

Ćwiczenia i zadania ze wstępu do matematyki finansowej

Rada Naukowa Wydawnictwa Politechniki Lubelskiej

Przewodnicząca:

Agnieszka Rzepka

Dyrektor CINT:

Katarzyna Weinper

Przedstawiciele Dyscyplin Naukowych Politechniki Lubelskiej:

Marzenna Dudzińska

Małgorzata Franus

Arkadiusz Gola

Beata Kowalska

Grzegorz Komarzyniec

Jarosław Latański

Tomasz Lipecki

Zbigniew Łagodowski

Lucjan Pawłowski

Natalia Przesmycka

Halina Rarot

Magdalena Rzemieniak

Arkadiusz Syta

Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej:

Magdalena Chołojczyk

Karolina Famulska-Ciesielska

Katarzyna Pełka-Smętek

PODRĘCZNIKI POLITECHNIKI LUBELSKIEJ

Ćwiczenia i zadania ze wstępu do matematyki finansowej

Janusz J. Szuster



WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI
LUBELSKIEJ

Lublin 2026

Recenzenci:

dr hab. **Przemysław Matuła**, prof. UMCS (Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie)

dr **Krzysztof Stroiński**

Autor:

dr inż. **Janusz J. Szuster**, prof uczelni, ORCID: 0000-0002-0313-3410

Politechnika Lubelska – ROR: <https://ror.org/024zjzd49>

Redaktor prowadzący: **Magdalena Chołojczyk**

Pierwsza korekta: **Filip Szałasek**

Druga korekta: **Magdalena Chołojczyk**

Skład, łamanie i tagowanie LaTeX: **Janusz J. Szuster**

Zdjęcie na okładce zostało wygenerowane za pomocą sztucznej inteligencji.

Jeśli nie wskazano źródła ilustracji, stanowi ona opracowanie własne autorów.

Publikacja wydana za zgodą **Rektora Politechniki Lubelskiej**

ISBN: 978-83-7947-646-6 (wersja drukowana)

ISBN: 978-83-7947-647-3 (wersja elektroniczna)

DOI: 10.35784/9788379476473

Wydawca: Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
www.wpl.pollub.pl
ul. Nadbystrzycka 36C, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59



WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI
LUBELSKIEJ

Książka udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowe (CC BY-SA 4.0)

Nakład: 50 egz.

Spis treści

Wstęp	11
1 Rachunek czasu w matematyce finansowej oraz akumulacja	15
1.1 Procesy akumulacji i dyskontowania	16
1.1.1 Akumulacja prosta	18
1.1.2 Przykłady	19
1.1.3 Zadania do samodzielnego rozwiązania	23
1.2 Akumulacja złożona	24
1.2.1 Przykłady	24
1.2.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania	37
1.3 Akumulacja ciągła	41
1.3.1 Ćwiczenia	43
1.3.2 Przykłady	45
1.3.3 Zadania do samodzielnego rozwiązania	57
1.4 Stopy procentowe nominalna i efektywna	59
1.4.1 Ćwiczenia	61
1.4.2 Przykłady	62
1.4.3 Zadania do samodzielnego rozwiązania	66
1.5 Inflacja, realna stopa zwrotu i RRSO	67
1.5.1 Ćwiczenia	68
1.5.2 Przykłady	68
1.5.3 Zadania do samodzielnego rozwiązania	70
2 Renty	73
2.1 Modele dyskretnie	73
2.2 Renta arytmetyczna i renta geometryczna	77
2.2.1 Renta arytmetyczna	78
2.2.2 Renta geometryczna	82
2.2.3 Ćwiczenia	84
2.2.4 Przykłady	86
2.2.5 Zadania do samodzielnego rozwiązania	96

2.3	Renty – modele ciągłe	98
2.3.1	Symbolika aktuarialna dla modeli ciągłych	99
2.3.2	Ćwiczenia	102
2.3.3	Przykłady	102
2.3.4	Zadania do samodzielnego rozwiązania	106
2.4	Dyskonto i dyskontowanie	108
2.4.1	Podstawowe definicje i własności	108
2.4.2	Ćwiczenia	110
2.4.3	Przykłady	111
2.4.4	Zadania do samodzielnego rozwiązania	122
2.5	Wewnętrzna stopa zwrotu <i>IRR</i> i <i>NPV</i>	125
2.5.1	Definicje	125
2.5.2	Istnienie i jednoznaczność <i>IRR</i>	127
2.5.3	Ćwiczenia	128
2.5.4	Przykłady	129
2.5.5	Zadania do samodzielnego rozwiązania	139
3	Plany spłaty długów	141
3.1	Metoda amortyzacji	141
3.1.1	Oznaczenia	141
3.1.2	Przykłady	142
3.1.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	148
3.2	Ciągła spłata długu	153
3.2.1	Przykłady	155
4	Obligacje	159
4.1	Podstawy teoretyczne	159
4.1.1	Premia i dyskonto	160
4.1.2	Wartości obligacji między płatnościami kuponu	161
4.1.3	Ćwiczenia	162
4.1.4	Przykłady	163
4.1.5	Zadania do samodzielnego rozwiązania	181
5	<i>Duration</i> i <i>convexity</i>	183
5.1	Niezbędne definicje i własności	183
5.1.1	Ćwiczenia	183
5.1.2	Przykłady	185
5.1.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania	190

6	Metody amortyzacji środków trwałych	193
6.1	Podstawy teoretyczne	193
6.1.1	Oznaczenia	194
6.1.2	Ćwiczenia	196
6.1.3	Przykłady	197
6.1.4	Zadania do samodzielnego rozwiązania	198
7	Odpowiedzi do zadań do samodzielnego rozwiązania	201
Ad 1.1.3.		201
Ad 1.2.2.		201
Ad 1.3.3.		202
Ad 1.4.3.		203
Ad 1.5.3.		203
Ad 2.2.5.		204
Ad 2.3.4.		204
Ad 2.4.4.		205
Ad 2.5.5.		206
Ad 3.1.3.		207
Ad 4.1.5.		208
Ad 5.1.3.		208
Ad 6.1.4.		209
	Bibliografia	211

Streszczenie: Podręcznik *Ćwiczenia i zadania ze wstępu do matematyki finansowej* jest adresowany do studentów kierunku matematyka Politechniki Lubelskiej, dla których wstęp do matematyki finansowej jest jednym z przedmiotów prowadzonych na pierwszym roku studiów. Zakres tematyczny podręcznika obejmuje procesy akumulacji, renty dyskretne oraz ciągłe, dyskonto i dyskontowanie, wewnętrzną stopę zwrotu, plany spłaty długów, obligacje, a także metody amortyzacji środków trwałych. Każdy z rozdziałów rozpoczyna się od wstępu teoretycznego, po którym zamieszczony jest zestaw pytań teoretycznych i nietrudnych zadań rachunkowych dotyczących przedstawionej teorii. Po nim następuje podrozdział zawierający przykładowe zadania wraz ze szczegółowymi rozwiązaniami. Kolejny i ostatni podrozdział stanowią zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Ostatni rozdział zawiera odpowiedzi do trudniejszych zadań.

Słowa kluczowe: stopa procentowa, stopa zwrotu, akumulacja, dyskontowanie, renta

Summary: *The Exercises and Problems in the Introduction to Financial Mathematics* textbook is addressed to students of the Mathematics programme at the Lublin University of Technology, for whom the “Introduction to Financial Mathematics” is one of the subjects taught in the first year of studies. The content of the textbook begins with accumulation processes and covers discrete and continuous annuities, discounting and discount rates, internal rate of return, loan repayment plans, bonds, and concludes with methods for the depreciation of fixed assets. Each chapter begins with a theoretical introduction, followed by a set of theoretical questions and straightforward calculation problems related to the presented theory. This is followed by a subchapter with illustrative problems and detailed solutions. The final subchapter contains problems designed for independent solving. The last chapter of the textbook provides answers to the more challenging problems.

Key words: rate of interest, accumulation, discounting, annuity

Wstęp

Przedmiot „wstęp do matematyki finansowej” występujący w programie kierunku matematyka prowadzonym w Politechnice Lubelskiej od piętnastu lat, jest jednym z przedmiotów zaliczanych do grupy przedmiotów praktycznych. Historycznie, czyli w początkowych latach istnienia tego kierunku, był on realizowany na piątym semestrze studiów pierwszego stopnia. Kolejne modyfikacje programów kształcenia związane ze zmianami natury prawnej i organizacyjnej spowodowały, że obecnie znajduje się na drugim roku studiów pierwszego stopnia. Ta techniczna informacja jest istotna z punktu widzenia zawartości książki. W praktyce zagadnienia związane z funkcją akumulacji ciągłej oraz powiązane z tą tematyką są realizowane w postaci okrojonej. Natomiast z punktu widzenia wiedzy i umiejętności absolwentów studiów drugiego stopnia, przedmiot ten jest, zgodnie z nazwą, wprowadzeniem do matematyki finansowej. Jego kontynuacją jest przedmiot „wstęp do inżynierii finansowej”, wyposażający absolwentów w znacznie bardziej rozległą wiedzę i umiejętności.

Układ podręcznika został pomyślany w taki sposób, by wyeksponować na początku rozdziału elementy wiedzy niezbędnej do sprawnego rozwiązywania zadań i ćwiczeń, które w dalszych częściach książki traktowane są jako umiejętności oczywiste. Zdecydowałem, aby proponowane w podręczniku zadania poprzedzić niezbędnym wstępem teoretycznym. Następny podrozdział w każdym przypadku zawiera może nie tyle wzorcowe, ile przykładowe zadania rozwiązane krok po kroku z wyeksponowaniem aspektu teoretycznego odpowiedzi. Każdy z rozdziałów zawiera podrozdział złożony z ćwiczeń lub pytań natury teoretycznej, ważnych dla rozumienia mechanizmów występujących w matematyce finansowej.

Zatrzymajmy się chwilę nad doбором zadań, w tym występujących w podręczniku zadań do samodzielnego rozwiązania. Prezentowany Państwu zestaw składa się z zadań pochodzących z różnych źródeł, a niektóre z nich są mojego autorstwa. Celem zestawu jest omówienie zagadnień analizowanych w ramach wykładu ze wstępu do matematyki finansowej. Zadania tu zebrane były już testowane przez studentów na ćwiczeniach,

kolokwiach i egzaminach końcowych z tego przedmiotu, a więc mają już własną historię. Część spośród nich to zadania, które występowały na egzaminach aktuarialnych z matematyki finansowej organizowanych przez Komisję Nadzoru Finansowego (KNF) dla kandydatów na aktuariuszy. Rokrocznie kolekcja zadań jest wzbogacana o nowe pozycje, a więc zestaw ma charakter rozwojowy. W praktyce dydaktycznej od początku istnienia kierunku matematyka została przyjęta zasada, według której rdzeniem ćwiczeń audytoryjnych mają być zadania, pochodzące z zestawów egzaminów aktuarialnych, przeprowadzanych przez KNF, dla kandydatów na aktuariuszy. Powody tej decyzji są dwa. Pierwszy z nich to fakt, że matematyka finansowa jest relatywnie nowym przedmiotem wykładowym na kierunkach matematycznych, nie dysponuje więc rozległą bazą literaturową, a drugi to uznanie, że egzaminy aktuarialne wyznaczają poziom wiedzy oczekiwanej z tego przedmiotu przez KNF. Zadania z egzaminów aktuarialnych z zakresu matematyki finansowej, podobnie jak z pozostałych przedmiotów egzaminacyjnych, były i są dostępne na stronach internetowych KNF. Zakładamy bowiem, że przynajmniej część naszych absolwentów zdecyduje się przystąpić do egzaminów aktuarialnych.

Zachęcam Czytelników do samodzielnego rozwiązywania zadań z podręcznika, bo to właśnie w trakcie ich rozwiązywania poznajemy zarówno swoje mocne, jak i słabsze strony. Należy wziąć pod uwagę dwa elementy: tempo rozpoznania modelu oraz czas potrzebny do wykonania niezbędnych obliczeń.

Wszystkie zadania mają charakter praktyczny, odnoszą się bowiem do konkretnych danych, występujących w praktyce aktuarialnej. Wynikiem rozwiązywania zadania w warunkach egzaminu aktuarialnego jest liczba, a nie metoda czy też szczegóły teoretyczne. Doradzam jednak, by w warunkach domowych Państwa rozwiązania nie były zbyt lapidarne i by poszczególne etapy rozwiązań były wzbogacane argumentacją teoretyczną. Tylko takie postępowanie pozwala na wzmocnienie wiedzy teoretycznej i uzyskanie efektu „pewnej ręki” w starciu z problemem.

Chcę bardzo podziękować wszystkim studentom, którzy wzięli czynny udział w akcjach rozwiązywania zadań. Nazwiska tych studentów umieszczono przy rozwiązaniach zadań w wersji elektronicznej. Rozwiązania te zostały rozpowszechnione w formie plików pdf. Za aktywność w rozwiązywaniu zadań chcę szczególnie podziękować: Martynie Kalince, Karolinie Bartkowicz oraz Karolowi Warmińskiemu.

Dla porządku pragnę poinformować, że zadania pochodzące z egzaminów aktuarialnych zostały opatrzone numerem zadania i datą egzaminu, z którego pochodzą (np. [Z3. EA 03.12.07]). Na wykorzystanie ich uzyskałem zgodę firmy MS Products Michał Stańczuk, która publikuje je na stronie msproduct.pl. W podręczniku wykorzystane są także zadania z innych źródeł, a ich pochodzenie zostało wskazane w bibliografii. Zadania, którym nie towarzyszą odsyłacze, są albo mojego autorstwa, albo też powstały jako modyfikacje zadań znanych z literatury.

Mówiąc o zadaniach, warto poruszyć problem precyzji wyników. Rezultaty rachunków związanych z rozwiązywaniem zadania zależą od klasy używanego kalkulatora, proszę więc przygotować się na drobne, indywidualne rozbieżności wśród wyników uzyskiwanych przez różne osoby. Ponadto, zadania pochodzące z egzaminów aktuarialnych zostały przeze mnie zmodyfikowane i zamiast wersji z wyborem wyniku mamy do czynienia z jednym możliwym wynikiem przybliżonym.

Chcę poinformować Czytelników, że używam w skrypcie znaku □ jako symbolu zakończenia rozumowania dotyczącego rozwiązywanego zadania.

Na zakończenie chcę wyrazić moją głęboką wdzięczność Pani Profesor Ewie Łazuce i Panu Profesorowi Pawłowi Wlaziowi za okazaną mi życzliwość i serdeczną pomoc w redagowaniu podręcznika.

Janusz J. Szuster

1. Rachunek czasu w matematyce finansowej oraz akumulacja

Istotą wszystkich prezentowanych w matematyce finansowej modeli jest umiejętny, tzn. zgodny z rzeczywistością lub jej bliski, opis zachowania się pieniądza w czasie. Mówimy o pieniądzu ze względu na mierzalność i łatwy opis, jakkolwiek naszym celem jest ogólny opis akumulacji. Istnieje kilka sposobów liczenia czasu trwania inwestycji, a przez to również czasu akumulacji, które zostaną teraz szczegółowo omówione. Podkreślimy, że czas t będzie wyrażany w latach.

I. Dokładna liczba dni. Jeśli przez m_1 oznaczmy liczbę dni roku zwykłego, zaś przez m_2 liczbę dni roku przestępnego trwania inwestycji (akumulacji), to dokładna liczba dni (rozumiana jako część roku) wyniesie wtedy

$$t = \frac{m_1}{365} + \frac{m_2}{366}. \quad (1.1)$$

Obliczony na podstawie dokładnej liczby dni procent prosty nazywany jest *procentem dokładnym* (*exact implicit interest*).

II. Zasada równych miesięcy. Dla uproszczenia rachunku przyjmuje się w niej, że każdy z miesięcy roku ma 30 dni, a rok ma ich 360. Wówczas czas inwestycji t jest równy

$$t = \frac{m}{360}, \quad (1.2)$$

gdzie m oznacza pomnożoną przez 30 liczbę miesięcy kalendarzowych i powiększoną o liczbę dni rozpoczętego miesiąca. Skrót *DMY* oznacza dzień-miesiąc-rok.

Jeśli $D_1M_1Y_1$ oraz $D_2M_2Y_2$ są odpowiednio dniem-miesiącem-rokiem rozpoczęcia i zakończenia inwestycji, to

$$m = (D_2 - D_1) + 30 \cdot (M_2 - M_1) + 360 \cdot (Y_2 - Y_1). \quad (1.3)$$

Procent prosty obliczony zgodnie z tą zasadą nosi nazwę *procentu zwykłego (ordinary simple interest)*.

III. Reguła bankowa. Czas jest w niej obliczany według zasady

$$t = \frac{m}{360},$$

gdzie m oznacza dokładną liczbę dni [1, 4].

1.1. Procesy akumulacji i dyskontowania

Z doświadczenia wiemy, że wartości dóbr, usług, ale i technologii, ulegają zmianie, zmianie dokonującej się w czasie. Zjawisko to jest następstwem zmiany wartości kapitału w czasie.

Rozpatrzmy przedział lewostronnie domknięty $[0; +\infty)$, w którym będzie analizowana zmienna wartość kapitału bądź w chwilach $t_i \in [0; +\infty)$, gdzie $i \in I$ – przy I rozumianym jako zbiór indeksów, bądź w podprzedziałach domkniętych $[t_{i-1}; t_i]$, gdy $i \in I$, przy $I \subset \mathbb{N}$. Przyjmijmy, że $K = K(t_i)$ oznacza wartość kapitału w chwili t_i , $K(t_i + \Delta t_i)$ jego wartość zakumulowaną w przedziale $[t_i; t_i + \Delta t_i]$, zaś różnica $K(t_i + \Delta t_i) - K(t_i)$ oznacza odsetki od kapitału. Proces dojścia kapitału od kwoty $K_0 = K(t_0)$ w chwili t_0 do kwoty $K(t_1)$ w chwili t_1 nazywamy jego *akumulacją*, natomiast matematyczny model tego procesu – *funkcją akumulacji*. Formalnie przez *funkcję akumulacji* rozumiemy każdą funkcję $A: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, gdzie $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, będącą funkcją czasu t , taką że

- (i) $A(0) = 1$;
- (ii) A jest rosnąca;
- (iii) jeśli odsetki narastają w sposób ciągły, to funkcja A jest także funkcją ciągłą.

Wyróżniamy trzy rodzaje funkcji akumulacji: funkcję akumulacji prostej A_s (indeks dolny s pochodzi od angielskiego słowa *simple*), funkcję

akumulacji złożonej A_c (indeks c od ang. słowa *composed*) oraz funkcję akumulacji ciągłej A_{ct} (ct od ang. *continuous*).

Podstawowym pojęciem dla procesu akumulacji jest okres bazowy, utożsamiany zwykle z okresem jednego roku. Na ogół liczba okresów bazowych $t \in \mathbb{N}_+$ jest liczbą naturalną i wtedy, jeśli r jest stopą procentową, to zachodzą równości

$$\begin{aligned} \text{przypadek akumulacji prostej} & - A_s(t) = 1 + rt, \\ \text{przypadek akumulacji złożonej} & - A_c(t) = (1 + r)^t, \\ \text{przypadek akumulacji ciągłej} & - A_{ct} = e^{\delta t}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

gdzie $\delta = \ln(1 + r)$ nosi nazwę *intensywności oprocentowania* lub też *siły stopy procentowej*.

Wprowadzone pojęcie funkcji akumulacji ma na celu uporządkowanie znaczenia pojęcia oprocentowania. Oprocentowania rozumianego intuicyjnie jako proces przyrostu nominalnej kwoty kapitału w procesie utraty wartości pieniądza w czasie. Oprocentowanie proste daje się modelować za pomocą ciągu arytmetycznego, zaś oprocentowanie złożone – za pomocą ciągu geometrycznego. Oprocentowanie ciągłe, będące granicznym przypadkiem oprocentowania złożonego, modelują natomiast ciągi typu Eulera. Ciągi, a ściślej wymienione ich rodzaje, występują w odpowiednich dla oprocentowania funkcjach akumulacji. Uwzględniając rolę funkcji akumulacji, mamy, że wartość przyszła kapitału FV , to znaczy jego wartość w chwili końcowej inwestycji wynosi

$$FV = K(T) = K \cdot A(T) = K(0) \cdot A(T).$$

W przedziale $[0; T]$ określamy nową funkcję $D : [0; T] \rightarrow [0; +\infty)$, zwaną *funkcją dyskontowania* i określoną równością

$$D(T) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{A(T)} \quad \text{czyli} \quad A(t) \cdot D(t) = 1. \quad (1.5)$$

Obie funkcje, tak A jak i D , przyjmują wartości niemianowane, będąc funkcjami argumentu $t \in [0; T]$. Fakt ten uniemożliwia traktowanie funkcji D jako funkcji odwrotnej do A w sensie algebraicznym. Warto też podkreślić, że o ile A jest funkcją rosnącą, o tyle D jest funkcją malejącą

na $[0; +\infty)$. Z tego powodu

$$PV = K(0) = K(T) \cdot D(T) = FV \cdot D(T).$$

W sytuacji, gdy funkcja D – opisująca dyskontowanie, czyli uaktualniającą (urealniającą) wartość kapitału – nie jest stała w czasie, a zatem, gdy wartość funkcji D jest zależna od czasu t , to *czynnik dyskontujący* (ang. *discount factor*) oznaczamy symbolem $DF(t)$ przy $t \in [0; T]$.

Nazwa „dyskonto” historycznie oznacza opłatę pobraną z góry za korzystanie z cudzych pieniędzy, natomiast *stopa dyskonta w chwili t* to stosunek zysku (nazywanego wówczas dyskontem) do końcowej wielkości kapitału, a zatem

$$D(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{K(t) - K(0)}{K(t)}.$$

Posługując się intuicją fizyczną, jest to *chwilowa stopa dyskonta*. W skali okresu bazowego (rozumianego jako rok), czyli *średnia stopa dyskonta w przedziale $[0; t] \subseteq [0; T]$* , jest równa

$$\widehat{D}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{K(t) - K(0)}{tK(t)},$$

gdzie t oznacza czas liczony w latach (okresach bazowych) [1, 4].

1.1.1. Akumulacja prosta

Główne fakty dotyczące procesu akumulacji prostej z odpowiadającą mu *funkcją akumulacji prostej* A_s . W konsekwencji funkcję *dyskonta prostego* postaci opisują warunki

$$\begin{cases} A_s : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty), \\ A_s(t) = 1 + t \cdot r, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} D_s : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty), \\ D_s(t) = \frac{1}{1 + t \cdot r}, \end{cases} \quad (1.7)$$

gdzie r oznacza nominalną (roczną) stopę procentową [1, 4].

1.1.2. Przykłady

1. Dnia 20 czerwca 2001 roku pan Malinowski miał na swoim ROR¹ kwotę 2 500 j.m. W okresie od 1 lipca do 30 września tego roku dokonano dwóch wpłat na rachunek:

- (i) 3 250 j.m. – 12 lipca,
- (ii) 1 600 j.m. – 17 sierpnia,

oraz trzech wypłat:

- (i)' 4 200 j.m. – 23 lipca,
- (ii)' 1 900 j.m. – 5 sierpnia,
- (iii)' 300 j.m. – 18 września.

Bank dopisuje odsetki do rachunku na koniec każdego kwartału. Przy dodatnim saldzie nalicza odsetki według rocznej stopy 12%. W przypadku salda ujemnego – odsetki „karne” przy stopie zwiększonej o 50%. Czas oprocentowania jest obliczany jako dokładna liczba dni przy długości roku 365 dni. Obliczyć odsetki należne panu Malinowskiemu za trzeci kwartał.

Rozwiązanie. Rozpocznijmy od przyjęcia oznaczeń, uporządkowania ważnych terminów oraz określenia kwot przepływów wynikających z przeprowadzanych na rachunku operacji. A zatem

chwila	t_0	t_1	t_2	t_3
data	20.06.	01.07.	12.07.	23.07.
$CF(t_k)$	2 500	0,00	+3 250	-4 200

chwila	t_4	t_5	t_6	t_7
data	05.08.	17.08.	18.09.	01.10.
$CF(t_k)$	-1 900	1 600	-300	51,87

Podkreślmy, że podwójne linie pionowe || symbolizują zmianę kwartału. Kwota przepływu $CF(t_7)$ jest równa kwocie odsetek skapitalizowanych na zakończenie trzeciego kwartału.

¹ ROR – Rachunek Oszczędnościowo Rozliczeniowy.

Na wstępie ustalmy sposób akumulacji. Jako sposób rachuby czasu obowiązuje zasada dokładnej liczby dni. Dla k -tego okresu między operacjami niech m oznacza dokładną liczbę jego dni. Wiemy, że odsetki od depozytu są oprocentowane w skali roku w wysokości $i_1 = 0,12$ (czyli 12%), a od debetu $i_2 = 0,18$ (czyli 18%) – w stosunku do stanu konta. Podkreślimy też, że zgodnie z treścią polecenia w przypadku oprocentowania prostego, odsetki są dopisywane (kapitalizowane) na koniec kwartału. Rozumiemy to tak, że chwilą, w której są one dopisywane, jest godzina 0:00. Jeśli oznaczymy przez $K(t_{k-1})$ stan konta w chwili t_{k-1} dla przedziału $[t_{k-1}; t_k)$ przy $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, to kwota odsetek w chwili t_k wyniesie

$$I_k = I(t_k) = \frac{m}{365} \cdot i_1 \cdot K(t_{k-1})$$

lub

$$I_k = I(t_k) = \frac{m}{365} \cdot i_2 \cdot K(t_{k-1}),$$

odpowiednio w przypadku salda dodatniego oraz debetu. Stan konta będzie wówczas równy

$$K(t_k) = K(t_{k-1}) + CF(t_k),$$

gdzie $CF(t_k)$ jest przepływem wynikającym z kwoty operacji.

W ten sposób uzyskujemy następujące wyniki:

$$I(t_1) = \left(\frac{10}{365} \cdot 0,12 \right) \cdot 2\,500 = 8,22;$$

$$K(t_1) = 2\,500 + 8,22 = 2\,508,22;$$

$$I(t_2) = \left(\frac{11}{365} \cdot 0,12 \right) \cdot 2\,508,22 = 9,07;$$

$$K(t_2) = 2\,508,22 + 3\,250 = 5\,758,22;$$

$$I(t_3) = \left(\frac{11}{365} \cdot 0,12 \right) \cdot 5\,758,22 = 20,82;$$

$$K(t_3) = 5\,758,22 - 4\,200 = 1\,558,22;$$

$$I(t_4) = \left(\frac{13}{365} \cdot 0,12 \right) \cdot 1\,558,22 = 6,66;$$

$$K(t_4) = 1\,558,22 - 1\,900 = -341,78;$$

$$I(t_5) = \left(\frac{12}{365} \cdot 0,18 \right) \cdot (-341,78) = -2,02;$$

$$K(t_5) = -341,78 + 1\,600 = 1\,258,22;$$

$$I(t_6) = \left(\frac{32}{365} \cdot 0,12 \right) \cdot 1\,258,22 = 13,24;$$

$$K(t_6) = 1\,258,22 - 300 = 958,22;$$

$$I(t_7) = \left(\frac{13}{365} \cdot 0,12 \right) \cdot 958,22 = 4,10;$$

$$K(t_7) = 958,22 + 51,87 = 1\,010,09.$$

Odsetki należne za trzeci kwartał wynoszą $\sum_{k=2}^7 I(t_k) = 51,87$. $\square$

2. Pożyczka w wysokości 1 200 j.m. zostanie spłacona jednorazowo po upływie czterech miesięcy wraz z odsetkami składanymi, obliczonymi przy miesięcznej stopie procentowej 1,3%. Wyznaczyć kwotę potrzebną do spłaty tej pożyczki.

Rozwiązanie. Ponieważ znana jest miesięczna stopa procentowa, a oprocentowanie jest składane, to kwota potrzebna do spłaty pożyczki wyniesie:

$$K = (1,013)^4 \cdot 1\,200 \text{ j.m.} \approx 1\,263,63.$$

Warto podkreślić, że jest to spłata jednorazowa. $\square$

3. Rozpatrzmy rachunek bankowy o następujących warunkach:

- oprocentowanie wynosi 4,5% w skali roku;
- właściciel może zaciągnąć kredyt odnawialny (debet) do wysokości 3 000 j.m.;
- oprocentowanie kredytu wynosi 18% w skali roku;
- rachunek czasu jest oparty na równych miesiącach, z których każdy ma 30 dni.

Obliczyć odsetki należne właścicielowi rachunku za drugi kwartał.

Rozwiązanie. Tak jak w poprzednim zadaniu, również i teraz ustalamy oznaczenia, daty, przepływy. Mamy

chwila	t_1	t_2	t_3
data	01.04.	12.04.	20.04.
$CF(t_k)$	+3 000	-5 000	+1 000

t_4	t_5	t_6	t_7
25.04.	15.05.	20.05.	01.07.
+2 000	+3 000	-6 000	-41,38

$$I(t_1) = 0,00;$$

$$K(t_1) = 3\,000 + 0 = 3\,000;$$

$$I(t_2) = \left(\frac{11}{360} \cdot 0,045 \right) \cdot 3\,000 = 4,12;$$

$$K(t_2) = 3\,000 - 5\,000 = -2\,000;$$

$$I(t_3) = \left(\frac{8}{360} \cdot 0,180 \right) \cdot (-2\,000) = -8,00;$$

$$K(t_3) = -2\,000 + 1\,000 = -1\,000;$$

$$I(t_4) = \left(\frac{5}{360} \cdot 0,180 \right) \cdot (-1\,000) = -2,50;$$

$$K(t_4) = -1\,000 + 2\,000 = 1\,000;$$

$$I(t_5) = \left(\frac{20}{360} \cdot 0,045 \right) \cdot 1\,000 = 2,50;$$

$$K(t_5) = 1\,000 + 3\,000 = 4\,000;$$

$$I(t_6) = \left(\frac{5}{360} \cdot 0,045 \right) \cdot 4\,000 = 2,50;$$

$$K(t_6) = 4\,000 - 6\,000 = -2\,000;$$

$$I(t_7) = \left(\frac{40}{360} \cdot 0,180 \right) \cdot (-2\,000) = -40,00;$$

$$K(t_7) = -2\,000 - 41,38 = -2\,041,38.$$

$$\text{Stąd } CF(t_7) = \sum_{k=2}^7 CF(t_k) = -41,38.$$

□

1.1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Rozpatrzmy rachunek bankowy o następującej historii:

- od dnia 1 stycznia 2001 roku w banku obowiązywała stopa oprocentowania środków na rachunkach w wysokości 12% w stosunku rocznym;
- stan początkowy rachunku na dzień 1 stycznia 2001 roku wynosił 800 j.m.;
- w dniu 26 stycznia 2001 roku wpłynęła na rachunek kwota 2 200 j.m.;
- w dniu 10 lutego 2001 roku wypłacono kwotę 1 100 j.m.;
- w dniu 28 lutego 2001 roku zmieniono oprocentowanie rachunków bankowych z 12% na 9% w stosunku rocznym;
- w dniu 13 marca 2001 wpłynęła kwota 1 300 j.m.;
- w dniu 31 marca 2001 roku wypłacono całą kwotę będącą na rachunku i rachunek zlikwidowano.

Obliczyć odsetki należne właścicielowi rachunku za pierwszy kwartał 2001 roku.

2. Rozpatrzmy rachunek bankowy o następujących warunkach:

- oprocentowanie rachunku wynosi 4,5% w stosunku rocznym;
- właściciel może zaciągnąć kredyt odnawialny (debet) do wysokości 3 000 j.m.;
- oprocentowanie kredytu wynosi 18% w stosunku rocznym;
- rachunek czasu oparty na równych miesiącach, z których każdy ma 30 dni.

Historia rachunku jest następująca:

- na początku trzeciego kwartału 2002 roku stan konta wynosił 3 000 j.m.;
- w dniu 12.04 nastąpiła wypłata 5 000 j.m.;

- w dniu 20.04 wpłynęło 1 000 j.m.;
- w dniu 25.04 wpłynęło 2 000 j.m.;
- w dniu 15.05 wpłynęło 3 000 j.m.;
- w dniu 20.05 nastąpiła wypłata 6 000 j.m.

Wyznaczyć odsetki należne posiadaczowi rachunku za drugi kwartał 2002 roku.

1.2. Akumulacja złożona

Powróćmy do wspomnianej wcześniej akumulacji złożonej oraz jej podstawy – funkcji akumulacji złożonej o wzorze

$$A_c(t) \stackrel{\text{df}}{=} (1+r)^t,$$

gdzie $t \in \mathbb{N}$, zaś $r \in \mathbb{R}_+$ roczną stopą oprocentowania. Dodajmy, że wartość funkcji akumulacji złożonej w przedstawionej postaci dotyczy przypadku, gdy czas jest wielokrotnością okresu bazowego, a więc jednego roku. Natomiast, gdy czas jest dodatnią liczbą rzeczywistą ($t \in \mathbb{R}_+$), to wartość funkcji akumulacji złożonej jest równa

$$A_c(t) = (1+r)^{[t]}(1+\{t\}r),$$

gdzie $[t]$ oraz $\{t\}$ oznaczają odpowiednio: część całkowitą (cechę) liczby rzeczywistej $t \in \mathbb{R}_+$ oraz jej część ułamkową (mantyse).

Funkcja akumulacji złożonej podlega ogólnym zasadom nałożonym na funkcje akumulacji. Poprzestaniemy więc na przedstawionych już informacjach [1, 4].

1.2.1. Przykłady

1. (i) Jaką wartość osiągnie kapitał $K = 1\,800$ j.m. po 4 latach oprocentowania rocznego przy stałej stopie procentowej $r = 6\%$?
- (ii) Jaka jest wartość odsetek naliczonych za poszczególne lata inwestowania?

- (iii) Przy jakiej stopie łączna wartość 4-letnich odsetek byłaby większa o 58 j.m.?

Rozwiązanie. Korzystając z faktów pochodzących z treści zadania, otrzymujemy:

- (i) $K(4) = 1\,800 \cdot (1 + 0,06)^4 = 2\,272,46$.
(ii) Wartość odsetek za poszczególne lata
 $O_1 = 108, \quad O_2 = 114,48, \quad O_3 = 121,35, \quad O_4 = 128,63$.
(iii) Przy nieznanej stopie procentowej dającej odsetki większe o 58 j.m., otrzymujemy $1\,800 \cdot (1 + i)^4 - 1\,800 = 530,58$, a stąd
 $i \simeq 0,0666999$. $\square$

2. Po ilu latach kapitał w wysokości 2 500 j.m. wygeneruje odsetki w wysokości 3 500 j.m. przy rocznej stopie równej 25% oraz kapitalizacji złożonej?

Rozwiązanie. Ponieważ

$$2\,500 \cdot (1 + 0,25)^n - 2\,500 = 3\,500,$$

to

$$2\,500 \cdot (1 + 0,25)^n = 6\,000$$

i dalej

$$(1,25)^n = \frac{6\,000}{2\,500} = 2,4,$$

więc

$$n \ln(1,25) = \ln(2,4),$$

co daje

$$n = \frac{\ln(2,4)}{\ln(1,25)} \simeq 3,9233 \approx 4.$$

Mówiąc ściśle będą to 3 lata i 11 miesięcy. $\square$

3. Ile lat należy lokować kapitał, aby wzrósł on co najmniej dwa i pół raza, ale nie więcej niż trzykrotnie, przy założeniu, że roczna stopa oprocentowania będzie równa 14%?

Rozwiązanie. Ponieważ w zadaniu mamy miarę względną wzrostu kapitału, to zainwestowana kwota nie ma znaczenia, znaczenie

mają jedynie stopa procentowa i krotność sumy zainwestowanej. Z tego powodu przyjmijmy dla wygody, że inwestujemy 1 j.m. Wtedy warunki zadania można wyrazić podwójną nierównością

$$2,5 \leq (1,14)^n < 3.$$

Logarytmując stronami przy podstawie e , uzyskujemy

$$\ln(2,5) \leq n \ln(1,14) < \ln(3).$$

Skoro $\ln 1,14 > 0$, to

$$\frac{\ln(2,5)}{\ln(1,14)} \leq n < \frac{\ln(3)}{\ln(1,14)},$$

co po wyliczeniu wartości logarytmów daje oszacowanie

$$7 \simeq 6,993077028 \leq n < 8,34544437.$$

Wyrażając odpowiedź w tradycyjnych jednostkach pomiaru czasu, okres lokowania powinien być w zakresie od około 7 lat do mniej niż 8 lat, 4 miesiące i 6 dni. $\square$

4. Obliczyć wartość odsetek składanych wygenerowanych w ciągu 3 lat, 3 miesięcy i 3 dni przez kapitał w wysokości 1 000 j.m. przy rocznym, efektywnym oprocentowaniu 24%. Bank podjął decyzję o naliczeniu odsetek prostych za niepełny rok. Jaka musiałaby być roczna stopa procentowa w ostatnim, niepełnym okresie, by ogólna kwota odsetek nie zmieniła się po podjęciu przez bank decyzji o naliczaniu odsetek prostych? Kwota ulokowana została 31.12.1996 roku.

Rozwiązanie. Obliczmy okres trwania inwestycji wyrażony w latach

$$n = 3 + \frac{31 + 28 + 31 + 3}{365} = 3,25.$$

Stosując model jednolitego oprocentowania składanego (wykładniczego), dostajemy:

$$K(3,25) = 1000(1 + 0,24)^{3,25} = 2011,97 \text{ j.m.,}$$

a odsetki wynoszą wówczas

$$I = K(3,25) - K = 2011,97 - 1000 = 1011,97 \text{ j.m.}$$

W przypadku, gdy za niepełny rok odsetki naliczane są w sposób prosty, sytuacja depozytariusza jest bardziej korzystna, ponieważ odsetki proste i składane są równe dopiero w przypadku jednego, pełnego okresu oprocentowania. W przedziale $(0, 1)$, wyrażającym czas w latach, odsetki proste są w każdej chwili większe od odsetek naliczanych w sposób złożony. Na tym odcinku prosta $l: y = x$ leży ponad każdą z parabol $P: y = x^\alpha$, gdy $\alpha > 1$. Dokładniej: z jednej strony $K_s(t) = K(1 + rt)$, a z drugiej $K_c(t) = K(1 + r)^t$.

W drugim wariancie, gdy bank nalicza odsetki proste za niepełny okres, lokata przyniesie depozytariuszowi wyższe odsetki. Obliczymy je zgodnie z zależnością:

$$I''(n; m) = K(1 + r)^n(1 + mr) - K,$$

gdzie n wyraża całkowitą liczbę lat trwania lokaty, zaś m będące ułamkiem właściwym – część okresu, w którym obowiązuje oprocentowanie proste.

W przypadku $n = 3$ i $m = 0,25$, dostajemy $I''(3,25) = 1021$, zatem odsetki rosną o 10 j.m.

Wyznamy teraz wysokość oprocentowania w niepełnym okresie, przy której kwoty odsetek obliczane obydwojema metodami byłyby równe. Mamy

$$K(1 + r)^{n+m} - K = K(1 + r)^n(1 + mr_1) - K,$$

a stąd

$$(1 + r)^{n+m} - K = (1 + r)^n(1 + mr_1) \iff (1 + r)^m = 1 + mr_1$$

i dalej

$$r_1 = \frac{1}{m} [(1 + r)^m - 1] = \frac{1}{0,25} [(1 + 0,24)^{0,25} - 1] = 22,1\%.$$

Oznacza to konieczność obniżenia oprocentowania w niepełnych okresach prawie o 2%. $\square$

5. Depozytariusz chciałby przez 6 kolejnych kwartałów odbierać kwotę 600 j.m. Jaką kwotę powinien dziś zdeponować w banku? Nominalna stopa procentowa wynosi 16% w stosunku rocznym.

Rozwiązanie. Popatrzmy na cały proces, jak na wartość obecną sześciu płatności. Mamy więc

$$PV = 600 \cdot v_1 + 600 \cdot v_2 + 600 \cdot v_3 + 600 \cdot v_4 + 600 \cdot v_5 + 600 \cdot v_6,$$

gdzie v_i są czynnikami dyskontującymi wypłat dokonywanych na koniec i -tego kwartału przy $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

W zadaniu nie została wyraźnie wskazana obowiązująca funkcja akumulacji, wskutek czego nie została także jednoznacznie określona metoda dyskontowania, należy zatem rozpatrzyć trzy przypadki:

1. akumulacji prostej w całym okresie trwania inwestycji;
2. akumulacji złożonej w tym samym okresie z kapitalizacją kwartalną;
3. akumulacji złożonej przy rocznym okresie kapitalizacji i kapitalizacją prostą w okresach krótszych niż rok.

Zatem po kolei:

Ad 1. Model kapitalizacji prostej.

W tym przypadku

$$v_1 = \frac{1}{1,04} \approx 0,9615, \quad v_2 = \frac{1}{1,08} \approx 0,9259,$$

$$v_3 = \frac{1}{1,12} \approx 0,8929, \quad v_4 = \frac{1}{1,16} \approx 0,8621,$$

$$v_5 = \frac{1}{1,20} \approx 0,8333, \quad v_6 = \frac{1}{1,24} \approx 0,8065.$$

$$\begin{aligned} PV &= 600 \cdot v_1 + 600 \cdot v_2 + 600 \cdot v_3 + 600 \cdot v_4 + 600 \cdot v_5 + 600 \cdot v_6 = \\ &= 600 \cdot 5,2822 \approx 3\,169,32. \end{aligned}$$

Ad 2. Model kapitalizacji złożonej, w cyklu rocznym.

Oznacza to w warunkach zadania, że gdy $r = 0,04$, to

$$v = \frac{1}{1,04} \approx 0,9615 = \text{const.},$$

zaś

$$PV = 600(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6) \approx 3\,144,86.$$

Ad 3. Model kapitalizacji złożonej z rocznym okresem bazowym oraz kapitalizacją prostą w okresach krótszych niż bazowy.

W takim przypadku w pierwszych czterech kwartałach obowiązują kapitalizacja i dyskontowanie proste, a po roku następuje kapitalizacja odsetek. Wtedy

$$v_1 = \frac{1}{1,04} \approx 0,9615; \quad v_2 = \frac{1}{1,08} \approx 0,9259,$$

$$v_3 = \frac{1}{1,12} \approx 0,8929; \quad v_4 = \frac{1}{1,16} \approx 0,8621,$$

$$v_5 = \frac{1}{1,16} \cdot \frac{1}{1,04} \approx 0,8289,$$

$$v_6 = \frac{1}{1,16} \cdot \frac{1}{1,08} \approx 0,7982,$$

$$\begin{aligned} PV &= 600 \cdot v_1 + 600 \cdot v_2 + 600 \cdot v_3 + 600 \cdot v_4 + 600 \cdot v_5 + 600 \cdot v_6 \approx \\ &\approx 600 \cdot 5,2695 = 3\,161,70. \end{aligned}$$

□

- 6.** Obliczyć wartość końcową kapitału $K = 1\,000$ j.m. oraz odsetki po dwóch latach, jeśli warunki oprocentowania składanego są określone przez nominalną stopę procentową 24% i okres kapitalizacji o długości:

1. rocznej;
2. półrocznej;
3. kwartalnej;
4. oprocentowania ciągłego.

Rozwiązanie. Przyjmując odpowiednie oznaczenia oraz wartości, mamy:

$$r^{(1)} = \frac{r_{nom}}{1} = 0,24; \quad r^{(2)} = \frac{r_{nom}}{2} = 0,12;$$

$$r^{(4)} = \frac{r_{nom}}{4} = 0,06; \quad r_{ct} = r_{nom} = 0,24.$$

Ad 1. Otrzymujemy $r = r^{(1)} = 0,24$, a także liczbę okresów kapitalizacji $m_1 = 2$, co daje w konsekwencji

$$K(2) = 1\,000(1 + 0,24)^2 = 1\,537,60 \text{ j.m.}$$

$$\text{oraz } I_2^{(2)} = K(2) - K(0) = 1\,537,60 - 1\,000 = 537,60 \text{ j.m.}$$

Ad 2. W takim przypadku kapitalizacja następuje co pół roku, otrzymujemy więc:

$$r^{(2)} = \frac{r_{nom}}{2} = \frac{0,24}{2} = 0,12,$$

$$\text{ponadto } m_2 = 2 \cdot 2.$$

Wówczas

$$K(4) = 1\,000(1 + 0,12)^4 = 1\,573,52;$$

$$\text{a ponadto } I_2^{(4)} = 573,52 \text{ j.m.}$$

$$\text{Ad 3. Przy kapitalizacji kwartalnej } r^{(4)} = \frac{r_{nom}}{4} = \frac{0,24}{4} = 0,06.$$

Poza tym $m_4 = 2 \cdot 4 = 8$, skutkiem czego jest

$$K(8) = 1\,000(1 + 0,06)^8 = 1\,593,85$$

$$\text{oraz } I_4^{(8)} = 593,85 \text{ j.m.}$$

Ad 4. Teraz $r_{ct} = 24\%$, co powoduje, że

$$K(2) = 1\,000e^{0,24 \cdot 2} = 1\,000e^{0,48} = 1\,616,07 \text{ j.m.,}$$

$$\text{stąd też } I_2^{(ct)} = 616,07.$$

□

7. Klient wpłacił na lokatę bankową 10 000 j.m. Oprocentowanie wynosi 7% w skali roku². Ponadto obowiązuje podatek od zysków kapitałowych wysokości 19%. Jaką kwotę otrzyma klient na końcu roku, jeśli

1. odsetki są kapitalizowane na końcu roku i podatek jest pobierany po roku?
2. odsetki są kapitalizowane co jeden miesiąc i podatek jest pobierany po roku?
3. odsetki są kapitalizowane co miesiąc i podatek jest pobierany co miesiąc?

Rozwiązanie. Mamy po kolei

Ad 1. Odsetki narosłe przez rok wyniosą

$$I_1 = r \cdot K = 0,07 \cdot 10\,000 = 700 \text{ j.m.}$$

Podatek jest naliczany od zysku, a więc od naliczonych odsetek, i wyniesie $p = 0,19 \cdot I_1 = 133 \text{ j.m.}$ Kwota wypłaty po zamknięciu lokaty rocznej będzie więc równa

$$10\,000 + 700 - 133 = 10\,567 \text{ j.m.}$$

Ad 2. W tym przypadku wartość przyszła kapitału, czyli kwota po zakończeniu akumulacji, wyniesie

$$K'(1) = 10\,000 \left(1 + \frac{0,07}{12}\right)^{12} = 10\,722,90 \text{ j.m.}$$

Zatem

$$I'_1 = K'(1) - K(0) = 722,90 \text{ j.m.}$$

i od tej kwoty naliczony zostanie podatek w kwocie wynoszącej $p' = 0,19 \cdot I'_1 = 137,35 \text{ j.m.}$, a wypłata będzie równa

$$10\,000 + 722,9 - 137,35 = 10\,585,55 \text{ j.m.}$$

² W literaturze używa się do oznaczenia oprocentowania w skali roku łacińskiego skrótu *p.a.* pochodzącego od słów: *per annum*.

Ad 3. Możemy się domyślać, że skoro w tym przypadku co miesiąc pobierany jest podatek, to podstawa akumulacji ulega przez to zmniejszeniu i z oczywistych powodów kwota końcowa powinna być mniejsza niż w poprzednim przypadku. Sprawdźmy to jednak rachunkowo.

Skoro każdego miesiąca z narosłej kwoty odsetek potrącanych jest 19% w formie podatku, to w efekcie oznacza to obniżenie stopy oprocentowania. Mamy bowiem:

$$r_p^{(12)} = \frac{0,07}{12} - 0,19 \cdot \frac{0,07}{12} = 0,81 \cdot \frac{0,07}{12}.$$

Wiedząc to, możemy natychmiast wyznaczyć kwotę wypłaty:

$$\begin{aligned} K''(1) &= 10\,000 \cdot \left(1 + r_p^{(12)}\right)^{12} = \\ &= 10\,000 \cdot \left(1 + 0,81 \cdot \frac{0,07}{12}\right)^{12} = 10\,581,97 \text{ j.m.} \end{aligned}$$

W istocie troska o „bieżący stan budżetu państwa” jest dla nas kosztowna. □

8. Inwestor chce umieścić pewną kwotę dolarów amerykańskich na lokacie na okres sześciu lat. Ma do wyboru dwie lokaty roczne w dwóch różnych bankach:

1. pierwszą z oprocentowaniem stałym 4% w skali roku;
2. drugą z oprocentowaniem zmiennym o stopie procentowej w kolejnych latach równej: 5%, 3%, 4%, 3%, 3%, 6% (a zatem wynoszącej średnio 4%) p.a.

