

Politechnika Lubelska



MECHANIKA

Laboratorium dynamiki i drgań układów mechanicznych

Praca zbiorowa
pod redakcją:

Kazimierza Szabelskiego
Jerzego Warmińskiego

Lublin 2006

Laboratorium dynamiki i drgań układów mechanicznych

Wydanie drugie zmienione

P-5387/29

Opiniodawca: prof. dr hab. inż. Eugeniusz Kamiński

Wydanie 1

Autorzy:

Wiesław Hawrylecki	ćwiczenie 10 i 12
Agnieszka Jeżowska	ćwiczenie 6 i 11
Cyprian Komorzycki	ćwiczenie 3
Franciszek Martinka	ćwiczenie 5 i 8
Waldemar Samodulski	ćwiczenie 4 i 7
Izydor Suseł	ćwiczenie 1 i 2
Kazimierz Szabelski i Marian Matuszyk	ćwiczenie 9

Wydanie 2 (zmienione)

Autorzy:

Marcin Bocheński	ćwiczenie 12 i 17
Marek Borowiec	ćwiczenie 1 i 16
Krzysztof Kęcik	ćwiczenie 2, 3, 4, 5 i 6
Cyprian Komorzycki	ćwiczenie 7
Tomasz Łusiak	ćwiczenie 10
Waldemar Samodulski	ćwiczenie 8 i 11
Kazimierz Szabelski i Stanisław Łękawa	ćwiczenie 13
Rafał Rusinek	ćwiczenie 9 i 15
Jerzy Warmiński	ćwiczenie 14



Redakcja techniczna: Jarosław Latański

© Copyright by:

Politechnika Lubelska, Lublin 2006.

Wszelkie prawa zastrzeżone. Przedruk i reprodukcja w jakiegokolwiek postaci całości bądź części książki bez pisemnej zgody wydawcy są zabronione.

ISBN 83-7497-012-X; ISBN 978-83-7497-012-9

Publikacja zawiera 143 strony, 44 tabele oraz 66 rycin.

Druk i oprawa:

Zakład Poligraficzny BaCCarat s.c., ul. Raszyńska 37, 20-780 Lublin.

Spis treści

Wykaz oznaczeń	9
Ćwiczenie 1. Wyznaczanie współczynników tarcia	11
1.1. Cel ćwiczenia	11
1.2. Podstawy teoretyczne	11
1.2.1. Tarcie ślizgowe	11
1.2.2. Metody wyznaczania współczynników tarcia	15
1.3. Opis stanowiska badawczego	18
1.4. Przebieg ćwiczenia	19
1.5. Opracowanie wyników	20
1.6. Wykonanie sprawozdania	20
Bibliografia	21
Ćwiczenie 2. Wyznaczanie masowych momentów bezwładności ciał materialnych	22
2.1. Cel ćwiczenia	22
2.2. Podstawy teoretyczne	22
2.3. Przebieg ćwiczenia	27
2.4. Opracowanie wyników	27
2.5. Wykonanie sprawozdania	28
Bibliografia	28
Ćwiczenie 3. Wyznaczanie masowych momentów bezwładności ciał metodą wahadła fizycznego	29
3.1. Cel ćwiczenia	29
3.2. Podstawy teoretyczne	29
3.3. Opis stanowiska pomiarowego	32
3.4. Przebieg ćwiczenia	32
3.5. Opracowanie wyników	32
3.6. Wykonanie sprawozdania	33
Bibliografia	33

Ćwiczenie 4. Wyznaczanie masowych momentów bezwładności elementów metodą zawieszenia na pręcie sprężystym	35
4.1. Cel ćwiczenia	35
4.2. Podstawy teoretyczne	35
4.3. Opis stanowiska pomiarowego	37
4.4. Przebieg ćwiczenia	38
4.5. Opracowanie wyników	39
4.6. Wykonanie sprawozdania	39
Bibliografia	39
Ćwiczenie 5. Wyznaczanie masowych momentów bezwładności ciał metodą zawieszenia na trzech cięgnach	40
5.1. Cel ćwiczenia	40
5.2. Podstawy teoretyczne	40
5.3. Opis stanowiska badawczego	44
5.4. Przebieg ćwiczenia	44
5.5. Opracowanie wyników	44
5.6. Wykonanie sprawozdania	45
Bibliografia	46
Ćwiczenie 6. Wyznaczanie masowych momentów bezwładności elementów obrotowych na podstawie dynamicznych równań ruchu	47
6.1. Cel ćwiczenia	47
6.2. Podstawy teoretyczne	47
6.3. Opis stanowiska badawczego	51
6.4. Przebieg ćwiczenia	51
6.5. Opracowanie wyników	52
6.6. Wykonanie sprawozdania	52
Bibliografia	53
Ćwiczenie 7. Wyznaczanie sprawności śruby z wykorzystaniem zasady zachowania energii mechanicznej	54
7.1. Cel ćwiczenia	54
7.2. Podstawy teoretyczne	54
7.3. Opis stanowiska badawczego	57
7.4. Przebieg ćwiczenia	59
7.5. Opracowanie wyników	59
7.6. Wykonanie sprawozdania	59
Bibliografia	60

Ćwiczenie 8. Wyważanie dynamiczne	61
8.1. Cel ćwiczenia	61
8.2. Podstawy teoretyczne	61
8.3. Opis stanowiska badawczego	69
8.4. Przebieg ćwiczenia	70
8.5. Opracowanie wyników	71
8.6. Wykonanie sprawozdania	71
Bibliografia	72
Ćwiczenie 9. Drgania wymuszone układu o jednym stopniu swobody	73
9.1. Cel ćwiczenia	73
9.2. Podstawy teoretyczne	73
9.3. Opis stanowiska badawczego	77
9.4. Przebieg ćwiczenia	77
9.5. Opracowanie wyników	77
9.6. Wykonanie sprawozdania	78
Bibliografia	78
Ćwiczenie 10. Eliminator drgań	79
10.1. Cel ćwiczenia	79
10.2. Podstawy teoretyczne	79
10.3. Opis stanowiska badawczego	83
10.4. Przebieg ćwiczenia	83
10.5. Wykonanie sprawozdania	84
Bibliografia	84
Ćwiczenie 11. Wyznaczanie prędkości krytycznych wału	85
11.1. Cel ćwiczenia	85
11.2. Podstawy teoretyczne	85
11.3. Opis stanowiska badawczego	89
11.4. Przebieg ćwiczenia	90
11.5. Opracowanie wyników	90
11.6. Wykonanie sprawozdania	91
Bibliografia	91
Ćwiczenie 12. Drgania skrętne układu o skończonej liczbie stopni swobody — badania analityczne	92
12.1. Cel ćwiczenia	92
12.2. Podstawy teoretyczne	92
12.3. Opis stanowiska badawczego	97
12.4. Przebieg ćwiczenia	97
12.5. Opracowanie wyników	98
12.6. Wykonanie sprawozdania	98
Bibliografia	98

Ćwiczenie 13. Drgania parametryczne	99
13.1. Cel ćwiczenia	99
13.2. Podstawy teoretyczne	99
13.2.1. Rozwiązanie okresowe przy warunku początkowym $\dot{\varphi}(0) = 0$	107
13.2.2. Rozwiązanie okresowe przy warunku początkowym $\varphi(0) = 0$	108
13.3. Badania analogowe	108
13.4. Przebieg ćwiczenia	112
13.5. Opracowanie wyników	112
Bibliografia	113
Ćwiczenie 14. Drgania nieliniowe układu o jednym stopniu swobody	114
14.1. Cel ćwiczenia	114
14.2. Podstawy teoretyczne	114
14.3. Opis stanowiska badawczego	119
14.4. Przebieg ćwiczenia	120
14.5. Opracowanie wyników	120
14.6. Wykonanie sprawozdania	121
Bibliografia	122
Ćwiczenie 15. Drgania samowzbudne	123
15.1. Cel ćwiczenia	123
15.2. Podstawy teoretyczne	123
15.3. Opis stanowiska badawczego	127
15.4. Przebieg ćwiczenia	127
15.5. Opracowanie wyników	128
15.6. Wykonanie sprawozdania	128
Bibliografia	129
Ćwiczenie 16. Dynamika pręta wywołana siłami tarcia	130
16.1. Cel ćwiczenia	130
16.2. Podstawy teoretyczne	130
16.3. Opis stanowiska badawczego	133
16.4. Przebieg ćwiczenia	133
16.5. Opracowanie wyników	133
16.6. Wykonanie sprawozdania	134
Bibliografia	134
Ćwiczenie 17. Drgania płyty	135
17.1. Cel ćwiczenia	135
17.2. Podstawy teoretyczne	135
17.3. Opis stanowiska badawczego	138
17.4. Przebieg ćwiczenia	138
17.5. Opracowanie wyników	139
17.6. Wykonanie sprawozdania	139
Bibliografia	140

Dodatek A.	141
--------------------	-----

Wykaz oznaczeń

α, β	– kąty przesunięcia fazowego
Δ	– logarytmiczny dekrement tłumienia
δ_{st}	– statyczne odkształcenie układu wywołane siłą ciężkości
ϵ	– mały parametr
η	– dynamiczny współczynnik lepkości; sprawność
λ_{st}	– statyczne odkształcenie układu wywołane siłą zewnętrzną
μ	– współczynnik tarcia statycznego; amplituda wzbudzenia parametrycznego (głębokość modulacji)
μ'	– współczynnik tarcia kinetycznego
μ_r	– rzeczywisty współczynnik tarcia
μ_t	– teoretyczny współczynnik tarcia
ν	– liczba Poissona
Ω	– częstość kołowa
ω	– częstość wymuszenia; prędkość kątowna
ω_0	– częstość drgań własnych
ρ	– gęstość
ρ_A	– masa przypadająca na jednostkę powierzchni (gęstość powierzchniowa)
ρ_l	– masa przypadająca na jednostkę długości (gęstość liniowa)
τ	– czas bezwymiarowy
ε	– przyspieszenie kątowe
φ	– współrzędna kątowna
ξ	– współczynnik wzmocnienia amplitudy
a	– przyspieszenie liniowe; wymiar liniowy
A	– pole powierzchni; amplituda drgań
c	– współczynnik tłumienia
B	– siła bezwładności
E	– moduł Younga (sprężystości wzdłużnej)
f	– częstotliwość
F	– wektor główny siły
F_T	– siła tarcia
g	– przyspieszenie ziemskie
G	– moduł Kirchhoffa (sprężystości postaciowej)

i	–	promień (ramię) bezwładności
I_x	–	masowy moment bezwładności względem osi Ox
I_{Oxy}	–	masowy moment bezwładności względem płaszczyzny Oxy
I_{xy}	–	masowy moment dewiacji (zboczenia)
I_o	–	masowy biegunowy moment bezwładności
J	–	geometryczny moment bezwładności przekroju
J_o	–	geometryczny biegunowy moment bezwładności
k	–	sztywność
$\mathbf{K}$	–	macierz sztywności
k_z	–	sztywność zastępcza
L	–	praca
m	–	masa
M	–	moment siły
m_z	–	masa zredukowana
M_s	–	moment skręcający
M_T	–	moment tarcia
n	–	prędkość obrotowa
N	–	reakcja normalna
s	–	położenie środka masy
S	–	siła wewnętrzna
t	–	czas
T	–	energia kinetyczna; okres drgań
v	–	prędkość liniowa
V	–	energia potencjalna; objętość
x	–	współrzędna liniowa
y	–	współrzędna liniowa

Ćwiczenie 1

Wyznaczanie współczynników tarcia

1.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie wartości współczynników tarcia statycznego i kinetycznego.

1.2. Podstawy teoretyczne

Podczas przesuwania jednego ciała po drugim, występują na powierzchni styku tych ciał siły oporu skierowane przeciwnie do istniejącego lub zamierzonego ruchu względnego. Siły te wywołane są głównie nierównościami powierzchni stykających się ciał i nazywają się siłami tarcia — w tym przypadku tarcia ślizgowego.

Tarcie nazywa się kinetycznym, jeśli stykające się ciała przesuwają się względem siebie, a statycznym lub spoczynkowym gdy są względem siebie nieruchome.

Podczas odkształcenia ciała pod wpływem czynników zewnętrznych następuje wzajemne przemieszczanie się jego cząsteczek, powodując wystąpienie tarcia wewnętrznego.

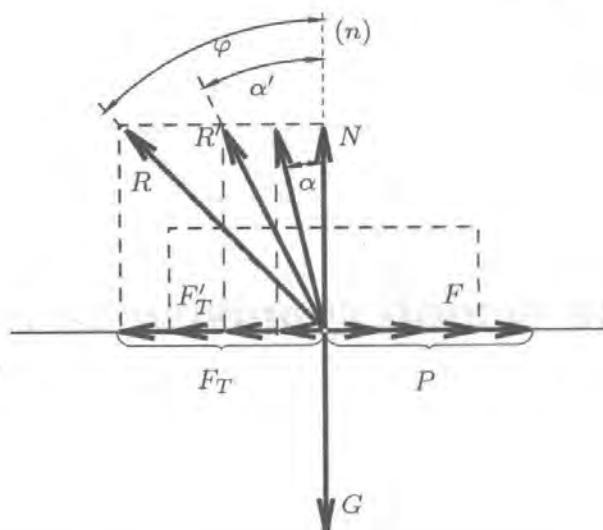
1.2.1. Tarcie ślizgowe

Niech dane będzie ciało o masie m spoczywające na płaskim podłożu i niech na to ciało działa rosnąca od zera siła F . Ciało to pozostaje w spoczynku do chwili, aż siła ta osiągnie graniczną wartość P — patrz Rysunek 1.1.

Z warunków równowagi wynika

$$F'_T = F, \quad N = mg. \quad (1.1)$$

Po dalszym zwiększeniu siły F (tj. powyżej wartości P) równowaga klocka nie będzie już możliwa i zacznie się on ślizgać po podłożu. Z powyższych rozważań wynika, że wartość siły tarcia jest zmienna i jednocześnie ograniczona — tzn. nie może przekroczyć pewnej maksymalnej wartości.

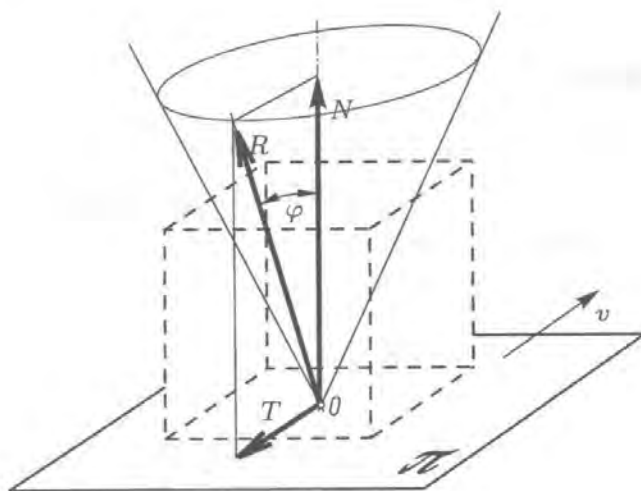


Rys. 1.1. Siły działające na ciało

Podczas zwiększania siły F rośnie również kąt α' odchylenia reakcji całkowitej podłoża R' od kierunku normalnego (n) spowodowany wzrostem siły F'_T . Maksymalny kąt odchylenia $\alpha'_{max} = \varphi$ nazywa się kątem tarcia, zaś wartość tangensa tego kąta współczynnikiem tarcia — μ ; zachodzi zatem zależność

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha'_{max} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.2)$$

Ciało o masie m będzie więc mogło pozostawać w równowadze tylko wówczas, gdy kąt α będzie nie większy niż kąt tarcia — tj. $\alpha \leq \varphi$. Graniczne położenia wektora reakcji R wyznaczone dla wszystkich kierunków działania siły F leżących w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny podstawy π two-



Rys. 1.2. Stożek tarcia

rzę pobocznice stożka. Wysokość tego stożka wynosi N , a kąt wierzchołkowy 2φ . Stożek ten nazywa się stożkiem tarcia — patrz Rysunek 1.2.

W zastosowaniach technicznych rozróżnia się trzy typy tarcia ślizgowego:

- tarcie suche — występuje, gdy powierzchnie trące stykają się bezpośrednio, bez rozdzielającej jej warstwy smaru,
- tarcie półsuche lub półpłynne,
- tarcie płynne.

Przybliżony obraz zjawisk dotyczących tarcia suchego dają trzy prawa tarcia sformułowane przez Coulomba:

1. Wartość siły tarcia nie zależy od wielkości powierzchni stykających się ze sobą ciał.
2. Siła tarcia leży w płaszczyźnie stycznej do styku ciał i jest skierowana przeciwnie do zwrotu spodziewanego przesunięcia. Wartość siły tarcia jest zawarta w granicach między zerem a maksymalną wartością, którą to osiąga w chwili utraty równowagi

$$0 \leq F_T \leq F_{T_{max}}. \quad (1.3)$$

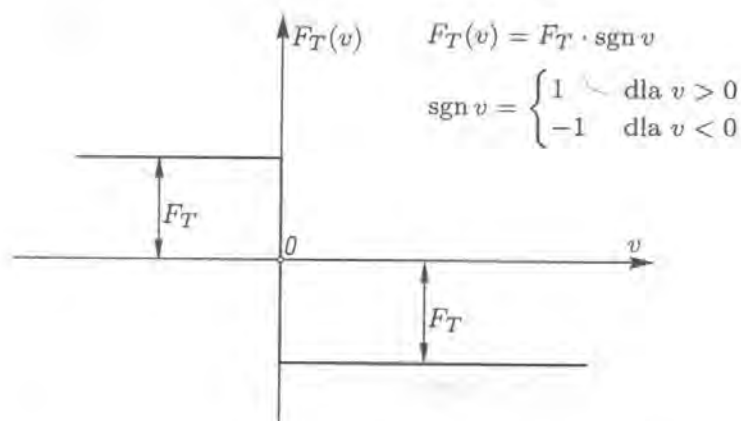
3. Maksymalna wartość siły tarcia jest proporcjonalna do składowej normalnej reakcji podłoża

$$F_{T_{max}} = \mu N. \quad (1.4)$$

Rolę współczynnika proporcjonalności pełni współczynnik tarcia, który zależy od rodzaju materiałów i fizycznych własności powierzchni trących tj. charakteru i wielkości chropowatości, wilgotności, temperatury powierzchni itd., natomiast nie zależy od względnej prędkości ruchu tych powierzchni (Rysunek 1.3).

Dla ciał pozostających w spoczynku można zapisać

$$F_T \leq \mu N. \quad (1.5)$$



Rys. 1.3. Zależność wartości siły tarcia suchego od prędkości względnej ciał

W przypadku ciał będących w ruchu

$$F_T \leq \mu' N, \quad (1.6)$$

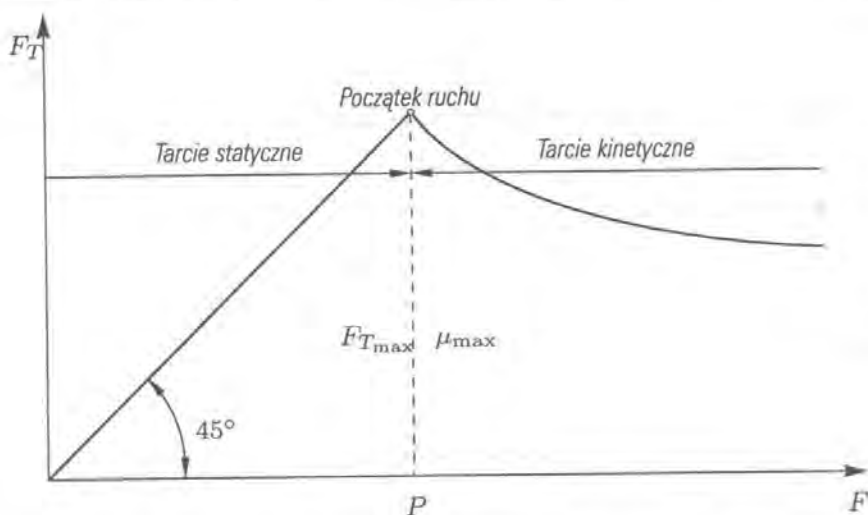
gdzie μ' jest współczynnikiem tarcia kinetycznego.

W rzeczywistości wartość kinetycznego współczynnika tarcia μ' nie jest stała, lecz zależy od prędkości

$$\mu' = \mu e^{-\alpha v}, \quad (1.7)$$

gdzie v oznacza prędkość względną stykających się ciał, zaś α jest stałym współczynnikiem.

Zależność wartości siły tarcia od rodzaju tarcia przedstawia Rysunek 1.4.



Rys. 1.4. Zależność siły tarcia od rodzaju tarcia (F — siła zewnętrzna jak przedstawiono na Rysunku 1.1)

W przypadku tarcia płynnego przedstawione powyżej prawa Coulomba nie są słuszne i należy stosować prawa podane przez Newtona:

1. Siła tarcia jest proporcjonalna do prędkości względnej stykających się ciał i maleje do zera, gdy $v \rightarrow 0$. Wartość siły tarcia nie zależy natomiast od reakcji normalnej N .
2. Siła tarcia jest proporcjonalna do powierzchni stykających się ciał oraz do gradientu prędkości w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu

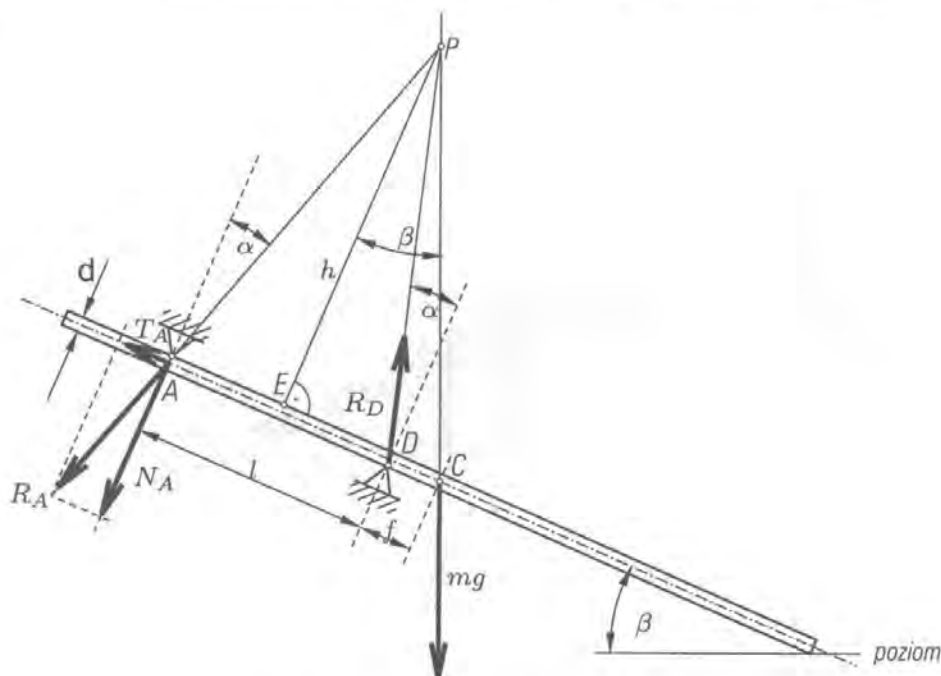
$$F_T = \eta A \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.8)$$

gdzie η jest współczynnikiem proporcjonalności (dynamiczny współczynnik lepkości), A polem powierzchni tarcia i y współrzędną w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu.

Przypadek tarcia półpłynnego jest przypadkiem pośrednim między tarcem suchym i płynnym.

1.2.2. Metody wyznaczania współczynników tarcia

Do wyznaczania wartości współczynników tarcia statycznego i kinetycznego służy stanowisko badawcze, którego schemat przedstawiono na Rysunku 1.5. Pręt i obie podpory winne być wykonane z materiałów, dla których określone są współczynniki tarcia. Pręt umieszcza się między podporami A i D tak, aby środek jego masy znajdował się poniżej dolnej podpory w odległości f .



Rys. 1.5. Siły działające na pręt w spoczynku

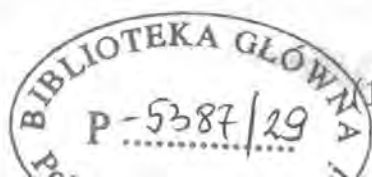
W położeniu równowagi, linie działania reakcji podpór i wypadkowej ciężaru pręta przecinają się w punkcie P . Ponieważ podpory wykonuje się z tego samego materiału, więc reakcje podpór tworzą jednakowe kąty α z kierunkiem normalnym do osi pręta. Poprzez zwiększenie kąta nachylenia pręta β następuje powiększenie składowej ciężaru mg powodującej zsuwanie się pręta.

W położeniu granicznym kąty α są równe kątowi tarcia φ . Dla tego położenia, po pominięciu wymiarów poprzecznych pręta, z trójkątów $\triangle AEP$ i $\triangle CEP$ można określić wielkość h

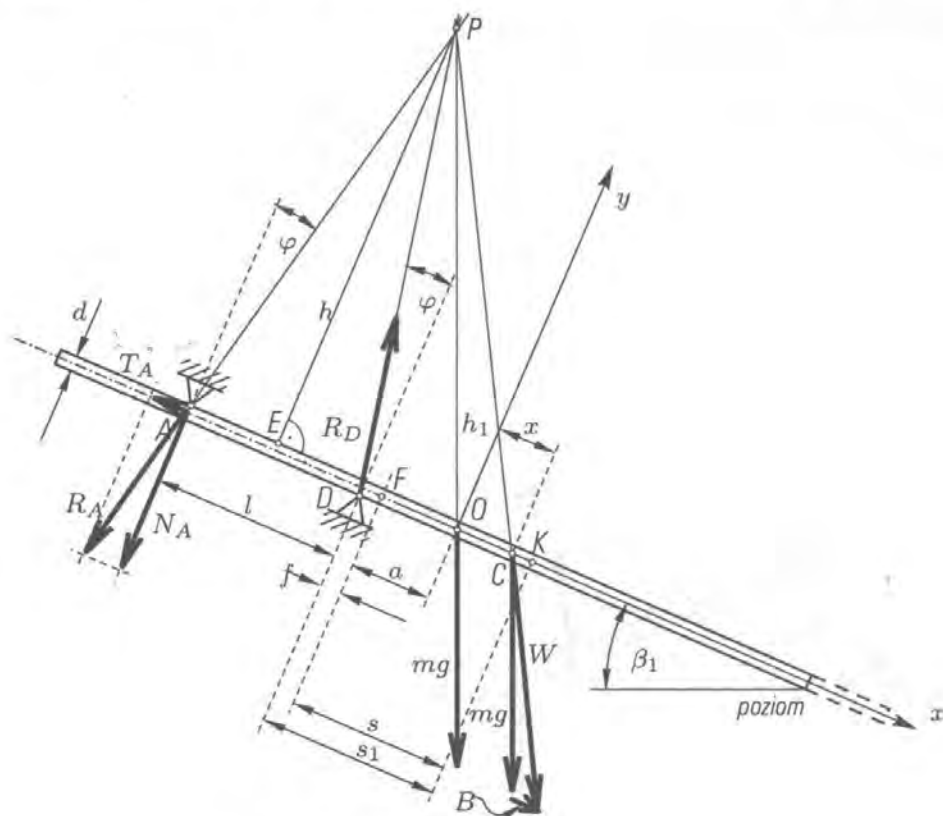
$$h = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{l + 2f}{2 \operatorname{tg} \beta} \quad (1.9)$$

Ponieważ $\alpha = \varphi$ oraz $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ więc po przekształceniu powyższej zależności można określić wartość współczynnika tarcia

$$\mu = \frac{l}{l + 2f} \operatorname{tg} \beta. \quad (1.10)$$



Współczynnik tarcia kinetycznego μ' można wyznaczyć przy pochyleniu pręta o kąt $\beta_1 > \beta$ — patrz Rysunek 1.6.



Rys. 1.6. Siły działające na pręt w ruchu

Zachowując odległość początkową f przyjętą poprzednio, zezwala się na swobodne zsuwanie się pręta. W czasie jego ruchu wystąpi siła bezwładności

$$B = -m\ddot{x}. \quad (1.11)$$

Siła ta, wraz z poprzednio rozpatrywanym układem sił zewnętrznych, spełnia dynamiczny warunek równowagi pręta. W tym przypadku w jednym punkcie P przecinają się linie działania reakcji i siły wypadkowej W

$$\overline{W} = \overline{B} + m\overline{g}. \quad (1.12)$$

Z podobieństwa trójkątów utworzonego z sił mg , B i W oraz trójkąta $\triangle COP$ otrzymuje się

$$\frac{B}{x} = \frac{mg}{h_1} \quad \text{lub} \quad B = \frac{mg}{h_1}x. \quad (1.13)$$

Uwzględniając tę zależność ze wzoru (1.11) uzyskuje się następujące równanie różniczkowe

$$m\ddot{x} + \frac{mg}{h_1}x = 0, \quad (1.14)$$

a po uproszczeniu

$$\ddot{x} + \frac{g}{h_1}x = 0. \quad (1.15)$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja

$$x(t) = C_1 \sin \sqrt{\frac{g}{h_1}}t + C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{h_1}}t, \quad (1.16)$$

której stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczyć można dla następujących warunków początkowych

$$x(t)|_{t=0} = -a \quad \Rightarrow \quad C_2 = -a \quad (1.17a)$$

$$\dot{x}(t)|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad (1.17b)$$

Po uwzględnieniu tych zależności rozwiązaniem równania (1.15) jest funkcja

$$x(t) = -a \cos \sqrt{\frac{g}{h_1}}t. \quad (1.18)$$

Jest to równanie ruchu harmonicznego, w którym punkty F i K są skrajnymi położeniami środka masy pręta. Zsuwający się pręt będzie się zatem poruszał w czasie równym połowie okresu tego ruchu, przebywając drogę $s = 2a$.

Kinetyczny współczynnik tarcia określa się jako tangens kąta φ , który tworzą reakcje podpór w chwili, gdy przyspieszenie pręta jest równe zero. Środek masy pręta zajmuje wówczas położenie $x = 0$, znajdując się na linii pionowej poprowadzonej z punktu P .

Dla tego położenia z trójkątów $\triangle AEP$ i $\triangle OEP$ otrzymuje się

$$h = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\frac{l}{2} + f + a}{\operatorname{tg} \beta_1}. \quad (1.19)$$

Wykorzystując zależność $\mu' = \operatorname{tg} \varphi$ oraz $s_1 = f + s = f + 2a$ uzyskuje się wyrażenie określające współczynnik tarcia kinetycznego

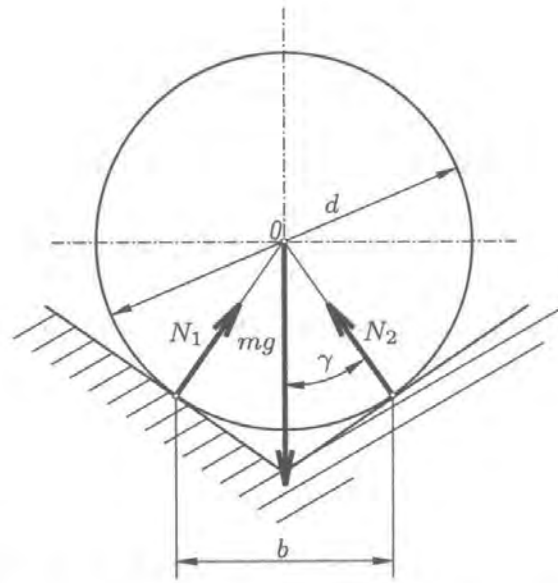
$$\mu' = \frac{l}{l + 2f + s} \operatorname{tg} \beta_1. \quad (1.20)$$

Współczynniki tarcia wyznaczone z zależności (1.10) i (1.20) przedstawiają wartość ilorazu F_T/N .

W przypadku, gdy podpory posiadają kształt klinowy, siły tarcia są większe niż dla przypadku podpór płaskich.

Dla takiego przypadku $N_1 + N_2 = N/\cos \gamma$ — patrz Rysunek 1.7. Z tego też względu, w przypadku podpór klinowych, rzeczywisty współczynnik tarcia należy obliczyć ze wzoru

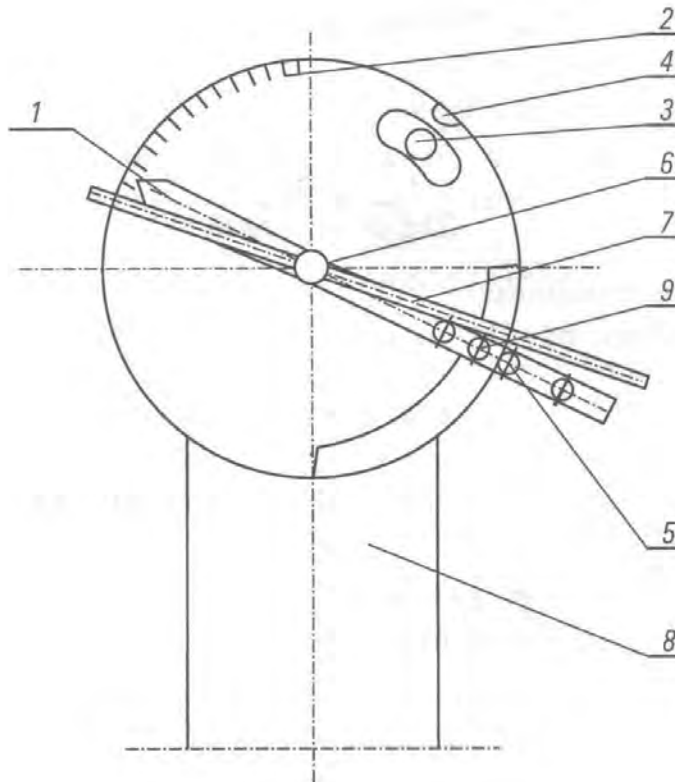
$$\mu_r = \frac{F_T}{N_1 + N_2} = \frac{F_T}{N} \cos \gamma = \mu \cos \gamma. \quad (1.21)$$



Rys. 1.7. Schemat podpory klinowej

1.3. Opis stanowiska badawczego

Przyrząd do wyznaczania współczynników tarcia przedstawia Rysunek 1.8.



Rys. 1.8. Przyrząd do wyznaczania współczynników tarcia

Do wspornika (8) przymocowana jest nieruchoma tarcza (4), względem której na osi mogą obracać się niezależnie od siebie ramię (1) i tarcza kąto-
wa (2). Ramię (1) można ustawiać w dowolnym położeniu i unieruchomić
zaciskiem (9). Do unieruchomienia tarczy kątowej (2) służy zacisk (3). Do
ramienia (1) można mocować dwa kołki (6) stanowiące podpory dla wy-
konanego z badanego materiału pręta (7). Do zmiany odległości między
podporami służą otwory (5), przeznaczone do mocowania dolnego kołka.

Kołki posiadają kształt ściętych stożków, co zapewnia zsuwanie się pręta
w kierunku prostopadłym do ich osi.

W wyposażeniu stanowiska znajdują się pręty z różnych materiałów, po-
ziomica, suwmiarka i przymiar liniowy.

1.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć średnicę pręta d , wymiar b i rozstaw podpór l . Odczytać z in-
strukcji znajdującej się na stanowisku kąt γ . Dane wpisać do Tabeli 1.1.
2. Wyznaczyć położenie środka masy pręta.
3. Umieścić pręt między podporami w położeniu poziomym ustawiając tar-
czę kątową na zero względem ramienia (1). Środek masy pręta ustawić
w odległości f od dolnej podpory.
4. W celu określenia współczynnika tarcia statycznego, zluźnić zacisk (9)
i powoli obracać ramię (1) aż do poślizgu pręta. Odczytać kąt graniczny
 β . Czynności te powtórzyć dwukrotnie.
5. Zmienić rozstaw podpór, ustawić tarczę na zero i powtórzyć pomiary.
Wyniki zapisać w Tabeli 1.2.
6. Dla wyznaczenia współczynnika tarcia kinetycznego ustawić ramię wraz
z prętem pod kątem $\beta_1 > \beta$.
7. Środek masy pręta ustawić w odległości f .
8. Puścić swobodnie pręt i zmierzyć odległość s_1 . Czynności te powtórzyć
dwukrotnie.
9. Zmienić rozstaw podpór i ponownie dokonać pomiarów s_1 . Wyniki po-
miarów wpisać do Tabeli 1.3.

Tabela 1.1. Zestawienie danych do obliczeń

$d =$	[m]	$b =$	[m]
$\gamma =$	[°]	$\sin \gamma =$	[-]

Tabela 1.2. Wyniki pomiarów współczynnika tarcia statycznego

l [m]	f [m]	β [°]	$\operatorname{tg} \beta$ [-]	μ_{sr} [-]	μ_r [-]
		1.			
		2.			
		3.			
		1.			
		2.			
		3.			

Tabela 1.3. Wyniki pomiarów współczynnika tarcia kinetycznego

l [m]	f [m]	β_1 [°]	$\operatorname{tg} \beta_1$ [-]	s_1 [m]	μ' [-]	μ'_{sr} [-]	μ'_r [-]
				1.			
				2.			
				3.			
				1.			
				2.			
				3.			

1.5. Opracowanie wyników

1. Obliczyć współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego odpowiednio z zależności (1.10) i (1.20).
2. Uwzględniając klinowy charakter podpór rzeczywiste współczynniki tarcia obliczyć ze wzoru (1.21).
3. Wyniki pomiarów i obliczeń zamieścić w Tabelach 1.1, 1.2 i 1.3.

1.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat układu pomiarowego wraz z rozkładem sił.
3. Wzory i obliczenia współczynników tarcia i kąta.
4. Tabelę pomiarów i obliczeń.

5. Porównanie wyznaczonych współczynników tarcia ze współczynnikami dotyczącymi innych materiałów określonymi na podstawie literatury.

Bibliografia

- [1] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*, t. I i II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [2] KURNIK W.: *Wykłady z mechaniki*. Warszawa, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, 2005.

Ćwiczenie 2

Wyznaczanie masowych momentów bezwładności ciał materialnych

2.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyprowadzenie zależności i obliczenie wartości masowych momentów bezwładności ciał złożonych z brył o kształcie regularnym — tj. walca, prostopadłościanu oraz kuli. Ponadto celem ćwiczenia jest wyznaczenie promieni bezwładności i mas zredukowanych tych ciał względem dowolnego układu współrzędnych.

2.2. Podstawy teoretyczne

Ruch ciała pod wpływem czynników zewnętrznych zależy nie tylko od całkowitej masy ciała, lecz także od jej rozmieszczenia w objętości tego ciała. Cecha ta jest wyrażona za pomocą wielkości noszącej nazwę masowego momentu bezwładności.

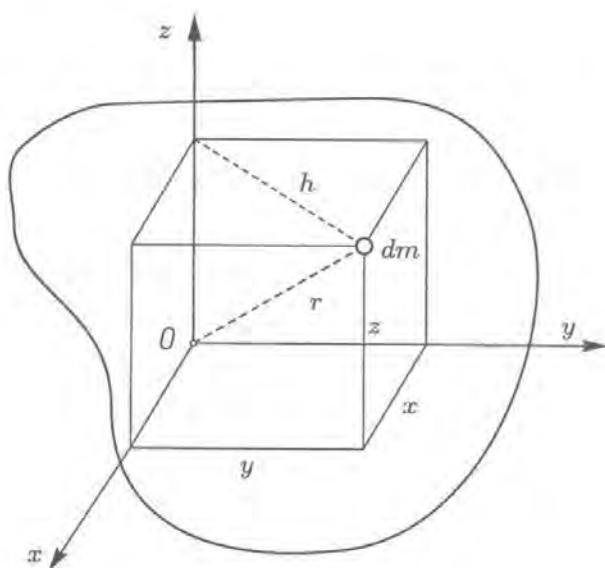
W dynamice ciała sztywnego najczęściej wykorzystuje się masowe momenty bezwładności względem osi obrotu. Często jednak łatwiejsze jest wyrażenie ich przy pomocy masowych momentów bezwładności obliczanych względem płaszczyzny lub punktu. Rysunek 2.1 przedstawia jednorodne ciało materialne i wyodrębniony z niego element o elementarnej masie dm oraz związany z tym ciałem prostokątny układ współrzędnych $Oxyz$.

