

Podstawy teorii i analizy obróbki plastycznej metali

Podręczniki – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Mechaniczny
ul. Nadbystrzycka 36
20-618 LUBLIN

Zbigniew Pater
Grzegorz Samołyk

Podstawy teorii i analizy obróbki plastycznej metali



Politechnika Lubelska
Lublin 2011

Recenzent:

dr hab. inż. Andrzej Gontarz, prof. Politechniki Lubelskiej

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2011

ISBN: 978-83-62596-55-3

Wydawca: Politechnika Lubelska

ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin

Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej

Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej

ul. Nadbystrzycka 36A, 20-618 Lublin

tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl

www.biblioteka.pollub.pl

Druk: ESUS Agencja Reklamowo-Wydawnicza Tomasz Przybylak

www.esus.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl

Nakład: 100 egz.

SPIS TREŚCI

Od Autorów	9
1. Stan naprężenia	11
1.1. Definicja naprężenia	11
1.2. Równania różniczkowe równowagi	15
1.3. Tensor naprężenia	19
1.4. Niezmienniki stanu naprężenia	20
1.5. Naprężenie na płaszczyźnie. Przypadki szczególne	22
1.5.1. Naprężenie na ścianie skośnej	22
1.5.2. Naprężenia główne	24
1.5.3. Naprężenie oktaedryczne	26
1.5.4. Ekstremalne naprężenia styczne	28
1.6. Graficzna prezentacja stanu naprężenia	30
1.6.1. Koło Mohra	30
1.6.2. Gwiazda Pełczyńskiego	32
1.6.3. Ukośnokątny układ współrzędnych	33
1.7. Schematy naprężeń głównych	34
1.7.1. Płaski stan naprężenia	36
1.7.2. Osiowo-symetryczny stan naprężenia	37
2. Stan odkształcenia	39
2.1. Definicja odkształcenia	39
2.2. Odkształcenia plastyczne	43
2.3. Tensor odkształceń	44
2.4. Niezmienniki stanu odkształcenia	45
2.5. Graficzna prezentacja stanu odkształcenia	48
2.5.1. Koło Mohra	48
2.5.2. Gwiazda Pełczyńskiego	49
2.5.3. Ukośnokątny układ współrzędnych	50
2.6. Prędkość odkształcenia	51
2.7. Schematy odkształceń głównych. Płaski stan odkształcenia	53
3. Stan sprężysty	57
3.1. Związki między naprężeniem a odkształceniem	57
3.2. Energia odkształcenia sprężystego	60
4. Wytężenie odkształcanego metalu	63
4.1. Definicja wytężenia materiału	63

4.2.	Wybrane hipotezy wyężeniowe	65
4.2.1.	Hipotezy Lamé-Navier’a oraz Beltami’ego	65
4.2.2.	Hipoteza największego napężenia normalnego	66
4.2.3.	Hipoteza największego wydłużenia	66
4.2.4.	Hipoteza największego napężenia stycznego	68
4.2.5.	Hipoteza energii właściwej odkształcenia postaciowego	69
4.2.6.	Graficzna interpretacja hipotez wyężeniowych	70
4.3.	Wykresy stanów mechanicznych	74
4.3.1.	Wykresy wyężeniowe	75
4.3.2.	Wykresy napężeń granicznych	78
5.	Stan plastyczny	83
5.1.	Krzywa płynięcia metalu	83
5.1.1.	Idealizacja krzywej płynięcia	84
5.1.2.	Efekt Bauschingera	86
5.1.3.	Postulat Druckera	87
5.1.4.	Wybrane modele materiałów plastycznych	89
5.1.5.	Metody wyznaczania krzywej płynięcia	92
5.2.	Miary odkształcenia plastycznego	101
5.3.	Hipotezy umocnienia	103
5.3.1.	Hipoteza umocnienia izotropowego	103
5.3.2.	Hipotezy umocnienia anizotropowego	104
5.3.3.	Hipoteza umocnienia mieszanego	105
5.4.	Związki między napężeniem a odkształceniem w zakresie dużych odkształceń	106
5.4.1.	Odształceniowa teoria plastyczności	106
5.4.2.	Wybrane teorie plastycznego płynięcia	107
5.5.	Praca odkształcenia plastycznego	110
6.	Tarcie w obróbce plastycznej	113
6.1.	Modele tarcia stosowane w analizie procesów obróbki plastycznej	114
6.1.1.	Model Amontonsa oraz Coulomba	115
6.1.2.	Model tarcia stałego	115
6.1.3.	Zmodyfikowane modele tarcia	116
6.2.	Metody wykorzystywane do oceny tarcia	116
6.2.1.	Metoda spęczania kowadłami płaskimi	118
6.2.2.	Metoda granicznego kąta chwytu	119
6.2.3.	Metoda spęczania próbki klinowej	120
6.2.4.	Metoda spęczania pierścienia	121
6.2.4.	Metoda spęczania walca	123

6.3. Wartości współczynnika i czynnika tarcia w typowych procesach obróbki plastycznej	124
7. Rozdzielanie odkształcanego metalu	127
7.1. Wiadomości ogólne	127
7.2. Złom kruchy	129
7.3. Złom plastyczny	130
8. Metoda energetyczna	137
8.1. Wiadomości podstawowe	137
8.2. Spęczanie swobodne walca	138
8.3. Przepychanie pasma	142
8.4. Wyciskanie pasma przez matrycę płaską	148
8.4.1. Wyciskanie współbieżne	148
8.4.2. Wyciskanie przeciwbieżne	152
9. Metoda równań różniczkowych równowagi	161
9.1. Wiadomości podstawowe	161
9.2. Spęczanie swobodne bloku	162
9.3. Kucie w matrycach otwartych	167
9.4. Tłoczenie blach	172
9.4.1. Warunki równowagi	173
9.4.2. Rozkład naprężeń	175
9.4.3. Nacisk powierzchniowy	178
10. Metoda ocen granicznych	181
10.1. Wiadomości podstawowe	181
10.1.1. Ocena dolna wartości obciążenia granicznego	182
10.1.2. Ocena górna wartości obciążenia granicznego	183
10.2. Ciągnięcie pasma w płaskim stanie odkształcenia przy założeniu pól jednorodnych	184
10.2.1. Ocena dolna	184
10.2.2. Ocena górna	190
10.3. Ciągnięcie pasma w płaskim stanie odkształcenia przy założeniu pól niejednorodnych	195
10.3.1. Ocena dolna	195
10.3.2. Ocena górna	198
11. Metoda linii poślizgu i charakterystyk	207
11.1. Wiadomości podstawowe	207
11.1.1. Linie poślizgu i charakterystyk	207
11.1.2. Własności linii poślizgu	210
11.1.3. Siatki elementarne linii poślizgu	211
11.1.4. Wyznaczenie prędkości płynięcia	212

11.2. Spęczanie bloku	214
11.2.1. Spęczanie przy czynniku tarcia $m = 1$	214
11.2.2. Spęczanie przy czynniku tarcia $m < 1$	222
11.3. Ciągnięcie pasma	225
11.3.1. Ciągnięcie z $H/h < (H/h)_{gr}$	225
11.3.2. Ciągnięcie z $H/h = (H/h)_{gr}$	231
11.3.3. Ciągnięcie z $H/h > (H/h)_{gr}$	232
12. Metoda elementów skończonych	237
12.1. Wiadomości podstawowe	237
12.1.1. Ogólne zasady modelowania MES	240
12.1.2. Analiza quasi-statyczna metodą <i>implicit</i>	246
12.1.3. Analiza dynamiczna metodą <i>explicit</i>	250
12.2. Kucie bezwypływkowe	255
12.3. Dziurowanie tulei grubościennych w dwuwalcowej walcarce skośnej	260
12.3.1. Opis zastosowanego modelu MES	260
12.3.2. Wyniki obliczeń	263
12.4. Modelowanie pęknięcia metalu w wybranych procesach kształtowania plastycznego	271
12.4.1. Obciskanie obrotowe prętów okrągłych	271
12.4.2. Ciągnięcie prętów	273
12.5. Wytłaczanie swobodne	278
Literatura	281
Wykaz ważniejszych oznaczeń	287
Streszczenie	289

OD AUTORÓW

Podstawowym zadaniem teorii plastyczności jest opracowanie naukowych podstaw technologii obróbki plastycznej metali. Wymaga to m.in.:

- ustalenia warunków obróbki, w których materiały odkształcane wykazują najlepsze własności plastyczne;
- wyjaśnienia zależności między odkształceniami a zmianami własności fizycznych metali;
- stworzenia podstaw do matematycznego ujęcia wielkości sił występujących w procesach kształtowania plastycznego.

Niniejszy podręcznik ma na celu zapoznanie Czytelnika z podstawami teorii sprężystości i plastyczności, zagadnieniami tarcia i pękania metalu poddanego kształtowaniu oraz z metodami analizy procesów obróbki plastycznej.

Treść podręcznika zawarto w dwunastu częściach tematycznych. W rozdziałach od pierwszego do siódmego przedstawiono teorię stanu naprężenia i odkształcenia, podano zarys teorii sprężystości, omówiono teorię plastyczności, scharakteryzowano zagadnienia tarcia w obróbce plastycznej metali oraz zagadnienia związane z utratą spójności metalu. Natomiast w rozdziałach od ósmego do dwunastego omówiono następujące teoretyczne metody analizy procesów obróbki plastycznej: energetyczną, równań różniczkowych równowagi, ocen granicznych, linii poślizgów i charakterystyk oraz elementów skończonych. Niektóre z tych metod pozwalają tylko na obliczenie nacisku średniego na powierzchni styku metal-narzędzie, inne dodatkowo umożliwiają wyznaczenie rozkładu nacisków na powierzchni styku, a jeszcze inne pozwalają na określenie rozkładu naprężeń i odkształceń w całym obszarze metalu uplastycznionego. Możliwości obliczeniowe poszczególnych metod zilustrowano na przykładach obliczeniowych, które dobrano w ten sposób by umożliwić samodzielne studiowanie przedmiotu.

Podręcznik przeznaczony jest dla studentów wyższych szkół technicznych, studiujących na kierunku „*Mechanika i budowa maszyn*”. Może on być wykorzystany również do zajęć prowadzonych na innych kierunkach takich jak: „*Metallurgia*”, czy „*Inżynieria materiałowa*”. W celu rozszerzenia wiadomości z omawianego zakresu zaleca się Czytelnikom korzystanie z literatury specjalistycznej podanej na końcu opracowania. Umożliwi to rozwinięcie inwencji naukowej i zachęci do bardziej problemowego traktowania opracowanych zagadnień.

Obecna postać prezentowanego opracowania jest wydaniem wznowionym, poprawionym oraz uzupełnionym podręcznika pt. „*Podstawy teoretyczne obróbki plastycznej metali*”, który został wydany przez Wydawnictwo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Chełmie w 2007 roku. Decyzja o wznowieniu poprawionego wydania książki pod nowym tytułem wynika z dużego zainteresowania ze strony Czytelników oraz faktu, że poprzednie wydanie miało zbyt niski nakład. Ponadto, autorzy wzbogacili podręcznik o nowe, interesujące przykłady zastosowania teorii obróbki plastycznej do rozwiązywania problemów z zakresu obróbki plastycznej.

Na zakończenie wyrażamy podziękowania wszystkim tym, których uwagi przyczyniły się do podwyższenia jakości zawartego w podręczniku materiału. Szczególne podziękowania składamy Recenzentowi za cenne uwagi i spostrzeżenia, które wpłynęły na nadanie tej pracy jej obecnej postaci.

1. STAN NAPRĘŻENIA

1.1. Definicja naprężenia

Nieodzownym zjawiskiem, towarzyszącym procesom technologicznym oraz eksploatacji maszyn, jest występowanie obciążenia zewnętrznego P . Obciążeniem tym są siły powierzchniowe oraz siły masowe (ciężkości, bezwładności), które – w odróżnieniu od tej pierwszej grupy sił – działają na każdą cząstkę elementu konstrukcyjnego. Przykładowo, podczas procesu kucia na młocie odkuwki siły powierzchniowe pochodzą od nacisku narzędzi, a siły masowe są skutkiem bezwładności.

Oczywiście, aby element konstrukcyjny zachował swoją spójność, musi on pozostawać w mechanicznej równowadze wewnętrznej. Oznacza to, że obciążenie zewnętrzne musi zostać zrównoważone przez siły wewnętrzne, które zawsze działają między myślowo wyodrębnionymi cząstkami elementu konstrukcyjnego. W teorii sprężystości i plastyczności funkcjonuje pojęcie **ośrodka ciągłego**, pod którym należy rozumieć element konstrukcyjny posiadający budowę jednolitą i spójną [5, 28, 45, 58].

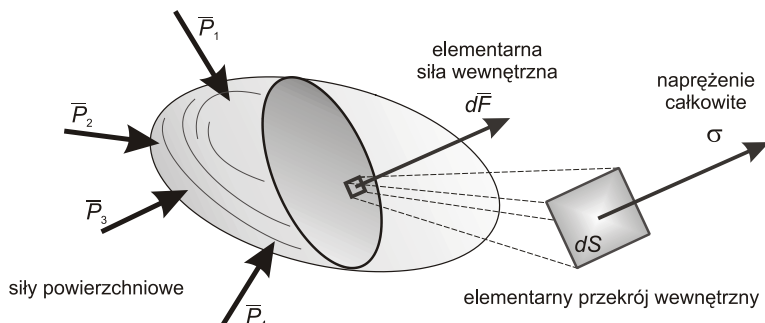
Miarą wyżej wspomnianych sił jest **naprężenie**, czyli intensywność sił wewnętrznych działających na myślowo wyodrębnionym przekroju wewnętrznym (rys. 1.1). Matematyczna definicja naprężenia, w wybranym punkcie elementu konstrukcyjnego, jest następująca:

$$\sigma = \frac{dF}{dS}, \quad [\text{Pa} \equiv \text{N/m}^2], \quad (1.1)$$

gdzie oznaczenia są zgodne z rys. 1.1: σ – naprężenie całkowite, dF – elementarna siła wewnętrzna, dS – elementarne pole przekroju wewnętrznego.

Naprężenie całkowite zawsze jest współliniowe z siłą wewnętrzną, tak jak to pokazano na rys. 1.1. Jednakże, kierunek danej siły nie zawsze jest prostopadły do przyjętego przekroju poprzecznego. Zatem, **naprężenie całkowite** σ można rozłożyć na dwie składowe – tj. **naprężenie normalne** σ_N oraz **naprężenie styczne** τ , które jest zawarte w płaszczyźnie wyodrębnionego przekroju wewnętrznego – tak jak to przedstawiono na rys. 1.2. Stąd wynika, że naprężenie całkowite jest sumą wektorową jego składowych, czyli:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_N + \vec{\tau}, \quad (1.2)$$



Rys. 1.1. Napężenie σ jako miara siły wewnętrznej dF działającej na myślowo wyodrębniony przekrój wewnętrzny dS przykładowej bryły

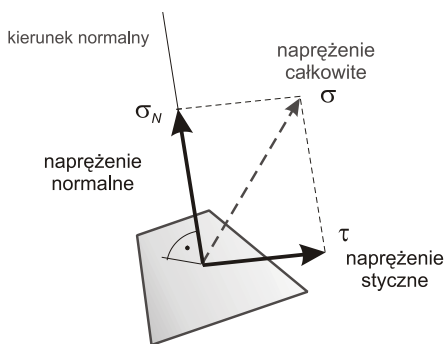
natomiast wartość liczbową napężenia całkowitego oblicza się z zależności:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_N^2 + \tau^2} \quad , \quad (1.3)$$

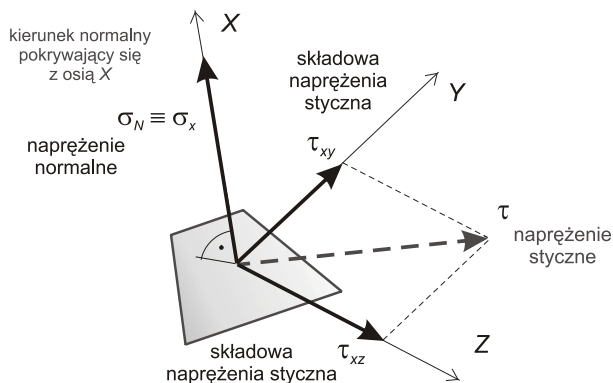
gdzie oznaczenia są zgodne z rys. 1.2.

Wprowadźmy teraz dowolny kartezjański układ odniesienia $\{x, y, z\}$ w taki sposób, aby kierunek $\{x\}$ był współliniowy z kierunkiem normalnym rozpatrywanego przekroju wewnętrznego, a pozostałe kierunki $\{y\}$ i $\{z\}$ były zawarte w tym przekroju. Teraz napężenie całkowite σ można rozłożyć na trzy składowe (rys. 1.3): jedno normalne – σ_x oraz dwie styczne – τ_{xy} i τ_{xz} . Należy zauważyć, że składowe napężenia styczne posiadają indeksy dwuliterowe. Pierwsza litera zawsze identyfikuje płaszczyznę zawierającą dane napężenie styczne – jednocześnie oznacza ona kierunek normalnej do tej płaszczyzny. Natomiast druga litera wskazuje na oś, która pokrywa się z kierunkiem rozpatrywanej składowej napężenia stycznego.

Załóżmy teraz, że mamy do czynienia z pewnym przypad-

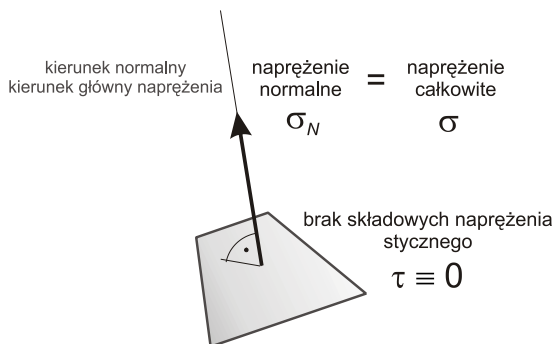


Rys. 1.2. Składowe napężenia całkowitego σ działającego na dowolnym przekroju wewnętrznym



Rys. 1.3. Składowe naprężenia całkowitego σ występującego na przekroju wewnętrznym, którego normalna jest współliniowa z osią $\{x\}$ dowolnie przyjętego kartezjańskiego układu współrzędnych

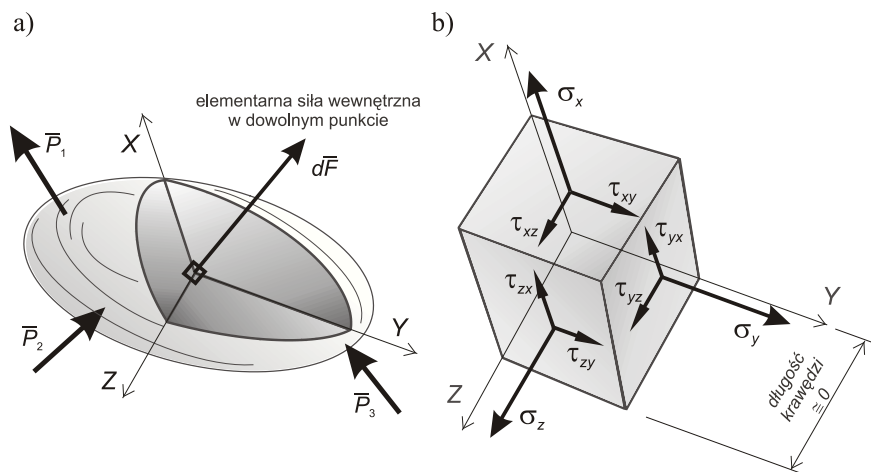
kiem szczególnym (rys. 1.4). Orientacja wybranego elementarnego przekroju wewnętrznego jest tak dobrana, że jej normalna jest współliniowa z kierunkiem naprężenia całkowitego. W rezultacie oznacza to, że naprężenie normalne σ_N jest jednocześnie naprężeniem całkowitym σ , natomiast **nie występuje** naprężenie styczne τ (jest ono równe zero). W takiej sytuacji naprężenie normalne (działające na elementarny przekrój wewnętrzny) nazywane jest **naprężeniem głównym**. Natomiast kierunek



Rys. 1.4. Interpretacja naprężenia głównego oraz kierunku głównego (opis w tekście)

normalny (do rozpatrywanego przekroju) jest nazywany **kierunkiem głównym**. Należy dodać, że dla każdego punktu ośrodka ciągłego istnieją trzy ortogonalne kierunki główne [24, 45, 59].

Powróćmy teraz do przykładowego ośrodka ciągłego przedstawionego na rys. 1.1. Wprowadźmy do niego dodatkowe dwa przekroje wewnętrzne, w taki sposób jak to zo-

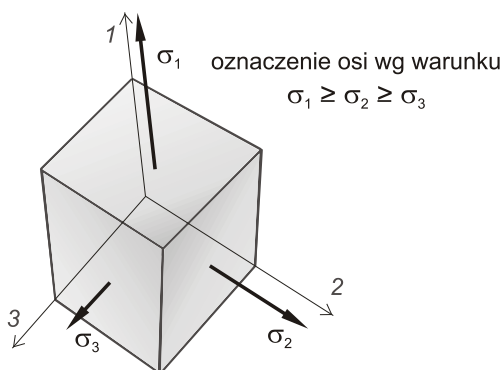


Rys. 1.5. Sposób przedstawiania stanu naprężenia w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego:
a) myślowo wydodrębnione trzy przekroje wewnętrzne oraz przyjęty dowolny układ współrzędnych $\{x, y, z\}$; b) składowe naprężenia w dowolnym punkcie przedstawione za pomocą elementarnego prostopadłościanu

brazowano na kolejnym rys. 1.5a. Przecięcie tych trzech płaszczyzn (które są wzajemnie ortogonalne) tworzy punkt, w którym chcemy określić **stan naprężenia**. Aby móc to zrobić musimy podać wszystkie składowe naprężenia. W tym celu myślowo wydodrębniamy elementarny prostopadłościan (rys. 1.5b), który zarazem reprezentuje wybrany punkt elementu konstrukcyjnego. Taką umowną formę wizualizacji naprężenia stosuje się w teorii sprężystości i plastyczności [5, 28] po to, aby czytelnie przedstawić wszystkie jego składowe – czyli stan naprężenia panujący w danym punkcie. Oczywiście, przyjęty układ współrzędnych $\{x, y, z\}$ jest układem dowolnym. Jednak, jeżeli jego orientacja w przestrzeni zostanie tak dobrana, że osie pokryją się z kierunkami głównymi, to oznaczenie tych osi zostaje zamienione na: $\{1, 2, 3\}$ – tak jak to przedstawiono na rys. 1.6. Jednocześnie należy pamiętać, że oznakowanie osi takiego układu odniesienia (dla naprężeń głównych) powinno być tak ustalone, aby wartości naprężeń głównych spełniały następujący warunek:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (1.3)$$

gdzie: oznaczenia są zgodne z rys. 1.6. Indeksy w postaci cyfr (tj. 1, 2 lub 3) zawsze oznaczają, że mamy do czynienia z naprężeniami głównymi.



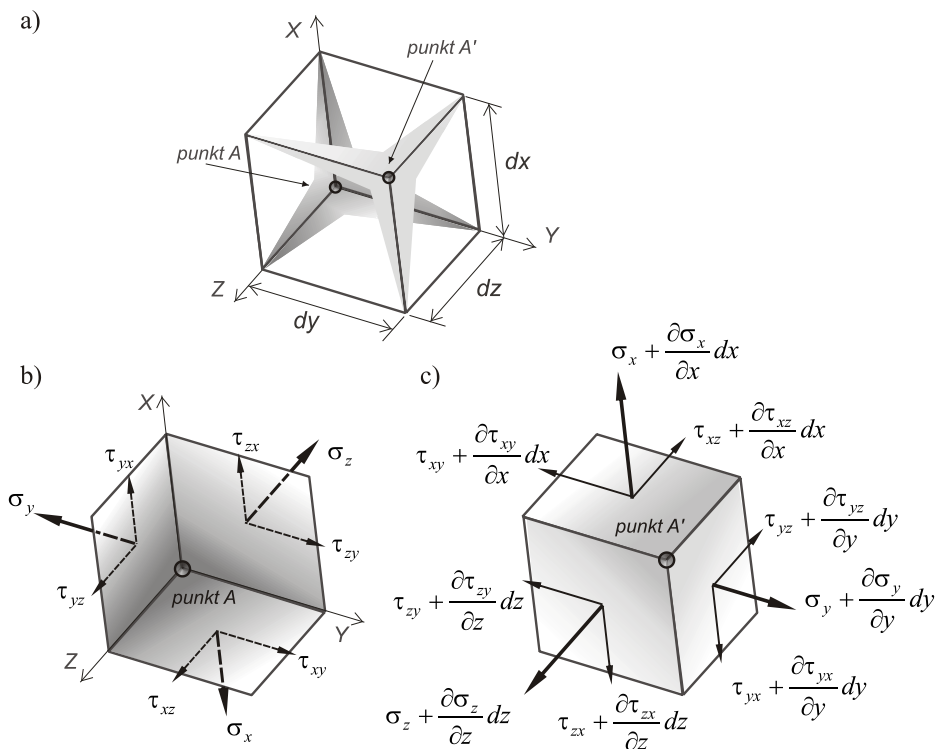
Rys. 1.6. Sposób przedstawiania stanu naprężenia w dowolnym punkcie rozpatrywanego elementu, gdy osie układu odniesienia są współliniowe z kierunkami głównymi

1.2. Równania różniczkowe równowagi

Rozpatrzmy stan naprężenia panujący w wybranym punkcie ośrodka ciągłego. W tym celu przyjmijmy dowolny kartezjański układ współrzędnych $\{x, y, z\}$, a w otoczeniu tego punktu zbudujmy elementarny prostopadłościan o wymiarach krawędzi: dx, dy oraz dz (rys. 1.7). Załóżmy dodatkowo, że rozpatrywany punkt (oznaczony literą A) jest zawarty w jednym z naroży tego prostopadłościanu, a jego współrzędne – w przypadku ogólnym – wynoszą: (x_A, y_A, z_A) . Do opisu stanu naprężenia w tym punkcie są potrzebne trzy składowe naprężenia normalnego ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) oraz sześć składowych naprężenia stycznego ($\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$) – w sumie aż dziewięć składowych (rys. 1.7b).

Postawmy teraz następujące pytanie: Jakie wartości będą miały składowe naprężenia w innym punkcie A', o współrzędnych (x_A+dx, y_A+dy, z_A+dz) ? Ponieważ, naprężenie jest pewną funkcją współrzędnych punktu (w przyjętym układzie odniesienia) można zapisać, że wartości poszukiwanych składowych naprężenia w punkcie A' są następujące (rys. 1.7c):

- naprężenie normalne – $(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx, \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot dy, \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot dz)$;
- naprężenie styczne – $(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx, \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot dx, \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy, \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dy, \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz, \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot dz)$.



Rys. 1.7. Składowe naprężenia występujące na ściankach elementarnego prostopadłościanu (a); gdzie stan naprężenia dla punktu A przedstawiono na rysunku (b), natomiast dla punktu A' – na rysunku (c)

Należy wyjaśnić, że drugi człon sumy, np. $(\partial \sigma_x / \partial x) \cdot dx$, wyraża **gradient zmiany naprężenia** normalnego σ_x , na elementarnym odcinku o długości dx (ściślej: gdy płaszczyzna, której dotyczy to naprężenie, umownie przemieszcza się wzdłuż osi $\{x\}$ o wartość elementarną dx). Podobnie należy interpretować drugi człon dla naprężeń stycznych, np. $(\partial \tau_{xy} / \partial x) \cdot dx$ lub $(\partial \tau_{xz} / \partial x) \cdot dx$ – jest to gradient zmiany naprężenia stycznego τ_{xy} (τ_{xz}), gdy następuje przemieszczenie płaszczyzny, na której leży naprężenie styczne.