Którą lokatę inwestor powinien wybrać?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $K = K(0)$ wymienioną, a nie określoną w zadaniu kwotę do zainwestowania.

Biorąc pod uwagę możliwość inwestowania w pierwszym banku, dostaniemy:

$$K'(6) = (1 + 0,04)^6 K = 1,265319 \cdot K.$$

W przypadku drugim funkcja akumulacji zmienia się co rok, ale oprocentowanie pozostaje złożone, otrzymujemy więc

$$K''(6) = (1 + 0,05)(1 + 0,04)(1 + 0,03)^3(1 + 0,06)K = 1,2648534 \cdot K.$$

Odpowiedź jest oczywista. Uzyskaliśmy ją w wyniku stosownych rachunków, jednak można ją było przewidzieć i bez tego, korzystając z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Jak wiadomo, zachodzi ona dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych i staje się ostra, gdy nie wszystkie uczestniczące w niej liczby x_i , dla $x_i \in \mathbb{R}$, są identyczne. Na mocy tej nierówności mamy

$$\begin{aligned} & \frac{(1+0,05) + (1+0,03) + (1+0,04) + (1+0,03) + (1+0,03) + (1+0,06)}{6} \geq \\ & \geq \sqrt[6]{(1+0,05) \cdot (1+0,03) \cdot (1+0,04) \cdot (1+0,03) \cdot (1+0,03) \cdot (1+0,06)}. \end{aligned}$$

Wskutek podniesienia stronami do potęgi szóstej otrzymujemy

$$(1 + 0,04)^6 \geq (1 + 0,05)(1 + 0,04)(1 + 0,03)^3(1 + 0,06).$$

Uogólnijmy problem. Rozpatrzmy przypadek dwóch lokat trwających przez n lat. Jak poprzednio, pierwsza z nich ma stałe oprocentowanie równe r , natomiast druga zmienne, wynoszące w każdym roku odpowiednio $r_1, r_2, \dots, r_n$, ale jednocześnie takie, że

$$\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n} = r.$$

Dla lokaty pierwszej otrzymujemy $K'(n) = K \cdot (1+r)^n$, dla drugiej zaś

$$K''(n) = K \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n).$$

Ponownie odwołując się do nierówności między średnimi, otrzymujemy

$$\frac{(1 + r_1) + (1 + r_2) + \dots + (1 + r_n)}{n} \geq \sqrt[n]{(1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_n)},$$

a następnie, po odpowiednim spotęgowaniu

$$\left(1 + \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}\right)^n \geq (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n).$$

Na tej podstawie ustaliliśmy, że dla inwestora bardziej rentowna okaże się inwestycja oparta o stałe oprocentowanie złożone, niż inwestycja oparta na oprocentowaniu złożonym i zmiennym, w którym średnie oprocentowanie jest równe oprocentowaniu stałemu. Rozumiemy, że obie te inwestycje mają taki sam czas trwania. $\square$

9. Fundacja stypendialna dysponuje kwotą 100 000 j.m. na cele statutowe, czyli fundowanie stypendiów. Fundacja ma zamiar wypłacać stypendia w wysokości 11 000 j.m. na koniec każdego roku. Posiadany kapitał fundacja lokuje przy 10% stopie efektywnej. Po ilu latach wyczerpie się fundusz stypendialny? Jak wysokie powinny być roczne wypłaty z funduszu stypendialnego, aby mógł on istnieć wiecznie?

Rozwiązanie. Na początku zapiszmy kilka informacji o stanie kapitału fundacji na końcu k -tego roku, gdzie dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ jest, że $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Mamy

$$\begin{aligned} K(0) &= 100\,000; \\ K(1) &= 100\,000 \cdot 1,1 - 11\,000 = 99\,000; \\ K(2) &= [100\,000 \cdot 1,1 - 11\,000] \cdot 1,1 - 11\,000 = 97\,900; \\ &\dots \end{aligned}$$

Sprytniej możemy to zapisać w postaci

$$\begin{aligned} K(0) &= 100\,000 \cdot 1,1^0; \\ K(1) &= 100\,000 \cdot 1,1^1 - 11\,000 \cdot 1,1^0; \\ K(2) &= 100\,000 \cdot 1,1^2 - 11\,000 \cdot 1,1^1 - 11\,000 \cdot 1,1^0; \\ &\dots \\ K(n) &= 100\,000 \cdot 1,1^n - 11\,000 \cdot \sum_{k=1}^n 1,1^{n-k}. \end{aligned}$$

Nas interesuje odpowiedź na pytanie, dla jakiego najmniejszego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność

$$K(n) < 0?$$

Zauważmy, że zależność na $K(n)$ wygodniej jest zapisać w równoważnej postaci

$$K(n) = 100\,000 \cdot 1,1^n - 11\,000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1,1^k.$$

Zatem $K(n) < 0$, co oznacza, że

$$100\,000 \cdot 1,1^n < 11\,000 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1,1^k$$

i dalej prowadzi do nierówności

$$100 \cdot 1,1^n < 11 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1,1^k.$$

Po przekształceniu dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{100}{11} &< \frac{1}{1,1^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1,1^k = \frac{1}{1,1^n} \cdot 1,1^0 \frac{1 - 1,1^n}{1 - 1,1} = \\ &= \frac{1}{1,1^n} \cdot \frac{1,1^n - 1}{0,1}. \end{aligned}$$

Po nietrudnych przekształceniach otrzymujemy równoważną nierówność

$$\frac{10}{11} < 1 - \frac{1}{1,1^n}$$

i dalej

$$\frac{1}{1,1^n} < \frac{1}{11} \iff 11 < (1,1)^n,$$

a logarytmując stronami, otrzymujemy

$$\ln 11 < n \ln 1,1 \iff \frac{\ln 11}{\ln 1,1} < n.$$

Po wykonaniu potrzebnych obliczeń dostajemy $25,15 < n$, co oznacza, że najmniejszą liczbą naturalną, dla której stan konta fundacji okaże się ujemny, jest 26, zatem fundusz wyczerpie się po 25 latach.

Odpowiedź na drugie pytanie opiera się na powszechnie znanej opinii, że nie należy wydawać więcej, niż się zarabia. Jeśli przez W oznaczymy roczną wysokość funduszu stypendialnego, to musi zachodzić warunek

$$100\,000 \cdot 1,1 - W \text{ j.m.} \geq 100\,000 \text{ j.m.}$$

co daje, że

$$W \leq 100\,000(1,1 - 1) = 10\,000 \text{ j.m.}$$

Zakładając brak innych kosztów, zarząd fundacji może przeznaczać na cele statutowe maksymalnie 10 000 j.m. i pod warunkiem, że oprocentowanie kapitału fundacji będzie wiecześnie wynosić 10%.

□

- 10.** W banku zdeponowano pewną kwotę kapitału w formie pięcioletniej lokaty. W ciągu pierwszych trzech lat kapitał był oprocentowany przy stopie 32% w skali roku, zaś przez następne dwa lata stopa oprocentowania wyniosła 30%. Jaką kwotę zdeponowano, jeśli po wygaśnięciu lokaty, czyli po pięciu latach, przy rocznej kapitalizacji odsetek kwota odsetek była równa 30 000 j.m.?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $K = K(0)$ zainwestowaną kwotę, a że wysokość odsetek jest różnicą między przyrostem wartości zainwestowanego kapitału, a jego początkową wysokością, otrzymujemy

$$K \cdot A_c(5) - K = 30\,000 \text{ j.m.},$$

gdzie ze względu na strukturę terminową stóp procentowych

$$r(t) = \begin{cases} 0,32, & \text{dla } t \in (0; 3], \\ 0,30, & \text{dla } t \in (3; 5], \end{cases}$$

dzięki czemu otrzymujemy $A_c(5) = (1,32)^3 \cdot (1,30)^2$, a zatem

$$K = \frac{30\,000}{(1,32)^3 \cdot (1,30)^2 - 1} \simeq 10\,391,60 \text{ j.m.}$$

1.2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wyznaczyć stopę procentową dla kapitału w kwocie 2 000 j.m., jeśli po dwóch latach przyniósł on 500 j.m. odsetek, przy założeniu rocznej kapitalizacji.
2. Obliczyć wartość końcową kapitału $K = 1\,000$ j.m. oraz odsetki po dwóch latach, jeśli warunki oprocentowania składanego są określone przez nominalną stopę procentową 24% i okres kapitalizacji o długości:
 1. rocznej;
 2. półrocznej;
 3. kwartalnej;
 4. miesięcznej.
3. Efektywna stopa procentowa jest równa $r_{ef} = 0,12$. Jaka jest nominalna stopa procentowa, jeśli stosowana jest kapitalizacja złożona z dołu:
 1. miesięcznie;
 2. kwartalnie;
 3. półrocznie?
4. Wyznaczyć tygodniową, miesięczną i kwartalną stopę oprocentowania prostego dla stopy nominalnej (rocznej) wynoszącej $r_{nom} = 0,16$.
5. Przez piętnaście lat na koniec roku dokonywane były wpłaty na rachunek oprocentowany według stopy efektywnej wynoszącej: 6% – przez początkową dekadę, i 4% – przez następne lata. Każda z pierwszych pięciu wpłat była równa 670 j.m., a każda z następnych dziesięciu 850 j.m. Jaka kwotę zgromadzono na koncie bankowym na koniec piętnastego roku?
6. Zwycięzcy telewizyjnego turnieju zaproponowano wybór jednej z nagród:
 1. 1 000 j.m. obecnie;

2. 1 700 j.m. po upływie trzech lat;
3. po 500 j.m. płatnych na koniec kolejnych trzech lat;
4. 300 j.m. płatnych obecnie i na koniec kolejnych trzech lat kwot 330 j.m., 360 j.m. i 390 j.m.

Którą z nagród powinien wybrać zwycięzca, jeżeli w ciągu najbliższych trzech lat prognozowana roczna stopa procentowa ma wynosić 18%? [2].

7. W Banku Serca Polski oprocentowanie wkładów oszczędnościowych podlegało zmianie trzy razy w ciągu roku. W pierwszym kwartale obowiązywała nominalna stopa procentowa w wysokości 15%, w drugim kwartale było to już 28%, a w drugim półroczu – 13%. Wyznaczyć wartość konta na koniec roku, na którym inwestor miał w dniu 1 stycznia 3 000 j.m. Jaka była przeciętna stopa oprocentowania rocznego dla tej inwestycji?
8. W dniu 1 lutego 1993 klient umieścił na lokacie terminowej w Banku Kresowym roku swoje oszczędności w kwocie 2 000 j.m. Wybrał proponowaną przez Bank dwuletnią lokatę o oprocentowaniu zmiennym z odsetkami naliczanymi w sposób prosty. Gdy wpłacał pieniądze, roczna stopa oprocentowania tej lokaty wynosiła 36%. W ciągu kolejnych miesięcy Bank zmieniał stopę, obniżając ją 1 maja 1993 roku do 34%, 1 stycznia 1994 do 30%, 1 lipca 1994 do 25% oraz 1 stycznia 1995 do 22%. Po upływie dwóch lat, 1 lutego 1995 roku, klient wycofał wpłaconą kwotę wraz z należnymi odsetkami. Bank Kresowy liczy dni w sposób dokładny i zakłada rok o długości 365 dni.
Obliczyć

1. jaką kwotę otrzymał klient po dwóch latach?
2. ile wyniosła przeciętna stopa procentowa?

9. Jako klient Bank of Western Texas Chuck Norris ulokował w nim 1 lutego 1993 roku swoje oszczędności w wysokości 50 000\$, na lokacie terminowej. Wybrał proponowaną przez Bank dwuletnią lokatę o oprocentowaniu zmiennym z odsetkami naliczanymi w sposób prosty. Gdy wpłacał pieniądze, roczna stopa oprocentowania tej lokaty wynosiła 36%. W ciągu kolejnych miesięcy Bank zmieniał

stopę, obniżając ją 1 maja 1993 roku do 34%, 1 stycznia 1994 do 30%, 1 lipca 1994 do 25% oraz 1 stycznia 1995 do 22%. Po upływie dwóch lat, 1 lutego 1995 roku, Chuck wycofał wpłaconą kwotę wraz z należnymi odsetkami. Bank of Western Texas liczy dni w sposób dokładny i stosuje rok o długości 365 dni.

1. Jaką kwotę otrzymał Chuck po dwóch latach?
 2. Ile wyniosła przeciętna stopa procentowa? [2].
- 10.** Rodzeństwo w wieku 8, 10 i 15 lat odziedziczyło w spadku kwotę 1 000 000 j.m. złożoną w banku, w którym kapitalizacja odsetek odbywa się raz w roku z dołu, a roczna stopa oprocentowania lokat jest stała i wynosi 5%. Wolą spadkodawcy było, by każdemu z dzieci w chwili ukończenia dwudziestego pierwszego roku życia bank wypłacił taką samą kwotę. Obliczyć sumy, jakie przypadły dzieciom w kwocie spadkowej w chwili uruchomienia procedury.
- 11.** Właściciel firmy budowlanej otrzymuje zapytania ofertowe dotyczące realizacji różnych inwestycji. Przedsiębiorca ma możliwość wyboru jednego spośród trzech wariantów realizacji projektów w okresie najbliższych trzech lat, w których uzyska następujące przychody:
1. 190 000 j.m. dziś, 140 000 j.m. za rok i 200 000 j.m. po trzech latach;
 2. 240 000 j.m. dziś i 260 000 j.m. za dwa lata;
 3. 180 000 j.m. dziś i 360 000 j.m. po trzech latach.

Który wariant powinien wybrać przedsiębiorca, jeżeli roczne oprocentowanie złożone lokat wynosi obecnie 7% i można przewidywać, że nie zmieni się w najbliższych latach? Należy przyjąć, że sytuacja ta ma miejsce w państwie, w którym nie ma podatku od zysków kapitałowych.

- 12.** Zakon Szpitala Najświętszej Marii Panny Domu Niemieckiego w Jerozolimie, w którym Ulrich von Jungingen pełnił funkcję Wielkiego Mistrza, zdając sobie sprawę z nieuchronności wojny z Polską, odkładał talary w banku biskupim w Trewirze. W dniu 28 lutego

1408 roku Ulrich miał na swoim rachunku bankowym 11 000 j.m. (talarów). W okresie od 1 marca do 31 marca dokonał czterech wpłat na konto: 3 200 talarów – 7 marca, 2 000 talarów – 19 marca, 3 000 talarów – 23 marca i 2 300 talarów – 28 marca oraz jednej wypłaty: 16 000 talarów – 1 marca. Bankier dopisuje odsetki na koniec każdego miesiąca i w przypadku dodatniego salda są one równe 7% według stopy nominalnej, a przy saldzie ujemnym obciąża klienta odsetkami przy stopie równej 15%. Czas liczony jest jako dokładna liczba dni w roku liczącym 365 dni. Obliczyć odsetki należne Ulrichowi von Jungingen za marzec 1408 roku – wiedząc, że w Trewirze obowiązywał 17% podatek od zysków kapitałowych.

- 13.** Piotr zdecydował, że przez dwa lata, począwszy od 1 stycznia 1996 roku, do 31 grudnia 1997 roku będzie odkładał na lokacie co kwartał po 3 000 j.m. Zebrał oferty czterech banków, dotyczące warunków oprocentowania lokat:

1. Bank *A* oferuje comiesięczną kapitalizację przy nominalnej stopie rocznej $r_A = 0,12$.
2. Bank *B* proponuje klientom oprocentowanie złożone przy podokresowej stopie równoważnej rocznej efektywnej stopie procentowej $r_B = 0,165$.
3. Bank *C* oferuje oprocentowanie składane przy kwartalnej stopie procentowej proporcjonalnej do nominalnej rocznej stopy procentowej wynoszącej $r_C = 0,165$.
4. Bank *D* kapitalizuje odsetki na koniec roku, a od wpłat uiszczanych w ciągu roku nalicza odsetki proste, opierając się w obu przypadkach na stopie procentowej $r_D = 0,17$.

Którą z ofert powinien wybrać Piotr, aby uzyskać możliwie największą kwotę na koniec trwania inwestycji?

- 14.** Bank stosuje roczne nominalne stopy procentowe dla lokat pieniężnych według zasady:

1. lokaty kwartalne – 15%;
2. lokaty półroczne – 17%;
3. lokaty roczne – 18%.

Odsetki dopisywane są do kapitału po deklarowanym okresie trwania lokaty. Niepodjęcie kapitału wraz z upływem ustalonego wcześniej okresu jest równoważne jego wpłacie na następny taki sam okres. Wybrać najkorzystniejszy wariant ulokowania kwoty 5 000 j.m. na dwa lata. Jakie straty poniósłby właściciel kapitału przy wyborze najgorszego wariantu?

1.3. Akumulacja ciągła

Analizując procesy akumulacji, zakładaliśmy dotąd, że wzorcowym okresem akumulacji – okresem bazowym – jest rok, przy czym zmienna t wyrażała wtedy liczbę lat. W sytuacji, gdy interesuje nas okres krótszy niż rok i jest on $\frac{1}{m}$ -tą tego okresu, przy $m \in \mathbb{N}_+$, to zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami dotyczącymi akumulacji złożonej akumulacja ciągła – oznaczmy ją przez A_{ct} – będzie funkcją graniczną dla akumulacji złożonej, przy liczbie okresów kapitalizacji m dążącej do nieskończoności. Rozpocznijmy od modelu dyskretnego, dotyczącego kapitalizacji złożonej. W takim przypadku

$$A_c(t) \stackrel{\text{df}}{=} \left[\left(1 + \frac{r}{m} \right)^m \right]^t,$$

a przy niewielkiej modyfikacji ostatniego zapisu mamy, że

$$A_c(t) = \left[\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{r}} \right]^{rt}.$$

Odwołując się do własności ciągu Eulera e (historycznie w literaturze pierwszym jego oznaczeniem było $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}_+}$), ciągu o wyrazie ogólnym

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

otrzymujemy

$$A_{ct}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} A_c(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{m} \right)^{\frac{m}{r}} \right]^{rt} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} A_c(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}} \right)^{\frac{m}{r}} \right]^{rt} = e^{rt}.$$

Przyjmując $\delta = \ln(1+r)$, dostajemy $A_{ct}(t) = e^{\delta t}$. W ten sposób, przy założeniu niezmienności w czasie stopy zwrotu (czyli w przypadku szczególnym stopy procentowej), otrzymujemy model ciągły akumulacji. W literaturze wielkość δ nazywana jest *intensywnością oprocentowania*. Jeśli δ okaże się być funkcją czasu, będziemy o niej mówić jako o *chwilowej stopie procentowej*. Funkcja dyskonta ma w ciągłych procesach akumulacji postać

$$\begin{cases} D_{ct} : [0; +\infty), \\ D_{ct}(t) = e^{-rt}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Jeśli w przedziale czasu $[t; t+h]$ wielkość płatności w chwili t wynosi $\varrho(t)$, to przy odpowiednio małym $h > 0$ płatność w przedziale czasu $[t; t+h]$ wynosi $h \cdot \varrho(t)$. Funkcję ϱ argumentu t nazywamy *gęstością płatności*. Przy $h \rightarrow 0^+$ płatność przypadająca na chwilę t jest równa $\varrho(t)dt$. Intuicyjnie gęstość płatności można rozumieć jako prędkość zmian strumienia kapitału w bardzo krótkich odcinkach czasu. Przy gęstości strumienia płatności równej $\varrho(t)$ w chwili t nominalna wielkość płatności w przedziale $[0; T]$ jest równa

$$M(T) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^T \varrho(t) dt. \quad (1.9)$$

Z powodu zmiany wartości pieniądza w czasie można wyznaczyć wartość obecną strumienia płatności w postaci

$$PV = \int_0^T \varrho(t) v(t) dt, \quad (1.10)$$

pod warunkiem, że ostatnia całka jest zbieżna. Ponadto

$$PV = PV(0) = \int_0^T \varrho(t) \frac{1}{A(t)} dt.$$

Natomiast u nas wartość przyszła $FV(T)$ ciągłego strumienia wpłat jest równa [1, 4]

$$FV(T) = \int_0^T \varrho(t)A(0;T)dt.$$

1.3.1. Ćwiczenia

1. Niech dana będzie funkcja $\begin{cases} A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ A(t) = t^2 + 2t + 3. \end{cases}$
 1. Pokazać, że A jest funkcją akumulacji.
 2. Znaleźć funkcję oprocentowania kapitału jednostkowego α odpowiadającą funkcji akumulacji A . Dla $n \in \mathbb{N}_+$ wyznaczyć I_n .
2. Wyprowadzić formułę na liczbę rat n potrzebnych do osiągnięcia wartości końcowej FV renty, gdy ustalona rata X jest znana, a stopa procentowa w całym okresie życia renty jest stała i równa r .
3. Wyprowadzić zależność określającą czas trwania lokaty w kwocie $K = K(0)$ potrzebny do jej podwojenia, jeśli stopa nominalna procentowa jest stała i równa r .
4. Znaleźć moment (punkt), w którym różnica między funkcją akumulacji oprocentowania prostego, a funkcją akumulacji oprocentowania złożonego (przy tej samej stopie bazowej) jest największa.
5. Czy z równoważności kapitałów o nominalnej wartości K_1 w chwili t_1 oraz K_2 w chwili t_2 wynika równoważność kapitałów o nominalnej wartości λK_1 oraz λK_2 w momentach odpowiednio t_1 oraz t_2 przy $\lambda \in \mathbb{R}_+$? Odpowiedź uzasadnić.
6. Czy z równoważności kapitałów o nominalnej wartości K_1 w chwili t_1 oraz K_2 w chwili t_2 wynika równoważność kapitałów o nominalnej wartości $K_1 + \alpha$ oraz $K_2 + \alpha$ w momentach odpowiednio t_1 oraz t_2 przy $\alpha \in \mathbb{R}_+$? Odpowiedź uzasadnić.
7. Niech A będzie funkcją akumulacji z okresowym dopisywaniem procentu, zgodną oraz taką, że $r = A(1) - 1$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

1. funkcja A jest funkcją oprocentowania prostego z okresową kapitalizacją odsetek;
2. dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja akumulacji A spełnia następujące równanie rekurencyjne

$$A(n) = A(n-1) + r;$$

3. kwota odsetek funkcji akumulacji A jest stała we wszystkich okresach bazowych, czyli:

$$A(n) - A(n-1) = A(1) - A(0);$$

4. funkcja akumulacji A_1 spełnia zależność:

$$A_1(t_1 + t_2) = A_1(t_1)A_1(t_2)$$

dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, zaś funkcja akumulacji A_2 spełnia zależność

$$A(t_1 + t_2) = A(t_1) + A(t_2) - 1$$

dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Ponadto $A_1(10) = A_2(10) = 15$.

Wyznaczyć $\frac{\delta_1(5)}{\delta_2(5)}$, gdzie δ_1 i δ_2 są funkcjami intensywności oprocentowania odpowiednio funkcji A_1 i A_2 . Podać przybliżoną wartość.

8. Sformułować definicję renty arytmetycznej oraz renty geometrycznej.
9. Przedstawić *metodę zaburzeń* i z jej pomocą wyznaczyć formułę na wartość obecną renty arytmetycznej, gdy w okresie życia takiej renty obowiązuje stała stopa procentowa i , a stały związany z nią czynnik dyskontujący jest równy $v = \frac{1}{1+r}$.
10. Czy odsetki narosłe w przypadku akumulacji prostej podlegają kapitalizacji?
11. Sformułować definicję dyskonta oraz omówić powody, dla których różni się ono od odsetek.

12. Czym jest stopa dyskontowa (dyskonta handlowego) i czym się różni od stopy procentowej?
13. Czy w modelu akumulacji prostej stosunek odsetek do wartości początkowej jest rosnącą funkcją liniową czasu?
14. Przyjmijmy, że I_j oznacza wartość odsetek za j -ty rok, jeżeli $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ generowanych przez kapitał K przy kapitalizacji rocznej i stopie $r > 0$. Wykazać, że

$$\sum_{j=1}^n I_j = K[(1+r)^n - 1].$$

15. Jaka jest moc zbioru rozwiązań równania $A_s(t) = A_c(t)$?
16. Sformułować zasadę równoważności stóp procentowych.
17. Na czym polega reguła bankowa obliczania czasu, jaki upłynął między dwiema datami?

1.3.2. Przykłady

1. Stopa procentowa w procesie kapitalizacji półrocznej wynosi $r^{(2)} = 10\%$. Wyznaczyć równoważną jej stopę oprocentowania ciągłego.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że δ oznacza intensywność oprocentowania przy akumulacji ciągłej, podczas gdy $\frac{r^{(n)}}{n} = r$ oznacza stopę w jednym podokresie, gdzie n jest liczbą podokresów w okresie bazowym. Z zasady równoważności stóp procentowych wynika wówczas, że

$$Ke^{\delta} = K \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,$$

a w konsekwencji:

$$e^{\delta} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,$$

lub równoważnie po zlogarytmowaniu:

$$\delta = \ln \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{r}{n}\right),$$

a także

$$r = n \left(e^{\frac{\delta}{n}} - 1 \right).$$

W tym konkretnym przypadku mamy:

$$\delta = 2 \ln \left(1 + \frac{0,1}{2} \right) = 0,09758 \approx 9,76\%.$$

Zatem stopą akumulacji ciągłej równoważną stopie $r^{(2)} = 10\%$ jest stopa $\delta = 9,76\%$. $\square$

2. Bank udziela pożyczki przy rocznej stopie procentowej z kapitalizacją ciągłą i odsetkami płaconymi co kwartał. Wyznaczyć wysokość odsetek kwartalnych.

Rozwiązanie. Dla wygody wyznaczmy kwartalną stopę procentową, bo w oparciu o nią będzie nam łatwo wyliczyć kwotę odsetek. Z zależności

$$r = n \left(e^{\frac{\delta}{n}} - 1 \right),$$

otrzymujemy

$$r = 4 \left(e^{\frac{0,08}{4}} - 1 \right) = 0,0808 \approx 8,08\%.$$

Dlatego też kwartalna stopa procentowa wynosi

$$\frac{0,0808}{4} = 0,0202 = 2,02\%.$$

Jeśli zatem kapitał na początku kwartału wynosił K , to wysokość odsetek będzie równa $0,0202 \cdot K$. $\square$

3. Patrycjusz postanowił zainwestować kapitał K na dwa lata. Bank przedstawił mu dwie oferty:
1. w ofercie *I* zagwarantowano efektywną roczną stopę zwrotu 15% w każdym roku trwania inwestycji;
 2. w ofercie *II* zagwarantowano, że intensywność oprocentowania (*force of interest*) δ będzie wynosić $\delta(t) = \frac{1}{10}t$ w ciągu całego okresu trwania inwestycji.

Patrycjusz zdecydował, że kwotę αK zainwestuje, korzystając z oferty *I*, oraz kwotę $(1 - \alpha)K$, korzystając z oferty *II*. Po dwóch latach inwestor posiadał kwotę $K(2) = 200\,000$ j.m. Wiadomo poza tym, że gdyby inwestor zainwestował kwotę $2\alpha K$, korzystając z oferty *I*, oraz kwotę $(1 - 2\alpha)K$, korzystając z oferty *II*, to po dwóch latach miałby $205\,000$ j.m. Jaka była kwota K zainwestowana przez Patrycjusza?

Rozwiązanie. Dla porządku zauważmy, że

$$e^{\int_0^2 \frac{1}{10} s ds} = e^{\left[\frac{1}{20} t^2\right]_0^2} = e^{0,2}.$$

Teraz wykorzystajmy dane z zadania. Dostajemy na ich podstawie układ równań

$$\begin{cases} \alpha K (1 + 0,15)^2 + (1 - \alpha) K e^{0,2} &= 200\,000, \\ 2\alpha K (1 + 0,15)^2 + (1 - 2\alpha) K e^{0,2} &= 205\,000. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze z równań przez 2 i wykonując działania, dostajemy równoważny układ równań

$$\begin{cases} 2\alpha K (1,15)^2 + 2K e^{0,2} - 2\alpha K e^{0,2} &= 400\,000, \\ 2\alpha K (1,15)^2 + K e^{0,2} - 2\alpha K e^{0,2} &= 205\,000. \end{cases}$$

Po odjęciu od pierwszego równania równania drugiego otrzymujemy:

$$K e^{0,2} = 195\,000,$$

$$\text{a stąd już mamy } K = \frac{195\,000}{e^{0,2}} \approx 160\,000. \quad \square$$

4. Przypuśćmy, że bank oferuje lokatę z oprocentowaniem rocznym 4%. Obliczymy kwotę końcową tej inwestycji po roku przy założeniu, że zdeponowaliśmy $1\,000$ j.m., a kapitalizacja jest:

1. roczna;
2. półroczna;
3. kwartalna;
4. miesięczna;
5. tygodniowa;

6. dzienna;
7. godzinowa;
8. minutowa;
9. sekundowa.

Rozwiązanie. Niech n oznacza liczbę okresów kapitalizacji występujących w okresie bazowym, podczas gdy $K_n(1)$ kwotę wypłaty po roku trwania inwestycji.

n	$K_n(1)$
1	1 040,000
2	1 040,400
4	1 040,604
12	1 040,742
52	1 040,795
365	1 040,808
8 760	1 040,811
525 600	1 040,811
31 536 000	1 040,811

Od przejścia na godzinowe oprocentowanie przy zainwestowanej kwocie równej 1 000 j.m. wynik końcowy nie różni się już do trzeciego miejsca po przecinku. Oznacza to, że ciąg wyników jest zbieżny – i to dość szybko – do liczby 1 040,811, tak też powinno być w $+\infty$. Tymczasem, przyjmując $\delta = r = 0,04$ dostajemy $K_\infty(1) = 1\,000 \cdot e^{0,04} \simeq 1\,040,811$. $\square$

5. Rozważmy funkcję akumulacji $A_1(t) = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$ z intensywnością oprocentowania $\delta_1(t)$ oraz funkcję akumulacji A_2 , dla której intensywność oprocentowania $\delta_2(t)$ w chwili t wyraża się zależnością

$$\delta_2(t) = \frac{2\alpha + 2t + 1}{(\alpha + t)(\alpha + t + 1)}.$$

Wyznaczyć efektywną stopę procentową pomiędzy chwilami n oraz $n+1$ dla funkcji akumulacji dla $A_2(t)$, gdy

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t).$$

Rozwiązanie. Mamy

$$A_1(t) = e^{\int_0^t \delta_1(s) ds} = (1+t)^{-\frac{1}{t}}.$$

Z tego powodu

$$\int_0^t \delta_1(s) ds = \ln(1+t)^{-\frac{1}{t}},$$

a w konsekwencji

$$\delta_1(t) = \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{t} \ln(1+t) \right] = \frac{1}{t^2} \ln(1+t) - \frac{1}{t(1+t)}.$$

Przechodząc do granicy, dostajemy

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t^2} \ln(1+t) - \frac{1}{t(t+1)} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} - 0 \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t(t+1)} = 0. \end{aligned}$$

Dla danych z zadania mamy zatem $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0$. W rezultacie otrzymujemy równość

$$\delta_2(t) = \frac{2t+1}{t(t+1)}.$$

Skoro

$$A_2(t) = e^{\int_0^t \delta_2(s) ds},$$

to

$$\begin{aligned} A_2(t) &= e^{\int_0^t \frac{2s+1}{s(s+1)} ds} = \left| \frac{2s+1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right| = \\ &= e^{\int_0^t \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right) ds} = e^{[\ln s + \ln(s+1)]_0^t} = \\ &= e^{\ln[s(s+1)]}_0^t = e^{\ln[t(t+1)]} = t(t+1). \end{aligned}$$

Dostajemy stąd, że

$$\frac{A_2(n+1)}{A_2(n)} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}.$$

Zgodnie z poleceniem mamy wyznaczyć efektywną stopę procentową pomiędzy chwilami n i $n+1$ dla funkcji akumulacji dla $A_2(t)$

$$\begin{aligned} r_{ef}(n; n+1) &= \frac{A_2(n+1) - A_2(n)}{A_2(n)} = \\ &= \frac{A_2(n+1)}{A_2(n)} - 1 = \frac{n+2}{n} - 1 = \frac{2}{n}. \end{aligned} \quad \square$$

6. Funkcje akumulacji A_1 i A_2 dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ spełniają układ równości:

$$\begin{cases} A_1(t_1 + t_2) = A_1(t_1)A_1(t_2), \\ A_2(t_1 + t_2) = A_2(t_1) + A_2(t_2) - 1. \end{cases}$$

Wiadomo ponadto, że $A_1(10) = A_2(10) = 15$.

Wiedząc, że δ_1 i δ_2 są funkcjami intensywności oprocentowania odpowiednio dla funkcji akumulacji A_1 i A_2 , wyznaczyć przybliżoną wartość ilorazu $\frac{\delta_1(5)}{\delta_2(5)}$.

Rozwiązanie. Warunek zgodności dla funkcji akumulacji A_1 (funkcji akumulacji złożonej) prowadzi do obserwacji

$$A_1(n) = A_1(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{-składników}}) = [A_1(1)]^n = A_1^n(1).$$

Wynika stąd, że $A_1(10) = A_1^{10}(1) = 15$, co prowadzi do wyniku

$$A_1(1) = \sqrt[10]{15}.$$

W rezultacie

$$A_1(n) = (15^{0,1})^n = 15^{0,1 \cdot n}$$

i dalej

$$A_1(t) = 15^{0,1 \cdot t}.$$

Z kolei dla funkcji akumulacji A_2 – funkcji akumulacji prostej – warunek zgodności daje nam zależność

$$\begin{aligned} A_2(n) &= A_2(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n-\text{składników}}) = \\ &= \underbrace{(A_2(1) + A_2(1) + \dots + A_2(1))}_{n-\text{składnik}} - (n-1) = nA_2(1) - (n-1). \end{aligned}$$

Stąd dla $n = 10$ mamy

$$A_2(10) = 10A_2(1) - 9 = 15$$

i dalej

$$A_2(1) = 2,4.$$

Dla $n = t$ jest

$$A_2(t) = A_2(1) \cdot t - (t-1) = 2,4t - (t-1) = 1,4t + 1.$$

Poza tym

$$A_1(t) = e^{\int_0^t \delta_1(s) ds} \quad \text{oraz} \quad A_2(t) = e^{\int_0^t \delta_2(s) ds}$$

i dalej po zlogarytmowaniu:

$$\ln A_1(t) = \int_0^t \delta_1(s) ds \quad \text{oraz} \quad \ln A_2(t) = \int_0^t \delta_2(s) ds.$$

Różniczkując, otrzymujemy:

$$\delta_1(t) = \frac{A_1'(t)}{A_1(t)} \quad \text{oraz} \quad \delta_2(t) = \frac{A_2'(t)}{A_2(t)},$$

a zatem

$$\delta_1(t) = \frac{15^{0,1t} \cdot 0,1 \cdot \ln 15}{15^{0,1t}} = 0,1 \cdot \ln 15$$

oraz

$$\delta_2(t) = \frac{1,4}{1,4t + 1}.$$

Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1(5)}{\delta_2(5)} &= \frac{0,1 \cdot \ln 15}{\frac{1,4}{1,4 \cdot 5 + 1}} = \frac{0,1 \cdot \ln 15}{\frac{1,4}{8}} = \frac{0,8 \cdot \ln 15}{1,4} = \\ &= \frac{4}{7} \ln 15 \approx 1,5474573 \approx 1,55. \quad \square\end{aligned}$$

7. Funkcja intensywności oprocentowania w chwili t_2 dla kwoty zainwestowanej w chwili t_1 przy $0 \leq t_1 \leq t_2$ przyjmuje wartość $\delta(t_1; t) = \frac{1}{1 + t_1 + t}$. Funkcja $A(t_1, t_2)$ jest funkcją akumulacji w chwili t_2 kwoty zainwestowanej w chwili t_1 . Wyznaczyć różnicę $A(1; 4) - [A(1; 2) \cdot A(2; 4)]$ – (różnica między akumulacją bez reinwestycji i z reinwestycją).

Rozwiązanie. W tym zadaniu rzecz sprowadza się do wyznaczenia wartości funkcji akumulacji w oparciu o daną funkcję intensywności oprocentowania. Z treści zadania mamy

$$\delta(t_1; t) = \frac{1}{1 + t_1 + t},$$

stąd

$$A(1; 4) = e^{\int_1^4 \frac{1}{1+1+t} dt} = e^{\int_1^4 \frac{1}{2+t} dt} = e^{\ln(2+t)|_1^4} = e^{\ln 6 - \ln 3} = e^{\ln 2} = 2.$$

Podobnie

$$A(1; 2) = e^{\int_1^2 \frac{1}{1+1+t} dt} = e^{\int_1^2 \frac{1}{2+t} dt} = e^{\ln(2+t)|_1^2} = e^{\ln 4 - \ln 3} = e^{\ln \frac{4}{3}} = \frac{4}{3},$$

a także

$$A(2; 4) = e^{\int_2^4 \frac{1}{1+2+t} dt} = e^{\int_2^4 \frac{1}{3+t} dt} = e^{\ln(3+t)|_2^4} = e^{\ln 7 - \ln 5} = e^{\ln \frac{7}{5}} = \frac{7}{5}.$$

W ten sposób uzyskujemy odpowiedź

$$A(1; 4) - [A(1; 2) \cdot A(2; 4)] = 2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{30 - 28}{15} = \frac{2}{15}.$$

8. Funkcja intensywności oprocentowania ma postać

$$\delta(t) = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{1+2e^{2t}}.$$

Obliczyć efektywną stopę zwrotu w piątym roku trwania inwestycji, tzn. w okresie od $t = 4,0$ do $t = 5,0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned} i_{ef} &= A(4;5) - 1 = e^{\int_4^5 \left(\frac{1}{t+1} + \frac{3}{1+2e^{2t}} \right) dt} - 1 = \\ &= e^{\int_4^5 \frac{1}{t+1} dt + \int_4^5 \frac{3}{1+2e^{2t}} dt} - 1 = e^{\int_4^5 \frac{1}{t+1} dt} \cdot e^{\int_4^5 \frac{3}{1+2e^{2t}} dt} - 1. \end{aligned}$$

Policzmy potrzebne całki:

$$I_1^{[4;5]} = \int_4^5 \frac{1}{t+1} dt = \ln|t+1| \Big|_4^5 = \ln 6 - \ln 5 = \ln \frac{6}{5}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_2^{[4;5]} &= \int_4^5 \frac{3}{1+2e^{2t}} dt = \int_4^5 \frac{3e^t}{e^t + 2e^{3t}} dt = \\ &= \left| \begin{array}{c} u = e^t \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 4 & 5 \\ \hline u & e^4 & e^5 \\ \hline \end{array} \\ du = e^t dt \\ \frac{3e^t dt}{e^{3t} + e^t} = \frac{3du}{u(2u^2 + 1)} \\ \frac{3}{u(2u^2 + 1)} = \frac{3}{u} - \frac{6u}{2u^2 + 1} \end{array} \right| = \int_{e^4}^{e^5} \frac{3}{u} du - \int_{e^4}^{e^5} \frac{6u}{2u^2 + 1} du = \\ &= 3 \ln|u| \Big|_{e^4}^{e^5} - \frac{3}{2} \ln(2u^2 + 1) \Big|_{e^4}^{e^5} = \\ &= 3(\ln e^5 - \ln e^4) - \frac{3}{2} \ln(2e^{10} + 1) + \frac{3}{2} \ln(2e^8 + 1) = \end{aligned}$$

$$= 15 - 12 + \frac{3}{2} \ln \frac{2e^8 + 1}{2e^{10} + 1} = 3 + \frac{3}{2} \ln \frac{2e^8 + 1}{2e^{10} + 1}.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$\begin{aligned} e^{I_1^{[4;5]} + I_2^{[4;5]}} - 1 &= e^{I_1^{[4;5]}} \cdot e^{I_2^{[4;5]}} - 1 = e^{\ln \frac{6}{5}} \cdot e^{3 + \frac{3}{2} \ln \frac{2e^8 + 1}{2e^{10} + 1}} - 1 = \\ &= \frac{6}{5} \cdot e^3 \cdot e^{\ln \left(\frac{2e^8 + 1}{2e^{10} + 1} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{5} \cdot e^3 \cdot \left(\frac{2e^8 + 1}{2e^{10} + 1} \right)^{\frac{3}{2}} \simeq 0,2 = 20\%. \quad \square \end{aligned}$$

9. Rachunek oszczędnościowy został założony w chwili $t_0 = 0$ z początkową wpłatą w wysokości 1 j.m. Na rachunek funduszu dokonywane są w każdej chwili $t \in \mathbb{R}_+$ wpłaty, odbywające się w sposób ciągły, z roczną intensywnością $\varrho(t) = (1+t) \ln(1+t)$. Ciągła intensywność oprocentowania środków na rachunku wynosi $\delta(t) = \frac{1}{1+t}$. Wyznaczyć zakumulowaną wartość środków w chwili $t_1 = 6,75$. [Z3. EA 10.10.05.]

Rozwiązanie. Stan konta tworzą dwa składniki: wartość zakumulowanej 1 j.m. wpłaconej na początku inwestycji oraz wartość ciągłego procesu wpłat o intensywności

$$\varrho(t) = (1+t) \ln(1+t),$$

przy czym oba składniki wyznaczone są w kontekście intensywności oprocentowania równej $\delta(t) = \frac{1}{1+t}$. Tym samym mamy

$$K(t_*) = K_1(t_*) + K_2(t_*),$$

gdzie

$$K_1(t_*) = 1 \cdot A(t_*) = e^{\int_0^{t_*} \delta(t) dt}$$

oraz

$$K_2(t_*) = A(t_*) \cdot \int_0^{t_*} \varrho(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} dt,$$

zatem

$$\begin{aligned} K(t_*) &= A(t_*) + A(t_*) \cdot \int_0^{t_*} \varrho(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} dt = \\ &= A(t_*) \left[1 + \int_0^{t_*} \varrho(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} dt \right]. \end{aligned}$$

Mamy równocześnie, że

$$A(t_*) = e^{\int_0^{t_*} \frac{1}{1+t} dt} = e^{\ln(1+t)|_0^{t_*}} = e^{\ln(1+t_*) - \ln 1} = e^{\ln(1+t_*)} = 1 + t_*.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \int_0^{t_*} \varrho(t) e^{-\int \varrho(s) ds} dt &= \int_0^{t_*} [(1+t) \ln(1+t)] e^{-[\ln(1+t) - \ln 1]} dt = \\ &= \int_0^{t_*} [(1+t) \ln(1+t)] e^{-\ln(1+t)} dt = \\ &= \int_0^{t_*} [(1+t) \ln(1+t)] e^{\ln \frac{1}{1+t}} dt = \\ &= \int_0^{t_*} [(1+t) \ln(1+t)] \frac{1}{1+t} dt = \int_0^{t_*} \ln(1+t) dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} f'(t) = 1, \quad g(t) = \ln(1+t) \\ f(t) = t, \quad g'(t) = \frac{1}{1+t} \end{array} \right] = \\ &= \left[t \ln(1+t) - \int \frac{t}{1+t} dt \right]_0^{t_*} = \\ &= \left[t \ln(1+t) - \int \left(\frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \right]_0^{t_*} = \\ &= \left[t \ln(1+t) - \int dt + \int \frac{t}{1+t} dt \right]_0^{t_*} = \\ &= \left[t \ln(1+t) - t + \ln(1+t) \right]_0^{t_*} = \left[(1+t) \ln(1+t) - t \right]_0^{t_*} = \end{aligned}$$

$$= (1 + t_*) \ln (1 + t_*) - t_* - 1 \cdot \ln 1 + 0 = (1 + t_*) \ln (1 + t_*) - t_*.$$

W konsekwencji

$$K(t_*) = (1 + t_*) \cdot [(1 + t_*) \ln (1 + t_*) - t_*],$$

a w przypadku $t_* = 6,75$ otrzymujemy

$$K(6,75) = 7,75 \left[7,75 \ln (7,75) - 6,5 \right] = 78,427\,051. \quad \square$$

- 10.** Stopa procentowa przy kapitalizacji półrocznej wynosi $i^{(2)} = 0,10$. Wyznaczyć równoważną stopę oprocentowania ciągłego.

Rozwiązanie. Niech symbol δ oznacza stopę procentową przy akumulacji ciągłej, natomiast $\frac{i^{(n)}}{n} = i$ będzie oznaczać stopę w jednym podokresie, gdzie n jest liczbą podokresów w okresie bazowym. Na mocy zasady równoważności stóp procentowych mamy w tej sytuacji

$$Ke^{\delta} = K \cdot \left(1 + \frac{i}{n} \right)^n,$$

a w konsekwencji

$$e^{\delta} = \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n$$

lub równoważnie po zlogarytmowaniu

$$\delta = \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)^n = n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)$$

oraz

$$r = n \left(e^{\frac{\delta}{n}} - 1 \right).$$

W tym konkretnym przypadku otrzymujemy:

$$\delta = 2 \ln \left(1 + \frac{0,1}{2} \right) = 0,09758 \approx 9,76\%.$$

Stopą akumulacji ciągłej równoważną stopie $i^{(2)} = 10\%$ jest stopa $\delta = 9,76\%$. □

11. Bank udziela pożyczki przy rocznej stopie procentowej $i = 0,08$, z kapitalizacją ciągłą i odsetkami płaconymi co kwartał. Wyznaczyć wysokość odsetek kwartalnych.

Rozwiązanie. Dla wygody wyznaczmy kwartalną stopę procentową, bo w oparciu o nią będzie nam łatwo wyliczyć kwotę odsetek. Z zależności

$$i = n \left(e^{\frac{\delta}{n}} - 1 \right)$$

mamy

$$i = 4 \left(e^{\frac{0,08}{4}} - 1 \right) = 0,0808 \approx 8,08\%,$$

zatem kwartalna stopa procentowa wynosi

$$\frac{0,0808}{4} = 0,0202 = 2,02\%.$$

Jeśli więc kapitał na początku kwartału wyniósł K , to odsetki będą równe $I(0,25) = 0,0202 \cdot K$. $\square$

1.3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Pan Ryszard jest gońcem w firmie XeNoV. Przełożony nakazał mu wpłacić do banku 1 000 000 j.m. i wpłacić je na konto firmy. Bank stosuje oprocentowanie ciągłe z roczną stopą procentową 16%. Pan Ryszard pobrał pieniądze o godzinie 8:00 rano, a o 9:00 wpłacił na swoje prywatne konto w tym samym banku, po czym o godz. 19:00 wypłacił pieniądze ze swego konta i wpłacił na konto firmy. O jaką kwotę wzbogacił się tym sposobem pan Ryszard?
2. James Bond postanowił podzielić premię od Jej Królewskiej Mości za sprawne wykonanie zadania na cztery równe części i każdą z kwot w wysokości K wpłacił do czterech banków. Każdy z nich stosuje nominalną roczną stopę procentową 25%, przy czym pierwszy stosuje oprocentowanie proste, drugi składane kwartalne, trzeci składane miesięczne, a czwarty ciągłe. Po jakim czasie kwota zainwestowana przez Bonda podwoi się w każdym z tych banków?
3. Roch, miłośnik klasyków motoryzacji, upatrzył sobie Jaguara XJ LX358, jednak do ceny zakupu brakuje mu 50 000 j.m. Właściciel

samochodu zgodził się poczekać pół roku ze sprzedażą, aż Roch zbierze brakującą kwotę. Jaką kwotę Roch musi zainwestować, by przy stopie procentowej 20% zebrać brakujące 50 000 j.m., jeśli:

1. oprocentowanie jest proste,
 2. oprocentowanie jest kwartalne składane,
 3. oprocentowanie jest miesięczne składane,
 4. oprocentowanie jest ciągłe?
4. Xawery inwestuje kwotę 1 000 j.m. na okres jednego roku przy natężeniu oprocentowania $\delta(t) = e^{-t^2}$. Ile wynosi wartość kapitału wraz z odsetkami na koniec okresu inwestycji, w zaokrągleniu do 50 j.m.? [Z1. EA 24.13.01.]
5. W funduszu A natężenie oprocentowania wynosi $\delta_A = \frac{1}{t+1}$, a w funduszu B jest to $\delta_B = \frac{2t}{t^2+1}$. W chwili $t = 0$ inwestujemy 100 000 j.m. w każdy z funduszy. Wiedząc, że $K_A(t)$ oraz $K_B(t)$ oznaczają odpowiednio kwoty zgromadzone w funduszach A i B w chwili t , znaleźć tę wartość t , dla której funkcja

$$\begin{cases} \varphi : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty) \\ \varphi(t) = K_A(t) - K_B(t) \end{cases}$$

osiąga maksimum.