Wyróżniony element ciała o masie dm zostanie potraktowany jako punkt materialny. Oznaczając przez ρ gęstość ciała można zapisać $dm = \rho dV$, gdzie dV oznacza elementarną objętość.

Momentem bezwładności ciała względem osi nazywa się granicę, do której dąży suma iloczynów wszystkich elementarnych mas i kwadratów odległości tych mas od rozpatrywanej osi, gdy liczba elementów dąży do nieskończoności, a ich wymiary dążą do zera.

Oznaczając moment bezwładności względem np. osi z przez I_z na podstawie definicji można zapisać

$$I_z = \int_m h^2 dm = \rho \int_V h^2 dV. \quad (2.1)$$



Rys. 2.1. Schemat ideowy obliczania momentów bezwładności

Analogicznie można zdefiniować momenty bezwładności względem płaszczyzny np. Oxy

$$I_{Oxy} = \int_m z^2 dm = \rho \int_V z^2 dV \quad (2.2)$$

i względem punktu O — zwanego biegunem — odpowiednio biegunowy moment bezwładności

$$I_O = \int_m r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV. \quad (2.3)$$

Ponieważ odległość h jest związana ze współrzędnymi przez zależność $h^2 = x^2 + y^2$, więc wstawiając do definicji (2.1) otrzymuje się

$$I_z = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm = I_{Oyz} + I_{Oxz}. \quad (2.4)$$

Wynika stąd, że moment bezwładności względem dowolnej osi równy jest sumie momentów bezwładności względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn przecinających się wzdłuż tej osi. Ponadto, ponieważ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, po wykorzystaniu zależności (2.2) otrzymuje się

$$I_O = I_{Oyz} + I_{Oxz} + I_{Oxy}, \quad (2.5)$$

zaś po uwzględnieniu definicji (2.3)

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O \Rightarrow I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z). \quad (2.6)$$

Tak więc biegunowy moment bezwładności równy jest połowie sumy momentów bezwładności względem trzech wzajemnie prostopadłych osi przechodzących przez ten biegun.

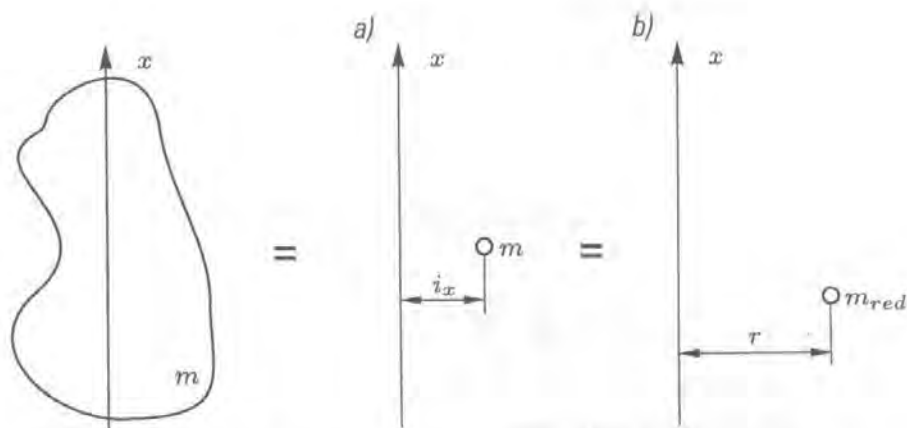
W międzynarodowym układzie miar i jednostek SI masowy moment bezwładności wyrażony jest w $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Moment bezwładności względem dowolnej osi można umownie przedstawić jako iloczyn całej masy ciała m skupionej w jednym punkcie i kwadratu odległości tego punktu od tej osi. Odległość tę nazywa się promieniem bezwładności ciała względem danej osi (Rysunek 2.2a)

$$I_x = m \cdot i_x^2, \quad (2.7)$$

a po przekształceniach

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \Rightarrow i_x = \text{const.} \quad (2.8)$$



Rys. 2.2. Ilustracja pojęcia promienia bezwładności (a) i masy zredukowanej (b)

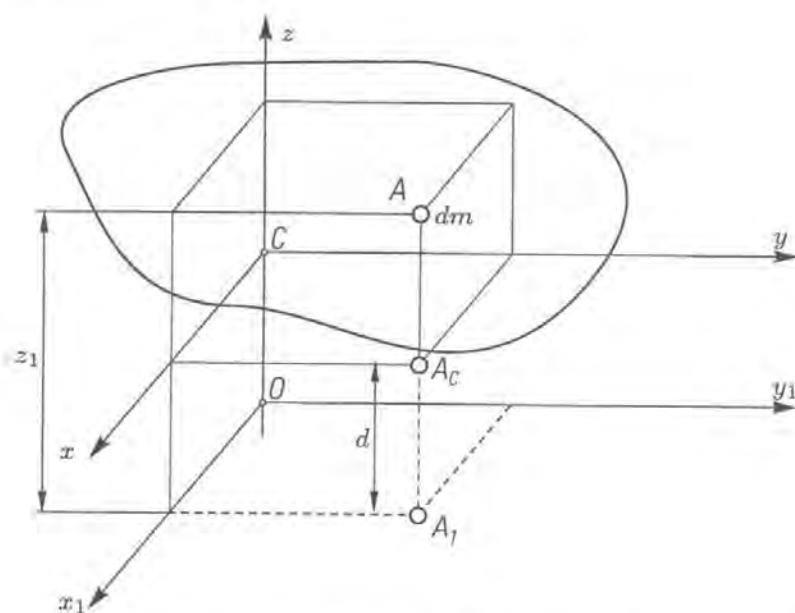
W praktyce spotykane jest także zagadnienie odwrotne do opisanego powyżej, a mianowicie poszukiwanie masy m_{red} , którą trzeba skupić w pewnej odległości r od osi, aby otrzymać moment bezwładności równy momentowi bezwładności danego ciała. Tak określona masa jest nazywana masą zredukowaną ciała materialnego na daną odległość od osi (Rysunek 2.2b).

$$I_x = m_{red} \cdot r^2 \quad (2.9)$$

lub

$$m_{red} = \frac{I_x}{r^2} \quad (2.10)$$

W niektórych przypadkach zachodzi konieczność wyznaczenia momentów bezwładności względem osi lub płaszczyzn wzajemnie równoległych.



Rys. 2.3. Odległość mas od płaszczyzn równoległych

Należy wówczas skorzystać z twierdzenia Steinera, zgodnie z którym moment bezwładności względem osi Oy_1 (Rysunek 2.3) wyrażony jest jako

$$I_{y_1} = I_y + md^2, \quad (2.11)$$

zaś w przypadku płaszczyzny

$$I_{Ox_1y_1} = I_{Cxy} + md^2. \quad (2.12)$$

Z zależności powyższych wynika, że moment bezwładności względem dowolnej osi (płaszczyzny) równy jest momentowi bezwładności względem osi (płaszczyzny) równoległej przechodzącej przez środek masy ciała (punkt C) plus iloczyn masy tego ciała i kwadratu odległości między tymi osiami (płaszczyznami).

Z powyższych wzorów można obliczyć momenty bezwładności dla ciał o kształcie regularnym, takich jak walec, prostopadłościan itp.

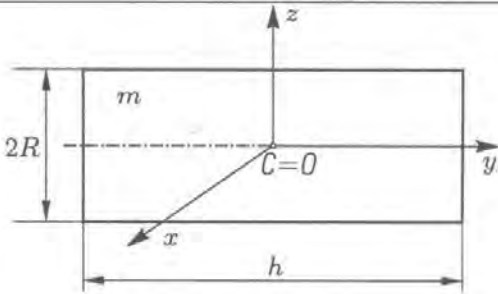
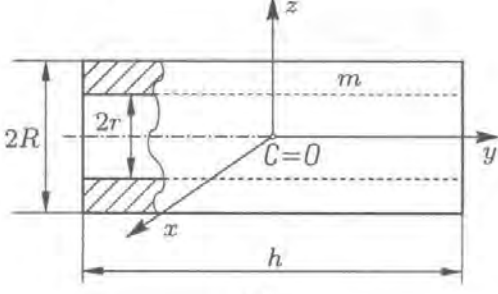
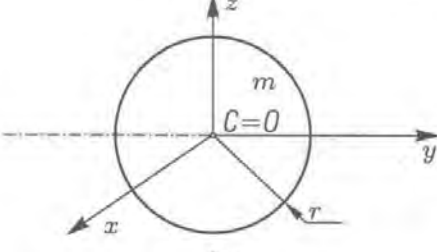
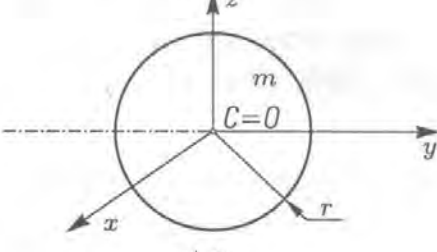
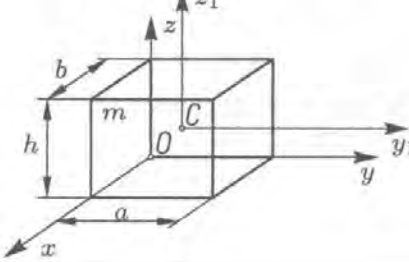
Jeżeli ciało składa się z kilku elementów o kształtach regularnych, wówczas moment bezwładności ciała jest sumą momentów bezwładności poszczególnych elementów obliczonych względem osi, dla której obliczono moment bezwładności ciała. Przykładowo dla osi Ox

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{xi}, \quad (2.13)$$

gdzie I_{xi} są momentami bezwładności poszczególnych elementów składowych ciała. Zasada ta dotyczy również biegunowych momentów bezwładności oraz momentów obliczanych względem płaszczyzn.

W Tabeli 2.1 przedstawiono masowe momenty bezwładności najczęściej spotykanych ciał o kształcie regularnym.

Tabela 2.1. Masowe momenty bezwładności ciał o kształcie regularnym

Nazwa ciała	Rysunek	Momenty bezwładności
walec		$I_y = m \frac{R^2}{2}$ $I_{Oxz} = m \frac{h^2}{12}$
walec wydrążony		$I_y = m \frac{R^2 - r^2}{2}$ $I_{Oxz} = m \frac{h^2}{12}$
kula		$I_O = \frac{3}{5} m r^2$ $I_x = \frac{2}{5} m r^2$
czasza kulista		$I_O = m r^2$ $I_x = \frac{2}{3} m r^2$
prostopadłościan		$I_{Oxy} = m \frac{b^2}{3}$ $I_{Ox_1y_1} = m \frac{b^2}{12}$

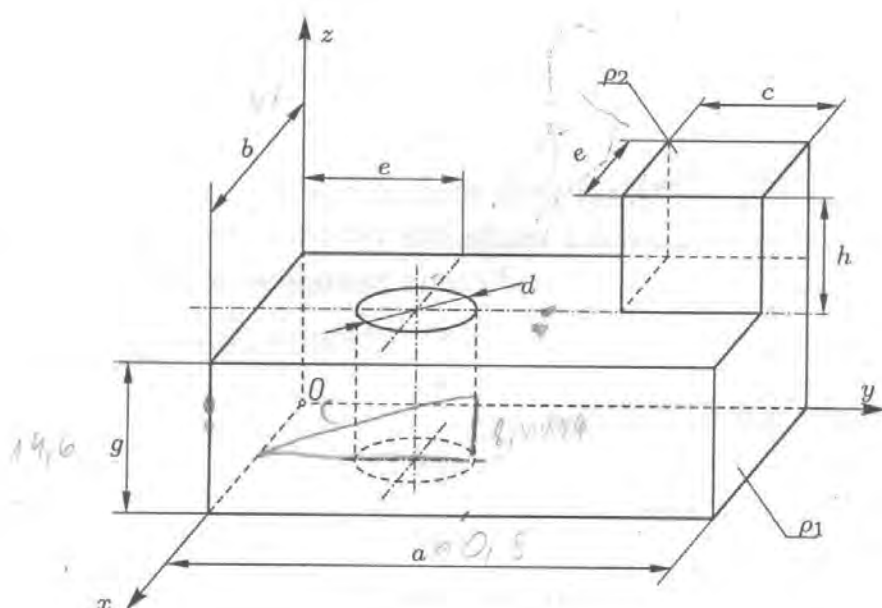
Dla ciał o nieregularnych kształtach, np. skomplikowanych pod względem kształtu elementów maszyn i urządzeń, momenty bezwładności można

wyznaczyć metodą doświadczalną. W takich przypadkach, w zależności od kształtu i wymiarów elementów należy stosować jedną z przedstawionych w kolejnych czterech rozdziałach metod eksperymentalnych.

2.3. Przebieg ćwiczenia

Od prowadzącego ćwiczenie uzyskać dane dotyczące bryły przedstawionej na Rysunku 2.4, a następnie zamieścić je w Tabeli 2.2. Wykonać w skali zwymiarowany rysunek bryły.

Wykonać obliczenia na podstawie zależności podanych w paragrafie 2.2.



Rys. 2.4. Element złożony z brył regularnych

Tabela 2.2. Zestawienie danych do obliczeń

$a =$	[mm]	$b =$	[mm]	$c =$	[mm]
$d =$	[mm]	$e =$	[mm]	$g =$	[mm]
$h =$	[mm]	$\rho_1 =$	[kg/m ³]	$\rho_2 =$	[kg/m ³]
Promień r do wyznaczenia masy zredukowanej				$r =$	[mm]

2.4. Opracowanie wyników

Wyznaczyć położenie środka masy C bryły i zaznaczyć na rysunku bryły. Wyliczyć wartości masowych momentów bezwładności względem: płaszczy-

Tabela 2.3. Wyniki obliczeń

Położenie środka masy	$x_c =$	[mm]
	$y_c =$	[mm]
	$z_c =$	[mm]
Masowy moment bezwładności względem płaszczyzny Oxy	$I_{Oxy} =$	[kg m ²]
Masowy moment bezwładności względem osi x	$I_x =$	[kg m ²]
Masowy moment bezwładności względem osi x_C	$I_{x_C} =$	[kg m ²]
Ramię bezwładności względem osi x	$i_{x_C} =$	[m]
Masa zredukowana na odległość $r = \dots$	$m_{red} =$	[kg]

zny Oxy , osi x i osi x_C — tj. osi przechodzącej przez środek masy. Wyznać również ramię bezwładności względem tej osi oraz masę zredukowaną na odległość r od osi x . Wartości wyliczone zamieścić w Tabeli 2.3.

2.5. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat bryły wraz z naniesionymi wymiarami.
3. Podstawowe wzory i obliczenia.
4. Tabele pomiarów i obliczeń.
5. Uwagi i wnioski.

Bibliografia

- [1] BUŁKA J., KRAMARZ H., PUCIŁOWSKI K., TELESIEWICZ T.: *Laboratorium mechaniki teoretycznej*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [2] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*, tom I i II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [3] RZYSKO J.: *Statyka i Wytrzymałość Materiałów*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1971.
- [4] SZABELSKI K. — red.: *Ćwiczenia Laboratoryjne z Dynamiki Maszyn*. Lublin, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 1980.

Ćwiczenie 3

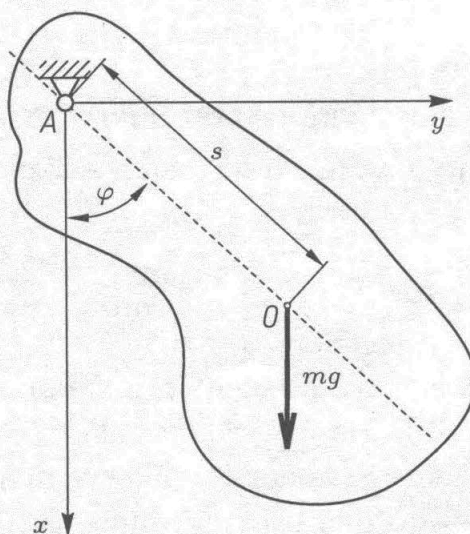
Wyznaczanie masowych momentów bezwładności ciał metodą wahadła fizycznego

3.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie masowego momentu bezwładności korbowodu względem osi jego podparcia oraz względem osi centralnej. Ponadto zadaniem ćwiczenia jest analiza ruchu wahadła fizycznego.

3.2. Podstawy teoretyczne

Ciało materialne, które wykonuje swobodny ruch obrotowy dookoła osi ~~po-~~ ^{pięciowej} ~~złomnej~~ nieprzechodzącej przez środek masy, nazywane jest wahadłem fizycznym (Rysunek 3.1).



Rys. 3.1. Wahadło fizyczne

Pomijając opory ruchu, na rozważane ciało działa — względem osi jego obrotu — tylko moment pochodzący od siły ciężkości

$$M_z = -mgs \sin \varphi. \quad (3.1)$$

Równanie różniczkowe ruchu ma zatem postać

$$I\ddot{\varphi} = -mgs \sin \varphi \quad (3.2)$$

lub

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{I} \sin \varphi = 0, \quad (3.3)$$

gdzie I — jest masowym momentem bezwładności ciała względem osi obrotu z przechodzącej przez punkt A . Zakładając, że kąt wychylenia ciała jest mały ($\varphi < 5^\circ$) można przyjąć, że $\sin \varphi \approx \varphi$. Wówczas równanie ruchu przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{I} \varphi = 0. \quad (3.4)$$

Oznaczając częstość drgań własnych przez ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgs}{I}}, \quad (3.5)$$

równanie (3.4) można przedstawić w postaci

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (3.6)$$

Rozwiązaniem ogólnym powyższego równania różniczkowego jest funkcja

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (3.7)$$

gdzie φ_0 i α są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

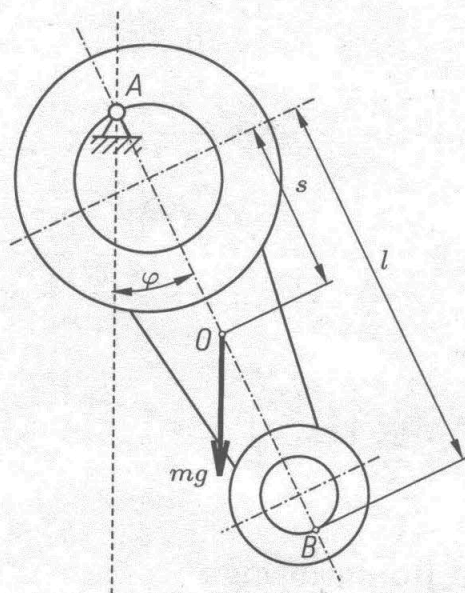
Okres drgań wahadła fizycznego wynika z zależności

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}}, \quad (3.8)$$

dzięki której można wyznaczyć moment bezwładności danego ciała względem osi obrotu. Znając odległość s środka masy (O) od osi obrotu można — na podstawie twierdzenia Steinera — obliczyć moment bezwładności ciała względem równoległej do niej osi centralnej (tj. osi przechodzącej przez punkt A).

W przypadku, gdy położenia środka masy (O) nie jest znane, moment bezwładności ciała względem dowolnej osi można wyznaczyć gdy:

- ciało można zawiesić na dwóch osiach równoległych, w celu otrzymania dwóch wahadeł fizycznych,
- środek masy ciała leży w płaszczyźnie przechodzącej przez osie zawieszenia ciała.



Rys. 3.2. Korkowód

Do takich ciał należą niektóre elementy maszyn, jak np. korkowody (Rysunek 3.2).

Wychylając korkowód zawieszony w punkcie A z położenia równowagi można zmierzyć okres drgań T_1 . Postępując analogicznie wyznaczyć okres T_2 w przypadku zawieszenia korkowodu w punkcie B. Korzystając z zależności (3.8) można zapisać zależności

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgs}}, \quad (3.9a)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{mg(l-s)}}. \quad (3.9b)$$

Na podstawie twierdzenia Steinera otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_A &= I_O + ms^2, \\ I_B &= I_O + m(l-s)^2, \end{aligned} \quad (3.10a)$$

skąd po wstawieniu do (3.9a) i (3.9b) można wyznaczyć odległość s

$$s = \frac{4\pi^2 l - gT_2^2}{8\pi^2 l - g(T_1^2 + T_2^2)} l, \quad (3.11)$$

a w dalszej kolejności momenty bezwładności

$$I_A = \frac{mgT_1^2l(4\pi^2l - gT_2^2)}{4\pi^2[8\pi^2l - g(T_1^2 + T_2^2)]}, \quad (3.12)$$

$$I_B = \frac{mgT_2^2l(4\pi^2l - gT_1^2)}{4\pi^2[8\pi^2l - g(T_1^2 + T_2^2)]} \quad (3.13)$$

oraz

$$I_O = \frac{mgl(4\pi^2l - gT_2^2)}{8\pi^2l - g(T_1^2 + T_2^2)} \left\{ \left(\frac{T_1}{2\pi} \right)^2 - \frac{l(4\pi^2l - gT_2^2)}{g[8\pi^2l - g(T_1^2 + T_2^2)]} \right\}. \quad (3.14)$$

3.3. Opis stanowiska pomiarowego

Stanowisko pomiarowe składa się z mocowanego w imadle ostrza nożowego służącego do zawieszania badanych ciał oraz z badanego korbowodu. W wyposażeniu stanowiska znajdują się ponadto suwmiarka i stoper.

3.4. Przebieg ćwiczenia

1. Narysować i zwymiarować korbowód oraz odczytać jego masę. Wyniki wpisać do Tabeli 3.1.
2. Zawiesić na ostrzu nożowym korbowód (w osi symetrii) w punkcie A, a następnie wychylić o mały kąt $\varphi < 5^\circ$ i zmierzyć czas 30-tu wahań. Wyniki pomiarów zapisać w Tabeli 3.2.
3. Powtórzyć czynności przy zawieszonym korbowodzie w punkcie B. Wyniki pomiarów zapisać w tabeli — Tabela 3.3.
4. Komplet pomiarów powtórzyć dwa razy, uzupełniając każdorazowo Tabele 3.2 i 3.3.
5. Wyznaczyć wartości I_A , I_B , I_O i porównać z wartością doświadczalną. Wyniki ostatecznych obliczeń zamieścić w Tabeli 3.4.

Tabela 3.1. Zestawienie danych do obliczeń

$M =$	[kg]	$l =$	[m]	$s =$	[m]
-------	------	-------	-----	-------	-----

3.5. Opracowanie wyników

Na podstawie znanych (zmierzonych) wielkości m , l i T obliczyć ze wzorów (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) wartości s , I_A , I_B , I_O . Znając wymiary korbowo-

du, wyznaczyć centralny moment bezwładności teoretyczny I_{Ot} i porównać z analogiczną wartością znaną doświadczalnie.

Tabela 3.2. Zestawienie wyników pomiarowych dla punktu A

Nr próby	Czas 30-tu wahań		Okres drgań T_1 [s]
	t [s]	t_{sr} [s]	
1			
2			
3			

Tabela 3.3. Zestawienie wyników pomiarowych dla punktu B

Nr próby	Czas 30-tu wahań		Okres drgań T_2 [s]
	t [s]	t_{sr} [s]	
1			
2			
3			

Tabela 3.4. Zestawienie wyników obliczeń

$I_A =$	[kgm ²]	$I_B =$	[kgm ²]	
$I_O =$	[kgm ²]	$I_{Ot} =$	[kgm ²]	$\frac{(I_{Ot} - I_O)}{I_{Ot}} \cdot 100\% =$

3.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Rysunek korbowodu oraz obliczenia wartości I_O , s , I_A i I_B .
3. Tabele pomiarów i obliczeń.
4. Uwagi i wnioski.

Bibliografia

[1] BUŁKA J., KRAMARZ H., PUCIŁOWSKI K., TELESIEWICZ T.: *Laboratorium mechaniki teoretycznej*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.

- [2] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*, tom I i II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [3] RŻYSKO J.: *Statyka i Wytrzymałość Materiałów*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1971.
- [4] SZABELSKI K. — red.: *Ćwiczenia Laboratoryjne z Dynamiki Maszyn*. Lublin, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 1980.

Ćwiczenie 4

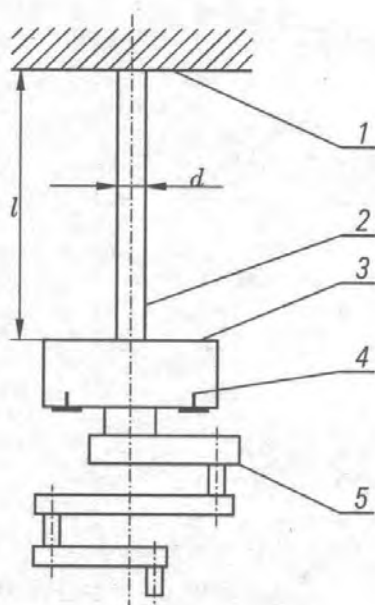
Wyznaczanie masowych momentów bezwładności elementów metodą zawieszenia na pręcie sprężystym

4.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie masowego momentu bezwładności wału korbowego oraz analiza drgań skrętnych układu o jednym stopniu swobody.

4.2. Podstawy teoretyczne

Metody wahadła fizycznego (ćwiczenie 3.) oraz omówiona w ćwiczeniu 5. metoda zawieszenia na trzech cięgnach są nieprzydatne, gdy zachodzi konieczność wyznaczenia momentu bezwładności długich elementów względem ich osi wzdlużnej, na której zwykle leży nieznany środek masy. Dla takich elementów stosuje się metodę zawieszenia na pręcie sprężystym. Pręt (2) z zamocowanym na nim uchwytem (3) i badanym wałem korbowym (5) przedstawiony został na poniższym rysunku.



Rys. 4.1. Wał korbowy zawieszony na pręcie sprężystym

Przykładając do uchwytu moment skręcający M , powodujemy sprężyste skrócenie pręta o kąt

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_O}, \quad (4.1)$$

gdzie: G — moduł sprężystości postaciowej materiału pręta (moduł Kirchhoffa), J_O — geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem środka tego przekroju, który dla przekroju kołowego wynosi $J_O = \pi d^4/32$, gdzie d jest średnicą przekroju poprzecznego. Pomijając masę pręta oraz tłumienie wewnętrzne jego materiału, równanie różniczkowe drgań skrętnych układu, przyjmie postać

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} &= -M = -\frac{GJ_O}{l}\varphi, \\ \ddot{\varphi} + \frac{GJ_O}{Il}\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie I jest sumą masowych momentów bezwładności wszystkich elementów zawieszonych na pręcie. Oznaczając

$$\omega_0^2 = \frac{GJ_O}{Il} \quad (4.3)$$

otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu obrotowego

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (4.4)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (4.4) jest funkcja

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (4.5)$$

gdzie φ_0 i α są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

Okres drgań tego ruchu T określony jest zależnością

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{GJ_O}}. \quad (4.6)$$

Z zależności (4.6) można wyznaczyć

$$I = \frac{GJ_OT^2}{4\pi^2 l}. \quad (4.7)$$

W dalszych rozważaniach pomijamy masę pręta (2), uznając ją jako małą. Oznaczając przez I_u oraz I_w masowe momenty bezwładności odpowiednio uchwytu i wału oraz podstawiając

$$I = I_u + I_w, \quad (4.8)$$

a także przyjmując oznaczenie

$$\frac{GJ_O}{4\pi^2 l} = c \quad (4.9)$$

otrzymuje się następujące równanie

$$I_u + I_w = cT^2. \quad (4.10)$$

Analogicznie dla samego uchwytu

$$I_u = cT_1^2, \quad (4.11)$$

gdzie T_1 jest okresem drgań układu składającego się tylko z uchwytu i pręta.

Dzieląc stronami równanie (4.10) przez zależność (4.11) otrzymuje się

$$\frac{I_u + I_w}{I_u} = \frac{T^2}{T_1^2}. \quad (4.12)$$

Poszukiwany moment bezwładności wynosi zatem

$$I_w = I_u \left(\frac{T^2}{T_1^2} - 1 \right). \quad (4.13)$$

Wykorzystując wzór (4.11), można również wyznaczyć moduł sprężystości postaciowej G dla materiału pręta, zawieszając na pręcie element o znanym masowym momencie bezwładności względem jego osi wzdlużnej. Zachodzi wówczas

$$I_u = cT_1^2 = \frac{T_1^2 G J_O}{4\pi^2 l}. \quad (4.14)$$

Przekształcając wzór (4.14) otrzymuje się zależność na obliczenie modułu Kirchhoffa

$$G = \frac{4\pi^2 I_u l}{J_O T_1^2}. \quad (4.15)$$

4.3. Opis stanowiska pomiarowego

Schemat stanowiska przedstawiono na rysunku 4.1. Stanowisko pomiarowe składa się z wysięgnika (1), w którym utwierdzony jest górny koniec pręta (2). Do dolnego końca pręta przymocowany jest uchwyt walcowy (3). Przy pomocy dwóch śrub (4), przykręcamy do niego wał korbowy (5), którego masowy moment bezwładności należy wyznaczyć.

W wyposażeniu stanowiska znajdują się ponadto stoper, suwmiarka oraz przymiar liniowy.

4.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć średnicę i długość pręta. Wyniki wpisać do Tabeli 4.1.
2. Zmierzyć wymiary uchwytu mocującego. Wyniki wpisać do Tabeli 4.1.
3. Wprowadzić układ pręt-uchwyt w skrętny ruch drgający ($\varphi < 5^\circ$) i zmierzyć czas 30-tu wahnięć — t_1 , pomiary powtórzyć dwa razy. Wyznaczyć okres T_1 . Wyniki wpisać do Tabeli 4.2.
4. Przymocować wał do uchwytu i powtórzyć poprzednie czynności określając analogicznie czas t 30-tu wahnięć. Wyznaczyć okres T . Wyniki wpisać do Tabeli 4.3.

Tabela 4.1. Zestawienie danych do obliczeń

$l =$	[m]	$d =$	[mm]	$m_w =$	[kg]
$m_u =$	[kg]	$I_u =$	[kgm ²]	$i_u =$	[m]
$J_O =$	[mm ⁴]				

Tabela 4.2. Zestawienie wyników pomiarowych dla układu uchwyt-pręt

Nr próby	Czas 30-tu wahnięć		Okres drgań T_1 [s]
	t_1 [s]	t_{sr} [s]	
1			
2			
3			

Tabela 4.3. Zestawienie wyników pomiarowych dla układu uchwyt-pręt-wał

Nr próby	Czas 30-tu wahnięć		Okres drgań T [s]
	t [s]	t_{sr} [s]	
1			
2			
3			

Tabela 4.4. Zestawienie wyników obliczeń

$I_w =$	[kgm ²]	$i_w =$	[m]	$G =$	[MPa]
---------	---------------------	---------	-----	-------	-------

4.5. Opracowanie wyników

1. Obliczyć, na podstawie definicji, biegunowy geometryczny moment bezwładności J_0 przekroju poprzecznego pręta.
2. Wyznaczyć masę uchwytu i obliczyć moment bezwładności i promień bezwładności uchwytu.
3. Obliczyć masowy moment bezwładności ze wzoru (4.13) oraz promień bezwładności wału.
4. Obliczyć moduł sprężystości postaciowej materiału pręta ze wzoru (4.15).
5. Obliczone wartości wpisać w Tabeli 4.4.

4.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat stanowiska i rysunek uchwytu.
3. Wykorzystane wzory i obliczenia.
4. Tabele pomiarów i obliczeń.
5. Uwagi i wnioski.

Bibliografia

- [1] BUŁKA J., KRAMARZ H., PUCIŁOWSKI K., TELESIEWICZ T.: *Laboratorium mechaniki teoretycznej*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [2] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*, tom I i II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [3] RŻYSKO J.: *Statyka i Wytrzymałość Materiałów*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1971.
- [4] SZABELSKI K. — red.: *Ćwiczenia Laboratoryjne z Dynamiki Maszyn*. Lublin, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 1980.

Ćwiczenie 5

Wyznaczanie masowych momentów bezwładności ciał metodą zawieszenia na trzech cięgnach

5.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie, metodą zawieszania na trzech cięgnach, masowych momentów bezwładności elementów i zespołów o skomplikowanych kształtach oraz analiza drgań skrętnych układu.

5.2. Podstawy teoretyczne

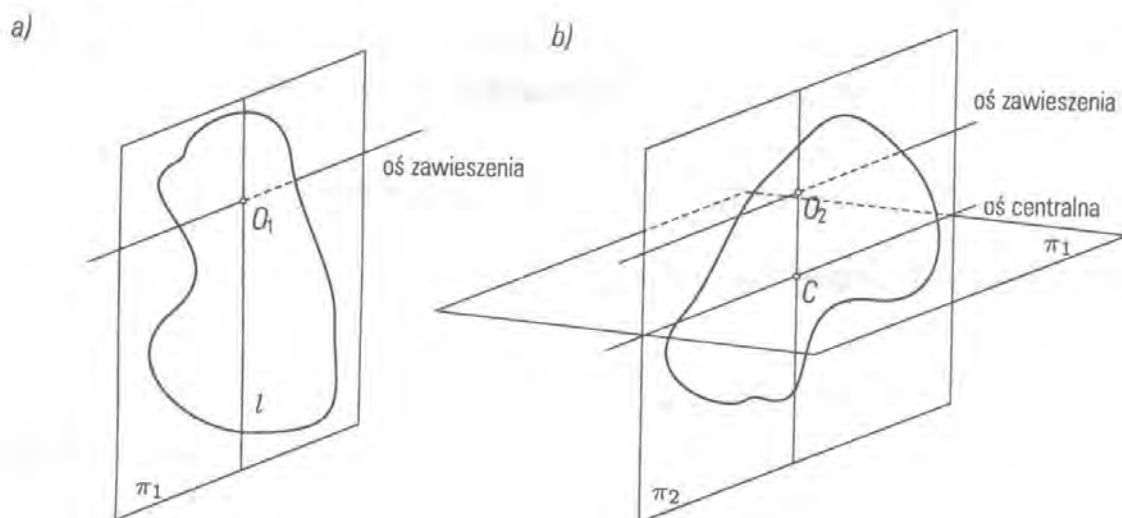
Metodą zawieszenia na trzech wiotkich cięgnach można określać masowe momenty bezwładności najbardziej złożonych elementów, jak i również całych zespołów maszyn i urządzeń. Wyznaczony tym sposobem moment bezwładności jest momentem centralnym układu względem jego osi pionowej.

Zastosowanie omawianej metody jest możliwe pod warunkiem znajomości położenia środka masy badanego ciała. W przypadku bardziej złożonych obiektów położenie to można wyznaczyć jednym z dwu sposobów:

- poprzez zawieszenie ciała na trzech cięgnach pionowych i pomiar sił w dwóch z nich. Otrzymuje się wówczas układ czterech sił równoległych, zaś położenie środka masy ciała można wyznaczyć z równań równowagi (sumy momentów względem dwu osi pionowych)

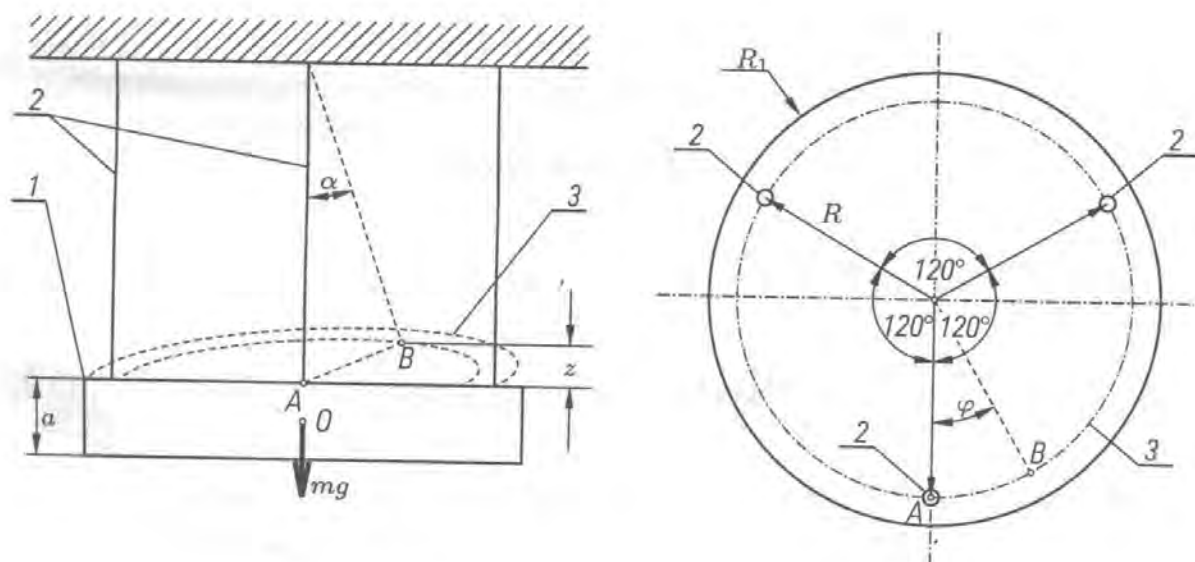
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 M_{ix} &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 M_{iy} &= 0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

- poprzez swobodne zawieszenie ciała na osi poziomej. Środek masy znajdzie się wówczas na płaszczyźnie pionowej π_1 zawierającej oś zawieszenia (Rysunek 5.1 a). Płaszczyzna ta wyznaczy na badanym obiekcie ślad l . Ponownie zawieszając badane ciało, ale w innym jego punkcie (np. O_2), można wyznaczyć drugą płaszczyznę pionową π_2 (Rysunek 5.1 b). Prosta będąca krawędzią przecięcia obu płaszczyzn stanowi oś centralną równoległą do poziomych osi zawieszeń.



Rys. 5.1. Sposób wyznaczania położenia środka ciężkości metodą zawieszania na osi poziomej

Do wyznaczenia masowego momentu bezwładności badanego ciała wykorzystane zostaną drgania skrętne. W tym celu należy badane ciało umieścić na tarczy (1) tak, aby jego środek masy leżał w osi koła, na którego obwodzie przymocowane są w jednakowej odległości od środka tarczy trzy identyczne ciężna (2) — patrz Rysunek 5.2. Do wyprowadzenia równania ruchu drgań skrętnych, jakie po wychyleniu z położenia równowagi o kąt φ będzie wykonywał układ wykorzystana zostanie zasada zachowania energii mechanicznej. Celem uproszczenia rozważań opory ruchu układu zostaną pominięte.