Przypomnijmy sobie fakt, że cały ośrodek ciągły pozostaje w wewnętrznej równowadze mechanicznej. Oznacza to, że suma wszystkich sił wewnętrznych musi być równa zero, a co za tym idzie – również układ sił wewnętrznych w rozpatrywanym elementarnym prostopadłościanie, powinien pozostać w równowadze.

Zatem, w oparciu o rys. 1.7 można utworzyć następujący układ równań równowagi dla rzutów sił wewnętrznych na poszczególne osie układu współrzędnych [28]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{xi} = 0 , \\ \sum_i F_{yi} = 0 , \\ \sum_i F_{zi} = 0 , \end{array} \right. \quad (1.4)$$

oraz układ równań równowagi momentów wyżej wspomnianych sił [28]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i M_{xi} = 0 , \\ \sum_i M_{yi} = 0 , \\ \sum_i M_{zi} = 0 . \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Rozwiążmy najpierw układ równań (1.4). Bazując na zależności (1.1), siły wewnętrzne zostaną zapisane jako iloczyn naprężenia i pola powierzchni – czyli boku elementarnego prostopadłościanu, którego dane naprężenie dotyczy. Ponieważ, dla każdego równania z układu (1.4) jego matematyczne rozwinięcie wykonuje się analogiczne, wystarczy przedstawić jedynie tok postępowania dla pierwszego równania, tj. dla $\sum_i F_{xi} = 0$. Zatem możemy zapisać

$$\begin{aligned} -\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \\ -\tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

po wymnożeniu i redukcji wyrazów podobnych otrzymamy następującą postać równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz = 0 , \quad (1.7)$$

gdzie: iloczyn $(dx dy dz)$ jest objętością elementarnego prostopadłościanu. Po rozwiązaniu pozostałych równań (1.4) oraz uporządkowaniu otrzymamy następujący układ równań równowagi [4, 5, 28, 45, 71]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 , \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 , \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 . \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Rozwiążmy teraz układ równań (1.5). Jednakże, w celu ułatwienia obliczeń, przesuniemy układ współrzędnych $\{x, y, z\}$ w taki sposób, aby jego początek znajdował się w środku rozpatrywanego prostopadłościanu. Taka transformacja sprawia, że momenty sił składowych normalnych zerują się. Podobnie jak dla układu (1.4), przedstawione zostanie rozwiązanie pełne jedynie dla równania pierwszego z układu (1.5). Zatem:

$$\begin{aligned} \tau_{zy} dx dy \cdot \frac{dz}{2} - \tau_{yz} dx dz \cdot \frac{dy}{2} + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \cdot \frac{dz}{2} + \\ - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \cdot \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

po wymnożeniu otrzymamy

$$\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yz} dx dy dz + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dy^2 dz = 0 . \quad (1.10)$$

Ostatnie dwa człony w równaniu (1.10) są wyrazami małymi wyższego rzędu i można je pominąć w dalszym wyprowadzeniu. W rezultacie uzyskuje się następującą równość:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} . \quad (1.11)$$

Po rozwiązaniu pozostałych równań, z układu (1.5), otrzymamy poniższe trzy równości [5, 27, 28, 45, 58]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zy} = \tau_{yz} , \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} , \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} . \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Analizując postać układu równań (1.12) wnioskuje się, że stan naprężenia w wybranym punkcie elementu konstrukcyjnego (przy dowolnie dobranym układzie odniesienia) jest jednoznacznie określony już przez sześć składowych naprężenia. W przypadku punktu A (rys. 1.7), są to trzy składowe naprężenia normalnego ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) oraz trzy składowe naprężenia stycznego ($\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}$).

1.3. Tensor naprężenia

Tensor jest wielkością fizyczną, którą często operuje się w teorii sprężystości i plastyczności. W zależności od sensu fizycznego, wielkość ta może być różnego rzędu, mianowicie [5]:

- **skalary** takie jak: energia, praca, masa, długość itp. – są tensorami rzędu zerowego;
- **wektory**, np.: prędkość, siła itp. – są tensorami rzędu pierwszego, co oznacza, że pełne opisanie tej wielkości fizycznej wymaga znajomości trzech składowych;
- **naprężenie i odkształcenie** są tensorami rzędu drugiego – jak już wcześniej wspomniano, wielkości te są opisywane aż dziewięcioma wyrazami.

Zajmiemy się teraz **tensorem naprężenia**, który przedstawia stan naprężenia wyrażony w postaci macierzy. Warto nadmienić, że taka forma prezentowania wielkości fizycznej jest naturalna dla modelowania numerycznego (np. za pomocą MES). Powracając do rys. 1.5, tensor naprężenia dla wybranego punktu, w dowolnie przyjętym układzie współrzędnych, można zapisać w następującej postaci [45, 71]:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Rozpatrzmy teraz przypadek przedstawiony na rys. 1.6 – czyli taki, w którym mamy do czynienia z naprężeniami i kierunkami głównymi. Stan naprężenia w tym punkcie, w przyjętym układzie kierunków głównych $\{1, 2, 3\}$, będzie zapisany w następującej formie:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Należy jednocześnie pamiętać, że tensor naprężenia jest zawsze macierzą symetryczną. Wynika to bezpośrednio z warunku (1.12).

Wprowadźmy teraz pojęcie **naprężenia hydrostatycznego** (średniego). Jest ono zdefiniowane jako średnia arytmetyczna wszystkich naprężeń normalnych dla danego punktu, zgodnie z przyjętym układem odniesienia. Dla tensora (1.13) omawiane naprężenie średnie wyznacza się z następującego wzoru [24, 28, 45]:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (1.15)$$

natomiast, dla naprężeń głównych – tensor (1.14) – naprężenie hydrostatyczne oblicza się według następującej zależności:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) . \quad (1.16)$$

Teraz wyodrębnijmy z tensora naprężeń jego część kulistą – czyli **aksjator naprężeń** [5, 45]:

$$K_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} , \quad (1.17)$$

oraz część postaciową – **dewiator naprężeń** (postać ogólna) [5, 45]:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} , \quad (1.18)$$

przy czym, tensory te są addytywną częścią tensora naprężenia, co można zapisać w sposób następujący:

$$T_\sigma = K_\sigma + D_\sigma . \quad (1.19)$$

Sens fizyczny wyżej wprowadzonych wyrażeń jest następujący. Aksjator naprężeń odpowiada za zmianę objętości materiału (np. elementarnego prostopadłościanu) w rozpatrywanym punkcie. Opisuje on wszechstronne równomierne ściskanie lub rozciąganie – tzw. **kulisty stan naprężenia**. Natomiast dewiator naprężeń wywołuje jedynie zmianę postaci odkształcanego materiału [5]. W teorii plastyczności dewiator naprężeń odgrywa ważną rolę.

1.4. Niezmienniki stanu naprężenia

Stan naprężenia, panujący w ośrodku ciągłym, zależy jedynie od sposobu obciążenia danego elementu konstrukcyjnego. Podobnie wygląda kwestia dotycząca orientacji kierunków głównych oraz wartość naprężeń głównych – zależy jedynie od sposobu przyłożenia sił zewnętrznych. Natomiast wartości składowych naprężenia, np. zestawionych w tensorze naprężeń (1.13), zależą również od orientacji przyjętego kartezjańskiego układu współrzędnych. Zatem powstaje pytanie: W jaki sposób porównywać ze sobą stany naprężenia występujące przy różnych schematach obciążenia? Jest to możliwe dzięki wprowadzeniu trzech współczynników naprężenia – zwanymi **niezmiennikami**. Ich nazwa wywodzi się z faktu, że wartości niezmienników stanu naprężenia są niezależne od przyjętego układu odniesienia [5, 28, 45, 58, 59].

Pierwszy z nich – poznany już wcześniej – to **naprężenie hydrostatyczne**, które wyznacza się ze wzoru (1.15) lub (1.16). Jego wartość wyraża jedynie

wpływ na zmianę objętości odkształcanego ciała. Dlatego to naprężenie jest nazywane również **niezmiennikiem liniowym** lub **objętościowym** [5].

Drugim aksjomatem jest **naprężenie postaciowe** σ_H , które jest znane również pod nazwą naprężenie huberowskiego¹ [5, 29, 30, 45, 71]. Naprężenie to jest wyrażane w następujący sposób (postać ogólna):

$$\sigma_H = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}, \quad (1.20)$$

lub po uwzględnieniu naprężeń głównych, jako:

$$\sigma_H = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.21)$$

Wartość tego naprężenia opisuje jedynie wpływ obciążenia na zmianę postaci odkształcanego ośrodka ciągłego. Ponadto, niezmiennik ten w praktyce jest dość często stosowany do porównywania różnych stanów naprężenia, ponieważ jego wartość jest taka sama jak dla prostego, jednoosiowego stanu naprężenia np. podczas odkształcania elementu o przekroju kołowym. Funkcjonuje on również pod nazwą **intensywność naprężenia** (oznaczane umownie σ_i) lub **naprężenie zastępcze** [5, 24, 28, 45, 59].

Ostatnim niezmiennikiem jest tzw. **kąt ω** , którego wartość wyznacza się z następującej zależności:

$$\cos \omega = \frac{\sigma_1 - \sigma_m}{\frac{2}{3} \cdot \sigma_H}, \quad (1.22)$$

gdzie: σ_1 – największe naprężenie główne, σ_m – naprężenie średnie obliczane ze wzoru (1.16), σ_H – naprężenie postaciowe wyznaczone z zależności (1.21). Wartość tego niezmiennika charakteryzuje sposób przyłożenia obciążenia w odkształcanym elemencie.

¹ **Maksymilian Tytus Huber**, profesor (1872 – 1950) – absolwent Gimnazjum Św. Jacka w Krakowie, Politechniki Lwowskiej oraz Uniwersytetu Berlińskiego. Pracownik naukowy Politechniki Lwowskiej, Politechniki Gdańskiej i Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Założyciel i członek Polskiej Akademii Nauk. Honorowy członek wielu fundacji i zagranicznych Akademii Nauk. Jego prace naukowe dotyczyły szerokiego spektrum problemów mechaniki i budowy maszyn – mają one fundamentalne znaczenie w rozwoju teorii sprężystości i plastyczności. W roku 1904 opublikował, jako pierwszy, rozprawę dotyczącą hipotezy wyężeniowej pt.: „Praca odkształcenia postaciowego jako miara wyężeniowa materiału” [28, 29, 42].

1.5. Naprężenie na płaszczyźnie. Przypadki szczególne

W niniejszej części podręcznika zostaną przedstawione wybrane przykłady wyznaczania składowych naprężenia w odniesieniu do określonej płaszczyzny, która reprezentuje przekrój wewnętrzny ośrodka ciągłego. Wybór orientacji poszczególnych płaszczyzn jest zamierzony, a przedstawione przypadki są istotne w teorii sprężystości i plastyczności. Ponadto, poniższe rozważania bazują na elementarnym prostopadłościu, który został omówiony w rozdziale 1.1 – rys. 1.5 oraz rys. 1.6.

1.5.1. Naprężenie na ścianie skośnej

Znając składowe stanu naprężenia (1.13), w przyjętym układzie odniesienia $\{x, y, z\}$, można wyznaczyć naprężenie całkowite σ_{pc} (wraz z naprężeniem normalnym σ_{pn} i stycznym τ_p) na dowolnie zorientowanej płaszczyźnie przekroju wewnętrznego ośrodka ciągłego. Schemat obrazujący taką sytuację zamieszczono na rys. 1.8. Płaszczyznę, o której jest mowa, reprezentuje ścianka skośna. Normalna do tej ścianki (kierunek $\bar{p}$ na rys. 1.8b) tworzy z odpowiednimi osiami układu odniesienia kąty α, β, γ . Ich wartości spełniają następujący warunek [28, 58]:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 . \quad (1.23)$$

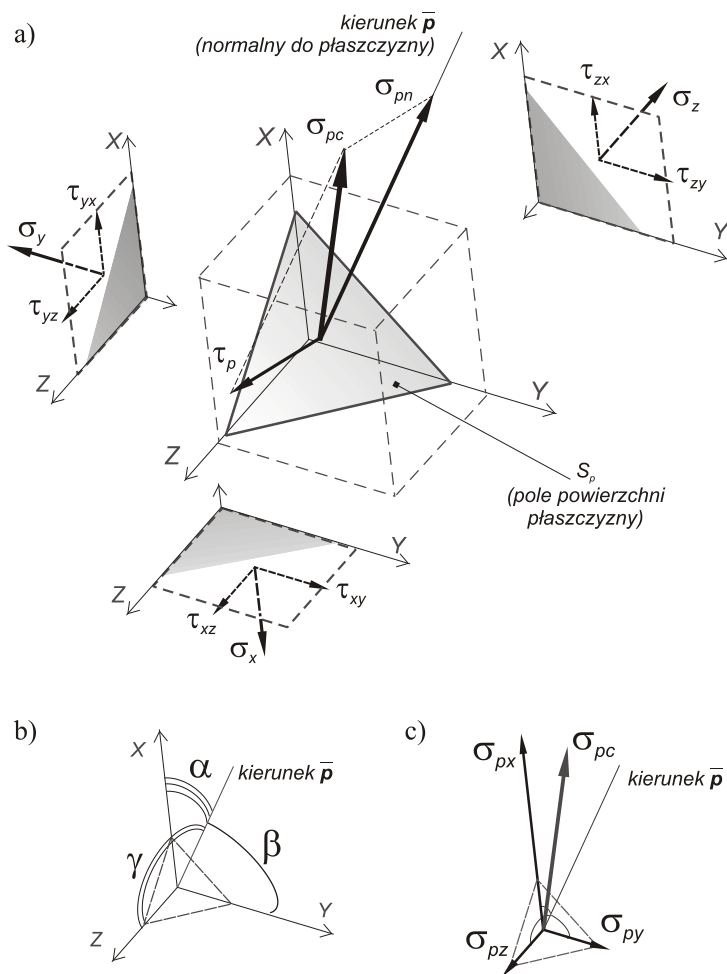
W celu ułatwienia zapisu dalszych rozważań wprowadźmy następujące oznaczenie funkcji powyższych kątów, mianowicie:

$$\begin{cases} l = \cos \alpha , \\ m = \cos \beta , \\ n = \cos \gamma . \end{cases} \quad (1.24)$$

Wyznamy teraz wartość naprężenia całkowitego σ_{pc} (rys. 1.8c) występującego na wybranej ścianie skośnej. W tym celu utwórzmy układ równań równowagi rzutów sił wewnętrznych na poszczególne osie układu współrzędnych, oczywiście w odniesieniu do przyjętej nowej płaszczyzny. Układ tych równań jest następujący:

$$\begin{cases} \sigma_{px} \cdot S_p = \sigma_x \cdot S_p \cdot l + \tau_{xy} \cdot S_p \cdot m + \tau_{xz} \cdot S_p \cdot n , \\ \sigma_{py} \cdot S_p = \tau_{yx} \cdot S_p \cdot l + \sigma_y \cdot S_p \cdot m + \tau_{yz} \cdot S_p \cdot n , \\ \sigma_{pz} \cdot S_p = \tau_{zx} \cdot S_p \cdot l + \tau_{zy} \cdot S_p \cdot m + \sigma_z \cdot S_p \cdot n , \end{cases} \quad (1.25)$$

gdzie: S_p – pole powierzchni ścianki skośnej, na której działa naprężenie całkowite σ_{pc} ; pozostałe oznaczenia są zgodne z rys. 1.8. Ostatecznie, z powyższego układu równań równowagi uzyskuje się wzory (1.26), służące do wyznaczenia



Rys. 1.8. Naprężenie na ścianie skośnej: a) schemat ogólny, gdzie: σ_{pn} – naprężenie normalne (w odniesieniu do ścianki skośnej), σ_{pc} – naprężenie całkowite, τ_p – naprężenie styczne; b) sposób przyjęcia oznakowania kątów tworzonych przez normalną p do odpowiednich osi kartezjańskiego układu odniesienia; c) składowe naprężenia całkowitego σ_{pc} w przyjętym układzie odniesienia

wartości składowych naprężenia σ_{pc} . Kierunki tych składowych naprężenia są współliniowe do odpowiednich osi układu $\{x, y, z\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{px} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n , \\ \sigma_{py} = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n , \\ \sigma_{pz} = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n . \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Jednocześnie należy pamiętać, że kierunek naprężenia całkowitego σ_{pc} nie musi być zgodny z kierunkiem normalnym $\bar{p}$ (rys. 1.8c). Jego kierunek (wraz ze zwrotem i wartością) można wyznaczyć poprzez sumowanie wektorowe składowych (1.26) tego naprężenia. Zatem:

$$\vec{\sigma}_{pc} = \vec{\sigma}_{px} + \vec{\sigma}_{py} + \vec{\sigma}_{pz} , \quad (1.27)$$

z kolei liczbową wartość tego naprężenia wynosi:

$$\sigma_{pc} = \sqrt{\sigma_{px}^2 + \sigma_{py}^2 + \sigma_{pz}^2} . \quad (1.28)$$

Wyznamy teraz składową normalną σ_{pn} i styczną τ_p naprężenia całkowitego, które występują na wyznaczonej ściance skośnej (rys. 1.8). Bazując na rys. 1.2 oraz zależności (1.2) można zapisać, że wartość naprężenia normalnego σ_{pn} wynosi:

$$\sigma_{pn} = \sigma_{px} \cdot l + \sigma_{py} \cdot m + \sigma_{pz} \cdot n , \quad (1.29)$$

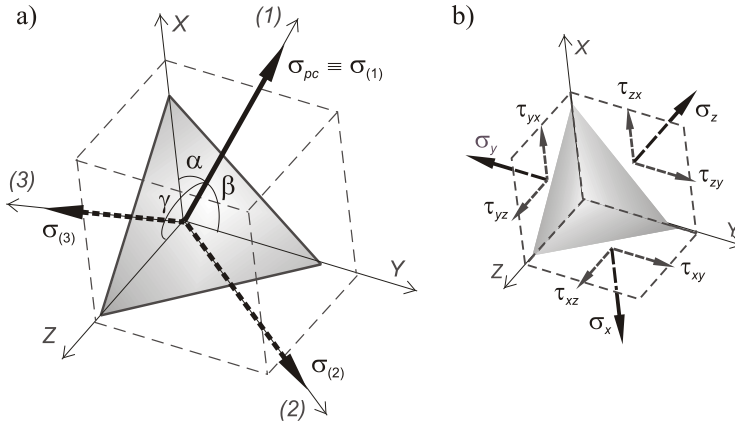
natomiast kierunek tego naprężenia jest współliniowy z kierunkiem $\bar{p}$ (rys. 1.8). Wartość składowej stycznej τ_p , która jednocześnie jest **maksymalnym naprężeniem stycznym** [28], oblicza się z następującego wzoru:

$$\tau_p = \sqrt{\sigma_{pc}^2 - \sigma_{pn}^2} . \quad (1.30)$$

1.5.2. Naprężenia główne

Załóżmy teraz, że ścianka skośna (rys. 1.8) jest tak zorientowana względem układu odniesienia $\{x, y, z\}$, że naprężenie całkowite σ_{pc} jest jednocześnie naprężeniem normalnym. Oznacza to, iż naprężenie takie jest jednym z trzech naprężeń głównych. Zatem, wprowadźmy nowy układ odniesienia $\{1, 2, 3\}$, którego osie pokrywają się z kierunkami głównymi – tak jak to przedstawiono na rys. 1.9. Oznaczenie kierunków głównych ujęto w nawiasy, gdyż przyjęliśmy je w sposób dowolny. Jest to związane z tym, że jeszcze nie znamy wartości wszystkich naprężeń głównych (w danym punkcie ciała) a wiemy, iż powinien być spełniony warunek (1.3).

Napiszmy teraz warunek równowagi rzutów sił wewnętrznych na osie układu odniesienia $\{x, y, z\}$ – rys. 1.9. Układ tych równań (po wyrugowaniu pola powierzchni ścianki skośnej) przyjmuje następującą postać:



Rys. 1.9. Transformacja osi układu współrzędnych $\{x, y, z\}$ do kierunków głównych $\{1, 2, 3\}$; a) jedno z naprężeń głównych σ_{pc} na nowej płaszczyźnie, gdzie: α, β, γ – kąty tworzone przez normalną do płaszczyzny kierunku głównego (1) z osiami układu $\{x, y, z\}$ oraz b) składowe stanu naprężenia w danym punkcie

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_x - \sigma_{pc}) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n = 0, \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma_{pc}) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 0, \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma_{pc}) \cdot n = 0. \end{array} \right. \quad (1.31)$$

gdzie: σ_{pc} – naprężenie normalne (zgodnie z rys. 1.9 jest jednym z naprężeń głównych); l, m, n – cosinusy kierunkowe kątów tworzonych przez kierunek główny (tj. normalny do ścianki skośnej) z osiami układu $\{x, y, z\}$.

Uwzględniając równania (1.23) i (1.24) – wspólnie z powyższymi zależnościami (1.31) – otrzymujemy układ równań z czterema niewiadomymi. Są nimi wartość naprężenia całkowitego σ_{pc} oraz trzy cosinusy kierunkowe: l, m, n . Ale żeby rozwiązanie powyższego układu równań (1.31) miało sens, jego wyznacznik (1.32) musi być równy zero [28, 45].

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{pc} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{pc} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{pc} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.32)$$

Rozwinięciem powyższego wyznacznika jest równanie trzeciego stopnia (1.33), w którym niewiadomą jest wartość naprężenia σ_{pc} .

$$\sigma_{pc}^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \sigma_{pc}^2 + N_1 \cdot \sigma_{pc} + N_2 = 0 , \quad (1.33)$$

gdzie:

$$N_1 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 , \quad (1.34)$$

$$N_2 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 . \quad (1.35)$$

Równanie (1.33) posiada rozwiązanie w postaci trzech pierwiastków rzeczywistych, które (po uszeregowaniu) są wartościami naprężeń głównych. W ostateczności, wartości uzyskanych naprężeń głównych wyraża się w funkcji niezmienników naprężenia, mianowicie [45]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_m + \frac{2}{3} \cdot \sigma_H \cdot \cos \omega , \\ \sigma_2 = \sigma_m + \frac{2}{3} \cdot \sigma_H \cdot \cos(\omega - 120^\circ) , \\ \sigma_3 = \sigma_m + \frac{2}{3} \cdot \sigma_H \cdot \cos(\omega - 240^\circ) , \end{array} \right. \quad (1.36)$$

gdzie: naprężenie średnie σ_m oblicza się ze wzoru (1.15), a naprężenie postaciowe σ_H – według zależności (1.20). Natomiast wartość trzeciego niezmiennika (tj. kąta ω) należy wyznaczać z poniższej zależności:

$$\cos 3\omega = \frac{2\sigma_m^3 - \sigma_m \cdot N_1 + N_2}{2\sqrt{(\sigma_m^2 - \frac{1}{3} \cdot N_1)^3}} . \quad (1.37)$$

1.5.3. Naprężenie oktaedryczne

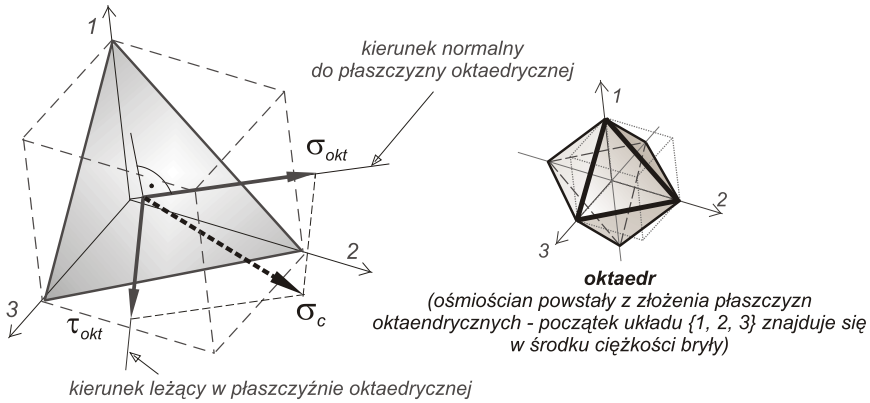
Rozpatrzmy teraz szczególnie przypadek, polegający na tym, że ścianka skośna (przedstawiona na rys. 1.8) jest jednakowo nachylona do wszystkich trzech osi układu współrzędnych. Dodatkowo załóżmy, że osie tego układu odniesienia $\{1, 2, 3\}$ są współliniowe z kierunkami głównymi – tak jak to przedstawiono na rys. 1.10. W ten sposób cosinusy kierunkowe (1.24) kątów tworzonych przez normalną do tej płaszczyzny z kierunkami głównymi są sobie równe i wynoszą:

$$l = m = n = \sqrt{\frac{3}{3}} . \quad (1.38)$$

Tak zorientowana ścianka skośna (i przy tak przyjętym układzie odniesienia) jest nazywana **płaszczyzną oktaedryczną** [24, 28, 45]. Połączenie ścianek tworzy bryłę ośmiościenną – zwaną oktaedrem (rys. 1.10).

Wyznamy teraz składową normalną σ_{okt} i styczną τ_{okt} naprężenia oktaedrycznego – zgodnie z rys. 1.10. Na podstawie zależności (1.29) oraz wzorów (1.26), wartość naprężenia normalnego σ_{okt} wynosi:

$$\sigma_{okt} = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2 , \quad (1.39)$$



Rys. 1.10. Składowa normalna σ_{okt} i styczna τ_{okt} naprężenia oktaedrycznego działającego na płaszczyźnie oktaedrycznej (opis w tekście)

po uwzględnieniu zależności (1.38) otrzymujemy:

$$\sigma_{okt} = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \equiv \sigma_m, \quad (1.40)$$

co oznacza, że naprężenie oktaedryczne σ_{okt} jest równe naprężeniu średniemu σ_m (pierwszemu niezmiennikowi stanu naprężenia).

Wyznamy teraz wartość naprężenia stycznego τ_{okt} , działającego na płaszczyźnie oktaedrycznej (rys. 1.10). Bazując na wcześniej omówionej zależności (1.30), można zapisać, że:

$$\tau_{okt} = \sqrt{\sigma_c^2 - \sigma_{okt}^2}, \quad (1.41)$$

gdzie: σ_c jest naprężeniem całkowitym, działającym na omawianej płaszczyźnie. Jego wartość można wyznaczyć w analogiczny sposób jak to opisano w przypadku naprężeń przedstawionych na rys. 1.8. Zatem, wartość naprężenia σ_c wynosi:

$$\sigma_c^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \quad (1.42)$$

gdzie: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne, działające na ściankach myślowo utworzonego elementarnego prostopadłościanu, który jest naszkicowany na rys. 1.10 – analogicznie do przypadku przedstawionego na rys 1.6.

Powracając do zależności (1.41), uwzględniając jednocześnie wzory (1.40) oraz (1.42), można teraz zapisać, że składowa styczna naprężenia oktaedrycznego wynosi:

$$\tau_{okt} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.43)$$

Na postawie zależności (1.21) – służącej do wyznaczenia wartości drugiego niezmiennika stanu naprężenia – można stwierdzić, że styczne naprężenie oktaedryczne τ_{okt} jest wprost proporcjonalne do naprężenia postaciowego σ_H . Spostrzeżenie to można zapisać w następujący sposób:

$$\tau_{okt} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sigma_H . \quad (1.44)$$

Omówione wyżej naprężenia oktaedryczne są bardzo cenne w teorii plastyczności. Składowa styczna τ_{okt} tego naprężenia jest traktowana jako wskaźnik określający moment pojawienia się odkształceń plastycznych [28]. Zagadnienie to zostanie omówione szerzej w dalszej części skryptu.