[Z10. EA 02.06.01.]

6. Niech $K_A(t)$ oznacza wartość środków zgromadzonych w funduszu A w chwili t , gdzie $t \in \mathbb{R}_+$. Wiadomo, że wartość środków zgromadzonych w funduszu A w chwili $t \in \mathbb{R}_+$ jest równa $K_A(t) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{t}$, zaś w funduszu B jest to $K_B(t) = 2 + t$. Wyznaczyć chwilę t_0 , kiedy natężenie oprocentowania w funduszu B będzie równe $\frac{2}{3} \cdot t_0$ natężenia funduszu A . [Z1. EA 15.06.02.]
7. Rachunek oszczędnościowy założono w chwili 0 bez początkowych wpłat. Następnie na rachunek dokonywane są w sposób ciągły wpłaty z roczną intensywnością $\varrho(t)$ w chwili $t > 0$. Ciągła intensywność oprocentowania środków na rachunku wynosi $\delta(t) = \frac{1}{1+t}$, zaś zakumulowana wartość funduszu w chwili $t > 0$ wynosi $K(t) = t(1+t)$. Wyznaczyć $\varrho(t)$. [Z5. EA 05.12.05.]

8. Rachunek oszczędnościowy założono w chwili 0 z początkową wpłatą w wysokości 1 j.m. Dalsze wpłaty na rachunek dokonywane są w sposób ciągły z roczną intensywnością równą

$$\varrho(t) = (1+t) \ln(1+t)$$

w chwili $t > 0$. Ciągła intensywność oprocentowania środków na rachunku wynosi: $\delta(t) = \frac{1}{1+t}$. Ile wynosi zakumulowana wartość środków w chwili $t_0 = 4,5$? [Z3. EA 10.10.05.]

9. Rachunek oszczędnościowy założono w chwili $t_0 = 0$ z wpłatą początkową 1 j.m. Następnie wpłaty dokonywane są w sposób ciągły z roczną intensywnością $\varrho(t) = \frac{t}{1+t}K(t)$, gdzie $K(t)$ oznacza wartość rachunku w chwili $t > 0$. Ciągła intensywność oprocentowania wynosi $\delta(t) = \frac{1}{1+\alpha+t}$. Wyznaczyć wartość α , jeżeli $K(1) = 2e$. [Z5. EA 14.05.07.]

10. Fundusz inwestycyjny został założony w chwili $t_0 = 0$ z wpłatą początkową równą 1 j.m. Stan funduszu w chwili t wynosi $K(t)$. Wpłaty na rachunek dokonywane są w sposób ciągły z roczną intensywnością $\varrho(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K(t)}}$. Ciągła intensywność oprocentowania środków na rachunku wynosi $\delta(t) = \frac{1}{1 + K(t)}$. Jaki jest stan funduszu w chwili $t = 1$? [Z6. EA 15.120.08.]

1.4. Stopy procentowe nominalna i efektywna

Rozpatrzmy przypadki dyskretne funkcji akumulacji, a więc funkcje akumulacji prostej oraz funkcje akumulacji złożonej [1, 4]. Różnica między nimi jest istotna, więc przy porównywaniu procesów akumulacji istotne jest wyraźne określenie rodzaju procesu. Jeśli wybieramy oprocentowanie proste, to proces ten prowadzi do *nominalnej stopy procentowej*, zaś w przypadku wyboru oprocentowania złożonego do *efektywnej stopy procentowej*.

Gdy proces bogactwa wyraża się zależnością

$$K(t+h) = K(t) [1 + h \cdot r(t;h)],$$

gdzie stopa zwrotu w odniesieniu do okresu bazowego wynosi $r(t;h)$, to stopę tę nazywać będziemy *stopą nominalną* i definiować jako

$$r_{nom}(t;h) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{K(t+h) - K(t)}{h \cdot K(t)} = \frac{K(t+h) - K(t)}{h} \cdot \frac{1}{K(t)}. \quad (1.11)$$

Funkcja akumulacji prostej, będąca już funkcją dwóch zmiennych – chwili początkowej t oraz długości przedziału trwania inwestycji lub inaczej przyrostu czasu oznaczanego przez h , ma teraz postać:

$$A(t;h) = 1 + h \cdot r_{nom}(t;h),$$

w związku z czym

$$r_{nom}(t;h) = \frac{A(t;h) - 1}{h}. \quad (1.12)$$

W szczególności, jeżeli $h = 1$, to h jest okresem bazowym i mamy zależności:

$$r_{nom}(t;1) = \frac{K(t+1) - K(t)}{1 \cdot K(t)} = \frac{K(t+1) - K(t)}{K(t)}$$

oraz

$$r_{nom}(t;1) = A(t;1) - 1.$$

Jeśli wartość inwestycji opisuje formuła

$$K(t+h) = K(t) [1 + r(t;h)]^h,$$

gdzie stopa zwrotu odniesiona do okresu bazowego wynosi $r(t;h)$, to stopę taką nazywać będziemy *stopą efektywną* i oznaczać ją symbolem $r_{ef} = r_{ef}(t;h)$.

W takim przypadku mamy do czynienia z funkcją akumulacji złożonej opisaną równością:

$$A_c(t;h) = [1 + r_{ef}(t;h)]^h, \quad (1.13)$$

a stąd

$$r_{ef}(t;h) \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt[h]{A_c(t;h)} - 1 = \sqrt[h]{\frac{K(t+h)}{K(t)}} - 1.$$

Idąc tym samym tokiem rozumowania co poprzednio, ponieważ $1 + r_{ef}(t; h) \geq 1$ (dla dodatnich przyrostów czasu h), to $1 + r_{ef}(t; h)$ może być przy ustalonym h traktowane jako wartość pewnej funkcji wykładniczej argumentu t , czyli:

$$1 + r_{ef}(t; h) = e^{\delta(t; h)},$$

skąd dostajemy $\delta(t) = \ln(1 + r_{ef}(t; h))$. W takim zaś przypadku

$$A_c(t; h) = e^{h\delta(t; h)}$$

oraz

$$K(t; h) = K(t; 0)e^{h\delta(t; h)},$$

lub też w alternatywnym zapisie

$$K(t + h) = K(t)e^{h\delta(t; h)}.$$

Wartość funkcji δ dla argumentu $(t; h)$, czyli liczbę $\delta(t; h)$, nazywamy *efektywną intensywnością oprocentowania* w przedziale $[t; t + h]$.

Dla dowolnej chwili czasu $t \in [0, +\infty)$ zachodzą następujące warunki (zob. [1, 3]):

$$\begin{cases} r_{nom}(t; h) < r_{ef}(t; h), & \text{gdy } h \in (0, 1), \\ r_{nom}(t; h) = r_{ef}(t; h), & \text{gdy } h = 1, \\ r_{nom}(t; h) > r_{ef}(t; h), & \text{gdy } h \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (1.14)$$

1.4.1. Ćwiczenia

1. Czy przyjmując do opisu procesu bogactwa na dowolnym odcinku czasu raz funkcję akumulacji prostej, a raz złożonej, otrzymamy w każdym przypadku identyczny wynik?
2. Co w perspektywie jednego roku wyraża efektywna stopa procentowa?
3. Kiedy warunki oprocentowania składanego są równoważne?

4. Sformułować definicję przeciętnej stopy procentowej przy oprocentowaniu prostym.
5. Sformułować definicję przeciętnej stopy procentowej przy oprocentowaniu złożonym.
6. Sformułować definicję przeciętnej stopy procentowej przy oprocentowaniu ciągłym.

1.4.2. Przykłady

1. Pani Kornelia złożyła 46 000 j.m. na lokacie o miesięcznej kapitalizacji i oprocentowaniu złożonym. Przez 14 kolejnych miesięcy nie potrzebowała ulokowanych środków. Nominalne roczne oprocentowanie lokaty zmieniało się i było równe: 11% przez pierwsze cztery miesiące, 8% przez kolejnych osiem miesięcy oraz 6% w ostatnich dwóch miesiącach. Obliczyć:

1. wielkość odsetek uzyskiwanych przez panią Kornelię po każdym z wyróżnionych trzech okresów oraz wartość kapitału wypłaconego jej po 14 miesiącach (z uwzględnieniem podatku od zysków kapitałowych w wysokości 19% w skali roku),
2. roczną efektywną stopę oprocentowania tej lokaty,
3. przeciętną miesięczną stopę oprocentowania tej lokaty.

Rozwiązanie. Ad 1. Rozpocznijmy od ustalenia najważniejszych faktów, gdzie liczby w nawiasach przy wartości zainwestowanej kwoty oznaczają miesiące, a ściślej ich końce.

$$K(0) = 46\,000;$$

$$K(4) = 46\,000 \left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^4 = 47\,710;$$

$$K(12) = 46\,000 \left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^8 = 50\,314,70;$$

$$K(14) = 46\,000 \left[\left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^4 \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^8 \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^2 \right] = 50\,819,10.$$

Stąd dalej

$$I(0; 4) = K(4) - K(0) = 46\,000 \cdot \left[\left(1 + \frac{0,11}{12} \right)^4 - 1 \right] = 1\,710;$$

$$\begin{aligned} I(4; 12) &= K(12) - K(4) = \\ &= 46\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,11}{12} \right)^4 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{12} \right)^8 - 46\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,11}{12} \right)^4 = \\ &= 46\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,11}{12} \right)^4 \left[\left(1 + \frac{0,08}{12} \right)^8 - 1 \right] = \\ &= 47\,710,00 \left[\left(1 + \frac{0,08}{12} \right)^8 - 1 \right] = 2\,604,70; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(12; 14) &= K(14) - K(12) = \\ &= 46\,000 \left(1 + \frac{0,11}{12} \right)^4 \left(1 + \frac{0,08}{12} \right)^8 \left[\left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^2 - 1 \right] = 504,40. \end{aligned}$$

Miesięczna stopa procentowa podatku od zysków kapitałowych wyniesie $r_{pod}^{(12)} = 0,19 \cdot \frac{1}{12} = 0,0158$, zaś efektywność zysków będzie równa

$$\begin{aligned} K^{tx} &= K(0) + \left(1 - r_{pod}^{(12)} \right)^{14} \cdot I(0; 14) = \\ &= 46\,000 + 0,7998 \cdot 4\,819,10 \simeq 49\,854,14. \end{aligned}$$

Dalej

$$I^{tx}(0; 4) = I(0; 4) \cdot \left(1 - r_{pod}^{(12)} \right)^4 = 1\,604,46;$$

$$I^{tx}(4; 12) = I(4; 12) \cdot \left(1 - r_{pod}^{(12)} \right)^8 = 2\,292,49;$$

$$I^{tx}(12; 14) = I(12; 14) \cdot \left(1 - r_{pod}^{(12)} \right)^2 = 488,55.$$

Ad 2. Czas trwania lokaty, liczony w latach, wynosi $\frac{14}{12} = \frac{7}{6}$, a symbol r_{ef} oznacza roczną stopę efektywną. A więc:

$$\left(1 + r_{ef} \right)^{\frac{7}{6}} = \frac{K(14)}{K(0)}$$

i dlatego

$$r_{ef} = \left[\frac{K(14)}{K(0)} \right]^{\frac{6}{7}} - 1 = \left(\frac{50\,819,10}{46\,000} \right)^{\frac{6}{7}} - 1 = 0,089 = 8,9\%.$$

Ad 3. Oznaczmy średnią miesięczną stopę procentową przez $\bar{r}$. Zaczodzi wówczas równość

$$(1 + \bar{r})^{14} = \left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^8 \left(1 + \frac{6}{12}\right)^2 = 1,0749,$$

stąd zaś

$$\bar{r} = \sqrt[14]{1,0749} - 1 = (1,0749)^{\frac{1}{14}} - 1 = 1,0052 - 1 = 0,052\%. \quad \square$$

2. W ciągu ostatniego roku wielokrotnie zmieniano oprocentowanie rachunku bankowego. W pierwszym półroczu stopa nominalna wynosiła 12%, a odsetki kapitalizowano co kwartał. Począwszy od trzeciego kwartału odsetki były kapitalizowane co miesiąc, zaś stopa nominalna wynosiła 10% w okresie od lipca do września, 9% w październiku i listopadzie oraz 8% w grudniu. Obliczyć:

1. efektywną stopę oprocentowania rachunku;
2. przeciętną stopę kwartalną;
3. wartość kapitału 10 000 j.m. na koniec roku.

Rozwiązanie. Ad 1. Skoro w pierwszym półroczu w banku obowiązywała nominalna stopa procentowa $r^{(2)} = \frac{r_{nom}}{2} = 12\%$, to stopa kwartalna wynosiła $r^{(4)} = \frac{12\%}{4} = 3\%$. W trzecim kwartale stopa nominalna wynosiła 10%, a więc $r^{(12)} = \frac{10\%}{12} = 0,8(3)\%$. W czwartym kwartale obowiązywała kapitalizacja miesięczna, ale przy różnych stopach, mamy więc w październiku i listopadzie $r^{(12)'} = \frac{9\%}{12} = 0,75\%$, zaś w grudniu $r^{(12)''} = \frac{8\%}{12} = 0,6(6)\%$.

Wykorzystując znane twierdzenie dotyczące całkowitej stopy zwrotu, otrzymujemy

$$r = (1,03)^2 \left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^3 \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^2 \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^1 = 1,111380.$$

Efektywna stopa oprocentowania rachunku wynosi zatem

$$r_{ef} = i - 1 = 11,1380\%.$$

Ad 2. Dla wyznaczenia przeciętnej stopy kwartalnej $\overline{r^{(4)}}$ skorzystamy z naturalnej równości:

$$\left(1 + \overline{r^{(4)}}\right)^4 = \left(1 + r^{(4)}\right)^2 \left(1 + r_{12}\right)^3 \left(1 + r^{(12)'}\right)^2 \left(1 + r^{(12'')}\right).$$

W związku z tym

$$\begin{aligned}\overline{r^{(4)}} &= \sqrt[4]{(1 + r_4)^2 (1 + r^{(12)})^3 (1 + r^{(12)'})^2 (1 + r^{(12'')})} - 1 = \\ &= \sqrt[4]{1,111380} - 1 = 2,6752\%.\end{aligned}$$

Ad 3. Wartość kapitału na koniec roku wynosi zatem

$$\overline{K} = 11\,113,80 \text{ j.m.}$$

□

3. Lokata bankowa ma stopę nominalną w wysokości 12% z kwartalną kapitalizacją odsetek. Mamy na koncie 10 000 j.m. i jest to nasz kapitał początkowy (tzn. $K(0) = 10\,000 \text{ j.m.}$). Ile wyniesie kwota odsetek, gdy będziemy je wypłacać po upływie okresu kapitalizacji? Zakładając, że zamierzamy utrzymać w banku pieniądze przez rok, obliczyć, ile wyniesie kwota odsetek, jeżeli nie będziemy ich wypłacać w trakcie trwania inwestycji, a dopiero na koniec? Ile w takim przypadku wyniesie stopa efektywna z tej inwestycji?

Rozwiązanie. Przy wypłacie odsetek po każdym kwartale ich łączna wysokość po roku wyniesie

$$I'(1) = [10\,000 \cdot (0,03)] \cdot 4 = 1\,200,00 \text{ j.m.},$$

a gdy odsetki nie będą wypłacane dostaniemy odsetki w kwocie

$$I''(1) = 10\,000 \cdot (1,03)^4 - 10\,000 = 1\,255,08 \text{ j.m.}$$

Z uwagi na to, że czas życia inwestycji jest w tym przypadku równy 1, otrzymujemy

$$r_{ef} = \sqrt[1]{\frac{11\,255,08}{10\,000}} - 1 = 1,125508 - 1 = 0,125508 \approx 0,12550.$$

□

1.4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Firma AGAT założyła lokatę w banku na okres trzech lat w wysokości 38 000 j.m. Obecne saldo jej rachunku wynosi 45 000 j.m. Wyznaczyć przeciętną stopę procentową założonej lokaty [3].
2. Roczna efektywna stopa procentowa wynosi $r_{ef} = 0,0855$. Obliczyć nominalną kwartalną stopę procentową.
3. Roczna efektywna stopa procentowa wynosi $r_{ef} = 0,12$. Obliczyć nominalną miesięczną stopę procentową.
4. Bank A oferuje złożoną kapitalizację kwartalną z nominalną stopą procentową $r_{nom_A} = 0,36$. Bank B natomiast oferuje roczną kapitalizację ciągłą r_B . Jaka powinna być wysokość rocznej stopy procentowej banku B, aby warunki kapitalizacji w obu bankach były równoważne [6]?
5. Bank A oferuje kapitalizację prostą przy stopie nominalnej równej $i_{nom_A} = 0,25$. Bank B oferuje półroczną kapitalizację złożoną opartą na nieznanej chwilowo stopie nominalnej i_{nom_B} . Wiadomo równocześnie, że inwestycje o jednakowym czasie życia t dają następujące rezultaty:
 1. kwota $K_A = 2\,000$ j.m. zainwestowana w banku A daje na koniec czasu trwania inwestycji kwotę $K_A(t) = 5\,500$ j.m.,
 2. kwota K_B zainwestowana na ten sam okres czasu daje $K_B(t) = 9K_B$.

Wyznaczyć wysokość stopy r_{nom_B} [6].

6. Inwestor chce dokonać trzech wpłat do banku:

1. na początku pierwszego roku w wysokości 1,
2. na początku drugiego roku w wysokości 2,
3. na początku trzeciego roku w wysokości 4,

jednocześnie planując wypłacenie całej lokaty (zainwestowanego kapitału wraz z odsetkami) po dziesięciu latach.

Gdyby inwestor wybrał bank A , oferujący efektywną roczną stopę zwrotu r_{ef_A} , to po dziesięciu latach mógłby wypłacić kwotę 8, gdyby zaś wybrał bank B , oferujący efektywną roczną stopę zwrotu r_{ef_B} , to po dziesięciu latach mógłby wypłacić kwotę 10. Ile będzie mógł wypłacić, wybierając bank C oferujący efektywną roczną stopę zwrotu $(r_{ef_A} + r_{ef_B})$? [Z9. EA 15.06.02.]

7. Dane są trzy fundusze, odpowiednio F_I , F_{II} oraz F_{III} , oprocentowane przy efektywnej rocznej stopie zwrotu (ang. *annual effective interest rate*) równej odpowiednio $I_I = 0,1$ i $I_{II} = 0,08$ oraz $I_{III} = 0,06$. Odsetki z każdego z funduszy są wypłacane na końcu każdego roku oraz reinwestowane w następujący sposób:

1. odsetki z funduszu F_I są reinwestowane w funduszu F_{II} , a z funduszu F_{II} są reinwestowane w funduszu F_{III} ;
2. odsetki z funduszu F_{III} są reinwestowane w tym samym funduszu.

W chwili początkowej $t_0 = 0$ do funduszu dokonywana jest wpłata. Wyznaczyć efektywną roczną stopę zwrotu z inwestycji, jeżeli po dziesięcioletnim okresie inwestowania wszystkie środki zgromadzone w poszczególnych funduszach zostaną umorzone (wypłacone).

[Z3. EA 25.01.03.]

1.5. Inflacja, realna stopa zwrotu i RRSO

Pojęcie inflacji, rozumiane jako spadek wartości pieniądza (w jego konkretnym przejawie, czyli konkretnej jednostki monetarnej j.m.), może być modelowane przy użyciu procesu akumulacji.

Podstawowym narzędziem do ustalania inflacji jest zdefiniowany na początku tego procesu tzw. *koszyk dóbr konsumpcyjnych*. Jest to zestaw 1 800 dóbr, corocznie przeglądany i w razie potrzeby modyfikowany przez specjalistów z banku centralnego. Celowo podkreślona została umowność tego koszyka (zakładamy tu dobrą wolę osób dokonujących wyboru dóbr wchodzących w skład koszyka). Ceny dóbr koszyka w chwili t stanowią podstawę do wyznaczenia *indeksu cenowego konsumenta* (*consumer price index*) $CPI(t)$, co oznacza wartość koszyka w chwili t w jednostkach monetarnych (j.m.). Inflacja zależy od czasu i jeśli $t \in (t_i, t_{i+1})$ przy

$i \in \{1, \dots, t_n\}$ oraz ustalonym $n \in \mathbb{N}$, przez *stopę inflacji* w okresie (t_i, t_{i+1}) – ściślej w przedziale otwartym czasu (t_i, t_{i+1}) – rozumieć będziemy przyrost względny indeksu CPI w tym przedziale. Stopa inflacji oznaczana jest jako $r_{CPI}(t_i, t_{i+1})$:

$$r_{CPI}(t_i, t_{i+1}) = \frac{CPI(t_{i+1}) - CPI(t_i)}{CPI(t_i)}. \quad (1.15)$$

Inną miarą utraty wartości pieniądza jest *realna stopa zwrotu*, oznaczana dla ustalonego procesu akumulacji $A(t)$ przez $r_{real}(t)$. Definiujemy ją jako

$$r_{real}(t) = \frac{A(t) \cdot K}{CPI(t)}, \quad (1.16)$$

gdzie K oznacza wartość inwestycji w chwili początkowej t_1 . Realna stopa zwrotu pozwala na wyrażenie kwoty $K(t) = K(t_1)A(t_i)$ przy $i \in I$, zaś $i \in \{1, \dots, t_n\}$, gdzie $i \in (1; n]$, przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$.

Najważniejszą formułą matematyczną odnoszącą się do realnej stopy zwrotu jest wzór Fishera, który przy wcześniej przyjętych oznaczeniach ma postać

$$r_{real}(t_I, t_{i+1}) = \frac{r(t_{i+1}, t_i) - r_{CPI}(t_2, t_i)}{1 + r_{CPI}(t_{i+2}, t_i)}.$$

1.5.1. Ćwiczenia

1. Co to jest koszyk dóbr konsumpcyjnych?
2. Co to jest indeks cenowy konsumenta CPI ?
3. Zdefiniować pojęcie inflacji.
4. Podać definicję realnej stopy zwrotu.
5. Podać wzór Fishera (ewentualnie wzbogacić odpowiedź o dowód wzoru).

1.5.2. Przykłady

1. Rozpatrzmy sytuację, gdy bank proponuje klientom roczną lokatę o oprocentowaniu stałym 8%. Wyznamy realną stopę zwrotu

z tej lokaty, jeśli roczna stopa inflacji π wyniesie odpowiednio: (a) 5%, (b) 7%, (c) 10%. [4]

Rozwiązanie. Na podstawie wzoru Fishera wiemy, że

$$r_{real} = \frac{r - \pi}{1 + \pi},$$

a stąd dalej

$$\begin{aligned} r_{real,(a)} &= \frac{0,08 - 0,05}{1 + 0,05} = 2,86\%, \\ r_{real,(b)} &= \frac{0,08 - 0,07}{1 + 0,07} = 0,0093\%, \\ r_{real,(c)} &= \frac{0,08 - 0,01}{1 + 0,01} = -1,82\%. \end{aligned}$$

Zatem realna stopa zwrotu wynosi odpowiednio: (a) 2,86%, (b) 0,93%, (c) -1,82%. $\square$

2. Bank ustalił, że pożyczka o wartości $K = PV = 15\,000$ j.m. ma zostać spłacona po dwóch latach w kwocie $FV = 21\,000$ j.m. Założono, że stopa inflacji będzie stała i wyniesie 3%. Wyznaczyć realną roczną stopę oprocentowania pożyczki, gdy:

1. stopa inflacji będzie zgodna z przyjętą prognozą,
2. w pierwszym roku życia pożyczki inflacja wyniosła 2,0%, a w następnym 1,5%.

Rozwiązanie. Dla rozpatrywanej pożyczki w chwili $t = 0$ jest $PV = 15\,000$, natomiast po dwóch latach kwota jej spłaty wynosi $FV = 21\,000$. Z uwagi na to, że

$$FV = PV(1 + r_{nom}),$$

dostajemy

$$r_{nom} = \sqrt{\frac{FV}{PV}} - 1,$$

co w przypadku tego zadania prowadzi do równości

$$\begin{aligned} r_{nom} &= \sqrt{\frac{21\,000}{15\,000}} - 1 = \sqrt{\frac{7}{5}} - 1 = \\ &= 1,183215957 - 1 \simeq 1,183 - 1 = 0,183 = 18,3\%. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że zgodnie z umową z zadania co do inflacji mamy $r_{infl}(1) = 2\%$ oraz $r_{infl}(2) = 1,5\%$, zatem inflacja w ciągu dwóch lat wynosi

$$r_{infl} = (1 + 0,02)(1 + 0,015) - 1 = 1,0353 \simeq 0,035.$$

Wtedy

$$r_{real}^{dwuletnia} = \frac{r_{nom} - r_{infl}}{1 + r_{infl}} = \frac{0,183 - 0,035}{1 + 0,035} = \frac{0,148}{1,035} = 0,143.$$

Zatem średnioroczna realna stopa oprocentowania jest równa $r_{infl}^{roczna} = 0,069$. Skoro już to wiemy, to odpowiedzmy na niezadane pytanie: ile wyniosła nie założona wartość przyszła, która, jak pamiętamy, wynosiła $FV = 21\,000$ j.m., ale realna wartość przyszła oparta na „twardych” obliczeniach? Otóż

$$\begin{aligned} FV_{real} &= PV \cdot (1 + r_{real}^{dwuletnia}) = 15\,000 \text{ j.m.} \cdot (1 + 0,143) = \\ &= 17\,145, \end{aligned}$$

a więc bank „przeszacował”(?) kwotę spłaty o 3 855 j.m.!

□

1.5.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Rozpatrzmy sytuację, w której gospodarka jest wolna od inflacji, czyli roczna jej stopa wynosi $r_{infl} = 0,1$, rynkowa stopa procentowa $l = 0,04$, natomiast podatek od dochodów ma stopę $r_{pod} = 0,3$. Dysponując dość pokaźną kwotą kapitału pożyczamy klientowi sumę 20 000 j.m. na okres dwóch lat na zakup samochodu.

Wyznaczyć:

- (i) wartość zysku brutto od tej transakcji, w skali dwóch lat,
- (ii) kwotę podatku od tej kwoty,

- (iii) wielkość oraz stopę zysku netto (po opłaceniu podatku).
- 2.** Pozostając przy tej samej transakcji, jednak w przypadku, gdy $r_{infl} = 0,1$, a nominalna rynkowa stopa procentowa jest równa $l = 0,14$, wyznaczyć:
- (i) kwotę zysku brutto oraz kwotę należnego podatku,
 - (ii) kwotę zysku netto i wysokość stopy zysku netto (po opodatkowaniu).
- 3.** W banku założono roczną lokatę w kwocie 10 000 j.m. przy rocznej stopie procentowej depozytów $r = 0,026$. Wyznaczyć r_{nom} oraz r_{real} , jak również nominalną i realną wartość odsetek na koniec roku przy rocznej stopie inflacji $r_{infl} = 0,02$. Ustalić wysokość realnego przyrostu wartości lokaty na jej koniec.

2. Renty

Przez *rentę dyskretną* rozumiemy ciąg przepływów finansowych, skończony lub nieskończony $\underline{CF} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, którego wyrazy nazywamy *wypłatami renty* dokonywanymi w chwilach $t_i \in \mathbb{N}$ oraz takimi, że dla dowolnego $i \in \mathbb{N}_+$ zachodzi warunek $t_i - t_{i-1} = \text{const}$. Długość przedziału czasu $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ nosi nazwę *okresu wypłaty*. Z przyczyn historycznych w przypadku rent stopa procentowa jest oznaczana przez i , a nie, jak poprzednio, przez r .

Poza rentami dyskretnymi istnieją renty ciągłe, którym poświęcimy osobną część rozdziału, a których rola w matematyce finansowej ma znaczenie zarówno teoretyczne, jak i praktyczne [1, 4].

2.1. Modele dyskretnie

Renty dyskretnie dzielą się

I. ze względu na czas trwania na

- *renty pewne*, czyli takie, których czas trwania jest skończony (renta ma skończoną liczbę wypłat);
- *renty wieczyste*, czyli renty, których czas trwania jest nieskończony (renta ma nieskończoną liczbę wypłat).

II. ze względu na moment rozpoczęcia wypłat na

- *natychmiast płatne*, gdy wypłata następuje natychmiast po ustanowieniu renty,
- *odroczone*, gdy znany jest czas przesunięcia pierwszej wypłaty renty względem momentu jej ustanowienia;

III. ze względu na moment wypłaty na

- renty płatne z góry, gdy wypłaty następują na początku okresu wypłaty;
- renty płatne z dołu, gdy wypłaty następują na końcu okresu wypłaty.

Każda z rent jest, jak zauważamy, określona przez czas trwania, moment rozpoczęcia, momenty wypłaty, a także niewspomniane jeszcze: kapitał rentowy i kwotę wypłaty.

Przez *kapitał rentowy* rozumiemy zaktualizowaną na chwilę ustanowienia renty wartość wszystkich wypłat, rozumianą jako wartość obecną (w chwili ustanowienia) albo *PV* (*present value*). Z kolei ze względu na kwotę wypłaty renty dzielimy na *renty stałe* oraz *renty zmienne*, czyli takie, których kwoty wypłat nie są stałe dla całego czasu trwania renty.

Przyjmując umowę, że związane z rentą przepływy finansowe CF_k oznaczają kwoty wypłat w chwilach t_k , otrzymujemy następujące zależności dla rent pewnych:

- dla renty n okresowej płatnej z dołu

$$PV = \sum_{k=1}^n CF_k DF_k = \sum_{k=1}^n CF_k \left[\prod_{j=1}^k DF(t_{j-1}, t_j) \right], \quad (2.1)$$

- renty n okresowej płatnej z góry

$$\ddot{P}V = CF_0 + \sum_{k=1}^{n-1} CF_k \cdot DF_k = CF_0 + \sum_{k=1}^{n-1} CF_k \cdot \left[\prod_{j=1}^k DF(t_{j-1}, t_j) \right]. \quad (2.2)$$

Natomiast dla rent wieczystych dostajemy

- wartość obecną renty wieczystej płatnej z dołu

$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} CF_k \cdot DF_k = \sum_{k=1}^{\infty} CF_k \cdot \left[\prod_{j=1}^k DF(t_{j-1}, t_j) \right], \quad (2.3)$$

- wartość obecną renty wieczystej płatnej z góry

$$\ddot{P}V = CF_0 + \sum_{k=1}^{\infty} CF_k \cdot DF_k = CF_0 + \sum_{k=1}^{\infty} CF_k \cdot \left[\prod_{j=1}^k DF(t_{j-1}, t_j) \right]. \quad (2.4)$$

Warto podkreślić, że takie rozumienie wartości obecnej dopuszcza zmienność zarówno kwot wypłat, jak i czynników dyskontujących w po-

szczególnych okresach wypłat. Jest rzeczą zrozumiałą, że tak daleko posunięta dowolność parametrów rent jest utrudnieniem w przypadku rent pewnych, a w przypadku rent wieczystych – wręcz uniemożliwia ich modelowanie.

Z tego powodu w praktyce rozważa się na ogół przypadki rent, dla których w ciągu całego okresu ich życia, stopy procentowe – a co za tym idzie również czynniki dyskontujące – są stałe, a kwoty wypłat podlegają jakiejś formie regularności. Jeśli więc mamy do czynienia ze stałym oprocentowaniem, to $DF(t_{j-1}; t_j) = v = \text{const}$ i wtedy

$$DF_k = DF(t_0; t_k) = \prod_{j=1}^k DF(t_{j-1}, t_j) = v^k. \quad (2.5)$$

W związku z tym

- dla renty n okresowej płatnej z dołu

$$PV_n = \sum_{k=1}^n CF_k \cdot v^k. \quad (2.6)$$

- dla renty n okresowej płatnej z góry

$$\ddot{P}V_n = \sum_{k=1}^n CF_k \cdot v^{k-1}, \quad (2.7)$$

- dla renty wieczystej płatnej z dołu

$$PV_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} CF_k \cdot v^k, \quad (2.8)$$

- dla renty wieczystej płatnej z góry

$$\ddot{P}V_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} CF_k \cdot v^{k-1}. \quad (2.9)$$

W przypadku, kiedy kwoty wypłat są stałe, czyli gdy zachodzi równość $CF_k = X = \text{const}$, sytuacja się upraszcza. W tym przypadku używamy już oficjalnej symboliki aktuarialnej, pamiętając, że czynnik dyskontujący jest jednoznacznie określony przez stopę procentową z uwagi na znaną zależność $v = \frac{1}{1+i}$ i na odwrót $i = \frac{1}{v} - 1$:

- $a_{\overline{n}|i}$ – dla wartości obecnej renty pewnej, n okresowej, płatnej z dołu, przy płaskiej strukturze terminowej, przy stopie i w całym okresie życia renty;
- $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ – dla wartości obecnej renty pewnej, n okresowej, płatnej z góry, przy płaskiej strukturze terminowej, przy stopie i w całym okresie życia renty;
- $a_{\infty|i}$ – dla wartości obecnej renty wieczystej, płatnej z dołu, przy płaskiej strukturze terminowej, przy stopie i w całym okresie życia renty;
- $\ddot{a}_{\infty|i}$ – dla wartości obecnej renty wieczystej, płatnej z góry, przy płaskiej strukturze terminowej, przy stopie i w całym okresie życia renty.
- ${}_k|a_{\infty|i}$ – dla wartości obecnej odroczonej o k okresów wypłat, renty wieczystej, płatnej z dołu, przy płaskiej strukturze terminowej, przy stopie i w całym okresie życia renty;
- ${}_k|\ddot{a}_{\infty|i}$ – dla wartości obecnej odroczonej o k okresów wypłat renty wieczystej, płatnej z góry, przy płaskiej strukturze terminowej, przy stopie i w całym okresie życia renty.

W przypadku gdy $CF_j = X = 1$, otrzymujemy

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^n 1 \cdot v^j = \sum_{j=1}^n v^j = v \frac{1 - v^n}{1 - v}, \quad (2.10)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^n 1 \cdot v^{j-1} = \sum_{j=1}^n v^{j-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v}, \quad (2.11)$$

$$a_{\infty|i} = \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot v^j = \sum_{j=1}^{\infty} v^j = v \frac{1}{1 - v}, \quad (2.12)$$

$$\ddot{a}_{\infty|i} = \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot v^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j-1} = \frac{1}{1 - v}. \quad (2.13)$$

$${}_k|a_{\overline{n}|i} = v^k a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{n}|i} = \frac{v^{n+1}}{1 - v} (1 - v^k), \quad (2.14)$$

$${}_k|\ddot{a}_{\infty|i} = v^k \ddot{a}_{n|i} = \ddot{a}_{n+k|i} - \ddot{a}_{n|i} = \frac{v^n}{1-v} (1-v^k). \quad (2.15)$$

Podkreślmy, że jeśli wypłaty renty są stałe i na przykład równe X , to wartości obecnej renty z takimi wypłatami, zależą od X jako od mnożnika. Sprawy komplikują się w przypadku wypłat o zmiennych wysokościach.

Poza wartością obecną renty możemy zdefiniować jej wartość przyszłą, nazywaną zgodnie aktuarialną tradycją *future value*, oznaczaną symbolem FV .

Tak jak istnieją symbole aktuarialne dla wartości obecnych, tak też istnieją odpowiadające im symbole wartości przyszłych:

- $s_{n|i}$ – dla renty pewnej n okresowej płatnej z dołu,
- $\ddot{a}_{n|i}$ – dla renty pewnej n okresowej płatnej z góry,
- ${}_k|a_{n|i}$ – dla renty pewnej n okresowej płatnej z dołu, odroczonej o k okresów wypłat,
- ${}_k|\ddot{a}_{n|i}$ – dla renty pewnej n okresowej płatnej z góry, odroczonej o k okresów wypłat,
- $s_{n|i}^{(m)}$ – dla renty pewnej n letniej płatnej z dołu w m podokresach w ciągu roku,
- $\ddot{a}_{n|i}^{(m)}$ – dla renty pewnej n letniej płatnej z góry w m podokresach w ciągu roku [1, 4].

2.2. Renta arytmetyczna i renta geometryczna

W tym rozdziale zajmujemy się umiejętnościami niezbędnymi do rozwiązywania zadań ze wstępu do matematyki finansowej. W przypadku modeli dyskretnych są to metody algebraiczne, a także wybrane metody analityczne, natomiast w odniesieniu do modeli ciągłych są to metody analityczne. Fakt, że zajmujemy się nimi w początkowej części zbioru zadań sugeruje, że ich opanowanie stanowi dla rozwiązujących zadania ważną umiejętność rachunkową.

2.2.1. Renta arytmetyczna

Niech ciąg wypłat

$$CF_1, CF_2, \dots, CF_n$$

renty będzie ciągiem arytmetycznym, a dla wygody przyjmijmy, że $CF_k = X_k = k$ dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Rozpatrzmy przypadek renty płatnej z dołu. W tym przypadku przy wzorcowej wysokości $CF_1 = 1$, różnicy ciągu arytmetycznego wypłat X_k wynoszącej 1 oraz przy stałym czynniku dyskontującym v dostajemy

$$PV_n^a = (Ia)_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^n X_k v^k = \sum_{k=1}^n k v^k.$$

Metoda zaburzeń. Jej istotą jest wyznaczenie analitycznej bądź inaczej jawnej postaci sumy n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu liczbowego $\underline{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jako funkcji indeksu n . Rozpatrzmy zatem taki ciąg oraz jego sumy początkowych wyrazów S_n oraz S_{n+1} . Bezpośrednio z definicji mamy

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_n + a_n = a_0 + \sum_{k=0}^n a_{k+1}. \quad (2.16)$$

Celem procesu zwanego metodą zaburzeń jest takie przedstawienie sumy $S_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_n$, aby była ona pewną liniową funkcją f sumy S_n , czyli by możliwa była jej reprezentacja w postaci

$$S_{n+1} = S_n + a_n = f(S_n) + \Phi(n), \quad (2.17)$$

gdzie $\Phi(n)$ jest jawną formułą argumentu n , zaś f pewną funkcją liniową argumentu S_n . Zatem ze zrozumiałych powodów zachodzi równość

$$f(S_n) = \lambda S_n, \quad (2.18)$$

f nie może być funkcją stałą, to zaś oznacza, że $\lambda \neq 1$. W tych warunkach z (2.17) i (2.18) dostajemy zależność

$$(1 - \lambda)S_n = \Phi(n) - a_n, \quad (2.19)$$

a stąd już otrzymujemy

$$S_n = \frac{\Phi(n) - a_n}{1 - \lambda}. \quad (2.20)$$

Z ostatniej zależności na S_n widać dodatkowy powód zastrzeżenia, że $\lambda \neq 1$.

Dla ilustracji przedstawionej metody przeanalizujemy następujący przykład.

Przykład. Użyjemy metody zaburzeń do wyznaczenia jawnej postaci sumy

$$S_n = \sum_{k=1}^n kv^{k-1}, \quad (2.21)$$

wyrażającej wartość obecną renty arytmetycznej płatnej z góry, której symbolem aktuarialnym jest $(I\ddot{a})_{\overline{n}|i}$.

Z definicji sumy S_{n+1} wiemy, że jeśli pierwszym wyrazem ciągu $\underline{a}$ jest a_1 , to otrzymamy

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} kv^{k-1} = \sum_{k=1}^n kv^{k-1} + (n+1)v^n,$$

czyli przy standardowym oznaczeniu

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)v^n. \quad (2.22)$$

Sumę S_{n+1} możemy zapisać także w postaci

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} kv^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} kv^{k-1}.$$

Dokonując podstawienia $k := k+1$ przy jednoczesnym zachowaniu sensu sumowania, dostajemy

$$S_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n (k+1)v^k = \sum_{k=1}^n kv^k + \left(1 + \sum_{k=1}^n v^k\right) = \sum_{k=1}^n kv^k + \sum_{k=0}^n v^k.$$

Napiszmy wyrażnie:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^n kv^k + \sum_{k=0}^n v^k.$$

Stąd, po nietrudnej modyfikacji, dostajemy

$$S_{n+1} = v \sum_{k=1}^n kv^{k-1} + \frac{1-v^{n+1}}{1-v} = vS_n + \frac{1-v^{n+1}}{1-v}. \quad (2.23)$$

Konfrontując równości (2.22) i (2.23) oraz rugując z nich S_{n+1} , otrzymujemy zależność

$$S_n + (n+1)v^n = vS_n + \frac{1-v^{n+1}}{1-v}.$$

Porządkując dalej z myślą o wyznaczeniu S_n , otrzymujemy

$$(1-v)S_n = -(n+1)v^n + \frac{1-v^{n+1}}{1-v}.$$

Po nietrudnych przekształceniach dostajemy

$$S_n = \frac{1 - (n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}, \quad (2.24)$$

a w konsekwencji

$$\sum_{k=1}^n kv^{k-1} = \frac{1 - (n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \quad (2.25)$$

□

Metoda przesunięcia. Rozpatrzmy przypadek wyznaczania wartości obecnej rent arytmetycznych, z wypłatami równymi $X_k = k$, przy stałej stopie procentowej $i > 0$, a więc także stałym czynnikiem dyskontującym $v = \frac{1}{1+i}$. Poszukujemy:

- (i) *wartości obecnej renty arytmetycznej pewnej płatnej z dołu, z wypłatami równymi $X_k = k$ dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.* Symbolem aktuarialnym

tej renty jest $(Ia)_{\overline{n}|i}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} PV &= (Ia)_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^n k \cdot v^k = \\ &= v + 2v^2 + 3v^3 + \dots (n-1)v^{n-1} + nv^n. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Z drugiej jednak strony

$$PV \cdot v = v \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot v^k = v^2 + 2v^3 + \dots + (n-1)v^n + nv^{n+1}. \quad (2.27)$$

Odejmując stronami od równości (2.26) równość (2.27), otrzymujemy

$$\begin{aligned} (1-v)PV &= (1-v)(Ia)_{\overline{n}|i} = \\ &= (v + v^2 + v^3 + \dots + v^n) + nv^{n+1} = a_{\overline{n}|i} + nv^{n+1}, \end{aligned}$$

co prowadzi do równości

$$PV = (Ia)_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i} + nv^{n+1}}{1-v}. \quad (2.28)$$

- (ii) *wartości początkowej renty wieczystej płatnej z dołu* mającej wypłaty $X_k = k$ dla $k \in \mathbb{N}_+$. Symbolem aktuarialnym tej renty jest $(Ia)_{\infty|i}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} PV &= (Ia)_{\infty|i} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot v^k = \\ &= 2v^2 + 3v^3 + \dots (n-1)v^{n-1} + nv^n + \dots, \end{aligned} \quad (2.29)$$

i dalej

$$\begin{aligned} PV \cdot v &= (Ia)_{\infty|i} \cdot v = v \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot v^k = \\ &= v^2 + 2v^3 + 3v^4 + \dots (n-1)v^n + nv^{n+1} + \dots, \end{aligned} \quad (2.30)$$

a stąd po odjęciu stronami przedstawionych równości mamy

$$\begin{aligned} (1-v)PV &= (1-v)(Ia)_{\infty|i} = \\ &= v + v^2 + v^3 + \dots + v^n + \dots = a_{\infty|i} = \frac{v}{1-v}, \end{aligned}$$

z uwagi na to

$$PV = (Ia)_{\infty|i} = \frac{v}{(1-v)^2}. \quad (2.31)$$

Metoda analityczna. Podobnie, jak w poprzednich przypadkach, kolejna metoda użyteczna przy rozwiązywaniu zadań rachunkowych służy wyznaczaniu wartości obecnej rent lub inaczej wyznaczaniu kapitału rentowego.

Tym razem poza umiejętnościami algebraicznymi wykorzystane zostaną własności ciągów i szeregów funkcyjnych. Należy pamiętać, że posługiwanie się tymi narzędziami zależy od uprzedniego sprawdzenia założeń stojących za wykorzystywanymi w tym procesie twierdzeniami, zwłaszcza tym o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych wyraz po wyrazie. Podobnie jak poprzednie, również metoda analityczna służy wyznaczaniu wartości obecnej rent arytmetycznych.

Dla *renty arytmetycznej rosnącej płatnej z góry* mamy

$$\begin{aligned} (I\ddot{a})_{\infty|} &= 1 + 2v + 3v^2 + 4v^3 + \dots = (v + v^2 + v^3 + \dots)' = \\ &= \left(\frac{1}{1-v} \right)' = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}. \end{aligned}$$

W przypadku *renty arytmetycznej rosnącej płatnej z dołu*, której kwoty wypłat w kolejnych latach są kolejnymi krotnościami wypłaty w pierwszym roku, mamy, że jej obecna wartość oznaczana przez $(Ia)_{\infty|}$ wynosi:

$$\begin{aligned} (Ia)_{\infty|} &= v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \dots = \\ &= v(1 + 2v + 3v^2 + \dots) = v \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{d}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.2.2. Renta geometryczna

W tym przypadku ciąg wypłat $CF_1, CF_2, \dots$ jest ciągiem geometrycznym. Tu również rozpatrzmy na wstępie ciągi skończone, n wyrazowe, a następnie zajmiemy się ciągami nieskończonymi, a właściwie szeregami.

Przypadek renty geometrycznej pewnej, płatnej z dołu. Jeśli $CF_1 = 1$ oraz iloraz wypłat jest liczbą $q \in \mathbb{R}_+$, to $CF_k = 1 \cdot q^{k-1}$. Dostajemy

wtedy przy stałym czynniku dyskontowym, że

$$\begin{aligned} PV_n^g &= (I\ddot{g})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n q^{k-1} v^k = \sum_{k=1}^n (q^{k-1}) v^k = \\ &= v \sum_{k=1}^n (qv)^{k-1} = v \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv},^1 \end{aligned}$$

a więc

$$PV_n^g = (Ig)_{\overline{n}|} = v \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv}. \quad (2.33)$$

Przypadek renty geometrycznej pewnej, płatnej z góry. Różnica w stosunku do renty płatnej z dołu polega jedynie na „późniejszym” dyskontowaniu, bowiem

$$\begin{aligned} P\ddot{V}_n^g &= (I\ddot{g})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n v^{k-1} = \sum_{k=1}^n (q^{k-1}) v^{k-1} = \\ &= CF_1 \sum_{k=1}^n (qv)^{k-1} = \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv}, \end{aligned}$$

a zatem

$$P\ddot{V}_n^g = (I\ddot{g})_{\overline{n}|} = \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv}. \quad (2.34)$$

Rozpatrując wieczystą rentę geometryczną, zamiast skończonych ciągów geometrycznych rozpatrujemy ciągi nieskończone, a wartość obecna jest odpowiednią sumą szeregu geometrycznego. Jego zbieżność zapewnia jedynie iloraz z przedziału $(-1; 1)$. W przypadku wypłat mogą wystąpić tylko ilorazy dodatnie, a więc dostajemy, że $0 < qv < 1$. Przy tym warunku dla renty wieczystej płatnej z dołu otrzymujemy zależność

$$PV_{\infty}^g = (Ig)_{\overline{\infty}|} = \frac{v}{1 - qv}, \quad (2.35)$$

¹ Ponieważ wśród symboli aktuarialnych nie ma takich, które odpowiadałyby wartościom obecnym rent geometrycznych, to symbole $(Ig)_{\overline{n}|}$ oraz $(I\ddot{g})_{\overline{n}|}$ wprowadzamy w tym tekście na odpowiedzialność autora, podobnie jak ich odpowiedniki dla wieczystych rent geometrycznych.

a dla renty wieczystej płatnej z góry zależność zmodyfikowaną do postaci

$$P\ddot{V}_{\infty}^g = (I\ddot{g})_{\infty|i} = \frac{1}{1 - qv}. \quad (2.36)$$

Zauważamy z łatwością, że renta geometryczna daje się sprowadzić do przypadku renty o stałych wypłatach i zmodyfikowanym czynniku dyskontującym.