Rys. 5.2. Tarcza zawieszona na trzech ciężnach

Zgodnie z twierdzeniem Koeniga energia całkowita tarczy składa się z energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół środka masy

$$T_1 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} \quad (5.2)$$

oraz energii kinetycznej ruchu postępowego tarczy,

$$T_2 = \frac{mv^2}{2} \quad (5.3)$$

gdzie I jest masowym momentem bezwładności względem pionowej osi centralnej, m masą tarczy, a v prędkością jej środka masy. Bezpośrednio z rysunku wynikają zależności

$$z = l(1 - \cos \alpha), \quad \widehat{AB} = \alpha l = R\varphi. \quad (5.4)$$

A zatem — na podstawie definicji oraz zależności (5.4) — prędkość

$$v = \dot{z} = l\dot{\alpha} \sin \alpha = R\dot{\varphi} \sin \frac{R}{l}\varphi. \quad (5.5)$$

Po podstawieniu v do równania (5.3), otrzymujemy

$$T_2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \frac{R}{l}\varphi. \quad (5.6)$$

Energia potencjalna wynikająca z ciężaru mg oraz wysokości z wynosi

$$V = mgz = mgl(1 - \cos \frac{R}{l}\varphi). \quad (5.7)$$

Ponieważ działające w układzie siły są siłami zachowawczymi (pominięto siły oporu), a więc spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej

$$T_1 + T_2 + V = \text{const.} \quad (5.8)$$

Podstawiając do równania (5.8) zależności (5.2), (5.6) i (5.7) otrzymujemy równanie

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \frac{R}{l}\varphi + mgl(1 - \cos \frac{R}{l}\varphi) = \text{const.} \quad (5.9)$$

Dla uproszczenia równania przyjmijmy założenia, że

$$\begin{aligned} \varphi_{\max} &< 5^\circ, \\ \frac{R}{l} &\approx \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

W takim przypadku energia kinetyczna ruchu postępowego jest pomijalnie mała w porównaniu do dwóch pozostałych. Wówczas zachodzi

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \frac{R}{l}\varphi) = \text{const.} \quad (5.11)$$

Różniczkując obustronnie powyższą zależność względem czasu otrzymuje się

$$I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgR\dot{\varphi} \sin \frac{R}{l}\varphi = 0. \quad (5.12)$$

Uwzględniając, że dla małych wartości kąta $\sin \varphi \approx \varphi$, po przekształceniu zależność (5.12) można zapisać jako

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgR^2}{Il}\varphi = 0. \quad (5.13)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (5.13) jest funkcja

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \beta), \quad (5.14)$$

gdzie ω_0 jest częstością kołową drgań własnych i wyraża się wzorem (5.15)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgR^2}{Il}}, \quad (5.15)$$

zaś φ_0 i β są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

Okres drgań tego ruchu (czyli okres drgań tarczy) wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{mgR^2}}. \quad (5.16)$$

Z zależności tej można wyznaczyć masowy moment bezwładności tarczy względem osi pionowej

$$I = \frac{mgR^2}{4\pi^2 l} T^2. \quad (5.17)$$

Jeśli na tarczy zostanie umieszczona masa m_1 o nieznanym momencie bezwładności I_{m_1} to wzór (5.17) przyjmie postać

$$I + I_{m_1} = \frac{(m + m_1)gR^2}{4\pi^2 l} T_{m_1}^2, \quad (5.18)$$

gdzie T_{m_1} jest okresem drgań układu z dodatkową masą m_1 . Z równań (5.17) i (5.18) wyznaczyć można moment bezwładności masy m_1

$$I_{m_1} = I \left[\frac{m + m_1}{m} \left(\frac{T_{m_1}}{T} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5.19)$$

Wykorzystując metodę zawieszenia na trzech cięgnach można zatem wyznaczyć centralny moment bezwładności dowolnych, złożonych elementów i zespołów o dużych wymiarach i masie np. samolotu, nadwozia samochodu czy całego pojazdu. W takim przypadku, po wyznaczeniu położenia środka masy należy zawiesić badany zespół bezpośrednio na cięgnach pionowych zaczepionych na obwodzie koła o promieniu R . Następnie, wprowadzając układ w drgania skrętne, należy zmierzyć okres tych drgań. W dalszej kolejności, z zależności (5.17), wyznaczamy centralny masowy moment bezwładności.

5.3. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko badawcze przedstawione na rysunku 5.2, składa się z trzech cięgien (2) o jednakowej długości rozmieszczonych równomiernie na okręgu (3) koła o promieniu R . Do cięgien przymocowana jest tarcza kołowa (1) o promieniu R_1 i masie m . Na tarczy umieścić element, którego masowy moment bezwładności należy wyznaczyć. Środek masy badanej części powinien leżeć bezpośrednio nad środkiem tarczy. W przypadku obiektów o dużych wymiarach można zrezygnować z wykorzystania tarczy kołowej. W wyposażeniu stanowiska znajdują się: suwmiarka, przymiar liniowy i stoper.

5.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć wymiary tarczy i odczytać jej masę.
2. Zmierzyć promień R rozmieszczenia cięgien i ich długości l . Wyniki wpisać do Tabeli 5.1.
3. Wprowadzić tarczę w ruch drgający ($\varphi < 5^\circ$) i zmierzyć czas t 20-tu wahań. Pomiary powtórzyć dwa razy. Wyniki wpisać do Tabeli 5.2.
4. Ustawić na tarczy badaną masę m_1 , środek masy powinien leżeć dokładnie nad środkiem tarczy.
5. Zmierzyć trzy razy czas t_{m_1} 20-tu wahań badanego zespołu wraz z tarczą. Wyniki wpisać do Tabeli 5.2.
6. Ustawić na tarczy badaną masę m_2 dokładnie nad środkiem tarczy.
7. Zmierzyć trzy razy czas t_{m_2} 20-tu wahań zespołu z tarczą. Wyniki wpisać do Tabeli 5.2.

5.5. Opracowanie wyników

Obliczyć moment bezwładności tarczy ze wzoru (5.17). Na podstawie wymiarów obliczyć teoretyczny moment bezwładności tarczy I_t i porównać z analogiczną wielkością określoną doświadczalnie — I .

Obliczyć z zależności (5.19) moment bezwładności dla masy m_1 i masy m_2 wykonujących ruch drgający wraz z tarczą. Wyniki pomiarów zapisać w odpowiedniej tabeli — Tabela 5.3.

Tabela 5.1. Zestawienie danych do obliczeń

$m =$	[kg]	$R =$	[m]
$l =$	[m]	$R_1 =$	[m]

Tabela 5.2. Zestawienie wyników pomiarowych

Wielkość mierzona	Czas 20-tu wahań		Okres drgań T [s]
	Pomiary	średnia [s]	
t	1. [s]		
	2. [s]		
	3. [s]		
t_{m_1}	1. [s]		
	2. [s]		
	3. [s]		
t_{m_2}	1. [s]		
	2. [s]		
	3. [s]		

Tabela 5.3. Zestawienie wyników obliczeń

$I =$	[kg m ²]	$I_t =$	[kg m ²]
$I_{m_2} =$	[kg m ²]	$I_{m_1} =$	[kg m ²]

5.6. Wykonanie sprawozdania

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat stanowiska.
3. Wykorzystane wzory i obliczenia momentu bezwładności tarczy.
4. Tabele pomiarów i obliczeń.
5. Wnioski i uwagi.

Bibliografia

- [1] BUŁKA J., KRAMARZ H., PUCIŁOWSKI K., TELESIEWICZ T.: *Laboratorium mechaniki teoretycznej*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [2] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*, tom I i II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [3] RŻYSKO J.: *Statyka i Wytrzymałość Materiałów*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1971.
- [4] SZABELSKI K. — red.: *Ćwiczenia Laboratoryjne z Dynamiki Maszyn*. Lublin, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 1980.

Ćwiczenie 6

Wyznaczanie masowych momentów bezwładności elementów obrotowych na podstawie dynamicznych równań ruchu

6.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie masowych momentów bezwładności ciał mogących się obracać wokół nieruchomej osi na podstawie dynamicznych równań ruchu postępowego i obrotowego.

6.2. Podstawy teoretyczne

W celu zapewnienia równomiernej pracy maszyny stosuje się koła zamachowe. Koła takie mają duży moment bezwładności, który uzyskuje się rozmieszczając znaczną część masy w pobliżu zarysu koła (tj. z dala od osi obrotu). Wykonuje ono ruch obrotowy dookoła centralnej osi głównej, tak aby nie powstały reakcje dynamiczne.

Niech dane będzie koło zamachowe (1) na obwodzie którego nawinięto nieważkie i nierozciągliwe cięgno. Do cięgna tego przymocowano ciało o tak dobranej masie m_1 , aby nastąpiło jego opadanie, a tym samym jednoczesny obrót koła — Rysunek 6.1.

Przyjmując założenie, że występujące w układzie opory są stałe obserwowany ruch będzie ruchem jednostajnie zmiennym. Równanie ruchu obrotowego koła (1) wokół osi Oz będzie miało postać

$$I_z \varepsilon_1 = S_1 R - M_t, \quad (6.1)$$

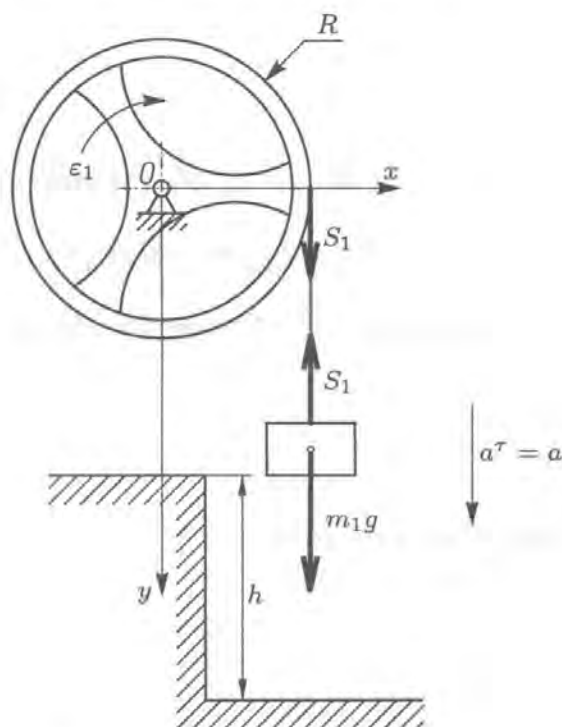
przy czym przyspieszenie styczne ruchu obrotowego

$$a^T = \varepsilon_1 R, \quad (6.2)$$

gdzie I_z — masowy moment bezwładności koła względem osi obrotu, ε_1 — przyspieszenie kątowe, S_1 — siła pochodząca od cięgna, M_t — moment tarcia w łożyskach (o nieznanej wartości).

Ciało (2) o masie m_1 porusza się ruchem prostoliniowym według równania

$$m_1 a = m_1 g - S_1, \quad (6.3)$$



Rys. 6.1. Ciało obracające się wokół osi poziomej

gdzie a — przyspieszenie liniowe ciała m_1 .

Zakładając, że ruch jednostajnie zmienny odbywa się bez prędkości początkowej i mierząc czas t_1 ruchu ciała m_1 na drodze h otrzymuje się

$$a = \frac{2h}{t_1^2},$$

$$S_1 = m_1 \left(g - \frac{2h}{t_1^2} \right). \quad (6.4)$$

Wykorzystując zależność między przyspieszeniem kątowym a przyspieszeniem w ruch postępowym (6.2) oraz warunek nierozciągłości nici ($a^\tau = a$) po podstawieniu do równania (6.1) otrzymuje się

$$I_z \frac{2h}{Rt_1^2} = S_1 R - M_t. \quad (6.5)$$

W równaniu tym wartość momentu tarcia M_t pozostaje nieznana. Przy małych oporach ruchu w łożyskach moment ten można pominąć. W przypadku znaczącej wartości M_t zaleca się uwzględnienie momentu tarcia przez zawieszenie na cięgnie innej masy m_2 , nieznacznie różniącej się od m_1 . Przyjmuje się przy tym założenie, że oba ciała o masach m_1 i m_2 wywołują praktycznie taki sam moment tarcia M_t .

A zatem dla ciała m_2 , analogicznie jak poprzednio, obowiązuje zależność

$$I_z \frac{2h}{Rt_2^2} = S_2 R - M_t, \quad (6.6)$$

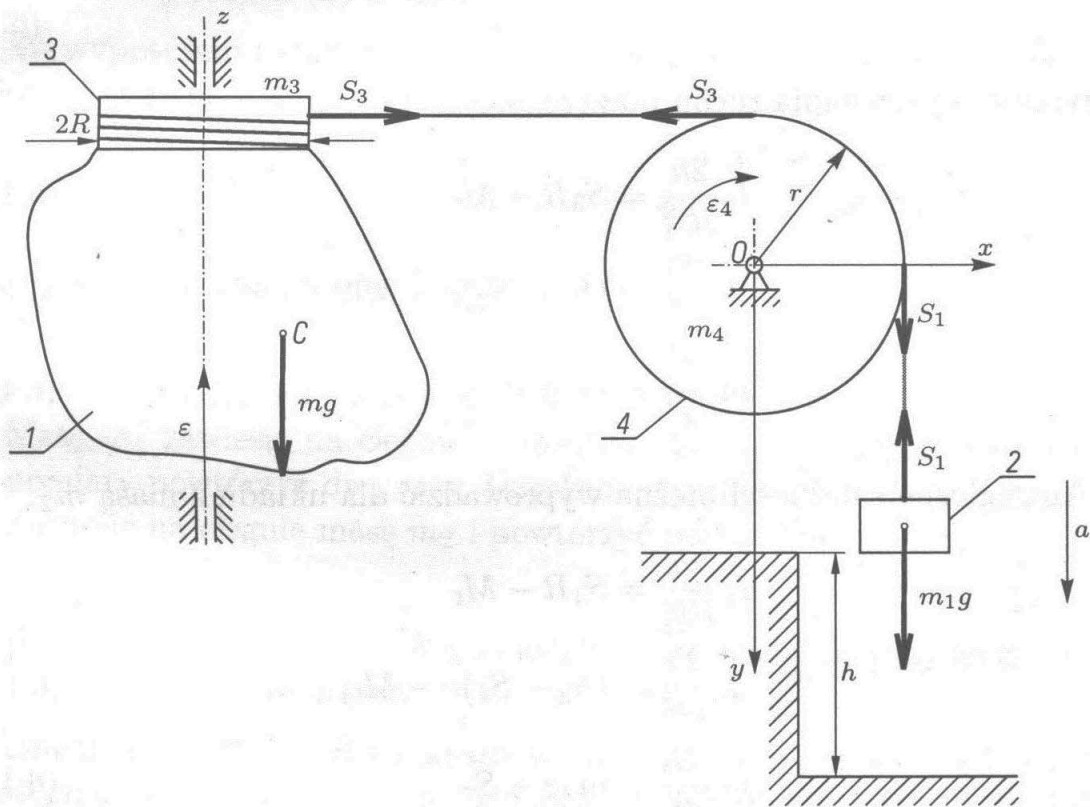
gdzie t_2 — czas ruchu masy m_2 , S_2 — siła pochodząca od ciężna.

Odejmując stronami równania (6.5) i (6.6) otrzymuje się zależność określającą masowy moment bezwładności koła

$$I_z = \frac{R^2}{2h} (S_1 - S_2) \frac{t_1^2 t_2^2}{t_2^2 - t_1^2}. \quad (6.7)$$

W podobny sposób można wyznaczyć masowe momenty bezwładności innych elementów obracających się wokół osi centralnej.

Chcąc wyznaczyć masowy moment bezwładności ciała wokół osi nie przechodzącej przez jego środek masy, wówczas, aby uniknąć wpływu położenia środka masy na ruch obrotowy, umożliwia się obrót tego ciała wokół danej osi, ale usytuowanej pionowo (Rysunek 6.2).



Rys. 6.2. Schemat układu z ciałem obracającym się wokół osi pionowej

W przypadku gdy badany element (1) nie posiada fragmentu o kształcie cylindrycznym, wówczas należy przymocować do ciała krążek (3) o masie

m_3 i znanym momencie I_3 (Rysunek 6.2). Przyjmując stałe opory ruchu, dla takiego układu otrzymuje się

$$I_z \varepsilon = S_3 R - M_t \quad (6.8)$$

gdzie

$$I_z = I_1 + I_3, \quad (6.9)$$

natomiast I_1 jest poszukiwanym momentem bezwładności elementu o kształcie nieregularnym.

Dla krążka o masie m_4 można zapisać

$$I_4 \varepsilon_4 = (S_1 - S_3)r - M_{t4}, \quad (6.10)$$

gdzie: I_4 — masowy moment bezwładności krążka (4) względem osi obrotu, S_3 i S_1 — siły pochodzące od cięgien, M_{t4} — moment tarcia.

Dla ciała (2) o masie m_1 równanie dynamiczne wyraża się podanym wcześniej wzorem (6.3).

Wykorzystując zależności (6.4) i fakt, że

$$\varepsilon R = \varepsilon_4 r \quad (6.11)$$

otrzymuje się równania ruchu poszczególnych elementów układu

$$I_z \frac{2h}{Rt_1^2} = S_3 R - M_t \quad (6.12a)$$

$$I_4 \frac{2h}{rt_1^2} = (S_1 - S_3)r - M_{t4} \quad (6.12b)$$

$$m_1 \frac{2h}{t_1^2} = m_1 g - S_1 \quad (6.12c)$$

Analogiczne zależności można wyprowadzić dla układu z masą m_2 :

$$I_z \frac{2h}{Rt_2^2} = S_4 R - M_t \quad (6.13a)$$

$$I_4 \frac{2h}{rt_2^2} = (S_2 - S_4)r - M_{t4} \quad (6.13b)$$

$$m_2 \frac{2h}{t_2^2} = m_2 g - S_2 \quad (6.13c)$$

W stosunku do zależności (6.12a)–(6.12c) w powyższych równaniach siłę S_1 zastąpiono siłą S_2 , a siłę S_3 siłą S_4 .

Dodając równania (6.12b) i (6.13b), a następnie wstawiając wartości sił S_3 i S_4 od cięgien wyznaczone z równań (6.12a) i (6.13a), otrzymujemy

$$I_z = (S_1 - S_2) \frac{R^2}{2h} \frac{t_1^2 t_2^2}{t_2^2 - t_1^2} - \frac{R^2}{r^2} I_4, \quad (6.14)$$

skąd można wyznaczyć poszukiwany moment bezwładności

$$I_1 = I_z - I_3. \quad (6.15)$$

6.3. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko badawcze przedstawione na rysunku 6.2 składa się z badanego ciała (1), krążka (4), cięgien oraz umieszczonego na końcu jednego z nich ciała (2) o masie m_1 lub m_2 . W przypadku badania elementów nie posiadających fragmentów cylindrycznych, cięgno nawijane jest na przykręcany do tego elementu krążek (3) o masie m_3 .

W wyposażeniu stanowiska znajdują się ponadto suwmiarka, przymiar liniowy i stoper.

6.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć promień koła R i wysokość h . Wyniki wstawić do Tabeli 6.1.
2. Masę m_1 zawiesić na cięgnie i zmierzyć czas t_1 jej ruchu na drodze h ; pomiary powtórzyć dwa razy. Uzyskane wyniki wpisać do Tabeli 6.2.
3. Zawiesić na cięgnie masę m_2 i powtórzyć poprzednie czynności.

W celu wyznaczenia masowego momentu bezwładności przy wykorzystaniu krążka o masie m_3 należy:

1. Zmierzyć promienie R i r krążków oraz wyznaczyć masy m_3 i m_4 . Następnie przymocować go do badanego ciała. Wyniki wpisać do Tabeli 6.3.
2. Zawiesić na cięgnie ciało o masie m_1 i zmierzyć czas t_1 ruchu na drodze h , pomiary powtórzyć jeszcze dwa razy.
3. Zawiesić na cięgnie masę m_2 i powtórzyć poprzednie czynności.
4. Wyniki pomiarów zapisać w Tabeli 6.4.

6.5. Opracowanie wyników

Obliczyć wielkość sił w cięgnie zgodnie z zależnościami

$$S_1 = m_1 \left(g - \frac{2h}{t_1^2} \right), \tag{6.16a}$$

$$S_2 = m_2 \left(g - \frac{2h}{t_2^2} \right). \tag{6.16b}$$

Wartości sił S_1 i S_2 porównać z ciężarami odpowiednich mas. Obliczyć centralny moment bezwładności ciała wzoru (6.7). Obliczyć masowe momenty bezwładności krążków (3) i (4). Obliczyć masowy moment bezwładności ciał o masach m_4 i m_3 oraz I_1 ze wzoru (6.14). Wyniki obliczeń wpisać w Tabeli 6.5.

6.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

- 1. Cel ćwiczenia.
- 2. Schemat stanowiska badawczego.
- 3. Wzory oraz obliczenia sił w cięgnach i momentów bezwładności.
- 4. Wzory oraz obliczenia na podstawie wymiarów obliczenia momentów bezwładności krążków.
- 5. Tabelę pomiarów i obliczeń.
- 6. Uwagi i wnioski.

Tabela 6.1. Dane pomiarowe

$R =$	[m]	$m_1 =$	[kg]
$h =$	[m]	$m_2 =$	[kg]

Tabela 6.2. Zestawienie wyników pomiarowych

Czas t_1	Siła S_1	Czas t_2	Siła S_2
1.		1.	
2.		2.	
3.		3.	
śr.		śr.	

Tabela 6.3. Dane pomiarowe

$m_1 =$	[kg]	$R =$	[m]
$m_3 =$	[kg]	$r =$	[m]
$m_4 =$	[kg]		

Tabela 6.4. Zestawienie wyników pomiarowych

Czas t_1	Siła S_1	Czas t_2	Siła S_2
1.		1.	
2.		2.	
3.		3.	
śr.		śr.	

Tabela 6.5. Obliczone wartości momentów bezwładności

$I_1 =$	[kg m ²]	$I_z =$	[kg m ²]
$I_3 =$	[kg m ²]		

Bibliografia

- [1] BUŁKA J., KRAMARZ H., PUCIŁOWSKI K., TELESIEWICZ T.: *Laboratorium mechaniki teoretycznej*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [2] LEYKÓ J.: *Mechanika ogólna*, tom I i II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [3] RŻYSKO J.: *Statyka i Wytrzymałość Materiałów*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1971.
- [4] SZABELSKI K. — red.: *Ćwiczenia Laboratoryjne z Dynamiki Maszyn*. Lublin, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 1980.

Ćwiczenie 7

Wyznaczanie sprawności śruby z wykorzystaniem zasady zachowania energii mechanicznej

7.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie sprawności śruby napędowej na podstawie zasady zachowania energii mechanicznej.

7.2. Podstawy teoretyczne

Sprawność gwintu η jako mechanizmu roboczego opisuje zależność

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} (\gamma + \rho')}, \quad (7.1)$$

gdzie γ — kąt pochylenia linii śrubowej, ρ' — pozorny kąt tarcia dany zależnością

$$\rho' = \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\cos \alpha_r}, \quad (7.2)$$

gdzie μ — współczynnik tarcia między powierzchniami gwintu śruby i nakrętki, α_r — kąt zarysu gwintu.

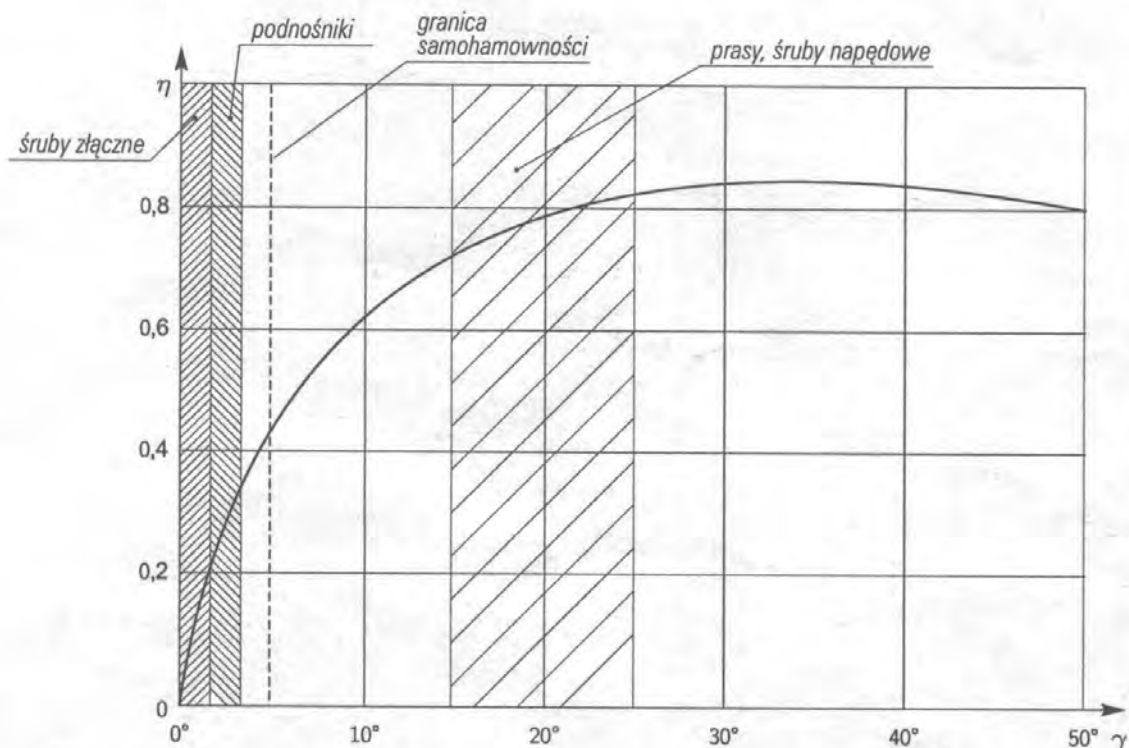
Sprawność gwintu w funkcji kąta pochylenia linii śrubowej γ w przypadku stalowej śruby i nakrętki przedstawia Rysunek 7.1.

Wyznaczenie sprawności gwintu z zależności (7.1) jest bardzo proste, ale jednocześnie mało dokładne, ponieważ nie uwzględnia wielu czynników związanych z rzeczywistą pracą gwintu, a jednocześnie trudnych do ujęcia analitycznego. Celowym jest więc określanie sprawności gwintów — a w szczególności gwintów napędowych — metodą doświadczalną.

Przyjmując, że para kinematyczna śruba-nakrętka stanowi ogniwo przekazujące energię, to zgodnie z ogólną definicją sprawności wynosi ona

$$\eta = \frac{E_u}{E_w}, \quad (7.3)$$

gdzie E_u — energia na wyjściu (użyteczna), E_w — energia na wejściu.



Rys. 7.1. Zależność sprawności gwintu od kąta pochylenia linii śrubowej

Schemat ideowy układu umożliwiającego obliczenie sprawności śruby na podstawie powyższej definicji pokazuje Rysunek 7.2.

Bryła o masie m_1 jest zawieszona na linkach przechodzących przez błočki i nawiniętych na śrubie tak, że opadanie ciężaru powoduje obrót i jednocześnie podnoszenie się śruby o łącznej masie $m_2 = m'_2 + m''_2$. Obniżenie masy m_1 o wartość H_1 powoduje jednocześnie podniesienie się śruby o wysokość H_2 i nadanie jej pewnej prędkości kątowej oraz liniowej. Możemy zatem zestawić bilans energii mechanicznej

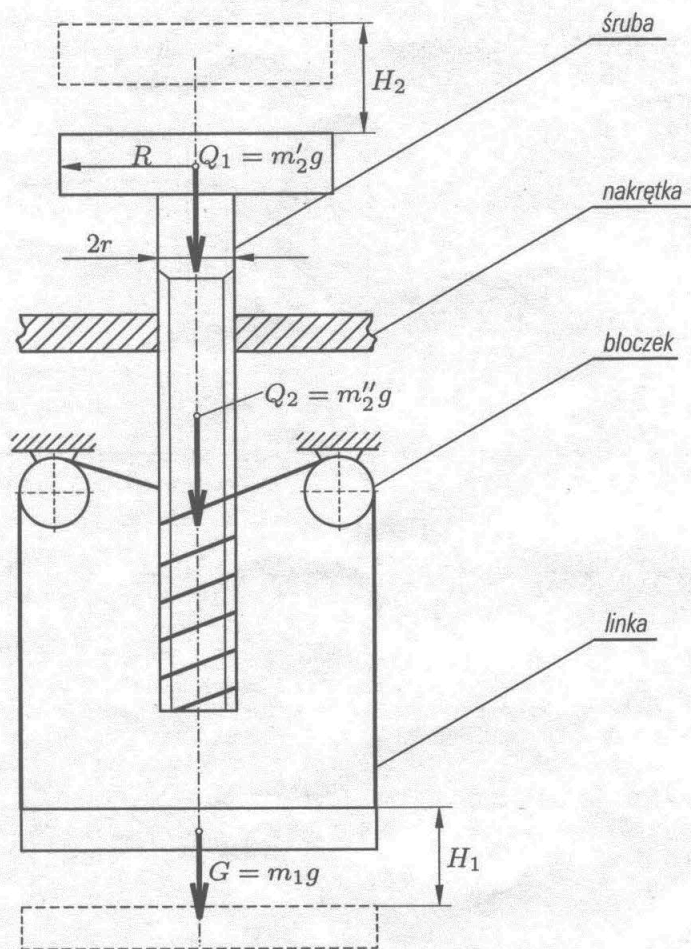
$$E_w = T + V_u + E_t = m_1 g H_1, \quad (7.4)$$

gdzie: E_w — energia na wejściu, T — łączna energia kinetyczna śruby i masy m'_2 , V_u — energia potencjalna śruby i masy m'_2 , E_t — energia rozpraszana przez układ (straty).

Energia użyteczną E_u będzie, w przypadku rozpatrywanego układu, suma energii potencjalnej i kinetycznej

$$E_u = T + V_u. \quad (7.5)$$

Energia stracona E_t zostaje zużyta na pokonanie oporów tarcia śruby o nakrętkę, na pokonanie oporów powietrza (tzw. tarcie wentylacyjne), oporów tarcia linki (na krążkach, śrubie oraz tarcie wewnętrzne), oporu tarcia krążków i przyrost ich energii kinetycznej itp.



Rys. 7.2. Schemat działania badanego mechanizmu śrubowego

Przyjmując, że udział wszystkich strat w porównaniu ze stratami związanymi z pokonaniem oporów tarcia między śrubą i nakrętką jest mały, sprawność śruby można wyrazić

$$\eta = \frac{E_u}{E_w} = \frac{T + V_u}{m_1 g H_1}. \quad (7.6)$$

Doświadczalne określenie sprawności śruby sprowadza się więc do wyznaczenia wielkości fizycznych T i V_u występujących we wzorze (7.6).

Zadanie to upraszcza przyjęcie założenia, że w danym zakresie prędkości opory tarcia nie zależą od prędkości. Wtedy ruch poszczególnych mas można uważać za jednostajnie przyspieszony.

Załóżmy, że ruch masy m_1 rozpoczyna się od prędkości $v = 0$. Wtedy wartości składowych energii użytecznej po czasie t , odpowiadającym obniżeniu się masy m_1 o H_1 i podniesieniu masy m_2 o H_2 , można wyrazić

następująco

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_1 \omega^2}{2} + \frac{I_2 \omega^2}{2}, \quad (7.7a)$$

$$V_u = m_2 g H_2 = m_2 g n h, \quad (7.7b)$$

gdzie:

— energia kinetyczna masy m_1

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{2} \left(\frac{2H_1}{t} \right)^2,$$

— energia kinetyczna śruby

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_1 \omega^2}{2} + \frac{I_2 \omega^2}{2} = \frac{m_2}{2} \left(\frac{2nh}{t} \right)^2 + \frac{m'_2}{2} \left(\frac{4\pi n}{t} \right)^2 \frac{R^2}{2} + \frac{I_2 \omega^2}{2},$$

przy czym n oznacza liczbę obrotów śruby do osiągnięcia wysokości H_2 , zaś h jest skokiem gwintu śruby.

Po podstawieniu powyższych zależności do (7.6) i po pominięciu członu z I_2 wobec faktu, że $I_2 \ll I_1$ (gdyż $m''_2 < m'_2$ i $r \ll R$), otrzymujemy wyrażenie na sprawność śruby

$$\eta = \frac{m_2 n h}{m_1 H_1} + \frac{2}{g t^2} \left(H_1 + \frac{m_2 n^2 h^2}{m_1 H_1} + 2\pi^2 \frac{m'_2 n^2 R^2}{m_1 H_1} \right), \quad (7.8)$$

którą możemy dodatkowo uprościć. Zachodzi bowiem

$$\frac{m_2 n^2 h^2}{m_1 H_1} \ll 2\pi^2 \frac{m'_2 n^2 R^2}{m_1 H_1}. \quad (7.9)$$

Ostatecznie więc sprawność śruby obliczać będziemy z zależności

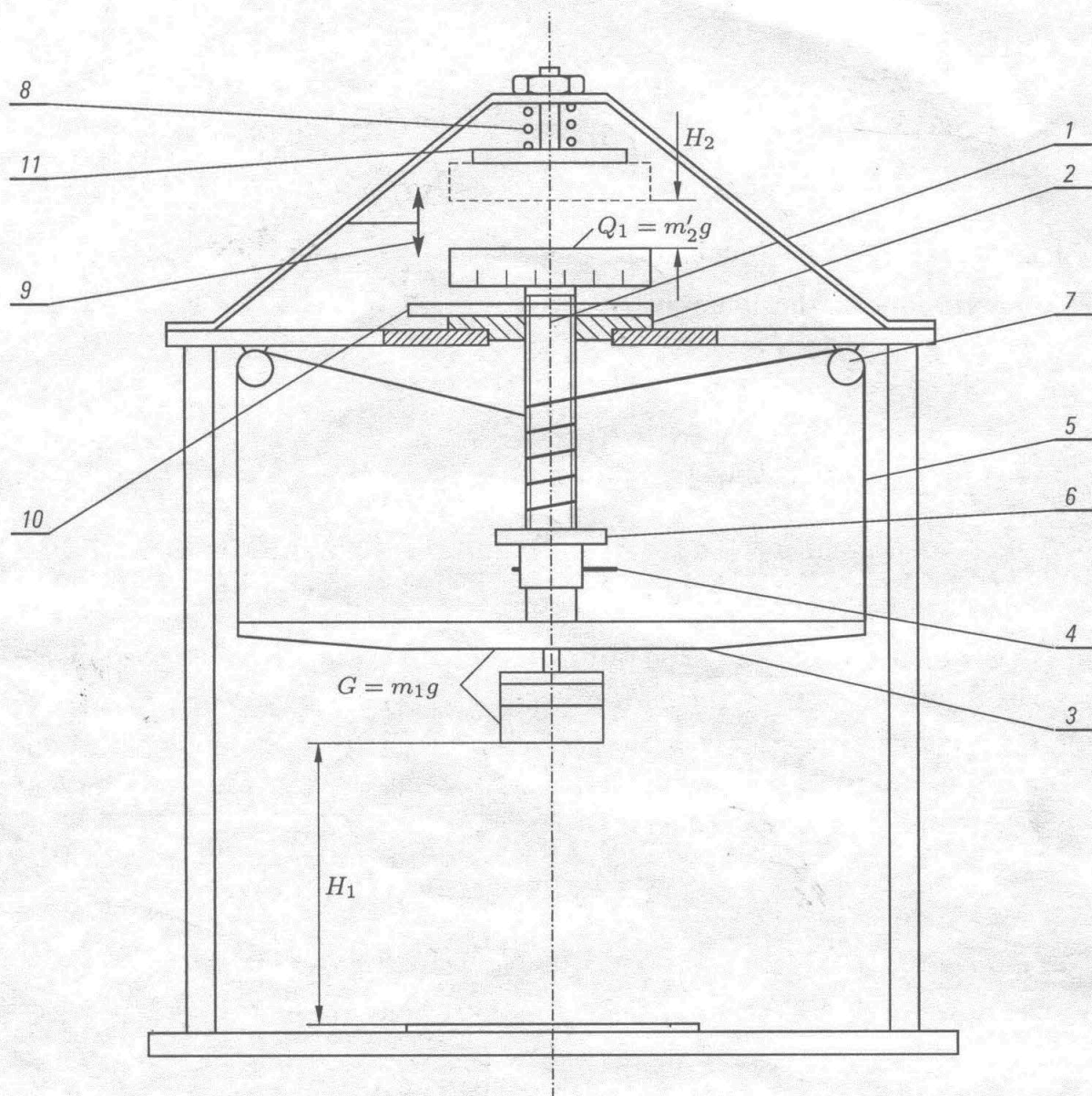
$$\eta = \frac{m_2 n h}{m_1 H_1} + \frac{2}{g t^2} \left(H_1 + 2\pi^2 \frac{m'_2 n^2 R^2}{m_1 H_1} \right). \quad (7.10)$$

Pomiar wielkości występujących we wzorze (7.10) nie nastręcza poważniejszych trudności.

7.3. Opis stanowiska badawczego

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawia Rysunek 7.3.

Badana śruba (1) współpracuje z nakrętką (2). Do dolnego końca śruby, za pomocą zawlecзки (4), przyczepiona jest belka (3). Wzdłuż rowków



Rys. 7.3. Schemat stanowiska pomiarowego

gwintu śruby dwuzwojnej nawinięte są dwie nici (5) przymocowane do niej w dolnej części za pomocą nakrętki (6). Nici schodzące ze śruby przerzucone są przez krążki (7) i przytwierdzone do belki (3).

Jeśli masa m_1 (łączna masa odważników, belki i szalki) jest dostatecznie duża, to wyjęcie zawlecзки (4) spowoduje opadnięcie ciężaru, a śruba pod działaniem napięć w niciach zacznie się obracać i podnosić do góry. Uderzenie masy m_1 o podłoże po przebyciu drogi H_1 i śruby o górny zderzak po przebyciu drogi H_2 łagodzi amortyzator (8). Pomiar liczby obrotów n ułatwia wskaźnik (9). Niezależne przesuwanie pionowe śruby umożliwia urządzenie regulacyjne (10) związane z nakrętką.

7.4. Przebieg ćwiczenia

Po zapoznaniu się ze stanowiskiem pomiarowym należy:

- Odczytać odczytaną na urządzeniu pomiarowym wielkość Q_1 .
- Zmierzyć skok śruby h , drogę H_1 i promień R .
- Określić liczbę n obrotów odpowiadającą przemieszczeniu się masy m_1 o H_1 .
- Dla każdej z trzech mas m'_1 , m''_1 i m'''_1 zmierzyć trzykrotnie czas t ich opuszczania się o H_1 .
- Wyniki pomiarów przedstawić prowadzącemu zajęcia.
- Uporządkować stanowisko badawcze.

7.5. Opracowanie wyników

Wielkości występujące w zależności (7.9) należy wpisać do Tabeli 7.1, a wyniki obliczeń należy zamieścić w Tabeli 7.2.

Tabela 7.1. Zestawienie danych do obliczeń

g	Q_1	Q_1/g	h	H_1	R	n
$[\text{ms}^{-2}]$	$[\text{N}]$	$[\text{kg}]$	$[\text{m}]$	$[\text{m}]$	$[\text{m}]$	$[-]$

Tabela 7.2. Zestawienie pomiarów i wyników obliczeń

Lp.	masa	T_1	T_2	T_3	T_{sr}	$\eta_{1,2,3}$
	$[\text{kg}]$	$[\text{s}]$	$[\text{s}]$	$[\text{s}]$	$[\text{s}]$	$[-]$
1	m'_1					
2	m''_1					
3	m'''_1					

7.6. Wykonanie sprawozdania

W opracowaniu należy podać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat stanowiska badawczego.

3. Definicję sprawności śruby w ujęciu energetycznym i ostateczny wzór na sprawność śruby ze szczególnym objaśnieniem występujących w nim wielkości.
4. Wyniki pomiarów i obliczeń w Tabelach 7.1 i 7.2.
5. Wnioski i uwagi.

Bibliografia

- [1] MORECKI A., TRZASKA S.: *Zajęcia dydaktyczne z mechanicznej teorii maszyn*. Warszawa, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Warszawskiej, 1961.
- [2] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*, t. II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [3] Praca zbiorowa: *Poradnik inżyniera. Mechanika*, t. II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1969.

Ćwiczenie 8

Wyważanie dynamiczne

8.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami wyważania dynamicznego elementów obrotowych — np. wirników.

8.2. Podstawy teoretyczne

Na wszystkie elementy m_i masy wirnika podczas ruchu obrotowego działają siły bezwładności (Rysunek 8.1) proporcjonalne do przyspieszeń środków ciężkości tych mas

$$F_{bi} = -m_i a_i. \quad (8.1)$$

Przy zmiennej prędkości kątowej wału przyspieszenia a_i posiadają składowe normalne i styczne

$$\bar{a}_i = \bar{a}_i^n + \bar{a}_i^\tau, \quad (8.2)$$

których wartości wynoszą odpowiednio

$$a_i^n = \omega^2 r_i \quad \text{oraz} \quad a_i^\tau = \varepsilon r_i. \quad (8.3)$$

Podobnie można zapisać dla sił bezwładności

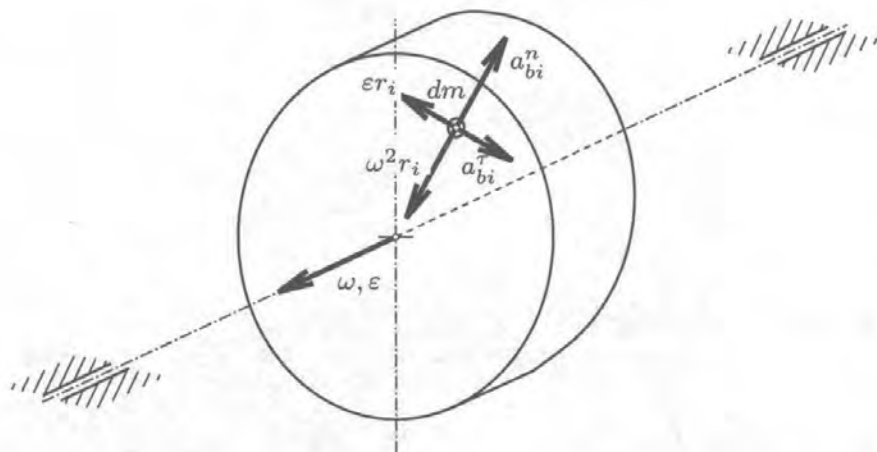
$$\bar{F}_{bi} = \bar{F}_{bi}^n + \bar{F}_{bi}^\tau \quad (8.4)$$

lub

$$\bar{F}_{bi} = -m_i \bar{r}_i \times (\bar{\omega}_{ri}^2 + \bar{\varepsilon}_{ri}), \quad (8.5)$$

gdzie ω i ε oznaczają odpowiednio prędkość i przyspieszenie kątowe wirnika, r_i zaś jest odległością środka masy m_i od osi obrotu wirnika.