1.5.4. Ekstremalne naprężenia styczne

Wykazano wcześniej (rys. 1.2 oraz rozdział 1.5.1), że na dowolnie zorientowanej ścianie skośnej występuje naprężenie styczne τ , które przyjmuje pewną wartość określoną np. zależnością (1.30). Jednocześnie dowiedziono (rys. 1.4 oraz rozdział 1.5.2), że istnieje taka orientacja płaszczyzny, na której naprężenie to zanika (rys. 1.11c). Wtedy naprężenie styczne τ przyjmuje najmniejszą bezwzględną wartość, która równa jest zero. Powstaje teraz pytanie: Jakie są orientacje płaszczyzn charakterystycznych, na których naprężenie τ osiąga bądź wartość wyżej wspomnianą, bądź największą wartość bezwzględną?

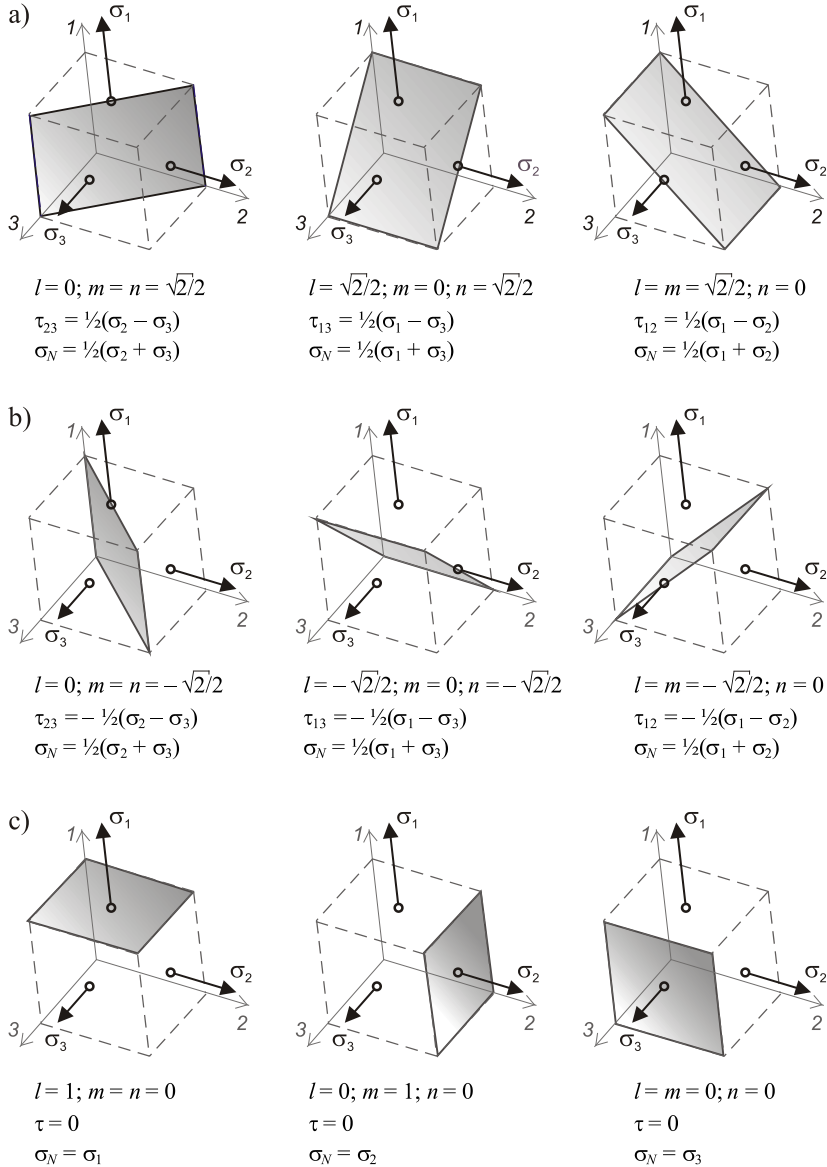
Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozważmy stan naprężenia w dowolnym punkcie, przyjmując układ odniesienia $\{1, 2, 3\}$, tak jak to przedstawiono np. na rys. 1.6. Wartość naprężenia stycznego τ , na dowolnie zorientowanej płaszczyźnie (analogicznie jak w przypadku naprężenia τ_{okt} przedstawionego rys. 1.10), wynosi [28]:

$$\tau^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2 - (\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2) , \quad (1.45)$$

gdzie: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne w danym punkcie ośrodka ciągłego; l, m, n – cosinusy kierunkowe kątów tworzonych przez kierunek normalny (do danej płaszczyzny) z odpowiednimi kierunkami głównymi $\{1, 2, 3\}$. Wiedząc jednocześnie, że wartości cosinusów kierunkowych – które są niewiadomymi we wzorze (1.45) – spełniają warunek [5, 28, 45]:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 , \quad (1.46)$$

można zależność (1.46) doprowadzić do postaci trzech funkcji naprężenia stycznego τ , w których są już tylko dwie niewiadome. Takie przekształcenie matematyczne tych równań jest konieczne, gdyż dopiero teraz można na ich podstawie wyznaczyć ekstremalne wartości naprężenia stycznego τ . W tym celu wyznaczmy pochodne cząstkowe wspomnianych równań względem cosinusów kierunkowych. Ostatecznie rozwiązaniem jest sześć „zestawów” wartości cosinusów



Rys. 1.11. Płaszczyzny ekstremalnych naprężeń stycznych; l, m, n – cosinusy kierunkowe kątów tworzących przez normalną do płaszczyzny z odpowiednimi osiami układu odniesienia (kierunkami głównymi) $\{1, 2, 3\}$

kierunkowych, które wyznaczają orientacje płaszczyzn (rys. 1.11), na których naprężenie styczne τ osiąga wartości ekstremalne.

Podstawiając do zależności (1.45) wartości poszczególnych grup trzech cosinusów kierunkowych l , m , n (rys. 1.11) wyznaczamy naprężenia styczne (1.47 ÷ 1.49). Ponieważ występują one na poszczególnych płaszczyznach charakterystycznych, nazywamy je **głównymi naprężeniami stycznymi**.

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) , \quad (1.47)$$

$$\tau_{13} = \pm \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) , \quad (1.48)$$

$$\tau_{23} = \pm \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) . \quad (1.49)$$

Biorąc pod uwagę, że dla naprężeń głównych obowiązuje warunek (1.3), to **największym naprężeniem stycznym** jest naprężenie τ_{13} , którego wartość oblicza się ze wzoru (1.48) [28, 45, 71].

1.6. Graficzna prezentacja stanu naprężenia

Stan naprężenia, jaki panuje w dowolnym punkcie elementu konstrukcyjnego (ośrodka ciągłego), można przedstawić w formie graficznej – do tego celu służą wykresy płaskie [5, 24, 28 – 30, 45, 58, 59, 71]. W dalszej części tego rozdziału zostaną omówione trzy sposoby geometrycznego odwzorowania stanu naprężenia.

1.6.1. Koło Mohra

W poprzedniej części podręcznika wykazano, że wartości składowych stanu naprężenia (panującego w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego) zależą od przyjętego układu odniesienia. Natomiast normalna i styczna naprężenia całkowitego zależą – w tym przypadku – od orientacji płaszczyzny, do której to naprężenie się odnosi. Zatem powstaje pytanie: Czy istnieje przejrzysty sposób prezentacji stanu naprężenia, ujmujący wszystkie możliwe konfiguracje składowych naprężenia? Odpowiedzią na to pytanie jest wykres Mohra, nazywany **kołami naprężeń Mohra** (rys. 1.12). To graficzne odwzorowanie stanu naprężenia sporządzane jest na płaszczyźnie naprężeń, gdzie na osi odciętych odkłada się składową normalną σ_N naprężenia całkowitego, natomiast na osi rzędnych – bezwzględną wartość składowej stycznej τ . Wykres ten składa się z trzech okręgów (rys. 1.12), których równania mają następującą postać [28, 29]:

$$\text{okrąg } O_{12}: \quad \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = R_{12}^2 , \quad (1.50)$$

$$\text{okrąg } O_{13}: \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = R_{13}^2, \quad (1.51)$$

$$\text{okrąg } O_{23}: \left(\sigma_N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = R_{23}^2, \quad (1.52)$$

gdzie wartość ułamka w nawiasie po lewej stronie równania oznacza wielkość przesunięcia środka okręgu wzdłuż osi odciętych. Natomiast wartości promieni tych okręgów wynoszą [28]:

$$R_{12} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \equiv \tau_{12}, \quad (1.53)$$

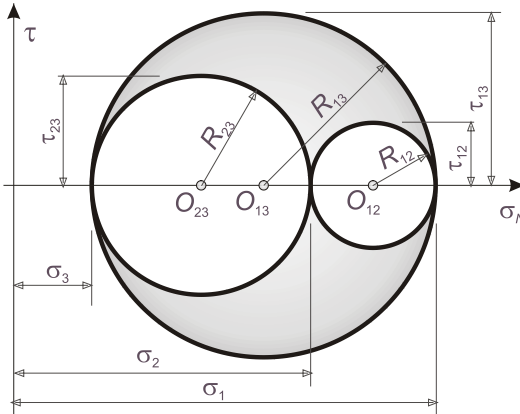
$$R_{13} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \equiv \tau_{13}, \quad (1.54)$$

$$R_{23} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) \equiv \tau_{23}. \quad (1.55)$$

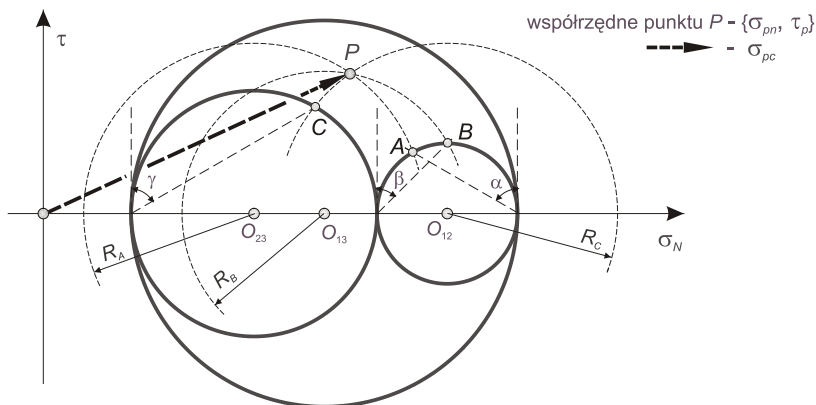
Okręgi te, przedstawiają stany naprężenia na ściankach równoległych do poszczególnych kierunków głównych, np. okrąg O_{12} dotyczy płaszczyzny równoległej do kierunku 3. Z kolei, zaciemniony obszar na wykresie (rys. 1.12), powstały z odjęcia od obszaru koła największego O_{13} powierzchni kół mniejszych – O_{12} i O_{23} , jest zbiorem punktów (o współrzędnych: σ_N , τ) reprezentujących

składowe naprężenia całkowitego σ na ściankach skośnych, o wszystkich możliwych orientacjach.

Przedstawmy teraz sposób wyznaczenia składowej normalnej i stycznej naprężenia σ_{pc} na płaszczyźnie, której normalna tworzy kąty α , β i γ z odpowiednimi kierunkami głównymi $\{1, 2, 3\}$. Oczywiście, wartości naprężeń głównych σ_1 , σ_2 i σ_3 są znane (co jest jednoznaczne ze znajomością stanu naprężenia w rozpatrywanym punkcie). Koło naprężeń Mohra dla takiego przypadku przedstawiono na rys. 1.13 [28, 29, 45].



Rys. 1.12. Koło naprężeń Mohra odwzorowujące graficznie stan naprężenia w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego (opis w tekście)



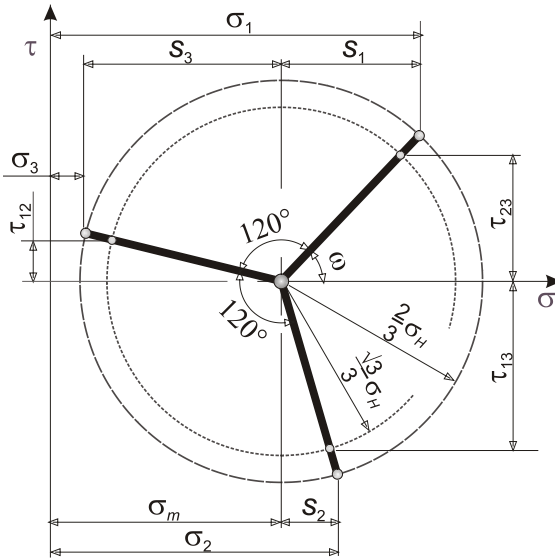
Rys. 1.13. Koło naprężeń Mohra: wykreślna metoda wyznaczania składowej normalnej σ_{pn} i stycznej τ_p naprężenia całkowitego σ_{pc} (w punkcie P) na ścianie skośnej dowolnie nachylonej do kierunków głównych $\{1, 2, 3\}$; α, β, γ – kąty tworzone przez normalną (do rozpatrywanej płaszczyzny) z odpowiednimi kierunkami głównymi

W pierwszej kolejności są odmierzane kąty α, β i γ w taki sposób, jak to przedstawiono na rys. 1.13. W efekcie uzyskuje się lokalizację punktów, odpowiednio do kątów oznaczonych literami A, B oraz C, które powstają w wyniku przecięcia ramion kątów z poszczególnymi wewnętrznymi kołami Mohra. Następnie, wykreślane są łuki o promieniach R_A, R_B, R_C , których środek pokrywa się ze środkami odpowiednich okręgów O_{23}, O_{13} oraz O_{12} . Przecięcie tych łuków wyznacza lokalizację punktu P, określającego wartości składowej normalnej σ_{pn} i stycznej τ_p szukanego naprężenia całkowitego σ_{pc} .

1.6.2. Gwiazda naprężeń

Kolejnym graficznym sposobem przedstawiania stanu naprężenia, panującego w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego, jest **gwiazda naprężeń** opracowana przez T. Pelczyńskiego² [45]. Konstrukcja ta, oprócz wartości naprężeń głównych, przedstawia również w sposób graficzny niezmienniki stanu naprężenia. Mianowicie, na podstawie zależności (1.36) wnioskuje się, że naprężenia główne σ_1, σ_2 oraz σ_3 można przedstawić wykreślnie, jako sumy naprężenia średnie-

² **Tadeusz A. Pelczyński**, profesor (1906 – 1983) – twórca i wieloletni pracownik naukowy Zakładu Obróbki Plastycznej na Politechnice Warszawskiej. Autor licznych prac naukowych poświęconych teorii i technologii obróbki plastycznej metali. Cenne doświadczenie praktyczne zdobył pracując w przemyśle (głównie w okresie międzywojennym).



Rys. 1.14. Gwiazda naprężeń: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne; s_1, s_2, s_3 – składowe główne dewiatora naprężenia; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ – ekstremalne naprężenia styczne, $\sigma_m, \sigma_H, \omega$ – niezmienniki stanu naprężenia

go σ_m oraz rzutów ramion trójramiennej gwiazdy – czyli składowych głównych dewiatora naprężenia s_1, s_2, s_3 . Długość ramion tej gwiazdy jest proporcjonalna do drugiego niezmiennika stanu naprężenia i wynosi $2/3\sigma_H$. Z kolei środek tej gwiazdy jest przesunięty od początku układu odniesienia o wartość pierwszego niezmiennika – tj. naprężenia średniego σ_m . Konstrukcja gwiazdy naprężeń, dla przykładowego stanu naprężenia, została przedstawiona na rys. 1.14.

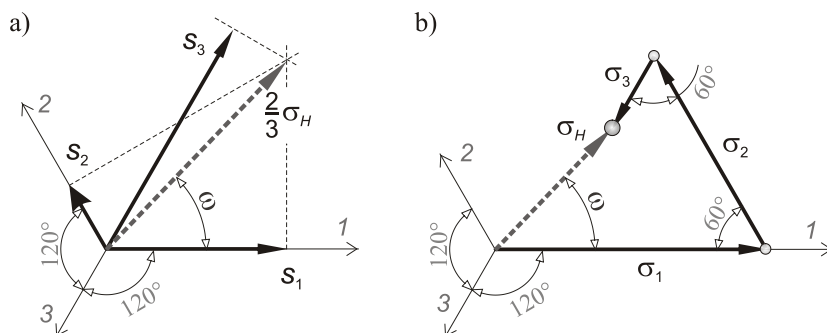
Poprzez modyfikację gwiazdy naprężeń, polegającą na dodaniu okręgu wewnętrznego (o promieniu równym $\sqrt{3}/3\sigma_H$), można wyznaczyć na jej

podstawie w sposób graficzny również wartości ekstremalnych naprężeń stycznych (1.56) [24]. Biorąc pod uwagę zależności geometryczne wynikające z gwiazdy naprężeń (rys. 1.14) można zapisać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_H \cdot \sin(\omega - 240^\circ) , \\ \tau_{13} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_H \cdot \sin(\omega - 120^\circ) , \\ \tau_{23} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_H \cdot \sin \omega , \end{array} \right. \quad (1.56)$$

1.6.3. Ukośnokątny układ współrzędnych

Przyjmijmy ukośnokątny układ współrzędnych [24], w którym osie są nachylone w stosunku do siebie pod kątem 120° (rys. 1.15). Osie te reprezentują kierunki głównych naprężeń $\{1, 2, 3\}$. Przedstawmy teraz na takiej płaszczyźnie dwa wykresy stanu naprężenia. Pierwszy z nich (rys. 1.15a) obrazuje zależności



Rys. 1.15. Ukośnokątny układ współrzędnych: a) składowe główne dewiatora naprężeń s_1 , s_2 , s_3 ; b) naprężenia główne σ_1 , σ_2 , σ_3 ; gdzie σ_H , ω – niezmienniki stanu naprężenia (opis w tekście)

geometryczne pomiędzy składowymi normalnymi dewiatora naprężenia s_1 , s_2 i s_3 a dwoma niezmiennikami stanu naprężenia – naprężeniem σ_H i kątem ω . Natomiast drugi wykres (rys. 1.15b) służy do przedstawiania związków geometrycznych między naprężeniami głównymi σ_1 , σ_2 oraz σ_3 a naprężeniem zastępczym σ_H . Omówione wykresy mogą być stosowane również do wyznaczania wartości składowych zarówno dewiatora naprężeń jak i naprężenia całkowitego [24, 45].

Porównując ukośnokątny układ współrzędnych z rys. 1.10, można przyjąć, że płaszczyzna omawianego wykresu jest płaszczyzną oktaedru. Ta własność sprawia, że geometryczna interpretacja stanu naprężenia (na takiej płaszczyźnie) jest cenna przede wszystkim w teorii plastyczności – o czym będzie mowa w dalszej części niniejszego opracowania.

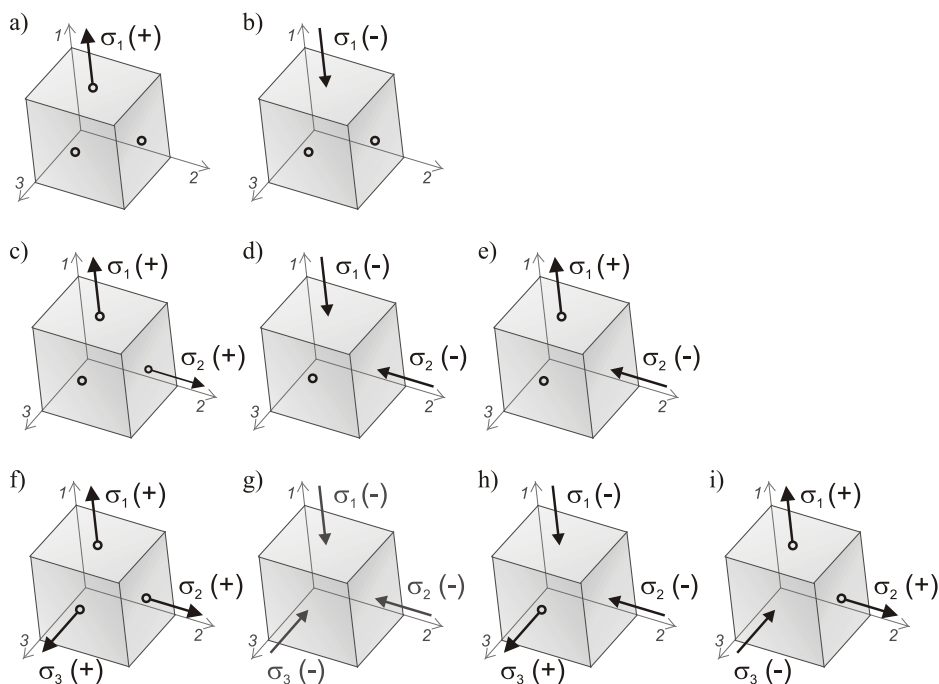
1.7. Schematy naprężeń głównych

Dotychczas rozpatrywano ogólny stan naprężenia, dla którego wartości wszystkich naprężeń głównych σ_1 , σ_2 i σ_3 były różne od zera. Taki przypadek jest nazywany **trójosiowym** (lub **przestrzennym**) **stanem naprężenia**. Jednakże w praktyce często spotyka się przypadki, w których wartość jednego lub dwóch naprężeń głównych jest równa zero [24, 45, 71]. Przykładowo, w pręcie rozciągany siłą zewnętrzną (o kierunku zgodnym z osią wzdłużną tego pręta), przyłożoną do jego końców, występuje **jednoosiowy** (**liniowy**) **stan naprężenia**.

Na rys 1.16 przedstawiono dziewięć podstawowych schematów naprężenia, jakie mogą wystąpić w dowolnym punkcie odkształcanego ośrodka ciągłego [24, 71]. W tym gronie wyróżnia się dwa schematy liniowe (rys. 1.16a – jednoosiowe

rozciąganie oraz rys. 1.16b – jednoosiowe ściskanie), trzy schematy płaskie (rys. 1.16 c, d, e) oraz cztery schematy przestrzenne (rys. 1.16 f, g, h, i). Przy czym, stan naprężenia o zgodnym znaku wartości naprężeń głównych (gdzie dodatnia wartość oznacza rozciąganie, a ujemna – ściskanie) nazywa się **jednoimiennym**. Natomiast schemat o różnych znakach – **różnoimiennym** [71].

Jednocześnie należy zwrócić uwagę na schemat stanu naprężenia, który przedstawiono na rys. 1.16e. Jeśli wartości bezwzględne naprężeń głównych będą sobie równe (tj. $\sigma_1 = -\sigma_2$), to taki schemat nazywa się **czystym ścinaniem**. Występuje on również w elementach (np. o przekroju kołowym) poddanych obciążeniu skręcającemu [24, 58, 59, 73]. Schemat ten, wspólnie z innym schematem płaskiego stanu naprężenia (rys. 1.16c), ale jako dwuosiowy nierównomierny stan, występuje również w materiale podczas tłoczenia wyrobów blaszanych [37].



Rys. 1.16. Schematy stanu naprężenia: liniowy (a, b), płaski (c, d, e) oraz przestrzenny (f, g, h, i) – opis w tekście

1.7.1. Płaski stan naprężenia

Jednym ze szczególnych przypadków schematu naprężenia jest płaski stan naprężenia (rys. 1.16 c, d, e). Taka sytuacja występuje niekiedy w procesach obróbki plastycznej metali, np. podczas rozciągania lub ściskania płaskiej płyty siłami przyłożonymi równolegle do jej płaszczyzn czołowych. Przy czym, należy pamiętać, że przy takim schemacie obciążenia element obrabiany odkształca się we wszystkich możliwych kierunkach.

Tensor naprężenia, dla omawianego schematu naprężeń, ma następującą postać (w przypadku ogólnym):

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Podobnie jak postać powyższego tensora (1.57), również zmianie ulega sposób zapisu naprężenia średniego σ_m , mianowicie:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y). \quad (1.58)$$

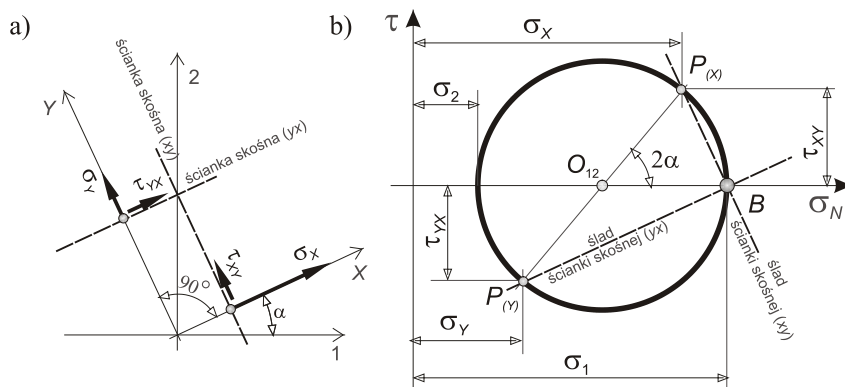
Z kolei równania równowagi (1.8) dla płaskiego stanu naprężenia ulegają redukcji do układu dwóch równań (1.59) [37, 50, 71].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (1.59)$$

Pozostaje jeszcze kwestia omówienia zasady konstrukcji koła Mohra dla rozpatrywanego schematu naprężeń. Załóżmy, że wykres Mohra przedstawiony na rys. 1.17b odpowiada stanowi naprężenia w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego. Wprowadźmy dwie ścianki skośne, które są zorientowane względem kierunków głównych $\{1, 2\}$, tak jak to zobrazowano na rys. 1.17a. Niech normalne do tych płaszczyzn pokrywają się z osiami nowego układu odniesienia $\{x, y\}$. Przy czym, kąt tworzony przez oś $\{x\}$ z kierunkiem głównym $\{1\}$, oznaczmy literą α . Na każdej z tych płaszczyzn można wyznaczyć składową normalną i styczną naprężenia. Ich wartości wyznaczają punkty $P_{(x)}$ i $P_{(y)}$ umieszczone na kole Mohra (rys. 1.17b).

Jeśli teraz z każdego z tych punktów (oznaczonych literą P z odpowiednim indeksem) poprowadzimy cięciwy koła, które są równoległe do śladów odpowiednich ścianek skośnych, wyznaczymy punkt (oznaczony literą B) nazywany **biegunem koła Mohra** [4, 37].

Reasumując, koło Mohra określa stan naprężenia w rozpatrywanym punkcie ośrodka ciągłego. Z kolei biegun tego koła pozwala wyznaczyć wartości skła-



Rys. 1.17. Koło naprężeń Mohra dla płaskiego stanu naprężenia (b) oraz schemat przedstawiający składowe naprężenia na ściankach skośnych (a); punkt B – biegun koła Mohra, punkty P – odwzorowanie składowych naprężenia panujących na poszczególnych płaszczyznach, α – kąt tworzony przez oś x (normalną do ścianki skośnej) z kierunkiem głównym 1

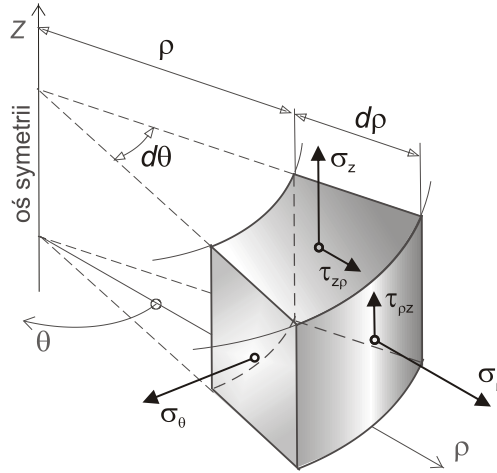
dowych naprężenia (normalną σ_N i styczną τ) przypisanych do płaszczyzny, której ślad jest równoległy do cięciwy poprowadzonej z bieguna koła. Pojęcie bieguna koła Mohra jest wykorzystywane do wyznaczania dolnej oceny sił uplastyczniających materiał – o czym będzie mowa w dalszej części skryptu.