2.2.3. Ćwiczenia

1. Wyznaczyć formułę na wartość przyszłą arytmetycznej n okresowej renty płatnej z dołu $(I\ddot{s})_{\overline{n}|i}$ przy stałej stopie procentowej (płaskiej strukturze terminowej).
2. Wyznaczyć formułę na wartość przyszłą wieczystej renty arytmetycznej płatnej z dołu $(Is)_{\infty|i}$ przy stałej stopie procentowej (płaskiej strukturze terminowej).
3. Wyznaczyć formułę na wartość obecną n okresowej renty arytmetycznej płatnej z góry $(I\ddot{a})_{\overline{n}|i}$ przy stałej stopie procentowej (płaskiej strukturze terminowej).
4. Wyznaczyć formułę na wartość obecną wieczystej renty arytmetycznej płatnej z góry $(I\ddot{a})_{\infty|i}$ przy stałej stopie procentowej (płaskiej strukturze terminowej).
5. Wyznaczyć formułę na wartość przyszłą n okresowej renty arytmetycznej płatnej z dołu $(Is)_{\overline{n}|i}$ przy stałej stopie procentowej (płaskiej strukturze terminowej).
6. Wyznaczyć formułę na wartość przyszłą wieczystej renty arytmetycznej płatnej z góry $(I\ddot{s})_{\overline{n}|i}$ przy stałej stopie procentowej (płaskiej strukturze terminowej).
7. Zakładając schodkową postać struktury terminowej stóp procentowych, czyli stałość czynników dyskontujących w obrębie każdego okresu wypłaty X_k dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ renty n okresowej płatnej z dołu oraz dla renty wieczystej płatnej z dołu, przedstawić wartość czynnika dyskontującego dla k -tej wypłaty.

8. Zakładając schodkową postać struktury terminowej stóp procentowych, czyli stałość czynników dyskontujących w obrębie każdego okresu wypłaty X_k dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ renty n okresowej płatnej z góry oraz renty wieczystej płatnej z góry, przedstawić wartość czynnika dyskontującego dla k -tej wypłaty.
9. Wyznaczyć formułę na wartości obecnej oraz przyszłą n okresowej renty geometrycznej.
10. Przedstawić metodę zaburzeń oraz zakres jej stosowalności.
11. Stosując metodę zaburzeń, wyznaczyć w jawnej postaci sumę

$$(i) S_n = \sum_{k=1}^n kv^{k-1}, \quad (ii) \sum_{k=1}^n k^2 v^k, \quad (iii) \sum_{k=1}^n k^3 v^k.$$

12. Wykonać polecenia zadań 1–6, posługując się metodą zaburzeń.
13. Pokazać, że

$$\begin{aligned} (i) a_{\infty|i} &= \frac{1}{i}, & (iv) \ddot{a}_{\infty|i} &= \frac{1}{d}, \\ (ii) a_{\infty|i}^{(m)} &= \frac{1}{i^{(m)}}, & (v) \ddot{a}_{\infty|i}^{(m)} &= \frac{1}{d^{(m)}}, \\ (iii) 1 - v^{\frac{1}{m}} &= \frac{1}{m} d^{(m)}, & (vi) \frac{i^{(m)}}{m} &= \frac{1 - v^{\frac{1}{m}}}{v^{\frac{1}{m}}}. \end{aligned}$$

14. Pokazać, że jeżeli $a_{\overline{n}|} = a$ oraz $\ddot{s}_{\overline{n}|} = b$, to $d = \frac{b-a}{ab}$.

15. Dowieść, że $a_{\overline{n}|} (1+i)^k = \ddot{s}_{\overline{k-1}|} + \ddot{a}_{\overline{n-k+1}|}$.

16. Dowieść, że jeśli $a_{\overline{n}|} = p$ oraz $(Ia)_{\overline{n}|} = q$, to

$$i = \frac{n-p}{(n+1)p-q}.$$

17. Dowieść, że

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|}}{\ddot{s}_{\overline{k}|}} = n + \ddot{s}_{\overline{k-1}|}.$$

18. Zbadać, czy dla $n, t \in \mathbb{N}_+$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{t(t+1)}{n(n+1)} < \frac{t - a_{\overline{t}|i}}{n - a_{\overline{n}|i}}.$$

19. Zakładając, że stopa procentowa oprocentowania złożonego z dołu jest równa i oraz że stopa dyskontowa oprocentowania złożonego z góry d są równoważne, dowieść, że

$$\frac{d^3}{(1-d)^2} = \frac{(i-d)^2}{1-v}, \quad \text{gdy} \quad v = \frac{1}{1+i} = 1-d.$$

2.2.4. Przykłady

1. Przez dwa lata na koniec każdego miesiąca wpłacamy 200 j.m. na rachunek oprocentowany według stopy $i^{(12)} = 0,005$. Wyznaczyć stan oszczędności na koniec drugiego roku.

Rozwiązanie. Wpłaty tworzą rentę o liczbie rat $n = 24$. Jest to renta pewna, płatna z dołu, o jednakowej kwocie wypłat równej $X = 200$ oraz $i = i^{(12)} = 0,005$. Mamy więc

$$FV = s_{\overline{24}|} = (Ia)_{\overline{24}|} = 200 \sum_{i=1}^{24} \frac{(1+0,005)^{24} - 1}{0,005} = 5\,086,392 \text{ j.m.}$$

□

2. Saldo rachunku bankowego, oprocentowanego przy stopie nominalnej i kwartalnej kapitalizacji odsetek, wynosi 10 000 j.m. Jaką kwotę można pobierać co kwartał z tego rachunku przez trzy lata, jeśli pierwsza wypłata nastąpi dokładnie za trzy miesiące?

Rozwiązanie. Jeśli przez trzy lata mamy wybierać co kwartał ustaloną kwotę X raty renty, to w ten sposób otrzymujemy rentę płatną z dołu, o dwunastu ratach przy stopie procentowej $i = i^{(12)} = \frac{0,08}{4} = 0,02$. W ten sposób

$$PV = X \cdot a_{\overline{12}|}.$$

Zatem skoro

$$\begin{aligned} a_{\overline{12}|} &= \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{(1+0,02)^i} = \frac{1}{1-1,02} \frac{1 - \frac{1}{(1+0,02)^{-12}}}{1 - \frac{1}{1+0,02}} = \\ &= \frac{1 - (1,02)^{-12}}{0,02} = 10,57534 \approx 10,5753, \end{aligned}$$

to

$$X = \frac{10\,000}{10,5753} \approx 945,60.$$

□

3. Renta wieczysta wypłaca jedną j.m. na koniec pierwszego roku, dwie na koniec drugiego roku i trzy na koniec trzeciego, zwiększając się co roku o jeden. Które z następujących wyrażen przedstawia obecną wartość renty?

$$(i) \quad \frac{1}{i^2}, \quad (ii) \quad \frac{1-d}{d^2}, \quad (iii) \quad e^\delta + e^{-\delta}?$$

Rozwiązanie. Ponieważ mamy

$$\begin{aligned} s_{\infty|} &= (Ia)_{\infty|} = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \dots = \\ &= v(1 + 2v + 3v^2 + \dots) = v \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{d} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\infty|} &= \frac{(Ia)_{\infty|}}{i} = 1 + 2v + 3v^2 + \dots = (I\ddot{a})_{\infty|} = \\ &= (v + v^2 + v^3 + \dots)' = \left(\frac{1}{1-v} \right)' = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}, \end{aligned}$$

to odejmując stronami, dostaniemy:

$$\begin{aligned} \frac{s_{\infty|}}{i} - s_{\infty|} &= s_{\infty|} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) = 1 + v + v^2 + \dots = \\ &= \frac{1}{1-v} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{i}. \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } s_{\infty|i} = \frac{1+i}{i}, \text{ a więc } s_{\infty|} = \frac{1+i}{i^2}.$$

□

4. Znaleźć wartość obecną ciągu płatności $\underline{X}$, gdy stopa procentowa jest stale równa $i = 0,05$, zaś wyraz ogólny ciągu ma postać

$$X_k = \begin{cases} k(20 - k), & \text{dla } k \in \{1, 2, \dots, 20\}, \\ 0, & \text{dla } k \in \{21, 22, \dots\}. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy:

$$\begin{aligned} a_{\overline{20}|} &= \sum_{k=1}^{20} k(20 - k)v^k = \\ &= 1(20 - 1)v + 2(20 - 2)v^2 + \dots + 19(20 - 19)v^{19} + 20(20 - 20)v^{20}. \end{aligned}$$

Ale również:

$$\frac{a_{\overline{20}|}}{v} = 1(20 - 1) + 2(20 - 2)v + \dots + 19(20 - 19)v^{18} + 20(20 - 20)v^{19}.$$

Poza tym jest:

$$k(20 - k) - (k - 1)[20 - (k - 1)] = 21 - 2k.$$

W konsekwencji możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \frac{a_{\overline{20}|}}{v} - a_{\overline{20}|} &= a_{\overline{20}|} \cdot i = 19 + \sum_{k=1}^{19} [21 - 2(k + 1)]v^k = \\ &= 19 + \sum_{k=1}^{19} (19 - 2k)v^k = 19 + 19a_{\overline{19}|} - 2a_{\overline{20}|} \cdot a_{\overline{19}|}. \end{aligned}$$

Stąd

$$a_{\overline{20}|} = \frac{19 + 19a_{\overline{19}|} - 2a_{\overline{20}|}a_{\overline{19}|}}{i} \simeq 836,$$

$$\text{gdzie } a_{\overline{20}|}a_{\overline{19}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}.$$

□

5. Wyznaczyć obecną wartość płatności dokonywanych na koniec każdego roku przez trzydzieści lat, jeżeli wysokość płatności w roku t jest równa X_{31-t} , gdzie $X_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Do obliczeń przyjmujemy techniczną stopę procentową równą $i = 0,05$.

Rozwiązanie. Dla wygody przyjmijmy oznaczenie: $a_{\overline{30}|} = \frac{1}{2}I$,
gdzie

$$I = 30(30 + 1)v + 29(29 + 1)v^2 + \dots + 1(1 + 1)v^{30}.$$

Stąd natychmiast

$$I = 30(30 + 1)v^2 + 29(29 + 1)v^3 + \dots + 1(1 + 1)v^{31}.$$

I ponownie dla wygody mamy:

$$Iv - I = I(v - 1) = 2 \cdot v^2 + 2 \cdot 29v^3 + \dots + 2 \cdot 2v^{30} + 2 \cdot 1v^{31} - 30 \cdot 31v,$$

gdzie jeśli

$$30v + 29v^2 + \dots + 1v^{30} = Av,$$

to

$$A(v - 1) = v^2 + v^3 + \dots v^{30} + v^{31} - 30v.$$

Wtedy otrzymujemy

$$A = \frac{v(a_{\overline{30}|} - 30)}{v - 1}.$$

To daje wynik

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2v^2(a_{\overline{30}|} - 30)}{v - 1} - 30 \cdot 31v}{v - 1} \simeq 3450. \quad \square$$

6. Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego roku. W latach nieparzystych pierwsza rata wynosi dwa, a każda następna jest o trzy większa od poprzedniej, natomiast w latach parzystych pierwsza rata wynosi trzy, a każda następna jest o dwa większa od poprzedniej. Ile wynosi obecna wartość tej renty, jeżeli stopa procentowa jest równa $i = 0,05$?

Rozwiązanie.

(I. sposób) Bez zbędnych komentarzy wprost z treści zadania mamy

$$\begin{aligned} PV &= \underbrace{(2v^2 + 5v^3 + 8v^5 + \dots)}_{S_1} + \underbrace{(3v^2 + 5v^4 + 7v^6 + \dots)}_{S_2} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (3k-1)v^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)v^{2k}. \end{aligned}$$

Mamy, że

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} 3kv^{2k-1} = v \sum_{k=1}^{\infty} (3k-1)v^{2(k-1)} = \\ &= 3v \sum_{k=1}^{\infty} k(v^2)^{k-1} - v \sum_{k=1}^{\infty} (v^2)^{k-1} = \\ &= 3v \sum_{k=1}^{\infty} [(v^2)^k]' - \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{\infty} (v^2)^k = \left| \begin{array}{l} u := v^2 \\ v = \sqrt{u} \end{array} \right| = \\ &= 3\sqrt{u} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u^k \right)' - \frac{1}{\sqrt{u}} \sum_{k=1}^{\infty} u^k = 3\sqrt{u} \left(\frac{u}{1-u} \right)' - \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{u}{1-u} = \\ &= 3\sqrt{u} \frac{1-u+u}{(1-u)^2} - \frac{\sqrt{u}}{1-u} = \frac{3\sqrt{u}}{(1-u)^2} - \frac{\sqrt{u}}{1-u} = \\ &= \sqrt{u} \frac{3-1+u}{(1-u)^2} = \sqrt{u} \frac{2+u}{(1-u)^2} = v \frac{2+v^2}{(1-v)^2} = \frac{v^3+2v}{(1-v^2)^2}. \end{aligned}$$

Napiszmy z ulgą, że

$$S_1 = \frac{v^3+2v}{(1-v^2)^2}.$$

Obliczmy teraz sumę S_2 . Mamy

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)v^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2kv^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} v^{2k} = \\ &= 2v^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(v^2)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} v^{2k} = \left| \begin{array}{l} u := v^2 \\ v = \sqrt{u} \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2u \left(\sum_{k=1}^{\infty} u^k \right)' + \sum_{k=1}^{\infty} u^k = 2u \left(\frac{u}{1-u} \right)' + \frac{u}{1-u} = \\
&= 2u \frac{1-u+u}{(1-u)^2} + \frac{u}{1-u} = \frac{2u+u(1-u)}{(1-u)^2} = \frac{u(3-u)}{(1-u)^2} = \\
&= \frac{3u-u^2}{(1-u)^2} = \frac{3v^2-v^4}{(1-v^2)^2}.
\end{aligned}$$

W takim razie

$$S_2 = \frac{3v^2 - v^4}{(1 - v^2)^2},$$

a w konsekwencji

$$S = S_1 + S_2 = \frac{v^3 + 2v}{(1 - v^2)^2} + \frac{3v^2 - v^4}{(1 - v^2)^2} = \frac{-v^4 + v^3 + 3v^2 + 2v}{(1 - v^2)^2}.$$

Przy stopie procentowej $i = 0,05$ mamy, że

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,05} \simeq 0,952\,381,$$

a wtedy $S \simeq 540$. □

(II. sposób) Taką rentę możemy podzielić na dwie „podrenty”. Zajmijmy się nimi po kolei.

Renta płatna w latach nieparzystych. Dla tej renty jej k -ta wypłata ma postać

$$X'_k = 2 + (k - 1) \cdot 3,$$

a więc jej wartość obecna to

$$\begin{aligned}
PV_{np} &= \sum_{k=1}^{\infty} X'_k \cdot (v^2)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} [2 + (k - 1) \cdot 3] \cdot (v^2)^{k-1} = \\
&= \frac{1}{v^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2 \cdot v^{2k} + 3k \cdot v^{2k} - 3 \cdot v^{2k}) = \\
&= \frac{1}{v^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 3k \cdot v^{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} v^{2k} \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{v^2} \left(3 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (v^2)^k - \sum_{k=1}^{\infty} (v^2)^k \right) = \frac{1}{\bar{v}} \left(3 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \bar{v}^k - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}^k \right),$$

gdzie $\bar{v} = v^2$. Następnie, korzystając ze znanych już formuł, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}^k = \frac{\bar{v}}{1 - \bar{v}} = \frac{v^2}{1 - v^2}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \bar{v}^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k \cdot \bar{v}^k = \frac{\bar{v}}{(1 - \bar{v})^2} = \frac{v^2}{(1 - v^2)^2},$$

a ponieważ $v^2 = 0,906$, to mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}^k = \frac{1}{1 - v^2} = \frac{1}{1 - 0,906} \simeq 10,64,$$

stąd zaś

$$\begin{aligned} PV_{np} &= \frac{1}{v^2} \left(3 \cdot \frac{v^2}{(1 - v^2)^2} - \frac{v^2}{1 - v^2} \right) = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{(1 - v^2)^2} - \frac{1}{1 - v^2} = 3 \cdot (10,64)^2 - 10,64 = 328,99. \end{aligned}$$

Renta płatna w latach parzystych

$$X_k'' = 3 + (k - 1)2$$

i wtedy

$$\begin{aligned} FV_p &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k'' \cdot v \cdot (v^2)^{k-1} = v \sum_{k=1}^{\infty} X_k'' \cdot (v^2)^{k-1} = \\ &= v \sum_{k=1}^{\infty} [3 + (k - 1)2] \cdot (v^2)^{k-1} = v \sum_{k=1}^{\infty} (1 + 2k) \cdot (v^2)^{k-1} = \\ &= \frac{1}{v} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{v}^k \right) = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{\bar{v}}{1 - \bar{v}} + 2 \frac{\bar{v}}{(1 - \bar{v})^2} \right) = \\ &= \frac{1}{v} \left(\frac{v^2}{1 - v^2} + 2 \frac{v^2}{(1 - v^2)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= 1,05 \cdot (0,906 \cdot 10,64 + 2 \cdot 0,906 \cdot (10,64)^2) = 225,51.$$

Ostatecznie mamy

$$PV = PV_{np} + PV_p \approx 328,99 + 225,51 = 554,50. \quad \square$$

7. Pracownik rozważa metodę zabezpieczenia swoich finansów na moment przejścia na emeryturę, co nastąpi za dziesięć lat. Zakładając, że może on z bieżących dochodów odłożyć na początku każdego miesiąca tysiąc złotych i że nominalna stopa oprocentowania lokat ma być równa $i = 0,05$, to czy ze zgromadzonych pieniędzy może on liczyć na kwotę dwunastu tysięcy wypłacanych na początku każdego roku, spośród piętnastu, jakie emeryt zamierza przeżyć od chwili uzyskania świadczeń?

Rozwiązanie. Skoro do momentu przejścia na emeryturę czeka pracownika jeszcze dekada, to jego regularne wpłaty w kwocie 1 000 j.m. dokonywane na początku miesiąca stanowią dziesięcioletnią rentę płatną z góry, pamiętając, że stopa nominalna lokat jest równa $i = 0,05$. Tu warto zauważyć rzecz oczywistą, że wpłata w pierwszym miesiącu będzie oprocentowana na $\frac{12}{12} \cdot 0,05$, druga na $\frac{11}{12} \cdot 0,05$, a ostatnia na $\frac{1}{12} \cdot 0,05$, dlatego też wygodniej nam będzie ustalić wysokość rocznej wpłaty wraz z oprocentowaniem. Oznaczając ją przez W , mamy

$$\begin{aligned} W &= 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{12}{12} \cdot 0,05\right) + 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{11}{12} \cdot 0,05\right) + \dots \\ &\quad \dots + 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0,05\right) = \\ &= 12\,000 + \frac{12 + 11 + \dots + 2 + 1}{12} \cdot 50 = 12\,000 + \frac{78}{12} \cdot 50 = 12\,325. \end{aligned}$$

Tym samym wpłaty na lokatę można uznać za rentę płatną z góry o wartości przyszłej $W = 12\,325$, ale rentę 9-letnią, bo pierwsza taka kwota zostanie zgromadzona po upływie roku, a ostatnia po upływie kolejnych 9 lat. A więc wartość przyszła, za dziesięć lat

FV_{10} wyniesie

$$\begin{aligned} FV &= W \cdot a_{\overline{9}|0,05} = 12\,325 \cdot 1 \cdot \frac{1 - 1,05^9}{1 - 1,05} = \\ &= 12\,000 \cdot \frac{1,05^9 - 1}{0,05} = 12\,000 \cdot 20 \cdot (1,05^9 - 1) = \\ &= 240\,000 \cdot (1,551328216 - 1) = 240\,000 \cdot 0,551328216 = \\ &= 132\,318,7718. \end{aligned}$$

Wszystko, co otrzyma emeryt, da się zaktualizować na chwilę $t = 10$, czyli na moment przejścia na emeryturę. Mamy więc nową rentę płatną z góry przez piętnaście lat, przy tej samej stopie procentowej, bo kapitał, jaki został zgromadzony, będzie też „obrosł odsetkami” przy stopie $i = 0,05$. Zaktualizowaną sumę wypłat oznaczmy przez PV_{10} . Mamy wtedy

$$\begin{aligned} PV_{10} &= 12\,000 \cdot 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,05}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{1,05}} = 12\,000 \cdot 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,05}\right)^{15}}{\frac{0,05}{1,05}} = \\ &= 12\,000 \cdot 21 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{1,05}\right)^{15}\right] = 12\,000 \cdot 21 \cdot (1 - 0,481017098) = \\ &= 12\,000 \cdot 21 \cdot 0,518982901 = 132\,318,7718. \end{aligned}$$

Odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest twierdząca, ponieważ

$$FV_{10} - PV_{10} = 132\,318,7718 - 132\,318,7718 = 1\,535,08052.$$

Gdyby jednak zapobiegliwy przyszły emeryt miał pecha i przeżył na emeryturze więcej, niż piętnaście lat, to po upływie tego czasu nie mógłby już liczyć na dodatkowe pieniądze. $\square$

8. Wyznaczyć wartość obecną renty wieczystej, płatnej z dołu i wypłacającej w roku k ratę w wysokości $\frac{1}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, jeżeli obowiązuje płaska struktura stóp terminowych, a stopa procentowa wynosi $i = 0,05$.

Rozwiązanie. Tradycyjnie niech PV oznacza wartość obecną renty. Skoro dana jest stopa procentowa $i = 0,05$, to przedstawmy wartość obecną renty jako funkcję argumentu i . Zatem

$$PV(i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (1+i)^{-k}.$$

Nie dysponujemy zależnością, która pozwalałaby na zwarty zapis ostatniej formuły, jednak traktując prawą jej stronę jako sumę szeregu potęgowego, możemy skorzystać z twierdzenia o różniczkowalności takiego szeregu „wyraz po wyrazie”. Na wstępie obliczmy pochodną $PV(i)$.

$$PV'(i) = - \sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k-1} = - \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots \right].$$

Otrzymana suma szeregu geometrycznego ma iloraz $\frac{1}{1+i} < 1$, a więc spełniony jest warunek jego zbieżności. Dostajemy zgodnie z nim

$$PV'(i) = - \frac{\frac{1}{(1+i)^2}}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{-1}{i(1+i)}.$$

Teraz możemy się powołać na twierdzenie o całkowalności szeregu potęgowego „wyraz po wyrazie”, co daje nam równość

$$\begin{aligned} PV(i) &= - \int \frac{1}{i(1+i)} di = \int \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{i} \right) di = \\ &= \ln|1+i| - \ln|i| = \ln \left| \frac{1+i}{i} \right|. \end{aligned}$$

Dla $i = 0,05$ dostajemy

$$PV(0,05) = \ln \left| \frac{1+0,05}{0,05} \right| = \ln 21 = 3,045$$

i to jest odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie. □

2.2.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Renta 5-letnia płaćca z dołu raty roczne w stałej wysokości $X_k = 5\,000$ j.m. ma wartość obecną $PV = 16\,375,10$. Wyznaczyć wartość stopy procentowej, przy której wartość ta została osiągnięta [2].
2. Rozpatrzmy dwie renty pewne, 12-okresowe, płaćce raty w wysokości $X_k = 100$ j.m. każda, przy okresowej stopie procentowej wynoszącej $i = 0,095$, przy czym jedna z nich raty płaci z góry, a druga z dołu. Przy jakiej wartości stopy procentowej zachodziłaby równość $|PV_1 - PV_2| = 0,8 \cdot X_k$ [2]?
3. Rozpatrzmy rentę 12-miesięczną płatną z dołu, której kwoty wypłat opisuje następujący warunek:

$$X_k = \begin{cases} 100 \text{ j.m.,} & \text{dla } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ 200 \text{ j.m.,} & \text{dla } k \in \{6, 7, 8, 9\}, \\ 150 \text{ j.m.,} & \text{dla } k \in \{10, 11, 12\}. \end{cases}$$

Wiedząc, że w czasie życia renty obowiązuje nominalna stopa procentowa $i = 0,12$ oraz kapitalizacja miesięczna, obliczyć dla tej renty wartości obecną PV oraz wartość przyszłą FV .

4. Dane są dwie renty wieczyste. Pierwsza z nich w roku $k \in \mathbb{N}_+$ wypłaca ratę w wysokości $X_k = \frac{(k-1)^2 + 1}{2^{k-1} \cdot (k-1)!}$ na początku roku, natomiast druga wypłaca ratę na końcu roku w wysokości $Y_k = k(k+2)$. Ile wynosi suma wartości obecnych tych rent, jeżeli stopa procentowa jest równa $i = 0,045$? [Z2. EA 04.04.11.]
5. Renta wieczysta płatna z dołu wypłaca w k -tym okresie kwotę w wysokości $X_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$, dla $k \in \mathbb{N}_+$. Wiedząc, że w czasie życia renty stopa procentowa wynosi $i = 0,05$ i jest stała, wyznaczyć PV – wartość obecną renty [Z2. EA 14.05.07.]
6. Renta 20-letnia, płatna z dołu, wypłaca w k -tym okresie kwotę w wysokości $X_k = \binom{20}{k}$ j.m. Wiedząc, że w czasie trwania renty stopa procentowa jest stała oraz równa $i = 0,05$, obliczyć wartość obecną renty. [Z6. EA 05.06.06.]

7. Obliczyć wartość przyszłą 15-miesięcznej renty o stałej wysokości wypłat kwartalnych, wiedząc, że kwoty wypłat rosną w kolejnych kwartałach o 4%. Pierwsza rata renty wynosi 150, a miesięczna stopa procentowa jest równa 2%. [Z9. EA 17.06.00.]
8. Wyznaczyć wartość obecną płatności dokonywanych na końcu każdego roku przez okres 25 lat, wiedząc, że wysokość płatności w roku k wynosi $X_k = k(26 - k)$ dla $k \in \{1, 2, \dots, 25\}$. Przyjąć efektywną roczną stopę $i_{ef} = 5,00\%$. [Z8. EA 11.10.03.]
9. Renta wieczysta płaci na koniec roku o numerze $k \in \mathbb{N}_+$ kwotę $X_k = \frac{k}{k+1}$. Efektywna roczna stopa dyskontowa jest zmienna, przy czym w roku k wynosi ona $\frac{k}{k+1} \cdot i$, gdzie stałe $i = 0,08$. Wyznaczyć wartość obecną tej renty. [Z8. EA 09.10.06.]
10. Renta wieczysta płatna z dołu w roku o numerze $k \in \mathbb{N}_+$ płaci ratę $X_k = \frac{1}{k(k+1)}$. Rozpatrzmy n takich identycznych rent, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$. Ile co najmniej powinno wynosić n , aby suma wartości obecnych rent była dwukrotnie wyższa od wartości obecnej renty wieczystej płatnej z dołu wypłacającej kwotę $Y_k = \frac{1}{k}$, jeśli obowiązuje stały czynnik dyskontujący $v = 0,9$? [Z3. EA 05.10.09.]
11. Wartość obecną renty wieczystej płatnej z dołu wyraża zależność $PV = \frac{1}{(1-v)^3}$, przy v generowanym przez obowiązującą w czasie życia renty stopę procentową i . Jaka jest wypłata X_{10} , jeśli $i = 0,05$? [Z8. EA 30.11.09.]
12. Renta wieczysta płatna z dołu wypłaca w k -tym roku jej życia kwotę w wysokości $X_k = k$, dla $k \in \mathbb{N}_+$. Zakładając, że struktura terminowa stóp procentowych jest płaska w całym czasie życia renty oraz $v = 0,49$, obliczyć wartość obecną renty. [Z2. EA 31.05.10.]
13. Renta wieczysta płatna z góry wypłaca raty X_k na początku każdego nieparzystego roku k . Wysokość raty wypłacanej na początku

roku $2n - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, wynosi:

$$X_n = \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdot 3^n}.$$

Obliczyć wartość PV tej renty na początku pierwszego roku, jeżeli stopa oprocentowania wynosi $i = 0,045$. [Z10. EA 20.06.11.]

14. Renta wieczysta wypłaca raty na początku każdego nieparzystego roku. Wysokość raty wypłacanej na początku roku o numerze $2n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest równa

$$X_{2n+1} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{2^n}.$$

Wyznaczyć formułę wyrażającą wartość obecną PV tej renty na początku pierwszego roku, jeżeli czynnik dyskontujący jest stale równy v . [Z2. EA 03.10.11.]

15. Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego parzystego roku. Kwota raty wypłacanej na końcu roku $2n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, wynosi:

$$X_{2n} = \frac{n(2n-1)}{5^n}.$$

Przyjmijmy, że $PV(v)$ oznacza wartość obecną tej renty obliczoną przy wartości czynnika dyskontującego równej v . Wyznaczyć pochodną funkcji $PV(v)$. [Z10. EA 15.06.15.]

16. Wyznaczyć wartość obecną renty wieczystej płatnej z dołu i wypłacającej w roku k ratę w wysokości $X_k = \frac{1}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, jeżeli obowiązuje płaska struktura stóp terminowych, a stopa procentowa wynosi $i = 0,05$. [Z8. EA 05.12.05.]

2.3. Renty – modele ciągłe

Dotychczas traktowaliśmy renty jako funkcje argumentu dyskretnego, a więc albo jako elementy zbioru $\mathbb{R}_+^{\{1,2,\dots,n\}}$, czyli renty pewne, albo elementy zbioru $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}_+}$, czyli ciągi nieskończone – renty wieczyste. Jako że na etapie omawiania końcowej fazy procesu akumulacji dokonaliśmy przejścia z liczbą przepływów finansowych od przypadków skończonych,

poprzez nieskończenie przeliczalne, do przypadków nieprzeliczalnych, co oznacza w istocie modele ciągłe.

Rozpatrując rentę pewną n okresową, o czasie życia $[0; T]$, taką, że wszystkie przepływy wypłaty CF_t są równe 1 j.m., zauważamy, że przy stałej stopie procentowej $i > 0$ funkcja akumulacji ciągłej $A_{ct} : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ jest graniczną postacią przy $n \rightarrow +\infty$, funkcji akumulacji złożonej $A_c : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ i ma postać

$$\begin{aligned} A_{ct}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} A_c(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{n} \right)^n \right]^t = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{i}} \right)^{\frac{n}{i}} \right]^{it} = e^{it}. \end{aligned}$$

Przyjmujemy wówczas, że $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \ln(1+i)$, co daje możliwość nadania funkcji akumulacji nowej postaci, a bardziej precyzyjnie: funkcji akumulacji ciągłej jako funkcji zadanej równością

$$A_{ct}(t) = e^{\delta t}, \quad \text{dla } t \in [0; +\infty).$$

Niezmiennosc w czasie stopy zwrotu, algebraicznie wyrażona równością $\delta = \delta(t) = \text{const}$ w przypadku szczególnym stopy procentowej, prowadzi do modelu ciągłego akumulacji. W literaturze wielkość δ nazywana jest *intensywnością oprocentowania*, zaś w sytuacji, w której δ nie jest stałą funkcją czasu, funkcję $t \mapsto \delta(t)$ nazywamy zwykle *chwilową stopą procentową*.

2.3.1. Symbolika aktuarialna dla modeli ciągłych

1. Jednostka kapitału płaćta równomiernie, czyli gdy $\varrho(t) = 1$ w ciągu roku przez T lat.

Jest to zatem forma renty pewnej, renty ciągłej, gdy $t \in [0; T]$. Symbol aktuarialny wartości obecnej takiej renty to $\bar{a}_{\overline{T}|}$, a więc mamy

$$PV = \int_{[0; T]} \varrho(t) \cdot e^{-\delta t} dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \Big|_0^T = \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta T}). \quad (2.37)$$

Wartość przyszła takiej renty ma następujące symbol i formułę:

$$FV = \int_{[0;T]} \varrho(t) \cdot e^{\delta t} dt = \frac{1}{\delta} e^{\delta t} \Big|_0^T = \frac{1}{\delta} (e^{\delta T} - 1). \quad (2.38)$$

Dla renty ciągłej z jednostką płatną równomiernie w ciągu roku przez T lat mamy zatem:

- $\bar{a}_{\overline{T}|}$ – wartość obecna renty ciągłej przy $\varrho(t) = 1$ oraz $t \in [0; T]$.
- $\bar{s}_{\overline{T}|}$ – wartość przyszła renty ciągłej przy $\varrho(t) = 1$ oraz $t \in [0; T]$.

2. Jednostka kapitału płatna równomiernie, czyli gdy $\varrho(t) = 1$ w ciągu roku, ale wieczyście.

Jest to zatem forma renty pewnej, ale ciągłej, w której $t \in [0; T]$. Symbol aktuarialny wartości obecnej takiej renty to $\bar{a}_{\overline{T}|}$, a więc mamy

$$\begin{aligned} PV &= \int_{[0;+\infty)} \varrho(t) \cdot e^{-\delta t} dt = -\frac{1}{\delta} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(e^{-\delta t} \Big|_0^T \right) = \\ &= -\frac{1}{\delta} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{\delta \cdot T}} - \frac{1}{e^{\delta \cdot 0}} \right) = \frac{1}{\delta}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Z łatwością zauważamy, że wartość przyszła takiej renty jest równa

$$\begin{aligned} FV &= \int_{[0;+\infty)} \varrho(t) \cdot e^{\delta t} dt = \frac{1}{\delta} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(e^{\delta t} \Big|_0^T \right) = \\ &= \frac{1}{\delta} \lim_{T \rightarrow +\infty} (e^{\delta \cdot T} - e^{\delta \cdot 0}) = \frac{1}{\delta} \cdot (\infty - 1) = +\infty. \end{aligned}$$

A zatem dla renty ciągłej z jednostką płatną równomiernie w ciągu roku wieczyście mamy, że

- $\bar{a}_{\overline{\infty}|}$ – wartość obecna renty ciągłej przy $\varrho(t) = 1$ oraz $t \in [0; +\infty)$ jest odwrotnością intensywności oprocentowania, czyli $\frac{1}{\delta}$.
- $\bar{s}_{\overline{\infty}|}$ – wartość przyszła renty ciągłej, przy $\varrho(t) = 1$ oraz $t \in [0; \infty)$ jest nieograniczona.

3. Renty zmienne płatne w sposób ciągły.

Mając na względzie fakt, że funkcja $\varrho : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest ciągła, ale nie jest określona jawnie, wymagamy od niej, by była rosnąca. W tej sytuacji możemy jedynie omówić przykład funkcji intensywności przepływów. Przyjmijmy, że $\varrho(t) = t$, do tego załóżmy, że $T \in \mathbb{N}_+$. Wtedy wartość obecna tak określonej renty ciągłej jest wówczas równa

$$\begin{aligned} PV &= \int_{[0;T]} tv^t dt = \int_0^T tv^t dt = \left[\frac{tv^t}{\ln v} - \int \frac{1}{\ln v} v^t dt \right]_0^T = \\ &= \frac{1}{\ln v} \left[tv^t - \int v^t dt \right]_0^T = \frac{1 - v^T}{\delta^2} - \frac{Tv^T}{\delta} = \frac{\bar{a}_{\overline{T}|} - Tv^T}{\delta}. \end{aligned}$$

Zatem dla renty ciągłej z rosnącą funkcją przepływów postaci $\varrho(t) = t$ oraz dla $t \in [0; T]$ mamy

- $(I\bar{a})_{\overline{T}|}$ – wartość obecna renty ciągłej przy $\varrho(t) = t$ oraz $t \in [0; T]$.
- $\bar{s}_{\infty|}$ – wartość przyszła renty ciągłej przy $\varrho(t) = 1$ oraz $t \in [0; \infty)$ jest nieograniczona.

Co do zasady, gdy funkcja intensywności (gęstości) przepływów finansowych $\varrho : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ nie jest formalnie określona, to wartość obecna takiej renty jest równa

$$PV = \int_0^T \varphi(t) v^t dt,$$

gdy stopa procentowa i w czasie życia renty jest stała, przez co czynnik dyskontujący jest również stały, przy czym $v = \frac{1}{1+i}$, a intensywność oprocentowania $\delta(t) = \delta = \ln(1+i)$ nie zależy od czasu. Jeśli natomiast δ zależy od czasu t , to dostajemy

$$PV = \int_0^T \varrho(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} dt.$$

2.3.2. Ćwiczenia

1. Dla przypadku funkcji akumulacji ciągłej, funkcji intensywności oprocentowania δ oraz ciągłej funkcji gęstości płatności ϱ tak określonych w przedziale czasu $[0; T]$, że

$$\delta(t) = \delta = \text{const} \quad \text{oraz} \quad \varrho(t) = \varrho = \text{const},$$

wyznaczyć wartość obecną PV strumienia płatności, jeśli zachodzi warunek $T = 1$. Co jest warunkiem koniecznym istnienia PV ?

2. Wyznaczyć wartość obecną PV renty ciągłej o intensywności wypłat $\varrho(t) = 1$ oraz stałej funkcji natężenia oprocentowania $\delta(t) = \delta = \text{const}$ w przedziale $[0; +\infty)$.
3. Jaka jest wartość obecna ciągłej renty pewnej $\bar{a}_{\overline{n}|}$ o intensywności oprocentowania równej $\delta(t) = \delta$ oraz gęstości płatności $\varrho(t) = 1$?
4. Jaka jest wartość obecna wieczystej renty ciągłej $\bar{a}_{\infty|}$ o intensywności oprocentowania równej $\delta(t) = \delta$ oraz gęstości płatności $\varrho(t) = 1$?

2.3.3. Przykłady

1. Dane są renty ciągłe, w których płatność w chwili t jest równa $\varrho(t) = t$, a natężenie oprocentowania zależy od długości okresu wypłaty i wynosi $\delta = \frac{1}{n}$. Wyznaczyć, ile razy wartość obecna renty wypłacanej przez trzy lata jest większa od wartości obecnej renty wypłacanej przez dwa lata.

Rozwiązanie. Rozpocznijmy od faktu:

$$PV(t) = \int_0^t \varrho(s) e^{-\delta s} ds.$$

W naszym przypadku

$$PV(n) = \int_0^n \varrho(t) e^{-\delta t} dt = \int_0^n t e^{-\frac{1}{n}t} dt.$$

Dla uproszczenia rachunków obliczmy całkę nieoznaczoną

$$\begin{aligned} \int_0^n te^{-\frac{1}{n}t} dt &= \left| \begin{array}{ll} f(t) = t & g'(t) = e^{-\frac{1}{n}t} \\ f'(t) = 1 & g(t) = -ne^{-\frac{1}{n}t} \end{array} \right| = \\ &= -nte^{-\frac{1}{n}t} + n \int e^{-\frac{1}{n}t} dt = -nte^{-\frac{1}{n}t} - n^2 e^{-\frac{1}{n}t} + C. \end{aligned}$$

Z kolei na mocy twierdzenia Newtona-Leibniza możemy policzyć $PV(n)$ i mamy:

$$\begin{aligned} PV(n) &= \int_0^n te^{-\frac{1}{n}t} dt = \left[-nte^{-\frac{1}{n}t} - n^2 e^{-\frac{1}{n}t} \right]_0^n = \\ &= -n^2 te^{-1} - n^2 te^{-1} + n^2 = n^2 \left(1 - \frac{2}{e} \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\lambda = \frac{PV(3)}{PV(2)} = \frac{9 \left(1 - \frac{2}{e} \right)}{4 \left(1 - \frac{2}{e} \right)} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Zatem $\lambda = 2,25$. □

- 2.** Inwestor rozważa nabycie 10-letniej renty pewnej ciągłej, natychmiast płatnej, o intensywności wypłat określonej przez równość $\varrho(t) = t^2$. Wiadomo, że w całym rozpatrywanym okresie intensywność oprocentowania jest stała i wynosi $\delta_1 = 7\%$. O ile mniej zapłaciłby inwestor, gdyby zrezygnował z otrzymywania płatności w ostatnim, 5-letnim okresie wypłaty, a intensywność oprocentowania zostałaaby podwyższona i wynosiłaby $\delta_2 = 10,00\%$? Cena renty w każdym rozpatrywanym przypadku jest równa jej obecnej wartości.

Rozwiązanie. Mamy

$$PV(n, \delta) = \int_0^n \varrho(t) e^{-\delta t} dt,$$

a uwzględniając postaci intensywności wypłat oraz intensywności oprocentowania występujące w treści zadania, dostajemy

$$PV(n, \delta) = \int_0^n t^2 e^{-\delta t} dt.$$

Wyznamy teraz funkcję pierwotną. Mamy

$$\begin{aligned}
 \int t^2 e^{-\delta t} dt &= \left| \begin{array}{l} f(t) = t^2, \quad g'(t) = e^{-\delta t} \\ f'(t) = 2t, \quad g(t) = \frac{-1}{\delta} e^{-\delta t} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{-1}{\delta} t^2 e^{-\delta t} + \frac{2}{\delta} \int t e^{-\delta t} dt = \left| \begin{array}{l} f_1(t) = t, \quad g'_1(t) = e^{-\delta t} \\ f'_1(t) = 1, \quad g_1(t) = \frac{-1}{\delta} e^{-\delta t} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{-1}{\delta} + \frac{2}{\delta} \left(\frac{-1}{\delta} t e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta} \int e^{-\delta t} dt \right) = \\
 &= \frac{-1}{\delta} t^2 e^{-\delta t} - \frac{2}{\delta^2} t e^{-\delta t} - \frac{2}{\delta^3} e^{-\delta t} + C = -e^{-\delta t} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{2}{\delta^2} + \frac{2}{\delta^3} \right) + C.
 \end{aligned}$$

W rezultacie, na mocy twierdzenia Newtona-Leibniza, mamy

$$\begin{aligned}
 PV(n, \delta) &= \left[-e^{-\delta t} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{2}{\delta^2} + \frac{2}{\delta^3} \right) \right]_0^n = \\
 &= -e^{-n\delta} \left(\frac{1}{\delta} n^2 + \frac{2}{\delta^2} n + \frac{2}{\delta^3} \right) + \frac{2}{\delta^3}.
 \end{aligned}$$

Jeśli przez Δ oznaczymy kwotę, którą inwestor zaoszczędzi przy rezygnacji z części okresu wypłat, ale przy podwyższeniu intensywności oprocentowania, to dostajemy

$$\begin{aligned}
 \Delta &= PV(20; 0,07) - PV(15; 0,1) = \\
 &= -e^{-1,4} \left(\frac{400}{0,07} + \frac{40}{0,0049} + \frac{2}{0,000343} \right) + \frac{2}{0,000343} + \\
 &\quad + e^{-1,5} \left(\frac{225}{0,1} + \frac{30}{0,01} + \frac{2}{0,001} \right) - \frac{2}{0,001} \approx 589.
 \end{aligned}$$

Zatem przyjmujemy $\Delta \approx 589$. □

- 3.** Kapitał w kwocie 1 j.m. został zainwestowany w funduszu oprocentowanym w sposób ciągły, z roczną intensywnością oprocentowania w n -tym roku równą $\delta_1(n) = \lambda n$. Znaleźć wszystkie wartości λ , przy których odsetki zakumulowane na koniec piątego roku wystarczają na zakup piętnastoletniej renty ciągłej o rocznej intensywności wpłat w chwili t równej $\varrho(t) = 5\lambda$ oraz rocznej intensywności oprocentowania $\delta_2(t) = \lambda$.

Rozwiązanie. Zaczniemy od równania wartości. Mamy

$$\begin{aligned} e^{5\lambda} - 1 &= \int_5^{20} 5\lambda e^{-\lambda t} dt = 5\lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_5^{20} \right) = \\ &= 5\lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-20\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-5\lambda} \right) \end{aligned}$$

i dalej

$$e^{5\lambda} - 1 = 5 \left(\frac{1}{e^{5\lambda}} - \frac{1}{e^{20\lambda}} \right).$$

Po pomnożeniu stronami przez $e^{20\lambda}$ dostajemy równanie

$$e^{20\lambda} (e^{5\lambda} - 1) = 5 (e^{15\lambda} - 1),$$

a po uporządkowaniu

$$(e^{5\lambda} - 1) [e^{20\lambda} - 5 (e^{10\lambda} + e^{5\lambda} + 1)] = 0.$$

Zatem

$$(i) \quad e^{5\lambda} - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad (ii) \quad e^{20\lambda} - 5 (e^{10\lambda} + e^{5\lambda} + 1) = 0.$$

Z równania (i) łatwo dostajemy, że $5\lambda = 0$, czyli $\lambda = 0$. Ponieważ intensywność oprocentowania $\delta(t) = \lambda t$ i równocześnie $t \in [5; 20]$, to intensywność oprocentowania dla każdego t musi spełniać warunek $0 < \delta(t) < 2$. W takim przypadku mamy, że $20\lambda < 2$, czyli $\lambda < \frac{1}{10}$. To dla nas ważna informacja, bowiem mamy ograniczenie na $u = e^{5\lambda}$ postaci $u \in (1; 1,65)$, co po dokonaniu podstawienia prowadzi do równości

$$u^4 - 5(u^2 + u + 1) = 0.$$

W celu oceny istnienia pierwiastków tego równania wielomianowego wprowadźmy funkcję pomocniczą f określoną w przedziale $u \in (1; 1,65)$ i mającą wzór

$$f(u) = u^4 - 5(u^2 + u + 1).$$

Jej pochodna ma postać

$$f'(u) = 4u^3 - 10u - 5,$$

a nieznacznie ją przekształcając, dostajemy

$$f'(u) = 4u \left(u^2 - \frac{5}{2} \right) - 5, \quad u \in (1; 1,65).$$

Na dziedzinie funkcji f' funkcja $u \mapsto 4u \left(u^2 - \frac{5}{2} \right)$ jest rosnąca i do tego przyjmuje wartości ujemne, co oznacza, że również $f'(u) < 0$. Zatem f jest malejąca w dziedzinie, a ponadto

$$\inf_{u \in (1; 1,65)} f(u) = -14,$$

co gwarantuje nieistnienie pierwiastków w dziedzinie. Skoro tak, to dostajemy pośrednio, że równanie (ii) nie ma rozwiązania. Warunki zadania są spełnione tylko przy $\lambda = 0$. $\square$

2.3.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Rozpatrzmy dwie renty. Pierwszą arytmetyczną, n -letnią, z dołu, natychmiast płatną, o ratach w wysokości

$$X_t = 1000 + (t - 1) \cdot 500,$$

dla $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, których suma wynosi 332 500. Drugą, również natychmiast płatną, ale ciągłą, o czasie trwania n identycznym jak w przypadku renty poprzedniej o intensywności wypłat $\varrho(t) = \lambda \cdot t$. Wartość obecna obydwu rent jest identyczna. Przy założeniach, że:

- struktura terminowa jest płaska oraz $v = 0,9$;
- intensywność jej wypłat opisuje formuła

$$\varrho_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \in [0; 5], \\ (\sqrt[3]{a} + 2) \cdot t, & \text{dla } t \in (5; n]; \end{cases}$$

należy obliczyć wartość obecną drugiej renty. [Z10. EA 12.10.02.]