Siły bezwładności działające na elementarne masy leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi wirnika i wirują razem z nim, powodując dodatkowe obciążenia łożysk i korpusu całej konstrukcji. Skutkiem tego są dodatkowe reakcje nazywane reakcjami dynamicznymi. Zakładany teoretycznie w konstrukcji wirników symetryczny rozkład masy względem osi obrotu zapewnia



Rys. 8.1. Siły bezwładności w ruchu obrotowym wirnika

równoważenie się sił bezwładności, lecz w praktyce rozkład ten nie może być zrealizowany w sposób idealny. Dlatego też, podczas ruchu obrotowego wirnika, występują w jego przekrojach siły bezwładności powodujące zginanie wału, na którym osadzony jest wirnik. Wpływ zginania wirnika może być pominięty tylko wówczas, gdy jego prędkość kątowa spełnia warunek $\omega \leq 0,5 \cdot \omega_{kr}$ (pojęcie prędkości krytycznej zostało wyjaśnione w ćwiczeniu nr 11, na stronie 86). W takim przypadku wirnik można bowiem uważać za sztywny — i taki przypadek jest analizowany w ćwiczeniu. Wobec założenia o sztywności wirnika przy analizie zagadnienia sił bezwładności można stosować zasady mechaniki ciała sztywnego.

Zgodnie z tymi zasadami siły bezwładności można zredukować do wektora głównego $\bar{F}_b$ oraz momentu głównego $\bar{M}_b$.

Tworząc rzuty elementarnych sił bezwładności na odpowiednie osie (Rysunek 8.2) uzyskuje się następujące zależności

$$\begin{aligned} dF_{bx} &= dF_b^n \cos \alpha + dF_b^\tau \sin \alpha = -(\omega^2 r \cos \alpha + \varepsilon r \sin \alpha) dm = \\ &= -(\omega^2 x + \varepsilon y) dm \end{aligned} \quad (8.6a)$$

$$\begin{aligned} dF_{by} &= dF_b^n \sin \alpha - dF_b^\tau \cos \alpha = -(\omega^2 r \sin \alpha - \varepsilon r \cos \alpha) dm = \\ &= -(\omega^2 y - \varepsilon x) dm. \end{aligned} \quad (8.6b)$$

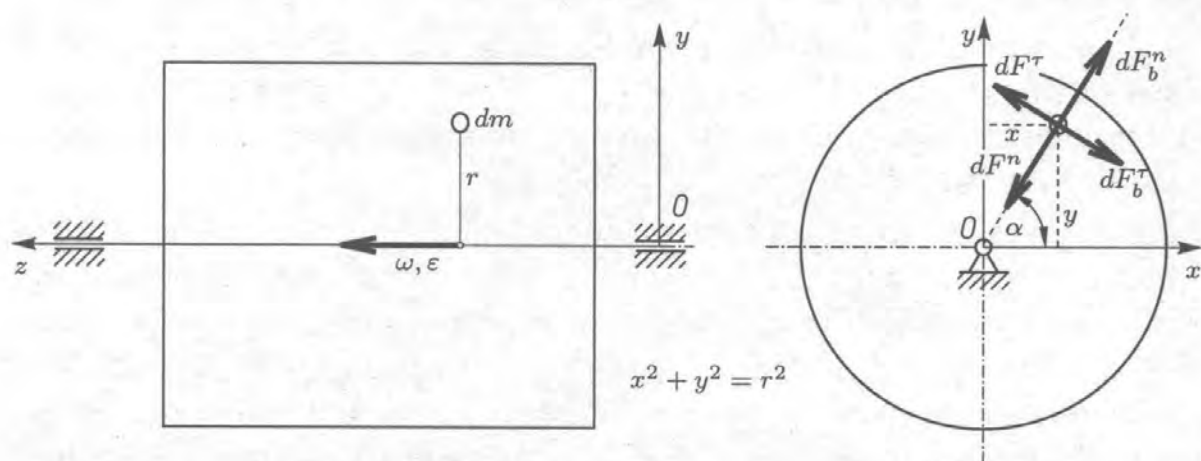
Po scałkowaniu składowe siły głównej bezwładności ostatecznie wynoszą

$$F_{bx} = - \int_m (\omega^2 x + \varepsilon y) dm = -(\omega^2 x_C + \varepsilon y_C) m, \quad (8.7a)$$

$$F_{by} = - \int_m (\omega^2 y - \varepsilon x) dm = -(\omega^2 y_C - \varepsilon x_C) m, \quad (8.7b)$$

gdzie x_C i y_C oznaczają współrzędne środka masy wirnika, natomiast m jego masę.

A zatem całkowita siła bezwładności równa jest sumie geometrycznej tych dwu wektorów — $\overline{F}_b = \overline{F}_{bx} + \overline{F}_{by}$.



Rys. 8.2. Siły czynne i siły bezwładności działające na element masy dm

Równania momentów sił względem osi układu współrzędnych przyjmują następujące postacie:

$$\begin{aligned} M_{bx} &= - \int_m dF_b^n \sin \alpha \cdot z + \int_m dF_b^\tau \cos \alpha \cdot z = - \int_m \omega^2 y z dm + \int_m \varepsilon x z dm = \\ &= -I_{yz} \omega^2 + I_{xz} \varepsilon, \end{aligned} \quad (8.8a)$$

$$\begin{aligned} M_{by} &= \int_m dF_b^n \cos \alpha \cdot z + \int_m dF_b^\tau \sin \alpha \cdot z = \int_m \omega^2 x z dm + \int_m \varepsilon y z dm = \\ &= I_{xz} \omega^2 + I_{yz} \varepsilon, \end{aligned} \quad (8.8b)$$

$$M_{bz} = - \int_m dF_b^\tau r = - \int_m \varepsilon r^2 dm = -I_z \varepsilon \quad (8.8c)$$

oraz wypadkowy moment główny

$$\overline{M}_b = \overline{M}_{bx} + \overline{M}_{by} + \overline{M}_{bz}, \quad (8.8d)$$

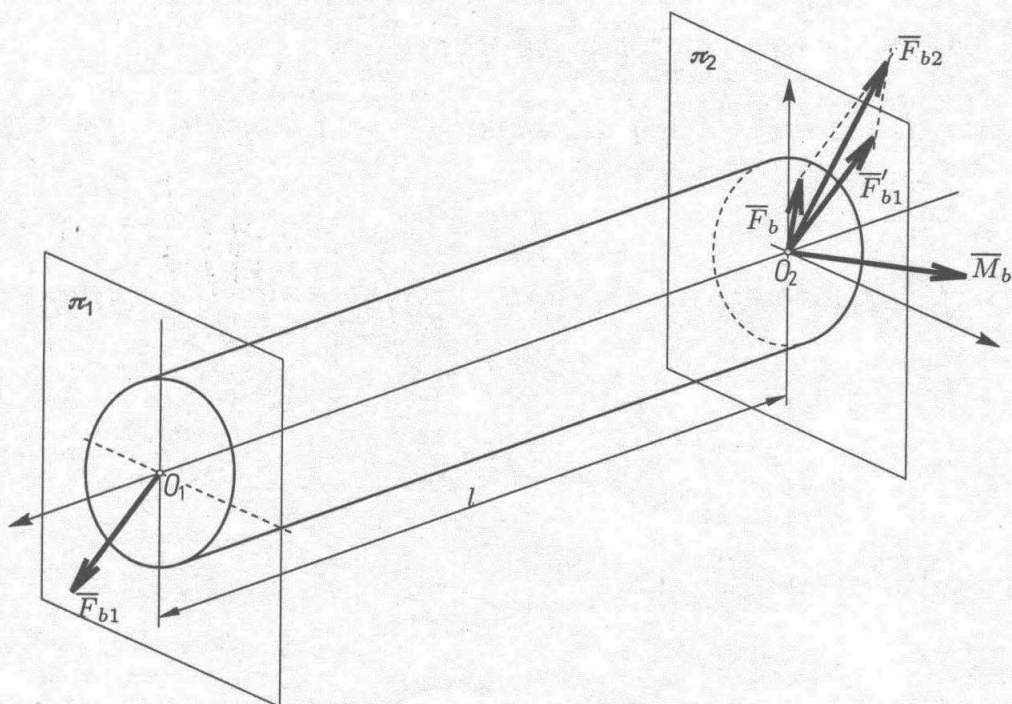
gdzie I_{xz} , I_{yz} — odśrodkowe masowe momenty bezwładności, I_z — masowy moment bezwładności wirnika względem osi obrotu.

Spośród powyższych wielkości tylko moment M_{bz} nie powoduje reakcji dynamicznych w łożyskach. Z analizy równań (8.7a)–(8.7b) i (8.8a)–(8.8b) wynika, że reakcje dynamiczne $\overline{F}_b$ i $\overline{M}_b$ równe są zero, gdy $x_C = 0$, $y_C = 0$ i $I_{xz} = I_{yz} = 0$ — tzn. gdy oś obrotu Oz jest jedną z głównych centralnych osi bezwładności ciała.

Ścisłe spełnienie tych warunków nie jest praktycznie możliwe ze względów technologicznych i montażowych, a niekiedy również i konstrukcyjnych. Dlatego w rzeczywistych układach konieczna jest korekta rozmieszczenia masy wirnika — czyli wyważanie, przy czym rozróżnia się wyważanie statyczne i wyważanie dynamiczne.

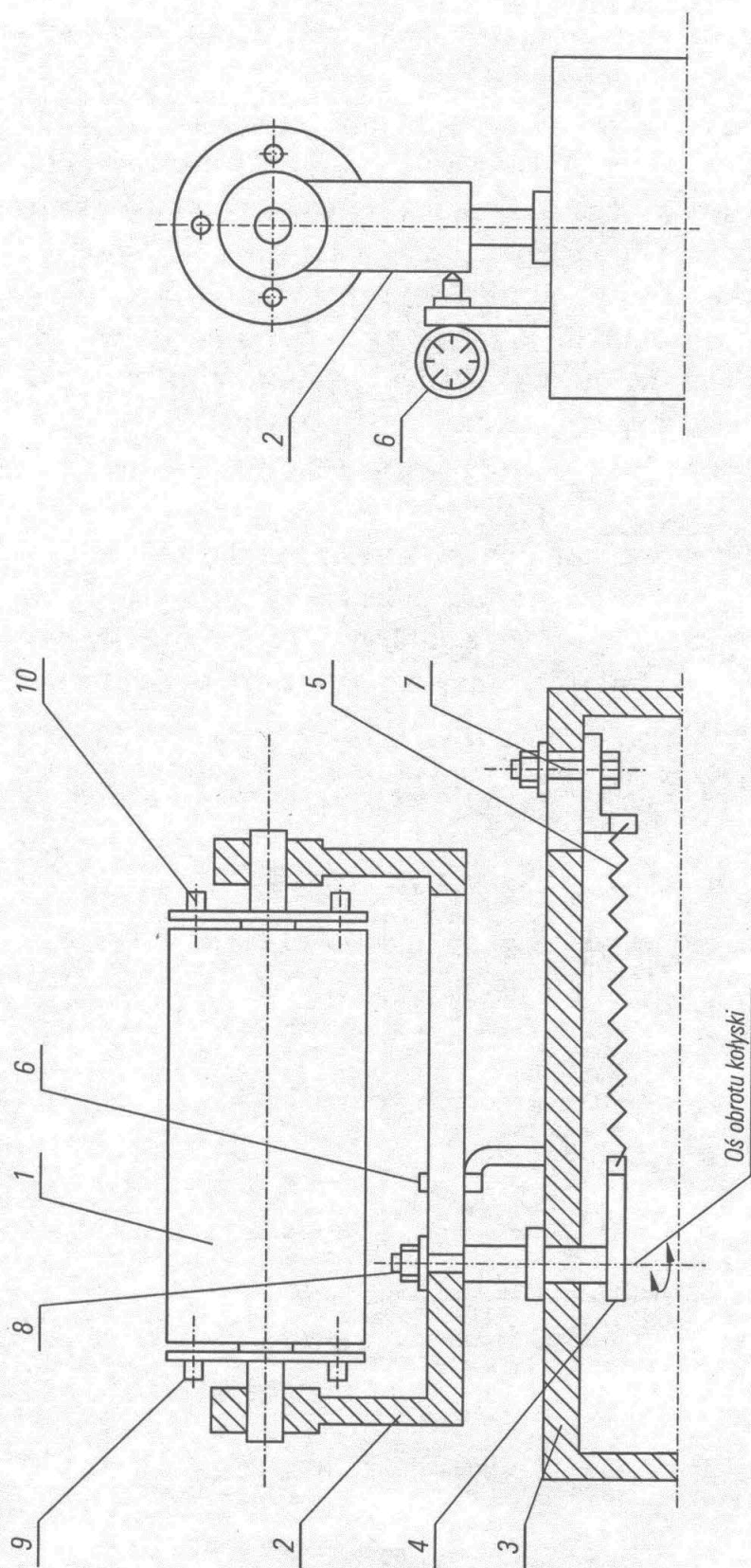
Zmiana rozmieszczenia masy wirnika mająca na celu jedynie sprowadzenie jego środka masy na oś obrotu ($x_C = y_C = 0$), nazywa się wyważaniem statycznym. Zadaniem tej operacji jest zatem zrównoważenie wektora głównego sił bezwładności.

Zmiana rozmieszczenia masy, w wyniku której oś obrotu stanie się jedną z głównych osi bezwładności ciała, nazywa się wyważaniem dynamicznym. Zadaniem wyważania dynamicznego jest więc zrównoważenie wektora głównego $\vec{F}_b$ i momentu głównego $\vec{M}_b$. Dla wirnika wyważonego dynamicznie spełnione są zależności $x_C = y_C = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$, a zatem przy stałej prędkości obrotowej ω będzie on również wyważony w dowolnym ruchu obrotowym. Dlatego też wyważanie należy przeprowadzać przy stałej prędkości kątowej wirnika — tzn. wówczas, gdy siły bezwładności są skierowane tylko promieniowo (nie ma składowych stycznych).



Rys. 8.3. Redukcja układu sił

Najdogodniej jest zredukować wektory główne $\vec{F}_b$ i $\vec{M}_b$ do dwóch sił skośnych $\vec{F}_{b1}$ i $\vec{F}_{b2}$ leżących w płaszczyznach π_1 i π_2 , nazwanych dalej płaszczyznami korekcji — patrz Rysunek 8.3



Rys. 8.4. Schemat stanowiska laboratoryjnego: (1) — wirnik, (2) — kołyska, (3) — podstawa, (4) — dźwignia, (5) — sprężyna, (6) — czujnik, (7) — śruba naciągu sprężyny, (8) — śruba mocująca, (9, 10) — trzpienie gwintowane

$$F_{b1} = F'_{b1} = \frac{M_b}{l}, \quad \bar{F}_{b2} = \bar{F}_b + \bar{F}_{b1}. \quad (8.9)$$

W płaszczyznach korekcji π_1 i π_2 otrzymuje się wówczas odpowiednio siły F_{b1} i F_{b2} nazwane wektorami niewyważenia.

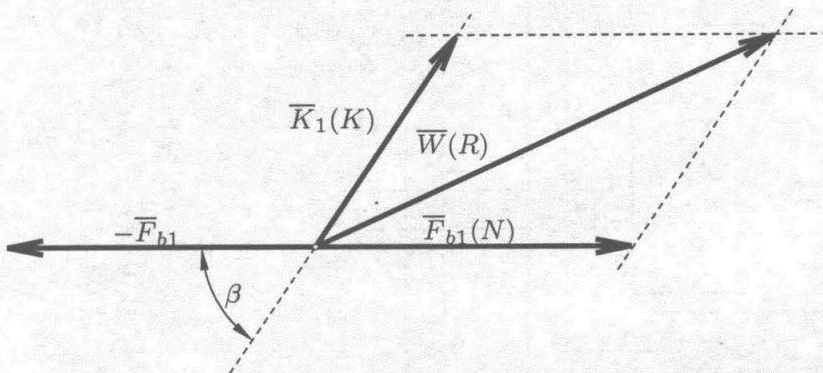
Wyważenie wirnika należy przeprowadzać w pobliżu rezonansu, tzn. gdy częstość drgań wymuszających jest bliska częstości drgań własnych układu. Amplituda drgań osiąga wówczas dużą wartość, co przy stałej wartości prędkości kątowej ω umożliwia odczyt i porównanie wartości amplitud drgań. Rozpoczynając wyważanie np. od płaszczyzny π_1 , oś obrotu kołyski O_2 będzie znajdować się w płaszczyźnie π_2 . Z tego to powodu, wyważanie w płaszczyźnie π_1 nie ma wpływu na wyważanie w płaszczyźnie π_2 i odwrotnie. Mocując masę korekcyjną m_{k1} na trzpieniu otrzymuje się siłę odśrodkową wywołaną obrotem tej masy wokół osi wirnika, nazwaną dalej siłą korekcyjną K_1 .

W ćwiczeniu (Rysunek 8.4) wszystkie masy korekcyjne można zamocować w jednakowej odległości $r = \text{const.}$, równej odległości trzpieni (9) i (10) od osi obrotu. Jeżeli na wyważarce zostanie zamocowany niewyważony wirnik, wówczas siły odśrodkowe wywołają w układzie wirnik-kołyska-sprężyna drgania wokół osi obrotu kołyski.

Siła wywołująca drgania oraz siła korekcyjna powstała po założeniu masy m_{k1} wynoszą odpowiednio

$$F_{b1} = m_1 \omega^2 r, \quad K_1 = m_{k1} \omega^2 r. \quad (8.10)$$

Wartości tych sił są stałe, ale ich kierunki wirują wokół osi Oz . Tak więc rzuty tych sił na płaszczyzny Oxz i Oyz są okresowo zmienne, a zatem okresowo zmienna jest też ich wypadkowa W — Rysunek 8.5.



Rys. 8.5. Zależność między wektorami K , W i F_{b1}

Niech więc R , N , K oznaczają odpowiednio amplitudy wektorów sił W , F_{b1} , K_1 . Amplitudę N mierzy się czujnikiem zegarowym (6) w chwili rezonansu wirnika. Podobnie wyznacza się amplitudę R po przymocowaniu masy

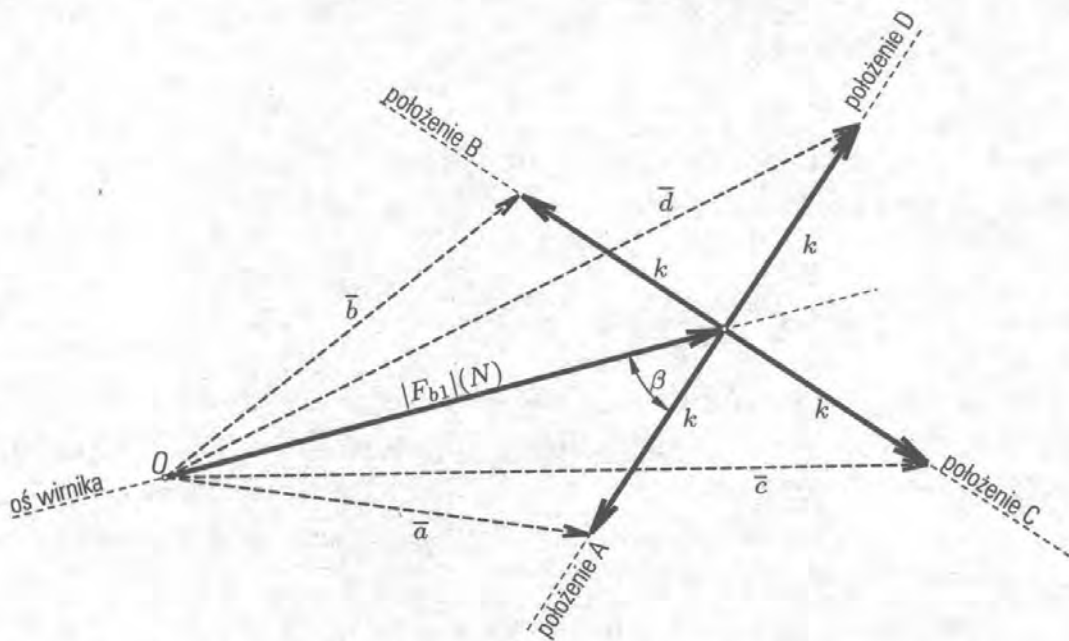
korekcyjnej m_{k1} . Amplitudę K można byłoby zmierzyć posiadając idealnie wyważony wirnik po umieszczeniu na nim znanej masy m_{k1} . Jednakże brak takiego wirnika uniemożliwia bezpośrednie zmierzenie amplitudy K . Wektor $(\overline{F}_{b1})$ przedstawia optymalne położenie określone kątem wektora korygującego. Wobec przyjętej proporcjonalności wektorów $\overline{W}$, $\overline{F}_{b1}$, $\overline{K}$ odpowiednio do amplitud R , N , K zachodzi związek

$$R^2 = N^2 + K^2 + 2NK \cos \beta. \quad (8.11)$$

Dzieląc powyższe równanie przez N^2 i oznaczając $R/N = e$ oraz $K/N = k$, otrzymuje się

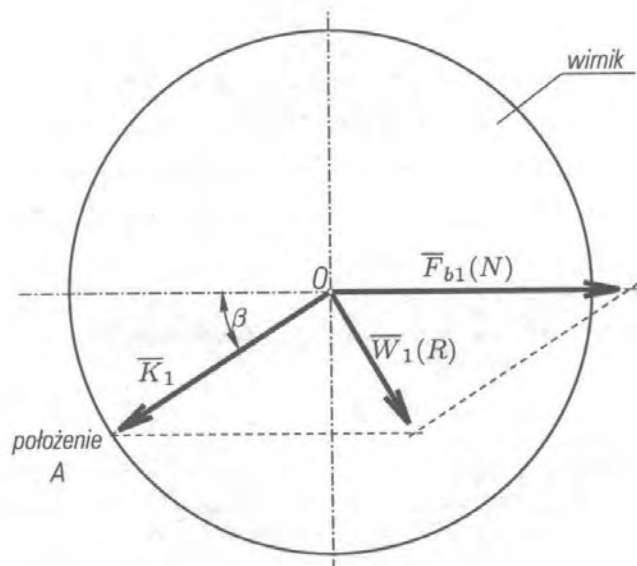
$$e^2 = 1 + k^2 + 2k \cos \beta. \quad (8.12)$$

W powyższej zależności wielkości k i β są nieznane. W celu ich wyznaczenia najpierw dokonuje się pomiaru amplitudy N wirnika. Po przykręceniu dowolnej masy korekcyjnej, kolejno w czterech położeniach usytuowanych względem siebie co $\pi/2$, mierzy się amplitudy R_1, R_2, R_3, R_4 . Dzięki temu uzyskuje się układ równań pozwalający na wyznaczenie wartości k i β . Obliczając $R_1/N = e_1$, $R_2/N = e_2$, $R_3/N = e_3$ i $R_4/N = e_4$ porządkuje się je następnie ze względu na wartości zgodnie z nierównością $a \leq b \leq c \leq d$, gdzie a, b, c i d są odpowiednimi wartościami e_i ($i = 1, 2, 3, 4$).



Rys. 8.6. Siły działające podczas wyważania wirnika

Przyjmuje się, że położenie odpowiadające stosunkowi a jest najbliższe wektora korygującego $\overline{F}_{b1}$ (Rysunek 8.6). Wektor ten leży więc między położeniem A i B. Dla ilustracji jeden z możliwych układów wektorów dla położenia A przedstawiono na rys. 8.7.



Rys. 8.7. Przykładowe położenie wektorów $\bar{K}$, $\bar{W}$, $\bar{F}_{b1}$

Na podstawie zależności (8.12) otrzymuje się układ równań

$$\begin{aligned} a^2 &= 1 + k^2 - 2k \cos \beta, \\ b^2 &= 1 + k^2 - 2k \sin \beta, \\ c^2 &= 1 + k^2 + 2k \sin \beta, \\ d^2 &= 1 + k^2 + 2k \cos \beta. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Wartość k można więc obliczyć na podstawie dwu z powyższych czterech zależności. Przykładowo uzyskuje się następujące zależności

$$k = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - 1} \quad \text{lub} \quad k = \sqrt{\frac{a^2 + d^2}{2} - 1}. \quad (8.14)$$

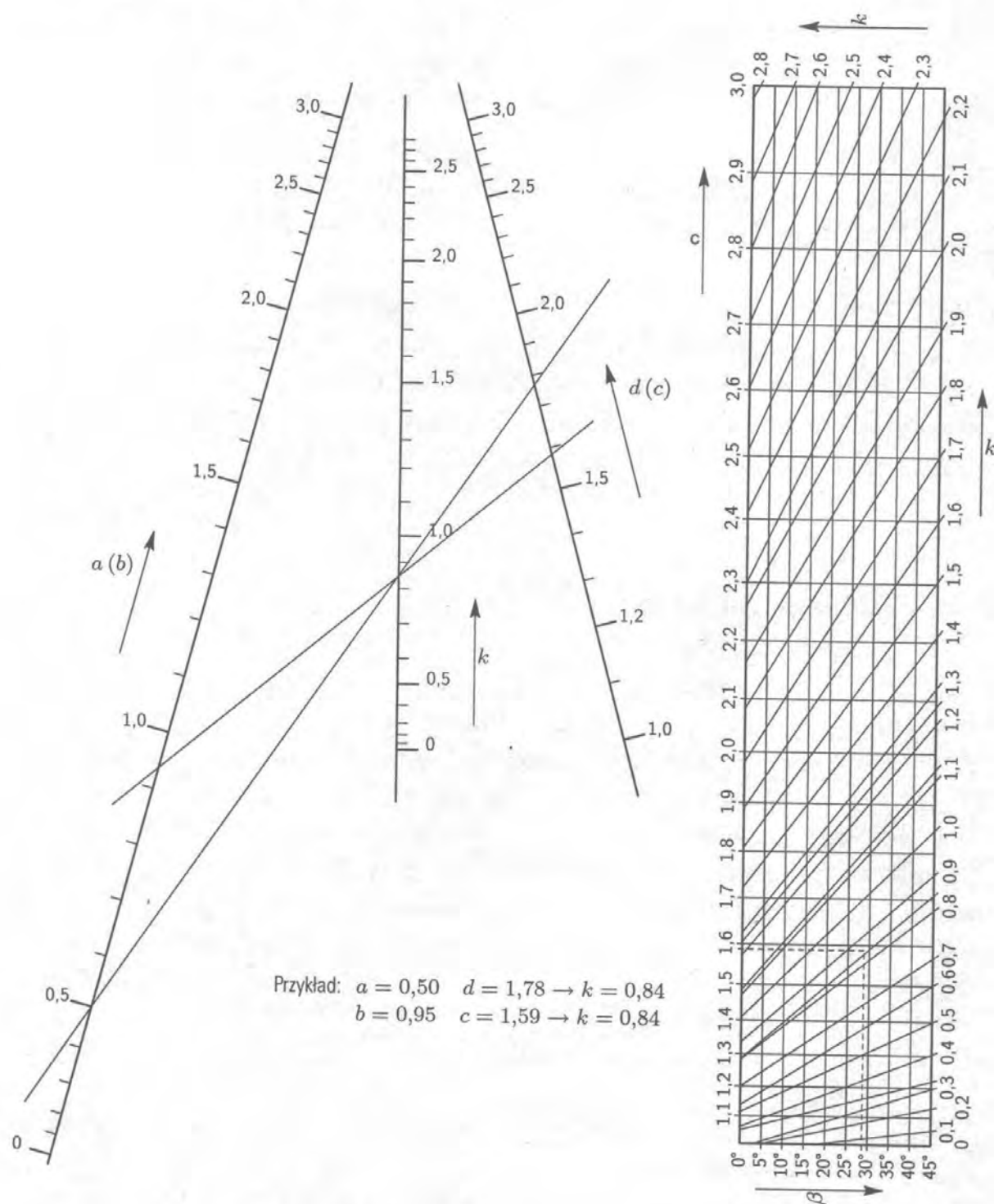
Obie wartości k powinny być bliskie siebie. Przyjmując wartość średnią można uzyskać większą dokładność pomiaru. Duża różnica pomiędzy wartościami k świadczy o błędach w obliczeniach lub pomiarach. W takim przypadku należy powtórzyć ćwiczenie. Kąt β oblicza się z wyrażenia

$$\sin \beta = \frac{c^2 - k^2 - 1}{2k} \quad \text{lub} \quad \cos \beta = \frac{d^2 - k^2 - 1}{2k}. \quad (8.15)$$

Wykorzystując k wyznacza się optymalną masę korygującą

$$m_{opt} = \frac{m_k}{k}. \quad (8.16)$$

Ponieważ wartości mas są proporcjonalne do amplitud i zachodzi związek $kN = K$, dlatego k i β można bezpośrednio odczytać z nomogramu przedstawionego na rysunku 8.8.

Rys. 8.8. Nomogram do wyznaczania wartości k

8.3. Opis stanowiska badawczego

Wirnik (1) (Rysunek 8.4) może obracać się w łożyskach kołyski (2), której zamocowanie pozwala na jej ruch obrotowy wokół pionowej osi. Dźwignia (4), za pomocą sprężyny (5) utrzymuje kołyskę w położeniu równowagi

stałej. Zmieniając naciąg sprężyny (5) przez obrót śruby (7) powoduje się zmianę częstości drgań własnych układu wirnik-kołyska-sprężyna. Jest to użyteczne, gdy występuje konieczność wyważenia różnych wirników na jednej wyważarce.

Wychylenie kołyski odczytywane jest czujnikiem (6), natomiast położenie jej względem własnej osi obrotu można zmieniać przez zluźnienie nakrętki śruby mocującej (8) i przesunięcie kołyski. Umożliwia to ustawianie pionowej osi obrotu kołyski w jednej z płaszczyzn korekcji.

Masa korekcyjna nakręcana jest na gwintowany trzpień (9) lub (10), przymocowany do obrotowego ramienia. Dzięki temu możliwa jest zmiana kąta jej położenia. Wartości kątów położenia ramienia obrotowego określa się wg podziałki znajdującej się na wirniku.

8.4. Przebieg ćwiczenia

1. Ustawić kołyskę wyważarki w takim położeniu, aby jej oś obrotu leżała w jednej z płaszczyzn korekcji π_1 lub π_2 .
2. Wprawić wirnik bez masy korekcyjnej w ruch obrotowy i zmierzyć amplitudę N z dokładnością do 1-ej dziesiątki wskazań czujnika.
3. Umocować masę korekcyjną na trzpieniu oraz zmierzyć wartość amplitudy K dla czterech położzeń w zakresie kąta 2π .
4. Obliczyć e_i i uszeregować wartości w kolejności niemalejącej.
5. Obliczyć lub odczytać z nomogramu wartość k . Jeżeli punkty przecięcia prostych z osią k nomogramu są odległe o więcej niż 5 mm, pomiary należy powtórzyć.
6. Obliczyć lub odczytać wartość β .
7. Obliczyć masę optymalną m_{opt} .
8. Umieścić m_{opt} w położeniu wyznaczonym przez kąt β , odmierzony od położenia A w kierunku B .
9. Sprawdzić wyważenie przez pomiar amplitudy wirnika z założoną masą optymalną.
10. Wyniki zapisać w Tabeli 8.1.
11. Powtórzyć czynności dla drugiej płaszczyzny korekcji i wyniki zapisać w Tabeli 8.2.
12. Sprawdzić wyważenie przy ustawieniu wirnika tak, aby żadna z płaszczyzn korekcji nie zgadzała się z osią obrotu kołyski.
13. Sporządzić krzywą wzorcowania wirnika. Dla wyważonego wirnika, zmierzyć amplitudy drgań dla różnych wartości masy m umieszczonej w jednym miejscu płaszczyzny korekcyjnej.

8.5. Opracowanie wyników

Wyniki pomiarów i obliczeń zamieścić w Tabelach 8.1 i 8.2. Sporządzić krzywą wzorcowania wirnika.

Tabela 8.1. Zestawienie wyników dla płaszczyzny korekcji π_1

$N_1 =$	[m]	$N_2 =$	[m]	N_{sr}	[m]	$m_k =$	[kg]
$\alpha_1 =$	[°]	$\alpha_2 =$	[°]	$\alpha_3 =$	[°]	$\alpha_4 =$	[°]
$R_1 =$	[m]	$R_2 =$	[m]	$R_3 =$	[m]	$R_4 =$	[m]
$R_{1sr} =$	[m]	$R_{2sr} =$	[m]	$R_{3sr} =$	[m]	$R_{4sr} =$	[m]
$e_1 =$		$e_2 =$		$e_3 =$		$e_4 =$	
$a \leq b \leq c \leq d \quad (R_a \leq R_b \leq R_c \leq R_d)$							
$k_1 =$	[-]	$k_2 =$	[-]	k_{sr}			[-]
$\beta_o =$			[°]	$m_{opt} =$			[kg]
Amplituda wirnika z optymalną masą $R_{opt} =$							[m]

Tabela 8.2. Zestawienie wyników dla płaszczyzny korekcji π_2

$N_1 =$	[m]	$N_2 =$	[m]	N_{sr}	[m]	$m_k =$	[kg]
$\alpha_1 =$	[°]	$\alpha_2 =$	[°]	$\alpha_3 =$	[°]	$\alpha_4 =$	[°]
$R_1 =$	[m]	$R_2 =$	[m]	$R_3 =$	[m]	$R_4 =$	[m]
$R_{1sr} =$	[m]	$R_{2sr} =$	[m]	$R_{3sr} =$	[m]	$R_{4sr} =$	[m]
$e_1 =$		$e_2 =$		$e_3 =$		$e_4 =$	
$a \leq b \leq c \leq d \quad (R_a \leq R_b \leq R_c \leq R_d)$							
$k_1 =$	[-]	$k_2 =$	[-]	k_{sr}			[-]
$\beta_o =$			[°]	$m_{opt} =$			[kg]
Amplituda wirnika z optymalną masą $R_{opt} =$							[m]

8.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy zamieścić:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat stanowiska.
3. Tablice pomiarów i obliczeń.
4. Krzywą wzorcowania wirnika.
5. Uwagi i wnioski.

Bibliografia

- [1] MORECKI A., TRZASKA S.: *Zajęcia dydaktyczne z mechanicznej teorii maszyn*. Warszawa, PWNiT, 1964.
- [2] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*, t. II. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1978.
- [3] ZIEMBA S.: *Analiza drgań*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1957.

Ćwiczenie 9

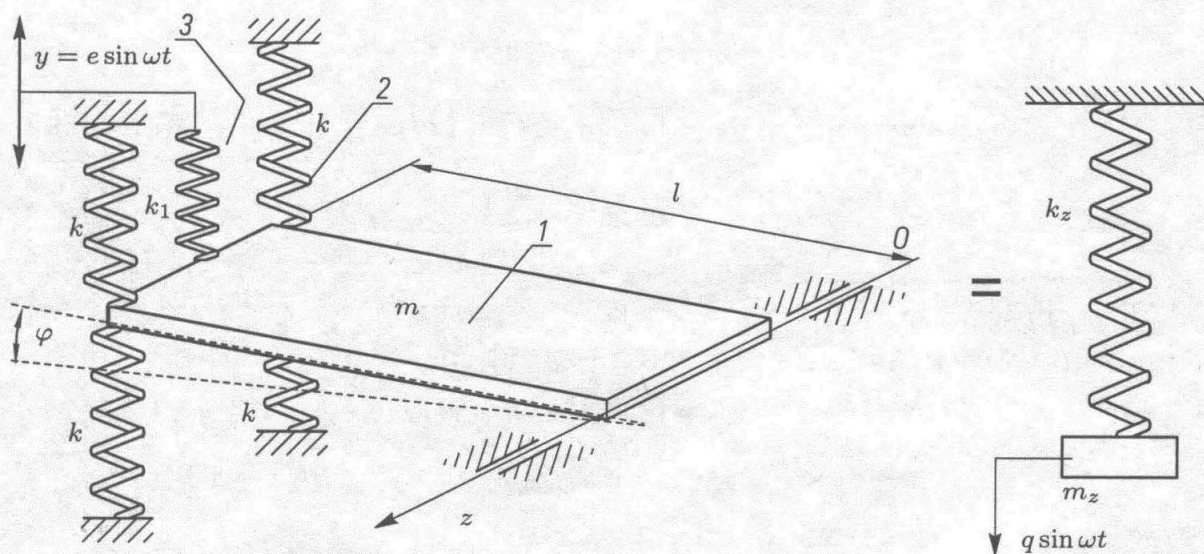
Drgania wymuszone układu o jednym stopniu swobody

9.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie częstości drgań własnych układu o jednym stopniu swobody i jego charakterystyki amplitudowo-częstościowej przy wymuszeniu kinematycznym.

9.2. Podstawy teoretyczne

Stanowisko do pomiaru drgań wymuszonych (Rysunek 9.1) składa się ze sztywnej płyty (1) o masie m zamocowanej przegubowo wzdłuż osi Oz i połączonej z czterema sprężynami (2) o sztywności k każda oraz z jedną sprężyną (3) o sztywności k_1 . Zakładamy, że płyta jest idealnie sztywna, a masy sprężyn są pomijalnie małe. Dlatego rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody.



Rys. 9.1. Schemat układu mechanicznego

Układ poddany jest wymuszeniu kinematycznemu poprzez sprężynę (3), której górny koniec wykonuje ruch harmoniczny opisany równaniem

$$y = e \sin \omega t. \quad (9.1)$$

Ruch taki jest wywoływany poprzez wzbudnik złożony z wiertarki, której prędkość kątowna wynosi ω . Jako współrzędną uogólnioną do dalszych rozważań przyjęto kąt φ . Wówczas energia kinetyczna układu wynosi

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2, \quad (9.2)$$

gdzie $I_z = ml^2/3$ jest masowym momentem bezwładności płyty względem osi obrotu Oz . Energia potencjalna układu jest sumą energii sprężystości wszystkich sprężyn i wynosi

$$V = 4\frac{1}{2}k(\varphi l)^2 + \frac{1}{2}k_1(\varphi l - y)^2. \quad (9.3)$$

W zapisie tym przyjmujemy, że energia potencjalna płyty pochodząca od siły ciężkości jest równoważona przez energię wstępnego napięcia sprężyn utrzymujących płytę w poziomym położeniu równowagi statycznej.