1.7.2. Osiowo-symetryczny stan naprężenia

Szczególnym przypadkiem przestrzennego schematu naprężeń jest osiowo-symetryczny stan naprężenia. Jest on dość często spotykany w procesach obróbki plastycznej. Charakteryzuje on stan występujący w obrotowych elementach, które są obciążone siłami powierzchniowymi, symetrycznie rozłożonymi względem ich osi symetrii. Ponadto siły te są przyłożone jednakowo we wszystkich przekrojach przechodzących przez tę oś.

Przy rozpatrywaniu takiego stanu naprężeń zazwyczaj stosowany jest walcowy układ odniesienia $\{\rho, \theta, z\}$. Z kolei, składowe naprężenia występującego w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego, najlepiej jest przedstawiać za pomocą elementarnego wycinka cylindrycznego – tak jak to przedstawiono na rys. 1.18.

Dla osiowo-symetrycznych elementów konstrukcyjnych składowe tensora naprężeń nie zależą od współrzędnej θ , zatem ten tensor przyjmuje następującą postać:



Rys. 1.18. Elementarny wycinek cylindryczny – we współrzędnych walcowych $\{\rho, \theta, z\}$ – służący do przedstawiania składowych osiowo-symetrycznego stanu naprężenia panującego w dowolnym punkcie obrotowego ośrodka ciągłego

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\rho} & 0 & \tau_{\rho z} \\ 0 & \sigma_{\theta} & 0 \\ \tau_{z\rho} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

Natomiast, w rezultacie przyjęcia współrzędnych walcowych (rys. 1.18), równania równowagi (1.8) dla osiowo-symetrycznego stanu naprężenia przyjmują formę układu równań (1.61) [24, 45, 71, 73].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0, \end{array} \right. \quad (1.61)$$

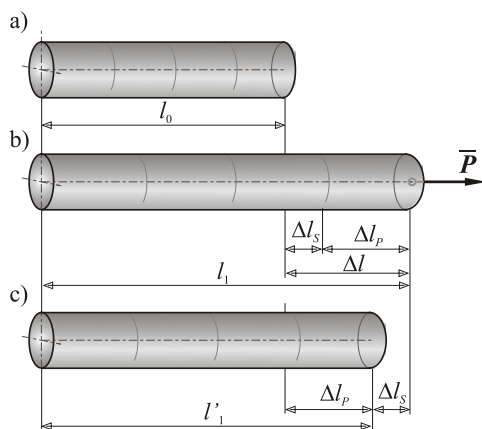
gdzie: ρ – odległość rozpatrywanego punktu ośrodka ciągłego od osi symetrii $\{z\}$ (zgodnie z rys. 1.18).

2. STAN ODKSZTAŁCENIA

2.1. Definicja odkształcenia

Każdy element konstrukcyjny (ośrodek ciągły), będący w stanie naprężenia, doznaje odkształceń. Oznacza to, że ulega zmianie zarówno jego postać geometryczna jak i jego wymiary. Zagadnienie te zostanie omówione na przykładzie schematu odkształcania pręta walcowego (rys. 2.1). Pod wpływem działania siły rozciągającej (rys. 2.1b), długość początkowa próbki l_0 ulega zwiększeniu do pewnej, określonej wartości l_1 . Przyrost tej wartości nazywa się **odkształceniem bezwzględnym** [5] (w rozpatrywanym przypadku – wydłużeniem Δl). Natomiast iloraz (2.1) wydłużenia Δl oraz długości początkowej l_0 określa się mianem **odkształcenia względnego** i oznacza się przez literą ε .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.1)$$



Rys. 2.1. Schemat przebiegu odkształcenia: próbka przed obciążeniem (a), w trakcie obciążenia (b) oraz po zdjęciu obciążenia (c); l_0 – długość początkowa próbki, l_1 – długość końcowa (osiągnięta w wyniku obciążenia), l'_1 – długość końcowa (tj. ostateczna, którą uzyskano po zdjęciu obciążenia), Δl – odkształcenie bezwzględne, Δl_s – odkształcenie sprężyste, Δl_p – odkształcenie plastyczne (trwałe)

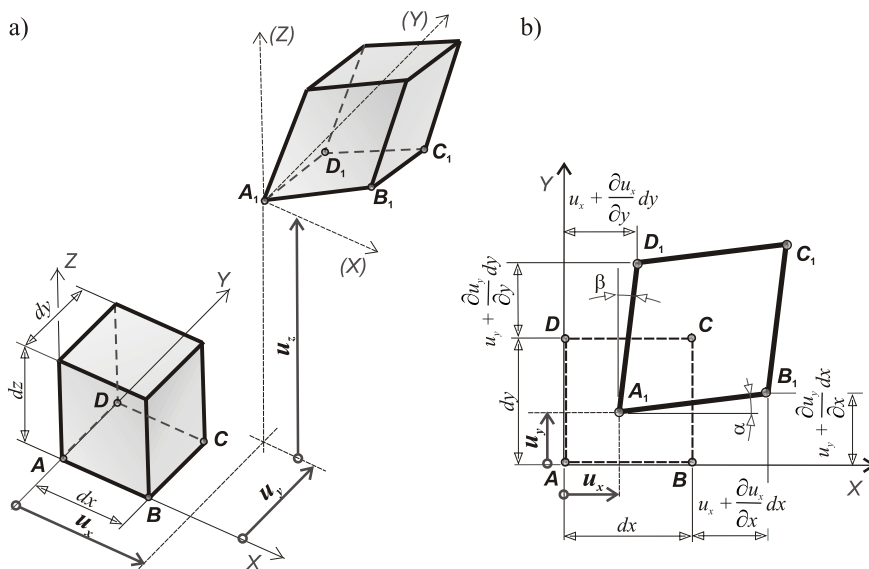
gdzie: oznaczenia są zgodne z rys. 2.1.

Po zdjęciu obciążenia zewnętrznego (rys. 2.1c), długość pręta ulega zmniejszeniu, jednakże nie osiąga ona wartości początkowej l_0 . Jest to spowodowane tym, że odkształcenie całkowite Δl składa się z odkształcenia sprężystego Δl_s (zanikającego po zaprzestaniu działania sił zewnętrznych) oraz z odkształcenia plastycznego Δl_p (trwałego). Oczywiście, odkształcenia plastyczne występują tylko wtedy, kiedy naprężenia wywołane działaniem sił zewnętrznych przekroczą pewien

poziom – nazywany **granicą plastyczności**. Do tego momentu odkształcenia mają charakter wyłącznie sprężysty (rys. 2.1b) [5, 45, 71].

Rozpatrzmy teraz nieskończenie małe odkształcenia, które z racji swojej wartości utożsamiane są z odkształceniami sprężystymi. W tym celu, w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego, przyjmijmy kartezjański układ współrzędnych $\{x, y, z\}$ oraz wyodrębnijmy elementarny prostopadłościan o bokach dx , dy i dz – tak jak to przedstawiono na rys. 2.2. W wyniku przyłożenia obciążenia zewnętrznego, rozpatrywany punkt doznaje przemieszczenia, a składowe jego wektora mają wartości równe: u_x , u_y oraz u_z . Takiego samego przesunięcia doznaje elementarny prostopadłościan, co więcej – jego wymiary liniowe ulegają zmianie, a w przypadku ogólnym zmienia się również jego postać (rys. 2.2). W przypadku szczególnym, tj. gdy postać rozpatrywanego prostopadłościanu nie zmienia się, występuje sytuacja, w której osie przyjętego układu odniesienia pokrywają się z **kierunkami głównymi odkształcenia** [5, 24, 45].

Powróćmy teraz do analizy odkształcenia wspomnianego prostopadłościanu. Rozpatrzmy jeden z jego rzutów (przed i po odkształceniu) na płaszczyznę XY



Rys. 2.2. Schemat przedstawiający odkształcony i przemieszczony elementarny prostopadłościan (a) oraz jego rzut na płaszczyznę XY (b); u_x , u_y , u_z – składowe przemieszczenia, dx , dy , dz – wymiary początkowe prostopadłościanu; α , β – kąty opisujące zmianę postaci rzutu prostopadłościanu na płaszczyźnie XY

(rys. 2.2b). Bazując na wzorze (2.1) można zapisać, że odkształcenie względne jednej z krawędzi prostopadłościanu – np. krawędzi AB w kierunku x – jest równe:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A_1B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (2.2)$$

gdzie oznaczenia są zgodne z rys. 2.2b. Pozostałe odkształcenia względne ε_y oraz ε_z wyznacza się analogicznie, rozpatrując rzuty krawędzi prostopadłościanu odpowiednio na płaszczyznę XY lub YZ oraz płaszczyznę YZ lub XZ. Wartości tych odkształceń opisują zmianę wymiarów ośrodka ciągłego i są nazywane **odkształceniami liniowymi** [28, 45].

Natomiast zmianę postaci w dowolnym punkcie opisuje się za pomocą **odkształceń postaciowych (kątowych)** γ_{xy} , γ_{yx} , γ_{xz} , γ_{zx} oraz γ_{yz} i γ_{zy} . W celu wyznaczenia związków między tymi odkształceniami a przemieszczeniami, należy przeanalizować kąty obrotu krawędzi rzutów elementarnego prostopadłościanu na odpowiednie płaszczyzny. Przykładowo, kąt obrotu α krawędzi AB dookoła punktu A na płaszczyźnie XY (rys. 2.2b) wynosi [28]:

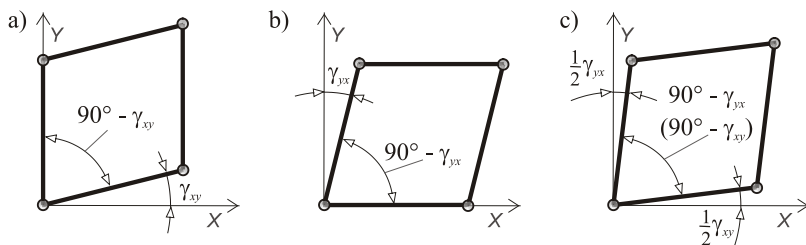
$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right) - u_y}{(dx - u_x) + \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (2.3)$$

gdzie oznaczenia są zgodne z rys. 2.2b. W analogiczny sposób wyznacza się zależność przemieszczeń od kąta obrotu β , który ilościowo jest równy kątowi α . W ostateczności, odkształcenie postaciowe γ_{xy} oraz γ_{yx} można wyrazić za pomocą poniższej zależności:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Geometryczna interpretacja odkształcenia postaciowego γ (na płaszczyźnie XY) przedstawiona została na rys. 2.3. Ponadto, zamieszczone na nim trzy schematy odkształcenia są sobie równoważne.

Analizując odkształcenia, przy wykorzystaniu dwóch pozostałych rzutów rozpatrywanego prostopadłościanu (tj. na płaszczyzny XZ i YZ), otrzymuje się układ liniowych równań geometrycznych A. Cauchy'ego (2.5 ÷ 2.6). Równania te wiążą odkształcenia liniowe i postaciowe z przemieszczeniami [28, 29, 42, 45, 71].



Rys. 2.3. Równoważne odkształcenia postaciowe elementarnego czworoboku:
a), b) ścinanie proste; c) czyste odkształcenie postaciowe (kątowe)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} , \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} , \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} , \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} , \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} , \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} , \end{array} \right. \quad (2.6)$$

gdzie: oznaczenia są zgodne z rys. 2.2.

W teorii sprężystości funkcje odkształcenia (jakimi są równania A. Cauchy’ego) nie mogą być niezależne, a wartości składowych odkształcenia nie można przyjąć w sposób dowolny. Załóżmy hipotetycznie, że odkształcany element konstrukcyjny zostaje podzielony na skończoną ilość elementarnych prostopadłościanów. Jeżeli do każdego z nich przyporządkowalibyśmy składowe odkształcenia tylko na podstawie równań A. Cauchy’ego (2.5 ÷ 2.6), okazałoby się, że odkształcone prostopadłościany stałyby się nieprzystające. Oznaczałoby to, iż nie została zachowana ciągłość materiału – co jest niezgodne z rzeczywistością oraz z teorią sprężystości i plastyczności.

Rozwiązaniem tego problemu są równania **nierozdzielności (współistnienia) odkształceń** [5, 28, 42, 71], które zostały wyprowadzone przez

B. de Saint-Venant'a poprzez eliminację przemieszczeń z równań geometrycznych (2.5 ÷ 2.6). Równania, o których jest mowa, wyrażają warunki zgodności odkształceń i mają następującą postać [28, 71]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} , \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} , \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} , \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} , \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} , \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} , \end{array} \right. \quad (2.8)$$

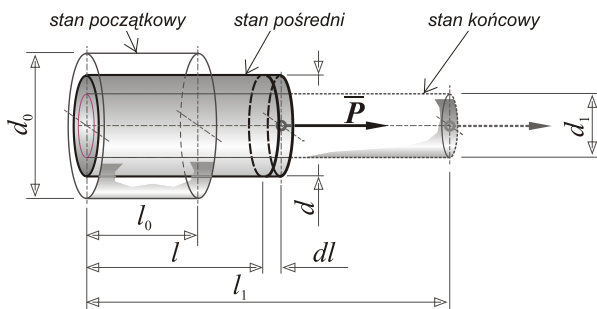
gdzie: równania (2.7) wiążą między sobą odkształcenia występujące w tej samej płaszczyźnie przyjętego układu współrzędnych $\{x, y, z\}$. Natomiast równania (2.8) uzależniają drugie pochodne cząstkowe funkcji odkształceń liniowych (2.5) od drugich pochodnych cząstkowych funkcji odkształceń postaciowych (2.6), występujących w trzech różnych płaszczyznach układu odniesienia.

2.2. Odkształcenia plastyczne

Teoria sprężystości porusza zagadnienia dotyczące przede wszystkim odkształceń nieskończenie małych (sprężystych). Natomiast w procesach kształtowania plastycznego metali występują odkształcenia skończone, które osiągają niekiedy znaczne wartości. W takim przypadku, całkowite odkształcenie plastyczne wyraża się poprzez **miarę logarytmiczną** (naturalną) – a takie odkształcenie (nazywane również rzeczywistym) oznacza się literą φ [5, 24, 25, 50]. „Podejście” to wyjaśnia rys. 2.4, na którym przedstawiono schematycznie proces rozciągania pręta. Schemat ten pokazuje, że całkowite odkształcenie ośrodka ciągłego jest sumą nieskończenie małych odkształceń – co można zapisać:

$$\varphi = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0} \equiv \ln(1 + \varepsilon) , \quad (2.9)$$

gdzie: oznaczenia są zgodne z rys. 2.4. W ogólnym przypadku należy traktować l_0 jako wymiar charakterystyczny przed rozpoczęciem odkształcania, natomiast l_1 – wymiar końcowy (po odkształceniu plastycznym).



Rys. 2.4. Schemat plastycznego rozciągania pręta siłą P : l_0 – długość początkowa, l_1 – długość końcowa, l – długość pręta w dowolnej chwili rozciągania, dl – nieskończenie małe odkształcenie bezwzględne, d_0 – średnica początkowa, d_1 – średnica końcowa

2.3. Tensor odkształcenia

Identycznie jak w przypadku stanu naprężenia, również składowe odkształcenia liniowego i postaciowego można zestawić w postaci tensora – tj. macierzy symetrycznej [5, 24, 29, 45, 71]. Więc, stan odkształcenia dla przyjętego punktu ośrodka ciągłego, w dowolnie przyjętym układzie współrzędnych, można wyrazić w formie **tensora odkształcenia**:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Z kolei przyjmując układ odniesienia $\{1, 2, 3\}$, którego osie pokrywają się z kierunkami głównymi, tensor (2.10) będzie miał następującą postać:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Porównując ze sobą formę zapisu stanu odkształcenia i naprężenia, stwierdza się pełną analogię między zależnościami występującymi dla wspomnianych

wielkości fizycznych. Nawiązując do tego twierdzenia oraz do zależności (1.19), tensor odkształcenia (2.10) lub (2.11) można przedstawić również jako sumę dwóch macierzy, mianowicie:

$$T_{\varepsilon} = K_{\varepsilon} + D_{\varepsilon} . \quad (2.12)$$

gdzie:

$$K_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} , \quad (2.13)$$

jest tensorem kulistym (**aksjatozem**) **odkształcenia**, natomiast:

$$D_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix} , \quad (2.14)$$

jest **dewiatorem odkształcenia**. Sens fizyczny powyższych wyrażeń charakteryzujących stan odkształcenia jest identyczny jak w przypadku stanu naprężenia. Również **odkształcenie średnie** ε_m ma analogiczne znaczenie jak naprężenie średnie σ_m . W przypadku ogólnym, odkształcenie to wynosi:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) , \quad (2.15)$$

natomiast, traktując je jako funkcję odkształceń głównych – jest równe:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) . \quad (2.16)$$

2.4. Niezmienniki stanu odkształcenia

Omawiając zagadnienia stanu naprężenia wykazano, że istnieją takie wyrażenia opisujące ten stan, których wartości nie zależą od przyjętego układu współrzędnych. Podobnie jest w przypadku stanu odkształcenia. Powoduje to, że pomiędzy niezmiennikami stanu odkształcenia i stanu naprężenia zachodzi pełna analogia.

Pierwszym niezmiennikiem stanu odkształcenia jest **odkształcenie średnie** ε_m , którego wartość wyznacza się ze wzoru (2.15) lub (2.16). Jego sens fizyczny

wyjaśnia następujący przykład. Rozpatrzmy równomierne trójosiowe rozciąganie elementarnego sześcianu, którego krawędzie mają długość początkową równą: dx , dy oraz dz . W wyniku odkształcenia sprężystego, krawędzie te wydłużą się, osiągając wartość równą odpowiednio: $dx \cdot (1 + \varepsilon_x)$, $dy \cdot (1 + \varepsilon_y)$ oraz $dz \cdot (1 + \varepsilon_z)$. Stąd wynika, że względna zmiana objętości θ_V elementarnego sześcianu będzie wynosić [28]:

$$\theta_V = \frac{V_{końcówco}}{V_{począteczqat}} - 1 = \frac{dx(1 + \varepsilon_x) \cdot dy(1 + \varepsilon_y) \cdot dz(1 + \varepsilon_z)}{dx \cdot dy \cdot dz} - 1, \quad (2.17)$$

po odpowiednich przekształceniach matematycznych uzyskuje się

$$\theta_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \equiv 3 \cdot \varepsilon_m. \quad (2.18)$$

Ostatecznie stwierdza się, że zmiana objętości ośrodka ciągłego zależy tylko i wyłącznie od wartości odkształcenia średniego ε_m . Natomiast odkształcenia wywołujące zmianę objętości elementu konstrukcyjnego są nazywane **odkształceniami objętościowymi** [5, 28].

W teorii plastyczności – podczas analizy odkształceń w zakresie plastycznym – zakłada się, że objętość odkształcanego ośrodka ciągłego nie ulega zmianie. Wyraża się to za pomocą **warunku nieściśliwości**, który zapisywany jest w następujący sposób:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0, \quad (2.19)$$

lub:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 = 1, \quad (2.20)$$

gdzie: φ_1 , φ_2 , φ_3 – główne odkształcenia rzeczywiste. Równanie (2.19) też nazywane jest **prawem stałej objętości** [28, 45].

Drugim aksjomatem stanu odkształcenia jest **zastępcze odkształcenie** (liniowe) ε_H , nazywane także **intensywnością odkształcenia** ε_i . W przypadku nieskończenie małych odkształceń (tj. w zakresie sprężystym), niezmiennik ten jest wyznaczany z następującej zależności:

$$\varepsilon_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}, \quad (2.21)$$

natomiast, gdy osie przyjętego układu odniesienia pokrywają się kierunkami głównymi, odkształcenie zastępcze wynosi:

$$\varepsilon_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (2.22)$$

Niezmiennik ten jest proporcjonalny do odkształcenia postaciowego γ_{okt} na płaszczyźnie oktaedrycznej (rys. 1.10). Pomiedzy tymi dwoma odkształceniami zachodzi następująca zależność:

$$\gamma_{okt} = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_H , \quad (2.23)$$

natomiast odkształcenie liniowe ε_{okt} w kierunku normalnym do wspomnianej płaszczyzny oktaedrycznej jest równe odkształceniu hydrostatycznemu

$$\varepsilon_{okt} = \varepsilon_m . \quad (2.24)$$

Na podstawie zależności (2.23) i (2.24) można stwierdzić, że odkształcenia występujące na płaszczyźnie oktaedrycznej (tj. takiej której normalna jest jednakowo nachylona do kierunków głównych) również pełnią rolę niezmienników stanu odkształcenia [45, 71]. Przy czym, zależności te wyprowadza się w sposób identyczny jak wzory na naprężenia oktaedryczne omówione w rozdziale 1.5.3.

Należy jeszcze wspomnieć, że w teorii sprężystości i plastyczności funkcjonuje również pojęcie zastępczego odkształcenia postaciowego γ_H . Jego wartość jest także proporcjonalna do niezmiennika ε_H , i wynosi:

$$\gamma_H = \sqrt{3} \cdot \varepsilon_H . \quad (2.25)$$

W przypadku odkształceń w zakresie plastycznym, intensywność odkształcenia jest zdefiniowana jako suma przyrostów zastępczych odkształceń rzeczywistych. Zatem, w takiej sytuacji omawiany niezmiennik stanu odkształcenia wyznacza się z poniższego wzoru:

$$\varphi_H = \int d\varphi_H , \quad (2.26)$$

gdzie przyrost odkształcenia zastępczego wynosi:

$$d\varphi_H = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2} , \quad (2.27)$$

natomiast odkształcenia oznaczone jako: $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ są przyrostami rzeczywistych odkształceń głównych.

Omawiany drugi niezmiennik stanu odkształcenia posiada prostą interpretację fizyczną. Mianowicie, zastępcze odkształcenie jest równe odkształceniu w kierunku wydłużania w procesie jednoosiowego rozciągania pręta o kołowym przekroju poprzecznym [5, 45, 71].

Ostatnim niezmiennikiem stanu odkształcenia jest tzw. kąt ω , który ma identyczną interpretację i wartość jak w przypadku stanu naprężenia. W odniesieniu do odkształceń nieskończenie małych, jego wartość można wyznaczyć z poniższej zależności [45]:

$$\cos \omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_H} , \quad (2.28)$$

albo – w przypadku odkształceń skończonych (w zakresie plastycznym), aksjomat ten jest równy:

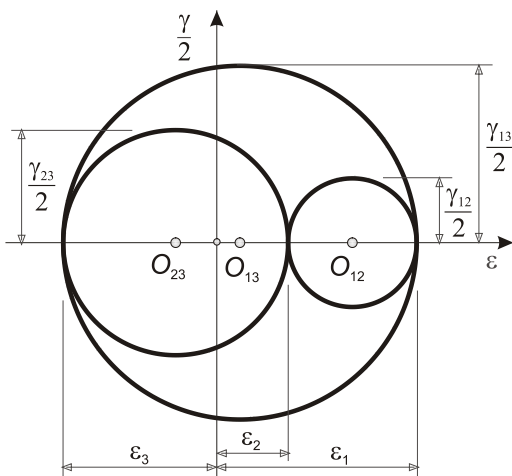
$$\cos \omega = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_H}, \quad (2.29)$$

gdzie: ε_1 , $d\varphi_1$ – największe odkształcenia główne. Dla przypomnienia, odkształcenia główne są uszeregowane pod względem ich wartości w identyczny sposób jak naprężenia główne – zależność (1.3).

2.5. Graficzna prezentacja stanu odkształcenia

2.5.1. Koło Mohra

Stan odkształcenia panujący w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego można przedstawić za pomocą kół Mohra. Zasada budowy takiego wykresu jest taka sama jak w przypadku kół Mohra dla stanu naprężenia. Przykładową konstrukcję koła Mohra dla dowolnego stanu odkształcenia umieszczono na rys. 2.5. Na osi odciętych przyjęto odkształcenie liniowe ε , zaś na osi rzędnych – połowę wartości odkształcenia postaciowego $\frac{1}{2}\gamma$. Interpretacja geometryczna odkształcenia oraz sposób wyznaczania składowych odkształcenia na dowolnie zorientowanej względem kierunków głównych płaszczyźnie jest identyczna jak dla wykresu stanu naprężenia.



Rys. 2.5. Koło odkształceń Mohra odwzorowujące graficznie stan odkształcenia w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego (opis w tekście)

Należy wyjaśnić, że odczytane z wykresu Mohra wartości ekstremalnych odkształceń postaciowych, występujących na odpowiednich ściankach skośnych (rys. 1.11a i b) są następujące:

$$\gamma_{12} = \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (2.30)$$

$$\gamma_{12} = \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad (2.31)$$

$$\gamma_{23} = \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3). \quad (2.32)$$

Oczywiście największym odkształceniem postaciowym jest odkształcenie γ_{13} – obliczane zgodnie z zależnością (2.31), występujące na płaszczyźnie nachylonej do kierunków głównych {1} oraz {3} pod kątem 45° .

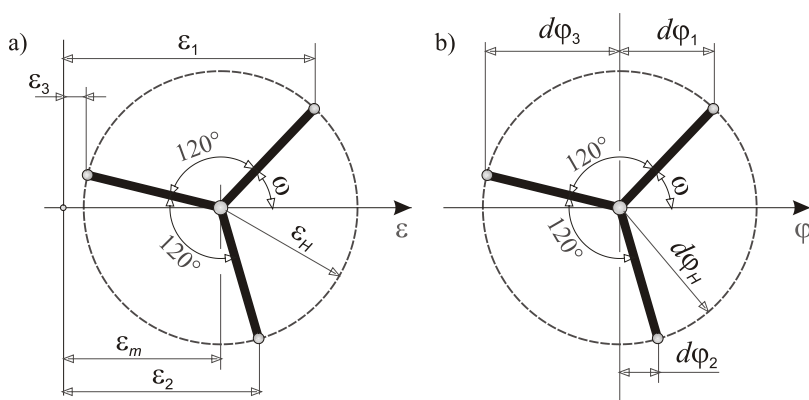
2.5.2. Gwiazda odkształceń

Gwiazda odkształceń różni się od gwiazdy sporządzonej dla stanu naprężenia tym, że jest skonstruowana w układzie odniesienia składającym się jedynie z osi odciętych. Na niej nanoszone są główne odkształcenia liniowe. Na rys. 2.6a przedstawiono konstrukcję wykresu dla odkształceń z zakresu sprężystego (nie-skończenie małych), z kolei na rys. 2.6b – dla odkształceń z zakresu plastycznego. Różnią się one umiejscowieniem środka gwiazdy. W pierwszym przypadku jest on oddalony od początku układu odniesienia o wartość równą odkształceniu średniemu ε_m . Natomiast w drugim przypadku środek ten zawsze znajduje się w punkcie początkowym osi odciętych (ponieważ odkształcenie średnie φ_m jest równe zero) [45].