2. Natężenie oprocentowania w chwili t wynosi $\delta(t) = kt^3$, zaś K jest wartością obecną sześcioletniej renty ciągłej o intensywności wypłat $\varrho(t) = mt^3$. Wyznaczyć wartość K . [Z5. EA 15.01.00.]
3. Dane są renty ciągłe, w przypadku których intensywność płatności w chwili t wynosi $\varrho(t) = t$, natomiast natężenie oprocentowania δ zależne jest od okresu wypłacania renty n i wynosi $\delta(t) = \frac{1}{n}t$. Wyznaczyć, ile razy obecna wartość renty wypłacanej przez okres trzech lat jest większa od wartości obecnej renty wypłacanej przez dwa lata. [Z4. EA 17.06.00.]
4. Ile wynosi na koniec drugiego roku wartość renty, w przypadku której kwota w wysokości 1 j.m. wypłacana jest na początku każdego roku przez 10 lat, natomiast oprocentowanie w roku t wynosi $i(t) = \frac{1}{5+t}$. [Z3. EA 24.03.01.]
5. Niech $K(t)$ oznacza stan środków w funduszu, w którym natężenie oprocentowania opisuje zależność $\delta(t) = mt^2 + nt + k$. W chwili $t = 0$ do funduszu wpłynęła kwota 1 j.m. Wiedząc, że:

$$K(1) = \begin{cases} e^{0,004}, & \text{gdy } t = 1, \\ e^{0,42}, & \text{gdy } t = 3, \\ e^{1,60}, & \text{gdy } t = 5, \end{cases}$$

wyznaczyć $K(7)$. [Z10. EA 17.05.03.]

6. Stopa procentowa i jest roczną efektywną stopą oprocentowania równoważną intensywności oprocentowania, którą opisuje następująca zależność

$$\delta(t) = \frac{2t^5 + 6(t^3 + t)}{t^6 + t^4 + 12t^2 + 8}, \quad \text{gdy } t \in [0; 1].$$

W chwili $t = 0$ kwoty w wysokości 1 j.m. zostają wpłacone do funduszy A oraz B , w których obowiązują modele ciągłe akumulacji, przy czym

- w funduszu A jest to funkcja akumulacji prostej,
- w funduszu B funkcja akumulacji z intensywnością oprocentowania δ .

Wyznaczyć chwilę t , w której funkcja $K(t) = K_A(t) - K_B(t)$ osiągnie maksimum, przy czym $K_A(t)$ oraz $K_B(t)$ oznaczają odpowiednio kwoty zgromadzone w funduszu A oraz w funduszu B . [Z8. EA 15.06.02.]

7. Natężenie oprocentowania $\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ określa zależność

$$\delta(t) = \frac{1}{1 + 2e^t} + \frac{1}{1 + 3e^{2t}}$$

Wyznaczyć roczną efektywną stopę oprocentowania w trzecim roku trwania inwestycji, czyli gdy $t \in (2; 3)$ lub inaczej, między $t_1 = 2$, a $t_2 = 3$. [Z10. EA 06.12.03.]

8. Intensywność oprocentowania $\delta(t) = \frac{1}{f(t)}$, gdzie funkcja f spełnia dla wszystkich x, y zależność:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left[\frac{f(x) + f(y)}{2}\right].$$

Dodatkowo wiadomo, że $\delta(t)$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunki: $\delta(0) = 1$ oraz $\delta(1) = \frac{1}{e}$. Obliczyć $\bar{a}_n|_i$. [Z10. EA 17.01.05.]

9. Rachunek oszczędnościowy założono w chwili 0 z początkową wpłatą w wysokości 1 j.m. Dalsze wpływy na rachunek dokonywane były w sposób ciągły z roczną intensywnością $\varrho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ w chwilach $t > 0$. Ciągła intensywność wpłat środków na rachunek wynosiła $\varrho(t) = (1+t) \ln(1+t)$, podczas gdy ciągła intensywność oprocentowania środków zdeponowanych na nim wynosiła $\delta(t) = \frac{1}{1+t}$. Obliczyć zakumulowaną wartość środków w chwili $t = 4,5$. [Z3. EA 10.10.05.]

2.4. Dyskonto i dyskontowanie

2.4.1. Podstawowe definicje i własności

Ta część jest rozszerzoną kontynuacją paragrafu w rozdziale dotyczącym funkcji akumulacji. Najogólniej mówiąc, *dyskontowanie* jest odwrotnością oprocentowania. Proces dyskontowania pozwala wyznaczać wartość obecną pieniądza, spodziewanego w przyszłości. W sposób bardziej

sformalizowany, zgodnie z definicjami wcześniej wprowadzonych pojęć, zachodzą równości

$$FV = (1 + r)^t \cdot PV \iff \frac{FV}{PV} = (1 + r)^t \iff \frac{PV}{FV} = \frac{1}{(1 + r)^t},$$

gdzie t oznacza czas (liczony w latach) dzielący początek i koniec inwestycji, zaś r jest stałą, nominalną stopą procentową w tym czasie. Zauważamy, że wykorzystując definicję funkcji akumulacji A określonej równością $A(t) \stackrel{\text{df}}{=} (1 + r)^t$, moglibyśmy zapisać

$$FV = PV \cdot A(t) \iff PV = FV \cdot \frac{1}{A(t)}.$$

Powołując się na wcześniejsze ustalenia, *funkcję dyskontowania* D możemy zdefiniować równością

$$D(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{A(t)},$$

o czym była mowa wcześniej. Pamiętając, że wtedy też, przy ustalonej nominalnej stopie procentowej r , przyjmowaliśmy

$$v \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{1 + r}$$

i nazywaliśmy *czynnikiem dyskontującym*. W nomenklaturze matematyki finansowej przez stopę dyskontową, oznaczaną symbolem d , rozumiemy stosunek odsetek do kwoty na koniec okresu inwestowania, a więc

$$d \stackrel{\text{df}}{=} \frac{r}{1 + r}.$$

Załóżmy, że pożyczamy 1 j.m. przy efektywnej stopie dyskontowej d . W rzeczywistości otrzymujemy realnie kwotę $1 - d$, zaś d stanowi kwotę odsetek. Zgodnie z wcześniejszą definicją stopy procentowej dostajemy zależność

$$r = \frac{d}{1 - d}.$$

Poza dyskontem bezprzymiotnikowym w praktyce bankowej występuje również *dyskonto handlowe* oznaczane symbolem D_h , które definiowane jest równością

$$D_h \stackrel{\text{df}}{=} FV - PV.$$

Zauważmy, że ze względu na tę definicję D_h jest kwotą wyrażoną w jednostkach monetarnych, a więc *miarą bezwzględną*, nie zaś stopą procentową wyrażoną w jednostkach niemianowanych, czyli *miarą względną* [1, 4].

2.4.2. Ćwiczenia

1. Sformułować definicję dyskonta oraz stopy dyskonta.
2. Pokazać, że w modelu inwestycji opartej na funkcji akumulacji złożonej, kapitalizacji rocznej i czasie trwania t wyrażonym w latach, stopie dyskonta D i stopie zwrotu $r = r(t)$ zachodzi równość:

$$[1 + D(t)] \cdot [1 + r(t)] = 1.$$

3. Czy jeśli v_1 oraz v_2 są funkcjami dyskonta, to czy są nimi również funkcje

$$v^* = v_1 \cdot v_2 \quad \text{lub} \quad v^\circ = v_1 + v_2?$$

4. Niech $v : [0; +\infty)^2 \rightarrow [0; +\infty)$ będzie określona warunkiem

$$v(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (t - s)}, & \text{gdy } s < t, \\ 1 + (t - s), & \text{gdy } s \geq t. \end{cases}$$

Dowieść, że v nie jest funkcją dyskonta.

5. Pokazać, że jeśli $p : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ jest dowolną funkcją, to funkcja $v(s, t) = \frac{p(t)}{p(s)}$ jest funkcją dyskonta.
6. Rozpatrzmy inwestycję z modelem oprocentowania składanego i rocznym okresem kapitalizacji, gdzie symbol I oznacza wysokość odsetek, K – kapitał początkowy inwestycji, i – stopę procentową w czasie trwania inwestycji, w którym dla $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzą równości

$$(i) \quad FV = K(1 + i)^n \quad \text{oraz} \quad (ii) \quad I = K[(1 + i)^n - 1],$$

symbol D oznacza wysokość dyskonta w okresie jednego roku, v jest rocznym czynnikiem dyskontującym, d – roczną stopą dyskontową (utrata wartości zainwestowanego kapitału w ciągu roku), przy czym spełnione są zależności

$$(iii) \quad v = \frac{1}{1+i} \quad \text{oraz} \quad (iv) \quad d = 1 - v = \frac{i}{1+i}.$$

Udowodnić, że w tym modelu $D = I$.

7. Rozpatrzmy inwestycję modelowaną przez funkcję akumulacji złożonej o rocznym okresie kapitalizacji, kapitale początkowym K , stopie procentowej $i > 0$ stałej w czasie życia inwestycji oraz wartości odsetek $I(k)$ — za rok $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dowieść, że w przedstawionym modelu zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^n I(k) = K \cdot [(1+i)^n - 1].$$

8. Przedstawić definicję realnej stopy zwrotu oraz dowieść twierdzenie zwane *wzorem Fishera*.

2.4.3. Przykłady

1. Dla $t \in [0; +\infty)$ na rynku obowiązują: stała stopa procentowa i oraz związany z nią czynnik dyskontujący $v = \frac{1}{1+i}$.
- (i) Rozpatrzmy rentę wieczystą wypłacającą na koniec każdego roku od chwili jej ustanowienia kwoty $CF_n = n$, tj. dla $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć wartość obecną tej renty.
 - (ii) Rozpatrzmy rentę wieczystą wypłacającą na koniec każdego roku od chwili jej ustanowienia kwoty $CF_n = n^2$, tj. dla $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć wartość obecną tej renty.

Rozwiązanie. Przyjmijmy klasyczne oznaczenia, a więc niech $K(0) = PV$ oznacza poszukiwaną kwotę, będącą w istocie kapitałem rentowym.

Ad (i) Mamy równości

$$PV = 1v + 2v^2 + 3v^3 + \dots \quad \text{oraz} \quad PV \cdot v = v^2 + 2v^3 + 3v^4 + \dots$$

Odejmując stronami, dostajemy

$$PV - PV \cdot v = (1 - v) \cdot PV = v + v^2 + v^3 + \dots = \frac{v}{1 - v},$$

a w konsekwencji otrzymujemy

$$PV = \frac{v}{(1 - v)^2} = (Ia)_{\infty|i}.$$

Renta określona w podpunkcie (i) nazywana jest *wieczystą rentą arytmetyczną płatną z dołu*, której symbolem aktuarialnym jest wprowadzony na koniec symbol $(Ia)_{\infty|i}$.

□

Ad (ii) Mamy

$$PV = 1^2v + 2^2v^2 + 3^2v^3 + 4^2v^4 + \dots$$

oraz

$$PV \cdot v = 1^2v^2 + 2^2v^3 + 3^2v^4 + \dots$$

Odejmując stronami dostajemy

$$\begin{aligned} PV - PV \cdot v &= \\ &= v + (2^2 - 1^2) \cdot v^2 + (3^2 - 2^2)v^3 + (4^2 - 3^2)v^4 + \dots = \\ &= v + 3v^2 + 5v^3 + 7v^4 + \dots = \\ &= (v + v^2 + v^3 + v^4 + \dots) + (2v^2 + 4v^3 + 6v^4 + \dots) = \\ &= v + 3v^2 + 5v^3 + 7v^4 + \dots = \\ &= (v + v^2 + v^3 + v^4 + \dots) + 2v(1v + 2v^2 + 3v^3 + \dots). \end{aligned}$$

Równoważnie możemy zapisać

$$(1 - v) \cdot PV = \frac{v}{1 - v} + 2v \cdot \frac{v}{(1 - v)^2} = a_{\infty|i} + 2v (Ia)_{\infty|i},$$

a w konsekwencji mamy

$$PV = \frac{v}{(1-v)^2} + 2v \cdot \frac{v}{(1-v)^3} = \frac{1}{1-v} \left[\frac{v}{1-v} + 2v \cdot \frac{v}{(1-v)^2} \right].$$

Otrzymaliśmy zatem, że

$$\begin{aligned} PV &= 1^2 \cdot v + 2^2 \cdot v^2 + 3^2 \cdot v^3 + 4^2 \cdot v^4 \dots = \\ &= \frac{1}{1-v} \left[\frac{v}{1-v} + 2v \cdot \frac{v}{(1-v)^2} \right] = \ddot{a}_{\infty|i} [a_{\infty|i} + 2v (Ia)_{\infty|i}]. \end{aligned}$$

□

- 2.** Wyznaczyć kwotę wpłaconą na 3-letnią lokatę o kapitalizacji kwartalnej, gdzie przez 2 lata i kwartał oprocentowanie nominalne wynosiło 12%, a przez pozostałą część czasu jej trwania – 8%, jeśli po 3 latach wartość lokaty wyniosła 25 479,60.

Rozwiązanie. Niech, podobnie jak w poprzednim zadaniu, $K(0)$ oznacza poszukiwaną kwotę, a $FV = K(4) = 25\,479,60$. Czas trwania depozytu został podzielony na kwartały w celach formalnych. Mamy zatem, że

$$D(i) = v_i = \frac{1}{1 + \frac{12}{4}} = \frac{1}{1,03}$$

dla kwartałów o numerach $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$, a dla kwartałów o numerach $i \in \{10, 11, \dots, 16\}$

$$D(i) = v_i = \frac{1}{1 + \frac{8}{4}} = \frac{1}{1,02}.$$

Zgrabniej byłoby użyć zapisu warunkowego

$$D(i) = \begin{cases} \frac{1}{1,03}, & \text{dla } i \in \{1, 2, \dots, 9\}, \\ \frac{1}{1,02}, & \text{dla } i \in \{10, 11, \dots, 16\}. \end{cases}$$

W tej sytuacji dostajemy

$$\begin{aligned} K(0) &= K(4) \cdot D(4) = K(4) \cdot \prod_{i=1}^{16} D(i) = \\ &= K(4) \cdot \left[\prod_{i=1}^9 D(i) \cdot \prod_{i=10}^{16} D(i) \right]. \end{aligned}$$

Stąd

$$K(0) = 25\,479,60 \cdot \left(\frac{1}{1,03} \right)^9 \cdot \left(\frac{1}{1,02} \right)^7 \simeq 17\,000.$$

Uwzględniając dokładność używanych kalkulatorów i biorąc pod uwagę przybliżenie, przyjmujemy wynik z dokładnością do jednej jednostki monetarnej 17 000 j.m. $\square$

3. Pan Ernest planuje za dwa lata spędzić wraz z żoną i dwojgiem dzieci tygodniowe wakacje w Turcji. Ocenia, że na ten cel potrzebnych będzie około 4 000 €, co przy możliwych wahaniach kursów walut oznacza konieczność zgromadzenia na ten cel około 20 000 PLN. Przewiduje się, że na przestrzeni dwóch lat bazowa stopa oprocentowania rocznego lokat będzie wynosić $r = 6\%$, o czym świadczyć może oprocentowanie obligacji skarbowych. Jaką kwotę pan Ernest powinien jednorazowo uiścić na lokacie, jeśli zakładamy, że kwoty wpłaty mogą być wielokrotnością 200 PLN?

Rozwiązanie. Z treści zadania wynika, że pan Ernest dokona wpłaty w złotych, w których zarabia. Kwota 20 000 PLN, jak rozumiemy, oznacza wszystkie wydatki potrzebne na planowane wakacje i potraktujemy ją jako wartość przyszłą wydatku równą $FV = K(2) = 20\,000$. Z kolei informacja o stałym oprocentowaniu lokat terminowych, wynoszącym $r = 6\%$, pozwala na określenie funkcji akumulacji oraz funkcji dyskontowania w przedziale czasu $[0; 2]$ jako funkcji postaci $A(t) = (1+r)^t$ oraz funkcji dyskontującej $D(t) = \frac{1}{(1+r)^t}$. Mamy zatem, że

$$PV = K(0) = D(t)FV,$$

a stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} PV = K(0) &= D(2) \cdot FV = \frac{1}{(1,06)^2} \cdot FV = \\ &= \frac{1}{(1,06)^2} \cdot 20\,000 \approx 17\,799,928, \end{aligned}$$

co przy konieczności wpłaty będącej wielokrotnością 200 złotych oznacza, że wartość obecna przyszłego wydatku, czyli PV rozumiane jako kwota wpłaty $K(0)$ musi wynieść co najmniej 17 800 złotych. $\square$

4. Pan Krzysztof planuje za dwa lata spędzić wraz z żoną i dwojgiem dzieci tygodniowe wakacje w Turcji. Ocenia, że na ten cel potrzebnych będzie około 4 000 €, co przy możliwych wahaniami kursów walut oznacza konieczność zgromadzenia na ten cel około 20 000 PLN. Przewiduje się, że na przestrzeni dwóch lat bazowa stopa oprocentowania rocznego lokat będzie wynosić $r = 6\%$, o czym świadczyć może oprocentowanie obligacji skarbowych. Jaką stałą kwotę powinien wpłacać pan Krzysztof na początku kolejnych 24 miesięcy, aby odłożyć niezbędne pieniądze, jeśli zakładamy, że kwoty wpłaty mogą być wielokrotnością 200 PLN.

Rozwiązanie. Rozkładając proces oszczędzania pieniędzy na pokrycie kosztów przyszłej wycieczki, musimy wziąć pod uwagę efektywną stopę procentową r_{ef} , dla której zachodzi równość $(1 + r_{ef})^{12} = 1 + r_{nom}$, gdzie przy danych z zadania mamy $r_{nom} = 0,06$. W związku z tym

$$r_{ef} = \sqrt[12]{1,06} - 1,$$

co daje $r_{ef} \approx 1,00486755 - 1 = 0,0049$ — tyle wynosi miesięczna stopa procentowa dla dwuletniego procesu oszczędzania. Nas jednak interesuje miesięczny czynnik akumulacji $a = 1 + r_{ef}$, wynoszący w warunkach zadania $a = 1,0049$.

Niech teraz Y oznacza comiesięczną ratę wpłaty. Mamy stąd

$$FV = Y (a^{24} + a^{23} + a^{22} + \dots + a^2 + a^1) =$$

$$= Y \cdot \sum_{k=1}^{24} a^k = Y \cdot a \cdot \frac{1 - a^{24}}{1 - a}.$$

Uwzględniając dane liczbowe, mamy

$$\begin{aligned} 20\,000 &= Y \cdot \left[1,0049 \frac{1 - (1,0049)^{24}}{1 - 1,0049} \right] = \\ &= Y \cdot \left[1,0049 \frac{(1,0049)^{24} - 1}{1,0049 - 1} \right] = \\ &= Y \cdot \frac{1,0049}{1,0049 - 1} \cdot [(1,0049)^{24} - 1] = \\ &= Y \cdot \frac{1,0049}{0,0049} \cdot (1,1245 - 1) = \\ &= Y \cdot 208,08 \cdot 0,1245 = Y \cdot 25,906. \end{aligned}$$

Jako konsekwencję tej informacji otrzymujemy

$$Y = \frac{20\,000}{25,906} \approx 772,022.$$

Ponieważ wpłaty na lokatę bankową muszą być wielokrotnościami 200 PLN, to miesięczna rata będzie równa $Y^* = 800$ PLN. Wtedy jednak kwota zgromadzona na eskapadę do Turcji wyniesie $FV^* = 800 \cdot 25,906 = 20\,724,80$. $\square$

- 5.** Dwaj studenci zamierzają wynająć mieszkanie od osoby planującej wyjazd na dwa lata za granicę. Właściciel mieszkania proponuje jednorazową opłatę w wysokości 20 000 PLN, jednak studenci nie dysponują tak dużą kwotą i proszą o rozłożenie należności na cztery półroczne raty. Właściciel przystaje na tę propozycję i proponuje raty w wysokości 6 000 PLN wpłacane z góry, a więc w pierwszym dniu każdego półrocznego okresu, na jego konto, na którym odsetki naliczane są miesięcznie przy miesięcznej stopie 0,95%.

- (i) Jaką kwotę otrzyma właściciel po powrocie z zagranicy?
- (ii) Czy mając możliwość zapłacenia za mieszkanie z góry, studenci powinni wybrać wariant ratalny?

Rozwiązanie. Ponieważ wysokość raty jest ustalona i wynosi $X = 6\,000$ PLN, to możemy popatrzeć na proces zapłaty jak na rentę pewną, zerookresową, płatną co pół roku. Stąd

$$CF_0 = CF_1 = CF_2 = CF_3 = X = 6\,000.$$

Z drugiej strony cena wynajmu mieszkania została ustalona w chwili $t_0 = 0$ w kwocie $X = 6\,000$ PLN i to na tę chwilę należy zannualizować wszystkie związane z wynajmem przepływy finansowe. Oznaczmy przez t_{k-1} moment wpłaty kwoty X na konto bankowe właściciela mieszkania przy $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Mamy zatem, że

$$\begin{aligned} CF_0 &= X \cdot DF(0; 0) = X \cdot 1, \\ CF_1 &= X \cdot DF(0; 6) = X \cdot 0,947, \\ (1) \quad CF_2 &= X \cdot DF(0; 12) = X \cdot 0,897, \\ CF_3 &= X \cdot DF(0; 18) = X \cdot 0,850. \end{aligned}$$

Z tych to powodów otrzymujemy, że wartość obecna, w rozumieniu „na chwilę” $t_0 = 0$, jest równa

$$\begin{aligned} PV = K(0) &= CF_0 \cdot DF(0; 0) + CF_1 \cdot DF(0; 6) + \\ &+ CF_2 \cdot DF(0; 12) + CF_3 \cdot DF(0; 18). \end{aligned}$$

Z informacji zawartych w treści zadania wiemy, że kapitalizacja odsetek w banku, w którym ma konto właściciel mieszkania, następuje na koniec każdego miesiąca — czyli z dołu i przy stopie miesięcznej $r = 0,0095 = 0,95\%$. W rezultacie czynnik dyskontujący (stały przy stałej stopie procentowej lokat) jest równy

$$v = \frac{1}{1 + 0,0095} = \frac{1}{1,0095} = 0,9905894 \approx 0,991.$$

Konsekwencją tego są wartości potrzebnych nam czynników opisane równością

$$DF(0; k - 1) = v^{k-1}$$

i dalej

$$\begin{aligned}DF_0 &= DF(0; 0) = (v^6)^{(1-1)} = 1, \\DF_1 &= DF(0; 6) = (v^6)^{(2-1)}, \\DF_2 &= DF(0; 12) = (v^6)^{(3-1)}, \\DF_3 &= DF(0; 18) = (v^6)^{(4-1)}.\end{aligned}$$

Dysponując przedstawionymi wartościami, otrzymujemy

$$\begin{aligned}PV &= 6\,000 (1 + 0,947 + 0,897 + 0,850) = \\&= 6\,000 \cdot 3,694 = 22\,164.\end{aligned}$$

W związku z tym odpowiedź na postawione w zadaniu pytania brzmi następująco:

Ad (i) W przypadku powrotu z zagranicy właściciel mieszkania będzie miał na koncie kwotę 22 164 PLN, przewyższającą znacznie żadaną przez niego kwotę 20 000 PLN.

Ad (ii) W tej sytuacji jest oczywiste, że studenci powinni wybrać możliwość zapłaty z góry za wynajmowane mieszkanie. $\square$

6. Pan Kowalski chciałby kupić mieszkanie i na ten cel powinien zgromadzić kwotę 600 000 PLN. Obecnie dysponuje kapitałem 16 000 PLN, który ma możliwość ulokowania w inwestycję opartą na proencie składanym, naliczanym w skali roku i wynoszącym 32%. Jak długo powinna trwać ta inwestycja, aby Pan Kowalski mógł kupić zaplanowane mieszkanie, jeśli w tym czasie jego cena nie ulegnie zmianie?

Rozwiązanie. Jedynym problemem jest odpowiedź na pytanie o to, przez jak długi okres czasu powinna trwać inwestycja polegająca na depozycie bankowym, by jej zdyskontowana wartość przyszła $FV = 600\,000$ PLN dała kwotę $PV = 16\,000$ PLN.

Jako że musimy udzielić odpowiedzi w pełnych okresach kapitalizacji, czyli w latach, to należy się spodziewać, że wynik obliczeń musi być ograniczeniem górnym kwoty PV . Zgodnie z wcześniejszymi

umowami, spodziewamy się, że

$$DF(t) = v^t = \frac{1}{(1 + 0,32)^t}.$$

W konsekwencji tego

$$PV = DF(t) \cdot FV,$$

co w kontekście danych z zadania daje równanie

$$16\,000 = 600\,000 \cdot \frac{1}{(1 + 0,32)^t},$$

a stąd już mamy, że

$$(1,32)^t = \frac{600\,000}{16\,000} \iff (1,32)^t = \frac{600}{16} \iff (1,32)^t = 37,5.$$

Po zlogarytmowaniu stronami logarytmem naturalnym i uporządkowaniu dostajemy wynik

$$t = \frac{\ln(37,5)}{\ln(1,32)},$$

$$t = \frac{3,6243409}{0,2776317} = 13,054491.$$

Oznacza to, że deponując na lokacie bankowej w swoim banku posiadane 16 000 PLN przy stałej stopie oprocentowania depozytów w wysokości $r = 0,32$, pan Kowalski będzie dysponował kwotą 600 000 PLN najwcześniej po upływie 13 lat i dwudziestu dni. $\square$

7. Wyznaczyć wartość obecną renty wieczystej płaćcej w roku $k \in \mathbb{N}_+$ kwotę $X_k = \frac{1}{2k+1}$ przy założeniu, że w czasie jej życia czynnik dyskontujący jest równy $v = 0,49$.

Rozwiązanie. Przejdźmy do obliczeń. Mamy

$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} v^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} v^{k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{v}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} v^{k+\frac{1}{2}} = A. \quad (1)$$

Zauważmy, że możemy skorzystać z analitycznych własności ostatniego szeregu potęgowego, o którym wiemy, na mocy stosownego twierdzenia z teorii szeregów funkcyjnych, że można go zarówno różniczkować, jak i całkować wyraz po wyrazie. Stąd

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n + \frac{1}{2}} v^{k+\frac{1}{2}} \right]' \right) dv = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \int \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} v^{k+\frac{1}{2}} \right)' \right] dv = \frac{1}{2\sqrt{v}} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} v^{k-\frac{1}{2}} \right) dv = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{k=1}^{\infty} v^k \right) dv = \frac{1}{2\sqrt{v}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \frac{v}{1-v} \right) dv = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \int \frac{\sqrt{v}}{1-v} dv, \end{aligned}$$

ponieważ analizowany szereg jest zbieżnym szeregiem geometrycznym o ilorazie $v = 0,49$.

Dla wyznaczenia $PV = A$ potraktujmy jako osobne zagadnienie całkę $I = \int \frac{\sqrt{v}}{1-v} dv$. Mamy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{v}}{1-v} dv = \left| \begin{array}{l} \sqrt{v} = t, \\ \frac{1}{2\sqrt{v}} dv = dt, \\ \sqrt{v} dv = 2t^2 dt, \end{array} \right| = - \int \frac{2t^2}{t^2-1} dt = \\ &= - \int \frac{2(t^2-1)+2}{t^2-1} dt = - \int \left(2 + \frac{2}{t^2-1} \right) dt = \\ &= - \int 2dt - \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = -2t - \ln|t-1| + \ln|t+1| = \\ &= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - 2t = \ln \left| \frac{\sqrt{v}+1}{\sqrt{v}-1} \right| - 2\sqrt{v}. \end{aligned}$$

Dodajmy dla porządku, że aby uzyskać przekształcenie tożsamościowe, różniczkując, a następnie całkując, przy braku stałej pod

znakiem pochodnej, stałą całkowania C uznajemy za równą 0. Możemy teraz powrócić do wyznaczenia zależności na Δ .

$$\Delta = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot I = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \left(\ln \left| \frac{\sqrt{v} + 1}{\sqrt{v} - 1} \right| - 2\sqrt{v} \right) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \ln \left| \frac{\sqrt{v} + 1}{\sqrt{v} - 1} \right| - 1.$$

Dostaliśmy, że

$$PV(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \ln \left| \frac{\sqrt{v} + 1}{\sqrt{v} - 1} \right| - 1,$$

co przy danym w zadaniu $v = 0,49$ (wysokość okazuje się nieprzypadkowa) prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned} PV(0,49) &= \frac{1}{1,4} \ln \left| \frac{1,7}{-0,3} \right| - 1 = \frac{5}{7} \ln \left| \frac{17}{3} \right| - 1 \approx \\ &\approx 1,239 - 1 = 0,239 \approx 0,3. \end{aligned}$$

Zatem wartość obecna renty wieczystej, o parametrach zawartych w treści zadania, wynosi $PV = 0,3$. $\square$

8. Firma zamierza sprzedać nieruchomość w drodze przetargu. Właściciel otrzymał od potencjalnych nabywców trzy oferty. Pierwszy z nich chciałby ją kupić natychmiast, realizując należność gotówką w wysokości 250 000 PLN, drugi proponuje kwotę 260 000 PLN przy zapłacie za rok, a trzeci gotów jest zapłacić 280 000 PLN za trzy lata. Którą ofertę należy wybrać, jeśli istnieje możliwość ulokowania gotówki w banku przy oprocentowaniu 35% w skali roku?

Rozwiązanie. Podejźmy do problemu w następujący sposób: na początku zaktualizujemy wszystkie wynikające z ofert kwoty, a więc wyznaczmy dla każdej z kwot jej wartość obecną. Niech PV_1 , PV_2 i PV_3 oznaczają wysokości oferowanych kwot na chwilę $t = 0$. Czyn-

niki dyskontujące dla poszczególnych ofert są równe

$$DF(0) = 1,$$

$$DF(1) = \frac{1}{1 + 0,35} \simeq 0,7407,$$

$$DF(2) = \frac{1}{(1 + 0,35)^2} \simeq 0,5486,$$

$$DF(3) = \frac{1}{(1 + 0,35)^3} \simeq 0,4064421.$$

Otrzymujemy natychmiast, że

$$PV_1 = 250\,000 \cdot 1 = 250\,000 \text{ PLN},$$

$$PV_2 = 260\,000 \cdot 0,7407 \simeq 192\,582 \text{ PLN},$$

$$PV_3 = 280\,000 \cdot 0,4064 \simeq 113\,792 \text{ PLN}.$$

Porządkując uzyskane wyniki, dostajemy zależność:

$$PV_3 < PV_2 < PV_1,$$

a to oznacza, że najbardziej hojna była pierwsza oferta i ją należy wybrać. $\square$

2.4.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Kwota $K = 1\,570$ j.m. została zdeponowana w banku przy stopie depozytowej $r = 12\%$ oraz rocznym okresie kapitalizacji. Ile lat powinna ona pozostać w depozycie, by uzyskać z tej inwestycji $K_1 = 23\,000$ j.m.?
2. Wartość nowego ciągnika przeznaczonego do pracy w kamieniołomach wynosi $975\,000$ j.m. Wartość rynkowa takiego ciągnika spada o $22,5\%$ rocznie.
 - (i) Obliczyć wartość rynkową ciągnika po ośmiu latach.
 - (ii) Jaki procent wartości początkowej wart jest ciągnik po ośmiu latach?

3. W oparciu o kwotę $K = 20\,000$ j.m. stanowiącą kapitał rentowy ustanowiono rentę pewną, płatną z dołu, o stałych kwotach wypłat równych $X = 2\,000$ j.m. Jak długo będzie można co miesiąc z kapitału rentowego wypłacać kwoty X , przy założeniu kapitalizacji miesięcznej oraz przy miesięcznej stopie procentowej $r = 1\%$?
4. Organizatorzy konkursu przedstawili jego przyszłym uczestnikom cztery możliwe wersje wypłaty nagrody:
- (i) zaraz po zakończeniu turnieju zwycięzca otrzymuje kwotę 10 000 j.m.;
 - (ii) zaraz po konkursie zwycięzca otrzymuje 5 000 j.m., a za dwa lata kwotę 7 000 j.m.;
 - (iii) na początku każdego kolejnego roku przez pięć lat zwycięzca będzie otrzymywał z góry po 2 500 j.m.;
 - (iv) będzie dostawał z góry kwotę 1 500 j.m. do końca życia.
- Która z propozycji jest najkorzystniejsza dla zwycięzcy, jeśli założymy, że stopa procentowa wynosi $r = 20\%$ [2]?
5. Franciszek kupił kino domowe za K j.m. Wartość tego sprzętu spada o $r\%$ rocznie przez okres pięć lat. Na koniec piątego roku od jego zakupu wartość rynkowa spadła do kwoty $\frac{1}{12}K$. Znaleźć wartość stopy r z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.
6. Inwestor ma dwie możliwości ulokowania posiadanych pieniędzy: w banku A , bądź w banku B . Bank A oferuje kapitalizację miesięczną przy stopie bazowej wynoszącej 18%. Jaka powinna być oferta banku B , aby przy kapitalizacji kwartalnej jego oferta była konkurencyjna wobec banku A ?
7. Inwestorowi przedstawiono możliwość kupna jednej z dwóch rent pewnych, natychmiast płatnych, których wartości obecne są jednakowe i równe K . Formuły wypłat tych rent są postaci:
- (i) Renta 99-letnia ma wypłaty X_k dokonywane na końcu k -tego roku, opisane zależnością

$$X_k = \begin{cases} X_{50} = 50 \cdot \alpha, \\ X_{50-k} = X_{50+k} = (50 - k) \cdot \alpha, \text{ dla } k \in \{1, 2, \dots, 49\}. \end{cases}$$

- (ii) Renta 100-letnia ma wypłaty X_k dokonywane na końcu k -tego roku, opisane zależnością

$$X_k = \begin{cases} X_{50} = X_{51} = 50 \cdot \beta, \\ X_{50-k} = X_{51+k} = (50 - k) \cdot \beta, \quad \text{dla } k \in \{1, 2, \dots, 49\}. \end{cases}$$

Ustalić $\frac{\alpha}{\beta}$, przyjmując do obliczeń $i = 0,07$. [Z5. EA 24.03.01.]

8. Obliczyć wartość obecną renty wieczystej płatnej z góry o kwotach wypłat $X_k = k^3$ dla $k \in \mathbb{N}_+$ przy stałej stopie procentowej $i = 0,1$.
9. Dane są dwie renty wieczyste płatne z dołu o formułach wypłat:

- (i) dla renty pierwszej:

$$X_k^1 = \begin{cases} k, & \text{dla } k = 3n + 3, \quad \text{gdy } n \in \mathbb{N}, \\ k + 2, & \text{dla } k = 3n + 1, \quad \text{gdy } n \in \mathbb{N}, \\ k + 1, & \text{dla } k = 3n + 2, \quad \text{gdy } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

- (ii) dla renty drugiej:

$$X_k^2 = \frac{(1,1)^k}{k^2}, \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}_+.$$

Obliczyć sumę wartości obecnych obu rent przy założeniu, że wysokość stopy procentowej jest stała i równa $i = 0,1$.

[Z7. EA 16.05.05.]

10. Ignacy w dniu rozpoczęcia pierwszej pracy postanowił oszczędzać na emeryturę. Założył przy tym, że będzie pracował przez 40 lat, a więc odprowadzi na ten cel 480 składek, płatnych z góry każdego miesiąca. Pierwsze honorarium Ignacego wyniosło 2 000 j.m. i będzie wzrastać o 3% każdego roku, w sposób równomierny. Celem Ignacego jest zgromadzenie na koniec okresu pracy, czyli po 40 latach, kwoty pozwalającej na kupno 20-letniej renty pewnej, płatnej każdego miesiąca z dołu, o wypłacie stałej równej 60% jego ostatniego (w rozumieniu 480-tego honorarium), wyliczanej przy stopie procentowej, równej 4%. Jaką część swojej pensji Ignacy powinien odkładać, zakładając, że w czasie jego czterdziestoletniej

pracy stopy procentowe będą określone warunkiem

$$i_k = \begin{cases} 0,06, & \text{dla } k \in \{1, 2, \dots, 20\}; \\ 0,03, & \text{dla } k \in \{21, 22, \dots, 40\} \end{cases}$$

[Z3. EA 09.10.06.]

2.5. Wewnętrzna stopa zwrotu *IRR* i *NPV*

2.5.1. Definicje

Rozpatrzmy ciąg płatności (przepływów finansowych)

$$CF_0, CF_1, CF_2, \dots, CF_n$$

w chwilach odpowiednio: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Jeśli w czasie życia inwestycji $[0; T]$ stopa procentowa jest stała i równa r , to mamy:

$$PV = \sum_{i=0}^n \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} = CF_0 + \frac{CF_1}{(1+r)^{t_1}} + \dots + \frac{CF_n}{(1+r)^{t_n}}.$$

W przypadku, gdy stopę procentową zastąpimy intensywnością oprocentowania, otrzymujemy:

$$PV = \sum_{i=0}^n CF_i e^{-t_i \delta}, \quad \text{gdzie } e^\delta = r + 1,$$

czyli jedną z metod dynamicznych oceny efektywności projektów inwestycyjnych. Wyraża ona stopę zwrotu z inwestycji, przy której teraźniejsza wartość ujemnych przepływów pieniężnych (wydatków) równoważy się z teraźniejszą wartością dodatnich przepływów pieniężnych (wpływów) projektu.

Przez *wewnętrzną stopę zwrotu* – *IRR* (*Internal Rate of Return*) rozumiemy jedną z wielu metod oceny efektywności inwestycji. Jest to taka stopa, dla której wartość obecna jest równa wartości przepływów lokalnych z analizowanej inwestycji. Jako że stopa *IRR* jest z zasady dodatnia, to może być rozumiana jako dodatni pierwiastek równania

wartości

$$\sum_{i=0}^n \frac{CF_i}{(1+r)^{t_i}} = 0 \quad (2.40)$$

– o ile taki istnieje, bo równanie wartości może mieć jedynie pierwiastki niedodatnie.

Natomiast *wewnętrzną intensywnością* nazywamy taką wartość $\delta > 0$, dla której

$$\sum_{i=0}^n CF_i e^{-t_i \delta} = 0.$$

Bezpośrednio z definicji zauważamy, że wewnętrzna stopa zwrotu jest taką stopą procentową, przy której wartość obecna wpływów z inwestycji jest równa wartości obecnej nakładów inwestycyjnych — to taka „stopa równowagi”, tak samo jak wewnętrzna intensywność. Zależność między nimi ustala równość: $IRR = e^{\delta} - 1$.

Podsumowując, można powiedzieć, że IRR jest stopą rentowności ustalonego przedsięwzięcia, a jednocześnie jest ona stopą graniczną, będącą najwyższą stopą zwrotu, akceptowalną przez inwestora i pozwalającą mu uznać projekt jako wart realizacji.

Wewnętrzna stopa zwrotu wchodzi w skład innego pojęcia, mianowicie wielkości NPV zwanej *zaktualizowaną wartością netto inwestycji* (ang. *net present value*), definiowanej jako

$$NPV = \sum_{k=0}^n \frac{CF_k}{(1+IRR)^k} = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+IRR)^k} - |CF_0|,$$

gdzie CF_0 oznacza początkowy wkład finansowy w inwestycję, który z natury rzeczy jest wielkością ujemną z punktu widzenia inwestora, bo jest dla niego wydatkiem. Przy tak określonych pojęciach zauważamy, że IRR jest stopą, przy której $NPV = 0$.

Jeśli stopa oprocentowania rachunku bankowego jest równa r , to inwestycja, dla której: (i) $NPV > 0$, jest bardziej opłacalna od lokaty bankowej, (ii) $NPV = 0$ jest równoważna lokacie, (iii) $NPV < 0$ jest mniej opłacalna [1, 4].

2.5.2. Istnienie i jednoznaczność IRR

Podstawowe własności dotyczące tytułowego zagadnienia zawarte są w następującym ciągu faktów:

- Jeśli $CF_0 < 0$ oraz $\sum_{i=0}^n CF_i > 0$, to istnieje IRR .
- Jeśli $CF_0 = 0$, $CF_1 < 0$ oraz $\sum_{i=0}^n CF_i > 0$, to istnieje IRR .

- Jeśli

$$CF_0 < 0, CF_1 < 0, \dots, CF_k < 0$$

oraz

$$CF_{k+1} > 0, CF_{k+2} > 0, \dots, CF_n > 0,$$

a przy tym $\sum_{i=1}^n CF_i > 0$, to istnieje dokładnie jedna wewnętrzna stopa zwrotu IRR .

- Jeżeli $IRR > r$, to inwestycja jest opłacalna, a gdy $IRR < r$ – inwestycja jest nieopłacalna.

Dla zilustrowania pojęcia wewnętrznej stopy zwrotu, rozpatrzmy następujące dwie inwestycje:

- Inwestycja A : nakłady inwestycyjne wynoszą 7 000 j.m., zaś wpływy — 3 430 j.m., płatne na koniec każdego z trzech lat.
- Inwestycja B : nakłady inwestycyjne wynoszą 12 000 j.m., a wpływy — 5 520 j.m., płatne na koniec każdego z trzech lat.

Przy założeniu, że koszt kapitału wynosi rocznie 10% (taka jest rynkowa stopa procentowa), ocenimy, który projekt należy wybrać, stosując kryteria PV oraz IRR .

W przypadku inwestycji A mamy $IRR_A = 20,05\%$, podczas gdy dla inwestycji B – $IRR_B = 18,01\%$. W obu przypadkach stopy zwrotu są wyższe od stopy rynkowej, a więc obie są opłacalne.

Nie da się jednoznacznie wskazać, którą należałoby wybrać, bo co prawda w przypadku A stopa zwrotu jest wyższa, a przez to i margines

bezpieczeństwa większy, ale za to wartości obecne tych inwestycji są w porządku odwrotnym, bo mamy: $PV_A = 1\,529,9$ zaś $PV_B = 1\,772,42$.

□

2.5.3. Ćwiczenia

1. Czy wraz ze wzrostem wartości inwestycji netto wzrasta rentowność inwestycji?
2. Czy wewnętrzna stopa zwrotu jest najwyższą stopą oprocentowania kredytu możliwą do zaakceptowania przez inwestora?
3. Czy jest poprawnym twierdzeniem zdanie:
„Dla każdego ciągu przepływów pieniężnych

$$CF_0, CF_1, \dots, CF_k, CF_{k+1}, CF_{k+2}, \dots, CF_n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ przy $k < n$, wewnętrzna stopa zwrotu IRR istnieje oraz jest jednoznacznie określona w przypadku, gdy przepływy CF_i są tylko ujemne dla $i < k + 1$ natomiast tylko dodatnie dla $i > k$ ”?

4. Czy jest poprawnym twierdzeniem zdanie:
„Dla każdego ciągu przepływów pieniężnych

$$CF_0, CF_1, \dots, CF_k, CF_{k+1}, CF_{k+2}, \dots, CF_n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, jeżeli $CF_0 < 0$ oraz $\sum_{i=0}^n CF_i > 0$, to istnieje IRR ”?

5. Czy projekt inwestycyjny może mieć dwie wewnętrzne stopy zwrotu?
6. Załóżmy, że konkretna inwestycja ma dwie wewnętrzne stopy zwrotu. W jakim zakresie zmienności IRR inwestycja taka jest opłacalna?
7. Czy jest możliwe, by NPV była funkcją rosnącą, której argumentem jest stopa procentowa? Podaną odpowiedź uzasadnić.
8. Dział finansowy spółki ALVARO S.A. przedstawił zarządowi spółki raport odnoszący się do planowanego zwiększenia zewnętrznego

finansowania bieżącej działalności ALVARO. Raport składał się z następujących trzech pozycji:

- (i) kredyt – 30 000 j.m.;
- (ii) stopa procentowa $r = 0,12$;
- (iii) wewnętrzna stopa procentowa $IRR = 0,13$.

Czy zarząd powinien (dla dobra spółki) zdecydować o zwiększeniu finansowania bieżącego funkcjonowania ALVARO S.A.? Przedstawić argumentację za podaną odpowiedzią.

9. Wewnętrzna stopa zwrotu z inwestycji $IRR = 0,15$, natomiast nominalna stopa procentowa pozyskania kapitału $r = 0,1505$. Ustalić znak NPV i przedstawić precyzyjne uzasadnienie udzielonej odpowiedzi.

2.5.4. Przykłady

1. Inwestor ma otrzymać płatności w wysokościach odpowiednio: kwotę 4 w chwili $t_0 = 0$, w chwili $t = 2$ — kwotę $(\lambda + 1)^2$, natomiast w chwili $t_1 = 1$ będzie musiał zapłacić $(\lambda - 4)$. Sformułować warunek konieczny i wystarczający ze względu na parametr $\lambda \in \mathbb{R}$, który zagwarantuje istnienie dwóch różnych wewnętrznych stóp zwrotu r_1 oraz r_2 , spełniających jednocześnie warunki:

- (i) każda z nich będzie większa od 25%,
- (ii) każda z nich będzie mniejsza od 100%,
- (iii) ich suma będzie mniejsza od 150%.

Rozwiązanie: Z definicji IRR wiemy (zakładając płaską strukturę terminową, czyli stałość oprocentowania w przedziale czasu $[0; 2]$), że będzie nią każda wartość $v = \frac{1}{1+r}$, przy której $PV = 0$. Napiszmy zależność na wartość obecną opisanego w zadaniu trójwyrazowego ciągu przepływów o wyrazach:

$$CF_0 = 4, \quad CF_1 = -(\lambda - 4), \quad CF_2 = (\lambda + 1)^2.$$

Z uwagi na definicję *IRR* mamy

$$PV = 4v^0 - (\lambda - 4)v + (\lambda + 1)^2v^2 = 0,$$

a po uporządkowaniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$(1) \quad (\lambda + 1)^2v^2 - (\lambda - 4)v + 4 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Jak widać, przy warunku nałożonym na parametr λ równanie (1) nie jest zawsze równaniem kwadratowym. Przestaje nim być dla $\lambda = -1$ i wtedy redukuje się do równania liniowego

$$5v + 4 = 0,$$

co wyklucza istnienie dwóch stóp *IRR*.

Dla $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mamy, że (1) jest równaniem kwadratowym i możemy wyznaczyć wyróżnik. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta(\lambda) = (\lambda - 4)^2 - 16(\lambda + 1)^2 = \\ &= [(\lambda - 4) + 4(\lambda + 1)][(\lambda - 4) - 4(\lambda + 1)] = \\ &= 5\lambda(-3\lambda - 8) = -15\lambda \left(\lambda + \frac{8}{3} \right). \end{aligned}$$

Zatem istnienie dwóch różnych stóp *IRR*: r_1 i r_2 , a pośrednio dwóch czynników dyskontujących v_1 i v_2 , przekłada się na dodatniość wyróżnika, czyli

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= -15\lambda \left(\lambda + \frac{8}{3} \right) > 0 \iff \\ &\iff \lambda \left(\lambda + \frac{8}{3} \right) < 0 \iff \lambda \in \left(-\frac{8}{3}; 0 \right). \end{aligned}$$

Warunek ten jest jednak warunkiem wstępnym – zapewnia tylko istnienie dwóch różnych stóp, ale w treści zadania mamy jeszcze warunki dodatkowe (i)–(iii).

Wydaje się rozsądnym wyrażenie tych warunków nie w języku stóp zwrotu, lecz w języku odpowiadających im czynników dyskontowych.

