = 10$ см; $D = 16$ см; $[\sigma_p] = 160$ МПа.

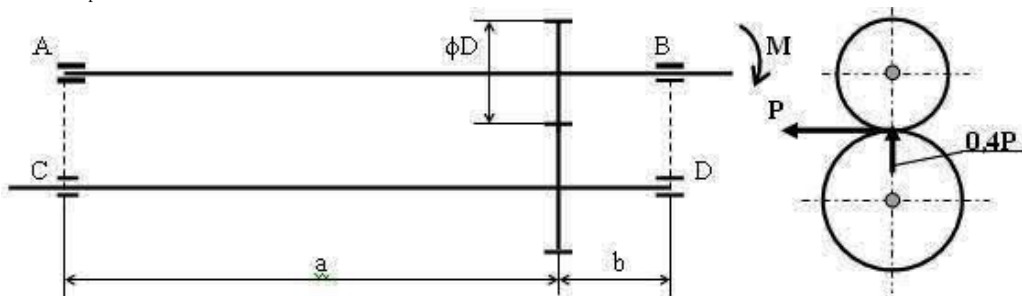


Рис. 777

884. Потужність передається пасовим і зубчастим колесами, закріпленими на валу зі сталем діаметром (Рис. 778). Розрахувати діаметр вала. Дані: $a = 60$ см; $D = 30$ см; $D_n = 20$ см; $S_1 = 0,4$ кН; $S_2 = 0,5$ кН; $[\sigma_p] = 140$ МПа.

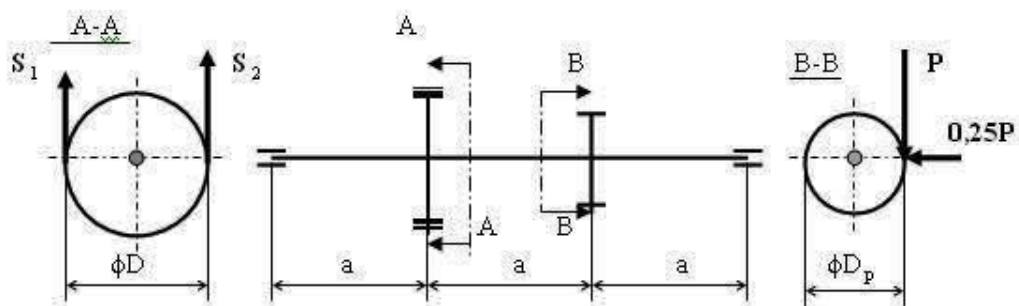


Рис. 778

885. Стержень кругового перерізу і довжиною $l = 2$ м, навантажений скручувальним моментом $M_{\text{ск}} = 20$ Нм, повернувся на кут $\varphi = 1,3^\circ$. Якою буде стріла прогину цього стержня, як консольної балки, навантаженої на кінці силою $P = 30$ кН? Інші дані: $\mu = 0,3$.

8.2. Різні випадки складного опору

886. В поперечному перерізі труби із зовнішнім діаметром $D = 10$ см і внутрішнім $d = 8$ см діють: розтягуюча сила $N = 90$ кН, згинальний момент $M_{\text{зг}} = 16$ кНм і скручувальний момент $M_{\text{ск}} = 10$ кНм. Розрахувати коефіцієнт запасу міцності згідно з енергетичною теорією, якщо $\sigma_T = 260$ МПа.
887. Стержень діаметром $d = 4$ см розтягується силою $P = 100$ кН і скручується моментом $M_{\text{ск}} = Pd/4$. Розрахувати головні напруження в точці А, віддаленій на $r = d/4$ від осі стержня (Рис. 779).

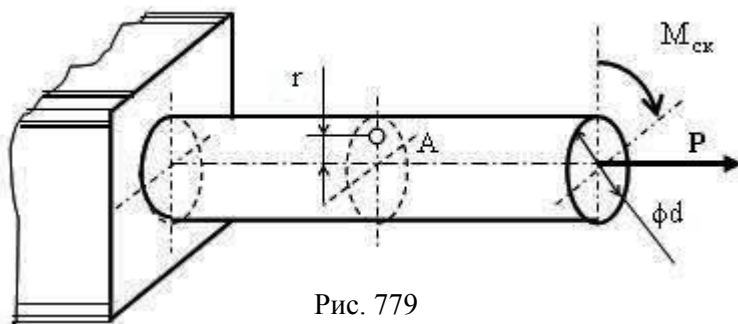


Рис. 779

- 888.** Стержень прямокутного перерізу, жорстко закріплений одним кінцем, навантажений на другому кінці силою P як показано на Рис. 780. Обчислити максимальні еквівалентні напруження за енергетичною теорією і теорією $\tau_{\max}$. Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 80 \text{ см}$; $r = 25 \text{ см}$; $b = 10 \text{ см}$; $h = 5 \text{ см}$.

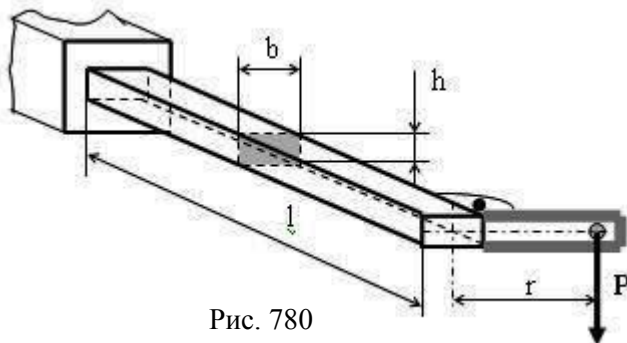


Рис. 780

- 889.** Консольна балка зі сталім прямокутним перерізом навантажена як показано на Рис. 781. Розрахувати розміри поперечного перерізу балки. Впливом поперечних сил на міцність знехтувати. Дані: $P = 6 \text{ кН}$; $q = 14 \text{ кН/м}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $h = 2b$; $[\sigma_{зг}] = 160 \text{ МПа}$.

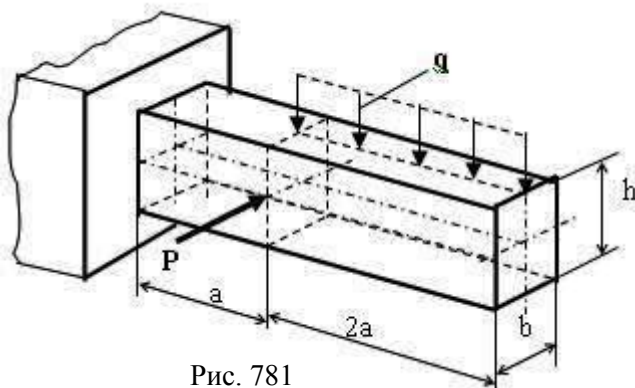


Рис. 781

- 890.** Обчислити допустимі значення навантажень, що діють на балку, показану на Рис. 782. Дані: $l = 80 \text{ см}$; $P = 8ql$; $Q = 0,2ql$; двотавр № 14 за ГОСТ ($h = 140 \text{ мм}$; $b = 82 \text{ мм}$; $F = 18,9 \text{ см}^2$; $I_z = 632 \text{ см}^4$; $I_y = 58,2 \text{ см}^4$; $[\sigma_{зг}] = 160 \text{ МПа}$.

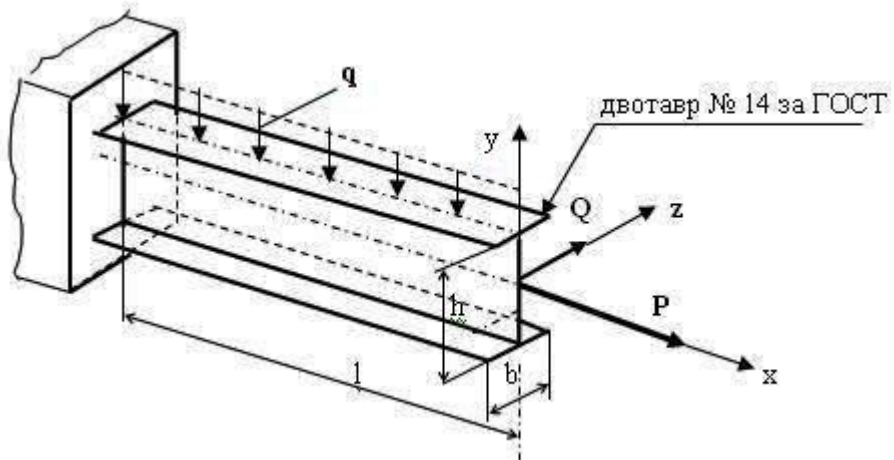


Рис. 782

- 891.** Консольна балка виконана з двох спарених швелерів № 14 згідно ГОСТ і навантажена як показано на Рис. 783. Обчислити допустиму величину навантаження P . Дані: $l = 80$ см; $P = 4ql$; $\alpha = 45^\circ$; $[\sigma_p] = 120$ МПа.

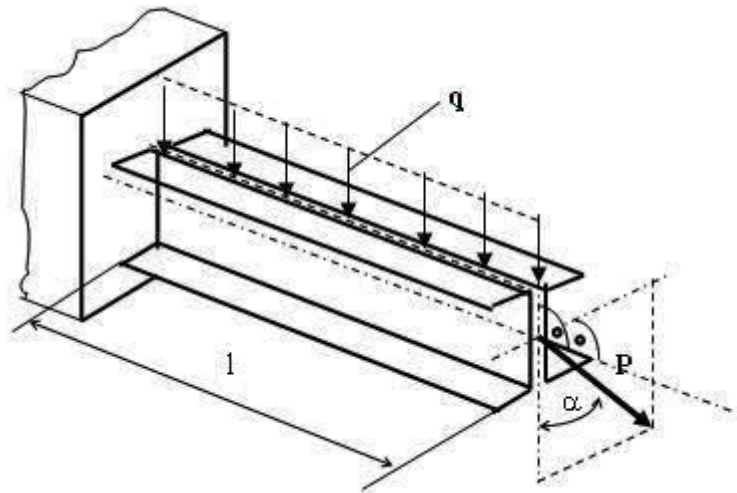


Рис. 783

- 892.** Обчислити діаметр скручуваного і позацинрово розтягнуваного стержня, зображеного на Рис. 784. Дані: $P = 200$ кН; $M = 80$ кНсм; $e = d/8$; $[\sigma_p] = 200$ МПа.

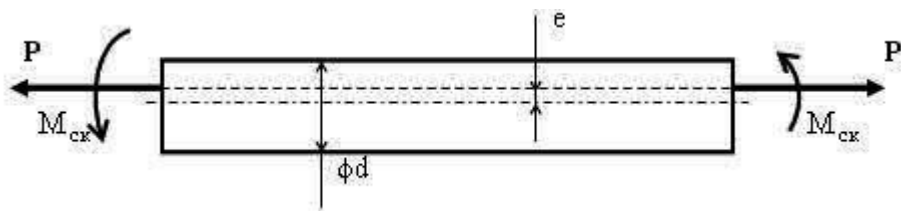


Рис. 784

893. Стержень кругового перерізу навантажений як показано на Рис. 785. Обчислити еквівалентні напруження згідно енергетичної теорії міцності в точках А, В і С перерізу. Дані: $P = 200 \text{ кН}$; $d = 8 \text{ см}$; $M_{\text{ск}} = Pd/2$.

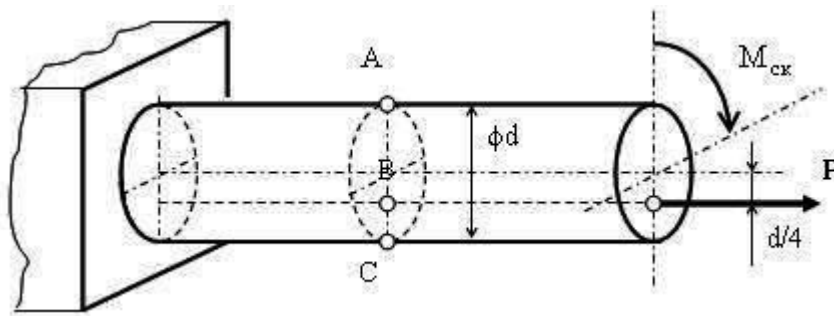


Рис. 785

894. Обчислити еквівалентні напруження згідно енергетичної теорії міцності в точці А консольної балки, показаної на Рис. 786. Дані: $P = 40 \text{ кН}$; $l = 40 \text{ см}$; $d = 8 \text{ см}$; $y_A = d/4$.

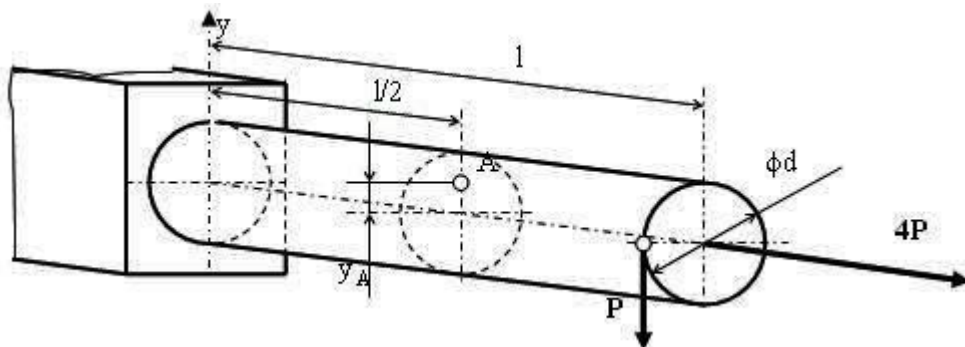


Рис. 786

895. Обчислити коефіцієнт запасу міцності за енергетичною теорією міцності у точці, де виникає найбільше напруження у балці, навантажений як показано на Рис. 787. Впливом поперечних сил знехтувати. Дані: $P = 2,5 \text{ кН}$; $l = 60 \text{ см}$; $d = 6 \text{ см}$; $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$.