Na podstawie gwiazdy odkształceń można wyznaczyć odkształcenia główne. Z rys. 2.6a wynika, że ich wartości w zakresie sprężystym wynoszą:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_m + \varepsilon_H \cdot \cos \omega, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_m + \varepsilon_H \cdot \cos(\omega - 120^\circ), \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_m + \varepsilon_H \cdot \cos(\omega - 240^\circ). \end{cases} \quad (2.33)$$

Analogicznie określane są (na podstawie rys. 2.6b) odkształcenia główne w zakresie plastycznym. Wartości przyrostów tych odkształceń są równe:



Rys. 2.6. Gwiazda odkształceń Pełczyńskiego przedstawiająca dowolny stan odkształcenia w zakresie sprężystym (a) oraz plastycznym (b); opis w tekście

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi_1 = d\varphi_H \cdot \cos \omega , \\ d\varphi_2 = d\varphi_H \cdot \cos(\omega - 120^\circ) , \\ d\varphi_3 = d\varphi_H \cdot \cos(\omega - 240^\circ) . \end{array} \right. \quad (2.34)$$

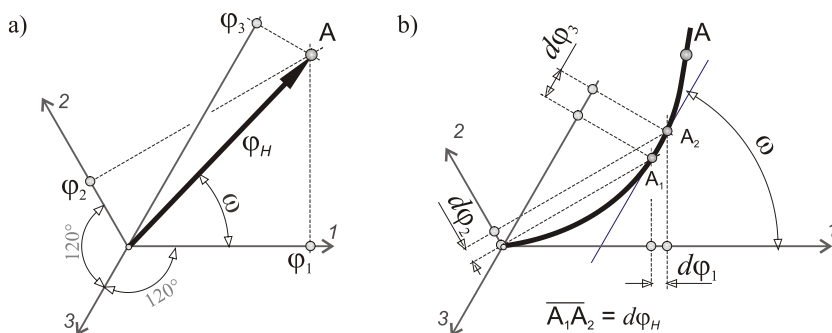
2.5.2. Ukośnokątny układ współrzędnych

Omówiony w rozdziale 1.6.3 ukośnokątny układ odniesienia (sporządzany dla stanu naprężenia) można również adaptować do celów prezentacji stanu odkształcenia. Jego cechy sprawiają, że idealnie nadaje się on do przedstawiania **historii** (przebiegu) **odkształceń** z zakresu plastycznego [57]. Na rys. 2.7a przedstawiono stan odkształcenia, który jest reprezentowany przez punkt A. Zauważmy, że w tym przypadku wartości odkształceń głównych narastały (począwszy od poziomu zerowego) w sposób proporcjonalny. Odkształcenia o takim przebiegu noszą nazwę **odkształceń prostych** lub proporcjonalnych. Należy zaznaczyć, że trzeci niezmiennik – kąt ω – ma wartość stałą. Dla takiej historii odkształceń zastępcze odkształcenie φ_H (drugi niezmiennik), wyrażone wcześniej zależnościami (2.26) i (2.27), można wyznaczać z uproszczonego wzoru, który ma następującą postać:

$$\varphi_H = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2} , \quad (2.35)$$

gdzie oznaczenia są zgodne z rys. 2.7a.

W praktyce jednak jest tak, że wartości odkształceń głównych narastają w sposób nieproporcjonalny [45, 57] – tak jak to np. pokazano na rys. 2.7b. Pomimo, że końcowa wartość odkształceń jest taka sama jak w przypadku z rys.



Rys. 2.7. Przebieg odkształceń proporcjonalnych (a) i nieproporcjonalnych (b), w zakresie plastycznym, przedstawiony w ukośnokątnym układzie współrzędnych; punkt A – końcowy stan odkształcenia (opis w teście)

2.7a (punkt A) to własności fizyczne odkształcanego materiału będą się różniły. Dla odkształceń o przebiegu nieproporcjonalnym, wartość kąta ω (który charakteryzuje sposób przyłożenia obciążenia zewnętrznego) zmienia się w trakcie odkształcania. Zatem, wykres z rys 2.7b wyjaśnia powód, dla którego w prowadzonych rozważaniach należy brać pod uwagę historię odkształceń plastycznych, a wartości tych odkształceń ujmować we wzorach w postaci nieskończenie małych przyrostów $d\phi$.

2.6. Prędkość odkształcenia

Analizy procesu plastycznego odkształcania metali nie można ograniczać jedynie do rozpatrywania stanu naprężenia i odkształcenia. W rzeczywistości, zmiana własności fizycznych ośrodka ciągłego zależy również od kinematyki procesu kształtowania. Wiąże się to z uwzględnianiem dodatkowego parametru, jakim jest czas t . Jednocześnie takie „podejście” pozwala przeprowadzać analizę chwilowych stanów procesu kształtowania metali, co jest szczególnie istotne dla procesów mających charakter dynamiczny [4, 5, 26, 71, 73].

Kinematykę odkształcania ośrodka ciągłego opisuje się za pomocą dwóch wielkości. Pierwszą z nich jest **prędkość odkształcenia** [45], którą definiuje się jako przyrost wartości odkształcenia przypadający na jednostkę czasu. Dla odkształceń nieskończenie małych (tj. z zakresu sprężystego), definicję wspomnianej prędkości można zapisać:

$$\dot{\varepsilon} = d\varepsilon / dt , \quad (2.36)$$

natomiast dla odkształceń wyrażonych w mierze logarytmicznej prędkość odkształcenia zapisuje się w następującej formie:

$$\dot{\phi} = d\phi / dt , \quad (2.37)$$

gdzie: t – czas [s].

Drugą wielkością fizyczną jest **prędkość przemieszczenia** [45], nazywana również prędkością płynięcia. Wielkość ta jest zdefiniowana jako wartość przemieszczenia wybranego punktu ośrodka ciągłego (względem przyjętego układu odniesienia) w jednostce czasu. Posiłkując się rys. 2.2b, można zapisać, że prędkość przemieszczenia punktu A w kierunku $\{x\}$ wynosi:

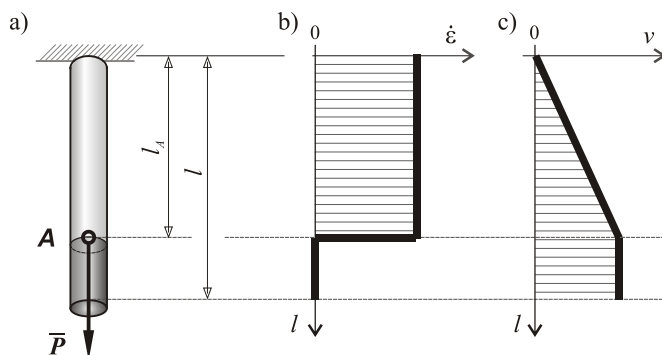
$$v_A = du_x / dt , \quad (2.38)$$

lub w przypadku ogólnym:

$$v = dl / dt , \quad (2.39)$$

gdzie: dl – elementarne przemieszczenie liniowe dowolnego punktu ośrodka ciągłego doznane w jednostce czasu dt .

Różnice pomiędzy omówionymi dwoma różnymi prędkościami wyjaśnia rys. 2.8 [45]. Przedstawiono na nim schemat rozciągania pręta siłą zewnętrzną P . Dolny koniec tej próbki jest swobodny, a przyłożenie siły rozciągającej jest przesunięte ku jej środkowi – do punktu A. W wyniku tego, część pręta znajdująca się poniżej tego punktu nie doznaje odkształceń. Więc prędkość odkształcenia w tej strefie jest równa zero (rys. 2.8b). Dolny fragment pręta jedynie przemieszcza się pod wpływem działania siły rozciągającej, zachowując się jak jeden element sztywny – co obrazuje wykres umieszczony na rys. 2.8b. Jednocześnie należy zaznaczyć, że prędkość płynięcia każdego punktu, należącego do tego fragmentu pręta jest jednakowa i osiąga wartość maksymalną – taką jaką ma punkt A.



Rys. 2.8. Schemat rozciągania pręta o przekroju walcowym siłą P (a) oraz: b) rozkład prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$; c) rozkład prędkości przemieszczenia (płynięcia materiału) v ; opis w tekście

Przedstawmy jeszcze związek zachodzący pomiędzy prędkością odkształcenia a prędkością płynięcia. Na podstawie definicji odkształcenia (3.1) można zależność (3.39) przedstawić w następującej formie:

$$v = d\epsilon \cdot l / dt, \quad (2.40)$$

stąd wynika następujący związek:

$$v = \dot{\epsilon} \cdot l, \quad (2.41)$$

gdzie: l – charakterystyczny wymiar liniowy określający położenie początkowe rozpatrywanego punktu ośrodka ciągłego względem przyjętego układu odniesienia. Biorąc pod uwagę powyższą zależność (2.41), prędkości odkształcenia można przedstawić również w formie równań A. Cauchy’ego:

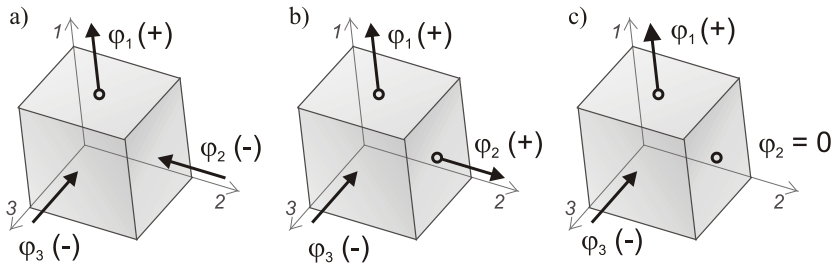
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} , \\ \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} , \\ \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} , \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} , \\ \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} , \\ \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} . \end{array} \right. \quad (2.43)$$

gdzie: v_x, v_y, v_z – składowe prędkości przemieszczenia w układzie $\{x, y, z\}$.

2.7. Schematy odkształceń głównych. Płaski stan odkształcenia

Jak już wiemy, obciążenie siłami zewnętrznymi ośrodka ciągłego powoduje jego odkształcenia. Rozpatrzmy teraz możliwe schematy odkształceń głównych, jakie mogą wystąpić podczas plastycznego kształtowania metalu. Na podstawie prawa stałej objętości (2.19) można wykazać, że istnieją tylko trzy takie schematy – przedstawiono je na rys. 2.9. Pierwsze dwa schematy odkształceń głównych (rys. 2.9a i rys. 2.9b) reprezentują przestrzenny stan odkształcenia. W przypadku pierwszym, dwa odkształcenia mają charakter ściskający (ich wartość jest mniejsza od zera), natomiast trzecie odkształcenie wywołuje rozciąganie (oznaczone jest znakiem plus). Natomiast w drugim przypadku (rys. 2.9b) – tylko



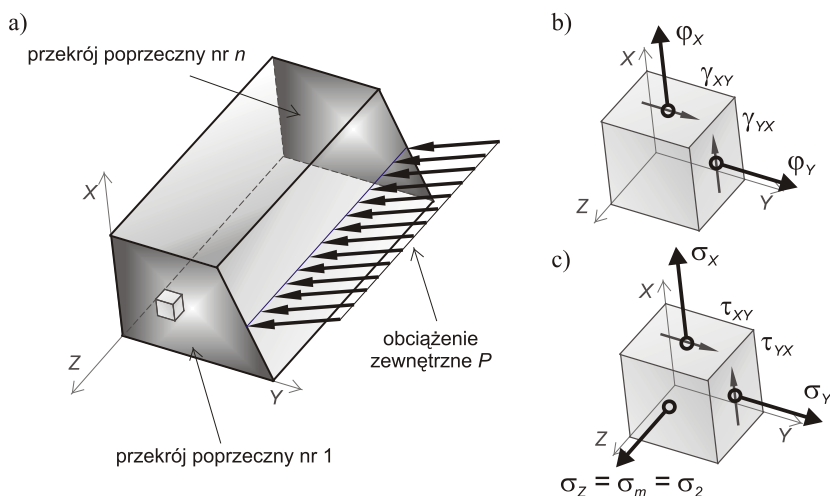
Rys. 2.9. Schematy odkształceń głównych: a), b) – przestrzenny; c) – płaski; opis w tekście

jedno odkształcenie powoduje ściskanie, a pozostałe dwa – rozciąganie. Ostatni schemat – pokazany na rys. 2.9c – przedstawia **plaski stan odkształcenia**. Jest to przypadek szczególny, który zostanie teraz omówiony szerzej.

Plaski stan odkształcenia cechuje to, że odkształcenia oraz przemieszczenia, występujące w kierunkach równoległych do określonego przekroju ośrodka ciągłego są określone jednakowymi funkcjami na wszystkich możliwych płaszczyznach, które są równoległe do tego przekroju. Natomiast odkształcenia i przemieszczenia, których kierunek jest prostopadły do wspomnianego przekroju, są równe zero [37, 50, 58, 71].

Na rys. 2.10 przedstawiono pryzmatyczny ośrodek ciągły, obciążony siłą P równomiernie rozłożoną wzdłuż osi $\{z\}$. Plaski stan odkształcenia występuje we wszystkich przekrojach równoległych do płaszczyzny XY – ale pod warunkiem, że długość tej belki jest wystarczająco duża. Uważa się, że jeżeli długość odkształcanego materiału jest większa co najmniej dwukrotnie od największego wymiaru liniowego przekroju poprzecznego, to może wystąpić (w tym przekroju) plaski stan odkształcenia [50].

Omówmy teraz stan naprężenia, który odpowiada omawianemu stanowi odkształcenia. Ponieważ przekroje równoległe do płaszczyzny XY pozostają płaskimi i nie ulegają przemieszczeniu w kierunku równoległym do osi $\{z\}$, to na-



Rys. 2.10. Plaski stan odkształcenia: a) – schemat przedstawiający belkę obciążoną siłą zewnętrzną P (której kierunek jest równoległy do płaszczyzny XY) wraz z wyszczególnionym przekrojem poprzecznym; b), c) – składowe odkształcenia i naprężenia występujące w dowolnym punkcie elementu konstrukcyjnego (opis w tekście)

prężenia styczne τ_{zx} oraz τ_{zy} są równe zero. Natomiast naprężenie normalne σ_z wynosi:

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) . \quad (2.44)$$

Z powodu niewystępowania naprężeń stycznych na płaszczyźnie XY (rys. 2.10c), naprężenie σ_z jest jednym z naprężeń głównych – a oś $\{z\}$ jest kierunkiem głównym. Jednocześnie naprężenie to jest równe drugiemu niezmiennikowi stanu naprężenia – tj. naprężeniu hydrostatycznemu σ_m – co zapisujemy w następujący sposób [28, 71]:

$$\sigma_z \equiv \sigma_m \equiv \sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) . \quad (3.45)$$

Wartość pozostałych naprężeń głównych można wyznaczyć za pomocą poniższego wzoru [71]:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} , \quad (3.46)$$

gdzie oznaczenia są zgodne z rys. 2.10c.

3. STAN SPRĘŻYSTY

Do tej pory omawiano odrębnie stany naprężenia i odkształcenia, występujące w dowolnie wybranym punkcie ośrodka ciągłego. Jednakże w praktyce, analizie podaje się ogół związków, zachodzących pomiędzy naprężeniami i odkształceniami, w skali całego elementu konstrukcyjnego.

Pierwszym stanem w jakim znajduje się materiał, który poddany jest działaniu obciążeniom zewnętrznym – jest **stan sprężysty** [29]. Powstające w tym materiale naprężenia wywołują jedynie odkształcenia w zakresie sprężystym. W niniejszym rozdziale zostanie udzielona odpowiedź na pytanie: Jakie związki zachodzą pomiędzy odkształceniami a wywołującymi je naprężeniami, gdy ośrodek ciągły znajduje się w stanie sprężystym?

3.1. Związki między naprężeniem a odkształceniem

Zależności naprężenie-odkształcenie, dla materiałów rzeczywistych będących w stanie sprężystym, w ogólnym przypadku mają charakter nieliniowy. Pomimo tego, odkształcony ośrodek ciągły po zdjęciu obciążenia osiąga swój stan normalny (tj. postać jaką miał ten materiał przed jego obciążeniem). W teorii sprężystości i plastyczności przyjmuje się, że zależności o których jest mowa mają zawsze charakter liniowy, a odkształcenia sprężyste są stosunkowo małe w porównaniu z odkształceniami plastycznymi [5, 50, 55].

Zachodzące związki między naprężeniem a odkształceniem w zakresie sprężystym wyraża **prawo sprężystości**. Znanie jest ono również pod nazwą **prawa Hooke’a**³ lub rzadziej – jako **prawa Hooke’a-Mariotte’a** [42, 48]. Zapisuje się je w następującej postaci: *Odształcenie ośrodka ciągłego jest proporcjonalne względem obciążenia, które je spowodowało w stanie równowagi tego ciała*. Przy czym należy pamiętać, że te pryncypia nie odznaczają się taką ścisłością, jaką charakteryzuje się np. prawo ciążenia powszechnego Newton’a.

Rozpatrzmy teraz próbę jednoosiowego rozciągania pręta walcowego w zakresie odkształceń sprężystych. Powstały związek pomiędzy naprężeniami rozciągającymi ten pręt a jego odkształceniem (wydłużeniem) przedstawiono na

³ **Robert Hooke** (1635 – 1703) – angielski badacz, który w roku 1676 opublikował prawo liniowej sprężystości, wyrażając je słowami: „*ut tensio sic vis*”. Do tego wniosku doszedł On mierząc małe odkształcenia sprężyn, małe ugięcia belki drewnianej i małe wydłużenia rozciąganych drutów. Jednocześnie i niezależnie od R. Hooke’a, wykrył to prawo również **E. Mariotte** (1620 – 1684), który zastosował je do usunięcia błędu Galileusza w teorii zginania belek.

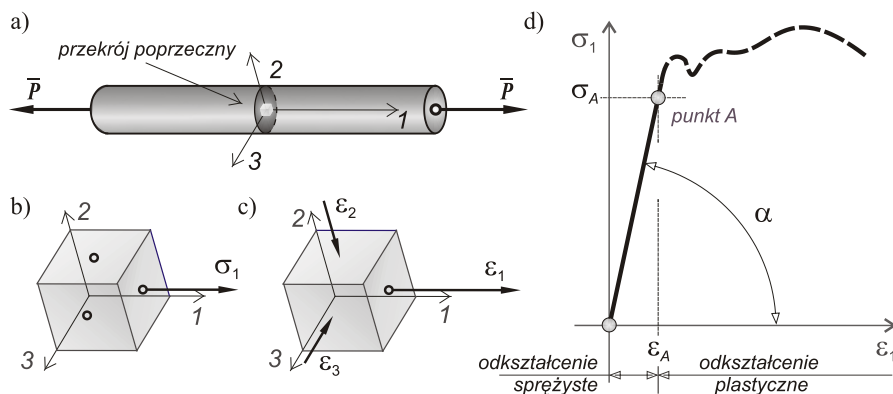
rys. 3.1d. Punkt na wykresie, który oznaczono literą A, nazywany jest **granica sprężystości** lub najczęściej **granica proporcjonalności**. Odcinek 0A tego wykresu ma przebieg liniowy i obrazuje omawiane prawo sprężystości. Na jego podstawie, można napisać następującą zależność:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot \sigma_1, \quad (3.1)$$

gdzie: ε_1 , σ_1 – odkształcenie i naprężenie główne, zgodnie z oznaczeniami na rys. 3.1; E – **moduł sprężystości wzdłużnej** (moduł Young’a⁴), który jest zdefiniowany jako tangens kąta α (rys. 3.1b), mianowicie:

$$E = \operatorname{tg} \alpha \quad [\text{Pa}]. \quad (3.2)$$

Natomiast odkształcenia w pozostałych dwóch kierunkach są równe (ze względu na osiową symetrię pręta):



Rys. 3.1. Jednoosiowe rozciąganie pręta walcowego w zakresie sprężystym (a) oraz zależność między naprężeniami σ_1 i odkształceniami ε_1 (d), gdzie: punkt A – granica proporcjonalności; σ_A , ε_A – naprężenie i odkształcenie odpowiadające granicy zakresu sprężystego; rysunek b) oraz c) – wizualizacja stanu naprężenia i odkształcenia występującego na wyszczególnionej płaszczyźnie rozciąganego pręta zgodnie z przyjętym układem odniesienia $\{1, 2, 3\}$

⁴ **Thomas Young** (1773 – 1829) – wszechstronnie wykształcony angielski badacz, matematyk i filozof, absolwent i pracownik Uniwersytetu w Cambridge. Swoje prace naukowe publikował w ówczesnym czasopiśmie pt. „École Polytechnique”, które było cenione w XIX-wiecznej Europie. Warto wspomnieć, że autorami artykułów dotyczących matematycznych podstaw teorii sprężystości, które publikowano w tym czasopiśmie byli również: **S.D. Poisson** (1781 – 1840) – francuski matematyk i fizyk, **A. Cauchy** (1789 – 1857) oraz **G. Lame** (1795 – 1870) [42].

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1 = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_1, \quad (3.3)$$

gdzie: ν – bezwymiarowa stała zwana **liczbą Poissona**, która przyjmuje wartość z zakresu prawostronnie domkniętego: $\nu \in (0; 0,5)$. Z powyższych związków (3.1) oraz (3.3) wynika, że kierunki główne stanu odkształcenia są zarazem kierunkami głównymi stanu naprężenia.

Przedstawmy teraz **uogólnione prawo Hooke’a**. W tym celu założmy, że rozpatrujemy dowolny stan odkształcenia i stan naprężenia w przyjętym kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x, y, z\}$. Prawo to można zapisać w następującej postaci [28, 50, 55]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] , \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] , \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] , \end{cases} \quad (3.4)$$

gdzie: E – moduł Young’a, ν – liczba Poissona. Natomiast związki pomiędzy odkształceniami postaciowymi γ a naprężeniami stycznymi τ można zapisać w następującej formie:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} , \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} , \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} , \end{cases} \quad (3.5)$$

gdzie: G – **moduł sprężystości poprzecznej** (moduł Kirchoffa), którego sens fizyczny jest analogiczny do modułu sprężystości liniowej – z tą różnicą, że odnosi się do odkształceń postaciowych i naprężeń stycznych. Wartość tej stałej można wyznaczyć z poniższej zależności:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad [\text{Pa}]. \quad (3.6)$$

Moduły sprężystości E oraz G traktowane są jako dwie niezależne stałe podstawowe. Natomiast liczba Poissona ν – jako trzecia stała zależna od tych dwóch, wyżej wspomnianych wielkości.

Wprowadźmy teraz pojęcie **modułu ściśliwości** K , który jest nazywany również modułem odkształcenia objętościowego. Jego wartość wynosi:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\nu)} \quad [\text{Pa}]. \quad (3.7)$$

Posłuży on do określenia związku zachodzącego pomiędzy pierwszymi niezmiennikami stanu naprężenia i stanu odkształcenia. Związek ten – wyrażony

zależnością (3.8) – nosi nazwę **prawa sprężystej zmiany objętości** ośrodka ciągłego izotropowego.

$$\sigma_m = 3 \cdot K \cdot \varepsilon_m, \quad (3.8)$$

gdzie: σ_m , ε_m – naprężenie i odkształcenie średnie; K – moduł ściśliwości.

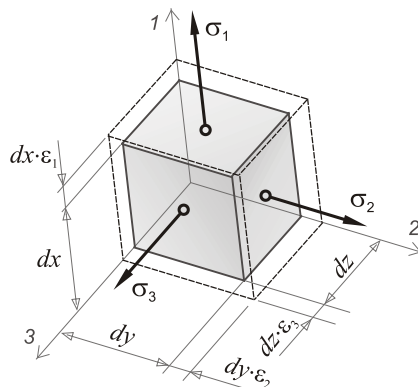
3.2. Energia odkształcenia sprężystego

Siły zewnętrzne, które powodują odkształcenia w zakresie sprężystym ośrodka ciągłego, wykonują określoną pracę W . Praca ta jest przekształcana w energię potencjalną, a następnie jest zużyta do odzyskania początkowej postaci tego ośrodka. Powrót ciała do początkowego stanu następuje w momencie, w którym wspomniane siły zewnętrzne przestają na nie oddziaływać. W związku z tym faktem, energia nagromadzona w elemencie konstrukcyjnym podczas jego odkształcenia w zakresie sprężystym jest nazywana **energią odkształcenia sprężystego** lub **potencjałem sprężystym** [28, 50, 55].

Rozpatrzmy teraz przypadek odkształcenia elementarnego prostopadłościanu, który został przedstawiony na rys. 3.2. Przy czym, siłą wewnętrzną F – działającą na ten prostopadłościan – będziemy nazywać iloczyn naprężenia głównego σ i pola powierzchni boku tego prostopadłościanu (na którym ta siła działa). Jest to zgodne z definicją (1.1).

Praca W_1 wykonana przez siłę wewnętrzną F_1 na drodze odkształcenia Δl_1 , wzdłuż kierunku głównego $\{1\}$ – wynosi:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \Delta l_1 \quad [J = N \cdot m]. \quad (3.9)$$



Rys. 3.2. Elementarny prostopadłościan, na który działają siły wewnętrzne powodujące odkształcenia sprężyste: dx , dy , dz – początkowe wymiary krawędzi; σ_1 , σ_2 , σ_3 – naprężenia główne, gdzie iloczyn odpowiedniego naprężenia i powierzchni boku prostopadłościanu wyraża siłę wewnętrzną; $dx \cdot \varepsilon_1$, $dy \cdot \varepsilon_2$, $dz \cdot \varepsilon_3$ – droga na jakiej działa odpowiednia siła wewnętrzna

Uwzględniając przyjęte związki na rys. 3.2, powyższy wzór (3.9) zostaje rozwinięty do następującej postaci:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 \cdot dy \cdot dz) \cdot (dx \cdot \varepsilon_1) , \quad (3.10)$$

gdzie: σ_1 – naprężenie główne; iloczyn $dy \cdot dz$ – pole powierzchni boku prostopadłościanu, który jest prostopadły do kierunku głównego $\{1\}$; iloczyn $dx \cdot \varepsilon_1 \equiv \Delta l_1$ – droga (odkształcenie bezwzględne) na jakiej działa siła wewnętrzna F_1 . W podobny sposób należy wyznaczyć pracę odkształcenia sprężystego w pozostałych kierunkach głównych.

Przytoczmy teraz **twierdzenie Clapeyron’a** [50], mówiące że: *energia wewnętrzna U ośrodka ciągłego doskonale sprężystego, który z nieobciążonego stanu ustalonego przeszedł pod wpływem obciążenia w stan odkształcony, pozostając jednocześnie w równowadze, jest równa pracy odkształcenia W* . Twierdzenie to wynika z ogólnej zasady zachowania energii. Bazując na nim można zapisać, że całkowita energia odkształcenia sprężystego wynosi:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 , \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = W_1 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot dx \cdot dy \cdot dz , \\ U_2 = W_2 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz , \\ U_3 = W_3 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3 \cdot dx \cdot dy \cdot dz . \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Jednocześnie wiedząc, że iloczyn $dx \cdot dy \cdot dz$ wyraża objętość dV elementarnego prostopadłościanu, zależność (3.11) można przekształcić do następującej postaci ostatecznej:

$$U = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) \cdot dV \quad [\text{J}]. \quad (3.13)$$

Wprowadźmy teraz pojęcie **energii właściwej**, która wyraża energię przypadającą na jednostkę objętości ośrodka ciągłego. Na podstawie wyrażenia (3.13) można zapisać, że energia właściwa ϕ odkształcenia sprężystego – która również jest nazywana jednostkowym potencjałem sprężystym – wynosi [50]:

$$\phi = \frac{U}{dV} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) \quad [\text{J/m}^3]. \quad (3.14)$$

Po uwzględnieniu wzorów (1.36) oraz (2.33), zależność (3.14) można przekształcić do postaci funkcji, w której zmiennymi są niezmienniki stanu naprężenia i stanu odkształcenia. W myśl tego spostrzeżenia, energia właściwa odkształcenia sprężystego jest równa:

$$\phi = \frac{3}{2} \cdot \sigma_m \cdot \varepsilon_m + \frac{1}{2} \cdot \sigma_H \cdot \varepsilon_H , \quad (3.15)$$

gdzie pierwszy człon powyższego wzoru, który wynosi:

$$\phi_V = \frac{3}{2} \cdot \sigma_m \cdot \varepsilon_m , \quad (3.16)$$

jest nazywany **energią właściwą** zmiany **objętości** ośrodka ciągłego, natomiast drugi człon, o postaci:

$$\phi_P = \frac{1}{2} \cdot \sigma_H \cdot \varepsilon_H , \quad (3.17)$$

wyraża **energię właściwą** zmiany **postaci** ośrodka ciągłego.