Równanie różniczkowe ruchu drgającego płyty można wyprowadzić korzystając z równania Lagrange'a II rodzaju w postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.4)$$

Obliczając odpowiednie pochodne energii i podstawiając je do równania (9.4) otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu

$$I_z \ddot{\varphi} + \varphi l^2(4k + k_1) = k_1 l e \sin \omega t. \quad (9.5)$$

Wstawiając wyrażenie na moment bezwładności $I_z = ml^2/3$ otrzymano

$$\ddot{\varphi} + \varphi \frac{3(4k + k_1)}{m} = \frac{3k_1 e}{ml} \sin \omega t. \quad (9.6)$$

Po wprowadzeniu masy zastępczej m_z i sztywności zastępczej k_z oraz amplitudy siły wymuszającej q zgodnie z zależnościami

$$m_z = \frac{m}{3}, \quad k_z = 4k + k_1, \quad q = \frac{3k_1 e}{ml} \quad (9.7)$$

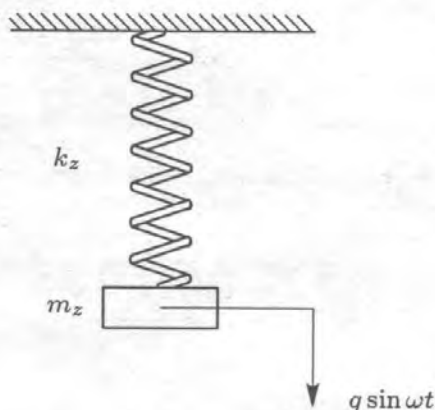
częstość drgań własnych ω_0 układu wynosi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3(4k + k_1)}{m}} = \sqrt{\frac{k_z}{m_z}}. \quad (9.8)$$

Równanie różniczkowe drgań wymuszonych przyjmuje postać

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = q \sin \omega t. \quad (9.9)$$

W tej sytuacji rozpatrywany układ można sprowadzić do prostego modelu zastępczego przedstawionego na Rysunku 9.2.



Rys. 9.2. Model zastępczy

Rozwiązaniem szczególnym równania (9.9) jest funkcja

$$\varphi = A \sin \omega t. \quad (9.10)$$

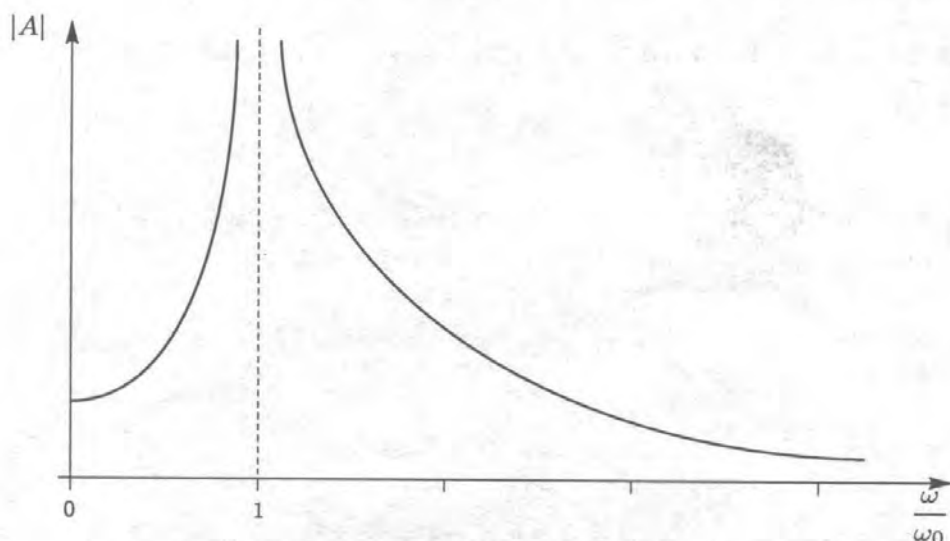
Podstawiając rozwiązanie (9.10) do równania (9.9) uzyskano kinematyczne równanie ruchu w postaci

$$\varphi = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (9.11)$$

gdzie amplituda drgań

$$A = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{k_1 e}{l(4k + k_1)} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (9.12)$$

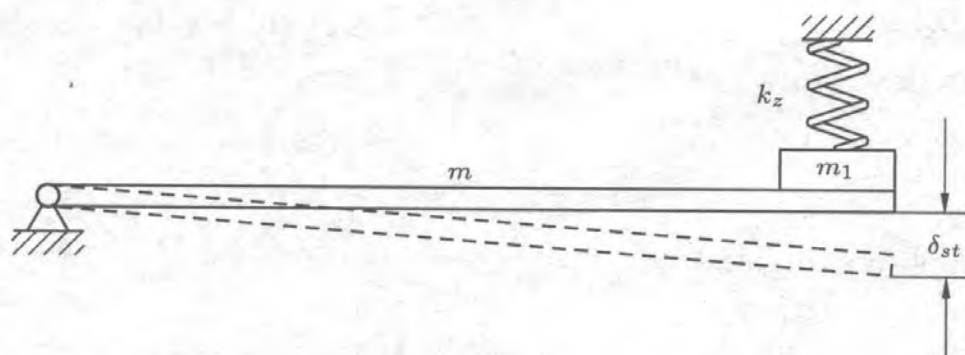
Wyrażenie $\xi = 1/[1 - (\omega/\omega_0)^2]$ nosi nazwę współczynnika wzmocnienia amplitudy lub współczynnika dynamicznego i zależy od stosunku ω/ω_0 . Zaś wyrażenie $\lambda_{st} = k_1 e/[l(4k + k_1)]$ jest statycznym odkształceniem układu wywołanym siłą $k_1 e$. Zależność amplitudy drgań A od stosunku częstości wymuszenia do częstości drgań własnych ω/ω_0 przedstawiona została na Rysunku 9.3. Zależność ta jest nazywana charakterystyką amplitudowo-częstościową. Zjawisko rezonansu wystąpi gdy $\omega = \omega_0$ — wówczas amplituda drgań wzrasta teoretycznie do nieskończoności. W praktyce najczęściej jednak — wskutek tarcia i innych oporów w układzie — amplituda w chwili rezonansu przyjmuje skończone wartości.



Rys. 9.3. Charakterystyka amplitudowo-częstościowa

Gdy układ pomiarowy zostanie obciążony dodatkowym ciałem o masie m_1 i umieszczonym na lewym końcu rozważanej płyty (Rysunek 9.4) wtedy wywoła ono ugięcie statyczne sprężyn δ_{st} . Wówczas sztywność zastępczą sprężyn można wyznaczyć z zależności

$$k_z = \frac{m_1 g}{\delta_{st}}. \quad (9.13)$$



Rys. 9.4. Schemat pomiaru statycznego ugięcia

Podstawiając tak wyznaczoną sztywność zastępczą do równania (9.8) otrzymano wyrażenie na częstość drgań własnych układu w postaci

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3m_1 g}{m \delta_{st}}}. \quad (9.14)$$

W ten sposób, korzystając z dodatkowego obciążenia m_1 umieszczonego na końcu płyty i mierząc ugięcie statyczne δ_{st} wywołane tą masą, można wyznaczyć częstość drgań własnych układu.

9.3. Opis stanowiska badawczego

Układ drgający (Rysunek 9.1) składa się ze sztywnej płyty (1) o masie m zamocowanej przegubowo wzdłuż osi Oz i zawieszanej na czterech sprężynach (2) o sztywności k każda oraz jednej sprężynie (3) o sztywności k_1 , której to drugi (górny) koniec wykonuje ruch harmoniczny o amplitudzie e opisany równaniem (9.1). Ruch ten wywoływany jest za pomocą wzbudnika (wiertarki), którego prędkość kątową ω można regulować zmieniając za pomocą autotransformatora napięcie zasilające. Do pomiaru prędkości obrotowej n wzbudnika służy tachometr. Pomiar amplitudy drgań przeprowadza się przy pomocy czujnika umieszczonego na sztywnej płycie (1).

9.4. Przebieg ćwiczenia

1. Uzyskać od prowadzącego zajęcia dane dotyczące badanego układu i wpisać je do Tabeli 9.1. Powyższe informacje podane są również w instrukcji do ćwiczenia znajdującej się przy stanowisku pomiarowym.
2. Dokonać koniecznych pomiarów geometrycznych układu.
3. Wyznaczyć doświadczalnie sztywność zastępczą k_z (9.13) i obliczyć na tej podstawie częstość drgań własnych ω_0 (9.14). W tym celu należy umieścić ciało o masie m_1 na krawędzi płyty (Rysunek 9.4) i zmierzyć statyczne ugięcie δ_{st} końca płyty.
4. Dla podanych w instrukcji (lub przez prowadzącego) prędkości obrotowych n wzbudnika przeprowadzić pomiar amplitud drgań A . Rejestracji dokonać przy zwiększaniu i zmniejszaniu prędkości obrotowej.

9.5. Opracowanie wyników

1. Wyniki pomiarów i obliczeń wpisać do Tabeli 9.1.
2. Obliczyć na podstawie równania (9.8) teoretyczną częstość drgań własnych.
3. Obliczyć sztywność zastępczą układu z pomiarów, wg równania (9.13).

Tabela 9.1. Zestawienie danych i obliczeń wymaganych do realizacji ćwiczenia

$k =$	[N/m]	$m =$	[kg]	$l =$	[m]
$k_1 =$	[N/m]	$m_1 =$	[kg]	$\delta_{st} =$	[mm]
$k_z =$	[N/m]				
$\omega_{0teoret.} =$	[rad/s]	$\omega_{0teoret} =$	[obr/min]	$\omega_{0dosw} =$	[obr/min]

4. Obliczyć doświadczalną częstość drgań własnych układu stosując równanie (9.14).
5. Sporządzić wykres amplitudy drgań A w funkcji ilorazu ω/ω_0 — tj. charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową.

Tabela 9.2. Dane do charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej

Nr pomiaru [—]	n [obr/min]	ω [rad/s]	ω/ω_0 [—]	A [mm]
1				
2				
3				
4				
5				
6				

9.6. Wykonanie sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać

1. Tabelę informacyjną.
2. Cel ćwiczenia.
3. Schemat badanego układu.
4. Podstawowe wzory i obliczenia.
5. Tabelę pomiarów i wyników obliczeń (Tabela 9.1 i 9.2).
6. Wykres $A = f(\omega/\omega_0)$.
7. Wnioski i uwagi.

Bibliografia

- [1] OSIŃSKI Z.: *Teoria drgań*. Warszawa, PWN, 1980.
- [2] AWREJCWICZ J.: *Drgania deterministyczne układów dyskretnych*. Warszawa, WNT, 1996.
- [3] <http://neur.am.put.poznan.pl/dm/dm.htm> (1.IX.2006).

Ćwiczenie 10

Eliminator drgań

10.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie zasady działania prostych eliminatorów drgań mechanicznych oraz dobór parametrów takiego eliminatora.

10.2. Podstawy teoretyczne

Zmienne siły działające na maszyny lub ich zespoły mogą być przyczyną niebezpiecznych drgań, szczególnie intensywnych w pobliżu rezonansu. W celu uniknięcia niepożądanych drgań należy tak dobierać masę i sztywność elementów, by ich częstotliwości drgań własnych nie pokrywały się z częstotliwościami wymuszenia. Jednakże uniknięcie pracy w pobliżu częstotliwości rezonansowych nie zawsze jest możliwe. W tych przypadkach należy stosować eliminatory drgań, których zadaniem jest całkowita eliminacja lub też ograniczenie drgań maszyny w przypadku, gdy pobudzana jest ona z pewną stałą częstotliwością. Efekt ten można uzyskać przez włączenie do układu drgającego, składającego się z masy m_1 i sztywności k_1 , dodatkowej masy m_2 i sprężyny o sztywności k_2 stanowiących eliminator. Parametry eliminatora należy dobrać tak, aby częstotliwość jego drgań własnych ω_{0e} była równa częstotliwości siły wymuszającej $F_0 \sin \omega t$.

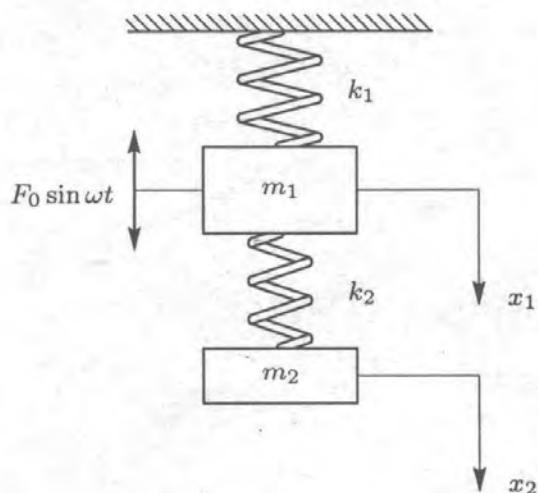
Model układu drgającego i eliminatora rozważanego w niniejszym ćwiczeniu przedstawia Rysunek 10.1. Układ równań różniczkowych ruchu przyjmuje postać

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin \omega t, \quad (10.1a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0. \quad (10.1b)$$

Rozwiązaniami szczególnymi powyższego układu równań są funkcje

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin \omega t. \quad (10.2)$$



Rys. 10.1. Układ drgający z eliminatorem

Po podstawieniu funkcji (10.2) do równań (10.1a) i (10.1b) oraz podzieleniu przez $\sin \omega t$ otrzymuje się

$$\left(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2\right) A_1 - k_2 A_2 = F_0, \quad (10.3a)$$

$$-k_2 A_1 + \left(-m_2\omega^2 + k_2\right) A_2 = 0. \quad (10.3b)$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń: $F_0/k_1 = \lambda_{st}$ — ugięcie statyczne układu drgającego pod wpływem siły F_0 , $k_2/m_2 = \omega_{0e}^2$ — częstość drgań własnych eliminatora oraz $k_1/m_1 = \omega_{01}^2$ — częstość drgań własnych układu głównego (tj. bez eliminatora) zależności (10.3a) i (10.3b) można zapisać w postaci

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}\right) A_1 - \frac{k_2}{k_1} A_2 = \lambda_{st}, \quad (10.4a)$$

$$A_1 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_{0e}^2} - 1\right) A_2 = 0. \quad (10.4b)$$

Rozwiązując powyższy układ równań względem niewiadomych A_1 i A_2 otrzymuje się następujące zależności

$$\frac{A_1}{\lambda_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0e}^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0e}^2}\right) \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}}, \quad (10.5a)$$

$$\frac{A_2}{\lambda_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0e}^2}\right) \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}}. \quad (10.5b)$$

Analizując równanie (10.5a) można zauważyć, że drgania układu głównego zanikają (amplituda $A_1 = 0$), gdy licznik $(1 - \omega^2/\omega_{0e}^2)$ równa się zeru — co ma miejsce, gdy $\omega = \omega_{0e}$. Oznacza to, że drgania masy m_1 zostaną całkowicie wyeliminowane, gdy częstość drgań własnych eliminatora będzie równa częstości siły wymuszającej.

W tej sytuacji — na podstawie związków (10.2) i (10.5b) — masa eliminatora m_2 wykonywać będzie ruch wg zależności

$$x_2 = A_2 \sin \omega t = -\frac{F_0}{k_2} \sin \omega t, \quad (10.6)$$

gdzie $A_2 = -F_0/k_2 = -(k_1/k_2)\lambda_{st}$.

Widać więc, że siła w sprężynie eliminatora wynosi $-F_0 \sin \omega t$, czyli jest równa co do wartości sile wymuszającej i przeciwnie do niej skierowana.

Wprowadzenie do układu podstawowego tłumika dynamicznego zmienia liczbę stopni swobody tego układu, a zatem i liczbę jego częstości drgań własnych. Wraz z eliminatorem układ podstawowy (Rysunek 10.1) ma dwa stopnie swobody. Chcąc wyznaczyć częstości drgań własnych tego układu należy pominąć działanie siły wymuszającej. Wtedy z równań (10.3a) i (10.3b) otrzymujemy

$$(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) A_1 - k_2 A_2 = 0, \quad (10.7a)$$

$$-k_2 A_1 + (-m_2\omega^2 + k_2) A_2 = 0. \quad (10.7b)$$

Równania te, po wprowadzeniu podanych wcześniej oznaczeń, można przedstawić w postaci

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}\right) A_1 - \frac{k_2}{k_1} A_2 = 0, \quad (10.8a)$$

$$A_1 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_{0e}^2} - 1\right) A_2 = 0. \quad (10.8b)$$

Niezerowe rozwiązania powyższego układu istnieją tylko wtedy, gdy zeruje się jego wyznacznik charakterystyczny, a zatem jeśli spełniona jest zależność

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}\right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_{0e}^2} - 1\right) + \frac{k_2}{k_1} = 0. \quad (10.9)$$

Po wykonaniu mnożenia i uporządkowaniu wyrażeń powyższe równanie można zapisać

$$\omega^4 - \left(\omega_{0e}^2 + \omega_{01}^2 + \frac{k_2}{k_1}\omega_{01}^2\right) \omega^2 + \omega_{0e}^2\omega_{01}^2 = 0. \quad (10.10)$$

Poszukiwane częstości drgań własnych układu ω_{0s} są pierwiastkami powyższego równania dwukwadratowego

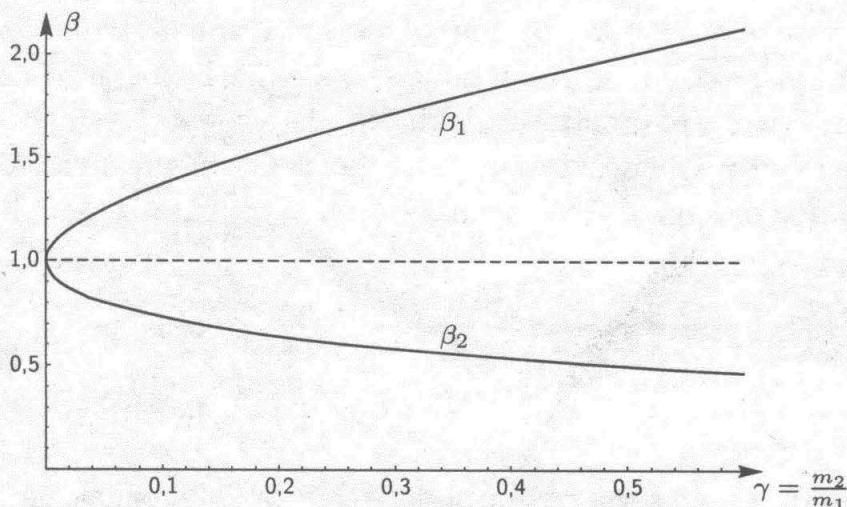
$$\omega_{0s1,2}^2 = \frac{1}{2} [\omega_{01}^2 + (1 + \gamma) \omega_{0e}^2] \pm \sqrt{\frac{1}{4} [\omega_{01}^2 + (1 + \gamma) \omega_{0e}^2]^2 - \omega_{01}^2 \omega_{0e}^2} \quad (10.11)$$

gdzie parametr γ jest ilorazem masy m_2 i masy m_1 ($\gamma = m_2/m_1$).

Wprowadzając uproszczenie $\omega_{01}^2 = \omega_{0e}^2$ powyższą zależność można zapisać w postaci

$$\omega_{0s1,2}^2 = \omega_{01}^2 \left(1 + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\gamma + \frac{\gamma^2}{4}} \right). \quad (10.12)$$

Graficzna interpretacja powyższej zależności została przedstawiona na Rysunku 10.2.



Rys. 10.2. Wykres zależności $\beta_{1,2} = \omega_{0s1,2}^2/\omega_{01}^2$ w funkcji parametru $\gamma = m_2/m_1$ dla warunku $\omega_{01} = \omega_{0e}$

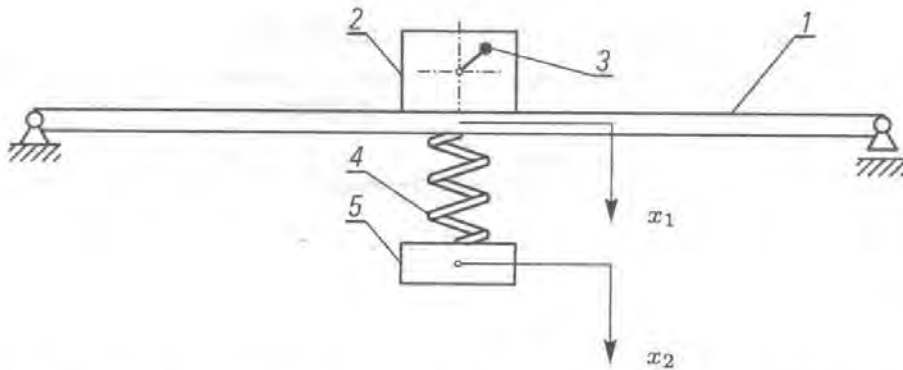
Podsumowując dotychczasowe rozważania można zatem stwierdzić, że wprowadzenie do układu drgającego eliminatora powoduje „rozdwojenie” częstości drgań własnych. Wielkość rozsunięcia dwu powstałych częstości zależy od stosunku masy eliminatora do masy podstawowej γ .

Jeśli częstość wymuszająca zmienia się w pewnym zakresie w pobliżu jednej z wartości częstości własnych $\omega_{0s1,2}$ układu (praca w zakresie około-rezonansowym), to powyższy eliminator nietłumiony może być nieprzydatny. Związane jest to faktem, że dla uzyskania odpowiedniego rozsunięcia częstości własnych poza zakres eksploatacyjnych wartości ω należałoby stosować eliminator o dużej masie i sztywności. W takich wypadkach stosuje się eliminatory z tłumieniem, gdyż po wprowadzeniu tłumienia amplituda drgań wymuszonych układu podstawowego będzie ograniczona dla wszystkich wartości częstości wymuszenia ω .

10.3. Opis stanowiska badawczego

Główny układ drgający (Rysunek 10.3) stanowi sprężysta belka (1) o sztywności $k_1 = 48EJ/l^3$, zamocowana przegubowo, na której umieszczono obciążenie (2) z wirującą niewyważoną masą (3), napędzaną paskiem klinowym przez silnik elektryczny. Regulacja prędkości obrotowej silnika odbywa się w sposób płynny, przez zmianę oporu w układzie wzbudzenia. Umieszczony na stanowisku miernik pozwala na odczytywanie liczby obrotów masy (3) w jednostce czasu. Do belki przymocowana jest sprężyna (4), na której zawieszona jest masa eliminatora (5).

W wyposażeniu stanowiska znajdują się: suwmiarka, przymiar liniowy oraz stroboskop.



Rys. 10.3. Schemat stanowiska laboratoryjnego do badania eliminatorów drgań

10.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć wymiary belki.
2. Włączyć silnik elektryczny i pokręcając gałką opornika zwiększać stopniowo prędkość obrotową silnika, obserwując przy tym drgania belki.
3. Odczytać prędkość obrotową w momencie gwałtownego wzrostu amplitudy drgań belki (tj. przy rezonansie).
4. Czynności powyższe powtórzyć dwa razy.
5. Dla danej częstości siły wymuszającej układu głównego oraz założonej sztywności eliminatora k_2 obliczyć masę m_2 potrzebną do eliminacji drgań.
6. Wprowadzić masę eliminatora i sprawdzić jego działanie.
7. Zbadać działanie eliminatora przy założonej masie $m_3 \neq m_2$.
8. Wyniki pomiarów i obliczeń zamieścić w Tabeli 10.1.

Tabela 10.1. Zestawienie danych do obliczeń

Belka			
$b =$	[m]	$E =$	[N/m ²]
$h =$	[m]	$J =$	[m ⁴]
$l =$	[m]	$k_1 =$	[N/m]
$n_1 =$	[obr/min]		
$n_2 =$	[obr/min]	$n_{sr} =$	[obr/min]
$n_3 =$	[obr/min]		$\omega_{01} =$ [rad/s]
Eliminator:		$m_2 =$	[kg]
			$k_2 =$ [N/m]
Belka + eliminator:		$m_1 =$	[kg]

Tabela 10.2. Zestawienie wyników pomiarowych

Nr pomiaru [-]	n_i [obr/min]	n_{sr} [obr/min]	ω_1 [rad/s]
1			
2			
3			

10.5. Wykonanie sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat stanowiska z objaśnieniami.
3. Wzory oraz obliczenia sztywności belki i sprężyn eliminatora.
4. Tabele pomiarów i obliczeń.
5. Wnioski i uwagi.

Bibliografia

- [1] PISZCZEK K., WALCZAK J.: *Drgania w budowie maszyn*. Warszawa, PWN, 1978.
- [2] DEN HARTOG J.P.: *Drgania mechaniczne*. Warszawa, PWN, 1971.
- [3] GIERGIEL J.: *Drgania układów mechanicznych*. Kraków, Uniwersyteckie Wydawnictwa Naukowo-dydaktyczne, 2000.
- [4] GIERGIEL J.: *Tłumienie drgań mechanicznych*. Warszawa, PWN, 1990.

Ćwiczenie 11

Wyznaczanie prędkości krytycznych wału

11.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości krytycznych wału na drodze obliczeniowej i doświadczalnej.

11.2. Podstawy teoretyczne

W przypadku wirujących wałów obserwuje się zjawisko utraty stateczności ruchu obrotowego, przejawiające się zwiększonymi ugięciami wału oraz drganiami konstrukcji podpierającej wał. Prędkość, przy której następuje utrata stateczności nazywa się prędkością krytyczną.

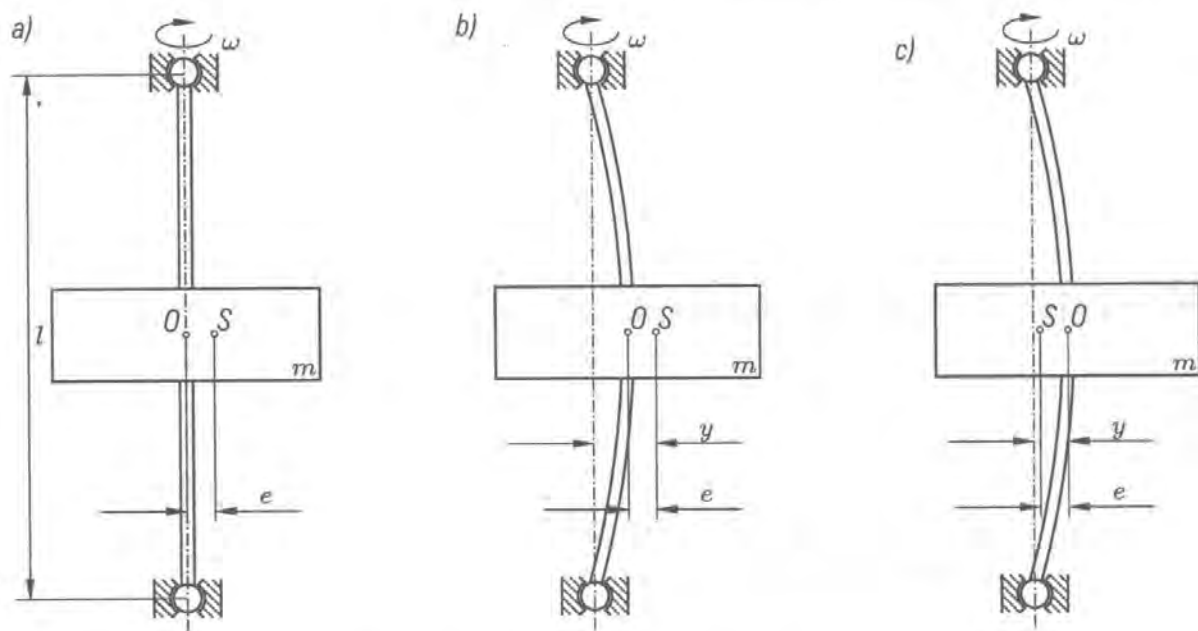
Niech dokładnie wyważony pionowy wał, podparty w idealnie sztywnych łożyskach, wiruje ze stałą prędkością kątową ω — różną od prędkości krytycznej. Jeżeli wał ten zostanie chwilowo odkształcony w kierunku prostopadłym do jego osi, to odkształcenie to zniknie po odjęciu przyłożonej siły zewnętrznej. Inaczej zachowuje się wał przy prędkości krytycznej. Wówczas po chwilowym odkształceniu nie powróci on do pierwotnego położenia równowagi, lecz będzie się obracał, zachowując nadaną mu wygiętą postać. W tym przypadku istnieje bowiem równowaga między siłami odśrodkowymi wirującego wału, a siłami sprężystości — i stan ten nie zależy od wartości ugięcia.

Na rysunku 11.1 przedstawiono wał o długości l , na którym umieszczona jest masa m . Założono, że środek ciężkości tej masy znajduje się w odległości e od osi geometrycznej wału. Na skutek mimośrodowości podczas ruchu obrotowego powstaje siła odśrodkowa

$$F_b = m\omega^2 (e + y), \quad (11.1)$$

która powoduje powiększanie ugięcia y przy rosnącej prędkości obrotowej. Jednocześnie na wał działa siła sprężystości zginania

$$F_s = \frac{48EJ}{l^3} y. \quad (11.2)$$



Rys. 11.1. Wirujący wał sprężysty

W czasie ruchu ustalonego powyższe siły są sobie równe, skąd można znaleźć położenie równowagi

$$y = \frac{m\omega^2 e}{k - m\omega^2}, \quad (11.3)$$

gdzie

$$k = \frac{48EJ}{l^3}, \quad (11.4)$$

jest sztywnością giętą wału.

Z analizy wyrażenia (11.3) wynika, że ze wzrostem ω rośnie strzałka ugięcia y . Równocześnie, gdy mianownik dąży do zera to strzałka ugięcia rośnie nieograniczenie. A zatem, gdyby nie podjęto środków zapobiegawczych, nastąpiłoby zniszczenie wału.

Odpowiadająca tej sytuacji prędkość kątowa ω_{kr} nosi nazwę prędkości krytycznej i spełnia równanie

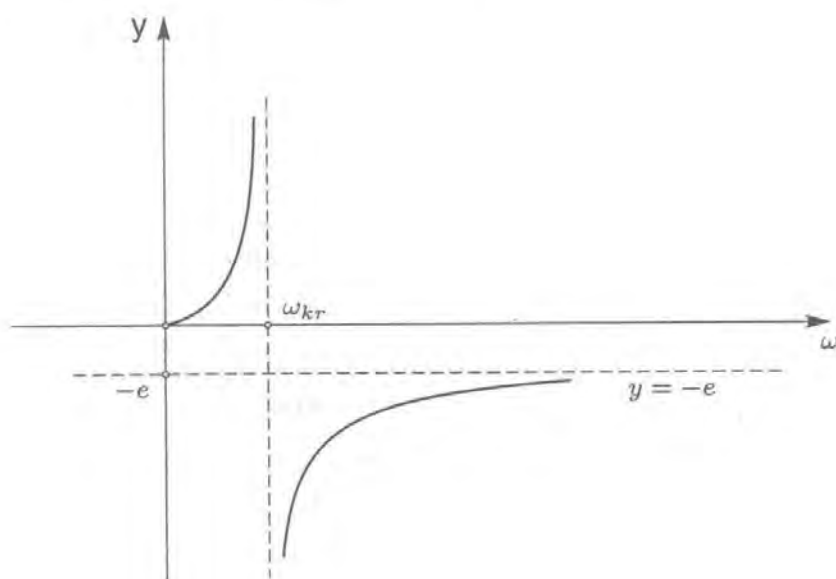
$$k - m\omega_{kr}^2 = 0 \Rightarrow \omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11.5)$$

Wobec powyższego oznaczenia, wyrażenie (11.3) można zapisać w postaci

$$y = \frac{e\omega^2}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{e\omega^2}{\omega_{kr}^2 - \omega^2}. \quad (11.6)$$

Przebieg tej funkcji został przedstawiony na Rysunku 11.2.

Analizując wyrażenie (11.6) widać, że dla $\omega > \omega_{kr}$, strzałka ugięcia zmienia znak i jej wartość maleje w miarę wzrostu prędkości obrotowej zbliżając się asymptotycznie do $y = -e$. Oznacza to, że przy dostatecznie dużej prędkości obrotowej środek ciężkości S znajdzie się na osi łożysk (Rysunek 11.1c). Jest to zjawisko tzw. samocentrowania się wału.



Rys. 11.2. Wykres ugięcia wału w funkcji prędkości kątowej

Określenie kształtu linii ugięcia (Rysunek 11.3) wału jest możliwe na podstawie rozwiązania jego dynamicznego równania ruchu. Zakładając, że wał o stałym przekroju wykonuje drgania własne, a obciążeniem są jedynie zmienne siły bezwładności, różniczkowe równanie ruchu można zapisać w postaci

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (11.7)$$

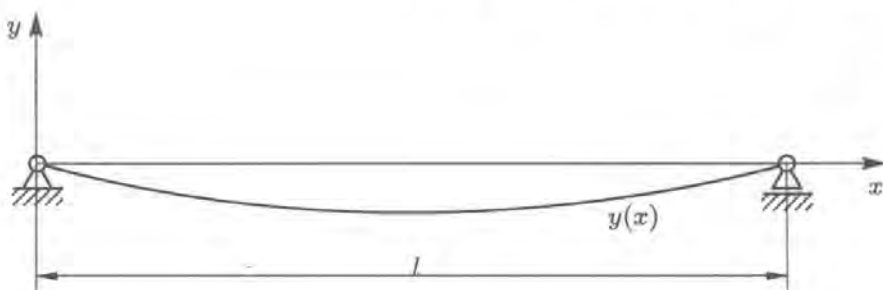
gdzie $\mu_1 = \rho A$ jest masą belki przypadającą na jednostkę jej długości. Przyjmując, że wał wykonuje ruch drgający opisany równaniem

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega_0 t, \quad (11.8)$$

po podstawieniu (11.8) do zależności (11.7) i podzieleniu obu stron przez $\sin \omega_0 t$ uzyskuje się

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = \mu_1 \omega_0^2 y. \quad (11.9)$$

Lewa strona powyższej zależności określa obciążenie zależne od własności sprężystych wału, prawa strona zaś jest maksymalną wartością sił bezwładności.



Rys. 11.3. Analizowany wał

Funkcja będąca rozwiązaniem równania (11.9) musi być taka, aby po czterokrotnym zróżniczkowaniu była równa funkcji wyjściowej pomnożonej przez dodatnią stałą $\mu_1 \omega_0^2 / EJ$. Warunek ten spełniają następujące funkcje: e^{ax} , e^{-ax} , $\sin ax$ oraz $\cos ax$, ale jedynie wtedy, gdy $a = \sqrt[4]{\mu_1 \omega_0^2 / EJ}$.

Rozwiązaniem ogólnym równania (11.9) jest więc ich kombinacja liniowa

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \sin ax + C_4 \cos ax, \quad (11.10)$$

gdzie C_1 , C_2 , C_3 i C_4 są stałymi zależnymi od warunków brzegowych.

Wyrażenie to opisuje kształt wału odpowiadający postaciom drgań własnych. Dla wału na dwóch podporach przegubowych równanie (11.10) upraszcza się do postaci

$$y(x) = C_3 \sin ax, \quad (11.11)$$

gdyż przemieszczenia końców są równe zero (tzn. $y(x)|_{x=0} = 0$ i $y(x)|_{x=l} = 0$).

Częstości własne ω_0 wału można wyznaczyć przez przyrównanie argumentu funkcji sinus do całkowitej wielokrotności π . Dla prawej podpory uzyskuje się

$$al = \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega_0^2}{EJ}} l = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11.12)$$

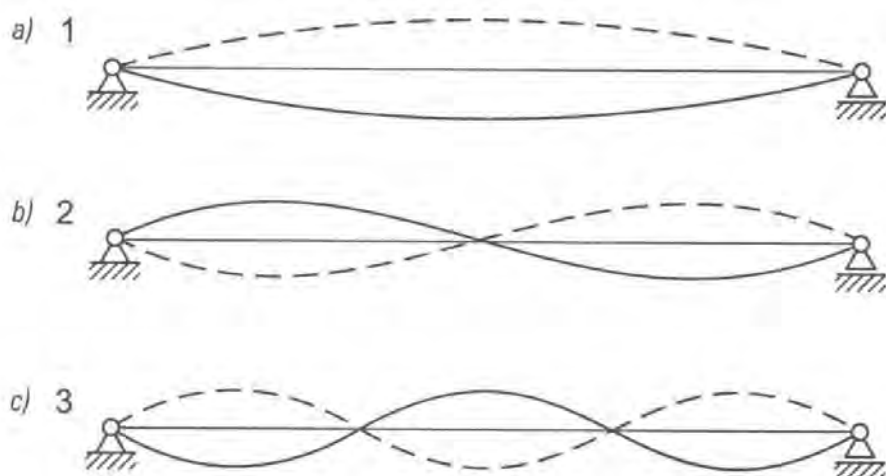
skąd pierwsza ($n = 1$) postać drgań własnych występuje przy częstości

$$\omega_{01} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1}}, \quad (11.13)$$

a kolejne postacie przy częstościach

$$\begin{aligned}\omega_{0_2} &= \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1}}, \\ &\dots, \\ \omega_{0_n} &= \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1}}, \\ &\dots\end{aligned}\tag{11.14}$$

Pierwsze trzy postacie drgań własnych zostały poglądowo przedstawione na rysunku 11.4.



Rys. 11.4. Postacie drgań własnych pręta

Zakładając, że pierwsza postać drgań odpowiada statycznej linii ugięcia wału pod wpływem ciągłego rozmieszczenia masy, ugięcie w środku rozpiętości δ_{st} wynosi

$$\delta_{st} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ},\tag{11.15}$$

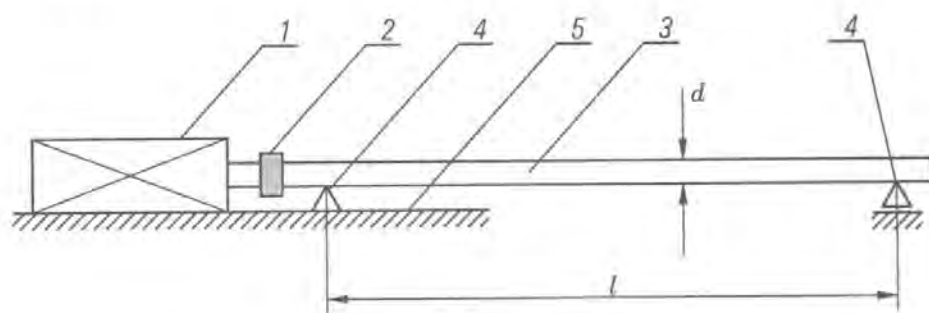
gdzie q — obciążenie jednostkowe, l — długość wału. Stąd wartość stałej C_3 w zależności (11.11) dla pierwszej częstości odpowiada δ_{st} ; stąd ostatecznie

$$y(x) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \sin ax,\tag{11.16}$$

11.3. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko laboratoryjne przedstawione schematycznie na Rysunku 11.5 składa się z silnika elektrycznego (1), napędzającego za pośrednictwem podatnego sprzęgła (2) wał (3), ułożyskowany w wahliwych łożyskach kulowych umieszczonych w oprawach (4). Silnik i oprawy mocowane są na

wspólnej podstawie (5). W wyposażeniu stanowiska znajdują się ponadto: stroboskop, przymiar liniowy, suwmiarka.



Rys. 11.5. Schemat stanowiska badawczego

11.4. Przebieg ćwiczenia

1. Dokonać pomiarów średnicy i długości pręta. Z instrukcji znajdującej się na stanowisku odczytać gęstość masy wału i wartość modułu Younga. Dane wpisać do Tabeli 11.1
2. Wyznaczyć ciężar pręta.
3. Obliczyć z zależności (11.13) pierwszą prędkość krytyczną.
4. Uruchomić silnik i stopniowo zwiększając prędkość obrotową wału obserwować jego linię ugięcia.
5. Dokonać trzykrotnego pomiaru pierwszej prędkości krytycznej za pomocą stroboskopu. Wyniki pomiarów zapisać w Tabeli 11.2, obliczyć wartość średnią.
6. Obliczyć z zależności (11.14) drugą i trzecią prędkość krytyczną. Wyniki zamieścić w Tabeli 11.2.
7. Zmniejszyć prędkość obrotową silnika a następnie szybko ją zwiększyć (aby łatwiej przejść przez pierwszą prędkość krytyczną) i poszukiwać wyraźnych postaci dla kolejnych prędkości krytycznych.
8. Dokonać trzykrotnych pomiarów dla każdej z prędkości krytycznych.
9. Wyniki doświadczenia porównać z wartościami uzyskanymi na drodze obliczeń oraz narysować zaobserwowane postacie ugięcia wału.

11.5. Opracowanie wyników

Wyniki pomiarów i obliczeń zamieścić w Tabelach 11.1 i 11.2.