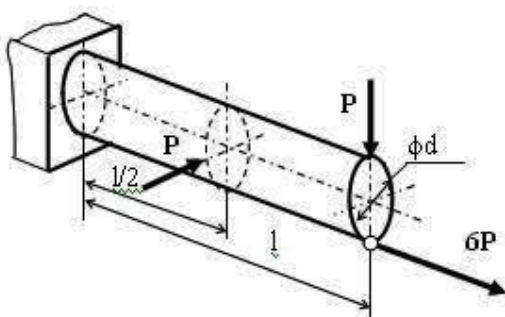


Рис. 787

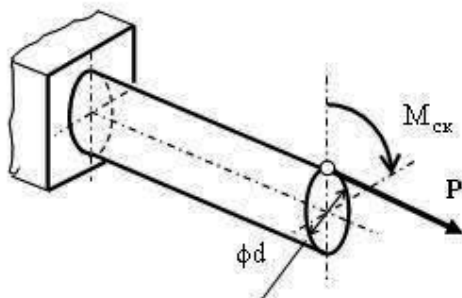


Рис. 788

896. Розрахувати максимальні еквівалентні напруження згідно теорії $\tau_{\max}$ в стержні кругового перерізу, навантаженого скручувальним моментом $M_{\text{ск}}$ і розтягуючою силою P як показано на Рис. 788. Дані: $P = 100 \text{ кН}$; $d = 8 \text{ см}$; $M_{\text{ск}} = Pd/4$.

897. Перевірити чи для труби, навантаженої як показано на Рис. 789, не перевищено допустимі напруження згідно з енергетичною теорією міцності. Дані: $M_{\text{ск}} = 90 \text{ кНсм}$; $P = 15 \text{ кН}$; $Q = 1,5 \text{ кН}$; $l = 80 \text{ см}$; $D = 80 \text{ мм}$; $d = 70 \text{ мм}$; $[\sigma_p] = 100 \text{ МПа}$.

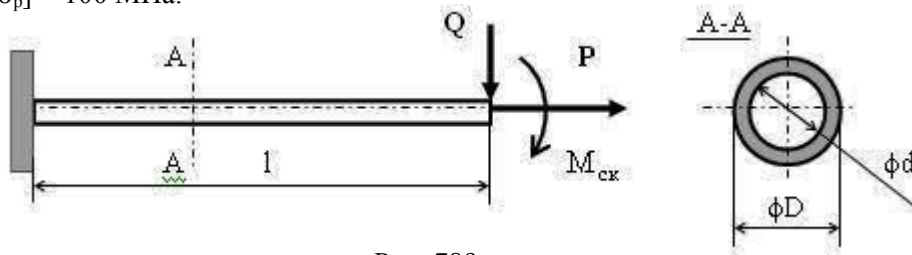


Рис. 789

898. Чавунний зразок діаметром $d = 20 \text{ мм}$ піддається руйнуванню при стисканні силою $P = 120 \text{ кН}$. Який приблизно скручувальний момент може витримати цей зразок, якщо $\frac{\sigma_{\text{в,с}}}{\sigma_{\text{в,р}}} = 3$?

899. Поперечний переріз стержня діаметром $d = 8 \text{ см}$ розтягується силою 320 кН , скручується моментом 1280 кНсм і зрізається силою 16 кН . Обчислити еквівалентні напруження за теорією $\tau_{\max}$ і енергетичною теорією міцності в точці перерізу, де виникає найбільше напруження.

900. Якою додатковою розтягуючою силою P можна навантажити пластину, показану на Рис. 790, якщо допустимі еквівалентні напруження згідно теорії міцності Мора в точці A пластини не можуть перевищувати 100 МПа ? Інші дані: $q = 40 \text{ кН/см}$; $l = 20 \text{ см}$; $h = l/2$; $b = 2 \text{ см}$; $\frac{\sigma_{\text{в,р}}}{\sigma_{\text{в,с}}} = \frac{1}{2}$.

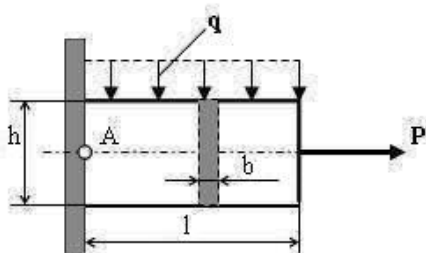


Рис. 790

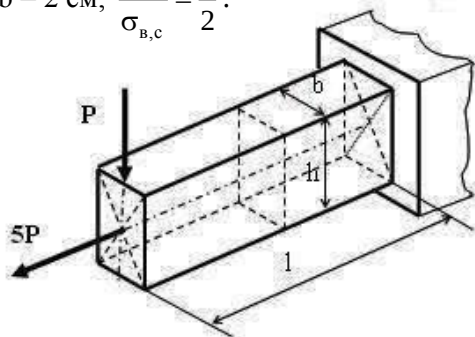


Рис. 791

901. Провести перевірочний розрахунок балки, показаної на Рис. 791. Дані: $P = 20 \text{ кН}$; $l = 80 \text{ см}$; $h = 9 \text{ см}$; $b = 6 \text{ см}$; $[\sigma_{\text{зг}}] = 160 \text{ МПа}$.

- 902.** Тонкостінна труба навантажена розтягуючою силою, скручувальним і згинальним моментом. Обчислити значення і напрямки навантажень, якщо відомі величини деформацій, виміряних тензометрами (Рис. 792). Дані: $h = 8 \text{ см}$; $b = 2h$; $\delta = 4 \text{ мм}$; $\varepsilon_a = 0,2 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_b = 0,1 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_c = 0,6 \cdot 10^{-3}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,3$; $\alpha = 45^\circ$.

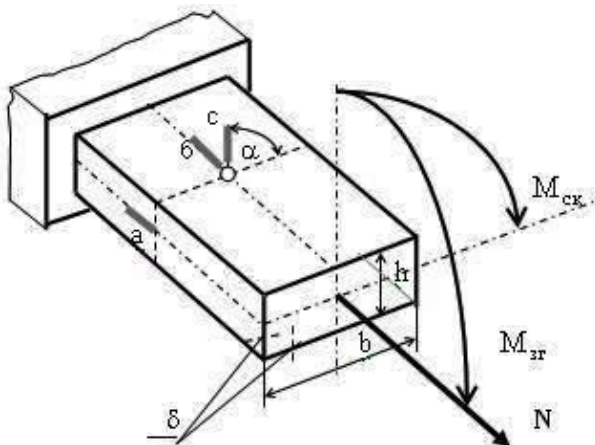


Рис. 792

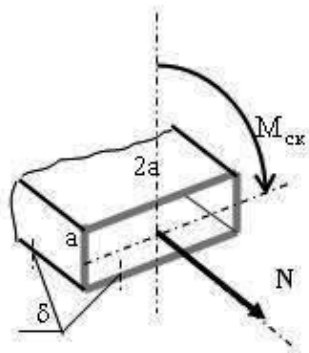


Рис. 793

- 903.** Поперечний переріз тонкостінного стержня скручуваний і розтягуваний як показано на Рис. 793. Визначити розміри поперечного перерізу стержня. Дані: $M_{\text{ск}} = 3 \text{ кНм}$; $N = 60 \text{ кН}$; $\delta = a/20$; $[\sigma_p] = 120 \text{ МПа}$.

- 904.** Труба тонкостінного перерізу (Рис. 794), навантажена згинальними моментами $M_y = 8 \text{ кНм}$, $M_z = 5 \text{ кНм}$, скручувальним моментом $M_{\text{ск}} = 4 \text{ кНм}$ і розтягуючою силою $P = 100 \text{ кН}$. Розрахувати максимальні еквівалентні напруження за енергетичною теорією міцності і теорією τ_{max} . Інші дані: $R = 20 \text{ см}$; $\delta = R/40$.

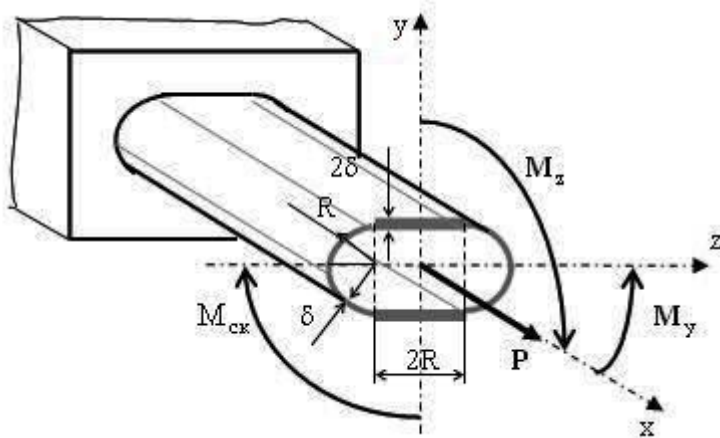


Рис. 794

905. Колона у вигляді зрізаної піраміди висотою h і квадратним поперечним перерізом зі стороною a внизу і b вверху виконана з матеріалу з питомою вагою γ . Розподіл натиску вітру q на квадратний метр вертикальної проекції перерізу піраміди є рівномірним (Рис. 795). Розрахувати найменшу величину натиску q , від якого з'являться в поперечному перерізі основи розтягуючі напруження. Дані: $h = 8$ м; $a = 2$ м; $b = 1$ м; $\gamma = 18$ кН/м³.

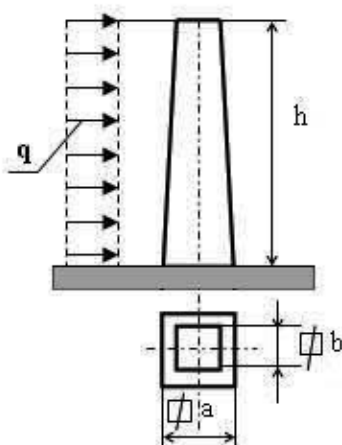


Рис. 795

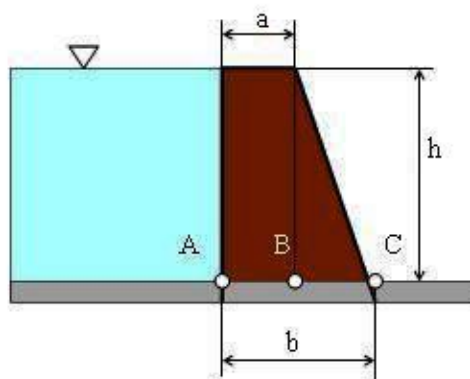


Рис. 796

906. Дамба навантажена власною вагою і тиском води. Розрахувати в перерізі основи в точках А, В і С (Рис. 796) нормальні і еквівалентні напруження за теорією міцності Мора. Дані: $a = 3$ м; $b = 2a$; $h = 4a$; $\gamma_b = 10$ кН/м³; $\gamma_6 = 25$ кН/м³; $\frac{\sigma_{B,P}}{\sigma_{B,C}} = \frac{1}{5}$.

907. Просторовий стержень зі сталем діаметром навантажений силами P як показано на Рис. 797. Яким має бути діаметр стержня згідно з енергетичною теорією міцності? Дані: $P = 5$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma_p] = 120$ МПа.

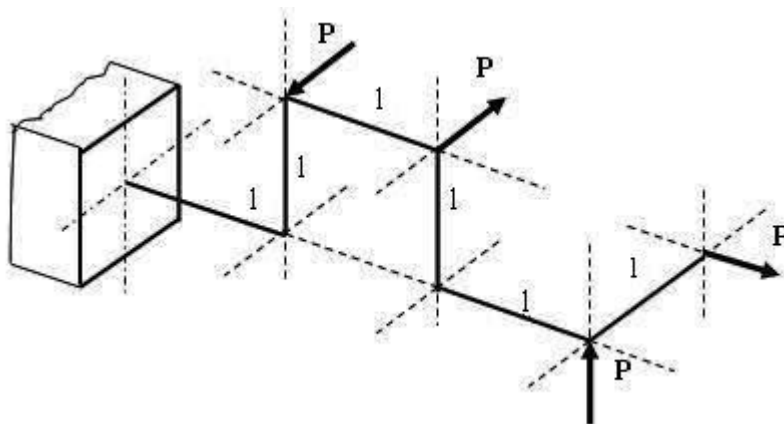


Рис. 797

8.3. Виті пружини

1. Прогин і максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі дроту циліндричної витой пружини, навантаженої силою P , обчислюють за наближеними формулами:

$$\lambda = \frac{8PD^{3n}}{Gd^4}, \quad \tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3},$$

де: D – середній діаметр пружини, d – діаметр дроту пружини, n – число витків пружини.

2. Наближену довжину дроту витой пружини обчислюють за формулою:

$$l \cong \pi Dn.$$

3. Максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі дроту пружини можна також обчислювати з точніших виразів:

– з врахуванням скручувального моменту і поперечної сили

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{1}{2\xi} \right), \quad \text{де } \xi = \frac{D}{d},$$

– з врахуванням скручувального моменту і кривини дроту пружини

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \frac{4\xi - 1}{4\xi - 4},$$

– з врахуванням скручувального моменту, поперечної сили (круглий сталевий дріт, $\mu=0,3$) і кривини дроту пружини

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{4\xi - 1}{4\xi - 4} + \frac{0,615}{\xi} \right).$$

4. Потенційну енергію пружності в циліндричній витій пружині обчислюють за формулою:

$$U = \frac{4P^2 D^3 n}{Gd^4}.$$

5. Деформацію (видовження, осадки) конусної витой пружини обчислюють за формулою:

$$\lambda = \frac{2PnD_{\max}^3}{Gd^4} \psi,$$

де: $\psi = (1 + \chi^2)(1 + \chi)$, коли крок дроту пружини $h = \text{const}$ $\left(\chi = \frac{D_{\max}}{D_{\min}} \right)$;

$\psi = \frac{4}{3} \frac{1 - \chi^{-3}}{\ln \chi}$, коли нахил бічної конуса $\alpha = \text{const}$.