Mamy wymagania, by

$$(i) r_{1,2} > 0,25, \quad (ii) r_{1,2} < 1, \quad (iii) r_1 + r_2 < 1,5.$$

Z (i) oraz (ii) dostajemy $\frac{1}{4} < r_{1,2} < 1$. Stąd mamy, że

$$\frac{5}{4} < 1 + r_{1,2} < 2, \quad \wedge \quad \frac{10}{4} < (1 + r_1) + (1 + r_2) < 4.$$

Następnie

$$\frac{5}{4} < \frac{1}{v_{1,2}} < 2, \quad \wedge \quad \frac{5}{2} < \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} < 4.$$

Porządkując, otrzymujemy

$$\frac{1}{2} < v_{1,2} < \frac{4}{5} \quad \wedge \quad \frac{5}{2} < \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} < 4.$$

W efekcie możemy obecnie skorzystać ze wzorów Viéte'a i w wyniku ich użycia pojawiają się nowe, wygodne warunki:

$$1 < v_1 + v_2 < \frac{8}{5} \quad \wedge \quad \frac{1}{4} < v_1 v_2 < \frac{16}{25} \quad \wedge \quad \frac{5}{2} < \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} < 4.$$

Mając do dyspozycji współczynniki równania (1), uzyskujemy nowy układ równań, odnoszący się już bezpośrednio do parametru λ , przy czym z warunku na istnienie dwóch wewnętrznych stóp zwrotu dostaliśmy, że $\lambda \in \left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup (-1; 0)$. W związku z tym dla takich wartości λ muszą być spełnione dodatkowo

$$1 < \frac{\lambda - 4}{(\lambda + 1)^2} < \frac{8}{5} \quad \wedge \quad \frac{1}{4} < \frac{4}{(\lambda + 1)^2} < \frac{16}{25} \quad \wedge \quad \frac{5}{2} < \frac{\lambda - 4}{4} < 4,$$

czyli

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup (-1; 0), \\ (\lambda + 1)^2 < \lambda - 4, \\ 5\lambda - 20 < 8(\lambda + 1)^2, \\ (\lambda + 1)^2 < 16, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^2 < (\lambda + 1)^2, \\ \frac{5}{2} < \frac{\lambda}{4} - 1 < 4, \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup (-1; 0), \\ \lambda^2 + \lambda + 5 < 0, \\ 8\lambda^2 + 11\lambda + 28 > 0, \\ -4 < \lambda + 1 < 4, \\ 0 < \left(\lambda + 1 + \frac{5}{2}\right) \left(\lambda + 1 - \frac{5}{2}\right), \\ \frac{7}{2} < \frac{\lambda}{4} < 5, \end{array} \right.$$

to

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup (-1; 0), \\ \lambda \in \emptyset, \\ \lambda \in \mathbb{R}, \\ \lambda \in (-5; 3), \\ \lambda \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right), \\ \lambda \in (14; 20). \end{array} \right. \Rightarrow \lambda \in \emptyset.$$

Rozumowanie zostało poprowadzone krok po kroku, żeby nie powstało wrażenie, że wynik wyskoczył jak królik z kapelusza, ale z pewnością już kilka kroków wcześniej dało się dostrzec symptomy tego, że zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{R}$ spełniających warunki zadania jest pusty.

Trochę szkoda, że otrzymaliśmy taki wynik, ale praca uszlachetnia! Zwłaszcza samodzielna praca rachunkowa podnosi odporność psychiczną matematykom. $\square$

2. Rozważmy inwestycję, o której wiadomo, że w chwili $t = 0$ inwestor otrzymuje kwotę $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2$, po ośmiu latach (a więc w chwili $t = 8$) kwotę $(k - 1)$, zaś na końcu szesnastego roku – czyli w chwili $t = 16$ – kwotę 1. W zależności od k wyznaczyć warunek konieczny i wystarczający nieistnienia wewnętrznej stopy zwrotu dla tej inwestycji.

Rozwiązanie: Z definicji *IRR* wiemy (zakładając płaską strukturę terminową, czyli stałość oprocentowania w przedziale czasu $[0; 16] \ni t$), że będzie nią każda wartość $v = \frac{1}{1+r}$, przy której $PV = 0$. Napiszmy zależność na wartość obecną opisanego w zadaniu trójwyrazowego ciągu przepływów, w którym to ciągu mamy

$$CF_0 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2, \quad CF_1 = (k - 1), \quad CF_2 = 1.$$

Indeksując latami ciąg przepływów, uzyskalibyśmy

$$CF_0 = CF(t = 0) = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$CF_1 = CF(t = 8) = (k - 1),$$

$$CF_2 = CF(t = 16) = 1.$$

Wartość obecna tak określonego ciągu przepływów wynosi

$$PV = CF_0 v^0 + CF_1 v^8 + CF_2 v^{16},$$

a po wstawieniu wartości kolejnych przepływów

$$PV = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot v^0 + (k - 1) \cdot v^8 + 1 \cdot v^{16}.$$

Z drugiej strony widać, że równanie to można traktować jako równanie kwadratowe złożonego argumentu, w którym nową zmienną jest np. $z = v^8$. Mamy wtedy

$$(2) \quad z^2 + (k - 1)z + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Ponieważ równanie to jest równaniem „kontekstowym”, bo opisuje zjawisko uwarunkowane ekonomicznie, w którym $i > 0$, to musi być też $0 < v < 1$, a tym samym $z \in (0; 1)$.

W zadaniu mamy wyznaczyć warunek, przy którym *IRR* nie istnieje, a mówiąc językiem algebry, kiedy wyróżnik równania (2) jest

ujemny. Policzmy, co trzeba

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta(k) = (k-1)^2 - 4 \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= k^2 - 2k + 1 - 4k^2 + 2k - 1 = -3k^2 + 2k.\end{aligned}$$

A więc

$$\Delta(k) < 0 \iff -3k^2 + 2k < 0 \iff 3k \left(k - \frac{2}{3}\right) > 0.$$

W ten sposób otrzymujemy

$$\Delta(k) < 0 \iff k \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

W konsekwencji warunkiem koniecznym i wystarczającym nieistnienia wewnętrznej stopy zwrotu (*IRR*), dla przedstawionej w zadaniu inwestycji jest, by $k \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Skoro już odpowiedzieliśmy na postawione pytanie, to możemy się teraz zastanowić nad pytaniami komplementarnymi:

- Czy istnieją dwie różne stopy *IRR*?
- Czy istnieje dokładnie jedna taka stopa?

Warunkiem wstępnym dla wszystkich przypadków jest nieujemność wyróżnika $\Delta(k)$. Każdy z nich będzie miał jednak nieco inne ograniczenia dodatkowe. Mianowicie:

Ad (i) Warunki miałyby postać

$$\begin{cases} \Delta(k) > 0, \\ z_1 \in (0; 1), \\ z_2 \in (0; 1). \end{cases}$$

Wiemy, że $\Delta(k) > 0$ dla $k \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$. Przy pozostałych dwóch warunkach mamy

$$z_1 \in (0; 1) \wedge z_2 \in (0; 1) \implies z_1 + z_2 \in (0; 2) \wedge z_1 z_2 \in (0; 1).$$

Posługując się wzorami Viéta'a dostajemy

$$\frac{-2}{-3} \in (0; 2) \quad \text{oraz} \quad \frac{0}{-3} \in (0; 1).$$

Ostatni warunek nie jest spełniony, wiemy więc, że nie mogą istnieć dwie różne stopy *IRR*.

Ad (ii) Przypadek jednej tylko wewnętrznej stopy zwrotu składa się z dwóch podprzypadków:

1. gdy stopa jest pierwiastkiem podwójnym równania kwadratowego, czyli że równanie kwadratowe wiążące stopę procentową z warunkami zadania ma wyróżnik $\Delta(k) = 0$;

oraz

2. gdy istnieją co prawda dwa pierwiastki z_1 i z_2 , ale jeden z nich nie spełnia warunku $z \in (0; 1)$. Byłyby dwie wartości krytyczne dla k , czyli $k_1 = 0$ oraz $k_2 = \frac{2}{3}$.

Przy $k = 0$ rozwiązanie równania (2) przyjmuje postać

$$z'_0 = \frac{-(0-1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Stąd już mamy

$$\frac{1}{(1+r')^8} = \frac{1}{2} \Rightarrow (1+r')^8 = 2 \Rightarrow r' = \sqrt[8]{2} - 1 \simeq 0,09.$$

Dla $k = \frac{2}{3}$ rozwiązaniem równania (2) jest

$$z''_0 = \frac{-\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2} = \frac{1}{6},$$

co w konsekwencji daje

$$r'' = \sqrt[8]{6} - 1 \simeq 0,25.$$

Przejdźmy do drugiego podprzypadku. Będzie nadal $\Delta(k) > 0$, ale $z_1 \notin (0; 1)$ lub $z_2 \notin (0; 1)$. Wciąż pozostajemy przy warunku, że $\Delta > 0$, tzn. $k \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Gdyby jeden z pierwiastków z_1, z_2 był ujemny, a drugi dodatni, to zgodnie ze wzorami Viéte' a $\frac{(k-\frac{1}{2})^2}{1} < 0$, a to jest niemożliwe.

Gdyby teraz jeden z pierwiastków był większy lub równy 1, to przy

$$z_1 = \frac{-(k-1) - \sqrt{-3k^2 + 2k}}{2} \geq 1$$

lub

$$z_2 = \frac{-(k-1) + \sqrt{-3k^2 + 2k}}{2} \geq 1.$$

Warunek $z_1 \geq 1$ jest równoważny nierówności

$$-k-1 \geq \sqrt{-3k^2 + 2k},$$

w której dla $k \in (0; \frac{2}{3})$ lewa strona jest ujemna, a prawa nieujemna, zatem otrzymaliśmy sprzeczność.

Warunek $z_2 \geq 1$ po przekształceniu przechodzi w nierówność

$$\sqrt{-3k^2 + 2k} \geq k+1,$$

a ponieważ obie strony są nieujemne, to po podniesieniu nierówności do kwadratu zachowujemy zwrot nierówności i dostajemy $-3k^2 + 2k \geq k^2 + 2k + 1$. Otrzymaliśmy nierówność $0 \geq 4k^2 + 1$, której nie spełnia żadne k .

Widać zatem, że przypadek jednej tylko stopy *IRR* nie może wystąpić przy dwóch różnych pierwiastkach równania (2). $\square$

3. Inwestor ma w portfelu:

- (i) pięć obligacji zerokuponowych, każda o wartości nominalnej $F_1 = 100$ j.m., cenie $P_1 = 91,67$ oraz rocznym terminie wykupu,
- (ii) trzy obligacje, każda o wartości nominalnej $F_2 = 100$, cenie $P_2 = 110$, stopie kuponowej $r_* = 0,1$, dwuletnim terminie wykupu oraz kuponach płatnych corocznie z dołu.

Obliczyć wewnętrzną stopę zwrotu z inwestycji opisaną portfelem.

Rozwiązanie: Koszt zakupu opisanego portfela wynosi

$$CF_0 = -(3 \cdot 110 + 5 \cdot 91,67) = -788,35.$$

Wewnętrzna stopa zwrotu $r = IRR$ i związana z nią stopa dyskontowania v (sprawdzić czy nie lepiej byłoby napisać czynnik dyskontujący), dla której wartość bieżąca przychodów z opisanego portfela obligacji będzie równa jego kosztowi zakupu, czyli 788,35 j.m. Innymi słowy r jest taką stopą procentową, dla której wartość bieżąca netto portfela jest równa zeru.

Wyliczmy zatem, ile wynoszą przychody w zależności od stopy dyskontowania v .

W pierwszym okresie wykupione zostaje 5 obligacji o cenie nominalnej 100 zł, otrzymujemy również 30 zł z odsetek. W drugim okresie otrzymujemy znów 30 zł z odsetek oraz wykupujemy trzy obligacje o cenie nominalnej 100 zł. Mamy więc przepływy $CF_1 = 530$ oraz $CF_2 = 330$, a $CF_0 = -788,35$ wyliczyliśmy już wcześniej. Wiemy, że

$$PV = CF_0 + CF_1v + CF_2v^2,$$

gdzie $v = \frac{1}{1+r}$. Równanie to zapiszmy w bardziej wygodnej postaci

$$330v^2 + 530v - 788,35 = 0.$$

Do kosztu zakupu portfela otrzymaliśmy równanie kwadratowe o wyróżniku $\Delta = 1\,321\,522$. Jedynym dodatnim pierwiastkiem jest $v = 0,938749551 = \frac{1}{1+r}$, a stąd $1+r = 1,065246848$ oraz $IRR = r \simeq 6,52\%$. $\square$

4. Przyjmujemy jako obowiązującą płaską strukturę terminową z efektywną roczną stopą procentową $i = 0,10$.

(i) Obliczyć średni czas trwania $\bar{d}$ strumienia płatności równych $CF(t) = 1$ dla $t \in \mathbb{N}$.

(ii) Rozważmy dwie inwestycje:

- zakup dziesięcioletniej obligacji płaćcej roczny kupon 5% nominału równego $\bar{d}$ po cenie brudnej V_A .

- zakup po cenie $V_B = 20$ instrumentu płaćącego t w chwili t , przy $t \in \mathbb{N}_+$.

Wyznaczyć zbiór $V_A > 0$, przy których $IRR_A > IRR_B$.

Rozwiązanie. a) Skorzystamy z zależności

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} 1(1+r)^k = \frac{1}{r} = 10.$$

Stosując (1) do $x = \frac{1}{1+r}$, dostajemy

$$(2) \quad \sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+r)^t} = \frac{1+r}{r^2}.$$

W związku z tym dla $r = i$ otrzymujemy

$$\bar{d} = \frac{1}{PV} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+i)^t} = \frac{110}{10} = 11.$$

b) Z (2) wynika, że IRR_B jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$0 = -V_b + \frac{1+r}{r^2},$$

zatem $IRR_B = 0,25$.

Niech $PV_A(r)$ oznacza wartość obecną inwestycji A , wyznaczoną przy efektywnej rocznej stopie r . Ponieważ funkcja $r \mapsto PV_A(r)$ ściśle maleje, to

$$IRR_A \leq VIRR_B \leq PV_A(IRR_B) \geq 0,$$

$$-V_A + 10 \sum_{t=1}^{10} \frac{0,05\bar{d}}{(1,25)^t} + \frac{\bar{d}}{(1,25)^{10}} \geq 0.$$

Z uwagi na to

$$0 \leq V_A \leq 2,2 + 8,8 \cdot (0,8)^{10} \approx 3,1448.$$

□

2.5.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. O pewnej inwestycji wiadomo, że w chwili $t_0 = 0$ oraz w chwili $t_2 = 2$ należy wpłacić odpowiednio kwoty $P_1 = 504$ j.m. oraz $P_2 = 2\,400$ j.m., natomiast w chwili $t = 1$ oraz $t = 3$ otrzymuje się odpowiednio kwoty $B_1 = 1\,910$ j.m. oraz $B_3 = 1\,000$ j.m. Które z następujących sformułowań dotyczących tej inwestycji są prawdziwe:
 - (i) istnieją dokładnie dwie wewnętrzne stopy zwrotu, z których jedna wynosi $i_1 = 0,25$;
 - (ii) wartość obecna tej inwestycji jest funkcją rosnącą stopy zwrotu i dla $i \in [0,25; 0,30]$;
 - (iii) dla $v \in [0,60; 0,91]$ wartość obecna tej inwestycji jest minimalizowana dla $v_1 = 0,60$, natomiast maksymalizowana dla $v_2 = 0,91$. [Z3. EA 12.10.02.]
2. Planowana trzyletnia inwestycja wymaga natychmiastowego wyłożenia kwoty 70 000 j.m., a także kwoty 10 000 j.m. na koniec drugiego roku jej życia. Natomiast przychody mają napłynąć na koniec pierwszego roku w kwocie 40 000 j.m. oraz na koniec trzeciego roku, kiedy inwestor otrzyma zwrot w wysokości 55 770 j.m. Oblicz *IRR* dla tej inwestycji.
3. Wiadomo, że inwestor ma otrzymać płatności odpowiednio w wysokościach 4 w chwili $t_0 = 0$ oraz $(m + 1)^2$ w chwili $t_2 = 2$. Wiadomo też, że będzie musiał zapłacić $(m - 1)$ w chwili t_1 . Podać warunek konieczny i wystarczający dla parametru m , gwarantujący, że będą istniały dwie różne wewnętrzne stopy zwrotu i_1 oraz i_2 , spełniające równocześnie następujące warunki:
 - (i) każda z nich będzie większa od 25%,
 - (ii) każda z nich będzie mniejsza od 100%,
 - (iii) ich suma będzie mniejsza od 150%.
4. Ciąg wszystkich przepływów dotyczących pewnej inwestycji w ciągu roku ma postać

$$\begin{aligned} CF_0 &= -1\,000, & CF_1 &= 200, & CF_2 &= -100, \\ CF_3 &= 500, & CF_4 &= 200, & CF_5 &= 300 \end{aligned}$$

przy stopie rynkowej $r = 0,04$. Obliczyć NPV inwestycji
citepokl.

5. Przedsiębiorstwo rozważa wdrożenie trzyletniego projektu inwestycyjnego, którego wydatki i wpływy są następujące:

- nakład inwestycyjny wynosi 40 000 j.m.,
- wpływy wyniosą po pierwszym roku 16 000 j.m., po drugim 22 000 j.m., a po trzecim 17 000 j.m.

Obliczyć NPV oraz IRR , jeżeli stopa dyskontowa wynosi 13%. Zinterpretować otrzymane wyniki.

6. O pewnym planie wpłat i wypłat wiadomo, że jeżeli w chwili przystąpienia otrzyma się z niego wypłatę w wysokości k , to na końcu pierwszego roku po przystąpieniu należy wpłacić kwotę $\frac{110}{30} \cdot k$,

a rok później otrzyma się kwotę $\frac{100}{30} \cdot k$. Do planu można przystąpić na początku każdego roku, ale wyjście z niego następuje zawsze na końcu drugiego roku, licząc od daty przystąpienia. Do planu można przystępować wielokrotnie, niekoniecznie po uprzednim wyjściu z niego. Inwestor przystępuje do planu trzykrotnie: w chwili $t = 0$, w chwili $t = 1$ oraz w chwili $t = 2$, każdorazowo otrzymuje wypłaty odpowiednio: 48 j.m., 240 j.m. oraz 460 j.m. Obliczyć sumę czynników dyskontujących v odpowiadających wewnętrznym stopom zwrotu, zrealizowanym przez inwestora. [Z6. EA 25.01.03.]

7. Po przeanalizowaniu inwestycji o stałej wysokości osiągniętych dochodów P w kolejnych latach, o stałej wysokości A kosztów stałych oraz stałej wysokości kosztów zmiennych $b\%$ osiągniętych przychodów P , ustalono, że

(i) $NPV(12 : 3,0; 8\%) = 100$,

(ii) $NPV(15 : 4,0; 12\%) = 120$,

gdzie symbol $NPV(P; A; b\%)$ oznacza obecną wartość zysków z inwestycji wyznaczoną przy stałej stopie procentowej i .

Wyznaczyć poziom stałych dochodów P , przy których zachodzi równość $NPV(P; 0,8; 20\%) = 0$. [Z7. EA 09.12.00.]

3. Plany spłaty długów

3.1. Metoda amortyzacji

Istotą tej metody jest podział czasu życia długu (kredytu) na okresy odsetkowe, zwykle jednakowej długości. Odsetki od kredytu są naliczane na koniec okresu odsetkowego na podstawie zadłużenia z początku tego okresu i zwane są stanem zadłużenia, wielkością zadłużenia lub jeszcze inaczej saldem długu. Wszystkie przepływy gotówki są kumulowane, dlatego też zwykle mają miejsce na koniec okresu odsetkowego. Przepływy te nazywane są zamiennie spłatami kredytu lub jego rat.

Każda z rat kredytu składa się z części odsetkowej oraz części kapitałowej (chyba że treść umowy kredytowej dopuszcza inne zasady). Podział raty na część odsetkową i kapitałową powoduje fakt, że część kapitałowa zwolniona jest z podatku, w przeciwieństwie do części odsetkowej, stanowiącej przychód kredytodawcy.

W sytuacji, gdy kwota przepływu nie pokrywa wysokości raty do spłacenia w którymś z okresów, różnica między kwotą przepływu a kwotą raty zostaje dopisana do kwoty zadłużenia. Ma wtedy miejsce zjawisko zwane *amortyzacją ujemną* lub *amortyzacją negatywną*.

Przedstawiony schemat ma charakter ogólny, od przedstawionej zasady istnieją bowiem odstępstwa zależne od warunków umowy zawartej między kredytodawcą a kredytobiorcą. Okres życia kredytu następuje, gdy suma wpłat jest równa kwocie kredytu [4].

3.1.1. Oznaczenia

W skrypcie używane będą klasyczne oznaczenia matematyki finansowej związane ze spłatą kredytów (długów), a mianowicie:

- K – wysokość zaciągniętego kredytu;
- n – liczba okresów, na które podzielono czas życia kredytu;

- r_k – stopa procentowa w k -tym okresie, dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- O_k – odsetki naliczone w k -tym okresie, dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- CF_k – przepływ gotówki na koniec k -tego okresu, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- T_k – rata kapitałowa na koniec k -tego okresu, dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- S_k – stan zadłużenia w k -tym okresie, dla $k \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$
oraz $S_1 = K, S_{n+1} = 0$.

Przyjmujemy ponadto, że wszystkie salda S_k oraz stopy r_k są nieujemne. Konsekwencją przyjętych oznaczeń są następujące fakty:

- $O_k = r_k \cdot S_k$,
- $S_{k+1} = S_k + O_k - CF_k$,
- $\sum_{k=1}^n CF_k = K + \sum_{k=1}^n O_k$,

gdzie n oznacza liczbę okresów spłat, zaś $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

3.1.2. Przykłady

1. Pożyczka 20-letnia ma być spłacana poprzez dokonywanie równych spłat kapitału w wysokości 100 j.m. oraz odsetek od bieżącej kwoty zadłużenia, na koniec każdego roku. O ile zmniejszy się wysokość zapłaconych odsetek, jeśli rata kapitałowa ulegnie podwojeniu?

Rozwiązanie. Zgodnie z przyjętą konwencją oznaczmy odsetki w pierwszym i drugim przypadku odpowiednio przez I_1 oraz I_2 . Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 0,1 \cdot 20\,000 + 0,1 \cdot 19\,000 + \dots + 0,1 \cdot 1\,000 = \\
 &= 0,1 \cdot (20\,000 + 19\,000 + \dots + 1\,000) = \\
 &= 0,1 \cdot \frac{20\,000 + 1\,000}{2} \cdot 20 = 21\,000
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_2 &= 0,1 \cdot 20\,000 + 0,1 \cdot 28\,000 + \dots + 0,1 \cdot 2\,000 = \\ &= 0,1(20\,000 + 18\,000 + \dots + 2\,000) = \\ &= 0,1 \cdot \frac{20\,000 + 2\,000}{2} \cdot 10 = 11\,000. \end{aligned}$$

W rezultacie $\Delta = I_1 - I_2 = 10\,000$. □

2. Pożyczka w wysokości 600 000 j.m. ma być spłacona w ciągu trzydziestu pięciu lat w równych comiesięcznych ratach płatnych z dołu, przy stopie oprocentowania $r^{(12)} = 6\%$. Prowizja pobierana przez bank wynosi 3%. Po dziesięciu latach pożyczkobiorca zdecydował, że spłaci połowę pozostałego zadłużenia, a pozostałą połowę spłaci w ciągu dziesięciu lat w równych kwartalnych ratach płatnych z dołu przy stopie oprocentowania $i^{(4)} = 8\%$. Ile wyniósł koszt pożyczki?

Rozwiązanie. Niech X oznacza wysokość comiesięcznej raty wyrażonej w jednostkach monetarnych. Wtedy mamy, że przy trzydziestu pięciu latach spłat jest:

$$600\,000 = X \cdot a_{\overline{420}|0,005} = X \cdot 175,38,$$

co daje $X = 3\,421,14$.

Do spłacenia po dziesięciu latach pozostaje

$$3\,421,14 \cdot a_{\overline{300}|0,005} = 3\,421,14 \cdot 155,20 \simeq 530\,960,67.$$

Spłacił nie za wiele, bo tylko $600\,000 - 530\,960,67 = 69\,039,28$.

Połowa tej kwoty wynosi 265 480,34 i ją właśnie spłaca pożyczkobiorca, a identyczną kwotę pozostawia do spłaty na dekadę w ratach kwartalnych. Ratę kwartalną w tych warunkach oznaczmy przez X_1 . Otrzymujemy wówczas:

$$265\,480,34 = X_1 \cdot a_{\overline{40}|0,02} = X_1 \cdot 27,355,$$

a stąd $X_1 = 9\,048,83$.

Policzmy teraz koszty. Jak wiemy, w pierwszym okresie spłat odsetki wyniosły

$$\begin{aligned} O_1 &= 120 \cdot X - 69\,039,28 = \\ &= 120 \cdot 3\,421,14 - 69\,039,28 = 341\,497,52. \end{aligned}$$

W drugim okresie natomiast były równe

$$O_2 = 40 \cdot 9\,048,83 - 265\,480,34 = 96\,472,86.$$

Do tego dochodzi jeszcze prowizja w wysokości 3%, której koszt to 18 000 j.m.

Całkowity koszt tego kredytu wynosi

$$341\,497,52 + 96\,472,86 + 18\,000 = 455\,970,38.$$

Otrzymany wynik rozumiemy jako 455 970,38 j.m. □

3. Pożyczka ma być spłacona w ciągu trzydziestu lat rocznymi ratami w wysokości 10 000 j.m., płatnymi z dołu, przy efektywnej stopie oprocentowania równej 8%. Po dziesięciu płatnościach pożyczkobiorca chciałby wpłacić jednorazowo kwotę X , w takiej wysokości, aby pozostały dług mógł spłacić w ciągu dekady ratami płatnymi co pół roku w wysokości 5 000 przy nominalnej półrocznej stopie oprocentowania 4%.

Rozwiązanie: Wysokość pożyczki w momencie jej wypłaty można przy warunkach zadania obliczyć jako

$$PV = 10\,000 \cdot a_{\overline{30}|0,08} = 10\,000 \cdot 11,258 = 112\,580.$$

Natomiast równanie wartości dla tej pożyczki ma postać

$$\begin{aligned} &10\,000 \cdot a_{\overline{30}|0,08} = \\ &= 10\,000 \cdot a_{\overline{10}|0,08} + X \cdot \frac{1}{(1,08)^{10}} + 5\,000 \cdot a_{\overline{20}|0,04} \cdot \frac{1}{1,08^{10}}. \end{aligned}$$

Przekształcając tę równość, wyliczmy kwotę X jako

$$X =$$

$$= \left(10\,000(a_{\overline{30}|0,08} - a_{\overline{10}|0,08}) - 5\,000a_{\overline{20}|0,04} \frac{1}{(1,08)^{10}} \right) (1,08)^{10}$$

i dalej

$$X = 10\,000(a_{\overline{30}|0,08} - a_{\overline{10}|0,08})(1,08)^{10} - 5\,000a_{\overline{20}|0,04}.$$

Po wykonaniu stosownych obliczeń mamy, że

$$a_{\overline{30}|0,08} \simeq 11,258, \quad a_{\overline{10}|0,08} \simeq 6,710,$$

$$a_{\overline{20}|0,04} = 13,590, \quad \frac{1}{(1,08)^{10}} \simeq 0,463,$$

podstawiamy i otrzymujemy

$$X = 10\,000 \cdot (11,258 - 6,710) \cdot 0,463 - 5\,000 \cdot 13,590 \simeq 30\,241.$$

W chwili kończącej pierwszą i rozpoczynającą kolejną dekadę pożyczkobiorca powinien dokonać jednorazowej wpłaty w wysokości $X = 30\,241$ j.m. $\square$

4. Zaciągnięto kredyt w wysokości 300 000 j.m. przy nominalnej rocznej stopie oprocentowania wynoszącej 5,5%. Prowizja dla banku za jego udzielenie wyniosła 2% wartości. Kredytobiorca wybrał opcję trzymiesięcznej karencji w spłacie kapitału (przez pierwsze trzy miesiące spłaca wyłącznie odsetki). Po trzech miesiącach karencji kredyt jest spłacany w 360 równych miesięcznych ratach płatnych z dołu. Po zapłaceniu 120 rat kredytobiorca spłaca całość pozostałego do spłaty kredytu jednorazowo na koniec kolejnego miesiąca. Ile wyniosła łączna nominalna suma kosztów tego kredytu?

Rozwiązanie. Na początku wypiszmy dane, jakie mamy w zadaniu. Wysokość kredytu:

$$K = 300\,000 \text{ j.m.}$$

Stopa procentowa (stała przez cały okres życia kredytu):

$$r = 5,5\% = 0,055.$$

Jako że kredyt jest spłacany w miesięcznych ratach, stopa, którą będziemy się posługiwać wynosi:

$$r^{(12)} = \frac{5,5\%}{12} \simeq 0,46\% = 0,0046.$$

Bank pobiera prowizję w wysokości 2%, a więc od razu możemy wyliczyć należną mu kwotę:

$$0,02 \cdot 300\,000 = 6\,000.$$

Wiemy ponadto, że kredyt jest spłacany w 360 j.m. równych ratach oraz że po spłacie 120 j.m. z nich kredytobiorca podjął decyzję o uregulowaniu pozostałej należności.

Mamy również informację, że kredytobiorca zdecydował się na trzymiesięczny okres karencyjny. Oznaczmy te spłaty kolejno CF_{-3} , CF_{-2} , CF_{-1} , gdzie:

$$CF_{-3} = CF_{-2} = CF_{-1} = CF_0 = 300\,000 \cdot 0,0046 = 1\,375.$$

Na początku zajmijmy się obliczeniem wysokości raty miesięcznej po okresie karencji. Kolejne raty będziemy oznaczać przez $CF_1, CF_2, \dots, CF_{360}$. Ponadto przez S_i oznaczmy kwotę zadłużenia w i -tym okresie. Wiemy, że $S_1 = 300\,000$, na które będzie się składać suma wszystkich rat zdyskontowanych współczynnikiem $v = \frac{1}{1+r^{(12)}} \simeq 0,995$ (z treści zadania wiemy, że raty są płacone z dołu, a więc należy pamiętać o przemnożeniu sumy przez czynnik dyskontujący). Po czym otrzymujemy:

$$S_1 = 300\,000 = v \sum_{i=1}^{360} CF_i v^i.$$

Ze względu na to, że raty są stałe, czyli $CF_1 = CF_2 = \dots = CF_{360} = CF$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
300\,000 &= v CF \sum_{i=1}^{360} v^i = \\
&= v CF (1 + v^1 + v^2 + \dots + v^{360}) = \\
&= v CF \frac{1 - v^{360}}{1 - v} = 166,165 CF.
\end{aligned}$$

Stąd po podzieleniu mamy:

$$CF = 1\,805,43.$$

Teraz skupmy się na fakcie, że po 120 ratach kredytobiorca spłacił resztę kredytu. Znając wysokość rat, możemy obliczyć stan zadłużenia po 120 miesiącach, czyli kwotę S_{120} . Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
S_{120} &= v CF \cdot (1 + v^1 + v^2 + \dots + v^{240}) = \\
&= v CF \cdot \frac{1 - v^{240}}{1 - v} = 251\,496,39.
\end{aligned}$$

Wiemy, że pozostałą część kredytu kredytobiorca spłaci dopiero na koniec kolejnego miesiąca, więc pozostałą kwotę mnożymy raz jeszcze przez miesięczny czynnik akumulujący:

$$251\,496,39 \cdot (1 + 0,0046) \simeq 153\,501,90.$$

Do obliczenia pozostała wysokość odsetek, jakie urosły przez okres 120 miesięcy, kiedy kredytobiorca regularnie spłacał kredyt. Skorzystamy z zależności $O_i = S_i \cdot r_i$, gdzie O_i oznacza wysokość odsetek w i -tym okresie. Przy założeniu, że stopa jest stała, suma odsetek wyniesie:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{120} O_i &= r \sum_{i=1}^{120} S_i = r(S_1 + S_2 + \dots + S_{120}) = \\
&= r \left(v \frac{1 - v^{360}}{1 - v} CF_0 + v \frac{1 - v^{359}}{1 - v} CF_0 + \dots + v \frac{1 - v^{240}}{1 - v} CF_0 \right).
\end{aligned}$$

Po wyciągnięciu powtarzających się czynników i uproszczeniu wyrażenia w nawiasie dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{120} O_i = \frac{rvCF_0}{1-v} \left[120 - v^{240} (1 + v^1 + v^2 + \dots + v^{120}) \right].$$

Dalej, po zapisaniu wyrażenia w nawiasie w postaci sumy ciągu geometrycznego i podstawieniu, mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{120} O_i &= \frac{0,0046 \cdot 0,995 \cdot 1805,43}{0,005} \left(120 - 0,3 \cdot \frac{1 - 0,548}{0,005} \right) = \\ &= 153\,501,90. \end{aligned}$$

Dostajemy zatem łączny koszt obsługi kredytu w wysokości

$$153\,501,90 + 1\,156,88 + (3 \cdot 1\,375,00) + 6\,000,00 = 164\,783,78.$$

Łączny koszt kredytu jest sumą otrzymanej kwoty oraz S_{120} , w związku z czym dostajemy:

$$164\,783,78 + 251\,496,39 = 416\,280,17. \quad \square$$

3.1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Czternastoletnia pożyczka w wysokości $K = 150\,000$ j.m. miała być spłacona przy użyciu renty pewnej, natychmiast płatnej, o równych spłatach R_1 dokonywanych na końcu każdego roku. Do kalkulacji spłat przyjęto strukturę stóp procentowych, w której efektywna roczna stopa procentowa będzie wynosić w pierwszym okresie siedmioletnim $i_1 = 0,05$, a w drugim siedmioletnim okresie spłaty $i_2 = 0,1$. Po zapłaceniu trzech rat pożyczkobiorca zdecydował się pożyczyć dodatkowo 75 000 j.m. oraz spłacić całość zadłużenia równymi spłatami w wysokości R_2 , dokonywanymi na końcu każdego roku przez okres dwudziestu lat, począwszy od tej chwili. Przy kalkulacji kwot płatności R_2 przyjęto efektywną roczną stopę procentową równą $i_3 = 0,15$. Wyznaczyć R_2 . [Z7. EA 06.12.03.]

2. Pożyczka w kwocie 150 000 j.m., zaciągnięta przy stałej stopie procentowej $i = 0,11$, ma być spłacana przez okres dwudziestu pięciu lat w równych ratach płatnych na końcu każdego roku. Prowizja pobierana przez pożyczkodawcę przy zawieraniu umowy i potrącana z udzielonej pożyczki wynosi 0,03. Wyznaczyć roczną stopę zysku pożyczkodawcy, jeśli ten zdecyduje się spłacić pozostałą część długu łącznie z drugą ratą. [Z2. EA 15.01.00.]
3. Pożyczkobiorca spłacił dziesięcioletnią pożyczkę w równych ratach płatnych na koniec każdego roku. Ile wyniosła całkowita kwota spłaconych odsetek, jeśli
- (i) kapitał spłacony w pierwszych trzech ratach wynosi 1 253;
 - (ii) kapitał spłacony w ostatnich trzech ratach wynosi 1 763?
- [Z3. EA 17.06.00.]
4. Pożyczka jest spłacana za pomocą 10 malejących rat w kwotach odpowiednio 20 j.m., 19 j.m., 18 j.m., ..., 12 j.m., 11 j.m., dokonywanych na końcu każdego roku. Znaleźć wysokość oprocentowania zapłaconego w piątej racie. [Z6. EA 17.06.00.]
5. Pożyczka w wysokości 100 000 j.m. jest spłacana za pomocą rosnących spłat dokonywanych na końcu każdego półrocza. Pierwsza spłata wynosi 3 000 j.m., a każda następna jest wyższa od poprzedniej o 3 000 j.m. (z wyjątkiem ostatniej raty – niższej od wynikającej z tej zależności, na tyle wysokiej, by po jej uiszczeniu spłacone zostało całe pozostałe zadłużenie). Wiedząc, że nominalna roczna stopa procentowa naliczana kwartalnie wynosi $i^{(4)} = 0,08$, wyznaczyć wysokość odsetek zapłaconych w czwartym roku trwania umowy pożyczki. [Z8. EA 17.05.03.]
6. Pożyczka zaciągnięta przy stopie procentowej $i^{(2)}$ jest spłacana przez okres osiem lat za pomocą równych rat dokonywanych na końcu każdego kwartału. W przypadku wydłużenia okresu spłat do szesnastu lat (bez zmiany pozostałych warunków) wysokość każdej raty zmniejszy się o $\frac{1}{3}$. Wyznaczyć wysokość stopy procentowej $i^{(2)}$. [Z9. EA 09.12.00.]

7. Rozważmy kredyt w wysokości 240 000 j.m., który ma zostać spłacony w ciągu 20 lat i wiadomo też, że w ciągu pierwszej dekady raty są płatne na końcu każdego roku, a w ciągu kolejnych 10 lat – na końcu każdego kwartału. Wiadomo też, że łączna suma uiszczona w ciągu każdego z dwóch rozpatrywanych okresów spłaty jest taka sama, a w trakcie każdego z nich wysokość raty pozostaje stała. Przy kalkulacji wysokości rat założono, że w pierwszej dekadzie spłacania pożyczki efektywna roczna stopa procentowa wynosi $i = 0,12$ oraz, że nominalna roczna stopa procentowa w trakcie drugiej dekady spłaty jest równa $i^{(4)} = 0,16$.

Natychmiast po zapłaceniu szesnastej raty kredytobiorca pożyczył dodatkowo kwotę L , w związku z czym bank zmodyfikował zasady spłaty obecnego łącznego zadłużenia. Wiadomo, że według nowego planu spłaty zmodyfikowana rata ma być płatna na końcu każdego miesiąca przez okres pozostający do końca oryginalnie ustalonego terminu spłaty, a jej wysokość pozostaje stała. Wiemy dodatkowo, że przy kalkulacji zmodyfikowanej raty użyto nominalnej stopy procentowej i , a wtedy $i^{(12)} = 0,18$. Obliczyć wysokość L , jeśli wiadomo, że suma faktycznie zapłaconych odsetek jest o 0,15 wyższa od sumy odsetek, która zostałaby zapłacona, gdyby nie nastąpiły żadne zmiany. [Z8. EA 12.10.02.]

8. Rozpatrzmy plan spłaty czterdziestoletniego kredytu w nieznanej wysokości L , jeśli wiadomo, że:

- (i) w pierwszej dekadzie na końcu każdego roku spłacane będzie jedynie 0,25 kwoty odsetek od oryginalnego zadłużenia;
- (ii) przez kolejną dekadę na końcu każdego roku spłacane będą jedynie odsetki od bieżącego zadłużenia;
- (iii) przez ostatnią dekadę na końcu każdego roku spłacany będzie jedynie kapitał przy użyciu równych rat, przy czym łącznie w tym okresie zapłacone zostanie 0,50 nominalnej kwoty zadłużenia.

Obliczyć wysokość stałej raty płatnej na końcu każdego roku w trzeciej dekadzie spłaty, jeśli wiadomo, że gdyby w pierwszej oraz drugiej dekadzie spłaty na końcu każdego roku spłacane było 0,50 kwoty odsetek od oryginalnego zadłużenia, przy niezmiennych

płatnościach w ostatniej dekadzie spłaty, to wynosiłaby ona 450 000 j.m. Wiadomo ponadto, że efektywna roczna stopa procentowa wyniesie odpowiednio 0,14, 0,12, 0,10 oraz 0,08 w kolejnych dekadach spłaty. [Z3. EA 17.05.03.]

9. Rozpatrzmy plan spłaty trzydziestoletniego kredytu w kwocie 500 000 j.m., o którym wiadomo, że:

- (i) przez pierwszych dziesięć lat na końcu każdego roku spłacane będą jedynie odsetki od kwoty bieżącego zadłużenia;
- (ii) przez kolejnych dziesięć lat na końcu każdego roku spłacany będzie jedynie kapitał przy użyciu równych rat, przy czym łącznie nominalnie zapłacone zostanie 0,40 pierwotnej kwoty zadłużenia;
- (iii) przez ostatnią dekadę na końcu każdego roku spłacone zostanie pozostałe zadłużenie przy użyciu równych rat.

Obliczyć wysokość raty płatnej w ostatnim dziesięcioletnim okresie spłaty, jeśli wiadomo, że w całym okresie spłaty efektywna roczna stopa procentowa wyniesie $i = 0,08$, z wyjątkiem roku 5, 15 oraz 25, kiedy to w wyniku wahań kursowych efektywna roczna stopa procentowa wzrośnie i wyniesie odpowiednio 0,10, 0,12 oraz 0,14. [Z4. EA 25.01.03.]

10. Pożyczka oprocentowana przy nominalnej rocznej stopie procentowej naliczanej kwartalnie $i^{(4)}$ miała być spłacana przez okres 32 lat za pomocą płatności dokonywanych wraz z końcem każdego kwartału, przy czym płatności dokonywane na koniec kwartału parzystego (tj. na końcu półrocza) miały być dwa razy większe od płatności dokonywanych na końcu kwartału nieparzystego. Po zapłaceniu połowy rat wydłużono pozostały okres spłaty do 32 lat (bez zmiany pozostałych warunków), w wyniku czego wysokość każdej raty zmniejszyła się o 20%. Wyznaczyć stopę procentową $i^{(4)}$. [Z9. EA 11.10.03.]

11. Inwestor bierze kredyt w wysokości 100 000 j.m. spłacany w 50 równych rocznych ratach płatnych z dołu przy stopie $i_1 = 0,10$. Bezpośrednio po zapłacie 10-tej raty renegocjuje warunki kredytu.

Pozostała do spłaty część kredytu będzie teraz spłacona przez kolejne 30 lat (łącznie 40 lat) w równych ratach ze zmienioną stopą $i_2 = 0,12$. Wyznaczyć różnicę między sumą odsetek zapłaconych na koniec 12, 14, 16, ..., 40 roku przy nowych warunkach, a sumą odsetek, która byłaby zapłacona w pierwotnej formule spłaty kredytu w tym samym czasie. [Z5. EA 10.10.05.]

12. Kredyt w wysokości 100 000 j.m. jest spłacany w 20 ratach płatnych na koniec kolejnych lat w wysokościach

$$X, (X + a), (X + 2a), \dots, (X + 19a),$$

gdzie $X, a \in \mathbb{R}$. Efektywna roczna stopa oprocentowania kredytu wynosi $i_{ef} = 0,07$. Wyznaczyć wartość a , przy której 0,60 dziesiątej raty stanowią odsetki. [Z7. EA 20.03.06.]

13. Kredyt hipoteczny o wartości 400 000 j.m. będzie spłacany przez 30 lat ratami płatnymi na końcu każdego roku, w następujący sposób:

- (i) w pierwszej dekadzie kredyt spłacany jest równymi ratami w wysokości R ,
- (ii) w drugiej dekadzie raty tworzą ciąg malejący o wyrazach

$$R, (R - 1000), (R - 2000), \dots, (R - 9000),$$

- (iii) w trzecim dziesięcioleciu kredyt ponownie spłacany jest ratami o stałej wartości,
- (iv) oprocentowanie kredytu w pierwszym dziesięcioleciu wynosi 0,09, w drugim 0,08, a w trzecim 0,07.

Wiedząc, że wartość kapitału spłaconego w ratach siedemnastej i dwudziestej siódmej wynosi w sumie 35 774,12 j.m., obliczyć kwotę odsetek zapłaconych w drugim dziesięcioleciu.

[Z9. EA 26.03.18.]

14. Trzy osoby biorą z banku kredyty w wysokości 100 000 j.m. każda. Kredyty są spłacane za pomocą rat płatnych na koniec każdego roku przez najbliższych piętnaście lat. Każdy z kredytobiorców ma inny plan spłaty.

Pierwszy spłaca kredyt za pomocą rat postaci:

$$P, (P - 500), (P - 1\,000), \dots, (P - 7\,000)$$

(każda rata jest o 500 j.m. mniejsza od poprzedniej).

Drugi spłaca kredyt za pomocą rat postaci:

$$Q, (2Q), (3Q), \dots, (15Q).$$

Trzeci spłaca kredyt za pomocą rat postaci:

$$R, [(1,1)R], [(1,1)^2R], \dots, [(1,1)^{14}R].$$

Roczna efektywna stopa procentowa jest równa $i = 0,07$. Obliczyć wartość sumarycznych odsetek zapłaconych przez wszystkich trzech kredytobiorców w ciągu całego okresu spłacania kredytów. [Z7. EA 15.12.08.]

- 15.** Kredyt hipoteczny w wysokości 500 000 j.m. spłacany jest w 40 równych rocznych ratach, płatnych z dołu przy stopie $i = 0,05$. Bezpośrednio po spłacie ósmej raty ulega zmianie stopa procentowa. Jednocześnie kredytobiorca decyduje się na skrócenie pozostałego okresu kredytowania. Pozostała część kredytu będzie teraz spłacana przez kolejnych dwadzieścia lat w równych, płatnych z dołu, rocznych ratach, ze zmniejszoną stopą $r = 0,04$. Niech S_r oznacza sumę odsetek zapłaconych w pierwszych dziesięciu latach nowego kredytu (tj. w latach 10, 11, ..., 19, licząc od momentu zaciągnięcia pożyczki), natomiast S_i sumę odsetek, które byłyby zapłacone w tym samym okresie w oryginalnej formie. Obliczyć $\frac{S_i}{S_r}$.

[Z9. EA 08.10.07.]

3.2. Ciągła spłata długu

Ciągła spłata długu jest to model teoretyczny, oparty na akumulacji ciągłej, w którym tak odsetki, jak i spłaty kapitału odbywają się w sposób ciągły. W istocie jest to graniczny model kredytu ciągu modeli spłat dyskretnych, gdy liczba okresów spłaty dąży do nieskończoności [4].

Przypatrzmy się ciąglemu planowi spłaty kredytu w oparciu o metodę amortyzacji. Weźmy kredyt o jednorazowej wypłacie oraz bez prowizji i kosztów manipulacyjnych. Zakładamy, że kredyt został zaciągnięty w chwili $t = 0$ [4].

Do tego celu przyjmijmy oznaczenia

- K – wysokość zaciągniętego kredytu;
- T – czas życia kredytu;
- $r(t)$ – stopa procentowa w chwili t ;
- $O(t_1; t_2)$ – odsetki naliczone w okresie $[t_1; t_2]$;
- $CF(t_1; t_2)$ – wpłaty (przepływ gotówki) w okresie $[t_1; t_2]$;
- $g(t)$ – gęstość strumienia płatności w chwili t ;
- $S(t)$ – stan zadłużenia w chwili t , gdzie $S(0) = K$, $S(T) = 0$.

Założeniem dodatkowym jest, że: wszystkie salda $S(t)$, stopy $r(t)$, gęstości $g(t)$ w chwili t są nieujemne, a wszystkie wymienione funkcje są mierzalne dla argumentów nieujemnych.

W przedziale $[t_1; t_2]$ przepływ gotówki jest zależny od gęstości strumienia płatności i wynosi:

$$CF(t_1; t_2) = \int_{t_1}^{t_2} g(s) ds.$$

Wielkość odsetek jest wyznaczona przez stan zadłużenia i przez stopę procentową:

$$O(t_1; t_2) = \int_{t_1}^{t_2} r(s) S(s) ds.$$

Zmiana stanu zadłużenia zależy od strumienia wpłat i od kwoty odsetek. Mamy wtedy:

$$S(t_2) = S(t_1) + O(t_1; t_2) - CF(t_1; t_2),$$

a więc

$$S(t_2) - S(t_1) = O(t_1; t_2) - CF(t_1; t_2).$$

Przyjmując $t_1 = t$ oraz $t_2 = t + \Delta t$, dostajemy zależność

$$\Delta S(t) = \int_{[t; t+\Delta t]} r(s)S(s)ds - \int_{[t; t+\Delta t]} g(s)ds,$$

a następnie dzieląc stronami przez Δt , otrzymujemy

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{[t; t+\Delta t]} r(s)S(s)ds - \frac{1}{\Delta t} \int_{[t; t+\Delta t]} g(s)ds.$$

Modyfikując zapis, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{\Delta t} &= \\ &= \frac{\int_{[0; t+\Delta t]} r(s)S(s)ds - \int_{[0; t]} r(s)S(s)ds}{\Delta t} - \frac{\int_{[0; t+\Delta t]} g(s)ds - \int_{[0; t]} g(s)ds}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Przyjmując $F(s) := \int r(s)S(s)ds$ oraz $G(s) := \int g(s)ds$, dostajemy w konsekwencji zależność

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} - \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t},$$

a przy $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$S'(t) = f(t) - g(t) = r(t)S(t) - g(t),$$

gdzie $f(t) = f'(t) = r(t)S(t)$.