Tabela 11.1. Zestawienie danych i obliczeń wymaganych do realizacji ćwiczenia

$l =$	[m]	$d =$	[m]	$J =$	[m ⁴]
$\rho =$	[kg/m ³]	$E =$	[MPa]	$f = \omega/2\pi$	[Hz]

Tabela 11.2. Wyniki

prędkość krytyczna wrt. teoretyczna	wyniki pomiarów			$f_{teoret.}$	$f_{pomiar.}/f_{teoret.}$
	1	2	3	[Hz]	[-]
pierwsza (I) $\omega_{0_1} =$	[1/s]				
druga (II) $\omega_{0_2} =$	[1/s]				
trzecia (III) $\omega_{0_3} =$	[1/s]				

11.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu z ćwiczenia należy zamieścić:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat stanowiska badawczego.
3. Wzory oraz obliczenia.
4. Tabele pomiarów i obliczeń.
5. Rysunki postaci ugięcia wału.
6. Uwagi i wnioski.

Bibliografia

- [1] KUROWSKI R., PARSEWSKI Z.: *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*. Warszawa, PWN, 1971.
- [2] DEN HARTOG J.P.: *Drgania mechaniczne*. Warszawa, PWN, 1971.
- [3] DYŁĄG ZB., JAKUBOWICZ A., ORŁOŚ ZB.: *Wytrzymałość materiałów*. Warszawa, WNT, 2002.

Ćwiczenie 12

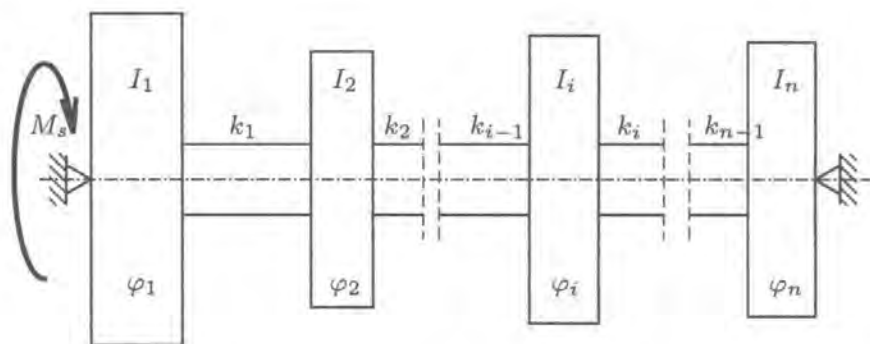
Drgania skrętne układu o skończonej liczbie stopni swobody — badania analogowe

12.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie częstości drgań własnych wału za pomocą modelowania elektrycznego.

12.2. Podstawy teoretyczne

Rozpatrzmy drgania skrętne układu mechanicznego (Rysunek 12.1) składającego się z n krążków o masowych momentach bezwładności: $I_1, I_2, \dots, I_n$, połączonych nieważkimi odcinkami wału o sztywnościach odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$.



Rys. 12.1. Schemat układu mechanicznego

Do skrajnego krążka przykładamy wymuszenie w postaci momentu skręcającego

$$M_s = M_0 \sin \omega t. \quad (12.1)$$

Badany układ wykonuje zatem drgania skrętne opisane układem równań różniczkowych

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = M_0 \sin \omega t, \quad (12.2a)$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 - k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \quad (12.2b)$$

$$\dots$$

$$I_i \ddot{\varphi}_i - k_{i-1} (\varphi_{i-1} - \varphi_i) + k_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = 0, \quad (12.2c)$$

$$\dots$$

$$I_n \ddot{\varphi}_n - k_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0, \quad (12.2d)$$

gdzie I_i jest masowym momentem bezwładności i -tego krążka, k_i sztywnością i -tego odcinka wału, φ_i kątem obrotu i -tego krążka.

Powyższy układ można przedstawić w zapisie macierzowym

$$\mathbf{I} \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (12.3)$$

gdzie: $\mathbf{I}$ — macierz bezwładności, $\mathbf{K}$ — macierz sztywności, $\boldsymbol{\varphi}$ — macierz kolumnowa (wektor) współrzędnych uogólnionych, $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ — macierz kolumnowa (wektor) przyspieszeń uogólnionych.

Do wyznaczenia częstości drgań własnych wału przyjmuje się, zakładając brak wymuszenia ($M_s = 0$), rozwiązania układu równań różniczkowych (12.2a)–(12.2d) w następującej postaci

$$\varphi_1 = \varphi_{01} \sin (\omega_0 t + \gamma), \quad (12.4a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{02} \sin (\omega_0 t + \gamma), \quad (12.4b)$$

$\dots,$

$$\varphi_n = \varphi_{0n} \sin (\omega_0 t + \gamma). \quad (12.4c)$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do równań (12.2a)–(12.2d) i przekształceniach otrzymuje się

$$(I_1 \omega_0^2 - k_1) \varphi_{01} + k_1 \varphi_{02} = 0, \quad (12.5a)$$

$$k_1 \varphi_{01} + (I_2 \omega_0^2 - k_1 - k_2) \varphi_{02} + k_2 \varphi_{03} = 0, \quad (12.5b)$$

$\dots,$

$$k_{n-1} \varphi_{0n-1} + (I_n \omega_0^2 - k_{n-1}) \varphi_{0n} = 0. \quad (12.5c)$$

Aby w badanym układzie występowały drgania wyprowadzony układ równań jednorodnych winien posiadać rozwiązania $\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0n}$ różne od

zera. Dlatego też wyznacznik charakterystyczny tego układu równań musi być równy zeru

$$\begin{vmatrix} I_1\omega_0^2 - k_1 & k_1 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & I_2\omega_0^2 - k_1 - k_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & I_n\omega_0^2 - k_{n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (12.6)$$

Rozwijając ten wyznacznik otrzymuje się algebraiczne równanie n -tego stopnia względem ω_0^2 , z którego znajdujemy kolejne częstotliwości drgań własnych $\omega_{01}, \dots, \omega_{0n}$ układu. Jeden z pierwiastków tego równania jest równy zeru, zatem układ będzie posiadał $m = n - 1$ częstotliwości własnych różnych od zera. Ruch i -tego krążka możemy więc przedstawić w postaci

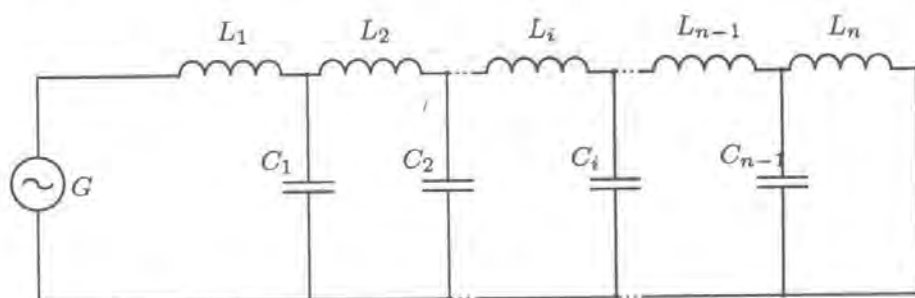
$$\varphi_i(t) = \sum_{m=1}^{n-1} \varphi_{im} \sin(\omega_{0m}t + \gamma_m). \quad (12.7)$$

Rezonans wystąpi wtedy, gdy układ zostanie poddany działaniu zmiennego momentu skręcającego M_s (12.1) o częstotliwości kołowej ω równej jednej z częstotliwości drgań własnych $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots$

Przy wyznaczaniu częstotliwości drgań własnych układów o wielu stopniach swobody należy się liczyć z trudnościami natury obliczeniowej z uwagi na konieczność rozwinięcia wyznacznika (12.6). W przypadku takim, zaleca się więc wykorzystanie komputera lub analogów elektrycznych.

Analog taki jest modelem elektrycznym odpowiadającym danemu układowi mechanicznemu. Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych układu mechanicznego sprowadza się do określenia częstotliwości drgań rezonansowych odpowiedniego modelu elektrycznego i pomnożeniu ich przez odpowiednie stałe. W celu ilustracji takiej możliwości rozważony zostanie układ elektryczny przedstawiony na Rysunku 12.2.

Analogicznie jak w przypadku układu mechanicznego, układ elektryczny poddajmy działaniu zmiennego napięcia. Ponieważ drgania w modelu elektrycznym są drganiami ładunku elektrycznego, którego pomiar jest trudny,



Rys. 12.2. Schemat układu elektrycznego

dokonyje się pomiaru napięcia wykorzystując proporcjonalność między ładunkiem a tymże napięciem w dowolnej chwili czasu na dowolnej cewce lub kondensatorze.

Na podstawie II-go prawa Kirchhoffa, sumując spadki napięcia wzdłuż każdego zamkniętego obwodu i przyrównując te sumy do zera, otrzymujemy układ równań różniczkowych:

$$L_1 \ddot{q}_1 - \frac{1}{C_1} (q_2 - q_1) = 0, \quad (12.8a)$$

$$L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_1} (q_2 - q_1) - \frac{1}{C_2} (q_3 - q_2) = 0, \quad (12.8b)$$

...

$$L_i \ddot{q}_i + \frac{1}{C_{i-1}} (q_i - q_{i-1}) - \frac{1}{C_i} (q_{i+1} - q_i) = 0, \quad (12.8c)$$

...

$$L_n \ddot{q}_n - \frac{1}{C_{n-1}} (q_{n-1} - q_n) = 0, \quad (12.8d)$$

gdzie: L_i — indukcyjność i -tej zwojnicy, C_i — pojemność i -tego kondensatora, q_i — ładunek elektryczny przepływający przez i -tą zwojnicę.

Zaznaczyć należy, że spadek napięcia na zwojnicy określa zależność

$$\Delta U_L = L \frac{dI}{dt} = L \ddot{q}, \quad (12.9)$$

gdzie I jest natężeniem prądu w cewce, zaś spadek napięcia na okładkach kondensatora określony jest jako

$$\Delta U_C = \frac{q}{C}. \quad (12.10)$$

Tak więc układ elektryczny (Rysunek 12.2) jest analogiem układu mechanicznego (Rysunek 12.1). Porównując układy równań różniczkowych (12.2a)–(12.2d) i (12.8a)–(12.8d) można stwierdzić, że posiadają one identyczną budowę, różnią się zaś tylko wielkościami fizycznymi. I tak, odpowiednikiem kąta obrotu φ w układzie mechanicznym jest ładunek elektryczny q w układzie elektrycznym i analogicznie: I_i odpowiada L_i , k_i odpowiada $1/C_i$, zaś M odpowiada E . Analogię pomiędzy wielkościami fizycznymi układów mechanicznych i obwodów elektrycznych przedstawia Tabela 12.1.

Przy analizie tej tabeli należy pamiętać, że dla drgań skrętnych należy przyjąć zamiast siły F moment M , zamiast przemieszczenia x — kąt obrotu φ , a zamiast masy m — masowy moment bezwładności I .

W związku z powyższym należy obliczyć podziałkę k_f umożliwiającą określenie na podstawie częstotliwości drgań elektrycznych f_E częstotliwości drgań mechanicznych f_M .

Tabela 12.1. Schemat układu elektrycznego

Układ mechaniczny	I elektr. układ analogii	II elektr. układ analogii
siła $P(t)$	napięcie $U(t)$	natężenie prądu $I(t)$
przesunięcie $x(t)$	ładunek $q(t)$	strumień $\varphi(t)$
prędkość $v(t)$	prąd $I(t)$	napięcie $U(t)$
masa m	indukcyjność L	pojemność C
wsp. tłumienia α	oporność R	przewodność $1/R$
sztywność c	odwr. pojemności $1/C$	odwrot. indukcyjności $1/L$

Układ mechaniczny Układ elektryczny

$$I\ddot{\varphi} + k\varphi = 0 \qquad L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I}\varphi = 0 \qquad \ddot{q} + \frac{1}{CL}q = 0$$

Z których otrzymujemy

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{k}{I}} t, \qquad q = q_0 \sin \frac{1}{\sqrt{CL}} t, \qquad (12.11a)$$

$$f_M = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I}} \quad [\text{Hz}], \qquad f_E = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad [\text{Hz}]. \qquad (12.11b)$$

Z wyrażeń określających częstotliwości drgań mechanicznych i elektrycznych (12.11b) znajdujemy

$$f_M = f_E \sqrt{\frac{kCL}{I}}. \qquad (12.12)$$

Dla układów o wielu stopniach swobody, przez analogię możemy napisać

$$f_M = f_E \sqrt{\frac{k_i C_i L_i}{I_i}}. \qquad (12.13)$$

Oznaczając

$$k_c = k_i C_i, \qquad k_I = \frac{I_i}{L_i}, \qquad k_f = \sqrt{\frac{k_c}{k_I}} \qquad (12.14)$$

znajdujemy

$$f_M = k_f f_E. \qquad (12.15)$$

W celu wyznaczenia amplitudy drgań elektrycznych można skorzystać z proporcjonalności ładunku elektrycznego do napięcia na okładkach kondensatora

$$U(t) = \frac{q(t)}{C}. \quad (12.16)$$

Pomiar napięcia należy przeprowadzić za pomocą miliwoltomierza włączonego równolegle do wskazanego przez prowadzącego kondensatora.

12.3. Opis stanowiska badawczego

W ćwiczeniu zamodelowano układ drgający złożony z ośmiu krążków o masowych momentach bezwładności $I_1, \dots, I_8$, połączonych siedmioma odcinkami wału o sztywnościach $k_1, \dots, k_7$. Tabela 12.2 przedstawia dane układu mechanicznego.

Tabela 12.2. Dane układu mechanicznego

Wielkość	Jednostka	1	2	3	4	5	6	7	8
I_i	[kgm ²]	20,000	0,232	0,228	0,228	0,228	0,228	0,230	0,540
$k_i \cdot 10^6$	[Nm/rad]	0,119	2,120	0,490	2,170	0,520	2,220	0,530	

W skład urządzenia wchodzi:

- Generator prądu zmiennego, z regulowaną częstotliwością w zakresie 10 Hz–10 kHz.
- Układ elektryczny stanowiący analog badanego układu mechanicznego.
- Miliwoltomierz lampowy o zakresie pomiarowym od 10 do 1000 mV.

12.4. Przebieg ćwiczenia

1. Przyjąć podziałki: $k_I = I_i/L_i = 38 \text{ kgm}^2/\text{H}$, $k_c = k_i C_i = 1,12 \text{ kgm}^2/\text{s}^2\text{F}$.
2. Obliczyć wartości współczynników układu modelowego: indukcyjności L_i i pojemności C_i .
3. Przeprowadzić pomiar częstotliwości rezonansowych f_E układu zgodnie z instrukcją obsługi stanowiska. Wyniki pomiarów zamieścić w Tabeli 12.3.
4. Obliczyć częstotliwości drgań własnych układu. W tym celu wykorzystać program komputerowy wyznaczający częstości i postacie drgań własnych. Wprowadzić wartości parametrów mechanicznych, tj. masowe momenty bezwładności $I_1, \dots, I_8$ oraz współczynniki sztywności $k_1, \dots, k_8$.

Postępując zgodnie z poleceniami podawanymi na ekranie komputera wyznaczyć częstotliwości i postacie drgań własnych badanego wału. Wyniki obliczeń zamieścić w Tabeli 12.3.

Tabela 12.3. Zestawienie wielkości elektrycznych

Wielkość	Jednostka	1	2	3	4	5	6	7	8
f_M	[Hz]								
f_E	[Hz]								
L_i	[H]								
C_i	[F]								
k_f	[-]								

12.5. Opracowanie wyników

1. Obliczyć podziałkę częstotliwości k_f .
2. Na podstawie pomiarów wyznaczyć częstości drgań własnych układu.
3. Porównać otrzymane wyniki obliczeń i badań analogowych.

12.6. Wykonanie sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schematy układów mechanicznego i elektrycznego.
3. Równania różniczkowe układu mechanicznego i równania odpowiadającego mu układu elektrycznego.
4. Obliczenia częstotliwości drgań.
5. Tabele pomiarów i obliczeń.
6. Wnioski i uwagi.

Bibliografia

- [1] PISZCZEK K., WALCZAK J.: *Drgania w budowie maszyn*. Warszawa, PWN, 1978.
- [2] KALISKI S. – red.: *Drgania i fale w ciałach stałych*. Warszawa, PWN, 1966.
- [3] FORTUNA Z.: *Metody numeryczne*. Warszawa, WNT, 1982.

Ćwiczenie 13

Drgania parametryczne

13.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest analiza parametrycznych drgań skrętnych wału korbowego maszyny tłokowej oraz sprawdzenie, na drodze badań analogowych i numerycznych, poprawności wyznaczenia obszaru rezonansu parametrycznego.

13.2. Podstawy teoretyczne

Drgania wymuszone układu mechanicznego mogą być wywołane nie tylko działaniem sił zewnętrznych, lecz również na skutek okresowej zmiany dowolnego parametru charakteryzującego układ. Działania takie nazywane są parametrycznymi, natomiast drgania nimi wywołane drganiami parametrycznymi. Ruch drgający takiego układu opisuje się równaniami różniczkowymi o zmiennych współczynnikach.

Rozpatrzony zostanie ruch wahadła matematycznego o zmiennej długości przedstawionego na Rysunku 13.1. Niech wahadło wykonuje minimalny ruch drgający, a przy tym jednocześnie następuje zmiana jego długości. Skracać długość wahadła w chwili każdorazowego jego przejścia przez położenie równowagi powoduje wzrost energii drgań, bowiem konieczne jest do tego wykonanie dodatniej pracy. Przy pominięciu wpływu skrócenia wahadła na siłę odśrodkową wartość tej pracy wynosi

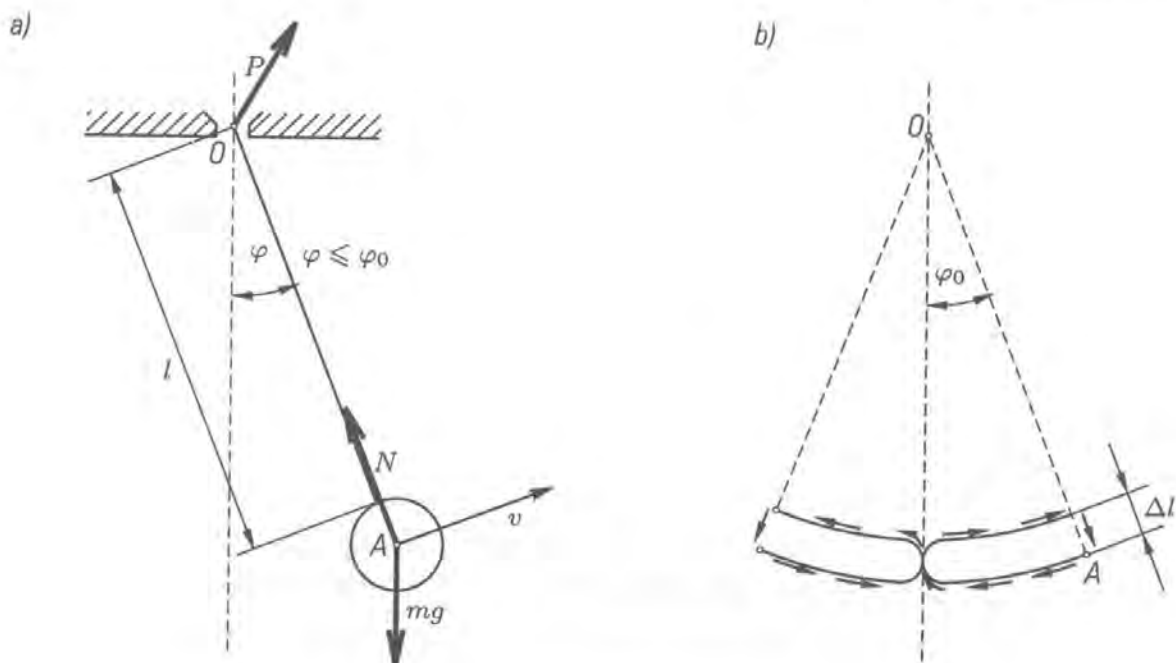
$$L_1 = m \left(g + \frac{v_1^2}{l} \right) \Delta l, \quad (13.1)$$

gdzie v_1 jest prędkością wahadła w położeniu środkowym.

Ruch wahadła odbywa się w ten sposób, że zwiększanie długości nici odbywa się w położeniach skrajnych. Wówczas praca wykonana podczas wydłużenia nici

$$L_2 = -mg\Delta l \cos \varphi_0 \quad (13.2)$$

jest pracą ujemną, tzn. zmniejsza energię układu.



Rys. 13.1. Wahadło matematyczne o zmiennej długości

Energia, która jest dostarczana wahadłu w położeniu środkowym jest większa od energii odbieranej w położeniach skrajnych, bowiem przy tych samych przesunięciach Δl siła w nici dla środkowego położenia wahadła jest większa niż w przypadku położeni skrajnych (dla tych położeni siła odśrodkowa zanika). Wykorzystując powyższe zależności można określić przyrost energii wahadła w czasie jednego okresu jego ruchu

$$\Delta E = 2m\Delta l \left(g + \frac{v_1^2}{l} - g \cos \varphi_0 \right). \quad (13.3)$$

Ponieważ

$$v_1^2 = 2gl(1 - \cos \varphi_0), \quad (13.4)$$

więc po podstawieniu do (13.3)

$$\Delta E = 6mg\Delta l(1 - \cos \varphi_0). \quad (13.5)$$

Ten dodatni przyrost energii powoduje narastanie amplitudy drgań wahadła, dzięki czemu możliwe jest jego „rozhuśtanie”.

W tym celu spełniony być musi odpowiedni warunek dotyczący częstości i fazy działania parametrycznego. Ponieważ półokresowi drgań własnych wahadła odpowiada pełny okres zmiany jego długości (Rysunek 13.1b), przeto warunek narastania drgań będzie spełniony wtedy, gdy częstość działania parametrycznego (zmiany długości wahadła) będzie równa podwójnej częstości drgań własnych układu.

Drgania parametryczne układu liniowego o jednym stopniu swobody, w przypadku okresowo zmiennej sztywności, opisuje równanie różniczkowe Mathie'u o postaci

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - 2q \cos \omega t)x = 0. \quad (13.6)$$

gdzie ω_0 — częstość drgań własnych, zaś $2q$ — głębokość modulacji.

Wprowadzając czas bezwymiarowy

$$\tau = \omega t \quad (13.7)$$

otrzymuje się

$$\ddot{x} + (\lambda^2 + \mu \cos \tau)x = 0, \quad (13.8)$$

gdzie: $\ddot{x} = d^2x/d\tau^2$, $\lambda^2 = p^2/\omega^2$, $\mu = -2p^2q/\omega^2$.

Całkę szczególną równania (13.8), zgodnie z teorią równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach, przewiduje się w postaci funkcji

$$x(\tau) = e^{\delta\tau} \varphi(\tau), \quad (13.9)$$

gdzie δ — wykładnik charakterystyczny zależny od parametrów λ^2 i μ , natomiast $\varphi(\tau)$ — funkcja o okresie π lub 2π .

Ponieważ równanie (13.8) nie zmienia się jeśli zamiast τ podstawione zostanie $-\tau$, w związku z tym $e^{-\delta\tau} \varphi(-\tau)$ jest również liniowo niezależnym rozwiązaniem. A zatem ogólne rozwiązanie równania (13.8) przyjmuje postać

$$x(\tau) = C_1 e^{\delta\tau} \varphi(\tau) + C_2 e^{-\delta\tau} \varphi(-\tau), \quad (13.10)$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi.

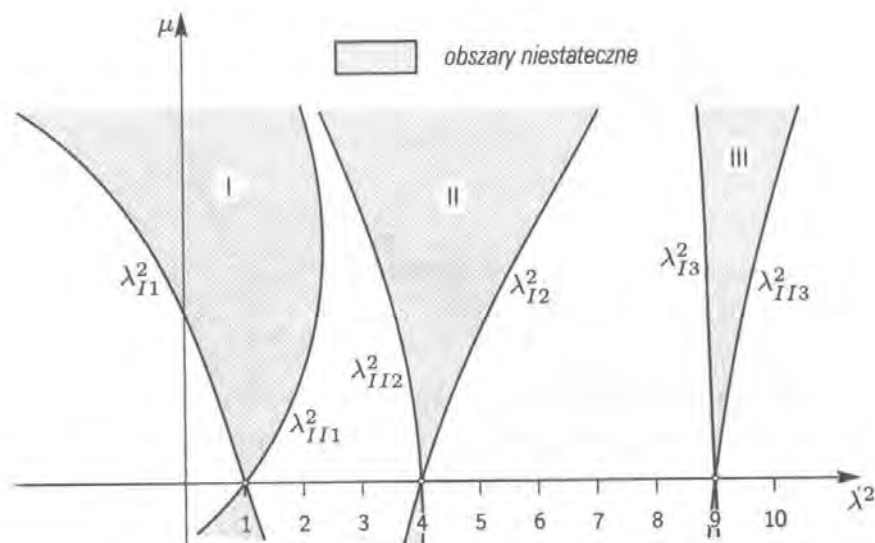
Rozwiązanie (13.10) nazywane jest:

- niestatecznym, jeśli dąży ono do $\pm\infty$ wobec $\tau \rightarrow +\infty$,
- statecznym, jeśli zmierza ono do zera lub jest ograniczone wobec $\tau \rightarrow +\infty$,
- neutralnym, gdy rozwiązanie ma okres π lub 2π .

Ze względu na to, że funkcje $\varphi(\tau)$ i $\varphi(-\tau)$ są funkcjami okresowymi, stateczność lub niestateczność rozwiązań zależy od parametru δ . Rozwiązanie (13.10) będzie niestateczne dla rzeczywistych wartości tego parametru różnych od zera, zaś stateczne dla wartości urojonych. Natomiast okresowe rozwiązania neutralne mogą istnieć jeśli parametr λ^2 dla ustalonej wartości μ powinien przyjmować pewną określoną wartość, zwaną wartością własną, obliczoną wraz z funkcją $\lambda^2(\mu)$ dla rozwiązań neutralnych. Rozwiązania tego typu nazywane są funkcjami Mathieu.

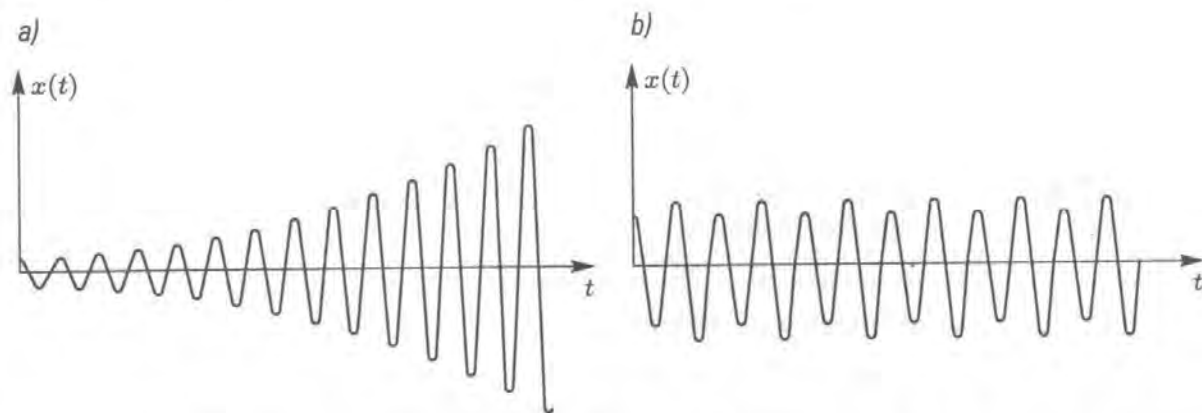
Jeśli $\mu = 0$, to rozwiązaniami równania (13.8) są: $\cos \tau$, $\sin \tau$, $\cos 2\tau$, $\sin 2\tau \dots$, odpowiednimi zaś wartościami λ^2 są kwadraty liczb całkowitych

(0, 1, 4, 9, ...). Funkcje Mathieu przyjmują dla $\mu \rightarrow 0$ odpowiednio wartości $\cos n\tau$ i $\sin n\tau$. Wartości własne funkcji Mathieu wyrażonych przez cosinus i sinus, oznaczając odpowiednio przez λ_{In}^2 i $\lambda_{II n}^2$. Rysunek 13.2 przedstawia krzywe wyrażające zależność między μ i λ_{In}^2 oraz $\lambda_{II n}^2$ ($n = 1, 2, 3$).



Rys. 13.2. Obszary niestateczności parametrycznej

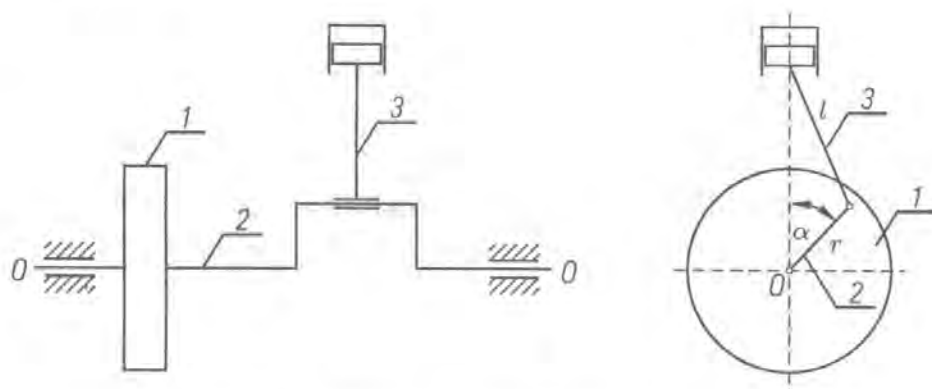
Krzywe $\lambda_{In}^2(\mu)$ i $\lambda_{II n}^2(\mu)$ dzielą płaszczyznę (λ^2, μ) na obszary stateczności i niestateczności. Równanie (13.8) ma rozwiązanie niestateczne (Rysunek 13.3a) jeśli punkt odpowiadający wartościom λ^2 i μ leży w obszarze niestateczności (zacieniowanym), ma zaś rozwiązanie stateczne (Rysunek 13.3b) jeśli punkt określony wartościami λ^2 i μ leży poza obszarami niestateczności. W obszarach niestateczności, zwanych również obszarami rezonansu parametrycznego, następuje nieograniczony wzrost amplitudy drgań.



Rys. 13.3. Przebiegi czasowe drgań dla rozwiązań: a) niestatecznych, b) statecznych

Nieograniczony wzrost amplitudy drgań wiąże się z niebezpieczeństwem zniszczenia konstrukcji. W realnych układach mechanicznych obserwuje się jednak ustalenie dużych amplitud drgań nawet w obszarach rezonansowych. Fakt ten spowodowany jest tym, że przy dużych odkształceniach siły sprężystości mają charakter nieliniowy. W takich warunkach drgania układu parametrycznego opisuje nieliniowe równanie różniczkowe o zmiennym współczynniku.

W dynamice maszyn i mechanizmów drgania parametryczne wynikają nie tylko z okresowej zmiany współczynników sztywności, ale również i współczynników bezwładności. Okresowa zmiana własności niektórych układów mechanicznych powoduje, że drgania parametryczne występują w przekładniach zębatych, wirujących wałach o przekroju różnym od kołowego, układach korbowych napędu elektrowozów, pewnych typach sprzęgieł, silnikach tłokowych itd. Dla zilustrowania tego faktu przeprowadzona zostanie analiza drgań skrętnych wału korbowego silnika jednocyldrowego (Rysunek 13.4), dla którego moment bezwładności mas korbowodu i tłoka wyraża się funkcją okresową.

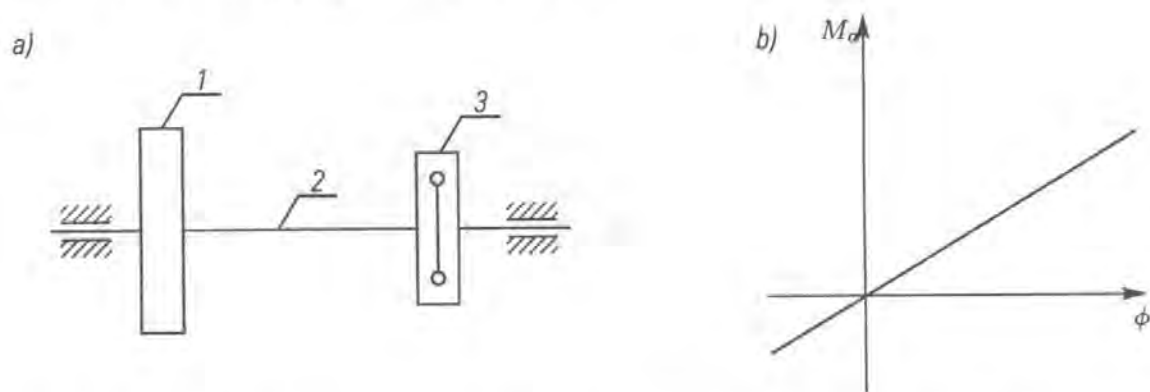


Rys. 13.4. Model fizyczny silnika tłokowego

W obliczeniach przybliżonych tego typu układów wał korbowy zastępuje się wałem prostym o odpowiednio dobranej sztywności skręcania, na którym znajdują się tarcze kołowe zastępujące poszczególne wykorbienia. Momenty bezwładności tych tarcz dobiera się tak, aby przy założeniu tej samej prędkości kątowej ruchu obrotowego wykorbienia i tarczy, energia kinetyczna tarczy była równa średniej energii kinetycznej odpowiedniego wykorbienia oraz połączonego z nią korbowodu i tłoka.

Wyniki otrzymane z analizy układu w takim ujęciu zagadnienia nie nawiązują całokształtu zjawisk w rzeczywistym układzie drgającym. Wynika stąd konieczność uwzględnienia okresowej zmiany masowego momentu bezwładności układu korbowo-tłokowego, co w rezultacie prowadzi do drgań parametrycznych.

Rozważony zostanie układ mechaniczny przedstawiony na Rysunku 13.5, złożony z koła zamachowego (1) połączonego sprężystym wałem (2) z tarczą (3). Niech moment bezwładności względem osi obrotu tarczy (3) jest okresową funkcją kąta obrotu wału α , natomiast moment bezwładności koła zamachowego w stosunku do tarczy jest duży. Ponadto niech koło zamachowe obraca się ze stałą prędkością kątową ω .



Rys. 13.5. Zastępczy model fizyczny jednocylindrowego silnika tłokowego

Układ ten jest równoważny modelowi silnika jednocylindrowego, jaki został przedstawiony na Rysunku 13.4, bowiem moment bezwładności tarczy (3) zostanie dobrany w ten sposób, aby jej energia kinetyczna była równa energii kinetycznej korby, korbowodu i tłoka. Zakładając, że długość korbowodu jest znacznie większa od promienia korby, energię tę można w przybliżeniu wyrazić zależnością

$$T_1 \approx \frac{1}{2} I_0 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\alpha} \sin \alpha)^2, \quad (13.11)$$

gdzie: I_0 — masowy moment bezwładności w ruchu obrotowym masy związanej z wykorbieniem, m — część masy korbowodu i masa tłoka, r — promień wykorbienia α — kąt obrotu korby.

Przyrównując do wyrażenia (13.11) zależność na energię kinetyczną tarczy $\frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2$ wyznaczono jej moment bezwładności

$$I(\alpha) = I_0 + mr^2 \sin^2 \alpha. \quad (13.12)$$

Oznaczając przez ϕ kąt obrotu tarczy (3) względem koła zamachowego otrzymano bezwzględny kąt obrotu tarczy wyrażony zależnością

$$\alpha = \omega t + \phi. \quad (13.13)$$

Po przekształceniach wyrażenie (13.12) przyjmie postać

$$I(\alpha) \approx I(\omega t) = I_1 (1 - \mu \cos 2\omega t), \quad (13.14)$$

gdzie $I_1 = I_0 + mr^2/2$, $\mu = mr^2/(2I_0 + mr^2)$.

Do dalszych rozważań przyjęto liniową zależność między momentem skręcającym wał i jego kątem skręcenia ϕ (Rysunek 13.5b) w postaci

$$M_s(\phi) = k_s \cdot \phi, \quad (13.15)$$

gdzie k_s jest współczynnikiem sztywności wału na skręcanie. Założono ponadto, że drgania wału wywołane działaniem zmiennego ciśnienia na tłok silnika nie będą uwzględniane.

Równanie różniczkowe ruchu zostanie wyprowadzone za pomocą równań Lagrange'a II-go rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0. \quad (13.16)$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej niezależnej — tzw. czasu bezwymiarowego $\tau = \omega t$ — oraz uwzględniając założenia upraszczające

$$I(\alpha) \approx I(\tau), \quad \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \approx \frac{dI(\tau)}{d\tau}, \quad (13.17)$$

otrzymano z zależności (13.16) równanie różniczkowe drgań skrętnych

$$I(\tau) \ddot{\phi} \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{dI(\tau)}{d\tau} \omega^2 + \kappa \phi = 0, \quad (13.18)$$

gdzie $\kappa = k_s/I_1$ oraz

$$\ddot{\phi} = \frac{d^2 \phi}{d\tau^2}. \quad (13.19)$$

Wykorzystując w powyższym równaniu zależność (13.14), po przekształceniach otrzymuje się

$$(1 - \mu \cos 2\tau) \omega^2 \ddot{\phi} + \kappa^2 \vartheta = -\omega^2 \mu \sin 2\tau. \quad (13.20)$$

Dokonując w tym równaniu podstawienia

$$\varphi = \phi - \frac{\omega^2 \mu}{4\omega^2 - \kappa^2} \sin 2\tau \quad (13.21)$$

oraz przyjmując, że $\lambda^2 = \kappa^2/\omega^2$, a także pomijając wyrazy z μ w potęgze większej od jedności, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(1 - \mu \cos 2\tau) \ddot{\varphi} + \lambda^2 \varphi = 0. \quad (13.22)$$

Tak więc ruch drgający badanego układu opisany został jednorodnym równaniem różniczkowym o okresowym współczynniku. Dzieląc równanie

(13.22) przez $(1 - \mu \cos 2\tau)$, po rozwinięciu odwrotności tego wyrażenia w szereg oraz uwzględnieniu trzech pierwszych wyrazów, otrzymano

$$\ddot{\varphi} + \lambda^2 (1 + \mu \cos 2\tau + \mu^2 \cos^2 2\tau) \varphi = 0. \quad (13.23)$$

Celem dalszych rozważań będzie znalezienie takich rozwiązań okresowych tego równania, które można otrzymać dla pewnych szczególnych wartości parametru λ^2 . W tym celu można skorzystać z metody małego parametru.

Szukaną funkcję przedstawmy zatem w postaci następującego szeregu potęgowego

$$\varphi(\tau) = \varphi^{(0)}(\tau) + \mu \varphi^{(1)}(\tau) + \mu^2 \varphi^{(2)}(\tau) + \dots \quad (13.24)$$

W szeregu tym $\varphi^{(0)}(\tau)$, $\varphi^{(1)}(\tau)$, $\varphi^{(2)}(\tau) \dots$ są pewnymi funkcjami okresowymi. Rozwiązanie (13.24) opisuje więc drgania okresowe badanego układu. Przyjmijmy następującą postać szeregu określającego parametr $\lambda^2(\mu)$

$$\lambda^2(\mu) = 1 + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots, \quad (13.25)$$

gdzie a_i ($i = 1, 2, \dots$) są współczynnikami, które wyznaczone zostaną z warunku okresowości — tj. nie dopuszczając do pojawienia się w rozwiązaniach tzw. wyrazów sekularnych o postaci $\tau \cos \tau$ lub $\tau \sin \tau$.