Максимальні напруження в конусній пружині обчислюють із виразів для циліндричної пружини, підставляючи замість діаметра D діаметр найбільшого витка.

- 908.** На циліндричну виту пружину діаметром $D = 8$ см, діаметром дроту $d = 8$ мм і числом витків $n = 18$ підвішено вантаж $Q = 200$ Н. Обчислити видовження пружини і максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі дроту. $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.

- 909.** Вита пружина діаметром $D = 160$ мм, виконана із сталевго дроту діаметром $d = 20$ мм, розтягується силою $P = 800$ Н. Визначити видовження пружини і максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі дроту для двох випадків: без врахування поперечної сили, з врахуванням дії поперечної сили. Дані: $n = 8$; $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язок

$$\text{Видовження пружини дорівнює: } \lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 0,8 \cdot 16^3 \cdot 8}{8,5 \cdot 10^3 \cdot 2^4} = 1,54 \text{ см}.$$

Максимальні дотичні напруження без врахування поперечної сили рівні:

$$\tau_{\max} = \frac{83D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 0,8 \cdot 16}{\pi \cdot 2^3} = 4,074 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 40,74 \text{ МПа}.$$

Максимальні дотичні напруження з врахуванням дії поперечної сили рівні:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right) = \frac{8 \cdot 0,8 \cdot 16}{\pi \cdot 2^3} \left(1 + \frac{2}{2 \cdot 16} \right) = 4,329 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 43,29 \text{ МПа}.$$

З отриманих максимальних значень дотичних напружень помітно, що при нехтуванні дією поперечної сили, напруження будуть менші на 5,9%.

- 910.** Пружина, виготовлена із сталевго дроту діаметром $d = 10$ мм, має діаметр $D = 10$ см. Скільки витків вона повинна мати, якщо необхідною є її жорсткість 200 Н/см? $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.

- 911.** Визначити сталу s [Н/см] замінюючої пружини у пружинних системах а, б і в, зображених на Рис. 798. Дані: $s_1 = 30$ Н/см; $s_2 = 60$ Н/см; $s_3 = 90$ Н/см. Зауваження: замінюючою пружиною називають таку пружину, у якій таке ж переміщення відповідатиме такій же розтягуючій силі, як у даній системі пружин.

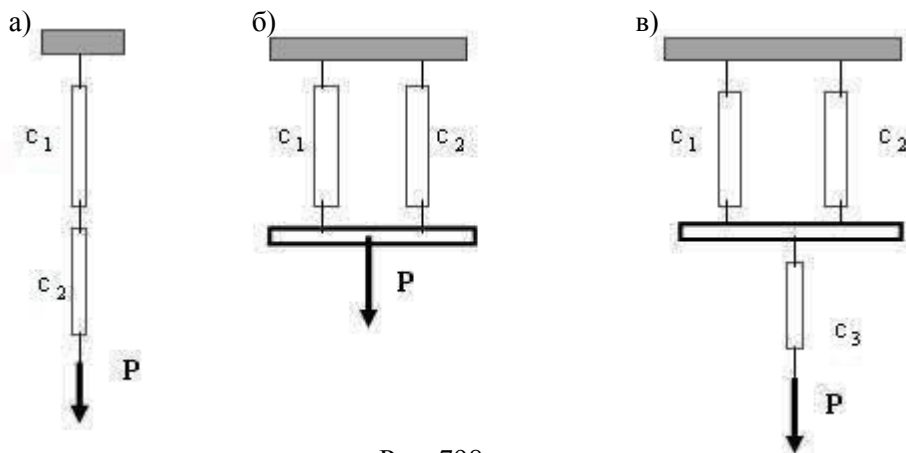


Рис. 798

- 912.** Від гвинтової пружини діаметром $D = 8$ см вимагається жорсткість $s = 200$ Н/м і максимальна деформація $\lambda = 8$ см. Розрахувати діаметр дроту пружини і число витків. Дані: $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau_{\text{сп}}] = 160$ МПа.

913. Розрахувати потрібну довжину дроту для виготовлення гвинтової пружини з жорсткістю $c = 30$ Н/см, діаметром $D = 36$ мм і діаметром дроту $d = 3$ мм. $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.
914. Від циліндричної витой пружини діаметром $D = 30$ см вимагається здатність накопичувати енергію $U = 4$ кНм при деформації $\lambda = 50$ см. Визначити діаметр дроту пружини і число витків. Дані: $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau_{\text{зр}}] = 400$ МПа.
915. Вита пружина діаметром $D = 5$ см і діаметром дроту $d = 3$ мм використана для закривання дверей як показано на Рис. 799. Розкриття при прикладанні сили $P = 10$ Н рівне куту $\alpha = 0^\circ$, а при силі $P = 20$ Н – куту $\alpha = 30^\circ$. Для якого кута α сила P буде найбільшою і скільки вона становитиме? Розрахувати для цього кута потенційну енергію пружності в пружині і максимальні дотичні напруження.

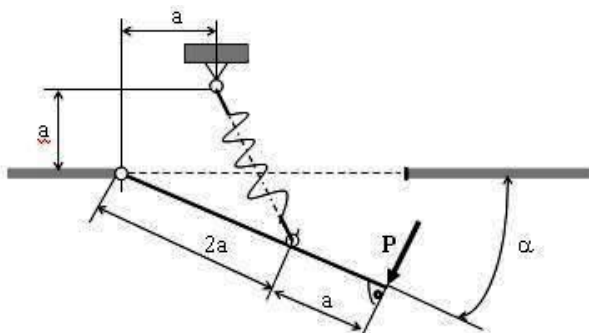


Рис. 799

916. Спроекувати виту пружину із заданими характеристиками (Рис. 800). Матеріал – сталевий дріт кругового перерізу з допустимими напруженнями на зріз $[\tau_{\text{зр}}] = 500$ МПа. Дані: $D/d = 6$; $P_0 = 1,2$ кН; $\lambda_0 = 50$ мм; $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа. Зауваження: дотичні напруження обчислювати за формулою:

$$\tau_{\text{max}} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau_{\text{зр}}], \text{ де } k = \frac{(D/d) + 0,25}{(D/d) - 1}.$$

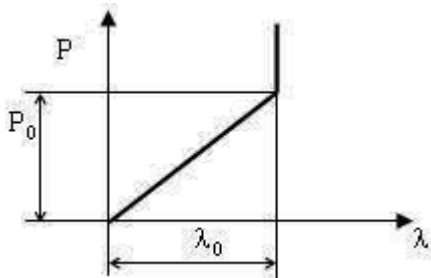


Рис. 800

917. Потрібна сталева вита пружина діаметром $D = 10$ см, жорсткістю $c = 400$ Н/см і максимальною деформацією $\lambda = 12$ см. Розрахувати число витків і діаметр дроту такої пружини. Дані: $[\tau_{\text{зр}}] = 200$ МПа; $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа. Для запроєктованої пружини провести перевірочний розрахунок на міцність з врахуванням дії поперечної сили і кривини дроту.

918. З однакового дроту виконано дві виті пружини: одну діаметром $D_1 = 5$ см і другу діаметром $D_2 = 10$ см, обидві з однаковою жорсткістю на розтяг. Скільки витків має друга пружина, якщо відомо, що перша має 5 витків?
919. Вита пружина діаметром $D = 80$ мм і поперечним перерізом дроту у вигляді квадрата зі стороною $a = 12$ мм стискається силою $P = 0,5$ кН. Обчислити максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі дроту.
920. Дві виті пружини з однаковими розмірами – одна сталева, а друга з бронзи - з'єднано послідовно. Яким буде видовження такої пружини, навантаженої силою P , якщо видовження сталеві пружини становить 5 см? Дані: $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_c = 0,3$; $E_b = 1,1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_b = 0,33$.
921. Дві виті пружини однакової висоти вкладені одна в другу і стискаються силою P за допомогою жорсткої плити (Рис. 801). Визначити найбільшу допустиму величину сили P і деформацію, що їй відповідає. Дані: $D_1 = 40$ мм; $d_2 = 6$ мм; $n_1 = 8$; $D_2 = 20$ мм; $d_2 = 3$ мм; $n_2 = 10$; $[\tau_{зр}] = 400$ МПа; $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.

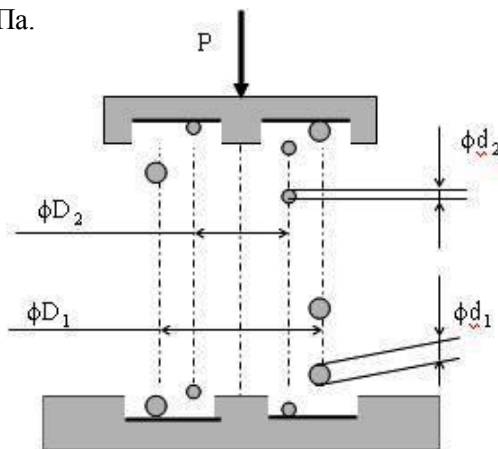


Рис. 801

922. Яку потенційну енергію пружності може накопичити стискувана вита пружина діаметром $D = 8$ см, діаметром дроту $d = 8$ мм і з 20-ма витками, якщо $[\tau_{зр}] = 200$ МПа? $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.
923. Вита пружина діаметром $D = 24$ см виконана зі сталевго дроту діаметром $d = 20$ мм. Скільки витків повинна мати пружина, щоб при деформації 8 см вона накопичила енергію, не меншу, ніж 1 кНм? Дані: $[\tau_{зр}] = 200$ МПа; $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.
924. Дві сталеві пружини, одна діаметром D_1 і друга діаметром $D_2 = \frac{2}{3} D_1$, мають однакову висоту, однакове число витків і виконані з дроту однакового діаметру. Пружини вкладено одна в другу і навантажено через жорстку плиту осьовою силою P . Яку частину сили P буде приймати кожна пружина і яким буде співвідношення максимальних дотичних напружень в дротах пружин?

- 925.** Конусна пружина висотою $H = 12$ см, діаметром дроту $d = 5$ мм, крайніми діаметрами витків $D_1 = 5$ см і $D_2 = 8$ см має 6 витків з однаковим кроком. Під впливом стискаючої сили P пружина здеформувалась на 4 см. Розрахувати силу, що стискає пружину, максимальні дотичні напруження в поперечному перерізі дроту і потенційну енергію пружності пружини. $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.

Розділ 9

Стійкість стиснутих довгих стержнів

1. Величину критичної сили $P_{кр}$, при якій зберігається пружна рівновага довгого стержня при поведовжньому згині, обчислюють за формулою Ейлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2},$$

де: EI – жорсткість стержня на згин, $\alpha l = l_{зв}$ – зведена довжина стержня, α – коефіцієнт впливу способу закріплення кінців стержня і його навантаження (Рис. 802).

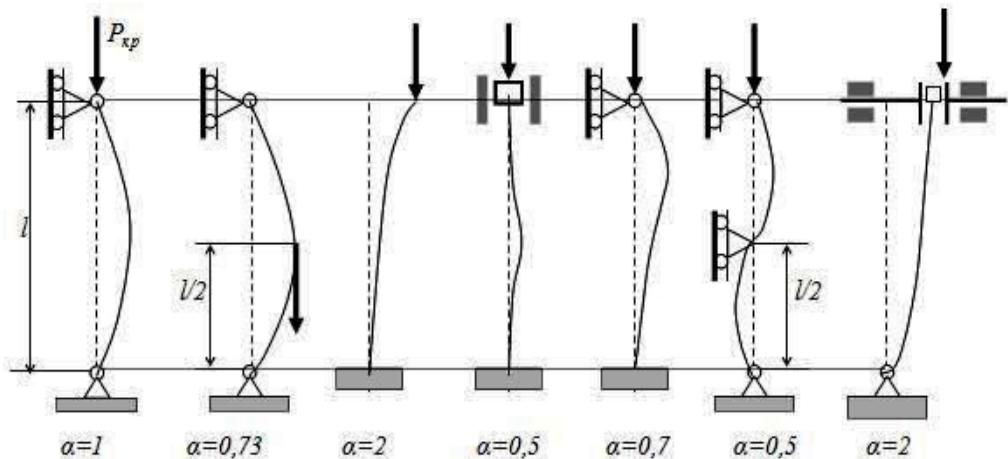


Рис. 802

2. Критичні напруження в стержні обчислюють за формулою:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

де: $\lambda = \frac{l_{зв}}{i}$ – гнучкість стержня ($i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ – радіус інерції поперечного перерізу).

Обчислення критичних напружень при пружній деформації можливе лише до границі пропорційності $\sigma_{пр}$, відомої як межа застосування закону Гука.

Відповідно з умови $\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пр}$ буде встановлюватись гранична гнучкість, для якої можливе використання поданої формули Ейлера:

$$\lambda_{пр} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пр}}}.$$

Для величин гнучкості, менших від граничної, для обчислення критичних напружень використовують наближені формули (Рис. 803).