Otrzymana zależność ma jeszcze i tę dobrą stronę, że dostajemy z niej formułę na gęstość

$$g(t) = r(t)S(t) - S'(t).$$

3.2.1. Przykłady

1. Bank kapitalizujący co kwartał z dołu, przy nominalnej stopie procentowej $i = 0,24$, zamierza przejść na kapitalizację ciągłą. Wy-

znaczyć wysokość nominalnej stopy procentowej przy kapitalizacji ciągłej, aby w czasie pięciu lat obydwa warianty oprocentowania były jednakowo atrakcyjne.

Rozwiązanie. W sytuacji opisanej w zadaniu kwartalna stopa oprocentowania wynosi $i_{kw} = \frac{0,24}{4} = 0,06$. Przyjmijmy, że r jest nominalną stopą kapitalizacji ciągłej. Biorąc pod uwagę treść zadania, dostajemy równość $[(1,06)^4]^5 = e^{5r}$, która po zlogarytmowaniu daje $5r = \ln(1,06)^{20} = 20 \ln(1,06)$ i z której dostajemy

$$r = 4 \ln(1,06) \simeq 0,233 = 0,233\%.$$

Stąd stopa kapitalizacji ciągłej, równoważna w okresie pięciu lat kapitalizacji kwartalnej wynoszącej 0,06, jest równa 0,233.

Zauważamy, że zadanie to nie odnosi się do zadłużenia, ale do depozytu. Kłopot formalny związany z możliwością stosowania ciągłej spłaty długu polega na stronie prawnej. Mianowicie, w przypadku dyskretnego modelu spłaty długu dzieli raty na część obciążoną podatkiem i część wolną od podatku. $\square$

2. Wyznaczyć $A(2)$, gdy

$$(i) A(0) = 10, \quad (ii) \delta(t) = \ln 2 + 2t \ln 3 + 2^t \ln 2 \ln 4.$$

Rozwiązanie. Z uwagi na to, że: $A(t) = A(0)e^{\int_0^t \delta(s) ds}$, to w tym przypadku:

$$\begin{aligned} A(2) &= A(0)e^{\int_0^2 \delta(s) ds} = A(0)e^{\int_0^2 (\ln 2 + 2s \ln 3 + 2^s \ln 2 \ln 4) ds} = \\ &= 10e^{\left(\ln 2 \int_0^2 ds + \ln 3 \int_0^2 2s ds + \ln 2 \ln 4 \int_0^2 2^s ds \right)} = \\ &= 10e^{\left[2 \ln 2 + 4 \ln 3 + \ln 2 \ln 4 \left. \frac{2^s}{\ln 2} \right|_0^2 \right]} = 10e^{\left[\ln 4 + \ln 81 + (2^2 - 2^0) \ln 4 \right]} = \\ &= 10e^{\left[\ln 4 + \ln 81 + \ln 64 \right]} = 10e^{\left[\ln 3^4 + \ln 4^4 \right]} = \\ &= 10e^{\ln(3^4 \cdot 4^4)} = 10 \cdot 3^4 \cdot 4^4 = 10 \cdot (3 \cdot 4)^4 = \\ &= 10 \cdot 12^4 = 10 \cdot 144^2 = 10 \cdot 20736 = 207360. \end{aligned}$$

W konsekwencji otrzymujemy więc $A(2) = 207\,360$ j.m.

□

4. Obligacje

4.1. Podstawy teoretyczne

Na wstępie przedstawimy metodę wyznaczania stopy zwrotu z obligacji do momentu jej zapadalności, w języku angielskim zwanej w skrócie *YTM* (*Yield to Maturity*). W przypadku obligacji o stałym oprocentowaniu, z którą wiąże się $n + 1$ przepływów pieniężnych, najwcześniejszym przepływem jest $CF_0 = -P$ i jest to kwota, za którą inwestor zakupił obligację. Przepływy

$$CF_1, CF_2, \dots, CF_{n-1}$$

są kuponami, natomiast przepływ ostatni CF_n jest sumą kuponu oraz kwoty będącej ceną wykupu. Wymienione przepływy mają miejsce odpowiednio w chwilach $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$.

Jak już wspomnieliśmy, stopa procentowa *YTM* jest stopą zwrotu z obligacji do momentu jej zapadalności. Zakładamy, że odsetki (w tym przypadku kupony) są reinwestowane z taką samą efektywną stopą zwrotu. Efektywna stopa zwrotu *YTM* spełnia zatem równość:

$$\begin{aligned} P \cdot (1 + YTM)^{t_n} &= \\ &= CF_1 \cdot (1 + YTM)^{t_n - t_1} + CF_2 \cdot (1 + YTM)^{t_n - t_2} + \dots \\ &\quad \dots + CF_{n-1} \cdot (1 + YTM)^{t_n - t_{(n-1)}} + CF_n \end{aligned}$$

Równości tej można nadać równoważną postać

$$\begin{aligned} 0 &= CF_0 + \frac{CF_1}{(1 + YTM)^{t_1}} + \frac{CF_2}{(1 + YTM)^{t_2}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{CF_{n-1}}{(1 + YTM)^{t_{(n-1)}}} + \frac{CF_n}{(1 + YTM)^{t_n}}. \end{aligned}$$

Stąd już tylko krok do czynników dyskontujących $B(t_n)$, odpowiadających chwilom $t_0, t_1, \dots, t_n$, mającym postacie

$$B(t_i) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{(1 + YTM)^{t_i}},$$

a w szczególności

$$B(t_0) = (1 + YTM)^0 = 1.$$

Wynika z tego, że efektywna stopa procentowa zwrotu z inwestycji w rozpatrywaną obligację jest równa stopie zwrotu do momentu zapadalności. A zatem $R(t_n) = YTM$. Ponieważ znane są czynniki dyskontujące dla poszczególnych chwil $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, więc możemy zapisać

$$\begin{aligned} 0 &= CF_0 \cdot B(t_0) + CF_1 \cdot B(t_1) + CF_2 \cdot B(t_2) + \dots \\ &\quad \dots + CF_{n-1} \cdot B(t_{n-1}) + CF_n \cdot B(t_n). \end{aligned}$$

Znając $B(t)$ dla $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$, wartość $B(t_n)$ wyznaczamy z zależności

$$P = CF_1 \cdot B(t_1) + CF_2 \cdot B(t_2) + \dots + CF_n \cdot B(t_n).$$

Sposób ten nosi nazwę *metody łańcuchowej*.

Przyjmujemy oznaczenia obowiązujące w matematyce finansowej. Warto dodać, że są to oznaczenia zatwierdzone przez Międzynarodowe Towarzystwo Aktuarialne, którego historia sięga 1895 roku.

P	cena (rynkowa) obligacji
F	nominał obligacji
C	cena wykupu (kwota płacona posiadaczowi w dniu wykupu)
r	stopa kuponowa obligacji (kupon/nominał)
Fr	wysokość kuponu
g	zmodyfikowana stopa kuponowa, g definiuje ją równość: $Fr = Cg$
i	stopa zwrotu z obligacji (do momentu zapadalności YTM)
n	liczba okresów płatności kuponu od daty obliczeń do daty wykupu
K	wartość obecna, obliczana z użyciem stopy i , ceny wykupu $K = Cv^n$
G	kwota bazowa obligacji, definiuje ją równość $Gi = Fr$

4.1.1. Premia i dyskonto

W przypadku gdy cena zakupu obligacji przewyższa cenę wykupu ($P > C$), mówimy, że *obligacja została kupiona z premią*. Różnica $P - C$

jest kwotą premii. Może być wyrażona procentowo. Jeżeli natomiast cena zakupu jest niższa od ceny wykupu ($P < C$), to mówimy, że *obligacja została kupiona z dyskontem*. Różnica $C - P$ nazywana jest kwotą dyskonta (może też być wyrażona jako procent wykupu). Stąd mamy zależności:

$$\text{premia} = P - C = (Fr - Ci)a_{\overline{n}|i} = C(g - i)a_{\overline{n}|i}, \quad \text{gdy } g > i,$$

$$\text{dyskonto} = C - P = (Ci - FR)a_{\overline{n}|i} = C(i - g)a_{\overline{n}|i}, \quad \text{gdy } g < i.$$

Zajmując się obligacjami, mamy do czynienia z trzema stopami procentowymi:

1. *Nominalna stopa procentowa* – jest wyrażona w stosunku rocznym stopą kuponową, tzn.

$$\text{nominalna stopa procentowa} = \frac{\text{roczny kupon}}{\text{nominał obligacji}}.$$

2. *Bieżąca stopa zwrotu (current yield)* – jest stosunkiem rocznego kuponu do ceny rynkowej obligacji.
3. *Stopa zwrotu liczona do momentu zapadalności (YTM)*, czyli wyrażona w stosunku rocznym wewnętrzna stopa zwrotu.

Cztery formuły wyrażające cenę obligacji

lp.	Nazwa	Formuła
1.	Formuła podstawowa	$P = Fra_{\overline{n} i} + Cv^n = Fra_{\overline{n} i} + K$
2.	Formuła premia/dyskonto	$P = C + (Fr - Ci)a_{\overline{n} i}$
3.	Formuła kwoty bazowej	$P = G + (C - G)v^n$
4.	Formuła Makehama	$P = K + \frac{g}{i}(C - K)$

4.1.2. Wartości obligacji między płatnościami kuponu

Oznaczmy przez B_t i B_{t+1} ceny lub wartości księgowe obligacji tuż po dwóch kolejnych płatnościach kuponu. Pamiętajmy, że Fr jest wielkością kuponu. Mamy wtedy

$$B_{t+1} = B_t(1 + i) - Fr,$$

przy założeniu stałej stopy zwrotu i . A oto powód tej zależności:

$$\begin{aligned} B_t(1+i) - Fr &= [Fra_{\overline{n-t}} + Cv^{n-t}] (1+i) - Fr = \\ &= Fr(1+v+\dots+v^{n-t-1}) + Cv^{n-t-1} - Fr = \\ &= Fra_{\overline{n-t-1}} + Cv^{n-t-1} = B_{t+1}. \end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz zachowaniem B_{t+k} dla $0 < k < 1$.

Jeżeli obligacja jest kupowana między płatnościami, to należy podzielić przyszły (w rozumieniu „najbliższy”) kupon między dwie strony transakcji, ponieważ nowy posiadacz obligacji na koniec okresu otrzyma cały kupon. Będziemy uważać, że do chwili k narosła pewna część kuponu (oznaczana przez Fr_k), zwana po angielsku: *accured coupon* (kupon skumulowany). Mamy przy tym: $Cr_0 = 0$ oraz $Fr_1 = r$.

Przez B_{t+k}^f oznacza się pieniądze, które zmieniają właściciela przy zakupie obligacji w chwili $t+k$ (w polskiej literaturze używa się też nazwy *cena brudna* obligacji, ang. *flat price*). Symbolem B_{t+k}^m oznaczamy cenę z wyłączeniem narosłego kuponu (w polskiej literaturze *cena czysta*, zaś ang. *market price*). Mamy

$$B_{t+k}^f = B_{t+k}^m + Fr_k, \quad \text{dla } 0 < k < 1.$$

W praktyce giełdowej ceny obligacji podawane są w postaci dwóch składników tej sumy, czyli jako cena czysta (kurs) oraz narosły kupon!

4.1.3. Ćwiczenia

1. Sformułować definicję obligacji zerokuponowej oraz przedstawić wartość obecną takiej obligacji, jeśli znane są jej czas trwania, nominalna rynkowa stopa procentowa oraz cena wykupu, a także przedstawić jej wartość obecną, gdy znane są F , C , r .
2. Sformułować definicję obligacji kuponowej, jeśli znane są jej czas trwania, nominalna rynkowa stopa procentowa oraz cena wykupu, a także przedstawić jej wartość obecną, gdy znane są F , C , r .
3. Sformułować definicję premii oraz definicję dyskonta. Podać formułę wyceny obligacji dla przypadku premia/dyskonto, a także formuły na premię i na dyskonto.

4. Uzasadnić, że stopę zwrotu w terminie do wykupu można analitycznie wyznaczyć tylko i wyłącznie dla obligacji 0–kuponowej oraz że dla modeli dyskretnych i modeli ciągłych dysponujemy odpowiednio zależnościami

$$r_d = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad \text{oraz} \quad r_{ct} = \frac{1}{t_n} \ln\left(\frac{F}{P}\right).$$

5. Sformułować definicję stopy procentowej *YTM* oraz przedstawić rozumowanie prowadzące do wyznaczenia odpowiedniej formuły.
6. Sformułować definicje ceny czystej i ceny brudnej obligacji.
7. Omówić zagadnienie ustalania wartości obligacji między płatnościami kuponów.
8. Omówić zagadnienie ustalania wartości księgowej obligacji oraz metody: teoretyczną, praktyczną i semiteoretyczną.

4.1.4. Przykłady

1. Dane są trzy obligacje o tej samej wartości wykupu i mające te same terminy płatności kuponów:
- (i) pierwsza z kuponem wysokości 40 ma sumę zakupu P ;
 - (ii) druga z kuponem w wysokości 30 ma cenę zakupu Q ;
 - (iii) trzecia z kuponem w wysokości 30 ma (nieznaną) cenę zakupu R .

Wyznaczyć cenę R trzeciej obligacji.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że C oznacza cenę wykupu (wartość wykupu) obligacji, a jak pamiętamy – jest ona zwykle równa wartości nominalnej obligacji, F , czyli $C = F$. Poza tym, mimo że nie ma o tym mowy w treści zadania, znana jest nam stopa oprocentowania i oraz fakt, że mamy do czynienia z płaską strukturą stóp procentowych. Dodatkową informacją, którą należy przyjąć w celach technicznych, jest czas życia obligacji wyrażony w latach – oznaczmy go przez n .

Oznaczmy też zwyczajowo przez v zależny od i czynnik dyskontujący ($v = \frac{1}{1+i}$). Przy przyjętych umowach informacje zawarte w treści zadania pozwalają utworzyć układ równań

$$\begin{cases} P = 40a_{\overline{n}|i} + Cv^n, \\ Q = 30a_{\overline{n}|i} + Cv^n, \\ R = 80a_{\overline{n}|i} + Cv^n. \end{cases}$$

Widzimy, że jest to układ równań liniowych z trzema niewiadomymi:

- $a_{\overline{n}|i}$ — rentą n -letnią płatną z dołu, ze stopą procentową i ,
- Cv^n — zaktualizowaną na moment zakupu wartością nominalną obligacji,
- R — nieznaną ceną trzeciej obligacji.

Ponieważ trzecie z równań układu jest „konsumentem” informacji możliwych do uzyskania z równań pierwszego i drugiego, to zajmijmy się rozwiązaniem wspomnianego „podukładu”:

$$\begin{cases} P = 40a_{\overline{n}|i} + Cv^n, \\ Q = 30a_{\overline{n}|i} + Cv^n. \end{cases}$$

Odejmując stronami drugie od pierwszego z równań wchodzących w skład układu, otrzymujemy

$$P - Q = 10a_{\overline{n}|i} \quad \text{przy} \quad Q = 30a_{\overline{n}|i} + Cv^n.$$

Stąd już bez trudu dostajemy:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{10}(P - Q)$$

oraz po wstawieniu do drugiego równania

$$P = 4(P - Q) + Cv^n,$$

a zatem

$$Cv^n = 4Q - 3P.$$

W konsekwencji mamy

$$R = 80 \cdot \frac{1}{10} (P - Q) + 4Q - 3P.$$

Ostatecznie $R = 5P - 4Q$. □

2. Obligacja dwuletnia o wartości wykupu 10 000 j.m., równej wartości nominalnej, płaci roczne kupony równe $r_* = 0,03$ wartości nominalnej. Cena emisyjna wyznaczana jest w oparciu o następującą strukturę stóp procentowych: $i_1 = 0,05$ jest stopą procentową (*forward*) w pierwszym roku po emisji, zaś $i_2 = 0,04$ w drugim roku po emisji. Wiadomo, że pierwszy kupon będzie reinwestowany w momencie jego płatności na okres pozostały do wygaśnięcia obligacji, przy stopie procentowej i_2 . Za zakumulowaną wartość wypłat (uwzględniając opisaną reinwestycję kuponu) kupujemy w momencie wygaśnięcia obligacji dziesięcioletnią rentę o stałych, rocznych płatnościach, płatną na początku kolejnych lat, skalkulowaną przy stałej stopie technicznej równej wewnętrznej stopie zwrotu (*YTM*) z obligacji. Jaka jest roczna wypłata z tej renty?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez P cenę emisyjną obligacji dwuletniej. Niech przy tym Fr_* oznacza wartość kuponów pod koniec pierwszego i drugiego roku życia obligacji. Mamy wtedy z treści zadania, że przepływy finansowe wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} CF_0 &= -P = -10\,000, \\ CF_1 &= Fr_* = 0,03 \cdot 10\,000 = 300, \\ CF_2 &= F + Fr_* = 0,03 \cdot 10\,000 + 10\,000 = 10\,300, \end{aligned}$$

gdzie r_* oznacza stopę kuponową, zaś F nominal obligacji.

W zadaniu mamy do czynienia z dwiema stopami procentowymi, a przez to z dwiema czynnikami dyskontującymi. Pierwszy z nich obowiązuje w roku pierwszym i wynosi:

$$v_1 = \frac{1}{1,05} \quad \text{oraz drugi:} \quad v_2 = \frac{1}{1,05 \cdot 1,04}.$$

Stąd:

$$PV = CF_1 v_1 + CF_2 v_2,$$

czyli

$$PV = \frac{300}{1,05} + \frac{10\,300}{1,05 \cdot 1,04} \simeq 9\,717,94.$$

Zauważmy, że pierwszy z wypłaconych kuponów został poddany rocznej reinwestycji na rok, przy stopie $i_2 = 0,04$, a jego wartość przyszła na koniec drugiego roku wyniosła

$$Fr_* \cdot (1 + i_2) = 300 \cdot (1 + i_2).$$

Jednak udział tego kuponu w wartości obecnej obligacji, czyli w PV , wiąże się ze zdyskontowaniem kwoty $300 \cdot (1 + i_2)$ w dwuletnim przedziale czasu. Proces aktualizacji jego wartości na „chwilę zerową” jest oparty o czynnik dyskontujący właściwy dla tego przedziału, czyli o czynnik v_2 . Z uwagi na to, udział drugiego kuponu w wartości PV obligacji wynosi

$$\begin{aligned} 300 \cdot (1 + i_2) \cdot v_2 &= 300 \cdot (1 + i_2) \cdot \frac{1}{(1 + i_1) \cdot (1 + i_2)} = \\ &= \frac{300}{1 + i_1} = \frac{300}{1,05}. \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz przez $r^\bullet$ wewnętrzną stopę zwrotu IRR , a wtedy równanie pozwalające na jej wyznaczenie ma postać:

$$P - Fr_* \cdot \frac{1}{1 + r^\bullet} - (F + Fr_*) \cdot \frac{1}{(1 + r^\bullet)^2} = 0.$$

Po pomnożeniu stronami przez $(1 + r^\bullet)^2$ i podstawieniu wcześniej wyznaczonej wartości na P dostajemy:

$$9\,717,94(1 + r^\bullet)^2 - 300(1 + r^\bullet) - 10\,300 = 0.$$

Podstawiając $t := 1 + r^\bullet$ i od razu zakładając, że $t > 0$, dostajemy równanie:

$$9\,717,94t^2 - 300t - 10\,300 = 0.$$

W rezultacie $\Delta = 40\,046\,900$ oraz $\sqrt{\Delta} \simeq 20\,011,725$, a zatem jednym z pierwiastków równania jest liczba ujemna $t_1 < 0$, drugim zaś – nas interesującym – jest $t_2 = 1,0450633$. W następnej kolejności dostajemy $t \simeq 1,045\%$ i dalej $r^\bullet \simeq 4,5\%$.

Teraz kupujemy rentę! Otóż do zainwestowania mamy zakumulowaną wartość pierwszego kuponu: $Fr_*(1 + i_2)$, plus drugi kupon i kwotę wykupu, które oznaczyliśmy jako: $F + Fr_*$. Stąd mamy

$$FV = 300 \cdot 1,04 + 10\,300 = 10\,612,00.$$

Jednak FV inwestycji to jest PV renty płatnej z góry przez 10 lat w równych ratach po X . Mamy więc:

$$PV_{renty} = X \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|0,045}.$$

Dla renty płatnej z góry przy oprocentowaniu wynoszącym $i = 0,045\%$ mamy, że

$$\ddot{a}_{\overline{10}|0,045} \simeq 8,2687901.$$

Stąd mamy już ratę X

$$X = \frac{PV_{renty}}{\ddot{a}_{\overline{10}|0,045}} = \frac{10\,612,00}{8,2687901} \simeq 1\,283,38 \text{ j.m.}$$

Przyjmijmy jako wynik przybliżony $X \simeq 1\,284 \text{ j.m.}$ □

- 3.** Inwestor kupił w dniu emisji obligacje: 10-letnią i 12-letnią. Wartość wykupu każdej obligacji wynosi 10 000 j.m. Każda obligacja wypłaca kupon o wartości 800 j.m. co dwa lata, począwszy od końca drugiego roku. Inwestor sfinansował 80% wartości zakupu obligacji za pomocą kredytu, natomiast pozostałą część opłacił z własnych środków. Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu.

Po trzech latach inwestor sprzedaje obie obligacje, wycofuje środki z funduszu i spłaca kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami. Wiedząc, że:

- cena zakupu obligacji została ustalona przy stopie procentowej 6%,
- cena sprzedaży obligacji została ustalona przy stopie procentowej 5%,

- stopa zwrotu funduszu, w którym reinwestowane są środki otrzymane z wypłaconych kuponów obligacji, wynosi 7%,
- oprocentowanie kredytu wynosi 8%,

obliczyć efektywną (roczną) stopę zwrotu z zainwestowanych środków własnych.

Rozwiązanie. Pamiętając, że kupony w wysokości 800 j.m. płacone są co dwa lata i oznaczając obecne wartości obligacji 10-cio i 12-letniej przez PV_{10} oraz PV_{12} , mamy

$$PV_{10} = 800 \left(\frac{1}{(1,06)^2} + \frac{1}{(1,06)^4} + \dots + \frac{1}{(1,06)^{10}} \right) + \frac{10\,000}{(1,06)^{10}},$$

$$PV_{12} = 800 \left(\frac{1}{(1,06)^2} + \frac{1}{(1,06)^4} + \dots + \frac{1}{(1,06)^{12}} \right) + \frac{10\,000}{(1,06)^{12}}.$$

Jeśli $K = K(0)$ jest kwotą zaciągniętego kredytu, to

$$K(0) = 0,8(PV_{10} + PV_{12}),$$

co wynika z treści zadania. Po wykonaniu stosownych obliczeń dostajemy, że

$$PV_{10} = 8\,442,23 \quad \text{oraz} \quad PV_{12} = 8\,225,55,$$

a stąd już mamy kolejny potrzebny wynik:

$$K(0) = 0,8(PV_{10} + PV_{12}) = 13\,334,22.$$

Teraz oznaczmy przez $S_{10}^{(3)}$ oraz $S_{12}^{(3)}$ kwoty, za jakie zostały sprzedane poszczególne obligacje w trzy lata po zakupie. Mamy, że:

$$S_{10}^{(3)} = 10\,000 \cdot v_s^7 + 800 \cdot (v_s^7 + v_s^5 + v_s^3 + v_s) \simeq 9\,755,15$$

oraz

$$S_{12}^{(3)} = 10\,000 \cdot v_s^9 + 800 \cdot (v_s^9 + v_s^7 + v_s^5 + v_s^3 + v_s) \simeq 9\,610,12,$$

gdzie $v_s = \frac{1}{1,05}$ jest ustalonym na podstawie stopy sprzedaży równej 5% czynnikiem dyskontującym sprzedaży. Kwota uzyskana

ze sprzedaży obu obligacji $S^{(3)}$ po trzech latach ich życia jest zatem równa

$$S^{(3)} = S_{10}^{(3)} + S_{12}^{(3)} = 19\,365,27.$$

Jednak w międzyczasie zaciągnięty w chwili kupna obligacji kredyt w kwocie $K(0)$ „obrócił” odsetkami, czyli zakumulował się w sposób złożony przy stopie oprocentowania kredytu wynoszącej – zgodnie z treścią zadania wynoszącej 8%. A więc w chwili sprzedaży obligacji jego wartość wyniosła

$$K(3) = K(0) \cdot (1,08)^3,$$

co w szczegółach daje

$$K(3) = K(0) (1,08)^3 = 13\,334,22 \cdot (1,08)^3 = 16\,797,28.$$

Oznaczając przez Z zysk z inwestycji, wartość środków zgromadzonych w funduszu po trzech latach trwania inwestycji przez $U(3)$, a udział środków własnych inwestora przez W mamy równanie:

$$Z = S^{(3)} + U(3) - K(3).$$

Mamy zgodnie z treścią zadania, że $U(3) = 1600 \cdot (1 + r_U)$, gdzie stopa zwrotu funduszu $r_U = 0,07$ – zgodnie z treścią zadania. Stąd

$$\begin{cases} U = 1\,600 \cdot 1,07 = 1\,712; \\ W = 0,2(PV_{10} + PV_{12}) = 3\,333,56. \end{cases}$$

Po podstawieniu stosownych wartości liczbowych i wykonaniu koniecznych działań otrzymujemy: $Z = 4\,280$. Jeżeli oznaczymy przez r_{ef} efektywną stopę stopę zwrotu inwestora z jego własnych środków, to dostaniemy równość

$$(1 + r_{ef})^3 = \frac{Z}{W}.$$

Mamy wtedy

$$(1 + r_{ef})^3 = \frac{4\,280,00}{3\,333,56} \simeq 1,2839127$$

stąd

$$r_{ef} = \sqrt[3]{1,2839127} - 1 \approx 1,0868722 - 1 \approx 0,087.$$

Zatem $r_{ef} \approx 0,087$. □

4. Obligacja o wartości nominalnej, równej wartości wykupu równej 1 500 j.m., ze stopą kuponową r będzie wykupiona po n latach. W przypadku gdy zwiększymy stopę kuponową o 1%, cena zakupu wzrośnie o 75 j.m. Cena zakupu obligacji została wyliczona przy stopie zwrotu 6%, o półrocznej kapitalizacji odsetek. Inna obligacja o wartości nominalnej, równej wartości wykupu 1 500 j.m., będzie wykupiona po $2n$ latach. Wiedząc, że obie obligacje wypłacają półroczne kupony, obliczyć cenę zakupu obligacji $2n$ letniej, przy stopie zwrotu 6% o półrocznej kapitalizacji odsetek, jeżeli jej stopa kuponowa wynosi 7%.

Rozwiązanie. Trzymajmy się klasycznych oznaczeń dotyczących obligacji. Niech tradycyjnie P oznacza cenę zakupu obligacji, F cenę nominalną, a C – cenę jej wykupu. Do tego niech r oznacza stopę kuponową. Z treści zadania wiemy, że

$$C = F = 1\,500 \text{ j.m.},$$

a nominalna stopa procentowa wynosi $r_{nom} = 0,06$, z czego z kolei wynika wysokość stopy półrocznej wynosząca $i = 0,03$. To ta stopa wyznacza czynnik dyskontujący równy $v = (1,03)^{-1}$.

Odwołajmy się teraz do formuły podstawowej dla wyceny obligacji $P = Fra_{\overline{n}|i} + Cv^n$. Informacja, że kupony płacone są co pół roku, a stopa kuponowa jest określona w stosunku rocznym oznacza, że wartość kuponu wynosi

$$\frac{1}{2}Fr = \frac{1}{2} \cdot 1\,500 \cdot r.$$

W naszych warunkach dostajemy

$$(1) \quad 1\,500 = \frac{1}{2} \cdot 1\,500 \cdot r \cdot a_{\overline{2n}|0,03} + 1\,500 \cdot \frac{1}{1,03^{2n}}.$$

Przejdźmy do drugiego warunku zawartego w zadaniu, a związanego ze wzrostem ceny zakupu obligacji w wyniku wzrostu stopy

kuponowej o 0,01. Wtedy zachodzi równość

$$(2) \quad 1500 + 75 = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot (r + 0,01) \cdot a_{\overline{2n}|0,03} + 1500 \cdot \frac{1}{1,03^{2n}}.$$

Odejmując stronami od równania (2) równanie (1) dostajemy

$$75 = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot a_{\overline{2n}|0,03}$$

i w efekcie przekształceń kolejną równość

$$a_{\overline{2n}|0,03} = 10,$$

która po uporządkowaniu prowadzi do zależności

$$1 - \frac{1}{(1,03)^{2n}} = 0,3,$$

a z niej

$$(1,03)^{2n} = \frac{10}{7}.$$

Logarytmując stronami, dostajemy

$$n = \frac{\ln \frac{10}{7}}{2 \ln(1,03)} \simeq 6,033311839.$$

A więc dobrnęliśmy do informacji, że $n = 6$.

Przyszła pora na ostatni akord, jakim jest obliczenie ceny P^* zakupu obligacji $2n$ letniej, przy stopie zwrotu 6%, o półrocznej kapitalizacji odsetek, jeżeli jej stopa kuponowa wynosi 7%, a kupony wypłacane są co pół roku. Mamy

$$P^* = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot 0,07 \cdot a_{\overline{24}|0,03} + 1500 \cdot \frac{1}{(1,03)^{24}}.$$

Po wykonaniu wszystkich koniecznych rachunków, przy danych z zadania dostajemy, że

$$P^* = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot 0,07 \cdot \frac{(1,03)^{24} - 1}{(1,03)^{24} \cdot 0,03} + 1500 \cdot \frac{1}{(1,03)^{24}} = 1627.$$

W konsekwencji $P = 1\,627$. □

5. Inwestor kupuje 20-letnią obligację o wartości wykupu równej wartości nominalnej 1 000 j.m. przy założeniu efektywnej stopy procentowej i za kwotę 1 500 j.m. Kupony płatne są corocznie, a stopa kuponowa jest równa $3i$ (trzykrotnej stopie procentowej i). Po 10 latach, sprzedaje ją za kwotę X , przy założeniu tej samej efektywnej stopy zwrotu i . Obliczyć wartość X .

Rozwiązanie. Mamy przy standardowych oznaczeniach: $r_* = 3i$ – stopa kuponowa, $C = 1\,000$ – wartość wykupu (równa cenie nominalnej F), cena (rynkowa) zakupu: $P = 1\,500$, że

$$P = Fr_* \cdot a_{\overline{20}|i} + Fv^{20}.$$

Ponieważ mamy $a_{\overline{20}|i} = \frac{1 - v^{20}}{i}$, to

$$1\,500 = 1\,000 \cdot 3i \cdot \frac{1 - v^{20}}{i} + 1\,000v^{20} = 3\,000 - 2\,000v^{20}.$$

A stąd już mamy:

$$v^{20} = \frac{1\,000}{2\,000} = 0,75,$$

$$\text{czyli } v^{10} = \sqrt{0,75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660254.$$

Przejdźmy teraz do celu głównego zadania. Poszukujemy wartości X , która oznacza cenę sprzedaży obligacji po dziesięciu latach, przy założeniu, że stopa sprzedaży oraz stopa zwrotu przy zakupie obligacji są identyczne i wynoszą i (tak sobie życzy autor zadania). Mamy zatem

$$X = Fr_* \cdot a_{\overline{10}|i} + Fv^{10},$$

co w przełożeniu na wartości liczbowe daje

$$X = 1\,000 \cdot 3i \frac{1 - v^{10}}{i} + 1\,000 \cdot v^{10}$$

i dalej

$$\begin{aligned} X &= 3\,000 - 2\,000v^{10} = 1\,000 \left(3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= 1\,000(3 - \sqrt{3}) \approx 1\,267,9492. \end{aligned}$$

Zatem $X = 1\,270$.

□

6. Dany jest pakiet 10 obligacji o kuponach płatnych półrocznie w wysokości 50 j.m. każdy i wartości wykupu równej 1 000 j.m. Termin wykupu obligacji przypada co roku, począwszy od końca 10. roku, tj. pierwsza obligacja zapada na końcu 10. roku, druga na końcu 11. roku, ..., dziesiąta obligacja zapada na końcu 19. roku. Inwestor bierze kredyt na zakup obligacji w wysokości 70% wartości zakupu obligacji, a za pozostałą część płaci z własnych środków. Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu. Inwestor po dwóch latach sprzedaje pakiet obligacji, wycofuje środki z funduszu i spłaca kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami. Obliczyć efektywną roczną stopę zwrotu i_{ef} z zainwestowanych środków, jeżeli wiadomo że

1. cena zakupu pakietu obligacji została ustalona przy stopie procentowej $i_1^{(2)} = 10\%$;
2. cena sprzedaży pakietu obligacji została ustalona przy stopie procentowej $i_2^{(2)} = 6\%$;
3. fundusz, w którym inwestowane są środki otrzymane z zapadłych kuponów są reinwestowane przy stopie $i_3^{(2)} = 8\%$;
4. kredyt na sfinansowanie zakupu jest oprocentowany przy stopie $i_4^{(2)} = 16\%$.

Rozwiązanie. Rozpatrzmy wartości obecne poszczególnych obligacji przyjmując oznaczenie, że stopa procentowa zakupu jest równa

$$i_z = \frac{i_1^{(2)}}{2} = \frac{10\%}{2} = 5\%.$$

Ponieważ czas życia obligacji z zakupionego pakietu waha się od 10 do 19 lat, to liczba okresów kapitalizacji kuponów waha się również od 20 do 38. Wypłata kuponów następuje od momentu upłynięcia pół roku od zakupu do wykupu ostatniej dziesiątej obligacji. Wartość obecna poszczególnych obligacji to

$$PV_{11} = 50 \sum_{j=1}^{22} v_z^j + 1\,000 v_z^{22} = 50 \sum_{j=1}^{22} \frac{1}{(1,05)^j} + 1\,000 \cdot \frac{1}{(1,05)^{21}},$$

Mamy stąd, że

$$= \left[50 \left(\sum_{j=1}^{20} v_z^j + \sum_{j=1}^{22} v_z^j + \dots + \sum_{j=1}^{38} v_z^j \right) \right] + \quad (4.1)$$

Porządkując otrzymujemy

$$+1\,000 \cdot (v_z^{20} + v_z^{22} + \dots + v_z^{38}) =$$

$$PV = 50 \frac{v_z [(1 - v_z^{20}) + (1 - v_z^{22}) + \dots + (1 - v_z^{38})]}{1 - v_z} +$$

$$+1\,000 \cdot (v_z^{20} + v_z^{22} + \dots + v_z^{38}) =$$

$$= 50 \frac{v_z [10 - (v_z^{20} + v_z^{22} + \dots + v_z^{38})]}{1 - v_z} +$$

$$+1\,000\,(v_z^{20} + v_z^{22} + \dots + v_z^{38}) =$$

$$= 50 \left\{ \frac{v_z}{1-v_z} \left[10 - \left(v_z^{20} \frac{1-v_z^{20}}{1-v_z^2} \right) \right] \right\} + 1000 \cdot \left(v_z^{20} \frac{1-v_z^{20}}{1-v_z^2} \right) =$$

$$= 500 \frac{v_z}{1-v_z} + 50v_z^{20} \frac{1-v_z^{20}}{1-v_z^2} \left(20 - \frac{v_z}{1-v_z} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} v_z = \frac{1}{1+i_z}, \\ \text{a więc:} \\ \frac{v_z}{1-v_z} = \frac{1}{i_z}. \end{array} \right] = 500 \frac{1}{i_z} + 50v_z^{20} \frac{1-v_z^{20}}{1-v_z^2} \left(20 - \frac{1}{i_z} \right).$$

I tu czeka nas nagroda, bo skoro $i_z = 0,05$, to $\frac{1}{i_z} = \frac{1}{0,05} = 20$.
Zatem bez rachunków mamy, że drugi składnik ostatniej sumy jest
równy 0 – obeszło się bez forsownych obliczeń – i *summa summa-*
rum mamy:

$$PV = PV(i) = 500 \cdot 20 = 10\,000 \text{ j.m.}$$

Po tym sukcesie możemy jeszcze raz popatrzeć na rachunki. Za-
uważmy, że w sumie (4.1) pierwszy składnik (suma w nawiasie
kwadratowym), to nic innego jak wartość obecna kuponów wypła-
canych przez wszystkie obligacje na przestrzeni życia inwestycji,
a drugi (suma w nawiasie zwykłym), to wartość obecna wypłat
wartości nominalnych obligacji w chwilach zapadalności!

To był konieczny wstęp, a teraz niech $K = K(0)$ oznacza, tradycyj-
nie już, zaciągnięty kredyt, zaś W – udział w inwestycji środków
własnych inwestora. Z treści zadania mamy, że

$$K(0) = 0,7 \cdot PV = 7\,000,$$

zaś co oczywiste

$$W = 0,3 \cdot PV = 3\,000.$$

W zadaniu jest ważne, jaka kwota kredytu będzie do spłacenia po
dwóch latach trwania inwestycji, a więc liczymy. Stopa oprocento-
wania kredytu wynosi $i_4^{(2)} = 16\%$, a więc oprocentowanie w okresie
półrocznym (w takim kredyt jest rozliczany), które oznaczmy dla
porządku $i_k \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i_4^{(2)}}{2} = \frac{16\%}{2} = 8\%$. Stąd też

$$K(2) = K(0) \cdot (1 + i_k)^4 = 7\,000 \cdot (1,08)^4 \simeq 9\,523,423.$$

Po dwóch latach, zgodnie z treścią zadania, inwestor sprzedaje
obligacje i z funduszu wycofuje środki $U(2)$, które narosły w nim
wskutek inwestowania wszystkich kuponów, jakie płaciły obligacje

w ciągu dwóch lat było to dodajmy, czterokrotnie. Wysokość wypłat to oczywiście 500 j.m. co pół roku. Stopa zwrotu funduszu

$$r_U \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i_3^{(2)}}{2} = \frac{8\%}{2} = 4\%.$$

Łatwo policzymy, że było to

$$\begin{aligned} U(2) &= 500 \left[(1 + r_U)^3 + (1 + r_U)^2 + (1 + r_U) + 1 \right] = \\ &= 500 \left[(1,04)^3 + (1,04)^2 + 1,04 + 1 \right] = 500 \frac{1 - (1,04)^4}{1 - 1,04} \approx \\ &\approx 500 \cdot 4,246465 \approx 2\,123,2325. \end{aligned}$$

Pozostała nam jeszcze do wyznaczenia cena obligacji po upływie dwóch lat – pamiętając, że stopa procentowa zakupu i sprzedaży są różne. Stopa procentowa sprzedaży obligacji wynosi

$$i_s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{i_2^{(2)}}{2} = \frac{6\%}{2} = 3\%.$$

Stąd też czynnik dyskontujący sprzedaży

$$v_s = \frac{1}{1 + i_s} = \frac{1}{1,03} \approx 0,9708737.$$

Do obliczenia wartości sprzedaży obligacji $S(2)$ posłużmy się doświadczeniem z wyceny obligacji w chwili zakupu. W formule jej dotyczącej zmienia nam się perspektywa, bo po dwóch latach czas życia wszystkich obligacji skrócił się o 4 półrocza, a więc w konsekwencji zmienia się również wartość kuponów. Poza tym, jak już wspomnieliśmy, inna jest stopa oprocentowania i inny czynnik dyskontujący. Skorzystamy już z ostatniej, najwygodniejszej jej postaci, która zaadoptowana do obecnych warunków daje, że:

$$\begin{aligned} S(2) &= 500 \frac{1}{i_s} + 50 v_s^{16} \frac{1 - v_s^{20}}{1 - v_s^2} \left(20 - \frac{1}{i_s} \right) = \\ &= 16\,666,667 + 50 \cdot 0,6231669 \frac{0,4463242}{0,05704} (20 - 33,333333) \approx \\ &\approx 13\,436,531. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc, że zysk Z inwestora wyniósł

$$Z = S(2) + U(2) - K(2) =$$

$$= 13\,436,531 + 2\,123,2325 - 9\,523,423 \approx 6\,036,3405.$$

Teraz możemy przejść do odpowiedzi na zasadnicze pytanie: „jaka była efektywna roczna stopa zwrotu inwestora z zainwestowanych środków własnych?”. Mamy

$$(1 + r_{ef})^2 = \frac{W}{Z} = \frac{6\,036,3405}{3\,000} = 2,01211135$$

i dalej

$$r_{ef} = \sqrt{2,01211135} - 1 = 1,4184899 - 1 = 0,4184899 \approx 42\%$$

Zatem $r_{ef} \approx 42\%$. □

7. Inwestor kupuje w momencie emisji 10-letnią obligację o wartości nominalnej 100 000 j.m. z 5% kuponami rocznymi i wartością wykupu równą nominalnej. Inwestor natychmiast sprzedaje jednak tę obligację i za uzyskaną kwotę kupuje w momencie emisji 7-letnią obligację z rocznymi kuponami, której wartość wykupu równa jest wartości nominalnej. Pierwszy kupon tej obligacji stanowi 3% wartości nominalnej, a każdy następny wzrasta o 2 punkty procentowe. Znaleźć wartość nominalną obligacji siedmioletniej, jeżeli oprocentowanie wynosi 6%.

Rozwiązanie. Rozpocznijmy od wyceny obligacji dziesięcioletniej, bo ona jest warunkiem startu. Mamy, że

$$C_{10} = F_{10} = 100\,000 \text{ j.m.}$$

podczas gdy stopa kuponowa wynosi $r = 0,05$, skąd wartość kuponu wynosi $0,05 \cdot 100\,000 = 5\,000$. Stopa oprocentowania $i = 6\%$, a więc $v = \frac{1}{1,06}$ jest czynnikiem dyskontującym. Stąd mamy, że wartość obecna, czyli cena rynkowa obligacji, wynosi:

$$PV_{10} = P_{10} = F_{10}r(v + v^2 + \dots + v^{10}) + F_{10}v^{10} =$$

$$\begin{aligned}
&= F_{10} r a_{\overline{10}|0,06} + F_{10} v^{10} = F_{10} r \frac{1 - v^{10}}{i} + F_{10} v^{10} = \\
&= 5\,000 \cdot \frac{1 - 0,5583947}{0,06} + 100\,000 \cdot 0,5583947 = \\
&= 5\,000 \cdot 7,3600871 + 55\,839,47 = 36\,800,435 + 55\,839,47 = \\
&= 91\,639,905.
\end{aligned}$$

Cena obligacji siedmioletniej, drugiej z obligacji, jest znana, bo wiemy, że $PV_{10} = PV_7$. Nie jest zaś znana wartość nominalna obligacji siedmioletniej F_7 , równa jej cenie wykupu C_7 .

Wartość obecna kuponów, które daje obligacja siedmioletnia, wynosi

$$PV_{coupon} = P_c = 0,03F_7v + 0,05F_7v^2 + \dots 0,15F_7v^7$$

Po uproszczeniu zapisu mamy

$$PV_{coupon} = P_c = (0,03v + 0,05v^2 + \dots + 0,15v^7)F_7.$$

Z drugiej strony, wykorzystując fakt, że kupony tworzą rentę arytmetyczną o różnicy 0,02, możemy, mnożąc ostatnią równość przez czynnik dyskontujący v , dostać pomocniczą równość

$$P_c v = (0,03v^2 + 0,05v^3 + \dots 0,15v^8)F_7.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
P_c - P_c v &= (0,03v + 0,05v^2 + \dots + 0,15v^7)F_7 + \\
&\quad - (0,03v^2 + 0,05v^3 + \dots 0,15v^8)F_7 = \\
&= (0,03v + 0,02v^2 + 0,02v^3 + \dots + 0,02v^7 - 0,15v^8)F_7 = \\
&= [(0,02v + 0,02v^2 + 0,02v^3 + \dots + 0,02v^7) + 0,01v - 0,15v^8]F_7 = \\
&= [0,02(v + v^2 + \dots + v^7) + 0,01v - 0,15v^8]F_7.
\end{aligned}$$

Możemy zatem napisać

$$P_c = \frac{[0,02(v + v^2 + \dots + v^7) + 0,01v - 0,15v^8]F_7}{1 - v} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0,02v \frac{1-v^7}{1-v} + 0,01v - 0,15v^8}{1-v} F_7 = \\
&= \frac{0,02 \frac{1-v^7}{i} + 0,01v - 0,15v^8}{1-v} F_7.
\end{aligned}$$

Skoro mamy oczywistą równość

$$PV_7 = PV_{coupon} + F_7 v^7,$$

a także ponieważ zachodzi równość $PV_7 = P_{10}$, to możemy w wygodnej dla nas postaci zapisać

$$P_{10} = P_c + F_7 v^7.$$

Wcześniej wyliczyliśmy, że:

$$P_{10} = \left(r \frac{1-v^{10}}{i} + v^{10} \right) F_{10}$$

oraz

$$P_c = \frac{0,02 \cdot \frac{1-v^7}{i} + 0,01v - 0,15v^8}{1-v} F_7.$$

Można zatem utworzyć równanie z jedną tylko niewiadomą, niewiadomą F_7 i mamy

$$\begin{aligned}
&\left(r \frac{1-v^{10}}{i} + v^{10} \right) F_{10} = \\
&= \frac{0,02 \cdot \frac{1-v^7}{i} + 0,01v - 0,15v^8}{1-v} F_7 + F_7 v^7.
\end{aligned}$$

Stąd już dostajemy poszukiwaną równość

$$F_7 = \frac{P_{10}}{\frac{0,02 \cdot \frac{1-v^7}{i} + 0,01v - 0,15v^8}{1-v} + v^7} =$$

$$= \frac{\left(r \frac{1-v^{10}}{i} + v^{10}\right) F_{10}}{\frac{0,02 \cdot \frac{1-v^7}{i} + 0,01v - 0,15v^8}{1-v} + v^7}.$$

Ponieważ znamy teraz wartość liczbową P_{10} oraz wiemy, że $P_{10} = 91\,639,905$, to wystarczy obliczyć wartość wyrażenia z mianownika dla $i = 0,06$ oraz $v = 0,9433962$. Mamy zatem

$$\frac{0,02 \cdot \frac{1-v^7}{i} + 0,01v - 0,15v^8}{1-v} + v^7 \approx 1,141521.$$

$$\text{Zatem } F_7 = \frac{91\,639,905}{1,141521} \approx 81\,154,769 \text{ j.m.}$$

Wartość nominalna obligacji siedmioletniej kupionej przez inwestora jest równa w przybliżeniu 81 155 j.m. $\square$

8. Inwestor ma w portfelu

- (i) pięć obligacji zerokuponowych, każda o wartości nominalnej $F_1 = 100$ j.m., cenie $P_1 = 91,67$ oraz terminie wykupu 1 rok,
- (ii) trzy obligacje, każda o wartości nominalnej $F_2 = 100$ j.m., cenie $P_2 = 110$ j.m., stopie kuponowej $r_* = 0,1$, terminie wykupu 2 lata oraz kuponach płatnych co roku z dołu.

Obliczyć wewnętrzną stopę zwrotu opisanego portfela.

Rozwiązanie. Koszt zakupu opisanego portfela wynosi

$$P = CF_0 = 3 \cdot 110 + 5 \cdot 91,67 = 788,35 \text{ j.m.}$$

Wewnętrzna stopa zwrotu $r = IRR$ będzie taką stopą dyskontowania r , dla której wartość bieżąca przychodów z opisanego portfela obligacji będzie równa jego kosztowi zakupu, czyli 788,35 j.m. Innymi słowy, jest to taka stopa procentowa, dla której wartość bieżąca netto portfela jest równa zeru.

Wyliczmy zatem, ile wynoszą przychody w zależności od stopy dyskontowania r .