Podstawiając wyrażenia (13.24) i (13.25) do równania (13.23), po zgrupowaniu odpowiednich wyrazów z μ w jednakowych potęgach i przyrównaniu ich do zera, uzyskano rekurencyjny układ równań różniczkowych:

$$\ddot{\varphi}^{(0)} + \varphi^{(0)} = 0, \quad (13.26a)$$

$$\ddot{\varphi}^{(1)} + \varphi^{(1)} = -a_1 \varphi^{(0)} - a_1 \varphi^{(0)} \cos 2\tau, \quad (13.26b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^{(2)} + \varphi^{(2)} = & -a_2 \varphi^{(0)} - a_1 \varphi^{(0)} \cos 2\tau - \varphi^{(0)} \cos^2 2\tau - \\ & - a_1 \varphi^{(1)} - \varphi^{(1)} \cos 2\tau, \end{aligned} \quad (13.26c)$$

$$\dots = \dots$$

Jest to układ równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

Ogólne rozwiązanie równania (13.26a) ma postać

$$\varphi^{(0)} = A_0 \cos \tau + B_0 \sin \tau. \quad (13.27)$$

Poszukiwane są dwa rodzaje rozwiązań okresowych. Pierwsze z nich, przy $\mu = 0$ przyjmuje postać

$$\varphi = \varphi^{(0)} = A_0 \cos \tau, \quad (13.28)$$

natomiast drugie postać

$$\varphi = \varphi^{(0)} = B_0 \sin \tau. \quad (13.29)$$

Z powyższego wynika, że średnia prędkość kątowa wału, równa prędkości kątowej koła zamachowego, jest równa częstości kołowej drgań własnych układu przy $\mu = 0$.

13.2.1. Rozwiązanie okresowe przy warunku początkowym $\dot{\varphi}(0) = 0$

Przyjmując $\varphi^{(0)} = A_0 \cos \tau$, po podstawieniach do równania (13.26b) i przekształceniach, otrzymujemy

$$\ddot{\varphi}^{(1)} + \varphi^{(1)} = -A_0 \left(a_1 + \frac{1}{2} \right) \cos \tau - \frac{A_0}{2} \cos 3\tau \quad (13.30)$$

W celu zapewnienia okresowości rozwiązania $\varphi^{(1)}(\tau)$ wyrażenie przy $\cos \tau$ powinno być równe zero, gdyż w przeciwnym przypadku pojawi się w rozwiązaniu człon sekularny. Z warunku tego wynika $a_1 = -1/2$.

Rozwiązując równanie (13.30) otrzymujemy

$$\varphi^{(1)} = \frac{A_0}{16} \cos 3\tau. \quad (13.31)$$

W rozwiązaniu tym pominięto całkę odpowiedniego równania jednorodnego, gdyż zawsze można ją dołączyć do rozwiązania na $\varphi^{(0)}$. Wykorzystując otrzymane zależności w równaniu (13.26c) po odpowiednich przekształceniach, znajdujemy

$$\ddot{\varphi}^{(2)} + \varphi^{(2)} = -A_0 \left(a_2 + \frac{9}{32} \right) \cos \tau + \frac{A_0}{32} \cos 3\tau - \frac{9A_0}{32} \cos 5\tau + \dots \quad (13.32)$$

W celu zapewnienia okresowości rozwiązania $\varphi^{(2)}(\tau)$ po przyrównaniu do zera wyrażenia z $\cos \tau$, otrzymujemy $a_2 = -9/32$.

Po wyznaczeniu całki równania (13.32) oraz podstawieniach zależności określających $\varphi^{(1)}$ i $\varphi^{(2)}$ do wyrażenia (13.24), uzyskujemy następujące równanie ruchu drgającego

$$\varphi = A_0 \cos \tau + \frac{A_0}{16} \mu \cos 3\tau - \left(\frac{A_0}{256} \cos 3\tau - \frac{9A_0}{768} \cos 5\tau \right) \mu^2 + \dots \quad (13.33)$$

Aby otrzymać to rozwiązanie musi być spełniona zależność

$$\lambda_{I1}^2 = 1 - \frac{1}{2} \mu - \frac{9}{32} \mu^2 + \dots \quad (13.34)$$

13.2.2. Rozwiązanie okresowe przy warunku początkowym $\varphi(0) = 0$

W tym przypadku, jako rozwiązanie równania różniczkowego, przyjęto

$$\varphi^{(0)} = B_0 \sin \tau. \quad (13.35)$$

Postępując podobnie jak przy wyznaczaniu rozwiązania okresowego przy warunku początkowym $\dot{\varphi}(0) = 0$, otrzymujemy równanie ruchu drgającego

$$\varphi = B_0 \sin \tau + \frac{B_0}{16} \mu \sin 3\tau + \left(\frac{B_0}{256} \sin 3\tau + \frac{9B_0}{768} \sin 5\tau \right) \mu^2 + \dots \quad (13.36)$$

Warunek istnienia takiego ruchu przedstawia się w postaci

$$\lambda_{II1}^2 = 1 + \frac{1}{2} \mu - \frac{9}{32} \mu^2. \quad (13.37)$$

13.3. Badania analogowe

Badania drgań wału korbowego silnika, przeprowadzone zostaną na maszynie analogowej MEDA 81T. Analogie elektromechaniczne polegają na tym, że zjawiska zachodzące w obwodach elektrycznych opisuje się równaniami różniczkowymi analogicznymi do równań drgań układów mechanicznych. W związku z tym, badania drgań układu mechanicznego można przeprowadzić na drodze rejestracji, w odpowiednio dobranym układzie elektrycznym, przebiegów interesujących wielkości, stanowiących analogie wielkości mechanicznych. Maszyny analogowe zawierają następujące człony operacyjne: sumatory, integratory, człony dzielące, mnożące, przetworniki funkcyjne itd. Człony te należy odpowiednio połączyć, aby uzyskać analogowy obwód elektryczny, odpowiadający danemu układowi mechanicznemu.

W celu stwierdzenia poprawności wyznaczenia obszaru rezonansu parametrycznego wału silnika na drodze rozważań teoretycznych (patrz pkt. 13.2), przeprowadzone zostaną badania analogowe układu wychodząc z równania różniczkowego (13.22)

$$(1 - \mu \cos 2\tau) \ddot{\varphi} + \lambda^2 \varphi = 0. \quad (13.38)$$

Przed przystąpieniem do opracowania schematu połączeń analogowych, należy przekształcić powyższe równanie różniczkowe na równanie maszynowe. W tym celu należy dobrać skalę czasu i skalę amplitud drgań wprowadzając współczynniki skal amplitud

$$\alpha_\varphi = \frac{1JM}{|\varphi|_{\max}}, \quad \alpha_{\dot{\varphi}} = \frac{1JM}{|\dot{\varphi}|_{\max}}, \quad \alpha_{\ddot{\varphi}} = \frac{1JM}{|\ddot{\varphi}|_{\max}}, \quad (13.39)$$

gdzie 1JM oznacza jedną jednostkę maszynową, która dla komputerów lampowych wynosi 100 V, a dla tranzystorowych 10 V.

Pomiędzy wielkościami rzeczywistymi i analogowymi istnieje następująca relacja w powiązaniu ze współczynnikiem skali czasu β

$$\beta = \frac{T}{t} = \frac{\omega}{\Omega}, \quad (13.40)$$

a stąd $2\omega t = 2\Omega T = 2\tau$, przy czym przyjęto następujące oznaczenia: ω , Ω — pulsacja (odpowiednio przebiegu rzeczywistego i analogowego), t , T — czas (odpowiednio rzeczywisty i maszynowy).

Z powyższych zależności wynika, że wykorzystanie czasu bezwymiarowego daje wygodną formę rozwiązania problemu, ponieważ odpowiada ono dowolnym wartościom współczynnika skali czasu.

Równanie różniczkowe (13.22) po przekształceniach przyjmuje postać

$$\ddot{\varphi} = -(1 + \mu \cos 2\tau) \lambda^2 \varphi. \quad (13.41)$$

Należy zaznaczyć, że wyraz w nawiasie pochodzi z uwzględnienia dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia w szereg funkcji

$$(1 - \mu \cos 2\tau)^{-1} = 1 + \mu \cos 2\tau + \mu^2 \cos^2 2\tau + \dots \quad (13.42)$$

Pominięcie w stosunku do badań teoretycznych trzeciego wyrazu rozwinięcia, jak wykazano w pracy [3], powoduje około trzy procentowe odchylenie wyników w postaci funkcji $\lambda^2(\mu)$.

Po uwzględnieniu współczynników skal w równaniu (13.41), równanie maszynowe przyjmuje postać

$$(\alpha_{\varphi} \ddot{\varphi}) = -\lambda^2 \frac{\alpha_{\ddot{\varphi}}}{\alpha_{\varphi}} (\alpha_{\varphi} \varphi) - \mu \lambda^2 \frac{\alpha_{\ddot{\varphi}}}{\alpha_{\varphi}} (\alpha_{\varphi} \varphi) \cos 2\tau. \quad (13.43)$$

Równanie maszynowe zachowuje charakter wyjściowego równania różniczkowego, lecz różni się od niego postacią, która stwarza możliwość zaprogramowania go na maszynie analogowej oraz rozwiązania problemu we właściwej skali czasu i w tzw. polu napięć komputera. Badania analogowe przeprowadzone zostaną dla następujących danych

$$I_1 = 0,147 \left[\text{kgm}^2 \right], \quad k_s = 53955 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right] \quad (13.44)$$

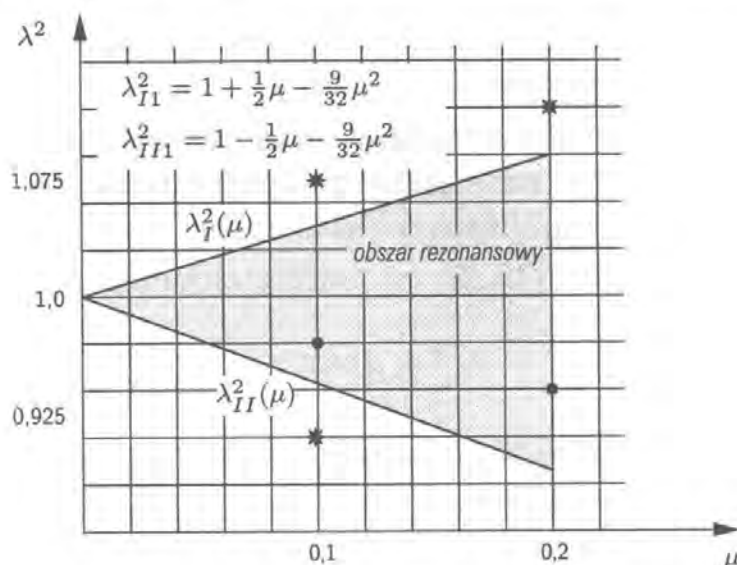
oraz warunków początkowych

$$\dot{\varphi}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0,25 \quad (13.45)$$

i częstotści kołowych wymuszenia parametrycznego, wynikających z czterech wartości λ^2

$$\lambda^2 = \begin{cases} 1,075 \\ 0,970 \end{cases} \quad \text{dla } \mu = 0,1 \quad \text{oraz} \quad \lambda^2 = \begin{cases} 0,940 \\ 0,865 \end{cases} \quad \text{dla } \mu = 0,2. \quad (13.46)$$

Wartości te, określają punkty pomiarowe (patrz Rysunek 13.6), położone na zewnątrz i wewnątrz obszaru rezonansu parametrycznego.



Rys. 13.6. Warunki badań analogowych układu w otoczeniu głównego rezonansu parametrycznego

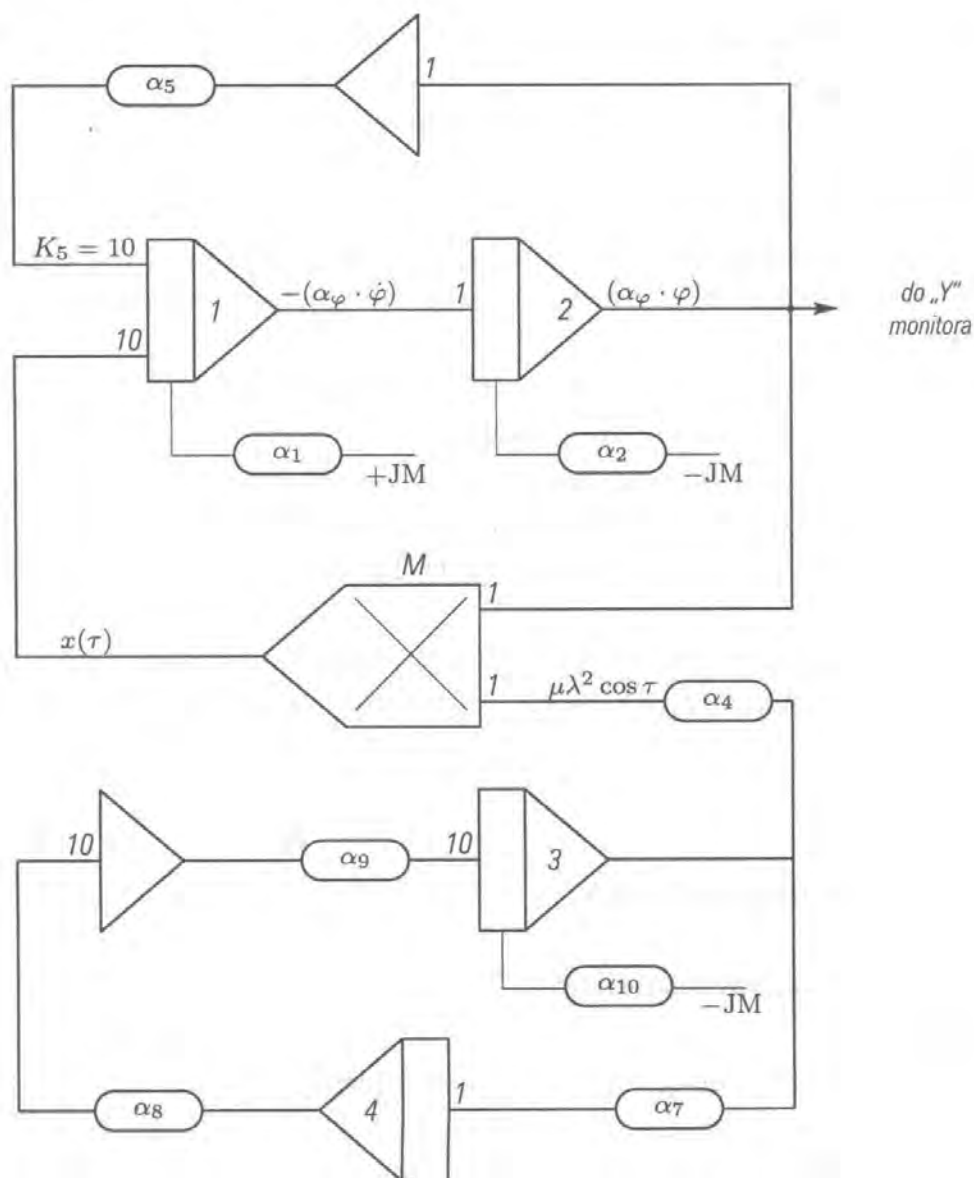
Schemat maszynowy przedstawia Rysunek 13.7.

W schemacie maszynowym, można wyróżnić dwie części sprzężone ze sobą mnożarką M. Dolną część schematu analogowego stanowi generator funkcji cosinusoidalnej, z wyjścia którego (integrator 3) uzyskuje się przebieg zależny od czasu o amplitudzie $\lambda^2 \mu = \alpha_4 \alpha_{10}$ gdzie α_4 i α_{10} — nastawy potencjometrów nr 4 i 10. Górna część schematu, gdzie znajdują się między innymi dwa integratory, jest zasadniczym jego fragmentem, bowiem na wyjściu integratora 2 otrzymuje się rozwiązanie równania.

Wartości współczynników skali amplitud, powinny być tak dobrane, aby spełniony był warunek nie przekraczania pola napięć maszyny analogowej tj. 1JM. Dlatego w danym przypadku, zaleca się przyjąć wartości nastaw potencjometrów komputera, przedstawionych w tabeli 13.1.

W schemacie analogowym, mnożarka M odwraca znak algebraiczny iloczynu, z jednoczesnym podzieleniem go przez 10 w przypadku komputera tranzystorowego. Generator funkcji $\cos \tau$ pracuje z pulsacją maszynową

$$\Omega = \sqrt{(10\alpha_7)(10\alpha_8)(10\alpha_9)}. \quad (13.47)$$



Rys. 13.7. Schemat maszynowy

Jeśli $\alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha = 0,159$ wówczas

$$\Omega = \sqrt{(10 \cdot 0,159)^3} = 2 \left[\frac{1}{s} \right]. \quad (13.48)$$

W celu oceny rezultatów badań analogowych warto przypomnieć, że punkty pomiarowe na wykresie $\lambda^2(\mu)$, dla których przebieg drgań ma charakter narastający, wyznaczają obszar rezonansu parametrycznego, zaś dla punktów leżących poza tym obszarem drgania mają przebieg ustalony.

13.4. Przebieg ćwiczenia

1. Na podstawie równania różniczkowego (13.41) wyprowadzić równanie maszynowe.
2. Narysować schemat maszynowy.
3. Wykorzystując rezultaty badań teoretycznych $\lambda_{II1}^2(\mu)$ i $\lambda_{I1}^2(\mu)$ narysować obszar rezonansu parametrycznego z zaznaczeniem punktów pomiarowych.
4. Zgodnie ze schematem maszynowym, dokonać odpowiednich połączeń na tablicy krosowej maszyny analogowej.
5. Przeprowadzić badania na maszynie analogowej, obserwując na monitorze przebieg drgań układu przy warunkach początkowych i różnych wartościach λ^2 , zgodnie z podanymi w Tabeli 13.1 nastawami potencjometrów.
6. Narysować przebieg drgań, podając przy tym warunki badań.
7. Ocenic, czy charakter przebiegu drgań jest zgodny z wynikami badań teoretycznych.

13.5. Opracowanie wyników

W sprawozdaniu należy zamieścić:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat rozpatrywanego układu mechanicznego.
3. Wyprowadzenie równania maszynowego.
4. Schemat maszynowy z krótkim opisem jego struktury w skojarzeniu z równaniem maszynowym.
5. Rysunek obszaru rezonansu parametrycznego oraz rysunki przebiegów drgań dla czterech punktów pomiarowych.
6. Wnioski i uwagi.

Tabela 13.1. Zestawienie danych do realizacji ćwiczenia i wyniki pomiarów

Nastawy	$\mu = 0,1$		$\mu = 0,2$	
α_1	0,250	0,250	0,250	0,250
α_2	0,250	0,250	0,250	0,250
α_4	0,107	0,097	0,182	0,194
$\lambda^2 = \alpha_5 k_5$	1,070	0,970	0,865	0,940
α_{10}	0,190	0,190	0,050	0,010
$\alpha_{\ddot{\varphi}}/\alpha_{\varphi}$	1,000	1,000	1,000	1,000

Bibliografia

- [1] OSIŃSKI Z.: *Teoria drgań*. Warszawa, PWN, 1980.
- [2] PISZCZEK K., WALCZAK J.: *Drgania w budowie maszyn*. Warszawa, PWN, 1978.
- [3] SZABELSKI K.: Analiza drgan skrętnych układu o zmiennym momencie bezwładności i nieliniowym członie sprężystym. *Archiwum budowy maszyn*, 19(1) 1972.

Ćwiczenie 14

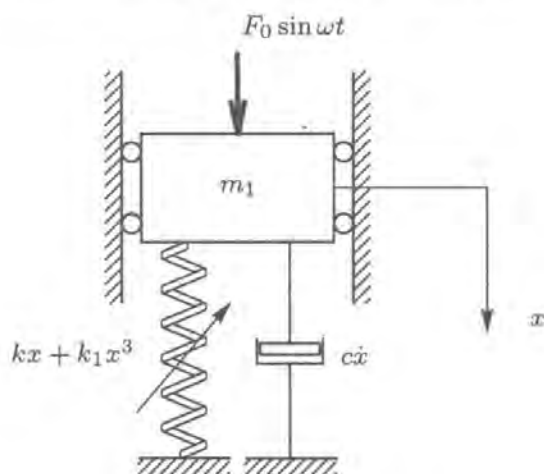
Drgania nieliniowe układu o jednym stopniu swobody

14.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie własności nieliniowych układów drgających oraz wyznaczenie, na podstawie badań eksperymentalnych, krzywej rezonansowej układu o nieliniowej charakterystyce sprężystości typu Duffinga.

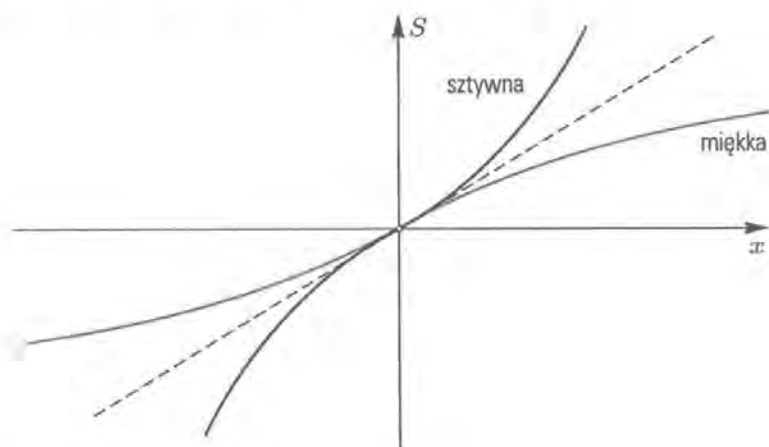
14.2. Podstawy teoretyczne

Wyznaczenie rozwiązania ścisłego równań różniczkowych opisujących drgania układów nieliniowych jest możliwe tylko w bardzo nielicznych przypadkach. Dlatego też, do analitycznego badania drgań układów nieliniowych stosuje się metody przybliżone. Jedną z metod analitycznych, służących do przybliżonego rozwiązania zwyczajnych, nieliniowych równań różniczkowych, jest metoda małego parametru Poincaré. Zostanie ona zastosowana do rozwiązania równania różniczkowego opisującego drgania masy skupionej posadowionej na sprężynie o nieliniowej charakterystyce i liniowym tłumiku wiskotycznym. Ruch masy jest wymuszany okresową siłą harmoniczną. Model układu przedstawiony jest na Rysunku 14.1.



Rys. 14.1. Model badanego układu nieliniowego

Nieliniowa siła sprężystości, opisana jest funkcją nieparzystą, symetryczną względem początku układu współrzędnych $S(x) = kx + k_1x^3$. Ten typ nieliniowości nazywany jest modelem Duffinga.



Rys. 14.2. Nieliniowe charakterystyki siły sprężystości

Jeśli parametr k_1 jest równy zero wówczas siła sprężystości jest opisana funkcją liniową (linia kreskowa na Rysunku 14.2), w przypadku $k_1 > 0$ otrzymujemy tzw. charakterystykę sztywną, zaś gdy $k_1 < 0$ charakterystykę miękką. Równanie różniczkowe ruchu układu przedstawionego na Rysunku 14.1 przyjmuje następującą postać

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx + k_1x^3 = F_0 \sin \omega t, \quad (14.1)$$

gdzie: c — współczynnik tłumienia wiskotycznego, m — masa drgająca, k , k_1 — współczynniki opisujące funkcję sprężystości (odpowiednio współczynnik liniowy i nieliniowy), F_0 — amplituda siły wymuszającej, ω — częstość wymuszenia.

Pominięcie siły ciężkości w równaniu (14.1) wynika z przyjęcia początku układu odniesienia (współrzędnej uogólnionej x) w punkcie równowagi statycznej układu, przy założeniu, że wpływ członu nieliniowego na deformację statyczną jest niewielki. Założenie takie możemy zrobić dla niewielkich wartości tego odkształcenia.

Dzieląc obie strony równania przez m , a następnie wprowadzając oznaczenia: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\gamma = k_1/k$, $\omega_0^2 \gamma = k_1/m$, $2n = c/m$, $q_0 = F_0/m$ otrzymujemy zależność

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 (x + \gamma x^3) = q_0 \sin \omega t. \quad (14.2)$$

Metoda małego parametru Poincaré pozwala na wyznaczenie rozwiązań przybliżonych w przypadku gdy układ jest „słabo nieliniowy” — tzn. gdy

parametr γ w równaniu (14.2) jest znacznie mniejszy od jedności ($\gamma \ll 1$). Przyjmijmy zatem, że γ jest wielkością małą, która w dalszych rozważaniach będzie związana z małym parametrem jako $\gamma = \varepsilon \tilde{\gamma}$, gdzie ε jest formalnym małym parametrem. Ponadto tłumienie układu i amplituda wymuszenia zewnętrznego zostaną wyrażone odpowiednio jako $2n = \varepsilon \alpha$ i $q_0 = \varepsilon q$. Wówczas równanie (14.2) można przedstawić w postaci

$$\ddot{x} + \varepsilon \alpha \dot{x} + \omega_0^2 (x + \varepsilon \tilde{\gamma} x^3) = \varepsilon q \sin \omega t, \quad (14.3)$$

gdzie kropka nad współrzędną uogólnioną x oznacza jej pochodną czasową.

Rozwiązanie równania (14.3) jest poszukiwane w postaci szeregu wielomianów małego parametru

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) \dots, \quad (14.4)$$

gdzie $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ są okresowymi funkcjami czasu.

Załóżmy ponadto, że różnica pomiędzy częstością wymuszenia ω , a częstością drgań własnych ω_0 jest mała. Wówczas różnicę kwadratów tych wielkości można zapisać również jako szereg małego parametru

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots, \quad (14.5)$$

gdzie a_1 i a_2 są stałymi, pełniącymi rolę tzw. parametrów rozstrojenia.

Rozwiązanie zagadnienia zostanie wyznaczone z dokładnością do ε^1 (tj. pierwszej potęgi małego parametru). W tym celu należy podstawić rozwinięcia (14.4) i (14.5) do zależności (14.3), pomijając oczywiście człony zawierające mały parametr w potęgach większych niż pierwsza jako małe wyższego rzędu

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \dot{x}_0 + \varepsilon \alpha \dot{x}_0 + \\ + (\varepsilon a_1 + \omega^2) [(x_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon \tilde{\gamma} (x_0 + \varepsilon x_1)^3] = \varepsilon q \sin \omega t. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Po rozwinięciu równania (14.6) i zgrupowaniu względem potęg małego parametru równanie to będzie spełnione, gdy wyrażenia przy potęgach ε^0 i ε^1 będą równe zeru. Stąd otrzymuje się rekurencyjny układ równań różniczkowych

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad (14.7a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = q \sin \omega t - \alpha \dot{x}_0 - a_1 x_0 - \tilde{\gamma} \omega^2 x_0^3. \quad (14.7b)$$

Rozwiązanie równania (14.7a) które ma postać kombinacji funkcji trygonometrycznych

$$x_0 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (14.8)$$

należy podstawić do zależności (14.7b), skąd otrzymuje się

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -(a_1 A_1 + A_2 \alpha \omega) \cos \omega t + (-a_1 A_2 + A_1 \alpha \omega + q) \sin \omega t + \\ - \tilde{\gamma} \omega^2 (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)^3. \quad (14.9)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t), \quad (14.10a)$$

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t) \quad (14.10b)$$

równanie (14.9) przedstawia się w postaci

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = - \left[a_1 A_1 + A_2 \alpha \omega + \frac{3}{4} A_1 \tilde{\gamma} \omega^2 (A_1^2 + A_2^2) \right] \cos \omega t + \\ - \left[a_1 A_2 - A_1 \alpha \omega - q + \frac{3}{4} A_2 \tilde{\gamma} \omega^2 (A_1^2 + A_2^2) \right] \sin \omega t + \quad (14.11) \\ - \frac{1}{4} A_1 \tilde{\gamma} \omega^2 (A_1^2 - 3A_2^2) \cos 3\omega t + \frac{1}{4} A_2 \tilde{\gamma} \omega^2 (A_2^2 - 3A_1^2) \sin 3\omega t.$$

Aby uzyskać rozwiązanie okresowe odpowiadające drganiom wymuszonym, człony przy czynnikach $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ muszą być równe zeru. W przeciwnym przypadku w rozwiązaniu pojawiłyby się tzw. człony sekularne — nazywane też członami wiekowymi — typu $x_1 = Bt \cos \omega t$, które powodowałyby narastanie drgań do nieskończoności.

Zatem, aby uzyskać rozwiązania okresowe na x_1 , muszą być spełnione następujące warunki

$$A_1 \left(a_1 + \frac{3}{4} \tilde{\gamma} \omega^2 A^2 \right) + A_2 \alpha \omega = 0, \quad (14.12a)$$

$$-A_1 \alpha \omega + A_2 \left(a_1 + \frac{3}{4} \tilde{\gamma} \omega^2 A^2 \right) = q, \quad (14.12b)$$

gdzie: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ jest wypadkową amplitudą drgań.

Wyznaczając z równania (14.12a) A_1 i A_2 z równania (14.12b), podnosząc do kwadratu i dodając stronami otrzymuje się

$$q^2 \alpha^2 \omega^2 + q^2 \left(a_1 + \frac{3}{4} \tilde{\gamma} \omega^2 A^2 \right)^2 + \\ - A^2 \left[\alpha^2 \omega^2 + \left(a_1 + \frac{3}{4} \tilde{\gamma} \omega^2 A^2 \right) \left(a_1 + \frac{3}{4} \tilde{\gamma} \omega^2 A^2 \right) \right] = 0. \quad (14.13)$$

Korzystając z relacji (14.5) w pierwszym przybliżeniu zachodzi zależność

$$a_1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\varepsilon}, \quad (14.14)$$

co po podstawieniu do (14.13), a następnie pomnożeniu przez ε^4 prowadzi do równania, z którego możemy wyznaczyć amplitudy drgań w otoczeniu rezonansu (tzw. krzywa rezonansowa)

$$\varepsilon^4 q^2 \alpha^2 \omega^2 + \varepsilon^2 q^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \tilde{\gamma} \omega^2 A^2 \right) + \quad (14.15)$$

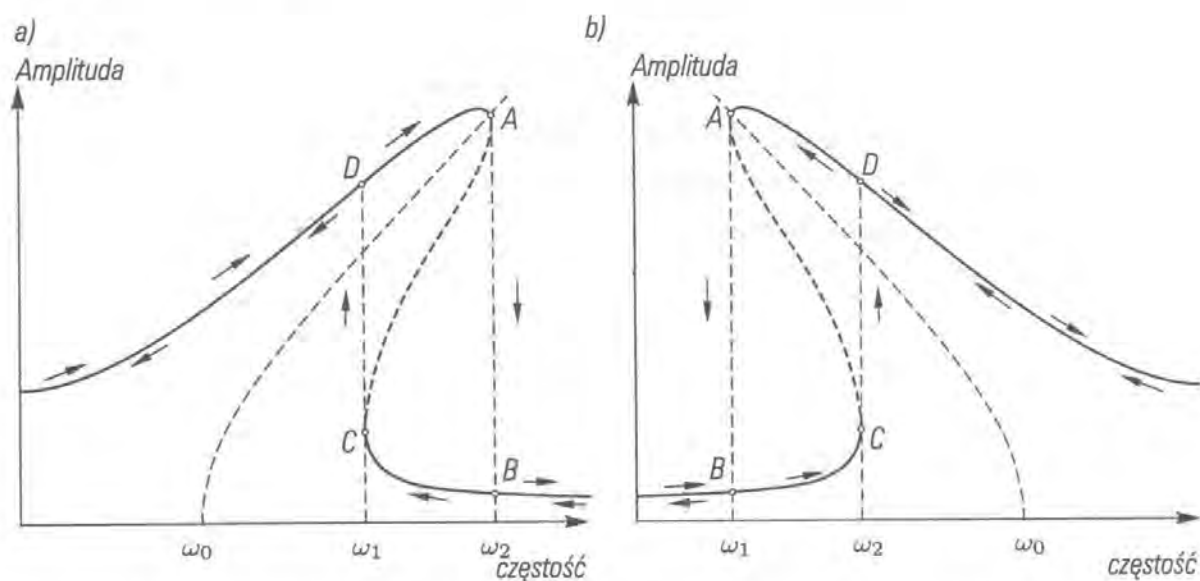
$$- A^2 \left[\varepsilon^2 \alpha^2 \omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \tilde{\gamma} \omega A^2 \right) \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \tilde{\gamma} \omega^2 A^2 \right) \right] = 0,$$

a po wprowadzeniu pierwotnych oznaczeń $\varepsilon \alpha = 2n$, $\varepsilon q = q_0$, $\varepsilon \tilde{\gamma} = \gamma$, równanie to ma postać

$$4n^2 q_0^2 \omega^2 + q_0^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^2 \right) + \quad (14.16)$$

$$- A^2 \left[4n^2 \omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \gamma \omega A^2 \right) \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^2 \right) \right] = 0.$$

Przykładowy przebieg krzywej rezonansowej $A(\omega)$ sporządzony dla przypadków $\gamma > 0$ i $\gamma < 0$ przedstawiono na rysunku Rysunku 14.3 odpowiednio a i b.



Rys. 14.3. Charakterystyki rezonansowe dla sztywnej a) i miękkiej b) charakterystyki siły sprężystości

Z zamieszczonych wykresów widać, że w pewnym zakresie częstości wymuszania możliwe są drgania o trzech amplitudach. W przypadku wykresu dla charakterystyki sztywnej (Rysunek 14.3a) drgania o amplitudach określonych odcinkiem krzywej AC są niestateczne, tzn. fizycznie nie da się zrealizować ruchu o takich wartościach amplitud. Tak więc jeżeli będzie wyznaczona doświadczalnie krzywa rezonansowa poprzez wymuszenie układu siłą

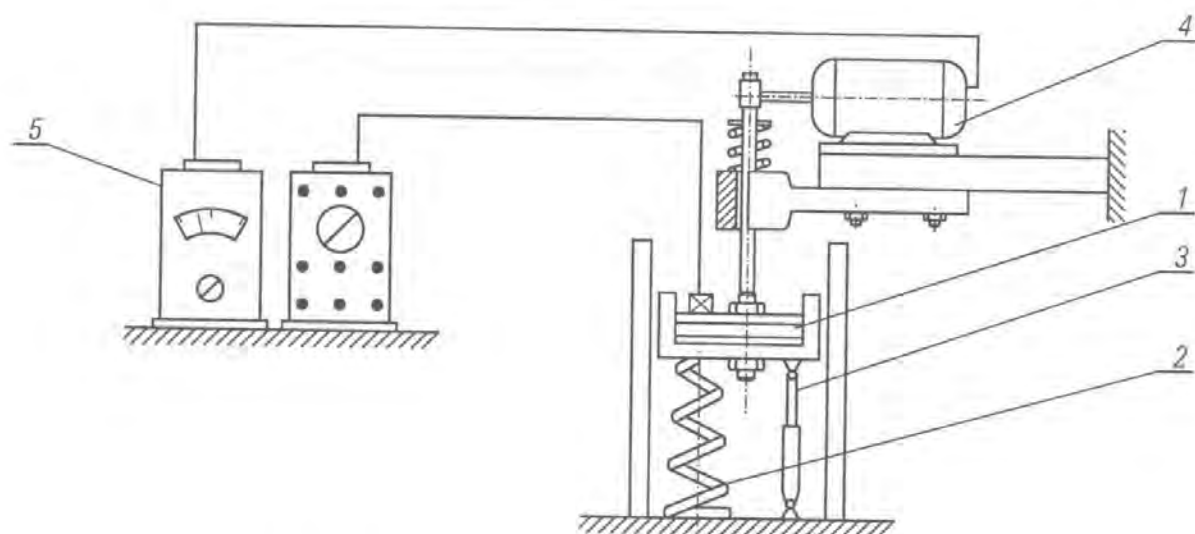
o zwiększającej się częstości (strzałki powyżej krzywej), to zmiana wartości amplitudy następuje według krzywej ($D \rightarrow A \rightarrow B$) bowiem po przekroczeniu punktu A następuje przeskok amplitudy do wartości określonej przez punkt B . Przy zmniejszeniu częstości wymuszenia drgań (strzałki poniżej krzywej), zmiana amplitudy realizuje się według krzywej oznaczonej punktami ($B \rightarrow C \rightarrow D$), gdyż w tym przypadku, w punkcie C następuje przeskok do punktu D , tzw. zerwanie amplitudy — tak więc fragment krzywej amplitudowej AC jest niestabilny (niestateczny). Analogicznie zjawiska zachodzą w przypadku zmiany częstości wymuszenia dla układu nieliniowego z charakterystyką miękką (Rysunek 14.3b), gdzie zerwanie amplitud następuje najpierw w punkcie C z przeskokiem do D (przy wzroście częstości wymuszenia), oraz w punkcie A z przeskokiem do B (przy zmniejszaniu częstości wymuszenia).

Na Rysunkach 14.3a i 14.3b liniami przerywanymi zaznaczono linie szkieletowe, przedstawiające zależność amplitudy drgań od częstości w przypadku drgań własnych bez tłumienia.

14.3. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko badawcze (Rysunek 14.4) składa się z układu który może wykonywać wymuszony ruch drgający oraz mierników drgań pozwalających zarejestrować amplitudę i częstość drgań masy.

Masa drgająca (1) zamocowana jest na nieliniowej sprężynie (2) o sztywnej charakterystyce sprężystości oraz na liniowym tłumiku hydraulicznym (3). Ruch masy wymuszany jest za pomocą silnika elektrycznego (4) za po-



Rys. 14.4. Schemat stanowiska badawczego

średnictwem mimośrod. Urządzenia pomiarowe (5) pozwalają na pomiar częstości i amplitudy drgań masy (1).

14.4. Przebieg ćwiczenia

Przed przystąpieniem do wykonywania ćwiczenia należy zapoznać się z instrukcją obsługi przyrządów pomiarowych. W dalszej kolejności uzyskać od prowadzącego ćwiczenie dane odnośnie wielkości przedstawionych w pierwszej kolumnie Tabeli 14.1. Następnie włączyć urządzenie pomiarowe i uruchomić zespół napędowy wymuszania. Regulując opór wzbudzenia silnika elektrycznego zmieniać jego prędkość obrotową, a przez to częstość wymuszenia. Należy zanotować wartości amplitud drgań w kilku punktach przy narastaniu prędkości obrotowej silnika. Następnie powtórzyć pomiary amplitud drgań masy (1) dla malejących częstości wymuszenia.

14.5. Opracowanie wyników

Wyniki pomiarów i obliczeń należy zanotować w Tabelach 14.1 i 14.2, odpowiednio zwiększając, a następnie zmniejszając częstość wymuszenia. W trakcie ćwiczenia w kolumnach drugiej i trzeciej należy podać średnie wartości amplitud i odpowiadające im częstości. Na podstawie tych pomiarów wykreślić doświadczalną krzywą amplitudową.

W celu sporządzenia wykresu przebiegu teoretycznej krzywej rezonansowej należy wyznaczyć przebieg czasowy drgań własnych, rejestrując małe

Tabela 14.1. Wyniki pomiarów przy zwiększaniu częstości wymuszenia

Nr parametru [–]	x_{pom} [mm]	x_{teoret} [mm]	ω_{pom} [Hz]	ω_{pom} [rad/s]	ω_{teoret} [rad/s]
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Tabela 14.2. Wyniki pomiarów przy zmniejszaniu częstości wymuszenia

Nr parametru [–]	x_{pom} [mm]	x_{teoret} [mm]	ω_{pom} [Hz]	ω_{pom} [rad/s]	ω_{teoret} [rad/s]
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

drgania układu wokół położenia równowagi, wywołane krótkotrwałym zaburzeniem. Z przebiegu czasowego odczytać częstość drgań własnych tłumionych ω_1 oraz logarytmiczny dekrement tłumienia $\Delta = \ln(A_{n+1}/A_n)$. Biorąc po uwagę, że $\Delta = nT_1$, gdzie $T_1 = 2\pi/\omega_1$, wyznaczyć współczynnik tłumienia n ($n = \Delta/T_1 = \Delta\omega_1/(2\pi)$). Częstość drgań własnych ω_0 określić zgodnie z zależnością $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + n^2}$, gdzie ω_1 jest zmierzoną częstością drgań własnych tłumionych. Wielkość $q_0 = F_0/m$ obliczyć na podstawie danych uzyskanych od prowadzącego ćwiczenia. Dla tak określonych rzeczywistych parametrów układu, na podstawie zależności (14.16), wykreślić teoretyczną krzywą rezonansową wyznaczając położenia punktów A, B, C i D. Tak uzyskane wyniki należy porównać z wynikami zarejestrowanymi przez aparaturę pomiarową.