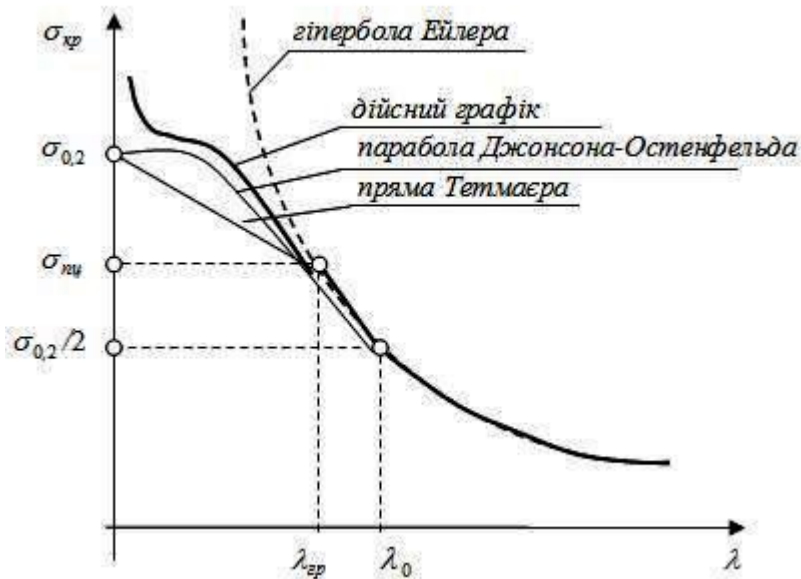


Рис. 803

Пряма Тетмаєра описується рівнянням:

$$\sigma_{кр} = \sigma_{нц} - \frac{\sigma_{0,2} - \sigma_{нц}}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{нц}}{E}} \lambda.$$

Рівняння параболі Джонсона-Остенфельда:

$$\sigma_{кр} = \sigma_{0,2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\lambda_0^2} \right), \text{ де } \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_{0,2}}}.$$

9.1. Рівновага при повздовжньому згині

1. Пружна рівновага має місце, коли гнучкість стержня є більшою від граничної

$$\lambda \geq \lambda_{зр}.$$

У обчисленнях критичної сили застосовується формула Ейлера.

926. Якою силою P можна навантажити колону, зображену на Рис. 804, якщо необхідний коефіцієнт запасу міцності на стійкість $n_{ст} = 2$? Дані: $l = 6$ м; $D = 20$ см; $d = 10$ см; $[\sigma_c] = 140$ МПа; $\sigma_{нц} = 200$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

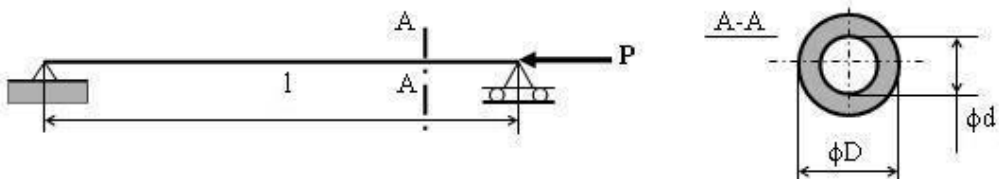


Рис. 804

Розв'язок

Гранична гнучкість становить:

$$\lambda_{\text{гр}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3.$$

Гнучкість стержня становить:

$$\lambda = \frac{l_p}{i},$$

$$\text{де } l_{\text{зв}} = l = 6 \text{ м; } I = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}}{\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}}} = \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{16}} = \sqrt{\frac{20^2 + 10^2}{16}} = 5,6 \text{ см.}$$

$$\lambda = \frac{600}{5,6} = 107,1 > \lambda_{\text{гр}} = 99,3.$$

Гнучкість колони більша від граничної гнучкості. Це означає, що згин буде в пружній області і в обчисленнях застосовується формула Ейлера.

Враховуючи коефіцієнт запасу міцності на стійкість $n_c = 2$, допустиме значення стискаючої колони сили P буде

$$P = \frac{P_{\text{кр}}}{n_{\text{ст}}} = \frac{\sigma_{\text{кр}} \cdot F}{n_{\text{ст}}} = \frac{\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}}{n_{\text{ст}}} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^4}{107,1^2} \cdot \pi \frac{20^2 - 10^2}{4 \cdot 2} = 1767 \text{ кН.}$$

Колону можна навантажити силою $P = 1767 \text{ кН}$.

- 927.** Розрахувати критичне значення сили P , стискаючої стержень, зображений на Рис. 805. Дані: $l = 2 \text{ м}$; $\delta = 4 \text{ мм}$; $h = b = 5 \delta$; $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

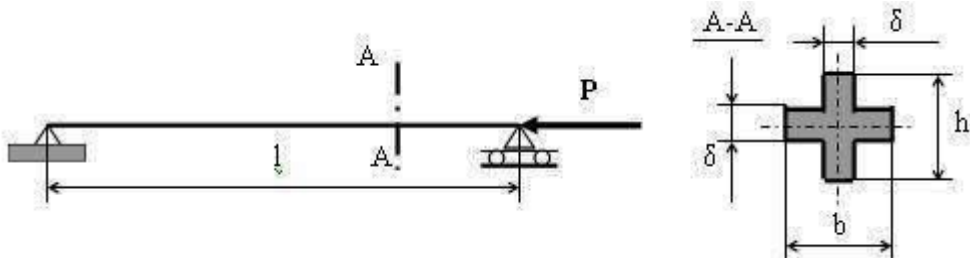


Рис. 805

- 928.** Якою стискаючою осьовою силою можна навантажити дерев'яний стовп, жорстко закріплений з обох сторін, з прямокутним поперечним перерізом $b \times h$ і довжиною l , якщо врахувати можливу втрату стійкості. Дані: $l = 8 \text{ м}$; $b \times h = 20 \text{ см} \times 30 \text{ см}$; $[\sigma_c] = 20 \text{ МПа}$; $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

- 929.** Якою силою P можна навантажити стержень (Рис. 806) з урахуванням можливої втрати стійкості. Дані: $l = 60 \text{ см}$; $d = 2 \text{ см}$; $[\sigma_c] = 120 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пл}} = 200 \text{ МПа}$; $\sigma_{0,2} = 240 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

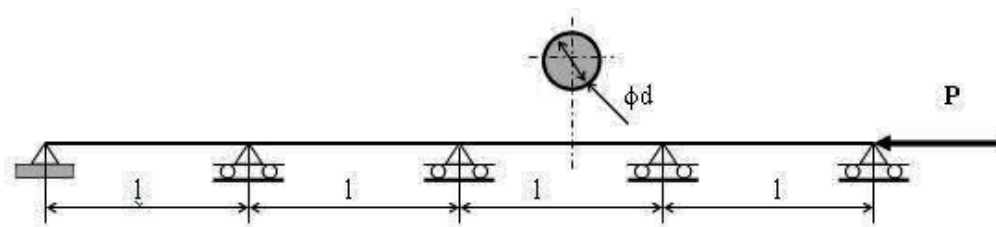


Рис. 806

930. Розрахувати силу P , якою можна навантажити опору (Рис. 807), якщо необхідний коефіцієнт запасу міцності на стійкість $n_{ст} = 3$. Дані: $l = 4$ м; $b = 15$ см; $h = 2b$; $\sigma_c = 30$ МПа; $\sigma_{шц} = 15$ МПа; $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

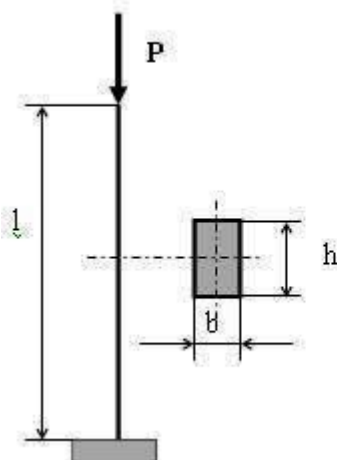


Рис. 807

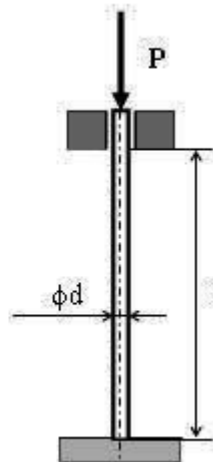


Рис. 808

931. Якою силою P може бути стиснутий стержень, показаний на Рис. 808, при необхідному коефіцієнті запасу стійкості $n_{ст} = 3$? Дані: $l = 2$ м; $d = 2$ см; $[\sigma_c] = 150$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

932. Обчислити значення критичної сили стиску P (Рис. 809).
Дані: $l = 2,5$ м; $b = 38$ мм;
 $h = 72$ мм; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;
 $\lambda_{гр} = 100$ МПа.

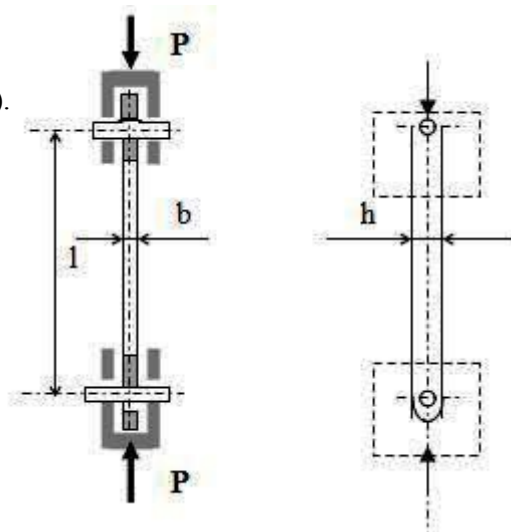


Рис. 809

933. Розрахувати допустиме значення сили P , прикладеної до стержня двотаврового перерізу (Рис. 810), враховуючи можливу втрату стійкості. Дані: $l = 7,5$ м; $I_y = 260$ см⁴; $i_y = 2,54$ см; $F = 40,2$ см²; $n_{ст} = 2$; $\sigma_{пл} = 210$ МПа; $\sigma_T = 250$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

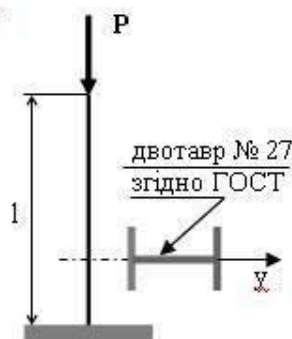


Рис. 810

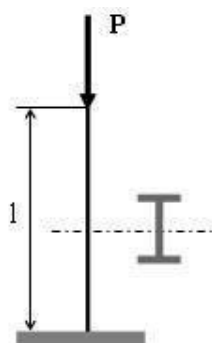


Рис. 811

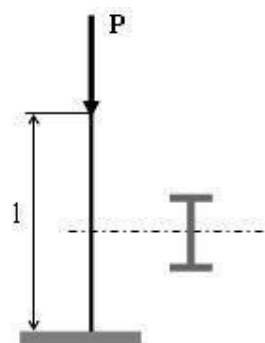


Рис. 812

934. Підібрати двотавровий переріз згідно з ГОСТ колони, показаної на Рис. 811, з урахуванням можливої втрати стійкості. Дані: $P = 100$ кН; $l = 4$ м; $n_{ст} = 3$; $[\sigma_c] = 120$ МПа; прийняти параметри матеріалу для Ст. 3.
935. Колонна двотаврового перерізу стискається силою P , як показано на Рис. 812. Підібрати двотавровий переріз згідно з ГОСТ з умови міцності на стиск. Для такого перерізу перевірити коефіцієнт запасу стійкості колони. Дані: $P = 200$ кН; $l = 1,5$ м; $[\sigma_c] = 140$ МПа; $\sigma_{пл} = 200$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
936. Обчислити допустимі значення сил P , які діють на стержневу систему, зображену на Рис. 813, при можливій втраті її стійкості. Дані: $l = 1$ м – довжини стержнів №№ 1-10; $d = 3$ см – діаметр стержнів; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

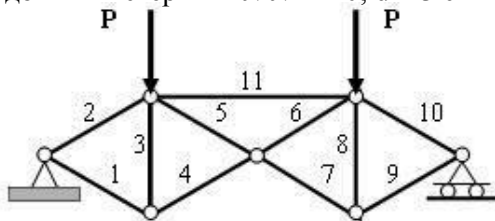


Рис. 813

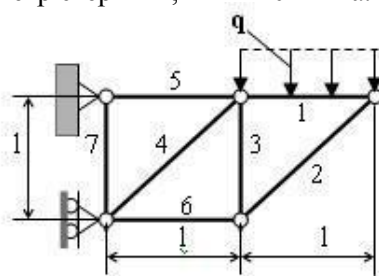


Рис. 814

937. Визначити величину розподіленого навантаження q , при якому ланка № 4 стержневої системи, показаної на Рис. 814, втратить стійкість. Дані: $l = 3$ м; $d = 2$ см – діаметр стержня № 4; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
938. Вказати стержень стержневої системи, показаної на Рис. 815, з найменшим коефіцієнтом запасу стійкості на стиск і встановити, при яких значеннях сил P вона втратить стійкість. Дані: $l = 1$ м – довжина стержнів; $d = 2$ см – діаметри стержнів; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

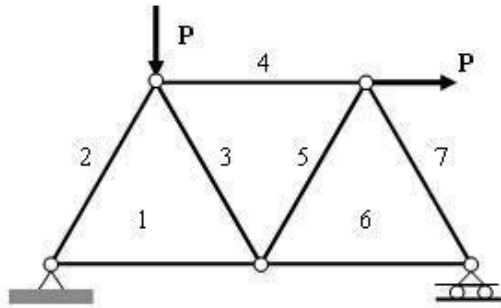


Рис. 815

- 939.** Ланка АС стержневої системи, показаної на Рис. 816, виконана з двох зварених рівнобоких кутиків згідно з ГОСТ. Підібрати кутики з умови міцності на стиск. Розрахувати коефіцієнт запасу стійкості запроєктованого стержня АС. Дані: $P = 200 \text{ кН}$; $a = 4 \text{ м}$; $b = 5 \text{ м}$; $c = 3,5 \text{ м}$; $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