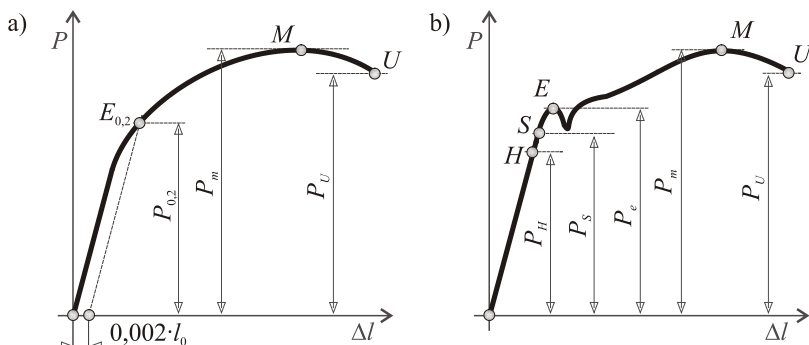
4. WYTĘŻENIE ODKSZTAŁCANEGO METALU

4.1. Definicja wyteżenia materiału

W poprzednim rozdziale wykazano, że obciążony ośrodek ciągły osiąga stan sprężysty, pozostając jednocześnie w równowadze wewnętrznej. Jeszcze raz przeanalizujemy zależności zachodzące pomiędzy obciążeniem a powstałym odkształceniem. Na rys. 4.1 umieszczono dwa wykresy przedstawiające przebieg siły rozciągającej w funkcji wydłużenia dla próby jednoosiowego rozciągania pręta walcowego (porównaj z rys. 3.1d). Gdy siła rozciągająca P przekroczy pewien poziom, nazywany granicą plastyczności (punkt E), materiał przechodzi w **stan plastyczny**. Należy jednocześnie podkreślić, że **plastyczność** jest **stanem** materiału i zależy tylko i wyłącznie od sposobu obciążenia ośrodka ciągłego oraz od właściwości tego materiału. Udowodnił to w roku 1911 Th. von Kármán⁵, odkształcając plastycznie próbki wykonane z marmuru w specjalnie skonstruowanym przyrządzie [42]. Doświadczenie to interpretuje się w ten sposób, że wywołanie określonego schematu naprężenia powoduje wprowadzenie materiału w stan plastyczny (lub jego podtrzymanie). W przeciwnym razie, materiał może utracić swoją spójność [28, 45].

Analizując wykresy na rys. 4.1 zauważamy, że zwiększanie wartości obciążenia P doprowadza do utraty stateczności materiału. Dalsze odkształcanie ośrodka ciągłego jest nazywane **niestatecznym** – na rys. 4.1 rozpoczyna się ono od punktu M. Punkt ten również nazywany jest **granicą wytrzymałości** materiału na rozciąganie. W przypadku rozciągania pręta, faza niestateczna charakteryzuje się pojawieniem miejscowego przewężenia materiału. Dalsze zwiększanie siły P doprowadza do sytuacji, w której próbka rozciągana ulega zniszczeniu – na rys. 4.1 moment ten reprezentuje punkt U. Stąd wynika, że tak samo jak plastyczność, również **kruchość** jest stanem materiału [28, 39, 45, 57].

⁵ **Theodor von Kármán** (1881– 1963) – węgierski wybitny naukowiec, obywatel Stanów Zjednoczonych Ameryki (od 1936 r.), który w znaczącym stopniu przyczynił się do rozwoju techniki, szczególnie w obszarze inżynierii lotniczej (aerodynamika) oraz mechaniki płynów i ciał stałych. W początkowych latach swojej kariery był uczniem i współpracownikiem L. Prandtl’a na Uniwersytecie w Göttingen. Z tego okresu pochodzi jego praca, poświęcona badaniu stanu naprężenia i odkształcenia w obciążonych słupach wykonanych z marmuru, której jednym z rezultatów było określenie wpływu ciśnienia hydrostatycznego na plastyczność materiału. W późniejszym okresie (1925 r.), Th. Von Kármán wyznaczył również rozkład nacisków w kotlinie walcowniczej [42].



Rys. 4.1. Wykres jednoosiowego rozciągania pręta walcowego, wykonanego z materiału nie mającego wyraźnej granicy plastyczności (a) oraz mającego fizyczną granicę plastyczności (b), gdzie: P – siła rozciągająca, Δl – wydłużenie pręta, l_0 – początkowa długość pręta; znaczenie punktów: H – granica stosowalności prawa Hooke’a, S – granica sprężystości, E – granica plastyczności, $E_{0,2}$ – umowna granica plastyczności, M – granica wytrzymałości na rozciąganie (nazywana również granicą równomiernego wydłużenia lub fazy statecznych odkształceń), U – granica zachowania spójności materiału

Reasumując, każdy z punktów pokazanych na rys. 4.1 reprezentuje pewne obciążenie graniczne P_{gr} , które wywołuje w odkształcanym materiale określone zmiany trwałe. Tymi zmianami mogą być np. odkształcenia plastyczne (punkt H) lub pojawienie się pęknięć (punkt U), co jest równoważne z utratą spójności materiału.

Wprowadźmy teraz pojęcie **wyężenia materiału**, które można zdefiniować następująco [45]:

$$w = \frac{P}{P_{gr}} \cdot 100\% , \quad (4.1)$$

gdzie: P – rzeczywiste obciążenie materiału mniejsze od wartości granicznej P_{gr} . Powyższa zależność (4.1) wyraża również stopień narażenia odkształcanego materiału na osiągnięcie niebezpiecznej granicy.

Wartość obciążenia granicznego – np. granicy wytrzymałości materiału na rozciąganie R_m czy granicy plastyczności σ_p – wyznacza się najczęściej w próbie jednoosiowego rozciągania pręta o przekroju walcowym. Oznacza to, że tak uzyskaną wartość obciążenia granicznego nie można w sposób bezpośredni porównywać z obciążeniem o dowolnym (najczęściej złożonym) schemacie.

Aby obliczone wyężenie materiału w miało sens, w liczniku zależności (4.1) należy zawsze wstawiać wartość **obciążenia zredukowanego** P_{red} . Jest ono

funkcją dowolnego schematu obciążenia, a jego wartość jest równoważna z obciążeniem prostym, jakie występuje w próbie jednoosiowego rozciągania pręta walcowego.

4.2. Wybrane hipotezy wyteżeniowe

Wspólną cechą wszystkich hipotez wyteżeniowych jest możliwość przewidywania zachowania się odkształcanego materiału przy złożonym stanie obciążenia na podstawie posiadanej wiedzy. Wiedza ta pochodzi z doświadczalnych badań, wykonanych w prostych i powtarzalnych warunkach – np. w takich, jakie zapewnia jednoosiowe rozciąganie próbek walcowych.

Większość hipotez, omówionych w dalszej części rozdziału, ma jedynie znaczenie historyczne i w praktyce się ich już nie stosuje. Generalnie, hipotezy wyteżeniowe można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej grupy zalicza się hipotezy dotyczące wyznaczania miary wyteżenia materiału w odniesieniu do momentu pęknięcia, natomiast druga grupa hipotez służy do określania stopnia wyteżenia ośrodka ciągłego w porównaniu do granicy plastyczności.

4.2.1. Hipotezy Lamé-Navier’a oraz Beltrami’ego

Zgodnie z hipotezą Lamé-Navier’a [28], aby przewidzieć zachowanie się materiału powinny być znane wartości jego wytrzymałości doraźnej na rozciąganie R_r oraz na ściskanie R_c . Przyjmuje się, że moment utraty spójności materiału osiągany jest wówczas, kiedy albo największe naprężenie główne σ_1 jest równe wytrzymałości R_r albo bezwzględna wartość najmniejszego naprężenia głównego σ_3 jest równa wytrzymałości R_c . Zatem, wyteżenie materiału wynosi:

$$w_{LN} = \frac{\sigma_1}{R_r} \cdot 100\% , \quad (4.2)$$

lub

$$w_{LN} = \frac{|\sigma_3|}{R_c} \cdot 100\% . \quad (4.3)$$

Wadą tej hipotezy jest nie uwzględnianie dwóch pozostałych z trzech naprężeń głównych. Ponadto, jest ona sprzeczna z większością wyników doświadczalnych [28, 42].

Kolejna historyczna hipoteza, nie mająca zastosowania w obecnym świecie techniki, to hipoteza Beltrami’ego [28]. Według tej hipotezy przyjmowano, że miarą wyteżenia materiału jest wartość całkowitej energii odkształcenia sprężystego U . Na podstawie zależności (3.13) i (3.15) stwierdzono, że utrata spójności materiału może nastąpić jedynie przy dostatecznie dużej wartości naprężenia hydrostatycznego σ_m , przy jednoczesnym spełnieniu warunku: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Jest to

jednak pozorny wniosek, ponieważ całkowicie mija się z wynikami badań doświadczalnymi – choćby z próbą przeprowadzoną przez Th. v. Karmana oraz późniejszymi badanymi dotyczącymi wpływu nacisku (naprężenia) na pękanie materiału, które wykonał P.W. Bridgman [42].

4.2.2. Hipoteza największego naprężenia normalnego

Jest to jedna z najstarszych hipotez, która została ogłoszona w roku 1638 przez G. Galileusza [28, 29, 45]. Przyjął on, że miarą wyężenia materiału jest największe naprężenie normalne. Odnosi się ono do wielkości granicznej, którą jest wytrzymałość rozdzielcza materiału R_0 określająca moment pękania.

W próbie jednoosiowego rozciągania pręta walcowego, największym naprężeniem normalnym jest naprężenie główne σ_1 , którego kierunek jest zgodny z kierunkiem siły rozciągającej. Zatem w tym przypadku wyężenie materiału wynosi:

$$w_G = \frac{\sigma_1}{R_0} \cdot 100\% . \quad (4.4)$$

Dla liniowego schematu naprężenia (rys. 1.16a), jaki panuje w odkształcanym materiale podczas jednoosiowego rozciągania, wartość naprężenia zredukowanego σ_{zred} jest praktycznie taka sama jak dla dowolnego stanu naprężenia. Zatem jego wartość wynosi:

$$\sigma_{zred} = \sigma_1 . \quad (4.5)$$

Oznacza to, że wyrażenie (4.4) jest słuszne również dla dowolnego schematu obciążenia. Natomiast **warunek pękania** rozdzielczego według Galileusza można zapisać za pomocą poniższego wzoru:

$$\sigma_1 = R_0 . \quad (4.6)$$

W wielu przypadkach, hipoteza Galileusza jest sprzeczna z doświadczeniem. Pomimo tego, jest ona często stosowana do określania momentu pękania rozdzielczego odkształcanego materiału. Jednakże tylko w przypadku, kiedy obciążenie tego materiału wywołuje w nim naprężenia o charakterze rozciągającym [45].

4.2.3. Hipoteza największego wydłużenia

Hipoteza ta została opracowana niezależnie w roku 1837 przez B. de Saint-Venanta oraz w roku 1839 przez G. V. Ponceleta [28, 29, 45]. Zakłada ona, że miarą wyężenia materiału jest wartość największego wydłużenia, jakiego doznaje materiał w momencie pękania.

Zatem, wyteżenie materiału wynosi:

$$w_V = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_r} \cdot 100\% , \quad (4.7)$$

gdzie: ε_r – wydłużenie graniczne, jakie zaobserwowano w chwili pęknięcia; ε_1 – największe wydłużenie, którego wartość (na podstawie uogólnionego prawa Hooke'a) wynosi:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] . \quad (4.8)$$

W praktyce nie wyznacza się wartości granicznego wydłużenia ε_r . Jednakże określa się granicę wytrzymałości na pęknięcie rozdzielczej R_0 . Należy zatem przekształcić wyrażenie (4.7) do postaci odnoszącej się do granicy wytrzymałości rozdzielczej R_0 .

Rozważmy próbę jednoosiowego rozciągania pręta walcowego. Jego wydłużenie według prawa Hooke'a wyniesie:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot \sigma_1 . \quad (4.9)$$

Wprowadźmy teraz naprężenie zredukowane σ_{zred} , zakładając jednocześnie, że jego wartość jest osiągana w chwili pojawienia się pęknięcia. Zatem, powyższą zależność (5.9) można zapisać jako:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{zred} , \quad (4.10)$$

gdzie ε_1 przyjmuje wartość (w momencie granicznym) równą ε_r , natomiast naprężenie σ_{zred} – wynosi R_0 . Porównując zależność (4.10) z ogólnym prawem Hooke'a (4.8), wnioskuje się, że naprężenie zredukowane wynosi:

$$\sigma_{zred} = \sigma_V = \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) , \quad (4.11)$$

gdzie oznaczenie σ_V związane jest nazwiskiem autora tej hipotezy. Z kolei, wyrażenie na wyteżenie materiału (4.7) przyjmuje ostateczną postać:

$$w_V = \frac{\sigma_V}{R_0} \cdot 100\% . \quad (4.12)$$

Wartość naprężenia de Saint-Venanta σ_V można również obliczyć na podstawie wzoru (4.13), który jest funkcją niezmienników stanu naprężenia [28].

$$\sigma_V = (1 - 2\nu) \cdot \sigma_m + \frac{2(1 + \nu)}{3} \cdot \sigma_H \cdot \cos \omega , \quad (4.13)$$

gdzie: ν – liczba Poissona; σ_m , σ_H , kąt ω – niezmiennik stanu naprężenia.

Hipotezę wyteżeniową de Saint-Venanta stosuje się przy obliczaniu wyteżenia materiału w stosunku do granicy wytrzymałości rozdzielczej materiału. Pozwala ona ustalić okoliczności w jakich jest możliwe powstanie pęknięcia roz-

dzielczego. Zatem warunek pęknięcia, o którym jest mowa, przyjmuje następującą postać:

$$\sigma_v = R_0 . \quad (4.14)$$

4.2.4. Hipoteza największego naprężenia stycznego

Koncepcja przyjęcia największego naprężenia stycznego za miarę wyężenia materiału wywodzi się od fizyka C. A. de Coulomba [28]. W późniejszym okresie, koncepcja ta została zaproponowana przez H. E. Trescę (w 1864 roku) oraz B. de Saint-Venanta jako warunek plastyczności [45].

W XIX wieku zaobserwowano na powierzchni odkształcanego materiału charakterystyczne linie, które wykazywały prawidłowy i regularny przebieg. Niezależni badacze tego zjawiska – Piobert (1842), Lüders (1860), Černov (1884), Hartmann (1896), Prandtl (1920) – wykazali, że są to linie poślizgów pojawiające się w momencie odkształceń trwałych i zawsze występujące w płaszczyznach (w pewnym przybliżeniu), w których naprężenia styczne osiągną największe wartości [28, 42, 45].

Na podstawie wyników tych obserwacji, O. Mohr w roku 1900 ogłosił hipotezę największego naprężenia stycznego. Zakłada ona, że miarą wyężenia materiału jest wartość największego naprężenia stycznego τ_{13} – wyrażonego wzorem (1.48) – jakie jest osiągane w momencie przejścia odkształcanego materiału w stan plastyczny, która jednocześnie jest równa promieniowi R_{13} dużego koła naprężeń Mohra (rys. 1.12).

Wyężenie materiału w myśl tej hipotezy wynosi:

$$w_M = \frac{\tau_{13}}{\sigma_p} \cdot 100\% , \quad (4.15)$$

gdzie: τ_{13} – największe naprężenie styczne, σ_p – granica plastyczności.

Dla prostego schematu naprężenia, jaki występuje przy jednoosiowym rozciąganiu, największe naprężenie styczne wynosi:

$$\tau_{13} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \quad (4.16)$$

i występuje w płaszczyźnie nachylonej pod kątem 45° do kierunku siły rozciągającej. Porównując zależność (4.16) ze wzorem (1.48) wynika, że naprężenie zredukowane ma następującą postać:

$$\sigma_{zred} = \sigma_1 - \sigma_3 , \quad (4.17)$$

gdzie σ_{zred} osiąga wartość naprężenia uplastyczniającego σ_p w chwili granicznego wyężenia materiału. Zatem, według tej hipotezy, wyężenie materiału wyznacza się z następującego wzoru:

$$w_M = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_p} \cdot 100\% . \quad (4.18)$$

Natomiast poniższa zależność:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_p , \quad (4.19)$$

wyraża **warunek plastyczności**, czyli moment pojawienia się w materiale odkształceń trwałych. Warunek ten również funkcjonuje pod nazwą: **warunku plastyczności Tresci** (lub rzadziej – warunku plastyczności Mohra) [28, 29, 45]. Temat dotyczący warunku plastyczności szerzej omówiony zostanie w kolejnym rozdziale.

4.2.5. Hipoteza energii właściwej odkształcenia postaciowego

Hipoteza wyteżeniowa O. Mohra już w momencie jej ogłoszenia budziła wiele wątpliwości. Jej założenia odnoszące się do tego, że kryteria wyteżeniowe i kryteria plastyczności można wyrazić za pomocą jednego prostego schematu teoretycznego są sprzeczne z wynikami badań doświadczalnych. Bowiem odkształcenia trwałe zmieniają z reguły własności mechaniczne metalu. Drugim błędem zasadniczym O. Mohra było przyjęcie, że wyteżenie materiału w dowolnym stanie naprężenia zależy tylko od naprężenia stycznego w jednym przekroju, będącym zarazem przekrojem niebezpiecznym [29].

Zagorzałym przeciwnikiem koncepcji wyteżeniowej Coulomba oraz Mohra był profesor M. T. Huber [30, 42]. W roku 1904 ogłosił we Lwowie hipotezę energetyczną mówiącą, że najdokładniejszą ogólną miarą wyteżenia materiału jest wartość właściwej energii sprężystej czystego odkształcenia postaciowego. Do takich samych wniosków (ale stosując inne podejście naukowe) doszedł w roku 1913 R. von Mises⁶, a następnie w roku 1925 – H. E. Hencky oraz w roku 1927 – A. L. Nádai [42].

Przekształćmy zależność (3.17), wyrażającą właściwą energię postaciowego odkształcenia sprężystego, do następującej postaci:

$$\phi_p = \frac{1 + \nu}{3E} \cdot \sigma_H^2 , \quad (4.20)$$

⁶ **Richard von Mises** (1883 – 1953), naukowiec o wykształceniu matematycznym (Uniwersytet Techniczny w Wiedniu). Tytuł profesora uzyskał w roku 1909 (w wieku zaledwie 26 lat) na ówczesnej niemieckiej uczelni w Strasburg'u. Uczestnik I Wojny Światowej jako pilot oblatywacz w Armii Austro-Węgierskiej. Po wojnie rozpoczął pracę jako dyrektor Instytutu Matematyki Stosowanej na Uniwersytecie w Berlinie, a następnie w 1933 roku (ze względów politycznych) rozpoczął pracę na Uniwersytecie w Istambule. Tuż przed wybuchem II Wojny Światowej wyjechał do Stanów Zjednoczonych Ameryki.

gdzie: E – moduł Younga, ν – współczynnik Poissona, σ_H – naprężenie huberowskie (drugi niezmiennik stanu naprężenia).

W wyrażeniu (4.20) tylko naprężenie σ_H jest składową zależną od sposobu obciążenia. Dlatego przyjmuje się, że ten niezmiennik stanu naprężenia jest jednocześnie naprężeniem zredukowanym σ_{zred} . Zatem, wyężenie materiału według hipotezy energetycznej (w odniesieniu do granicy plastyczności σ_p) wynosi:

$$w_H = \frac{\sigma_H}{\sigma_p} \cdot 100\% . \quad (4.21)$$

Natomiast poniższe równanie:

$$\sigma_H = \sigma_p , \quad (4.22)$$

wyraża **warunek plastyczności Hubera**. W literaturze światowej [26, 42] często spotyka się określenie równania (4.22) jako warunek plastyczności von Misesa lub warunek Hubera-Misesa-Henky’ego (w skrócie H-M-H).

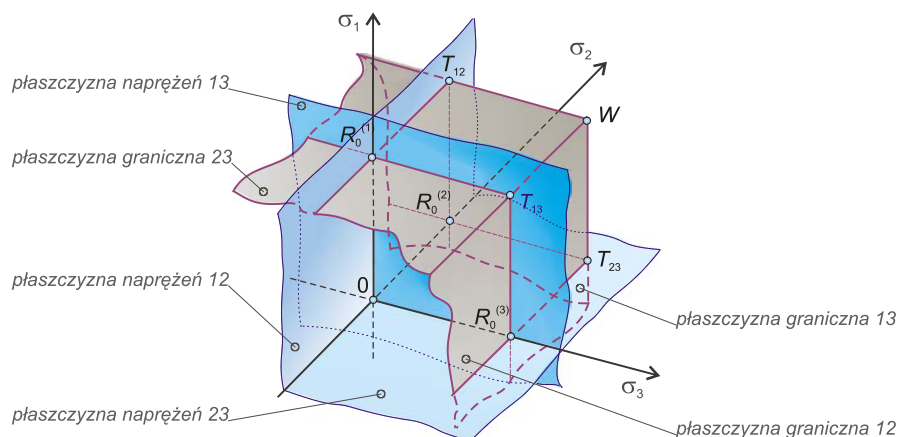
4.2.6. Graficzna interpretacja hipotez wyężeniowych

Hipotezy wyężeniowe można przedstawić w formie graficznej w przestrzeni naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Powstałe w ten sposób wykresy ułatwiają określenie warunków granicznych dla dowolnego schematu naprężenia. Sposób obciążenia przedstawia się za pomocą odcinka, którego początek znajduje się punkcie 0 (środek układu odniesienia). Natomiast współrzędne drugiego końca tego odcinka określają składowe stanu naprężenia. Uważa się, że warunek graniczny (np. pęknięcie rozdzielcze) jest spełniony, jeśli koniec wspomnianego odcinka znajduje się na zewnątrz figury geometrycznej określającej ten warunek [45].

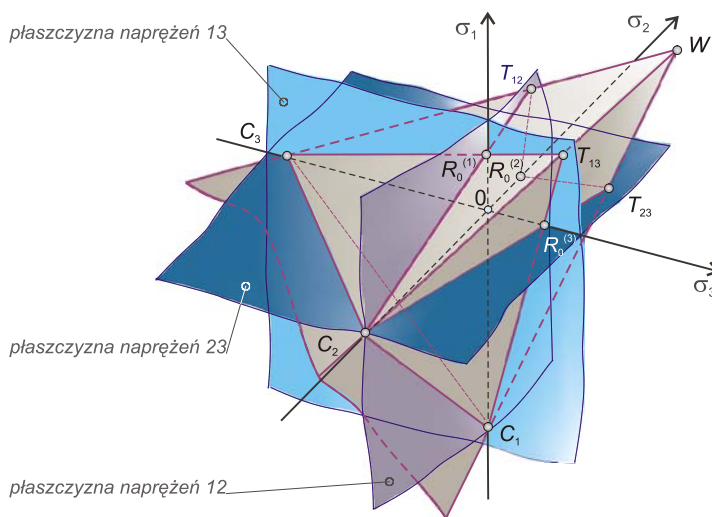
Na rys. 4.2 umieszczono geometryczną interpretację hipotezy G. Galileusza. Na podstawie warunku pęknięcia (4.6) można zapisać układ trzech równań:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_1 = R_0 , & \text{gdy } \sigma_1 > \sigma_2 \text{ oraz } \sigma_1 > \sigma_3 , \\ \sigma_2 = R_0 , & \text{gdy } \sigma_2 > \sigma_1 \text{ oraz } \sigma_2 > \sigma_3 , \\ \sigma_3 = R_0 , & \text{gdy } \sigma_3 > \sigma_1 \text{ oraz } \sigma_3 > \sigma_2 . \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Związki te określają równania płaszczyzn granicznych, które są równoległe do odpowiednich powierzchni naprężeń 23, 13 oraz 12 (zgodnie z oznaczeniami na rys 4.2). Wierzchołek W , powstały w wyniku przecięcia się powierzchni granicznych, reprezentuje stan krytyczny dla trójosiowego równomiernego rozciągania. Natomiast punkty oznaczone przez literę T dotyczą charakterystycznych schematów obciążenia odpowiadających przyjęciu płaskiego stanu naprężenia.



Rys. 4.2. Warunek pękania rozdzielczego wynikający z hipotezy największego naprężenia normalnego: R_0 – wytrzymałość rozdzielcza przy jednoosiowym rozciąganiu; W – wytrzymałość rozdzielcza przy trójosiowym równomiernym rozciąganiu; T_{12}, T_{13}, T_{23} – wytrzymałość rozdzielcza przy dwuosiowym równomiernym rozciąganiu; płaszczyzny naprężeń reprezentują płaski stan naprężenia



Rys. 4.3. Warunek pękania rozdzielczego wynikający z hipotezy największego wydłużenia: R_0 – wytrzymałość rozdzielcza przy jednoosiowym rozciąganiu; W – wytrzymałość rozdzielcza przy trójosiowym równomiernym rozciąganiu (wierzchołek ostrosłupa utworzonego z płaszczyzn granicznych; T_{12}, T_{13}, T_{23} – wytrzymałość rozdzielcza przy dwuosiowym równomiernym rozciąganiu; C_1, C_2, C_3 – wytrzymałość rozdzielcza przy jednoosiowym ściskaniu; płaszczyzny naprężeń reprezentują płaski stan naprężenia

Podobny układ trzech równań płaszczyzn granicznych można zapisać dla hipotezy de Saint-Venanta. Mianowicie, bazując na warunku (4.14):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = R_0, \quad \text{gdy } \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, \\ \sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) = R_0, \quad \text{gdy } \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3, \\ \sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = R_0, \quad \text{gdy } \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Równania te tworzą ostrosłup w przestrzeni naprężeń głównych – rys. 4.3. Wierzchołek *W* ostrosłupa reprezentuje stan graniczny dla trójosiowego równomiernego rozciągania – tak samo jak na rys. 4.2. Przedstawione interpretacje geometryczne tych dwóch hipotez wyężeniowych nazywane są również **powierzchniami pękania rozdzielczego** [45].

Kolejne dwie hipotezy wyężeniowe – tj. hipoteza Mohra i hipoteza Hubera – są ważne z punktu widzenia teorii plastyczności. Na ich podstawie można sformułować warunek plastyczności, wyrażony analitycznie w następującej postaci ogólnej:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_p) = 0. \quad (4.25)$$

Równanie te przedstawia **powierzchnię plastyczności** w przestrzeni naprężeń głównych [5, 26, 45].

Powierzchnie takie można zbudować na podstawie dwóch warunków plastyczności – Tresci (4.19) oraz Hubera (4.22). Ponieważ oba te warunki są niezależne od naprężenia hydrostatycznego σ_m , zatem powstające powierzchnie są zbiorem prostych równoległych do tzw. osi aksjatorów. Z kolei oś ta pokrywa się z normalną do płaszczyzny oktaedrycznej.