14.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy zamieścić:

1. Cel ćwiczenia.
2. Schemat badanego układu.
3. Podstawowe wzory i obliczenia.
4. Tablice pomiarów i obliczeń.
5. Doświadczalną krzywą rezonansową oraz teoretyczną krzywą rezonansową przedstawiając na niej punkty charakterystyczne.
6. Wnioski i uwagi.

Bibliografia

- [1] AWREJCEWICZ J.: *Dynamika nieliniowa maszyn*. Łódź, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 1984.
- [2] GIERGIEL J.: *Drgania mechaniczne*. Kraków, Wydawnictwo AGH, 2000.
- [3] OSIŃSKI Z.: *Teoria drgań*. Warszawa, PWN, 1980.
- [4] PISZCZEK K., WALCZAK J.: *Drgania w budowie maszyn*. Warszawa, PWN, 1978.
- [5] NAYFEH A., MOOK D.: *Nonlinear oscillations*. New York, John Willey & Sons, 1995.

Ćwiczenie 15

Drgania samowzbudne

15.1. Cel ćwiczenia

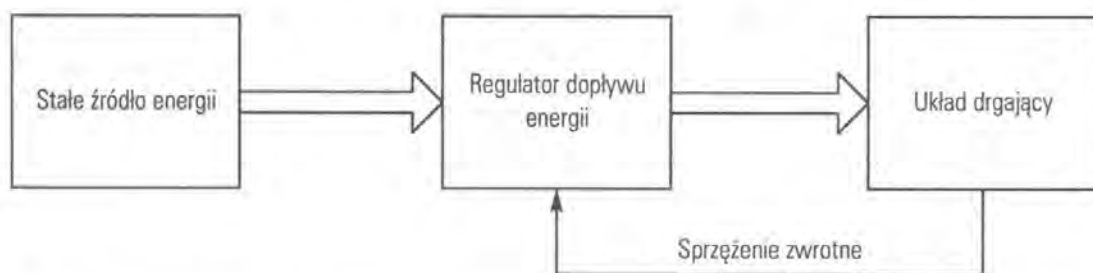
Celem ćwiczenia jest przeprowadzenie analizy drgań samowzbudnych układu wywołanych tarcie suchym oraz wyznaczenie zależności amplitudy tych drgań od prędkości wzajemnego przemieszczania się ciała drgającego i podłoża.

15.2. Podstawy teoretyczne

Drgania samowzbudne powstają w nieliniowych autonomicznych układach niezachowawczych opisanych klasą równań typu

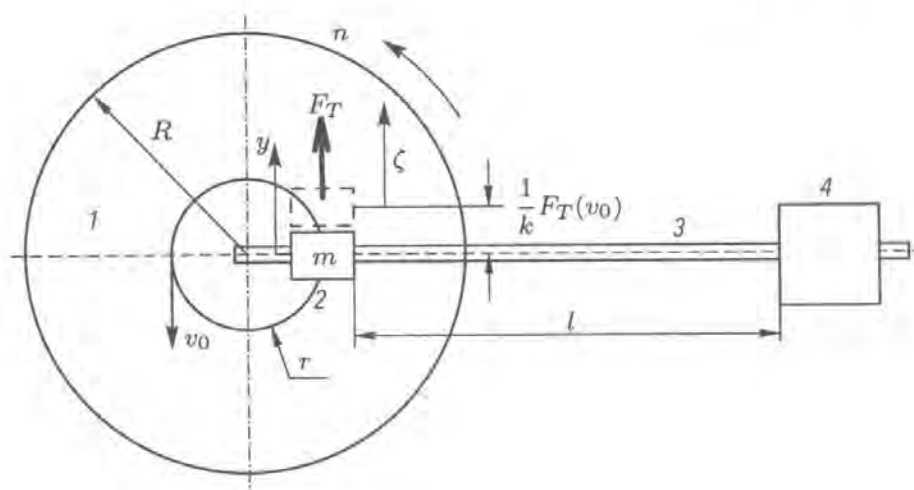
$$\ddot{x} + \omega_o^2 x + F(x, \dot{x}) = 0. \quad (15.1)$$

Najbardziej charakterystyczną cechą układów samowzbudnych jest sposób pobierania energii. Jej dopływ ze stałego źródła regulowany jest przez sam układ, który w ten sposób kompensuje straty energii podtrzymując drgania lub powodując ich narastanie. Schemat blokowy przepływu energii w układzie samowzbudnym przedstawia Rysunek 15.1.



Rys. 15.1. Schemat blokowy przepływu energii w układach samowzbudnych

W przypadku drgań samowzbudnych wywołanych tarcie suchym, układ drgający przyjęty do analizy (Rysunek 15.2) stanowi tarcza (1) na której ustawiono klocek (2) o masie m zamocowany na sprężystym pręcie (3). Drugi



Rys. 15.2. Schemat układu pomiarowego z tarciem suchym (widok z góry)

koniec pręta jest unieruchomiony w korpusie (4). Stałym źródłem energii jest tarcza (1) obracająca się z prędkością obrotową n . Przepływ energii reguluje siła tarcia suchego $F_T(w)$ występująca między klockiem (2) a tarczą (1), gdzie w jest prędkością klocka względem obracającej się tarczy.

Istnieje szereg przypadków, w których tarcie nie powoduje tłumienia dodatniego, lecz przyczynia się do wzrostu ujemnego tłumienia. Jest więc przyczyną powstawania drgań samowzbudnych. Tego typu drgania można stwierdzić np. podczas skrawania (*chatter*), rozruchu ciężkich pociągów lub w suchych łożyskach ślizgowych i oporowych. Podobne zjawiska drgań samowzbudnych występują w niewyważonych kołach pojazdów (*shimmy*) oraz przy opływie drgających cięgien, prętów czy powłok przez powietrze (zjawisko *flutter*).

Wyniki badań teoretycznych i doświadczalnych dowodzą, że mechaniczne drgania samowzbudne powstają w układach ciernych jedynie w pewnym zakresie prędkości względnej, tj. wtedy gdy charakterystyka tarcia w funkcji prędkości względnej pomiędzy tarczą a klockiem jest opadająca. Przykład tego rodzaju opadającej charakterystyki przedstawiono na Rysunku 15.3.

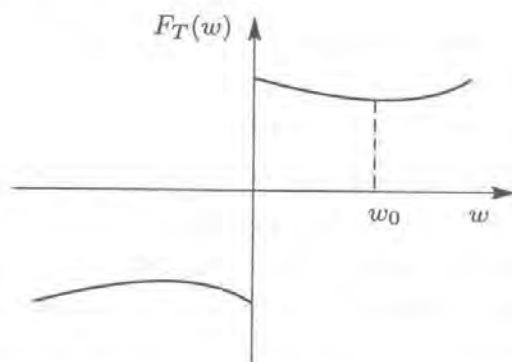
Dla układu przedstawionego na Rysunku 15.2, prędkość względna w wyraża się wzorem

$$w = v_o - \dot{y}, \quad (15.2)$$

gdzie $\dot{y}$ — bezwzględna prędkość klocka (2), a v_o — prędkość liniowa punktu na tarczy w miejscu położenia klocka.

Równanie różniczkowe ruchu klocka ma postać

$$m\ddot{y} = -ky + F_T(w), \quad (15.3)$$



Rys. 15.3. Zależność siły tarcia suchego od prędkości względnej obu powierzchni (charakterystyka tarcia)

gdzie k jest sztywnością giętą pręta (3). Gdy klocek znajduje się w równowadze pod działaniem sił sprężystości i siły tarcia przesunie się o wartość $1/k \cdot F_T(v_o)$ wzdłuż kierunku współrzędnej y i zajmie położenie zaznaczone na Rysunku 15.2 linią kreskową. W związku z tym wprowadzono nową współrzędną ζ zdefiniowaną następująco

$$\zeta = y - \frac{1}{k} F_T(v_o). \quad (15.4)$$

Wówczas równanie (15.3) przyjmuje postać

$$\ddot{\zeta} + \omega_o^2 \zeta = Q(\dot{\zeta}, v_o), \quad (15.5)$$

gdzie $Q(\dot{\zeta}, v_o) = 1/m[F_T(v_o - \dot{\zeta}) - F_T(v_o)]$ jest siłą niezachowawczą, a wielkość $\omega_o = \sqrt{k/m}$ jest częstością liniowych drgań własnych.

W celu zbadania zmiany energii układu spowodowanej przez tę siłę, równanie (15.5) można przedstawić następująco

$$m\dot{v} + k\zeta = Q(\dot{\zeta}, v_o), \quad (15.6)$$

gdzie $\dot{y} = \dot{\zeta} = v$.

Po pomnożeniu równania (15.6) przez v otrzymujemy

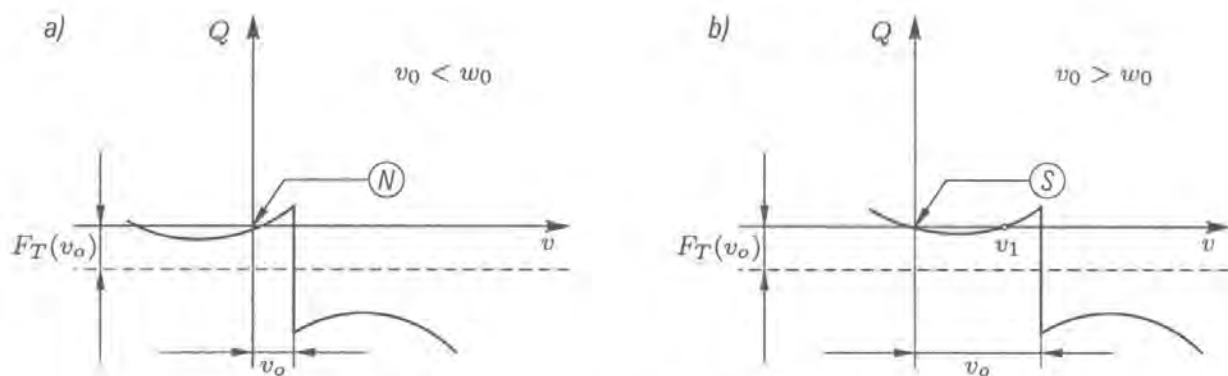
$$m\dot{v}v + k\zeta v = vQ(\dot{\zeta}, v_o). \quad (15.7)$$

Lewa strona zależności (15.7) jest pochodną energii całkowitej (kinetycznej i potencjalnej) doprowadzonej do układu, a tym samym chwilową prędkością zmiany jego energii całkowitej

$$m\dot{v}v + k\zeta v = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{k\zeta^2}{2} \right). \quad (15.8)$$

Jakościowa analiza zachowania się układu może być dokonana na podstawie prawej strony równania (15.7). Chwilowa prędkość zmiany energii całkowitej układu jest równa iloczynowi $v \cdot Q(\dot{\zeta}, v_o)$. Jeżeli w rozważanym układzie siły niezachowawcze $Q(\dot{\zeta}, v_o)$ i prędkość v mają zwroty zgodne ($v \cdot Q > 0$) to energia całkowita rośnie (jest doprowadzana do układu), gdy mają zwroty przeciwne $v \cdot Q < 0$, to energia całkowita maleje. Jeśli $v \cdot Q = 0$ to energia całkowita jest stała. Przebiegi siły niezachowawczej $Q(\dot{\zeta}, v_o)$ w funkcji v dla $v_o < w_o$ i $v_o > w_o$ przedstawiono na Rysunku 15.4. W zależności od wartości prędkości tarczy v_o w stosunku do odciętej w_o odpowiadającej minimum funkcji $F_T(w)$ (Rysunek 15.3) mamy do czynienia z następującymi przypadkami:

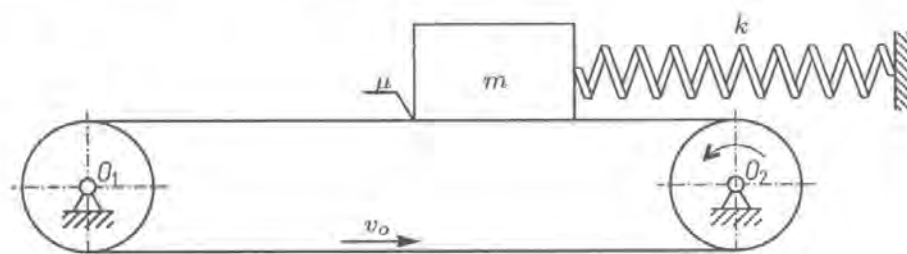
- gdy $v_o < w_o$ (Rysunek 15.4a), położenie równowagi (początek układu współrzędnych) jest niestateczne (N), bo w jego otoczeniu energia jest doprowadzana do układu ($v \cdot Q > 0$). Wówczas po dowolnie małym zaburzeniu początkowym powstaną drgania narastające w czasie, które przejdą w ustalone samowzbudne drgania okresowe (powstaje cykl graniczny). Ustalenie amplitudy drgań wynika stąd, że dla dużych wartości $|\dot{\zeta}|$ iloczyn $v \cdot Q$ zmienia znak i siła niezachowawcza Q tłumi drgania.
- dla $v_o > w_o$ i $F_T(v_o) > F_T(0)$ funkcja $Q(\dot{\zeta}, v_o)$ spełnia warunek dysypacyjności ($v \cdot Q < 0$) dla wszystkich wartości v i drgania samowzbudne nie powstaną (Rysunek 15.4b). Jeśli natomiast $v_o > w_o$ i jednocześnie $F_T(v_o) < F_T(0)$ funkcja $Q(\dot{\zeta}, v_o)$ spełnia warunek $v \cdot Q < 0$ dla wszystkich wartości v z wyjątkiem przedziału $0 < v_1 < v \leq v_o$. W tym przedziale położenie równowagi jest stateczne i drgania samowzbudne po dowolnie małym zaburzeniu nie powstaną, ale mogą powstać po dostatecznie dużym zaburzeniu początkowym (tzw. samowzbudzenie twarde).



Rys. 15.4. Wykresy funkcji $Q(\dot{\zeta}, v_o)$ dla a) $v_o < w_o$, b) $v_o > w_o$

Stanowisko przedstawione na Rysunku 15.2 może być zastąpione układem zastępczym, pokazanym na Rysunku 15.5 i będącym klasycznym przykładem układu samowzbudnego. Składa się ono z pasa napędzanego przez

bęben, sprężyny i masy umieszczonej na taśmie. Współczynnik tarcia pomiędzy klockiem a taśmą wynosi μ . Oba prezentowane układy są równoważne i mogą być stosowane wymiennie.



Rys. 15.5. Model zastępczy stanowiska pomiarowego przeznaczonego do badania drgań samowzbudnych

15.3. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko do badania drgań samowzbudnych przedstawione na Rysunku 15.2 składa się z tarczy (1), zaopatrzonej w licznik obrotów i napędzanej silnikiem elektrycznym, klocka (2) o masie m zamocowanego na pręcie (3). Drugi koniec pręta jest unieruchomiony w bloczku (4). Długość pręta można regulować przesuując jego punkt zamocowania w bloczku (4) lub dodatkowo w klocku (2). Drgania klocka są rejestrowane za pomocą systemu pomiarowego złożonego z laserowego czujnika przemieszczenia lub akcelometru piezoelektrycznego.

Badania mogą być również prowadzone na układzie zastępczym prezentowanym na Rysunku 15.5.

15.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć wymiary pręta $b \times h$ dla pręta o przekroju prostokątnym lub średnicę d dla przekroju kołowego oraz długość czynną pręta l .
2. Obliczyć sztywność k pręta.
3. Zanotować wartość masy m klocka (2).
4. Po włączeniu silnika ustawić prędkość obrotową n tarczy (1) zadaną przez prowadzącego i określić prędkość liniową v_0 w miejscu, w którym znajduje się klocek (2).
5. Zmierzyć i zanotować wartość przyspieszenia i przemieszczenie klocka (2).
6. Pomiar powtórzyć dla kilku prędkości v_0 .

15.5. Opracowanie wyników

1. Obliczyć sztywność giętą pręta $k = 3EJ/l^3$ i częstość drgań własnych klocka ω_0 . Wielkość J jest geometrycznym momentem bezwładności przekroju pręta, a l długością pręta.
2. Sporządzić wykres amplitudy drgań w funkcji prędkości liniowej tarczy $A(v_0)$ oraz wykres przyspieszenia w funkcji prędkości liniowej tarczy $a(v_0)$.

15.6. Wykonanie sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Tabelę informacyjną.
2. Cel ćwiczenia.
3. Schemat badanego układu.
4. Podstawowe wzory i obliczenia.
5. Tabelę pomiarów i wyników obliczeń (Tabela 15.1 i Tabela 15.2).
6. Wykresy $A(v_0)$ i $a(v_0)$.
7. Uwagi i wnioski.

Tabela 15.1. Zestawienie danych i obliczeń wymaganych do realizacji ćwiczenia

$E =$	[MPa]	$m =$	[kg]	$J =$	[m ⁴]
$l =$	[m]	$b =$	[m]	$h =$	[m]
$R =$	[m]	$r =$	[m]	$d =$	[m]
$k =$	[N/m]	$n =$	[obr/min]	$\omega_0 =$	[rad/s]

Tabela 15.2. Zestawienie wyników obliczeń

Nr pomiaru	n	ω	v_0	a	A
[-]	[obr/min]	[rad/s]	[m/s]	[m/s ²]	[mm]
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Bibliografia

- [1] AWREJCEWICZ J.: *Drgania deterministyczne układów dyskretnych*. Warszawa, WNT, 1996.
- [2] OSIŃSKI Z.: *Teoria drgań*. Warszawa, PWN, 1980.
- [3] <http://neur.am.put.poznan.pl/dm/dm.htm> (1.IX.2006).
- [4] <http://www.daktik.rubikon.pl/Slowniczek/tarcie.htm> (1.IX.2006).
- [5] <http://fizyka.webpark.pl/statyka/tarcie/index.htm> (1.IX.2006).
- [6] <http://eduseek.interklasa.pl/artykuly/artykul/ida/3375/> (1.IX.2006).

Ćwiczenie 16

Dynamika pręta wywołana siłami tarcia

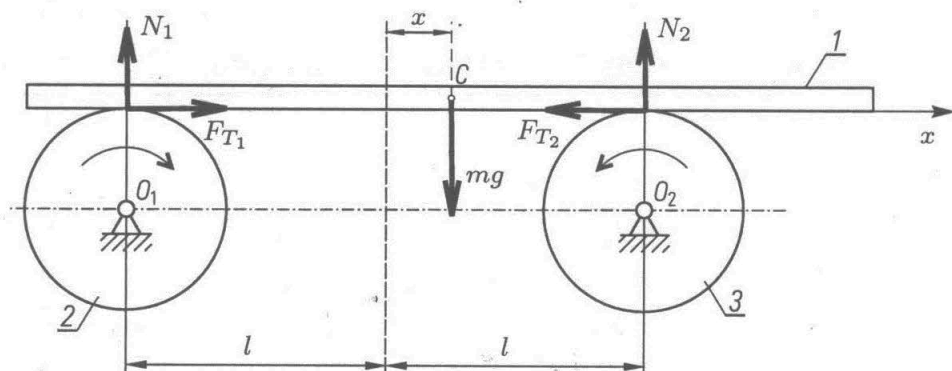
16.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie zmiany współczynnika tarcia w funkcji prędkości względnej poślizgu.

16.2. Podstawy teoretyczne

Do badania rozważanych w ćwiczeniu drgań własnych wykorzystane zostanie stanowisko laboratoryjne przedstawione na rysunku 16.1. Składa się ono z dwu obracających się z jednakową prędkością, lecz w przeciwne strony krążków (2) i (3) oraz znajdującego się na tych krążkach jednorodnego i sztywnego pręta (1) wprowadzanego w ruch siłami tarcia.

Niech masa pręta wynosi m , a jego oś Ox pozostaje prostopadła do osi każdego z krążków. Środki krążków leżą na prostej poziomej O_1O_2 w odległości $O_1O_2 = 2l$. Pręt wprowadzony jest w ruch poprzez siły tarcia powstające w punktach jego styku z krążkami. Siły te są proporcjonalne do nacisku pręta na krążki i zależą od współczynnika tarcia μ pomiędzy prętem a krążkiem. Przyjmijmy na początku stały współczynnik suchego tarcia μ w każdym



Rys. 16.1. Schemat badanego układu mechanicznego w dowolnej chwili czasu t

punkcie styku pręta i krążków. Ponieważ w rozważanym układzie w kierunku poziomym nie działają żadne inne siły, więc siły tarcia są jedynymi siłami generującymi ruch pręta. Do wyprowadzenia równania ruchu pręta można wykorzystać zasadę d'Alemberta zapisaną w postaci

$$-ma + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0. \quad (16.1)$$

Rozpatrując kierunek osi Ox pręta otrzymamy

$$-m\ddot{x} + F_{T_1} - F_{T_2} = 0. \quad (16.2)$$

Do określenia chwilowego przyspieszenia pręta $\ddot{x}$ należy zatem wyznaczyć siły tarcia F_{T_1} i F_{T_2} w funkcji chwilowego położenia środka masy pręta (punkt C). Za stan równowagi przyjmuje się takie położenie środka masy, kiedy obie siły nacisku są jednakowe — tzn. $N_1 = N_2$, a więc środek C leży w połowie odległości pomiędzy osiami bębnow. Po wysunięciu środka masy pręta o wielkość x z położenia równowagi, otrzymuje się zależności na odpowiednie siły nacisku

$$N_1 = \frac{l-x}{2l}mg \quad \text{ i } \quad N_2 = \frac{l+x}{2l}mg, \quad (16.3)$$

zaś siły tarcia równe są

$$T_1 = \mu N_1 = \mu mg \frac{l-x}{2l} \quad \text{ i } \quad T_2 = \mu N_2 = \mu mg \frac{l+x}{2l}. \quad (16.4)$$

Podstawiając (16.4) do równania (16.2) otrzymuje się równanie ruchu pręta

$$-m\ddot{x} + \mu mg \frac{l-x}{2l} - \mu mg \frac{l+x}{2l} = 0, \quad (16.5)$$

a po przekształceniach upraszczających

$$\ddot{x} + \mu \frac{g}{l} x = 0. \quad (16.6)$$

Dokonując podstawienia

$$\omega_0^2 = \mu \frac{g}{l}$$

równanie ruchu otrzymuje ostateczną postać

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (16.7)$$

Jest to równanie prostego ruchu harmonicznego, którego częstość kołowa wynosi

$$\omega_0 = \sqrt{\mu \frac{g}{l}}. \quad (16.8)$$

Okres tego ruchu wynosi

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}. \quad (16.9)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego (16.7) jest kombinacja algebraiczna funkcji trygonometrycznych

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t.$$

Wartości stałych całkowania C_1 i C_2 wyznacza się na podstawie warunków początkowych

$$x(t)|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = x_0, \quad (16.10a)$$

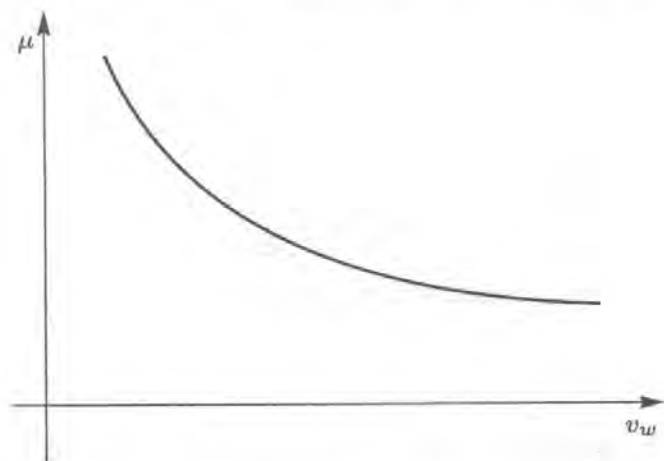
$$\dot{x}(t)|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad (16.10b)$$

gdzie x_0 jest wychyleniem środka pręta od stanu równowagi w chwili początkowej.

Ostatecznie zatem dla rozważanego przypadku rozwiązanie równania (16.7) przyjmuje postać

$$x = x_0 \cos \omega_0 t. \quad (16.11)$$

Rozpatrzmy teraz wpływ małej zmiany współczynnika tarcia w zależności od prędkości względnej, tj. prędkości poślizgu pręta na ruchomych krążkach. Zwróćmy uwagę, że krążek (3) obracający się w stronę przeciwną do ruchu pręta ma większą prędkość względną i — zgodnie z Rysunkiem 16.2 — mniejszy współczynnik tarcia. Drugi krążek posiada natomiast mniejszą prędkość względną, a więc występująca tam siła tarcia będzie większa.



Rys. 16.2. Zależność współczynnika tarcia od prędkości względnej

Na średnie stałe tarcie wywołujące prosty ruch harmoniczny przedstawiony równaniem (16.6) nakłada się druga siła wymuszająca, działająca cały czas w kierunku ruchu. Siła ta wykonuje dodatnią pracę. Amplituda tego ruchu będzie stopniowo narastać. W ten sposób powstaje samowzbudny ruch pręta, który łatwo zaobserwować podczas doświadczenia.

Układ przedstawiony na rysunku 16.1 można wykorzystać do wyznaczenia zmiany współczynnika tarcia w funkcji prędkości względnej. W tym celu należy przeprowadzić badania przy kilku prędkościach kątowych krążków, rejestrując przy tym wartości okresów drgań pręta. Współczynnik tarcia μ dla każdej prędkości kątowej bębnow można wyznaczyć z wyrażenia (16.9).

16.3. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko (Rysunek 16.1) składa się z pryzmatycznego, jednorodnego pręta (1) położonego na bębnach (2) i (3) o środkach w punktach odpowiednio O_1 i O_2 . Prędkości obrotowe obu krążków mogą być regulowane w sposób ciągły od 0 do 300 obr./min za pomocą wspólnego potencjometru. Wyposażeniem stanowiska jest przmiar liniowy i stoper.

16.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć rozstaw osi krążków O_1O_2 .
2. Określić położenie środka masy pręta C .
3. Ustalić prędkość obrotową krążków pozwalającą na zrealizowanie ruchu drgającego.
4. Położyć pręt na bębnach i dla ustalonej wartości początkowej x_0 wyznaczyć doświadczalnie okres T drgań układu (mierzyć czas trzech pełnych wahań). Pomiary wykonać dla różnych prętów przy dwóch prędkościach obrotowych krążków i dwóch wartościach wychylenia początkowego x_0 .

16.5. Opracowanie wyników

1. Wyniki pomiarów wpisać do Tabeli 16.1, natomiast wyniki obliczeń wpisać do Tabeli 16.2.
2. Częstość kołową ruchu pręta wyznaczyć z zależności $\omega_0 = 2\pi/T$ na podstawie wyników pomiarów T .
3. Wartość współczynnika tarcia obliczyć z zależności $\mu = 4\pi^2 l / (gT^2)$.
4. Porównać wyznaczone współczynniki z wartościami podanymi w literaturze.

5. Wyznaczyć pięć punktów na krzywej $\mu = f(v_w)$. Sporządzić wykres.

Tabela 16.1. Zestawienie danych do realizacji ćwiczenia

Materiał pręta	$E =$	[MPa]	$l =$	[m]
$n_1 =$	[obr/min]	$n_2 =$	[obr/min]	

Tabela 16.2. Wyniki pomiarów i obliczeń

L.p.	Obroty	x_0	T_1	T_2	T_3	T_{sr}	ω	μ
		[m]	[s]	[s]	[s]	[s]	[Hz]	[-]
1.	n_1							
2.	n_2							
3.	n_1							
4.	n_2							

16.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać:

1. Schemat badanego układu.
2. Podstawowe wzory i obliczenia.
3. Tablicę pomiarów i wyników.
4. Wykres zależności $\mu = f(v_w)$.
5. Wnioski i uwagi.

Bibliografia

- [1] PISZCZEK K., WALCZAK I.: *Drgania w budowie maszyn*. Warszawa, PWN, 1972.
- [2] KURNIK W.: *Wykłady z mechaniki*. Warszawa, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, 2005.
- [3] OSIŃSKI Z.: *Teoria drgań*. Warszawa, PWN, 1978.

Ćwiczenie 17

Drgania płyty

17.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie drgań własnych płyty prostokątnej oraz odpowiadających im linii węzłowych.

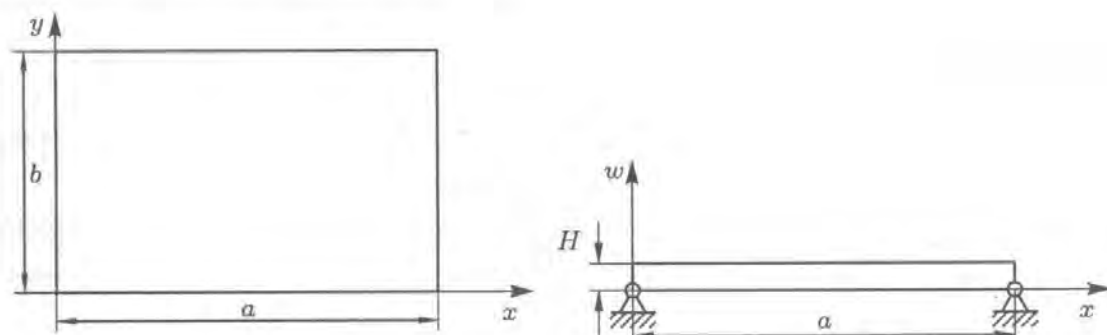
17.2. Podstawy teoretyczne

Niech dana będzie jednorodna, swobodnie podparta płyta prostokątna o wymiarach $a \times b$ i stałej grubości H (Rysunek 17.1). Rozpatrzone zostaną linio-
we drgania własne tej płyty. Wobec powyższego punkty warstwy obojętnej tej płyty przemieszczają się tylko w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty.

Równanie różniczkowe ruchu drgań poprzecznych płyty można zapisać w postaci

$$\rho_A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^2 w = 0, \quad (17.1)$$

gdzie ρ_A – masa przypadająca na jednostkę powierzchni płyty zginanej, $w(x, y, t)$ – ugięcie płyty, zaś operator ∇^2 działający na ugięcie $w(x, y, t)$ płyty jest zdefiniowany jako



Rys. 17.1. Model badanej płyty

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (17.2)$$

We wzorze (17.1) wielkość D oznacza sztywność walcową płyty i jest określona zależnością

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (17.3)$$

gdzie E to moduł sprężystości (Younga), ν – liczba Poissona, H – grubość płyty.

Rozwiązania równania (17.1) poszukuje się w postaci iloczynu funkcji

$$w(x, y, t) = w(x, y)T(t). \quad (17.4)$$

Wstawiając powyższe prognozowane rozwiązanie do równania różniczkowego (17.1) otrzymuje się

$$\rho_A w(x, y) \ddot{T}(t) + D \nabla^2 w(x, y) T(t) = 0. \quad (17.5)$$

Dzieląc powyższą zależność stronami przez iloczyn $w(x, y)$ i $T(t)$, a następnie przyrównując do stałej otrzymujemy

$$\frac{D \nabla^2 w(x, y)}{\rho_A w(x, y)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega_0^2. \quad (17.6)$$

W wyniku tego postępowania powstaje układ dwóch niezależnych równań różniczkowych

$$\ddot{T}(t) + \omega_0^2 T(t) = 0, \quad (17.7a)$$

$$\nabla^2 w(x, y) - \frac{\rho_A \omega_0^2}{D} w(x, y) = 0. \quad (17.7b)$$

Wartości stałej ω_0 dla których istnieją rozwiązania równania (17.7a) noszą nazwę wartości własnych, a odpowiadające im funkcje $w(x, y)$ spełniające równanie (17.7b) nazywają się funkcjami własnymi.

Warunki brzegowe dotyczące przemieszczeń i momentów gnących na poszczególnych krawędziach rozpatrywanej płyty przyjmują następującą postać

$$\begin{aligned} w(x, y) \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0, \\ w(x, y) \Big|_{y=0} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= 0, \\ w(x, y) \Big|_{x=a} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} &= 0, \\ w(x, y) \Big|_{y=b} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} &= 0. \end{aligned} \quad (17.8)$$

W związku z powyższym funkcję własną przewiduje się w postaci

$$w_{m,n}(x, y) = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (17.9)$$

gdzie m i n są dowolnymi liczbami naturalnymi.

Funkcja ta musi spełniać warunki brzegowe (17.8). Po podstawieniu (17.9) do (17.7b), otrzymuje się zależność na wartości własne płyty

$$\omega_{0m,n} = \sqrt{\frac{D}{\rho A} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}. \quad (17.10)$$

Punkty na powierzchni płyty (poza brzegami), dla których funkcje własne spełniają warunek

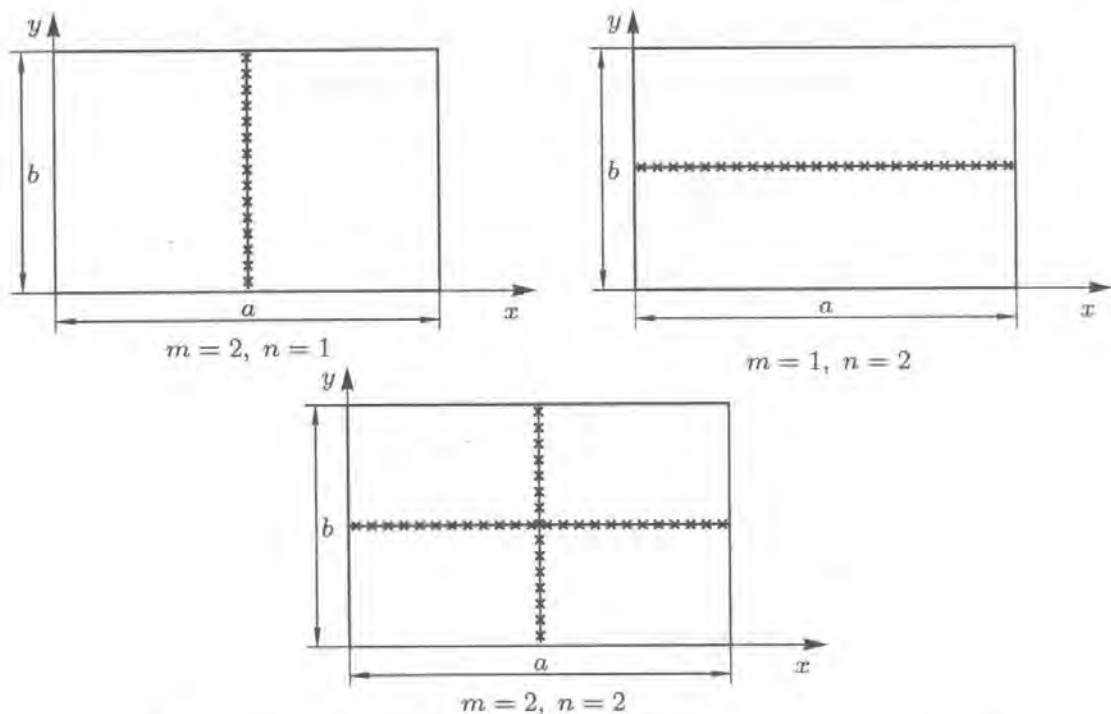
$$w_{m,n}(x, y) = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \quad (17.11)$$

nie przemieszczają się. Tworzą one tzw. linie węzłowe.

Pierwsza postać drgań ($m = 1$, $n = 1$) nie posiada linii węzłowych. A zatem wszystkie punkty płyty, poza punktami na krawędziach, poruszają się w tę samą stronę i jednocześnie przyjmują swoje ekstremalne położenia (tj. maksymalne wychylenie z położenia spoczynku). Kolejne postacie drgań występują wtedy, gdy m i n przyjmą wartości kolejnych liczb naturalnych. Niektóre przypadki linii węzłowych, dla wyższych niż pierwsza postać, przedstawiono na Rysunku 17.2.

Rozwiązaniem równania (17.1) jest funkcja

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{m,n} \cos \omega_{m,n} t + B_{m,n} \sin \omega_{m,n} t) \left(\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \right). \quad (17.12)$$



Rys. 17.2. Przykładowe postacie drgań płyty prostokątnej

Stałe $A_{m,n}$ i $B_{m,n}$ należy wyznaczyć z warunków początkowych określających kształt początkowego ugięcia płyty i prędkość początkową przemieszczania się warstwy obojętnej, tj. z zależności

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y). \quad (17.13)$$

17.3. Opis stanowiska badawczego

Stanowisko składa się ze stołu oraz zamocowanej na nim badanej płyty prostokątnej. Drgania płyty wywoływane są za pomocą przetwornika elektroakustycznego, zasilanego poprzez wzmacniacz z generatora sygnału harmonicznego o płynnie regulowanej częstotliwości.

17.4. Przebieg ćwiczenia

Przystępując do ćwiczenia należy uzyskać od prowadzącego informacje dotyczące stałych materiałowych płyty. Na ich podstawie wyznaczyć wartości stałych D i ρ_A niezbędnych do dalszych obliczeń. W dalszej kolejności dokonać pomiaru płyty oraz ustalić sposób jej zamocowania na brzegach, a następnie uzupełnić Tabelę 17.1.

Po zapisaniu warunków brzegowych, zakładając kształt początkowego ugięcia, wyznaczyć wartości własne $\omega_{0m,n}$. Obliczenia należy wykonać dla wszystkich kombinacji $m = 1, 2, 3$ oraz $n = 1, 2, 3$. Wyniki obliczeń teoretycznych zapisać we właściwej kolumnie Tabeli 17.2.

Przed przystąpieniem do części doświadczalnej ćwiczenia powierzchnię płyty posypać suchym piaskiem lub trocinami. Następnie włączyć wibrator i zmieniać częstotliwość wymuszenia drgań, aż do wystąpienia rezonansu płyty. Obserwować zjawisko gromadzenia się ziaren piasku wzdłuż nieruchomych miejsc płyty — tj. wzdłuż linii węzłowych. Przebieg tych linii należy narysować w sprawozdaniu. Częstotliwości rezonansowe dla zaobserwowanych częstości własnych płyty należy odczytać z generatora i wpisać do Tabeli 17.2.

17.5. Opracowanie wyników

Dane do przeprowadzenia ćwiczenia oraz wyniki wstępnych pomiarów zamieścić w Tabeli 17.1.

Tabela 17.1. Zestawienie danych do realizacji ćwiczenia

$E =$	[MPa]	$a =$	[m]	$\rho =$	[kg/m ³]
$H =$	[m]	$b =$	[m]	$D =$	[Nm]
$\nu =$	[—]	$\rho_A =$	[kg/m ²]		

Wyniki obliczeń zamieścić w Tabeli 17.2. Porównać wartości częstości $\omega_{m,n}$ wyznaczone na podstawie zależności teoretycznych i wartości uzyskane w wyniku realizacji ćwiczenia.

17.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu z ćwiczenia należy zamieścić następujące punkty:

1. Cel ćwiczenia.
2. Podstawowe wzory obliczeniowe.
3. Zapis warunków brzegowych dla badanej płyty.
4. Obliczenie częstości własnych.
5. Tabelę pomiarów 17.1 oraz tabelę wyników obliczeń — Tabela 17.2.
6. Rysunki płyty z naniesionymi liniami węzłowymi (przebiegi teoretyczne i doświadczalne).
7. Wnioski i uwagi.

Tabela 17.2. Zestawienie wyników obliczeń

Nr pomiaru	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>f</i> _{<i>mn</i>} (teoret.)	<i>f</i> _{<i>mn</i>} (pomiar.)	<i>ω</i> _{<i>mn</i>} (teoret.)	<i>ω</i> _{<i>mn</i>} (pomiar.)
[–]	[–]	[–]	[Hz]	[Hz]	[rad/s]	[rad/s]
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

Bibliografia



[1] OSIŃSKI Z.: *Teoria drgań*. Warszawa, PWN, 1978.
[2] GIERGIEL J.: *Drgania mechaniczne*. Kraków, Wydawnictwo AGH, 2000.

Dodatek A

Na kolejnych stronach przedstawiono wzór strony tytułowej sprawozdania z przebiegu zajęć oraz wzór teczki na raporty.

Politechnika Lubelska

Katedra Mechaniki Stosowanej

Sprawozdanie z laboratorium dynamiki maszyn

Tytuł ćwiczenia

Imię i nazwisko

1.
2.
3.
4.

Nr ćwiczenia

Grupa

Data

Rok akadem.