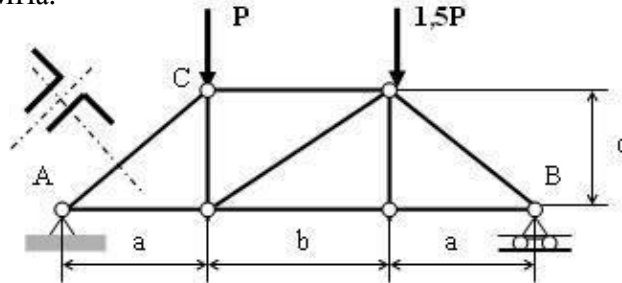


Рис. 816

- 940.** Колона виконана з 4 рівнобоких кутиків, з'єднаних і навантажених як показано на Рис. 817. Розрахувати допустиму величину сили P , враховуючи можливість втрати стійкості окремих кутиків. Дані: $l = 8 \text{ м}$; $a = 220 \text{ см}$; $[\sigma_c] = 140 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

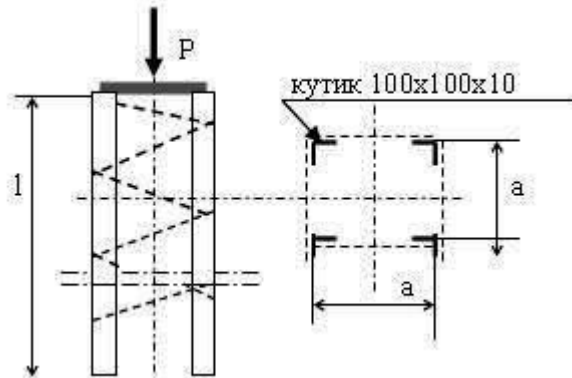


Рис. 817

- 941.** Жорстка плита з навантаженням Q розташована на трьох стояках як показано на Рис. 818. Розрахувати допустиму величину навантаження Q з умови стійкості стояків. Дані: $b = 9 \text{ см}$; $h = 10b$; $l = 40b$; $g = b/10$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

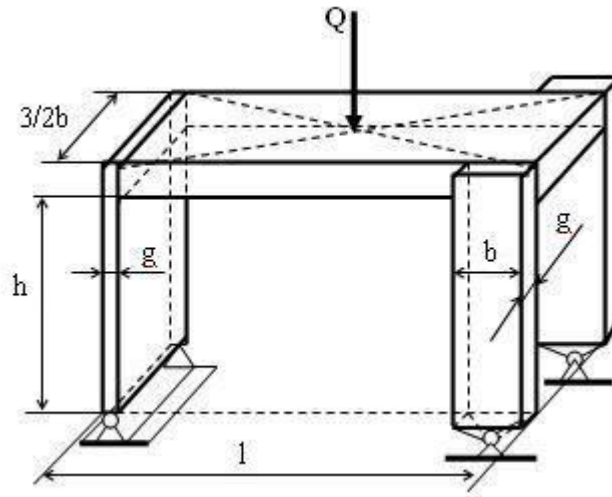


Рис. 818

9.2. Стійкість поза границею пружності

1. Стан пружно - пластичної рівноваги має місце тоді, коли гнучкість стержня буде менша від граничної

$$\lambda < \lambda_{cr}$$

Напруження і критичні навантаження в цій області роботи стержня обчислюють за формулами Джонсона - Остенфельда чи Тетмаєра.

942. Стержень, шарнірно закріплений з обох сторін, стискається силою P як показано на Рис. 819. Розрахувати його діаметр з урахуванням можливої втрати стійкості. Дані: $P = 300$ кН; $l = 1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma_c] = 100$ МПа; $\sigma_{шц} = 200$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа; $n_{cr} = 2,5$.

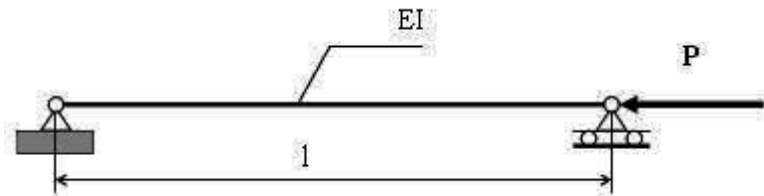


Рис. 819

943. Яку силу стиску може витримати двотавр № 20 довжиною $l = 2$ м, шарнірно закріплений з обох сторін. Дані: $[\sigma_c] = 140$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{шц} = 220$ МПа; $\sigma_T = 280$ МПа.
944. Визначити діаметр колони (Рис. 820) з урахуванням можливої втрати її стійкості. Дані: $P = 800$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma_c] = 100$ МПа; $\sigma_{шц} = 210$ МПа; $\sigma_T = 280$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $n_{cr} = 2$ – коефіцієнт запасу стійкості.

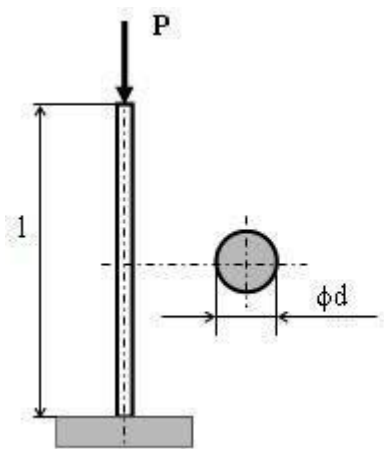


Рис. 820

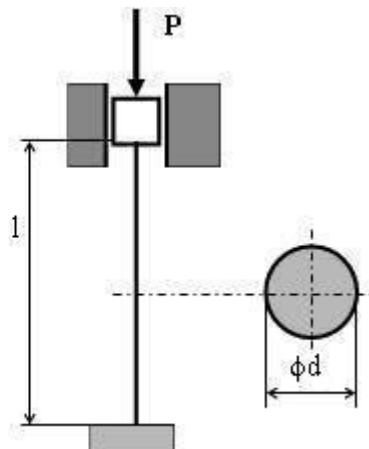


Рис. 821

- 945.** Сталевий стержень кругового перерізу стискається силою $P = 100$ кН (Рис. 821). Розрахувати діаметр стержня. У випадку непружного повздовжнього згину застосувати формулу Тетмаєра. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $l = 1,2$ м; $[\sigma_c] = 80$ МПа; $\sigma_{\text{пл}} = 200$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа.
- 946.** Стержень діаметром $d = 5$ см і довжиною $l = 2$ м, жорстко закріплений на одному кінці і шарнірно на другому, стискається силою $P = 100$ кН. Розрахувати коефіцієнт запасу стійкості стержня. Дані: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{\text{пл}} = 240$ МПа; $\sigma_T = 300$ МПа.
- 947.** Підібрати поперечний переріз стиснутого стержня, показаного на Рис. 822, з урахуванням можливої втрати стійкості. Дані: $P = 400$ кН; $l = 1$ м; $[\sigma_c] = 100$ МПа; $\sigma_{\text{пл}} = 240$ МПа; $\sigma_T = 300$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $n_{\text{ст}} = 2$ – коефіцієнт запасу стійкості.

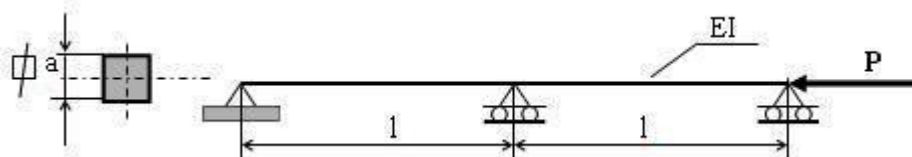


Рис. 822

- 948.** Розрахувати коефіцієнт запасу стійкості стержня, показаного на Рис. 823. Дані: $P = 150$ кН; $l = 2,5$ м; $D = 76$ мм; $d = 64$ мм; $\sigma_{\text{пл}} = 300$ МПа; $\sigma_T = 360$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

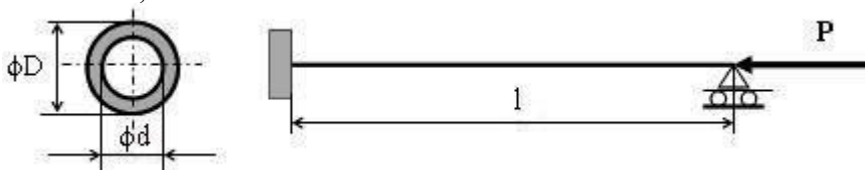


Рис. 823

949. Знайти переріз стиснутого стержня, закріпленого як показано на Рис. 824, з урахуванням можливої втрати стійкості. Дані: $P = 500 \text{ кН}$; $l = 1 \text{ м}$; $[\sigma_c] = 140 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пл}} = 200 \text{ МПа}$; $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

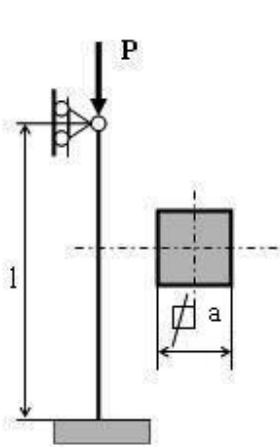


Рис. 824

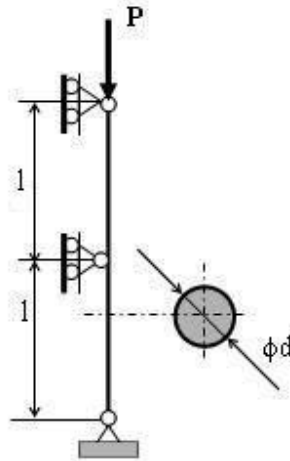


Рис. 825

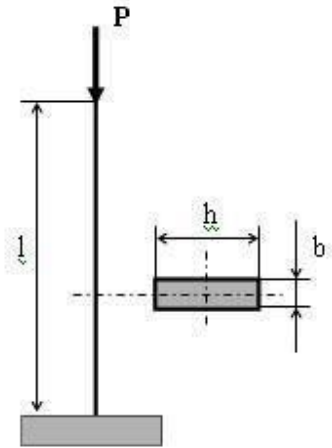


Рис. 826

950. Розрахувати максимальну величину сили P , якою можна навантажити стержень, показаний на Рис. 825, з урахуванням можливої втрати стійкості. У випадку непружного повздовжнього згину застосувати формулу Джонсона - Остенфельда. Дані: $l = 2 \text{ м}$; $d = 15 \text{ см}$; $[\sigma_c] = 120 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пл}} = 200 \text{ МПа}$; $\sigma_T = 260 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.
951. Якою може бути величина допустимої стискуючої сили P (Рис. 826) з урахуванням можливої втрати стійкості? Дані: $l = 1,2 \text{ м}$; $b = 2 \text{ см}$; $h = 4b$; $[\sigma_c] = 100 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пл}} = 200 \text{ МПа}$; $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $n_{\text{ст}} = 2$ – коефіцієнт запасу стійкості.
952. Сталевий стержень діаметром $d = 4 \text{ см}$ і довжиною $l = 1,2 \text{ м}$ знаходиться на двох шарнірних рухомих опорах і стискається силою P (Рис. 827). Розрахувати величину критичної сили. Дані: $\sigma_{\text{пл}} = 220 \text{ МПа}$; $\sigma_T = 280 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

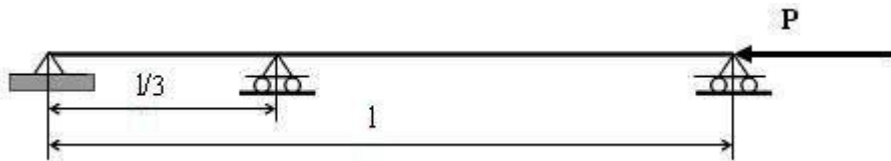


Рис. 827

953. Якою може бути допустима стискаюча сила, прикладена до швелера $50 \times 37 \times 4,5$ довжиною $l = 2 \text{ м}$, закріпленого з обох сторін на кульових шарнірах? Дані: $[\sigma_c] = 140 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пл}} = 220 \text{ МПа}$; $\sigma_T = 280 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $n_{\text{ст}} = 2$ – коефіцієнт запасу стійкості.