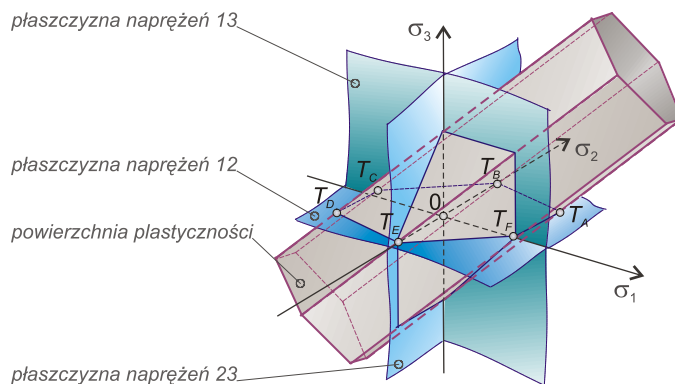
Dokonajmy teraz geometrycznej interpretacji hipotezy największego naprężenia stycznego. Warunek plastyczności (4.19) można przedstawić w sześciu możliwych jego postaciach, mianowicie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_p, \quad \text{gdy } \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, \\ \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_p, \quad \text{gdy } \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3, \\ \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_p, \quad \text{gdy } \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

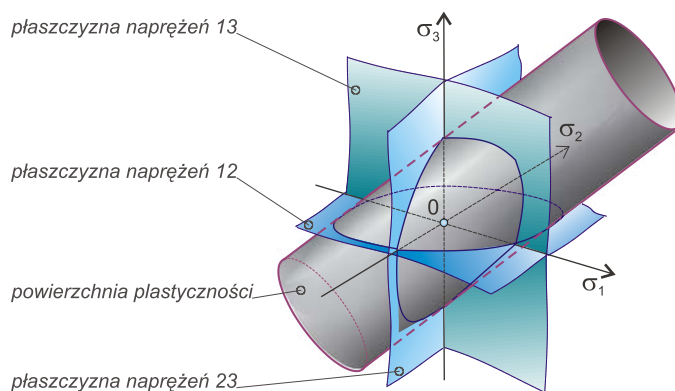
Powyższy układ równań (4.26) przedstawia powierzchnię graniastosłupa (rys. 4.4) o podstawie sześciokąta foremego o boku równym $\sqrt{2/3}\sigma_p$.

Natomiast geometryczną interpretacją warunku plastyczności Hubera (4.22), wynikającego z hipotezy energii właściwej odkształcenia postaciowego, jest poniższe równanie:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \cdot \sigma_p^2. \quad (4.27)$$



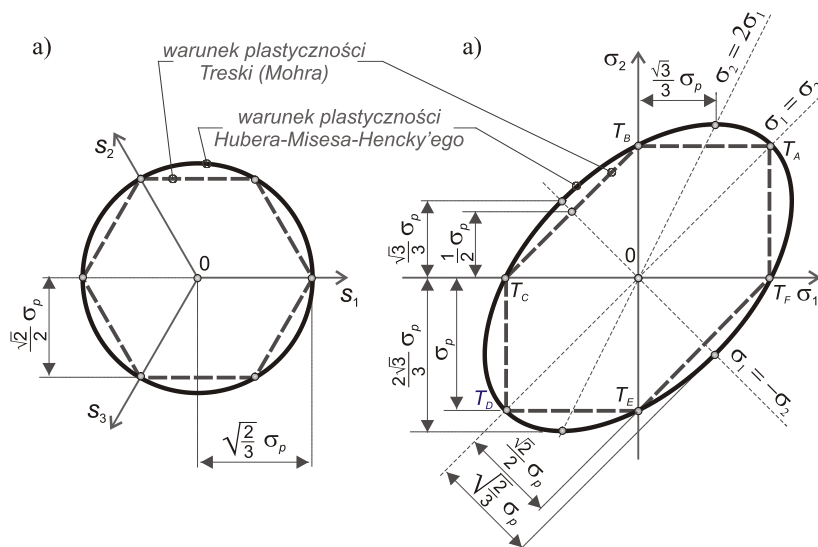
Rys. 4.4. Warunek plastyczności wynikający z hipotezy największego naprężenia stycznego; płaszczyzny naprężeń reprezentują płaski stan naprężenia



Rys. 4.5. Warunek plastyczności wynikający z hipotezy energii właściwej odkształcenia postaciowego; płaszczyzny naprężeń reprezentują płaski stan naprężenia

Przedstawia ono powierzchnię walca (rys. 4.5), o średnicy podstawy równej $\sqrt{2}/2\sigma_p$. Oś tego walca tworzy równe kąty z kierunkami naprężeń głównych. Ponadto, porównując ze sobą dwie powierzchnie plastyczności (4.26) oraz (4.27) stwierdza się, że „graniastosłup Tresci” jest wpisany w „walec Hubera”. Porównanie to bardzo dobrze odzwierciedla rys. 4.6.

Pierwszy wykres (rys. 4.6a) przedstawia warunki plastyczności na płaszczyźnie dewiatorów. Natomiast drugi wykres (rys. 4.6b) – warunek plastyczno-



Rys. 4.6. Porównanie dwóch warunków plastyczności: a) ukośnokątny układ współrzędnych (płaszczyzna oktaedryczna), gdzie: s_1, s_2, s_3 – składowe główne dewiatora naprężeń, σ_p – granica plastyczności dla jednoosiowego rozciągania; b) płaski stan naprężenia ($\sigma_3 = 0$), gdzie: $T_A \div T_F$ – punkty charakterystyczne zgodne z rys. 4.4

ści dla płaskiego stanu naprężenia, w którym naprężenie główne σ_3 jest równe zero. Ten stan naprężenia reprezentuje również płaszczyzna naprężeń 12 na rys. 4.4 i rys. 4.5. Należy wspomnieć, iż na podstawie licznych badań uważa się, że energetyczny warunek plastyczności (4.27) wykazuje większą zgodność z wynikami doświadczalnymi niż warunek Tresci. Jednakże, w praktyce stosowane są obydwie przytoczone warunki plastyczności. O ich zastosowaniu decydują niekiedy trudności matematyczne przy rozwiązywaniu zadań teorii plastyczności [24, 45, 58, 59].

4.3. Wykresy stanów mechanicznych

Omówione w poprzedniej części rozdziału wykresy, przedstawiające powierzchnie graniczne, mogą służyć do zobrazowania zachowania się materiału pod wpływem działającego obciążenia. Można je również łączyć w jeden wykres, tak aby zawierały graficzną interpretację warunku plastyczności oraz warunku pęknięcia. O ile w przypadku płaskiego stanu naprężenia powstałe w ten sposób wykresy są wystarczająco czytelne, o tyle dla dowolnego przestrzennego schematu naprężenia stają się one mało przejrzyste i niepraktyczne.

Ze względu na wskazane niedogodności, w praktyce znalazły zastosowanie **wykresy stanów mechanicznych**. Są one sporządzane na płaszczyźnie, gdzie na osiach są odkładane wartości wyznaczone na podstawie charakterystycznych funkcji stanu napężenia. Z kolei warunki osiągania naprężeń granicznych są przedstawiane w formie prostych funkcji liniowych [45, 59].

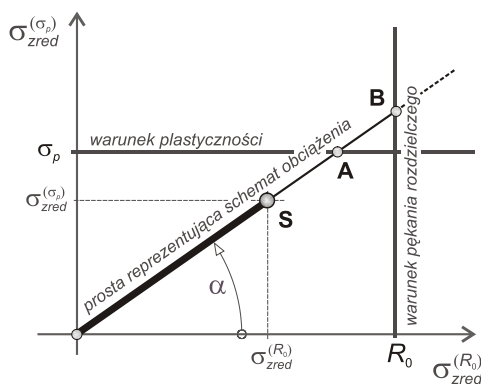
4.3.1. Wykresy wyężeniowe

Wykres wyężeniowy jest wykonywany we współrzędnych naprężeń zastępczych (rys. 4.7). Na osi rzędnych odkłada się miarę wyężenia materiału w odniesieniu do granicy plastyczności σ_p – napężenie zredukowane $\sigma_{zred}^{(\sigma_p)}$. Natomiast na osi odciętych umieszcza się miarę wyężenia materiału (w odniesieniu do wytrzymałości rozdzielczej R_0), którą wyraża się przy pomocy naprężenia $\sigma_{zred}^{(R_0)}$. Na wykresie warunki graniczne są reprezentowane przez dwie proste równoległe do odpowiedniej osi układu współrzędnych. Są one oddalone od początku układu odniesienia o wartość równą granicy plastyczności σ_p oraz granicy wytrzymałości rozdzielczej R_0 – tak jak to pokazano na rys. 4.7.

Schemat obciążenia jest przedstawiany na wykresie wyężeniowym za pomocą prostej, wychodzącej z początku układu współrzędnych, która jest nachylona do osi odciętych pod kątem α spełniającym następujący warunek:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{zred}^{(\sigma_p)}}{\sigma_{zred}^{(R_0)}}, \quad (4.28)$$

gdzie: naprężenia zredukowane σ_{zred} są obliczane według odpowiednich funkcji stanu napężenia. Przykładowo na rys. 4.7 stan napężenia, aktualnie występujący w odkształcanym materiale, jest reprezentowany przez punkt S. Należy również podkreślić, że przedstawiany schemat obciążenia za pomocą linii prostej jest **obciążeniem prostym**. Oznacza to, że wartości składowych stanu napężenia i odkształcenia wzrastają proporcjonalnie do tego samego poziomu (np. oznaczonego na rysunku przez punkt S).



Rys. 4.7. Wykres wyężeniowy – postać ogólna (opis w teście)

Wykres wyężeniowy Fridmana

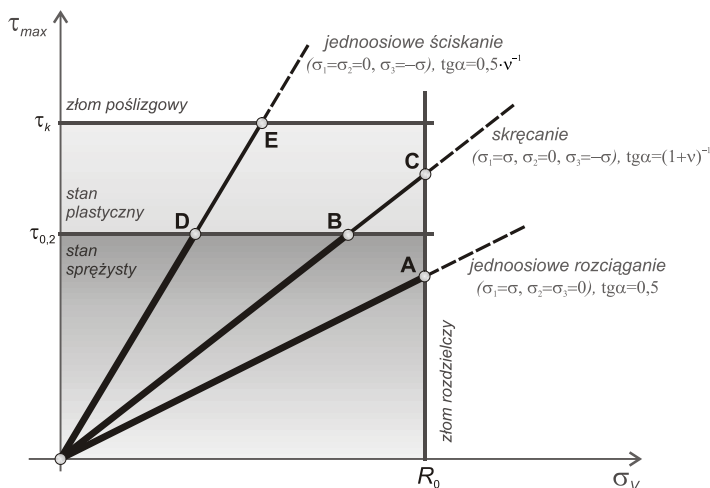
Omówmy teraz wykres wyężeniowy opracowany przez J. B. Fridmana w roku 1942. Zbudowany jest on w oparciu o następujące założenia [59]:

- warunek plastyczności określa hipoteza maksymalnego napężenia stycznego,
- pojawienie się pęknięć rozdzielczych wyznacza hipoteza maksymalnego wydłużenia,
- powstanie złomu poślizgowego zależy tylko i wyłącznie od wartości największego napężenia stycznego τ_{max} .

Wykres wyężeniowy Fridmana przedstawiono na rys. 4.8. Na osi rzędnych odkłada się wartości największego napężenia stycznego τ_{max} , natomiast na osi odciętych – wartości napężenia de Saint-Venanta σ_V , wyznaczane z zależności (4.11). Stan napężenia panujący w materiale oraz rodzaj powstałego złomu charakteryzuje prosta, która wychodzi z początku układu współrzędnych. Prosta ta jest nachylona do osi odciętych pod kątem α , którego wartość wynosi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{max}}{\sigma_V} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cdot [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]}, \quad (4.29)$$

gdzie: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – napężenia główne, ν – współczynnik Poissona.



Rys. 4.8. Wykres wyężeniowy Fridmana: σ_V – napężenie zredukowane de Saint-Venanta, τ_{max} – największe napężenie styczne, τ_k – napężenie styczne wywołujące ścinanie, $\tau_{0,2}$ – napężenie styczne wywołujące uplastycznienie materiału, R_0 – granica wytrzymałości rozdzielczej, ν – liczba Poissona; punkty B, D – warunek przejścia materiału w stan plastyczny; punkty A, C, E – utrata spójności materiału

Na podstawie tego wykresu można określić dwa stany materiału – tj. stan sprężysty oraz stan plastyczny. Odcinek równoległy do osi rzędnych (reprezentujący granicę wytrzymałości R_0) określa moment powstania złomu rozdzielczego (np. punkty A oraz C na rys. 4.8). Natomiast prosta przedstawiająca wartość naprężenia stycznego τ_k wyznacza chwilę pojawienia się pęknięć w wyniku poślizgu – tzw. **ścięcie materiału** (np. punkt E). Zagadnienia dotyczące złomu poślizgowego oraz rozdzielczego zostaną wyjaśnione w rozdziale 7.

Omówiony wykres należy traktować jedynie jako schemat, ponieważ wyniki eksperymentalne nie potwierdzają w pełni założeń przyjętych w trakcie jego budowy. Przede wszystkim przyjęcie stałej wartości $\tau_{0,2}$ zgodnie z hipotezą maksymalnego naprężenia stycznego jest nieściśle. Również wartości naprężenia τ_k nie powinno się traktować jako stałej niezależnej od pozostałych składowych stanu naprężenia [59].

Wykres wytyężeniowy typu σ_H - σ_V

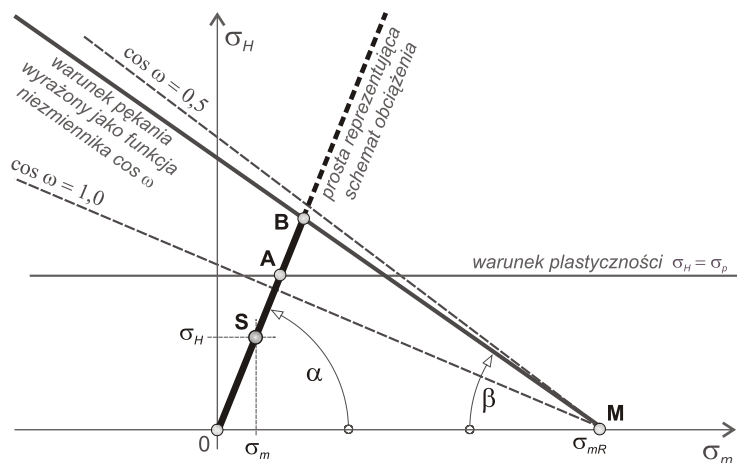
Większą zgodność z badaniami doświadczalnymi wykazuje wykres wytyężeniowy Hubera – de Saint-Venanta, zwany również jako wykres typu σ_H - σ_V . W odróżnieniu od wykresu Fridmana, miara wytyężenia materiału w odniesieniu do granicy plastyczności jest wyrażana w oparciu o hipotezę energetyczną Hubera. Ogólną postać wykresu wytyężeniowego Hubera – de Saint-Venanta przedstawiono na rys. 4.9. Proste określające schemat obciążenia są nachylone do osi odciętych pod kątem α , którego wartość wyznacza się z następującej zależności:

$$\tg \alpha = \frac{\sigma_H}{\sigma_V} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{2 \cdot [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]}, \quad (4.30)$$

gdzie: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – naprężenia główne, ν – współczynnik Poissona. Ponadto, linia graniczna przechodząca przez początek układu odniesienia i punkt A określa obszar (rys. 4.9), w którym można stosować hipotezę wytyężeniową de Saint-Venanta. Jeśli wartość naprężenia zredukowanego σ_V jest większa od wytrzymałości R_0 , a punkt określający stan naprężenia znajduje się powyżej wspomnianej linii, to może powstać jedynie złom o charakterze poślizgowym.

Z kolei, granicę plastyczności materiału określa prosta o równaniu $\sigma_H = \sigma_p$, gdzie σ_p jest naprężeniem uplastyczniającym przy jednoosiowym rozciąganiu. Punkty znajdujące się poniżej tej prostej (spełniając jednocześnie warunek: $\sigma_V < R_0$) reprezentują stan sprężysty materiału.

Pomimo wielu zastrzeżeń, znaczenie wykresu wytyężeniowego jest bardzo duże. Pozwala on dokonać podziału materiałów na kruche oraz sprężysto-plastyczne. Ponadto, z wykresu wytyężeniowego wynika, że stan materiału (kruchy lub plastyczny) jest funkcją stanu naprężenia. A to oznacza, że za pomocą



Rys. 4.10. Postać ogólna wykresu naprężeń granicznych we współrzędnych σ_m - σ_H ; punkt S – aktualny stan naprężenia w badanym punkcie odkształcanego materiału, punkt A – przejście materiału w stan plastyczny, punkt B – powstanie złomu rozdzielczego (opis w tekście)

gdzie: σ_m , σ_H – niezmienniki stanu naprężenia występującego w badanym punkcie ośrodka ciągłego; m – parametr charakteryzujący stan naprężenia, nazywany **intensywnością zgniotu**;

- warunek plastyczności (wg hipotezy energii odkształcenia postaciowego) reprezentuje prosta równoległa do osi odciętych, oddalona od niej o wartość równą granicy plastyczności σ_p ;
- warunek pękania opisuje prosta, przechodząca zawsze przez punkt M, którego równanie ma następującą postać:

$$(1 - 2\nu) \cdot \sigma_m + \frac{2}{3}(1 + \nu) \cdot \sigma_H \cdot \cos \omega = R_0, \quad (4.32)$$

gdzie: σ_m , σ_H – współrzędne linii w przestrzeni wykresu naprężeń granicznych, kąt ω – niezmiennik charakteryzujący sposób przyłożenia obciążenia, R_0 – wytrzymałość rozdzielcza (jest stałą materiałową), ν - współczynnik Poissona (który również jest stałą materiałową).

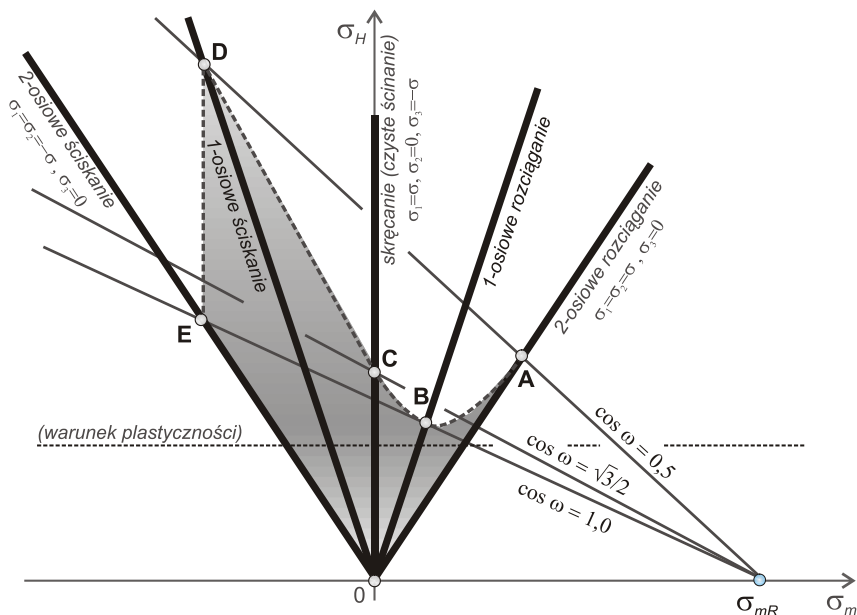
Wyznamy teraz położenie punktu M (rys. 4.10). W tym celu przyjmijmy w równaniu (4.32), że naprężenie σ_H jest równe zero. Uzyskamy zależność (4.33), która określa odległość omawianego punktu od początku układu odniesienia.

$$\sigma_{mR} = \frac{R_0}{(1-2\nu)} \cdot \quad (4.33)$$

Z powyższego wzoru wynika, że lokalizacja punktu M jest niezależna od sposobu obciążenia. Natomiast nachylenie prostej (wychodzącej z tego punktu) do osi odciętych jest już zależne do stanu naprężenia. Wartość kąta β (rys. 4.10) wyznaczyć można z poniższego wzoru:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \cdot \cos \omega \cdot \quad (4.34)$$

Zatem równanie (4.32) przedstawia rodzinę prostych wychodzących z punktu M. Ich nachylenie zależy tylko i wyłącznie od sposobu obciążenia, czyli od wartości kąta ω . Dla przypomnienia – na podstawie gwiazdy Pełczyńskiego – wartość tego niezmiennika zawarta jest w przedziale od -60° do $+60^\circ$. Na rys. 4.10 linią przerywaną zaznaczono dwa skrajne położenia prostej określającej warunek pęknięcia (wychodzącej z punktu M i oznaczonej przez wyrażenia



Rys. 4.11. Wykres naprężeń granicznych wg Pełczyńskiego: przedstawienie bezpiecznych płaskich stanów naprężenia (obszar zacieniowany 0ABCDE); opis w tekście

$\cos\omega = 1$ oraz $\cos\omega = 0,5$). W rzeczywistości, dla każdego przypadku procesu odkształcania sporządza się oddzielny wykres stanów mechanicznych, a warunek pękania określa tylko położenie punktu B (rys. 4.10).

W roku 1951 został opracowany przez T. Pełczyńskiego wykres naprężeń granicznych [24, 45], który w porównaniu z rys. 4.10 może być stosowany dla różnych schematów obciążenia (procesów plastycznego kształtowania metali). Wykres taki umieszczono na rys. 4. 11. Dodatkowym elementem na tym wykresie jest obszar naprężeń bezpiecznych ograniczony krzywą ABCDE, która jest śladem różnych położen punktu B z wykresu na rys. 4.10. Obszar ten dotyczy tylko dwuosiowych stanów naprężenia. Odcinek DE jest równoległy do osi rzędnych, natomiast pozostały fragment krzywej ABCD jest hiperbolą o następującym równaniu [45]:

$$\sigma_H^2 = \frac{9(1-\nu-\nu^2)}{(1-\nu)^2} \cdot \sigma_m^2 - \frac{9(1-\nu)R_0}{(1+\nu)^2} \cdot \sigma_m + \frac{3R_0^2}{(1+\nu)^2} . \quad (4.35)$$

Podobne wykresy można budować dla wybranych procesów obróbki plastycznej metali. Pozwala to na wyznaczenie bezpiecznych stanów naprężenia i jednocześnie zapobieganie utraty spójności materiału. Zatem, na podstawie wykresu stanów mechanicznych wg Pełczyńskiego można sterować procesami obróbki plastycznej [24, 45].

5. STAN PLASTYCZNY

Dotychczas poruszane tematy, dotyczące stanu plastyczności, stanowiły jedynie wprowadzenie do obszernej dziedziny wiedzy, która jest fundamentem technologii obróbki plastycznej metali. Obszar tej wiedzy obejmuje znaczną grupę praw, hipotez i postulatów – która tworzy **teorię plastyczności**. W niniejszym rozdziale zostaną omówione elementarne zagadnienia, które są częścią wspomnianej teorii.

5.1. Krzywa płynięcia materiału

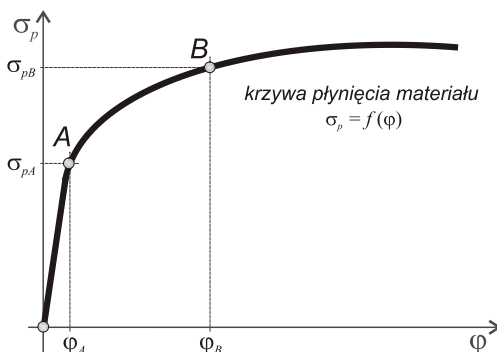
Ważną wielkością fizyczną, funkcjonującą w teorii plastyczności, jest naprężenie uplastyczniające σ_p . Definiuje się je jako naprężenie wymagane do zainicjowania i kontynuowania plastycznego odkształcania (płynięcia) materiału w warunkach jednoosiowego stanu naprężenia. Ponieważ osiągnięta wartość odkształceń trwałych jest znacznie większa od odkształceń sprężystych, dlatego w teorii plastyczności istotny jest również sposób zmian wartości σ_p pod wpływem postępujących odkształceń plastycznych. Do matematycznego opisu omawianych zmian służy krzywa umocnienia materiału, przy czym początkowa wartość σ_p (inicjującą rozpoczęcie odkształceń plastycznych) określana jest na podstawie warunku plastyczności – o którym była mowa w rozdziałach 4.2 oraz 4.3.

W większości przypadków postać wykresu (przebieg siły rozciągającej w zależności od przemieszczeń), który przedstawiono na rys. 4.1, jest bardzo złożona. Cecha ta sprawia, że taki wykres nie może być bezpośrednio wykorzystywany w rozważaniach teoretycznych, bowiem obliczenia stają się zbyt skomplikowane. Jednakże, jeśli wykres ten przekształcimy do postaci określonej funkcji naprężenia uplastyczniającego σ_p , analizę teoretyczną będzie można już wykonać stosując standardowe operacje matematyczne. Funkcję, o której jest mowa, nazywamy **krzywą płynięcia materiału** [20, 21, 25, 45, 71]. Jej postać ogólną pokazano na rys. 5.1. Najczęściej jest ona sporządzana na płaszczyźnie, gdzie na osi odciętych odkłada się wartości odkształcenia rzeczywistego φ , a na osi rzędnych – wartości naprężenia σ_p . Istnieją również przypadki, że wartość σ_p uzależnia się nie tylko od odkształcenia, ale również od innych parametrów – np. od prędkości odkształceń, czy nawet temperatury procesu kształtowania.

Nieodzownym zjawiskiem, związanym z krzywą płynięcia, jest **umocnienie** (wzmocnienie) **materiału** [5, 20, 45, 71]. Zjawisko to objawia się przyrostem

oporu odkształcania plastycznego wywołanym zwiększaniem odkształceń trwałych. Posiłkując się wykresem z rys. 5.1, zauważymy, iż zwiększenie odkształcenia trwałego do wartości φ_B spowoduje wzrost granicy plastyczności do poziomu σ_{pB} .

Oczywiście, funkcja naprężenia uplastyczniającego we współrzędnych σ_p - φ , (rys. 5.1) dotyczy próby jednoosiowego rozciągania. Jednak, w większości przypadków schemat obciążenia w materiale ma charakter złożony. Zatem, krzywą płynięcia przedstawia się jako wykres we współrzędnych σ_H - φ_H – czyli drugich niezmienników stanu naprężenia i odkształcenia. Natomiast warunek plastyczności określa się na podstawie hipotezy Hubera. Taka funkcja naprężenia uplastyczniającego nazywana jest **uogólnioną krzywą płynięcia** [5, 20, 24, 25, 59].



Rys. 5.1. Krzywa płynięcia materiału; postać ogólna funkcji naprężenia uplastyczniającego σ_p , gdzie parametrem jest odkształcenie rzeczywiste φ (opis w tekście)

5.1.1. Idealizacja krzywej płynięcia

Charakter przebiegu krzywej umocnienia jest zależny od kilku czynników. Najważniejszymi z nich są gatunek materiału oraz warunki realizacji procesu obróbki plastycznej. Przeważnie metale poddane przeróbce plastycznej na zimno umacniają się. Ponadto, odkształcenia sprężyste wpływają na kształt końcowy wyrobu. Taka sytuacja jest obserwowana np. podczas procesu tłoczenia lub przeciągania [37].

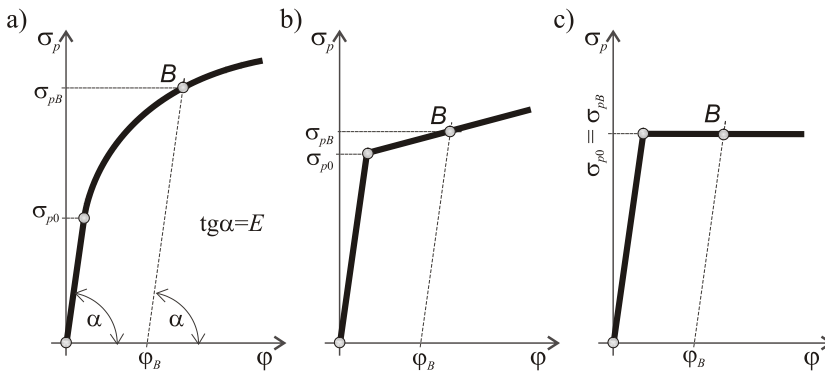
Całkiem odmienny charakter mają krzywe płynięcia większości metali poddanych obróbce plastycznej na gorąco. Odkształcenia sprężyste są tak małe w porównaniu z odkształceniami trwałymi, że można ich w ogóle nie uwzględniać w trakcie projektowania procesu technologicznego. Ponadto, podwyższona temperatura sprawia, że zjawisko umocnienia materiału praktycznie nie zachodzi. Dotyczy to przede wszystkim procesów kształtowania brył, takich jak kucie czy wyciskanie.