W pierwszym okresie wykupione zostaje 5 obligacji o cenie nominalnej 100 j.m. oraz otrzymujemy 30 j.m. z odsetek. W drugim okresie

otrzymujemy znów 30 j.m. z odsetek oraz wykupowane są 3 obligacje o cenie nominalnej 100 j.m. Mamy przepływy $CF_1 = 530$ j.m. oraz $CF_2 = 330$ j.m., a $CF_0 = 788,35$ j.m. wyliczone już wcześniej. Równanie wartości ma więc postać

$$788,35 = \frac{530}{1+r} + \frac{330}{(1+r)^2}$$

do kosztu zakupu portfela otrzymujemy równanie kwadratowe. Dla uproszczenia przyjmijmy $x := 1 + r$. Mamy wtedy

$$788,350x^2 - 530x - 330 = 0.$$

Rozwiązując otrzymujemy jeden dodatni wynik $x = 1,0652$, a stąd $IRR = r = 6,52\%$. $\square$

4.1.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Za 930 j.m. inwestor kupuje roczną obligację zerokuponową, o wartości nominalnej 1 000 j.m. Obliczyć stopę zwrotu inwestora.
2. Inwestor nabył za 648,36 j.m. czystą obligację dyskontową (obligacja zerokuponowa) na osiem lat przed wykupem z zamiarem trzymania tej obligacji do momentu wykupu. Obligacja będzie wykupiona według wartości nominalnej. Jaka jest wartość nominalna obligacji, jeżeli roczna stopa zwrotu z tej obligacji wynosi 8%?
3. Obligacja 100-letnia o wartości nominalnej wynoszącej 1 000 j.m. płaci roczne kupony (z dołu) równe 5% wartości nominalnej. Obecna rynkowa wartość obligacji wynosi 1 100 j.m. Jaką kwotę należałoby zainwestować dzisiaj w lokatę bankową, aby przy oprocentowaniu równym stopie zwrotu z tej obligacji (YTM) po jednym roku uzyskać taką samą nominalną kwotę odsetek, jak uzyskana z posiadanych obligacji przez cały okres inwestycji?
4. Rozpatrzmy 20-letnią obligację o następujących parametrach
 - cenie nominalnej $F = 1\,000$ j.m.;
 - cenie wykupu $C = 1\,050$ j.m.;
 - płaćcej półroczne kupony w wysokości 50 j.m.

Obliczyć cenę P wiedząc, że nominalna roczna stopa procentowa przy półrocznej kapitalizacji wynosi 8%. [Z3. EA 15.01.00.]

5. Obligacja 10-letnia o wartości nominalnej $F = 1\,000$ j.m. płaci kupony półroczne w wysokości 50 j.m. każdy. Środki uzyskane z kuponów są reinwestowane przy stopie $i^{(2)} = 0,04$. Wyznaczyć kwotę P , za którą inwestor zakupił obligację, jeśli stopa zwrotu z inwestycji w ciągu 10-letniego okresu inwestowania wyniesie $i = 0,10$. [Z5. EA 17.06.00.]
6. Inwestor rozważa zakup n -letniej obligacji mającej nominal $F = 1\,000$ j.m., cenę wykupu $C = F$ oraz stopę kuponową równą $r_* = 0,06$. Ile inwestor powinien zapłacić za obligację, aby rentowność obligacji była równa 5%, jeśli wiadomo, że obligacja $2n$ -letnia kosztowałaby 50 j.m. więcej. [Z10. EA 24.03.01.]
7. Obligacja 10-letnia o cenie wykupu $C = 1\,000$ j.m. płaci kwartalnie kupony w wysokości 50 j.m. Inwestor zamienia tę obligację na dwie jednakowe płatności dokonywane w odstępie jednego roku, przy czym suma tych dwóch płatności jest równa sumie nominalnych kwot otrzymanych z tytułu kuponów oraz wykupu obligacji. Znaleźć chwilę t^* , w której ma miejsce z pierwszą z tych dwóch płatności, przyjmując do obliczeń stopę procentową $i = 0,10$. [Z10. EA 10.12.00.]
8. Ile wynosi w dniu emisji cena nieskończonego pakietu obligacji zerokuponowych, takiego, że w każdą rocznicę zakupu wygasa dokładnie jedna obligacja z tego pakietu, natomiast n -letnia obligacja ma nominal $F_n = n^2$ j.m.? Wiadomo, że stopa procentowa jest stała, a czynnik dyskontujący wynosi $v = 0,95$. [Z6. EA 08.10.07.]
9. Portfel inwestycyjny P tworzy nieskończony ciąg obligacji zerokuponowych, nabytych w dniu emisji (w chwili $t = 0$), w którym na koniec każdego kolejnego roku wygasa dokładnie jedna obligacja. Obligacja wygasająca na koniec k -tego roku ma cenę wykupu $C_k = k^2$, a ponadto od momentu zakupu portfela obowiązuje płaska struktura terminowa, w której czynnik dyskontujący wynosi $v = 0,95$. Wyznaczyć cenę portfela P na dzień emisji obligacji. [Z6. EA 08.10.07.]

5. Duration i convexity

5.1. Niezbędne definicje i własności

Rozpatrzmy inwestycję określoną w przedziale czasu $[0; T]$, gdzie $T > 0$ oraz podział tego przedziału postaci

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T,$$

gdzie przepływy finansowe dokonują się w punktach podziału przedziału, tworząc ciąg $CF_1, CF_2, \dots, CF_{n-1}, CF_n$, przy czym zakłada się w tym modelu, że $PV = \sum_{i=1}^n CF_i \cdot DF(t_i)$, że $PV > 0$.

Przez *duration* inwestycji [4] rozumiemy średni czas życia ustalonej inwestycji, ważony udziałem wartości obecnej kolejnych przepływów gotówki w wartości obecnej całej inwestycji

$$\bar{d} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{t_i PV_i}{PV} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^n t_i \cdot CF_i \cdot DF(t_i).$$

Natomiast przez *convexity* (po polsku: wypukłość) rozumiemy średni kwadrat czasu ustalonej inwestycji, przy czym

$$\bar{c} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2 PV_i}{PV} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot CF_i \cdot DF(t_i).$$

5.1.1. Ćwiczenia

1. Jaki dla obligacji zerokuponowej jest związek między *duration* a długością terminu do wykupu?
2. Jaka jest relacja dla obligacji kuponowej między jej *duration* a terminem do wykupu?

3. Jaka jest zależność między *duration* a oprocentowaniem obligacji (przy tych samych stopie dochodu i terminie wykupu) oraz stopą dochodu (przy tych samych oprocentowaniu i terminie wykupu)?
4. Czy istnieje wprost proporcjonalna zależność między *duration* a terminem do wykupu obligacji (przy tym samym oprocentowaniu i stopie dochodu) oraz siłą reakcji ich ceny na zmiany stopy dochodu?
5. Które z poniższych zdań jest zdaniem prawdziwym?
 - Wypukłość obligacji jest miarą nieliniowości zmiany ceny obligacji w zależności od stóp procentowych.
 - Im niższe oprocentowanie obligacji, tym większa ich wypukłość (przy równych stopach dochodu i równej długości okresu do wykupu).
 - Im wyższe oprocentowanie obligacji, tym większa ich wypukłość (przy równych stopach dochodu i równych zmodyfikowanych czasach trwania).
 - Im dłuższy okres do terminu wykupu, tym większa wypukłość obligacji (przy równych stopach dochodu i równym oprocentowaniu).
 - Im niższa stopa dochodu w okresie wykupu (*YTM*), tym większa wypukłość obligacji.
 - Im dłuższy średni termin wykupu, tym większa wypukłość obligacji.
6. Zakładając, że wypłaty następują na koniec roku, struktura terminowa jest płaska, a stopa procentowa wynosi (w skali rocznej) $r = 10\%$, obliczyć średni czas życia (*duration*) i wypukłość (*convexity*) następujących inwestycji
 - (i) pięcioletniej spłaty kredytu, w ratach równej wysokości zawierających spłatę kapitału i odsetki,
 - (ii) renty płaćcej odsetki w nieskończoność.

5.1.2. Przykłady

1. Dany jest nieskończony ciąg płatności dokonywanych na końcu każdego roku, przy czym płatność na koniec roku n jest równa $CF_n = an + 5$. Jaką wartość powinien mieć parametr a , by *duration* tego ciągu płatności, przy stopie procentowej $i = 0,04$, była równa 50.

Rozwiązanie. Z uwagi na to, że w definicji *duration* mamy

$$\bar{d} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{t_i PV_i}{PV} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^n t_i \cdot CF_i \cdot DF(t_i)$$

przy skończonej liczbie płatności n , gdzie $PV = \sum_{i=1}^n CF_i v^i$, to w przypadku nieskończonym dostajemy

$$\bar{d} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i PV_i}{PV},$$

gdzie $DF(t_i) = v^i$ oraz $PV = \sum_{i=1}^{\infty} CF_i v^i$. Wskutek tego

$$\bar{d} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} t_n CF_n v^n}{\sum_{n=1}^{\infty} CF_n v^n}.$$

Uwzględniając postać przepływów $CF_n = a \cdot n + 5$, $t_n = n$ oraz $DF(t_n) = v^n$, otrzymujemy

$$\bar{d} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(a \cdot n + 5) v^n}{\sum_{n=1}^{\infty} (a \cdot n + 5) v^n}.$$

Do dalszych obliczeń użyjemy metody przesunięć, w szczególności z wyniku (2.31), czyli że

$$(Ia)_{\infty|i} = \frac{v}{(1-v)^2},$$

oraz formuły dotyczącej wartości obecnej wieczystej renty płatnej z dołu, a więc

$$a_{\infty|i} = \frac{v}{1-v}.$$

Otrzymujemy w ten sposób

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{a \frac{2(Ia)_{\infty|i} - a_{\infty|i}}{1-v} + 5(Ia)_{\infty|i}}{a(Ia)_{\infty|i} + 5a_{\infty|i}} = \\ &= \frac{a \frac{\frac{2v}{(1-v)^2} - \frac{v}{1-v}}{1-v} + 5 \frac{v}{(1-v)^2}}{\frac{av}{(1-v)^2} + \frac{5v}{1-v}} = \\ &= \frac{v[a(1+v) + 5(1-v)]}{v(1-v)[a + 5(1-v)]} = \frac{a + 5 + (a-5)v}{a + 5 - (10+a)v + 5v^2} = 50. \end{aligned}$$

Ostatnia równość prowadzi nas do równania z jedną niewiadomą, niewiadomą a , bo czynnik dyskontujący jest znaną liczbą

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,04} \approx 0,962.$$

Wspomniane równanie z niewiadomą a , po uporządkowaniu, ma postać

$$\begin{aligned} a(50v - 50v^2 - v - v^2) &= \\ &= 5v - 5v^2 + 250v^2 - 250v^2 - 250v^3 - 250v + 250v^2, \end{aligned}$$

toteż po kolejnym uporządkowaniu otrzymujemy

$$a = a(v) = \frac{495v^2 - 250v^3 - 245v}{49v - 51v^2} = \frac{495v - 250v^2 - 245}{49 - 51v}.$$

Zatem $a = a(1,0962) \approx 4,6$. □

2. Wiadomo, że wypukłość (*convexity*) strumienia płatności określona jest równością

$$\bar{c} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{PV''(i)}{PV(i)},^1$$

gdzie PV oznacza wartość obecną strumienia płatności, natomiast $i > 0$ stopę dyskontową.

Duration pewnej renty, płaconej z dołu na koniec roku k kwotę X_k , dla $k \in \mathbb{N}_+$ jest równa $\frac{1+i}{i}$. Wyznaczyć *convexity* tej renty, gdy $i = 0,1$.

Rozwiązanie. Pozostając przy dotychczasowej konwencji, że czynnik dyskontujący oznaczany jest przez v oraz $v = \frac{1}{1+i}$, otrzymujemy, że

$$PV[v(i)] = \sum_k^\infty X_k v^k(i) = \frac{X_1}{1+i} + \frac{X_2}{(1+i)^2} + \frac{X_3}{(1+i)^3} + \dots,$$

$$PV'[v(i)] = \sum_{k=1}^\infty X_k k v^{k-1}(i) = -\frac{X_1}{(1+i)^2} - \frac{2X_2}{(1+i)^3} - \frac{3X_3}{(1+i)^4} - \dots$$

W związku z tym

$$\bar{d} = \frac{\frac{X_1}{1+i} + \frac{X_2}{(1+i)^2} + \frac{3X_3}{(1+i)^3} + \dots}{\frac{X_1}{1+i} + \frac{X_2}{(1+i)^2} + \frac{X_3}{(1+i)^3} + \dots} = \frac{1+i}{i},$$

a w konsekwencji

$$PV'[v(i)](1+i) = -\frac{1+i}{i}PV[v(i)].$$

Dzieląc stronami przez $(1+i)$, dostajemy wygodną równość

$$PV'[v(i)] = -\frac{1}{i}PV[v(i)].$$

¹ Formuła ta jest wynikiem przejścia od inwestycyjnego procesu dyskretnego do procesu ciągłego poprzez przesunięcie równoległe struktury terminowej stóp procentowych.

Z uwagi na to, że potrzebna nam druga pochodna wartości obecnej, względem i , to wykorzystując ostatnią równość i licząc pochodną ilorazu dwóch funkcji, otrzymujemy

$$PV''[v(i)] = -\frac{PV'[v(i)] \cdot i - 1 \cdot PV[v(i)]}{i^2}.$$

Powołując się na treść zadania mamy

$$\bar{c} = \frac{PV''(i)}{PV(i)} = -\frac{PV[v(i)]}{PV[v(i)] \cdot i} + \frac{1}{i^2} = \frac{2}{i^2},$$

a zatem przyjmując, że $i = 0,1$ dostajemy odpowiedź:

$$\bar{c} = \frac{2}{(0,1)^2} = 200.$$

□

[Z3. EA 14.05.07.]

3. Zakładając, że wypłaty następują na koniec roku oraz że struktura terminowa jest płaska i stopa procentowa w skali rocznej wynosi $r = 10\%$, obliczyć średni czas życia (*duration*) i wypukłość (*convexity*) następujących obligacji w dniu emisji (pięć lat przed wykupem):

- (i) pięcioletnia obligacja z kuponem zerowym;
- (ii) pięcioletnia obligacja z kuponem 10%;
- (iii) pięcioletnia obligacja z kuponem 8%.

Rozwiązanie.

Ad (i) Niech tradycyjnie F oznacza wartość nominalną obligacji. Ze względu na to

$$CF_5 = F, \quad CF_i = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq 5 \quad \text{oraz} \quad PV = PV_5 = \frac{F}{(1+r)^5}.$$

Stąd

$$\bar{d} = 5 \frac{PV_5}{PV} = 5 \quad \text{oraz} \quad \bar{c} = 5^2 \frac{PV_5}{PV} = 25.$$

Ad (ii) W tym przypadku występuje pięć przepływów, mamy zatem

$$CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 0,1F \quad \text{oraz} \quad CF_5 = 1,1F.$$

Wartość obecna PV po aktualizacji przepływów ma postać

$$\begin{aligned} PV &= \frac{0,1F}{1,1} + \frac{0,1F}{(1,1)^2} + \frac{0,1F}{(1,1)^3} + \frac{0,1F}{(1,1)^4} + \frac{1,1F}{(1,1)^5} = \\ &= \frac{0,1F}{1,1} + \frac{0,1F}{(1,1)^2} + \frac{0,1F}{(1,1)^3} + \frac{1,1F}{(1,1)^4} = \dots = \frac{1,1F}{1,1} = F. \end{aligned}$$

W związku z tym

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{0,1F}{1,1F} + 2\frac{0,1F}{(1,1)^2F} + 3\frac{0,1F}{(1,1)^3F} + 4\frac{0,1F}{(1,1)^4F} + 5\frac{(1,1)F}{(1,1)^5F} = \\ &= \frac{0,1}{1,1} + \frac{0,2}{(1,1)^2} + \frac{0,3}{(1,1)^3} + \frac{0,4}{(1,1)^4} + \frac{5,5}{(1,1)^5} = 4,1699, \end{aligned}$$

a także

$$\begin{aligned} \bar{c} &= 1^2 \frac{0,1F}{(1,1)F} + 2^2 \frac{0,1F}{(1,1)^2F} + 3^2 \frac{0,1F}{(1,1)^3F} + 4^2 \frac{0,1F}{(1,1)^4F} + 5^2 \frac{1,1F}{(1,1)^5F} = \\ &= \frac{0,1}{1,1} + \frac{0,4}{(1,1)^2} + \frac{0,9}{(1,1)^3} + \frac{1,6}{(1,1)^4} + \frac{27,5}{(1,1)^5} = 19,2658. \end{aligned}$$

Ad (iii) Podobnie jak w przypadku (ii), występuje tu pięć przepływów finansowych

$$CF_1 = CF_2 = CF_3 = CF_4 = 0,08F, \quad \text{oraz} \quad CF_5 = 1,08F.$$

Formuła na wartość obecną, czyli PV ma postać

$$PV = \frac{0,08F}{1,1} + \frac{0,08F}{(1,1)^2} + \frac{0,08F}{(1,1)^3} + \frac{0,08F}{(1,1)^4} + \frac{1,08F}{(1,1)^5} = 0,9242F.$$

Stąd

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{0,08F}{1,1} + 2\frac{0,08F}{(1,1)^2} + 3\frac{0,08F}{(1,1)^3} + 4\frac{0,08F}{(1,1)^4} + 5\frac{1,08}{(1,1)^5}}{0,9242F} = \\ &= \frac{\frac{0,08}{1,1} + \frac{0,16}{(1,1)^2} + \frac{0,24}{(1,1)^3} + \frac{0,32}{(1,1)^4} + \frac{5,4}{(1,1)^5}}{0,9242} = 4,2814 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \frac{1^2 \frac{0,08F}{1,1} + 2^2 \frac{0,08F}{(1,1)^2} + 3^2 \frac{0,08F}{(1,1)^3} + 4^2 \frac{0,08F}{(1,1)^4} + 5^2 \frac{1,08F}{(1,1)^5}}{0,9242F} = \\ &= \frac{\frac{0,08}{1,1} + \frac{0,32}{(1,1)^2} + \frac{0,72}{(1,1)^3} + \frac{1,28}{(1,1)^4} + \frac{27}{(1,1)^5}}{0,9242} = 20,0363.\end{aligned}$$

Możemy teraz sformułować odpowiedzi na postawione w zadaniu pytania:

- Dla obligacji zerokuponowej: $\bar{d} = 5$, zaś $\bar{c} = 25$,
- Dla obligacji z kuponem 10%: $\bar{d} = 4,1699$ oraz $\bar{c} = 19,2658$,
- Dla obligacji z kuponem 8%: $\bar{d} = 4,2814$ i $\bar{c} = 20,0363$.

5.1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wyznaczyć *duration* $\bar{d}$ ciągłej płatności wynoszącej w chwili t

$$CF_t = (10 - t),$$

gdy $t \in [0; 10]$, przyjmując $i = 0,05$ oraz że

$$\int_{[0;10]} t^2 e^{[-\ln(1,05)]t} dt = 232,25.$$

[Z8. EA 15.01.00.]

2. Niech $\bar{d}_k$ oznacza *duration* renty malejącej, zaś $(\bar{d}a)_{\overline{k}|i}$ jej wartość obecną. Przyjmując wysokość stopy procentowej $i = 0,05$, wyznaczyć $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{d}_k$. [Z8. EA 17.06.00.]

3. Wyznaczyć *duration* nieskończonego ciągu płatności dokonywanych raz w roku z dołu, gdy wysokość wypłaty w chwili t jest równa $CF_t = 2t + 3$, przyjmując do obliczeń wysokość stopy procentowej $i = 0,05$. [Z4. EA 02.06.01.]

4. Obliczyć wartość obecną nieskończonej renty ciągłej, której intensywność płatności w chwili t wynosi $\varrho(t) = t^3$, intensywność opro-

centowania jest równa $\delta(t) = \delta$, zaś jej *duration* spełnia równość $\bar{d}(\bar{Ia}_{\infty}) = \alpha$. [Z6 EA 05.12.05.]

5. W portfelu inwestycyjnym znajdują się trzy rodzaje instrumentów finansowych:

- 15-letnie zero kuponowe obligacje;
- 20-letnie obligacje z kuponem o wartości 5% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku;
- bezterminowe obligacje (*perpetuity*) wypłacające na koniec każdego roku stałą kwotę.

Duration całego portfela wynosi 17,5, natomiast *duration* portfela składającego się tylko z obligacji piętnastoletnich i obligacji bezterminowych wynosi 20. Wyznaczyć udział procentowy obligacji 20-letnich w portfelu przy założeniu, że stopa procentowa jest równa 5%. [Z9. EA 06.04.09.]

6. Metody amortyzacji środków trwałych

6.1. Podstawy teoretyczne

W praktyce opisu formalnego działalności firm (w rozumieniu podatników) segment dotyczący kosztów ich działalności, poza częścią związaną z zaopatrywaniem się ich w materiały niezbędne do produkcji, zawiera również koszty związane z funkcjonowaniem części technicznej. Zaliczamy do nich zarówno maszyny i urządzenia niezbędne do produkcji, jak i obsługujące produkcję środki transportu, pomieszczenia, w których odbywa się produkcja, zaplecze magazynowe, teren, gdzie są one zlokalizowane, a także wiele innych elementów.

Zgodnie z wykładnią prawną przez środki trwałe rozumie się nabyte – bądź wytworzone we własnym zakresie, składniki rzeczowe będące własnością lub współwłasnością podatnika (firmy). Zaliczane są do nich budynki lub szerzej: budowle, lokale, środki transportu, maszyny i urządzenia służące potrzebom firmy albo też przez nią wynajmowane lub dzierżawione. Do środków trwałych zaliczane są także grunty służące działalności firmy. Jako że środki trwałe zmieniają wartość w czasie, to ich wartości podlegają aktualizacji. W większości przypadków wartość ta maleje. Kontrprzykładem może być tu jedynie grunt, którego wartość zwykle rośnie wraz z upływem czasu. Będziemy zajmować się środkami trwałymi, których wartość maleje. Spada ona w wyniku zużycia (mowa wtedy o *zużyciu fizycznym*) oraz w wyniku postępu technologicznego, który dostarcza wydajniejszych i trwalszych narzędzi (jest to *zużycie moralne*).

W warunkach polskich wartość początkowa środka trwałego nie może być mniejsza niż 10 tysięcy złotych, a czas użytkowania krótszy niż jeden rok. Podstawą do ustalenia wartości początkowej składnika majątku firmy jest cena jego zakupu. Jeśli środek trwały jest wytworzony przez firmę (rozumianą jako podatnika), za podstawę uznawane są koszty poniesione podczas jego wytworzenia.

W modelu amortyzacji zakładamy, że w procesie produkcji wartość przenosi się ze środków trwałych na produkty, obejmując sobą koszty ich wytworzenia. Odpisy dokonywane przez właściciela stanowią koszt uzyskania dochodów, pomniejszając przez to zysk. Skutkuje to również zmniejszeniem obciążeń podatkowych. Amortyzacja środków trwałych interpretowana jest jako przenoszenie wartości tych środków na produkty firmy. Wykonywanie odpisów amortyzacyjnych pozwala wskazać na rzeczywistą wartość zużywanych składników. Metody amortyzacji stanowią element systemu podatkowego państwa, a odpowiednie przepisy regulują metody amortyzacji poszczególnych kategorii środków trwałych [4].

6.1.1. Oznaczenia

Przyjmujemy:

- n – czas amortyzacji liczony w latach (rozumiany również jako liczba okresów kapitalizacji odsetek). Przepisy prawne zadają stawkę amortyzacyjną (równą $\frac{1}{n}$) właściwą dla danego środka, a ściślej kategorii środków;
- A – wartość dobra (aktywów) liczona na początku rozważanego okresu (w Polsce nosi to nazwę wartości brutto);
- S – cena umorzenia dobra (aktywów) po upływie n okresów (zakłada się, że aktywo (aktywa) będzie można sprzedać po cenie S lub wyższej);
- CF_t – dla $t \in \{0, 1, \dots, n\}$ są to okresowe dochody z aktywów;
- B_t – wartość księgowa środka trwałego w chwili t (ten sam, co poprzednio zakres t), w Polsce zwana wartością netto, gdzie przyjmujemy $B_0 = A$ oraz $B_n = S$;
- D_t – kwota deprecjacji w okresie t , zwana w Polsce odpisem amortyzacyjnym, $D_t = B_{t-1} - B_t$;
- U_t – umorzenie po upływie t lat;
- i_t – stopa zwrotu z inwestycji w czasie $[t - 1; t]$;

- j – stopa zwrotu z funduszu umorzeniowego na okres kapitalizacji;
- r_t – stopa amortyzacji w roku t , gdzie $\left(r_t = \frac{D_t}{B_{t-1}}\right)$.

Przy tych oznaczeniach mają miejsce równości:

$$\sum_{t=1}^n D_t = A - S, \quad U_t = \sum_{s=1}^t D_s$$

$$U_t + B_t = A, \quad B_t = \sum_{s=t+1}^t D_s + S,$$

$$U_t - U_{t-1} = B_{t-1} - B_t = D_t, \quad U_0 = 0, U_n = A - S.$$

Uwagi. S , tj. wartość dobra na koniec okresu amortyzacji, ma następujące własności:

- $S = 0$ oznacza koniec użytkowania dobra, jego likwidację i pomijalnie małe dochody z ewentualnej sprzedaży lub też koszty jego likwidacji;
- $S > 0$ oznacza wycofanie z użytku aktywa, które można sprzedać innemu użytkownikowi za cenę niższą niż S ;
- $S < 0$ oznacza, że nie można pominąć kosztów likwidacji środka trwałego.

Gdy $S = A$, to $i_t = \frac{CF_t}{A}$. Zazwyczaj $A \neq S$. Przy czym

— jeśli $A < S$, to mówimy, że aktywa podlegają *aprecjacji*;

— jeśli natomiast $A > S$, że aktywa podlegają *deprecjacji*.

Dla $A \neq S$ podstawową formułą jest

$$CF_t = Ai_t + \frac{A - S}{s_{\overline{n}|j}}$$

Formuła ta ma następującą interpretację: po czasie n firma chciałaby odnowić urządzenia, sprzedać za kwotę S zużytą (materialnie lub moralnie) maszynę i kupić nową za kwotę A . Z tego powodu roczne dochody netto wynikające z eksploatacji środków trwałych rozkładane są

na dwa składniki. Składnik A_{i_t} odpowiada za zwrot z pierwotnie zainwestowanej kwoty A , natomiast składnik $\frac{A - S}{s_{\overline{n}|j}}$ oznacza wysokość rocznej wpłaty do funduszu, którego celem jest gromadzenie (przy stopie j) kwoty $(A - S)$ potrzebnej w chwili n do odnowienia środka trwałego za cenę A . Maszyna podlega spadkowi wartości (deprecjacji) w ciągu lat pracy. W każdym roku przypisujemy jej w księgach coraz mniejszą wartość, zwaną wartością księgową.

Jest kilka metod obliczania wartości księgowej. O wyborze konkretnej metody decydują przepisy podatkowe. Odpisy amortyzacyjne są odejmowane od zysku jako wydatki (koszty działalności).

6.1.2. Ćwiczenia

1. Co nazywamy środkiem trwałym?
2. Co oznaczają pojęcia „zużycie fizyczne” i „zużycie moralne”?
3. Podać przykłady środków trwałych, których wartość w czasie rośnie, oraz takich, których wartość maleje.
4. Na czym polega model amortyzacji środków trwałych?
5. Czy istnieją środki trwałe, których wartość umorzeniowa jest ujemna? Jeśli tak, to podać przykład lub przykłady.
6. Podać nazwy metod amortyzacji, w przypadku których wysokość odpisu amortyzacyjnego
 - jest stała w czasie,
 - maleje wraz z czasem,
 - rośnie wraz z czasem,
 - maleje w postępie geometrycznym,
 - rośnie w postępie geometrycznym,
 - maleje w postępie arytmetycznym,
 - rośnie w postępie arytmetycznym,
 - umorzenie jest liniową funkcją czasu,
 - wartość księgowa maleje coraz wolniej,

- wartość księgowa maleje coraz szybciej,
- wartość księgowa maleje w stałym tempie.

6.1.3. Przykłady

1. Maszyny I oraz II wytwarzają ten sam produkt. Wartość maszyny I w chwili zakupu wynosi $A_I = 10\,000$, natomiast jej wartość w chwili umorzenia jest równa $S_I = 1\,000$. Wiadomo też, że okres jej użytkowania jest równy $n_I = 10$ lat. Zauważono, że koszty roczne K_I w relacji do wielkości produkcji P_I wyraża równość $K_I = 500 + 4P_I$. W przypadku maszyny II odpowiednie wartości wynoszą $A_{II} = 20\,000$ oraz $S_{II} = 2\,000$, a czas jej użytkowania jest równy $n_{II} = 5$. Zależność między kosztami i wielkością produkcji dla tej maszyny wyraża formuła $K_{II} = 1\,000 + 2P_{II}$. Wyznaczyć, przy jakiej wielkości produkcji ($P_I = P_{II}$) jednostkowe koszty wytworzenia produktu przy użyciu obydwu maszyn są sobie równe, jeżeli do obliczeń przyjmiemy stopę procentową równą $i = 0,05$.

Rozwiązanie. Mamy

$$K_I = 10\,000 + (500 + 4P)a_{\overline{10}|0,05} - 1\,000v^{10}$$

oraz

$$K_{II} = [20\,000 + (1\,000 + 2P)a_{\overline{5}|0,05} - 2\,000v^5](1 + v^5).$$

Z uwagi na to, że koszty jednostkowe w obu przypadkach są takie same oraz $P = P_I = P_{II}$, a produkcja wynosi $10P$, to mamy $K_I = K_{II}$, a stąd

$$P = 1\,770. \quad \square$$

2. Cena zakupu maszyny I wynosi $50\,000$ j.m., a maszyna ta produkuje tysiąc zapalek w ciągu roku. Koszty jej utrzymania wynoszą $10\,000$ j.m. rocznie, okres jej użytkowania to dziesięć lat, a wartość umorzeniowa wynosi $S_I = 0$.

Cena zakupu maszyny II wynosi $10\,000$ j.m. i produkuje ona K w ciągu roku, a koszty utrzymania wynoszą rocznie $15\,000$ j.m., okres jej użytkowania to pięć lat, a wartość umorzeniowa wynosi $S_{II} = 0$. Przy stopie procentowej $i = 10\%$ koszty zakupu obu maszyn są równe. Wyznaczyć przybliżoną wartość K .

Rozwiązanie. Zgodnie z treścią zadania, dla wyznaczenia wartości K musimy skorzystać z ceny jednej zapalki, bo poprzez tę cenę możemy porównywać ceny obu maszyn. Przyjmijmy, że cena ta jest równa z . Do tego, zgodnie z informacją zawartą w treści zadania, zakup maszyn odbywa się przy stopie $i = 0,1$. Dla pierwszej maszyny równanie wartości ma postać

$$50\,000 = (1\,000 \cdot z - 10\,000) \cdot a_{\overline{10}|0,1}.$$

Dla maszyny drugiej

$$10\,000 = (K \cdot z - 15\,000) a_{\overline{5}|0,1}.$$

Otrzymaliśmy formalnie układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} (1\,000 \cdot z - 10\,000) \cdot a_{\overline{10}|0,1} = 50\,000, \\ (K \cdot z - 15\,000) \cdot a_{\overline{5}|0,1} = 10\,000. \end{cases}$$

Po podzieleniu pierwszego z równań przez 1 000 otrzymujemy

$$(z - 10) \cdot a_{\overline{10}|0,1} = 5, \quad \text{a stąd} \quad z = \frac{5}{a_{\overline{10}|0,1}} + 10.$$

Modyfikacja drugiego z równań wchodzącego w skład układu prowadzi do postaci

$$Kz = \frac{10\,000}{a_{\overline{5}|0,1}} + 15\,000.$$

Z uwagi na to, że mamy $a_{\overline{5}|0,1} = 3,7908$ oraz $a_{\overline{10}|0,1} = 6,1446$, to

$$z \simeq 10,8137 \quad \text{oraz} \quad K \simeq 1\,631,0759 \approx 1631.$$

Przybliżona wartość K , przy której wartości zakupu obu maszyn są równe, wynosi $K = 1\,631$. $\square$

6.1.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Ceny zakupu trzech maszyn M_1, M_2, M_3 są równe odpowiednio P_1, P_2, P_3 . Każda z nich będzie amortyzowana przez dwadzieścia

lat, a na koniec tego okresu wartość umorzeniowa każdej z nich wyniesie $S = 1\,000$ j.m. Dysponując danymi zawartymi w tabeli danymi dotyczącymi procesów ich amortyzacji, uszeregować ceny zakupu maszyn P_1 , P_2 i P_3 w porządku rosnącym.

Cena zakupu maszyny	Wartość maszyny po 10 latach	Metoda amortyzacji
P_1	37 000	<i>sinking fund, $i = 0,1$</i>
P_2	38 000	liniowa
P_3	39 000	<i>sum of the digits</i>

[Z2. EA 02.12.00.]

2. Inwestor kupił trzy maszyny o wartości 100 j.m. każda. Każda z maszyn amortyzowana jest przez okres dwudziestu lat przy pomocy innej metody. Przy tym:

- (i) maszyna I amortyzowana jest według metody amortyzacji liniowej (*straight line method*);
- (ii) maszyna II amortyzowana jest metodą stałej stopy amortyzacji (*compound discount method*);
- (iii) maszyna III amortyzowana jest według metody liniowo malejących odpisów amortyzacyjnych (*sum of the digit method*).

Po upływie dekady wartość każdej z maszyn wynosi 75 j.m. Jaka będzie wartość łączna wszystkich trzech maszyn po dwudziestu latach?

[Z2. EA 24.03.01.]

3. Nowa maszyna, której cena zakupu wynosi a j.m, ma wartość b j.m. po upływie n lat. Wiedząc, że

- wartość maszyny po upływie t lat od chwili zakupu przy zastosowaniu metody amortyzacji liniowej (*straight-line method*) wynosi $AL(t)$,
- wartość maszyny po upływie t lat od chwili zakupu przy zastosowaniu metody liniowo malejących odpisów amortyzacyjnych (*sum of the digit method*) wynosi $AS(t)$,

wyznaczyć wartość $t \in \mathbb{R}$, dla której funkcja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ określona równością postaci $f(t) = AS(t) - AL(t)$ przyjmuje minimum.
[Z2. EA 17.06.00.]

4. Łączna wartość aktualna odpisów amortyzacyjnych maszyny o czasie życia T lat wynosi 359165 j.m., przy użyciu metody amortyzacji liniowej 1912,09 j.m., jeśli zastosować metodę liniowo malejących odpisów amortyzacyjnych. Wiedząc, że wartość końcowa S maszyny jest równa zero, a stopa użyta do dyskontowania odpisów amortyzacyjnych jest równa 0,08, obliczyć wartość początkową maszyny A oraz wyznaczyć długość okresu amortyzacji T .

7. Odpowiedzi do zadań do samodzielnego rozwiązania

Ad 1.1.3.

1. Odsetki za pierwszy kwartał wyniosły około 54 j.m.
2. Właściciel konta zapłaci około 41,4 j.m. odsetek za drugi kwartał.

Ad 1.2.2.

1. Stopa procentowa wynosiła 11,8%.
2. Końcowa wartość kapitału wynosi dla okresu kapitalizacji w poszczególnych przypadkach (i) 1 537,60 j.m., (ii) 1 573,51 j.m., (iii) 1 593,84 j.m., (iv) 1 608,43 j.m.
3. Nominalna stopa procentowa wynosi w poszczególnych przypadkach: (i) 11,30%, (ii) 11,49%, (iii) 11,66%.
4. Stopy dla odpowiednich przypadków wynoszą: (i) 0,003%, (ii) 1,(3) %, (iii) 4%.
5. Na rachunku zgromadzono kwotę 14 376,7 j.m.
6. Zwycięzcy najkorzystniej jest wybrać wariant (iii), bo wtedy wartość przyszła nagrody $FV_{(III)} = 1\,786,2$ j.m. jest największa spośród proponowanych.
7. Na koniec roku na koncie było 3 540 j.m., a przeciętna stopa procentowa oprocentowania rocznego wynosiła 18%.
8. (i) Po dwóch latach lokaty bankowej, w dniu 01.02.1995, klientowi wypłacono $K(2) = 3\,218,4$ j.m.
(ii) Przeciętna stopa procentowa wyniosła $\bar{r} = 26,85\%$.

9. Chuck Norris otrzymał 432 189,6\$, a przeciętna stopa procentowa wyniosła $\bar{r} = 30,47\%$.
10. W momencie uruchomienia procedury spadkowej dzieciom przypadły przybliżone kwoty:
 $K_{15} \simeq 400\,945,68 \text{ j.m.}$, $K_{10} \simeq 314\,115,31 \text{ j.m.}$, $K_8 \simeq 284\,939,0 \text{ j.m.}$,
gdzie dolny indeks przy K oznacza wiek dziecka.
11. Najkorzystniejszym dla przedsiębiorcy jest wariant (i), ponieważ $PV_{(i)} \simeq 484\,100$, zaś $PV_{(ii)} \simeq 467\,094$ a $PV_{(iii)} \simeq 473\,867$.
12. Odsetki należne Wielkiemu Mistrzowi, przy podanych przepływach finansowych na koncie, są ujemne i równe w przybliżeniu $O \simeq -39,3$ talarów. Ponieważ podatek od zysków kapitałowych obliczany jest od zysku, jak wskazuje jego nazwa, to Ulrich von Jungingen nie będzie miał od czego płacić podatku.
13. Najkorzystniejszym wariantem lokaty dla Piotra jest wariant zaproponowany przez bank D .
14. Najkorzystniejszy jest wariant (iii), a najmniej korzystny (i). Strata inwestora przy wyborze najmniej korzystnego wariantu (i) do wariantu optymalnego (iii) wyniosłaby 250 j.m.

Ad 1.3.3.

1. Pan Ryszard „wzbogacił się” o 183 j.m.
2. Zainwestowana kwota podwoi się w poszczególnych przypadkach za: (i) 4 lata, (ii) 12 kwartałów, czyli 3 lata, (iii) 34 miesiące, (iv) 2 lata i 281 dni.
3. Dla poszczególnych, wymienionych sposobów oprocentowania, kwoty potrzebne do zebrania brakującej sumy 50 000 j.m. są następujące: (i) 45 454 j.m., (ii) 45 351,5 j.m., (iii) 45 279,1 j.m., (iv) 45 241,9 j.m.
4. Wartość inwestycji $K(1) = 1\,000 \int_0^1 e^{-t^2} dt \approx 2\,100 \text{ j.m.}$
5. $t = 0,5$.

6. $t = 4$.
7. $\varrho(t) = t + 1$.
8. Zakumulowana wartość środków wynosi 32,5.
9. $\alpha \simeq -\frac{2}{3}$.
10. W chwili $t = 1$ wartość funduszu $K(1) \simeq 2,9$.

Ad 1.4.3.

1. Przeciętna stopa procentowa $\bar{r} \simeq 0,058$.
2. $r_{kw} = 0,02$.
3. $e_{miesięczna} = 0,009488$.
4. $r_B = 0,3447$.
5. $e_{nom_B} = 0,3399$.
6. Kwota wypłaty może wynieść około 11,37.
7. $r_{ef} = 0,093$.

Ad 1.5.3

1. (i) zysk brutto za okres dwuletni wynosi 1632 j.m.;
(ii) podatek wynosi 489,6 j.m.;
(iii) stopa zysku wynosi 5,7%.
2. (i) zysk brutto wynosi 1 727,79, a podatek od niego to 518 j.m.; (ii) zysk netto: 1 209,45, stopa zysku netto jest równa 6%.
3. (i) nominalna stopa zysku $r_{nom} = 0,59\%$,
(ii) realna stopa zysku $r_{real} = 0,4\%$,
(iii) zysk nominalny $Z_{nom} = 59$ j.m.,
(iv) zysk realny $Z_{real} = 40$ j.m.

Ad 2.2.5.

1. $e = 18\%$.
2. $e = 14,35\%$.
3. Kwoty wartości obecnej renty i wartości przyszłej wynoszą odpowiednio około $PV = 1\,578$ j.m. oraz $FV = 1\,767$ j.m.
4. Około 24 486 j.m.
5. Około 64 j.m.
6. Około 647 575 j.m.
7. Około 2 795 j.m.
8. Około 836 j.m.
9. Około 1 615 j.m.
10. Około 12,5 j.m.
11. Z obliczeń otrzymujemy $n \simeq 6,18 > 7$, a więc najmniejsze $n \in \mathbb{N}$ musi być równe 7.
12. Wysokość wypłaty X_{10} nie jest określona jednoznacznie.
13. Około 540 j.m.
14. Około 0,56 j.m.
15. $PV(v) = \frac{48 - 24v^2 + 4v^4}{8 - 121v^2 + 6v^4 - v^6}$.
16. $PV'(v) = \frac{30v^5 + 400v^3 + 250v}{(5 - v^2)^4}$.

Ad 2.3.4.

1. Około 723.
2. $K = \int_0^6 mt^3 e^{-\int_0^t ks^8 ds} dt = \frac{m}{k} (1 - e^{-324k})$.

3. $\frac{R_1}{R_2} = 2,25$.
4. $R_0 = \sum_{t=6}^{15} \frac{6}{t}$ oraz $R_2 = \sum_{t=6}^{15} \frac{8}{t}$.
5. $K(7) \simeq 58$.
6. $t_* = \frac{1}{2}$.
7. Dla $t \in (2; 3)$, czyli w trzecim roku inwestycji, roczna efektywna stopa procentowa wyniosła $r_{ef} = 4,7\%$.
8. $\bar{a}_{\overline{n}|i} = \ln(1+n) \cdot 4,7\%$.
9. Około 32,5 j.m.

Ad 2.4.4.

1. Z obliczeń dostajemy, że $n \simeq \frac{\ln(14,65)}{\ln(1,12)} \approx 23,69$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to najmniejszą liczbą naturalną większą od 23,69 jest $n = 24$.
2. (i) 126 887 j.m. wartość ciągnika po 8 latach; (ii) 10,678% wartości początkowej ciągnika.
3. 10,6 miesięcy.
4. Propozycje organizatorów konkursu prowadzą do następujących wersji kwot wypłaty nagrody głównej:
 - (i) 10 000 j.m.;
 - (ii) 9 861 j.m.;
 - (iii) 8 970 j.m.;
 - (iv) 9 000 j.m. przy założeniu, że zwycięzca będzie jeszcze żył 100 lat.

Zatem najkorzystniejsza dla zwycięzcy jest propozycja (i).

5. $r \simeq 0,392 = 39,2\%$.

6. Na to, aby oferta banku B była konkurencyjna wobec oferty banku A , jego stopa bazowa powinna być wyższa od stopy banku A . Konsekwencją tego będzie również wyższa stopa oprocentowania depozytów przy kapitalizacji kwartalnej.
7. $\frac{\alpha}{\beta} = 1,0025$.
8. Wartość renty wieczystej płatnej z góry, przy stopie $i = 0,1$ jest równa 76 571 j.m.
9. Przybliżona wartość sumy rent wynosi 285.
10. 17,6%.

Ad 2.5.5.

1. Tylko (ii).
2. $IRR \simeq 9,9\%$.
3. (i) Na to, aby obie wewnętrzne stopy zwrotu były większe od 25%, potrzeba by $m \in (-\infty; -2,5) \cup (1,5; +\infty)$, ale na to, by istniały dwie stopy zwrotu musi być, że $m \in (-\frac{5}{3}; 1)$. Część wspólna tych zbiorów jest zbiorem pustym, zatem nie ma takich $m \in \mathbb{R}$, dla których warunek postawiony w podpunkcie (i) zadania zachodzi.
 (ii) Aby każda z wewnętrznych stóp zwrotu była mniejsza od 100%, powinno być, że $m \in (-5; 3)$, jednakże stopy takie muszą istnieć i być różne, co wprowadza znany warunek $m \in (-\frac{5}{3}; 1)$. Część wspólna obu tych warunków to przedział $(-\frac{5}{3}; 1)$, co oznacza, że wszystkie różne wewnętrzne stopy zwrotu – o ile istnieją – są mniejsze do 100%.
 (iii) Aby suma różnych wewnętrznych stóp zwrotu była mniejsza od 150%, spełniony musi być warunek $m \in (-\infty; 15)$, ale dwie różne stopy IRR muszą istnieć, a to oznacza, że dodatkowo powinien być spełniony warunek $m \in (-\frac{5}{3}; 1)$. W konsekwencji otrzymujemy, że $m \in (-\infty; 15) \cap (-\frac{5}{3}; 1) = (-\frac{5}{3}; 1)$. Przedział $(-\frac{5}{3}; 1)$ jest zbiorem tych m , dla których spełniony jest podpunkt (iii) zadania.
4. Przy stopie rynkowej $r = 0,04$ otrzymujemy $NPV = -38,11$.

5. $NPV \simeq -2,38$ zaś $IRR \simeq 0,1764$.
6. Suma czynników dyskontujących wynosi 0,3.
7. $P = 3,8$.

Ad 3.1.3.

1. 31 553.
2. $r = 12,8\%$.
3. Całkowita kwota spłaconych odsetek wyniosła 1 475.
4. $17 - \ddot{a}_{\overline{6}|i} - 11v^6$, gdzie i (a przez to $v = \frac{1}{1+i}$) nie zostały podane w zadaniu, dlatego przyjmujemy je jako „dane ogólne”.
5. Wysokość zapłaconych odsetek w czwartym roku trwania umowy o pożyczkę wynosi 3 450 j.m.
6. $i^{(2)} = 8,85\% = 0,0885$.
7. $L = 48\,242$ j.m.
8. W przybliżeniu 213 046 j.m.
9. Wysokość raty to 126 226 j.m.
10. $r^{(4)} \simeq 8,8\%$.
11. Jeśli dla wygody $\Delta O := O_2 - O_1$, to

$$\Delta O = 100\,000 \left[\frac{\left(15 - v_2 \frac{1-v_2^{30}}{1-v_2^2} \right) \Big|_{v_2 = \frac{1}{1,12}}}{a_{\overline{50}|0,12}} - \frac{\left(15 - v_1^{11} \frac{1-v_1^{30}}{1-v_1^2} \right) \Big|_{v_1 = \frac{1}{1,10}}}{a_{\overline{50}|0,10}} \right].$$

12. $a = 330$.
13. W przybliżeniu 224 760 j.m.
14. Sumaryczne odsetki wszystkich trzech kredytobiorców w całym okresie spłacania kredytów wynoszą 235 760 j.m.

15. $\frac{S_i}{S_r} \simeq 1,4$

Ad 4.1.5.

1. $r = \left(\frac{1000}{930}\right)^1 - 1 = \frac{7}{93} \simeq 0,075$.
2. $r = 0,08 = \left(\frac{F}{648,36}\right)^1 - 1$ stąd wartość nominalna obligacji jest równa $F \simeq 700,23$.
3. 110 119 j.m.
4. Cena obligacji wynosi $P = 1\,250 - 200v^{40}$.
5. Cena zakupu obligacji wynosi $P \simeq 854$ j.m.
6. Cena zakupu powinna wynosić $P \simeq 1\,100$ j.m.
7. $t^* = 5,72$.
8. Cena zakupu pakietu wynosi 14 820 j.m.
9. Cena portfela na dzień emisji obligacji wynosi 14 820 j.m.

Ad 5.1.3.

1. $\bar{d} \simeq 3,1$.
2. Wartość graniczna wynosi 21.
3. Około 39,66.
4. $\frac{3\alpha}{\delta^2} \bar{a}_{\infty}$.
5. Obligacje 20-letnie stanowią 36% portfela.

Ad 6.1.4.

1. $P_1 = 3\,700 < P_2 = 3\,800 < P_3 = 3\,900$.

2. 172.

3. Dla $t = \frac{n}{2}$.

4. 5 000 j.m. oraz $T = 8$ lat.

Bibliografia

1. J. Banaś, B. Rzepka, *Wykłady matematyki finansowej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2019.
2. J. Borowski, R. Golański, K. Kasprzyk, L. Melon, M. Podgórska, *Matematyka finansowa – przykłady, zadania, testy, rozwiązania*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 1998.
3. E. Podlewska, *Bankowość w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej we Włocławku 2001.
4. P. Jaworski, J. Micał, *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Wydawnictwo POLTEXT, Warszawa 2005.
5. M. Podgórska, J. Klimkowska, *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
6. T. Stanisław, *Zadania z matematyki finansowej*, Wydawnictwo Trapez, Kraków 2003.
7. Strona internetowa firmy MS Products Michał Stańczuk: <https://msproduct.pl>, dnia 26.09.2024.