954. Якою максимальною силою P можна навантажити стержневу систему, показану на Рис. 828, з врахуванням можливої втрати стійкості? Дані: $l = 80$ см; $d = 4$ см – діаметри стержнів; $\alpha = 60^\circ$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120$ МПа; $\sigma_{\text{пл}} = 220$ МПа; $\sigma_T = 300$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

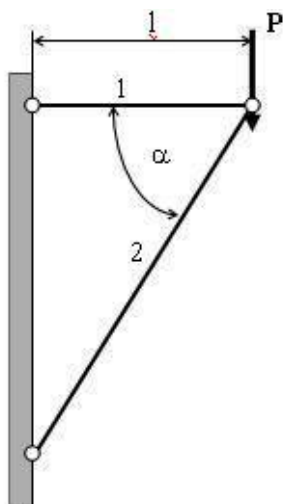


Рис. 828

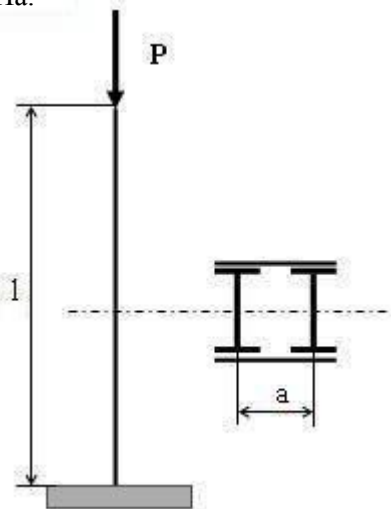


Рис. 829

955. Довга опора у вигляді двох спарених двотаврів № 16 навантажена осьовою силою P (Рис. 829). При якому мінімальному розмірі a можна допустити найбільшу стискаючу силу P з урахуванням можливої втрати стійкості і скільки вона становитиме? Дані: $l = 5$ м; $[\sigma_c] = 140$ МПа; $\sigma_{\text{пл}} = 240$ МПа; $\sigma_T = 280$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

956. Якою максимальною силою P можна навантажити стержневу систему, показану на Рис. 830, при можливій втраті стійкості стержнів? Дані: $l = 1$ м; $D = 10$ см – зовнішній діаметр стержнів; $\delta = 4$ мм – товщина стінки трубок, якими є стержні; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа; $\sigma_{\text{пл}} = 200$ МПа; $\sigma_T = 280$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

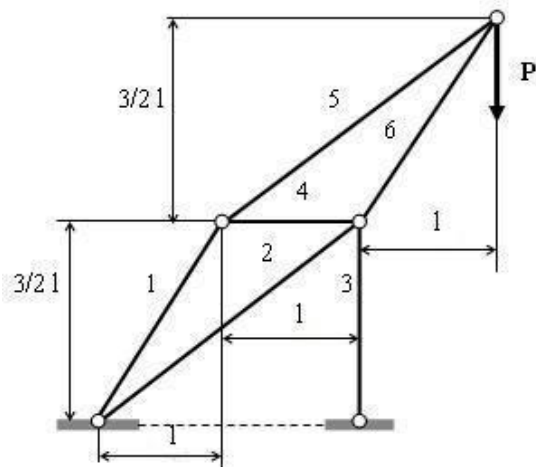


Рис. 830

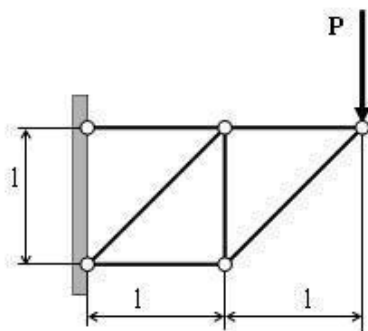


Рис. 831

957. Яку максимальну силу P можна прийняти для стержневої системи, показаної на Рис. 831, виходячи з умови забезпечення стійкості стержнів? Дані: $l = 1$ м; $d = 2$ см – діаметри стержнів; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 160$ МПа; $\sigma_{\text{мц}} = 210$ МПа; $\sigma_T = 250$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
958. Підібрати кругові перерізи ланок стержневої системи, показаної на Рис. 832, враховуючи можливу втрату стійкості. Дані: $P = 200$ кН; $l = 1,5$ м; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120$ МПа; $\sigma_{\text{мц}} = 220$ МПа; $\sigma_T = 280$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

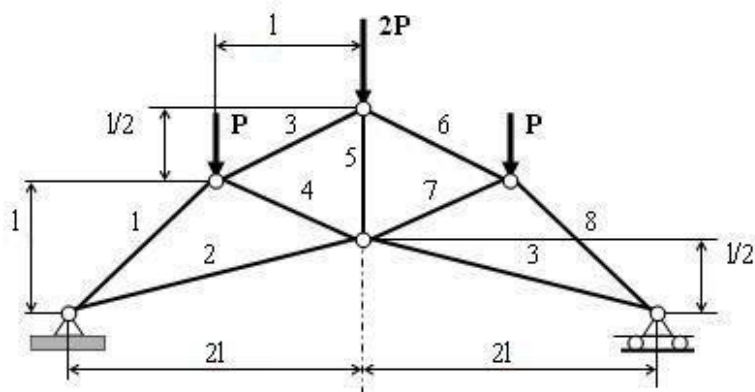


Рис. 832

959. Перевірити, чи показану на Рис. 833 стержневу систему можна навантажити силою G , без небезпеки втрати стійкості. Дані: $G = 600$ кН; $l = 1$ м – довжина стержнів 1 і 2; $d = 8$ см – діаметр стержнів; $\alpha = \beta = 45^\circ$; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120$ МПа; $\sigma_{\text{мц}} = 200$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

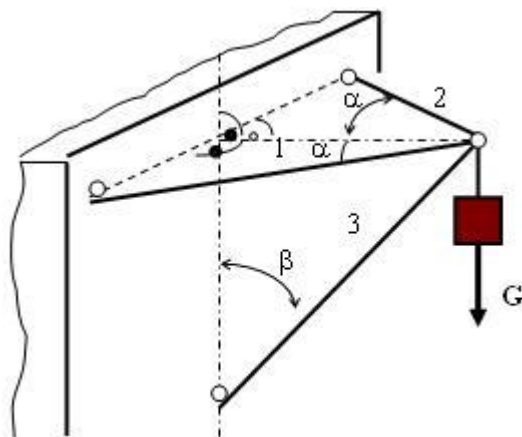


Рис. 833

9.3. Різні завдання

960. Застосовуючи енергетичний метод, визначити критичну величину сили P , яка діє на стержень як показано на Рис. 834. Прийняти прогин осі стержня

у вигляді синусоїди $y = C \sin \frac{\pi x}{l}$.

Дані: $l = 2$ м; $d = 4$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

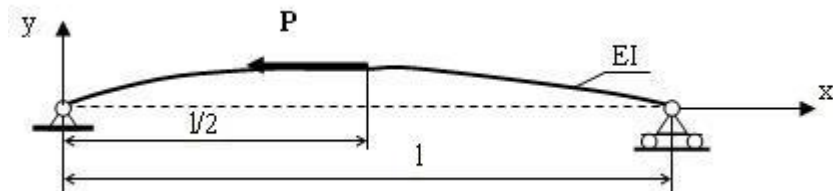


Рис. 834

Розв'язок

За енергетичним методом критичну силу обчислюють за формулою:

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EI y''^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx},$$

де: y – прийняте рівняння зігнутої осі стержня.

Згідно з умовою $y = C \sin \frac{\pi x}{l}$, звідки $y' = C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$ і $y'' = -C \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$.

Обчислюють інтеграли: у чисельнику $\int_0^l y''^2 dx = \int_0^l \left(-C \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = C^2 \frac{\pi^4}{2 \cdot l^3}$

та знаменнику $\int_0^l y'^2 dx = \int_0^l \left(C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = C^2 \frac{\pi^2}{4 \cdot l}$.

Інтеграл в знаменнику є роботою сили P на шляху точки її прикладання, тобто, як помітно з рисунка, на частині проекції половини довжини стержня на вісь x . Звідси межі інтегрування $x \in (0, l/2)$.

Після підставлення значення інтегралів і спрощення отримано вираз критичної сили для цього випадку:

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2},$$

де: $EI = E \frac{\pi d^4}{64} = 2 \cdot 10^4 \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 8\pi \cdot 10^4$ кНсм².

Після підставлення числових даних буде

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2 \cdot 8\pi \cdot 10^4}{600^2} = 13,8 \text{ кН}.$$

Точний вираз для величини критичної сили для цього випадку повинен мати вигляд:

$$P_{кр} = \frac{18,7EI}{l^2}$$

і вона менша від наближеної величини, отриманої енергетичним методом, на 5,3%.

961. Розв'язати задачу № 959, приймаючи рівняння зігнутої осі стержня у вигляді параболи. Порівняти і охарактеризувати отримані результати.

962. Розрахувати величину критичної сили P , яка діє на стержень, показаний на Рис. 835. Дані: $l = 3$ м; $EI = 200$ кНм².

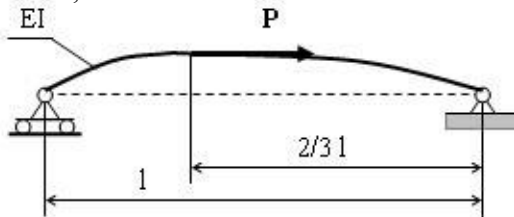


Рис. 835

963. Стержень кругового перерізу навантажений силами P як показано на Рис. 836. Розрахувати критичні значення навантаження. Застосувати енергетичний метод, приймаючи рівняння лінії прогину у вигляді косинусоїди $y = C(1 - \cos \frac{\pi x}{2 \cdot l})$. Дані: $l = 2$ м; $d = 4$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

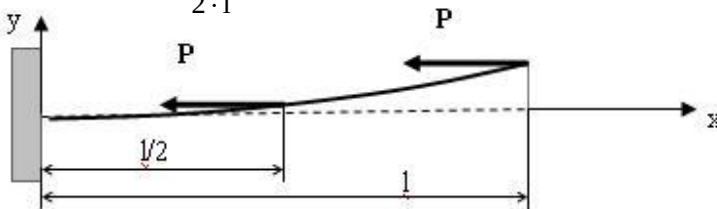


Рис. 836

964. Розв'язати задачу № 962, приймаючи рівняння зігнутої осі стержня у вигляді параболи. Порівняти і охарактеризувати отримані результати.

965. Обчислити потрібний діаметр стержня, навантаженого силою P як показано на Рис. 837, з урахуванням можливої втрати стійкості. Дані: $P = 100$ кН; $l = 4$ м; $[\sigma_c] = 120$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

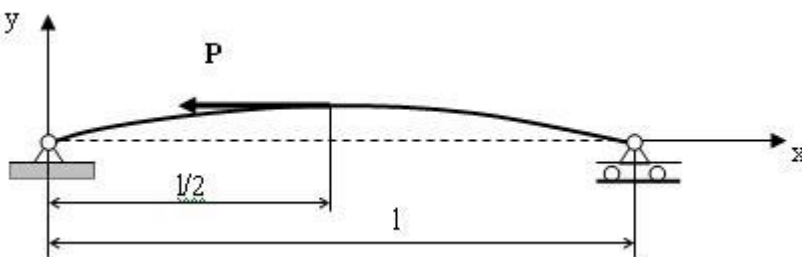


Рис. 837

966. Визначити величину критичної сили P , що стискає ступінчастий стержень, показаний на Рис. 838. Дані: $l = 1$ м; $d = 2$ см; $D = 3$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

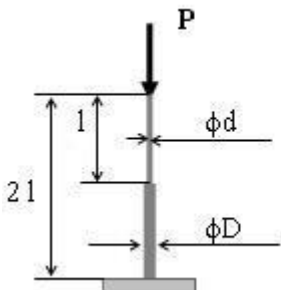


Рис. 838

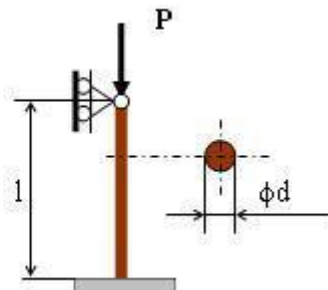


Рис. 839

967. Дерев'яний стовп (Рис. 839) стискається силою P . Перевірити його на стійкість, застосовуючи технічний метод. Дані: $P = 80$ кН; $l = 5$ м; $d = 16$ см; $[\sigma_c] = 10$ МПа; $\beta = 0,405$ – коефіцієнт стійкості.
968. Дерев'яний стовп квадратного перерізу стискається силою P (Рис. 840). Розрахувати розміри поперечного перерізу стовпа, враховуючи можливість втрати стійкої рівноваги, користуючись технічним методом. Дані: $P = 50$ кН; $l = 2$ м; $[\sigma_c] = 10$ МПа; $\beta = 0,405$; $\lambda_{тр} = 110$; у випадку $\lambda < \lambda_{тр}$ критичні напруження обчислювати за формулою: $\sigma_{кр} = 29,3 - 0,194\lambda$.

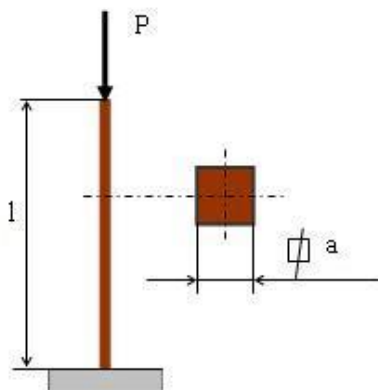


Рис. 840

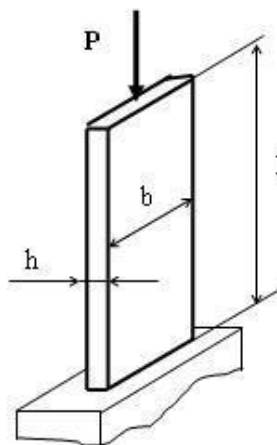


Рис. 841

969. Побудувати графік критичної сили P як функції h розміру поперечного перерізу стержня, показаного на Рис. 841. Дані: $l = 120$ см; $b = 8$ см; $\sigma_{пл} = 240$ МПа; $\sigma_t = 320$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.
970. Стержень, замуrowаний в стіні, стискається жорстким штоком АВ (Рис. 842). Визначити величину критичної сили P . Дані: $l = 1,2$ м; $L = 80$ см; $EI = 240$ кНм².

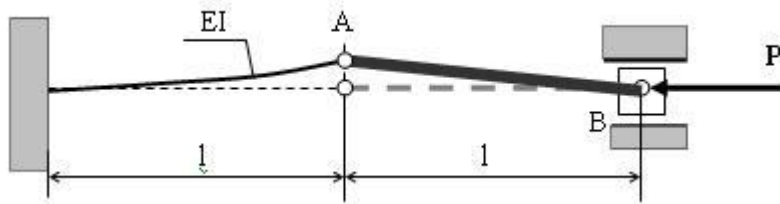


Рис. 842

971. Стержнева система з діаметрами d кожної ланки закріплена і навантажена як показано на Рис. 843. Обчислити допустиме значення сили P з урахуванням можливої втрати стійкості стержнів. Дані: $l = 1$ м; $d = 4$ см; $\sigma_{\text{пл}} = 200$ МПа; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 120$ МПа; $\sigma_T = 250$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

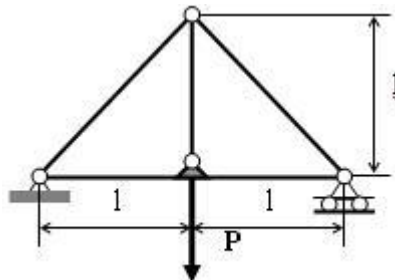


Рис. 843

972. Сталевий стержень довжиною l і діаметром d стискається позакентровано прикладеними силами P як показано на Рис. 844. Визначити величину ексцентриситету e . Дані: $P = 10$ кН; $l = 1$ м; $d = 4$ см; $[\sigma_p] = [\sigma_c] = 100$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; стрілу прогину розрахувати за наближеною формулою

$$f = \frac{Pel^2}{8EI}.$$

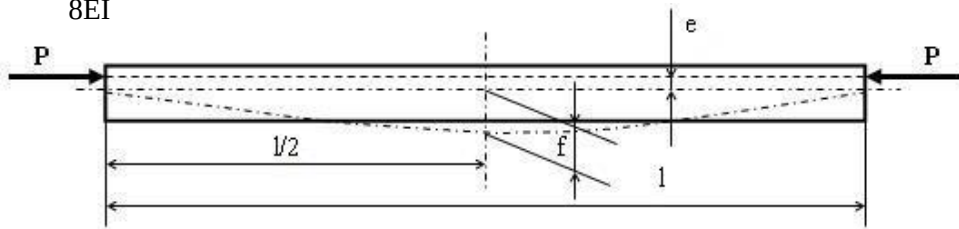


Рис. 844

973. Розрахувати стрілу прогину стержня, навантаженого як показано на Рис. 845. Дані: $P = 0,5P_{\text{кр}}$; $Q = 0,25P_{\text{кр}}$; $l = 2$ м; $EI = 200$ кНм²; $P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

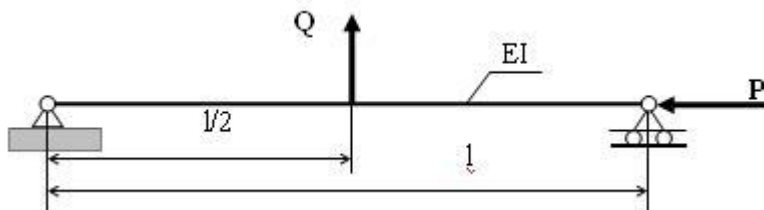


Рис. 845

Розділ 10

Вибрані завдання

- 974.** Дріт діаметром d перемотується з однієї котушки на другу, осі яких паралельні і віддалені на l одна від одної. Одну з котушок повернуто на певний кут навколо осі дроту. Визначити крутний момент у дроті на відрізку між котушками, якщо після згаданого повороту перемотано ще з однієї котушки на другу відрізок дроту довжиною l . Дані: $l = 2$ м; $d = 2$ мм; $G = 8 \cdot 10^5$ МПа.
- 975.** В системі координат xu нарисувати фігуру, вершинами якої є точки: $A(3,3)$, $B(8,4)$, $C(8,9)$, $D(5,11)$ і $E(2,7)$. Приймаючи координати в сантиметрах, обчислити для даної фігури: площу поверхні, статичні моменти відносно осей x і y , а також координати центра ваги.
- 976.** В системі координат xu нарисувати фігуру, обмежену точками: $A(2,3)$, $B(7,2)$, $C(9,5)$, $D(8,9)$, $E(3,8)$ і $F(4,6)$. Приймаючи координати в сантиметрах, обчислити для даної фігури моменти інерції I_x , I_y і I_{xy} .
- 977.** В системі координат xu нарисувати фігуру, вершинами якої є точки: $A(3,2)$, $B(8,3)$, $C(11,6)$, $D(10,9)$, $E(7,8)$, $F(6,11)$ і $G(2,7)$. Приймаючи координати в сантиметрах, визначити положення головних центральних осей фігури і значення головних моментів інерції відносно цих осей.
- 978.** Довести, що в плоскій кільцевій рамі без шарнірів, навантаженій сумою згинальних моментів $M_{зг}$ по контуру s , виконується умова $\oint_s M_{зг}(s) ds = 0$.
- 979.** Якою може бути величина q_0 розподіленого навантаження, яке діє на балку, показану на Рис. 846, якщо допустимий прогин в точці C становить $v_C = 1$ см? Дані: $l = 2$ м; $EI = 2 \cdot 10^7$ кНсм².

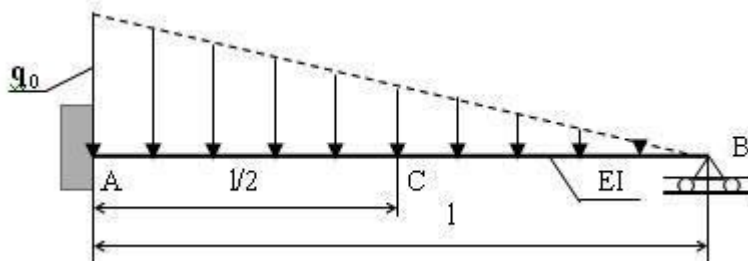


Рис. 846

- 980.** На кінці консольної балки розташовано без зазору і без попереднього навантаження балку AB на двох опорах як показано на Рис. 847. Обидві балки мають однакові розміри. Обчислити вертикальне переміщення точки C балки AB після прикладання в цій точці сили P . Дані: $P = 64$ кН; $l = 2$ м; $b = 5$ см; $h = 2b$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

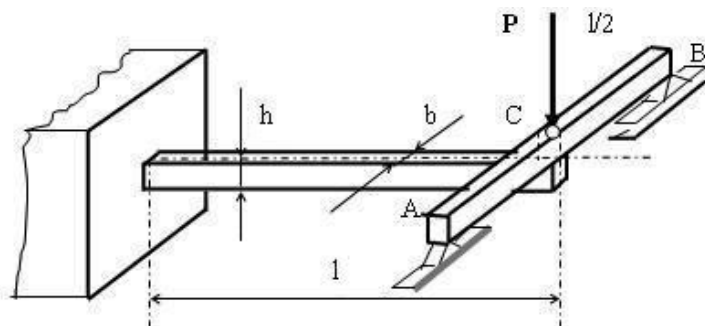


Рис. 847

981. Три консольні балки опираються кінцями на балку, яка вільно розташована на двох опорах A і B (Рис. 848) (вид зверху). У точках співдотику кінців консольних балок C, D і E з двохопорною балкою прикладені вертикально сили P (перпендикулярні до рисунку). Обчислити реакції опор балки AB. Дані: $P = 10 \text{ кН}$; $l = 3 \text{ м}$; $a = 2 \text{ м}$; $EI = 4 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$ (всі балки).

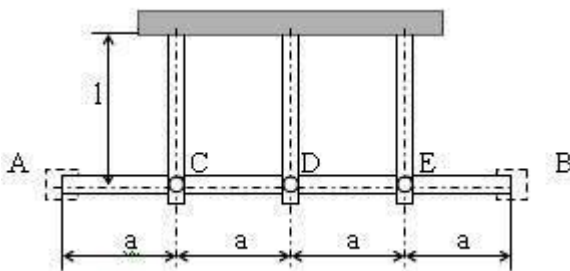


Рис. 848

982. Ресору, складену з трьох листів, навантажено силою P як показано на Рис. 849. Визначити зміну згинальних моментів і поперечних сил в окремих елементах. Дані: $P = 5 \text{ кН}$; $l = 20 \text{ см}$; $h = 1 \text{ см}$; $b = 8 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

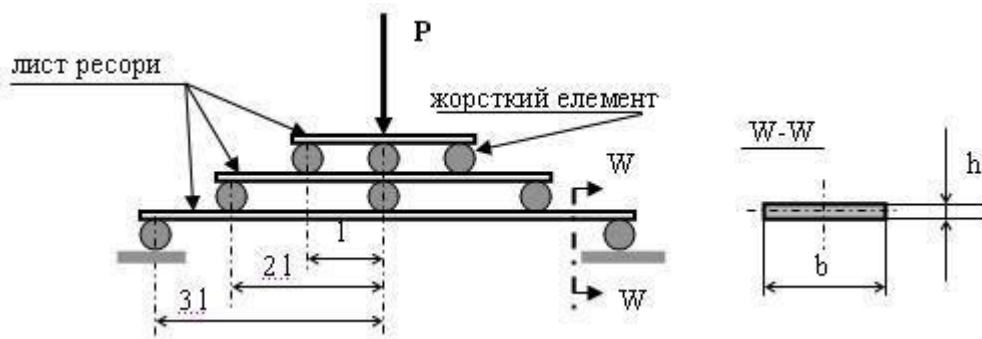


Рис. 849

983. Стержень з лінійно змінним діаметром знаходиться на двох опорах і навантажений посередині згинальним моментом M як показано на Рис. 850. Розрахувати кути повороту поперечних перерізів на опорах. Дані: $M = 16 \text{ кНм}$; $l = 2 \text{ м}$; $D = 12 \text{ см}$; $d = 6 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

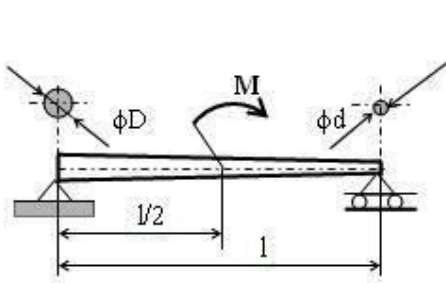


Рис. 850

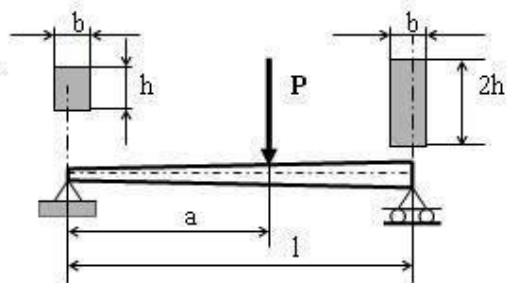


Рис. 851

- 984.** Балка з лінійно змінною висотою і прямокутним поперечним перерізом знаходиться на двох опорах (Рис. 851). На якій віддалі a від лівої опори потрібно прикласти силу P , щоб кути повороту поперечних перерізів на опорах були однакові за величиною. Розрахувати значення цих кутів. Дані: $P = 10$ кН; $l = 1,8$ м; $b = 5$ см; $h = 6$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

- 985.** Застосовуючи графічний метод, побудувати графік лінії прогину для балки за даними завдання № 983. Визначити величину стріли прогину.

- 986.** Застосовуючи графічний метод, визначити лінію прогину консольної балки з лінійною зміною діаметру (Рис. 852). Розрахувати величину стріли прогину. Дані: $P = 10$ кН; $l = 1,2$ м; $D = 8$ см; $d = 5$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

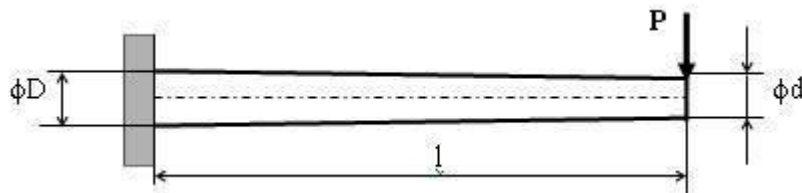


Рис. 852

- 987.** Обчислити вертикальне переміщення точки A рами закріпленої і навантаженої як показано на Рис. 853. Дані: $P = 4$ кН; $R = 50$ см; $l = 2R$; $EI = 2 \cdot 10^6$ кНсм².

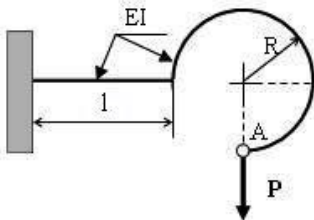


Рис. 853

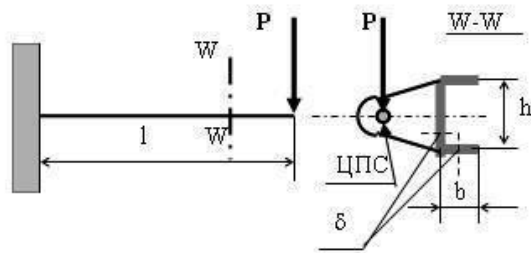


Рис. 854

- 988.** Обчислити максимальні нормальні і дотичні напруження у місці закріплення консольної балки, зображеної на Рис. 854, навантаженої силою P , прикладеною у центрі поперечних сил (ЦПС) перерізу. Дані: $P = 10$ кН; $l = 160$ см; $\delta = 4$ мм; $b = 8\delta$; $h = 20\delta$.

989. Рама (Рис. 855), виконана із стержнів кругового перерізу діаметром d , обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо точки O . Розрахувати максимальні еквівалентні напруження згідно енергетичної теорії міцності, які виникають в рамі, а також зміну відстані між точками A і B . Дані: $l = 2$ м; $d = 2$ см; $n = 300$ об./хв; $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

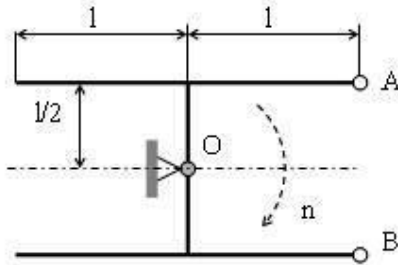


Рис. 855

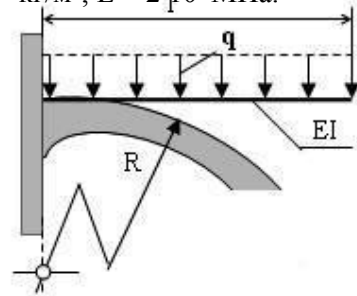


Рис. 856

990. Консольна балка, навантажена як показано на Рис. 856, згинаючись, стикається з жорсткою гладкою основою радіуса R . Розрахувати стрілу прогину балки. Дані: $q = 8$ кН/м; $l = 2$ м; $R = 2l = 4$ м; $EI = 4 \cdot 10^6$ кНсм².

991. Тонка металева стрічка довжиною l та жорсткістю на згин EI вигнута внаслідок стискання силою P аж до зіткнення кінців (Рис. 857). Обчислити кінцеві значення сил P , а також записати наближене рівняння зігнутої стрічки. Дані: $l = 1,2$ м; $EI = 5 \cdot 10^5$ Нмм².

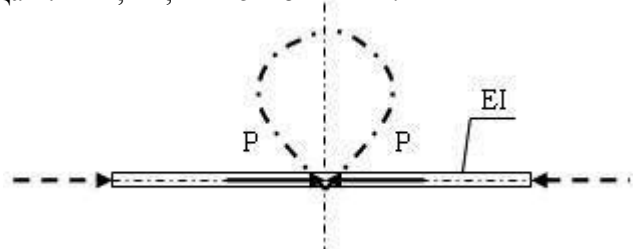


Рис. 857

992. Стрічка довжиною l , рівною обводу гладкого вала, обгортає його і з'єднана в точці A (Рис. 858). Визначити наближений розподіл тиску між стрічкою і валом, а також мінімальну величину сил P , необхідних для скріплення стрічки. Дані: $r = 80$ мм; $h = 1$ мм; $EI = 6 \cdot 10^5$ Нмм².

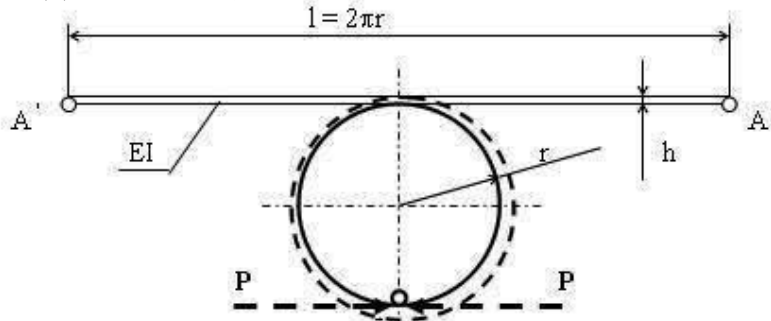


Рис. 858

993. Вита пружина, прикріплена до основи, стискається силою P як показано на Рис. 859. Встановити критичне значення сили P , при якій пружина втратить рівновагу. Дані: $H = 200$ мм; $D = 50$ мм; $d = 8$ мм; $n = 12$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; при обчисленні стійкості пружини замінити її моделлю стержня із

зведеним моментом інерції перерізу $I_z = \frac{Hd^4}{32Dn(2+\mu)}$.

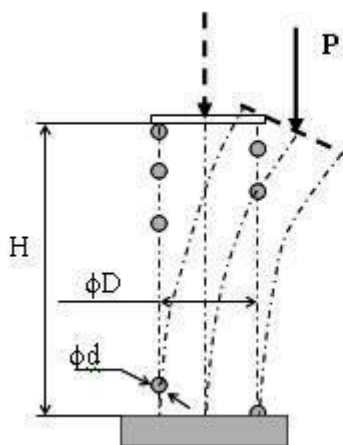


Рис. 859

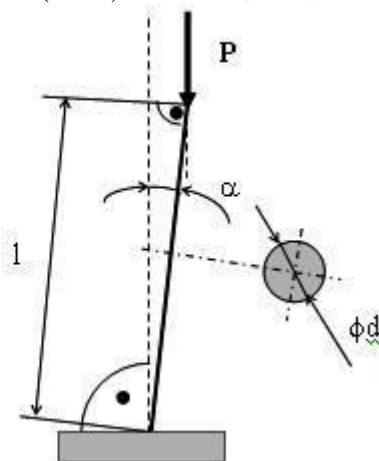


Рис. 860

994. Стержень діаметром d і довжиною l , що утворює з вертикаллю перед навантаженням кут α , навантажено вертикальною силою P (Рис. 860). Визначити найбільші і найменші нормальні напруження в поперечному перерізі. Дані: $P = 4$ кН; $l = 10$ м; $d = 8$ см; $\alpha = 5^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

995. Колона, складена з двох швелерів № 20, стискається силами P і Q , як показано на Рис. 861. Визначити екстремальні значення нормальних напружень в поперечному перерізі колони. Дані: $P = 120$ кН; $Q = 80$ кН; $a = 400$ мм; $e_1 = 150$ мм; $e_2 = 500$ мм.

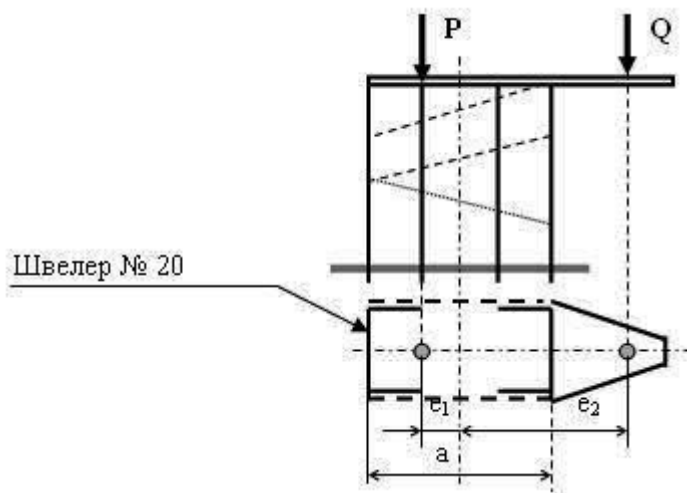


Рис. 861

996. Підібрати функцію напружень $\varphi(x, y)$ для щита, показаного на Рис. 862, так щоб він працював найбільш наближено як балка на двох опорах з розподіленим навантаженням. Визначити лінію прогину "балки".

Прийняти: $u(l/2, h/2) = 0$; $v(l/2, h/2) = 0$; $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0} = 0$.

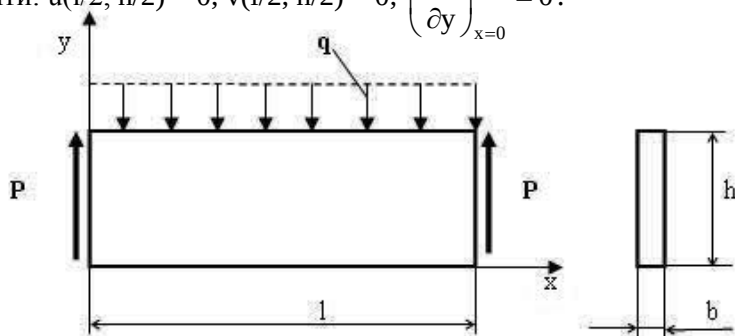


Рис. 862

997. Коротка консольна балка навантажена як показано на Рис. 863. Записати рівняння і зобразити лінію ізохром, що проходить через точку С. Дані: $P = 240$ кН; $b = 4$ см; $h = 3b = 12$ см; $l = 2h = 24$ см.

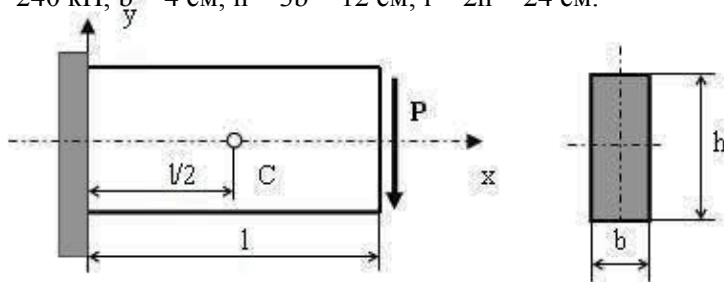


Рис. 863

998. Стержнева система з 5 стержнів однакових розмірів навантажена і закріплена як показано на Рис. 864. Застосовуючи метод скінчених елементів, обчислити сили в стержнях, реакції опор і переміщення вузлів. Дані: $P = 80$ кН; $l = 1$ м; $F = 4$ см² – площа поперечного перерізу стержнів; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

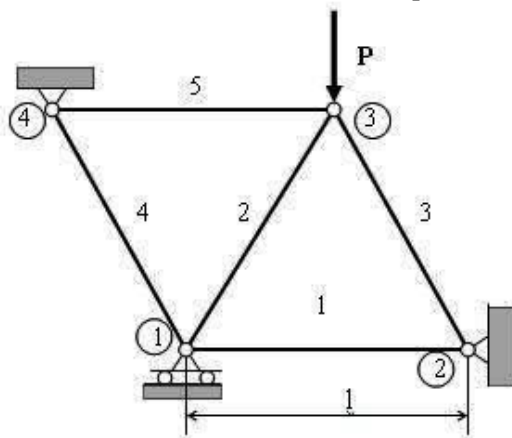


Рис. 864

999. Для пластини, що знаходиться в рівновазі під дією прикладеного навантаження (Рис. 865), встановити розподіл напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} . Дані: $q = 2 \text{ кН/м}$; $a = 2c = 24 \text{ см}$; $b = 20 \text{ см}$; $d = 8 \text{ см}$; $\delta = 1 \text{ см}$.

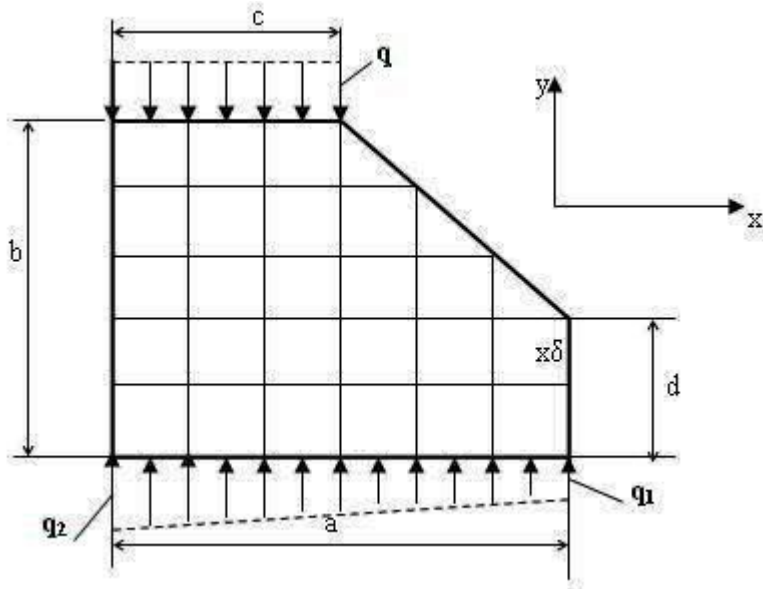


Рис. 865

1000. Встановити розподіл напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} у навантаженій пластині, показаній на Рис. 866. Дані: $q_0 = 0,5 \text{ кН/см}$; $b = 24 \text{ см}$; $h = 21 \text{ см}$; $a = 9 \text{ см}$; $\delta = 1 \text{ см}$.

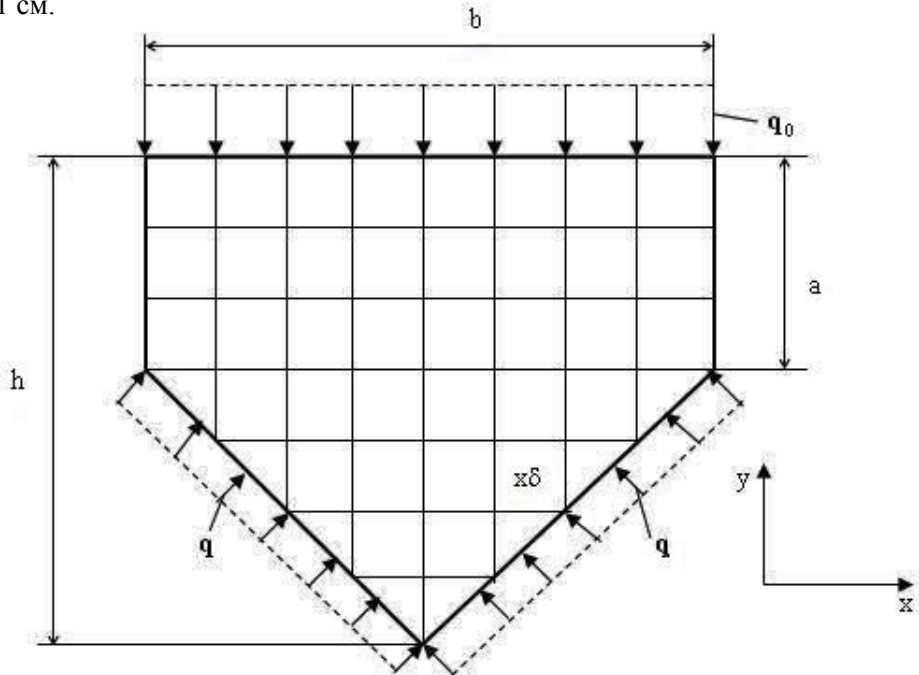


Рис. 866

The diagram shows a rectangular plate with a grid. The horizontal dimensions are labeled a and b , and the vertical dimensions are labeled c and d . A coordinate system with x and y axes is shown in the upper right. The plate is subjected to a uniform load q_0 on its top edge and a load q on its bottom edge. A load $x\delta$ is also indicated on the bottom edge. The grid consists of 4 horizontal and 4 vertical lines, creating a 5x5 grid of squares.

336