Analizując charakter wszystkich możliwych przebiegów krzywych płynięcia można dopatrzyć się pewnej systematyki, która pozwala na dokonanie odpo-

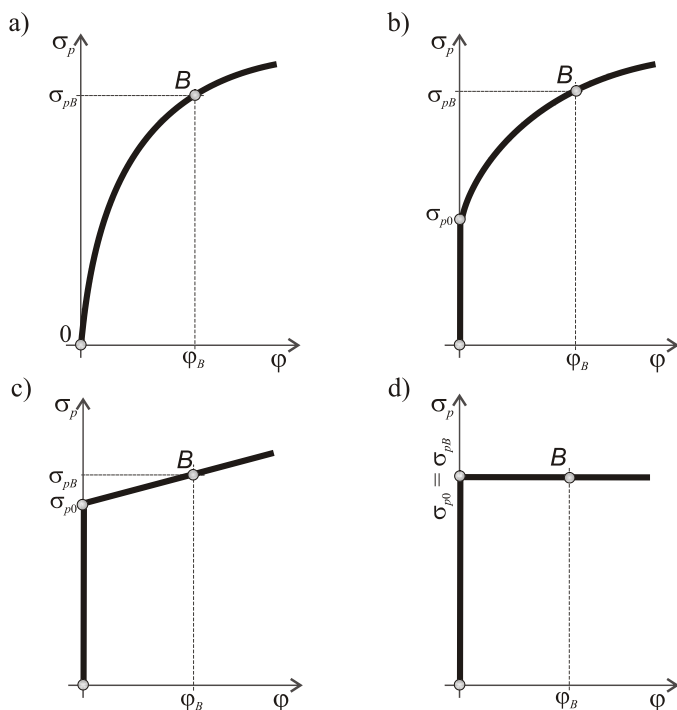
wiedniej klasyfikacji (idealizacji) funkcji naprężenia uplastyczniającego σ_p . W tym celu wprowadźmy pojęcie **modelu materiału plastycznego** [5, 25, 71]. Termin ten określa funkcję naprężenia uplastyczniającego σ_p , spełniającą określone charakterystyczne cechy, która opisuje zachowanie się konkretnego metalu podczas jego kształtowania.

Generalnie, można wyróżnić dwie grupy modeli materiałowych [5]. Pierwszą z nich tworzą **materiały sprężysto-plastyczne** (rys. 5.2). Natomiast do drugiej grupy zalicza się **materiały sztywno-plastyczne** (rys. 5.3). Jednocześnie w obrębie tych dwóch grup można wyróżnić kolejne rodzaje wyidealizowanych krzywych płynięcia. Mianowicie materiały, które w trakcie kształtowania umacniają się, można opisać za pomocą krzywych płynięcia z umocnieniem liniowym (rys. 5.2b i rys. 5.3c) bądź nieliniowym (rys. 5.2a i rys. 5.3a, b). Z kolei metale poddane obróbce plastycznej, w której umocnienie materiału jest niewielkie, można opisać za pomocą jednej z funkcji naprężenia uplastyczniającego przedstawionej na rys. 5.2b,c lub rys. 5.3c,d. Jeżeli charakter krzywej umocnienia sprowadza się do prostej równoległej do osi odciętych, to mówimy, że materiał jest sprężysto- lub sztywno-**idealnie plastyczny** (tj. nie wykazuje umocnienia).

Materiały poddane obróbce plastycznej na gorąco przeważnie są opisywane za pomocą modeli sztywno-plastycznych [5]. Przy czym, początkowa wartość granicy plastyczności σ_p może być równa zero (rys. 5.3a) lub przyjmować wartość skończoną (rys. 5.3b, c, d). Szczególnym przypadkiem jest model materiału przedstawiony na rys. 5.3d. Jego postać jest najbardziej uproszczona, a materiał



Rys. 5.2. Modele krzywej płynięcia dla materiału sprężysto-plastycznego: a) z umocnieniem nieliniowym, b) z umocnieniem liniowym, c) bez umocnienia; E – moduł Younga, σ_{p0} – początkowa wartość granicy plastyczności, σ_{pB} – naprężenie uplastyczniające przy odkształceniu plastycznym równym ϕ_B



Rys. 5.3. Modele krzywej płynięcia dla materiału sztywno-plastycznego:

a), b) z umocnieniem nieliniowym; c) z umocnieniem liniowym; d) bez umocnienia;
 σ_{p0} – początkowa wartość granicy plastyczności, σ_{pB} – naprężenie uplastyczniające
 przy odkształceniu plastycznym równym φ_B

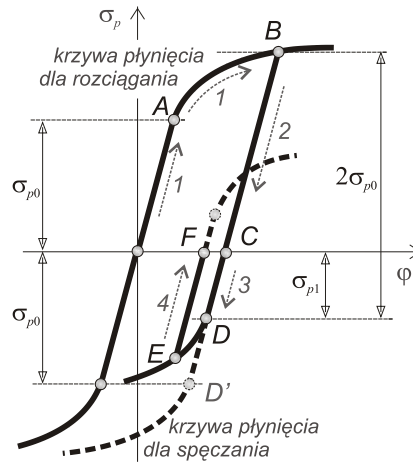
o takiej charakterystyce jest nazywany idealnie plastycznym. Niektóre inżynierskie metody analizy procesów obróbki plastycznej (o których będzie mowa w późniejszej części podręcznika) bazują na tym modelu materiału.

5.1.2. Efekt Bauschingera

Rozpatrzmy dowolny proces jednoosiowego obciążenia próbki wykonanej z metalu będącego w stanie wyżarzonym i miękkim. Najpierw próbkę wydłużymy tak, aby osiągnąć odkształcenia trwałe, przy których materiał umocni się osiągając np. punkt B (rys. 5.4). Następnie odciążymy tę próbkę (powrót do punktu C) i bezpośrednio rozpoczniemy proces ściskania, który jest reprezentowany przez fragment funkcji naprężenia CDE. Okaze się, że początkowa wartość granicy plastyczności σ_{p0} zmniejszy się do wartości σ_{p1} . Spowoduje to, że podczas ści-

skania materiał zacznie się umacniać już począwszy od punktu D (rys. 5.4). Kontynuując dalej obciążenie, materiał odkształcając się trwale umocni się, osiągając punkt E. Natomiast punkt D' już nigdy nie zostanie osiągnięty.

Reasumując, materiał umocniony w wyniku przyłożenia do niego obciążenia, a następnie odciążony i ponownie obciążony – ale już przez siłę, której wartość ma przeciwny znak – odkształca się plastycznie wcześniej, nie osiągając początkowej wartości granicy plastyczności (np. σ_{p0}). Zjawisko to jest nazywane **efektem Bauschingera**⁷ [5, 42, 71].



Rys. 5.4. Schemat efektu Bauschingera na przykładzie procesu jednoosiowego obciążenia; 1 – rozciąganie; 2, 4 – odciążanie; 3 – ściskanie; σ_{p0} – początkowa wartość granicy plastyczności; σ_{p1} – obniżona wartość granicy plastyczności spowodowana wystąpieniem efektu Bauschingera

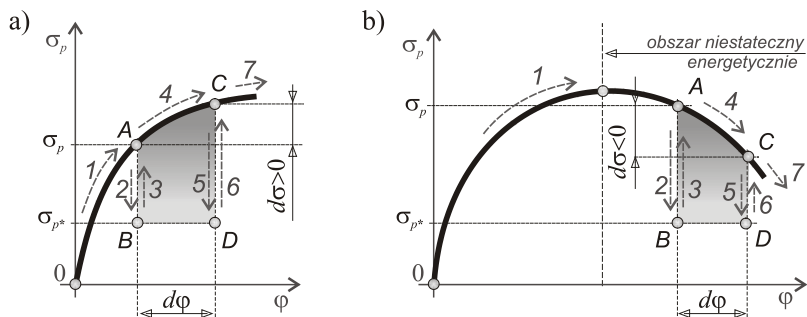
5.1.3. Postulat Druckera

Rozważmy przykład jednoosiowego stanu naprężenia. Z rys. 5.5a wynika, że dodatniemu przyrostowi odkształcenia plastycznego $d\varphi$ odpowiada przyrost naprężenia uplastyczniającego $d\sigma$, który w tym przypadku ma również wartość dodatnią [5, 57, 59]. Krzywa płynięcia materiału plastycznego o takim charakterze (rys. 5.5a) opisuje **materiał stateczny** w sensie energetycznym, ponieważ w wyniku zmiany odkształcenia $d\varphi > 0$ powstaje nadwyżka energii o wartości nieujemnej. Stwierdzenie te można przedstawić w postaci warunku [5]:

$$d\sigma \cdot d\varphi \geq 0 . \quad (5.1)$$

Rozpatrzmy teraz następujący schemat zmiany wartości naprężenia, który polega na realizowaniu procesu obciążania do punktu A (zgodnie ze strzałką

⁷ **Johan Bauschinger** (1833-1893), profesor Uniwersytetu w Monachium. Prowadził rozległe prace badawcze nad zachowaniem się metalu podczas jego odkształcania. Konstruktor ekstensometru służącego do pomiaru odkształceń w próbkach rozciąganych i ściskanych. W roku 1885 ogłosił wyniki, na podstawie których sformułowano efekt Bauschingera.



Rys. 5.5. Schematy krzywych płynięcia w jednoosiowym stanie naprężenia przedstawiające interpretacje stateczności energetycznej materiału; cykl naprężenia w obszarze statecznym (a) oraz niestatecznym (b), gdzie 1÷7 – kolejność przebiegu procesu obciążania i odciążania, σ_p – granica plastyczności w punkcie A, σ_{p*} – granica plastyczności w punktach B i D (po odciążeniu)

oznaczoną cyfrą 1 na rys. 5.5), po czym zmieniane jest obciążenie do poziomu naprężenia σ_{p*} , osiągając punkt B. Następnie następuje powrót obciążenia (wg strzałki nr 3) do punktu A oraz realizacja przyrostu odkształcenia $d\phi$, aż do osiągnięcia punktu C. Dalej próbkę poddaje się ponownemu odciążeniu do poziomu naprężenia σ_{p*} (punkt D). Dalszy przebieg zmiany naprężenia jest realizowany zgodnie ze strzałkami 6 oraz 7. Zwróćmy uwagę na powstałe pole AB-CD, które reprezentuje pewien zamknięty cykl naprężenia. Warunek energetycznej stateczności materiału dla tego cyklu, zgodnie z rys. 5.5a, można zapisać w postaci [5]:

$$(\sigma_p - \sigma_{p*}) \cdot d\phi \geq 0, \quad (5.2)$$

gdzie: σ_p – wartość granicy plastyczności na początku cyklu zmiany naprężenia (punkt A na rys. 5.5).

Powyższe dwa związki (5.1) i (5.2) wyrażają warunek energetycznej stateczności materiału w sensie D. C. Druckera, zwany również **postulatem Druckera** [5]. Postulat ten, uogólniając na stany złożone, można sformułować następująco: *praca wykonana przez działające siły zewnętrzne na przyrostach odpowiednich składowych wektora przemieszczenia, które one wywołują, musi być nieujemna.*

Większość materiałów, stosowanych w przeróbce plastycznej, wykazuje stateczność energetyczną. Jednakże istnieją grupy metali (np. niektóre gatunki aluminium), których krzywa płynięcia w pewnych obszarach nie spełnia postulatu Druckera. Przykład takiej funkcji naprężenia uplastyczniającego przedstawiono

na rys. 5.5b. Na jej podstawie można zauważyć, że dodatniemu przyrostowi doksztalcenia $d\varphi$ zmiana naprężenia $d\sigma$ ma wartość ujemną. O materiałach wykazujących takie cechy mówi się, że są **niestateczne energetycznie** – oczywiście w określonym obszarze odkształceń trwałych [5, 57].

Ponadto, z postulatu Druckera wynika, że powierzchnia plastyczności musi być powierzchnią wypukłą. Dlatego, w mechanice plastycznego płynięcia metali rozważa się wyłącznie materiały stateczne energetycznie w całym zakresie odkształceń trwałych. Ten warunek jest spełniony między innymi dla materiałów idealnie plastycznych.

5.1.4. Wybrane modele materiałów plastycznych

Istnieje duża różnorodność sposobu opisu funkcji naprężenia uplastyczniającego. Pomimo tego, można wyodrębnić sześć grup krzywych płynięcia. Różnią się one między sobą rodzajem i ilością uwzględnianych parametrów, które opisują warunki i przebieg odkształceń trwałych. Klasyfikacja krzywych płynięcia materiału przedstawia się następująco [20, 21, 25]:

- **grupa I** – tworzą ją funkcje postaci $\sigma_p = f(\varphi)$ uwzględniające jedynie odkształcenia bieżące φ , a w niektórych przypadkach również odkształcenie φ_0 lub naprężenie σ_{p0} stanu początkowego, które traktuje się jako parametry stałe;
- **grupa II** – funkcje typu $\sigma_p = f(\varphi, \dot{\varphi})$, które oprócz odkształcenia bieżącego φ uwzględniają również prędkość odkształcenia $\dot{\varphi}$;
- **grupa III** – obejmuje funkcje o postaci $\sigma_p = f(\varphi, \dot{\varphi}, T)$, w których dodatkowym parametrem jest temperatura procesu kształtowania T ;
- **grupa IV** – składa się on z funkcji typu $\sigma_p = f(\varphi, \dot{\varphi}, \sigma_w)$, gdzie σ_w jest parametrem opisującym stan wewnętrzny materiału;
- **grupa V** – funkcje postaci $\sigma_p = f(\varphi, \dot{\varphi}, T, t)$, w których zmiennymi niezależnymi są: odkształcenie, prędkość odkształcenia, temperatura oraz czas t ;
- **grupa VI** – tworzą ją funkcje typu $\sigma_p = f(\varphi, \dot{\varphi}, T, h_\varphi)$ uwzględniające zmianę orientacji kierunków głównych w takcie lub w kolejnych fazach i etapach kształtowania za pomocą parametru h_φ .

W tabeli 5.1 podano najczęściej spotykane i używane postacie funkcji naprężenia uplastyczniającego σ_p , które są również nazywane **równaniami konstytutywnymi** [5, 14, 21, 25, 50, 57]. Równocześnie, równania te pogrupowano według wcześniej przytoczonej klasyfikacji.

Krzywe płynięcia zaliczane do grup I – III (tabela 5.1) są obecnie najczęściej stosowane w analizie teoretycznej procesów obróbki plastycznej. Podstawowymi równaniami konstytutywnymi, reprezentującymi poszczególną grupę, są od-

Tabela 5.1

Wybrane funkcje naprężenia uplastyczniającego σ_p

Grupa I	$\sigma_p = C \cdot \varphi^n$, (5.3)
	$\sigma_p = C \cdot (\varphi_0 + \varphi)^n$, (5.4)
	$\sigma_p = \sigma_{p0} + C \cdot \varphi^n$, (5.5)
	$\sigma_p = \sigma_{p0} + C \cdot (\varphi_0 + \varphi)^n$, (5.6)
	$\sigma_p = C \cdot \varphi^{n_1} \cdot \exp(n_2 \cdot \varphi)$. (5.7)
Grupa II	$\sigma_p = C \cdot \varphi^n \cdot \dot{\varphi}^m$, (5.8)
	$\sigma_p = \sigma_{p0} + C \cdot \varphi^n \cdot \dot{\varphi}^m$, (5.9)
	$\sigma_p = C \cdot \varphi^{n_1} \cdot \exp(n_2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi}^m$, (5.10)
	$\sigma_p = C \cdot (\varphi_0 + \varphi)^n \cdot \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^m$, (5.11)
	$\sigma_p = C \cdot (\varphi_0 + \varphi)^{n_1} \cdot \exp(n_2 \cdot \varphi) \cdot \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^{(a_1 \cdot \varphi + a_2 \cdot \varphi^2)}$. (5.12)
Grupa III	$\sigma_p = C \cdot \varphi^n \cdot \dot{\varphi}^m \cdot \exp(a \cdot T)$, (5.13)
	$\sigma_p = C \cdot \varphi^{n_1} \cdot \exp(n_2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi}^m \cdot \exp(a \cdot T)$, (5.14)
	$\sigma_p = C \cdot \varphi^{n_1} \cdot \exp\left(\frac{n_2}{\varphi}\right) \cdot \dot{\varphi}^{(m+bT)} \cdot \exp(a \cdot T)$, (5.15)
	$\sigma_p = C \cdot \varphi^{(n_1+b_1T)} \cdot \exp(n_2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi}^{(m+b_2T)} \cdot \exp(a \cdot T)$, (5.16)
	$\sigma_p = C \cdot \varphi^{n_1} \cdot \exp\left(n_2 \cdot \frac{\varphi}{\varphi_0}\right) \cdot \dot{\varphi}^{\left(m+\frac{b}{T}\right)} \cdot \exp(a \cdot T)$. (5.17)

powiednio funkcje (5.3), (5.8) oraz (5.13) [25]. Wyjaśnijmy teraz sens fizyczny dwóch ważnych parametrów – mianowicie współczynnika n oraz współczynnika m .

Pierwszy z nich wyraża czułość materiału na odkształcenia plastyczne. W sposób liczbowy można go wyrazić następująco [14]:

$$n = \frac{\partial \sigma_p}{\sigma_p} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\varphi} \right)^{-1} . \quad (5.18)$$

Wartość współczynnika n jest zależna od temperatury procesu kształtowania. Przy niskich temperaturach homologicznych (tj. $T < 0,4T_b$, gdzie T_b jest temperaturą topnienia) wartość n jest różna od zera. W miarę wzrostu temperatury T , wartość bezwzględna wykładnika n maleje, osiągając poziom bliski zero dla temperatur znacznie większych od temperatury rekrytalizacji. Dlatego też, funkcje naprężenia uplastyczniającego, zaliczane do grupy I, są stosowane tylko do modelowania procesów przeróbki plastycznej na zimno (tj. gdy $T < 0,4T_b$).

W podobny sposób można zdefiniować współczynnik m . Wyraża on czułość materiału na prędkość odkształcenia $\dot{\phi}$, co można zapisać [14]:

$$m = \frac{\partial \sigma_p}{\partial \dot{\phi}} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} \right)^{-1}. \quad (5.19)$$

Wartość wykładnika m również jest zależna od temperatury. Przy niskich temperaturach homologicznych, rzędu $0,1T_b$, współczynnik m jest nieznacznie większy od zera. Podwyższenie temperatury do zakresu $0,4 \div 0,5T_b$ powoduje, że wartość tego współczynnika maleje do zera. Zdarzają się sytuacje, szczególnie w przypadku niektórych stopów, że w tym zakresie temperatur homologicznych współczynnik ten może być nawet mniejszy od zera. Ale już przy temperaturze $T > 0,5T_b$ (tj. gdy proces kształtowania realizowany jest na gorąco) wartość wykładnika m jest większa od zera i zależy również od prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$. Przy bardzo małych prędkościach (odkształceniach statycznych) współczynnik ten wynosi $m \approx 0$ [14].

Ponadto, wartość prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$ oraz temperatury procesu kształtowania T ma wpływ na poziom naprężeń uplastyczniających. Generalnie przyjmuje się, że wzrost prędkości $\dot{\phi}$ powoduje zwiększenie wartości σ_p . Natomiast podwyższenie temperatury T powoduje zmniejszenie granicy plastyczności σ_p .

Zatem, do symulacji procesów kształtowania na gorąco zaleca się stosować krzywe płynięcia, w których uwzględnia się wpływ prędkości odkształcenia $\dot{\phi}$ oraz temperatury T (szczególnie, gdy w trakcie odkształceń zmiana wartości tego drugiego parametru jest znacząca). Jednakże, zasadniczym problemem równań z grupy III jest trudność dokładnego opisu zmiany naprężenia uplastyczniającego σ_p dla całego zakresu odkształceń. Problem ten jest często rozwiązywany, poprzez podanie zależności $\sigma_p = f(\phi, \dot{\phi}, T)$ w formie tabelarycznej [25].

Funkcje zaklasyfikowane do pozostałych grup IV – VI są dotychczas rzadko stosowane. Przyczyną braku ich rozpowszechnienia jest krótki czas, jaki minął od ich opracowania oraz brak jakichkolwiek danych doświadczalnych (służą-

cych do opracowania opisu funkcji) dla większości materiałów stosowanych w przemyśle [25].

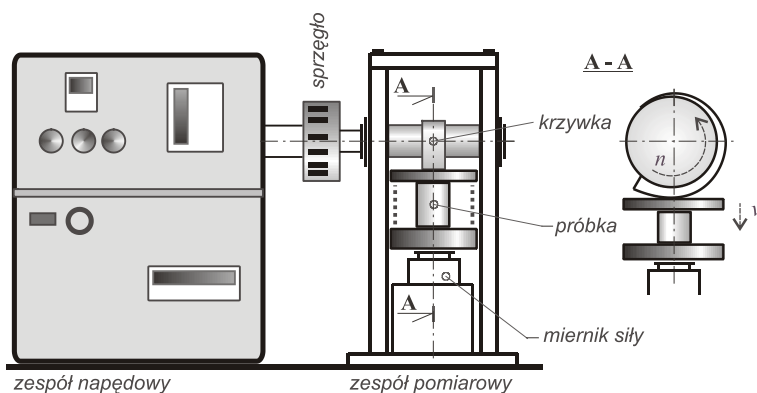
5.1.5. Metody wyznaczania krzywej płynięcia

Krzywą płynięcia materiału można wyznaczyć stosując jedną z trzech podstawowych metod badawczych, jakimi są plastometryczne próby: rozciągania, ściskania oraz skręcania. Niestety, często uzyskiwane w nich wyniki wykazują znaczne różnice wynikające z szeregu czynników. Mogą nimi być między innymi [73]:

- różnice stanu naprężenia i odkształcenia w poszczególnych metodach badawczych,
- różnorodność konstrukcji maszyn badawczych,
- brak standaryzacji warunków przeprowadzania badań,
- różnorodność metodologii interpretacji uzyskanych wyników.

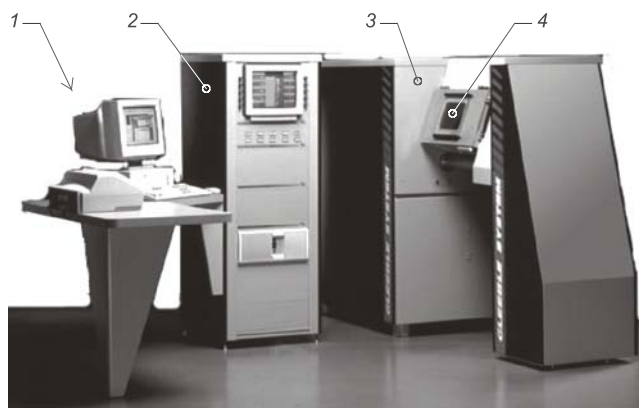
Badania tego rodzaju w praktyce są wykonane na następujących maszynach specjalistycznych [20, 21, 50, 75]:

- **plastomer krzywkowy** – jego konstrukcja (przedstawiona schematycznie na rys. 5.6) umożliwia uzyskanie wyników badań plastometrycznych w postaci przebiegu siły w funkcji drogi narzędzia odkształcającego, przy zachowaniu stałej prędkości odkształcenia oraz temperatury próbki;
- **dylatometr** z możliwością odkształceń – jest on wyposażony dodatkowo w komputerowy system gromadzenia i interpretacji wyników badań. Ponadto, oprócz kontrolowanego procesu odkształcania, zapewnia on również właściwe środowisko realizacji badań, np. względną próżnię lub chłodzenie gazem obojętnym (Ar);



Rys. 5.6. Schemat budowy plastomeru krzywkowego: n – prędkość obrotowa krzywki,
 v – prędkość liniowa narzędzia roboczego

- **symulator fizyczny** – jest nowoczesnym, technicznie zaawansowanym systemem, który umożliwia realizacją badań własności materiałów (na podstawie np. próby rozciągania, ściskania i skręcania, odkształcania statycznego lub cyklicznego aż do momentu zerwania próbki, próby pełzania, badania zużycia cieplnego i mechanicznego, badania zjawisk zachodzących podczas przemiany fazowej, topnienia i krystalizacji, obciążenia cieplnego itp.) oraz umożliwia fizyczne modelowanie procesów technologicznych (np. walcowania, kucia, wyciskania, ciągłego odlewania metali, obróbki cieplnej, spiekania i prasowania proszków itd.) z użyciem materiałów rzeczywistych i w warunkach sterowanych. Wszystkie wykonywane czynności są zautomatyzowane i sterowane przez zintegrowany system komputerowy. Na rys. 5.7 przedstawiono fotografię symulatora GLEEBLE® 3500. Składa się on z stanowiska komputerowego 1 (służącego do programowania i zarządzania symulatorem), modułu sterowania 2 oraz modułu stacji roboczej 3, w którym oprócz urządzeń napędowych, szybkiego grzania i chłodzenia znajduje się również komora badawcza 4.



Rys. 5.7. Symulator GLEEBLE® 3500 – opis w tekście

Niestety, jak dotąd nie opracowano hipotezy, która zadawalająco opisywałaby uogólnioną krzywą płynięcia, niezależną od sposobu realizacji próby plastometrycznej. Dlatego też, przystępując do badań należy przeprowadzić analizę pewnych zagadnień, które determinują właściwy wybór metody określania krzywej umocnienia. Zagadnieniami tymi, w ujęciu przekrojowym, są [73]:

- przeznaczenie wyników badań,
- wartość maksymalnych odkształceń plastycznych,
- zakres prędkości odkształceń możliwych do realizacji,

- złożoność i pracochłonność przygotowania próbek,
- możliwość zastosowania techniki komputerowej do kierowania badaniami i realizacji pomiarów,
- możliwość modelowania różnych schematów obciążenia,
- dostępność odpowiednich urządzeń badawczych.

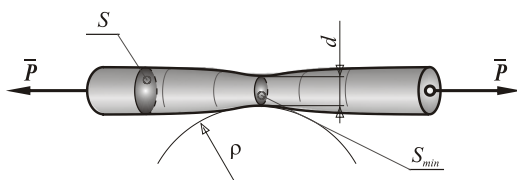
W dalszej części rozdziału zostaną przybliżone wybrane metody badań plastometrycznych. Dotyczyć one będą procesów kształtowania brył.

Próba rozciągania

Wyznaczenie krzywej płynięcia w próbie jednoosiowego rozciągania polega na odkształceniu próbki o poprzecznym przekroju kołowym. Główną zaletą tej metody jest jej prostota i łatwość wykonania. Niestety jej ograniczeniem jest szybka utrata stateczności próbki – objawia się to powstawaniem przewężenia w jej części pomiarowej (rys. 5.8). Moment rozpoczęcia tego zjawiska zależy od wartości wydłużenia równomiernego A_r , a dla większości metali technicznych stała ta jest mniejsza od 30% [72].

W fazie odkształceń, w której występuje równomierne wydłużenie próbki przyjmuje się, że panuje w niej jednorodny, jednoosiowy stan naprężeń. Wartość zastępczego naprężenia uplastyczniającego σ_p można wyznaczyć na podstawie poniższej zależności:

$$\sigma_p = P \cdot \left(S_0 \cdot \frac{l_0}{l} \right)^{-1}, \quad (5.20)$$



Rys. 5.8. Schemat przewężenia w rozciąganej próbce: P – siła rozciągająca, S – pole przekroju części wydłużonej równomiernie, S_{min} – najmniejsze pole przekroju w strefie przewężonej, d – średnica przewężenia, ρ – promień krzywizny przewężenia

gdzie: P – siła rozciągająca, S_0 – początkowe pole przekroju poprzecznego próbki, l_0 – początkowa długość odcinka pomiarowego, l – długość odcinka pomiarowego w momencie pomiaru siły P .

Natomiast, odpowiadające temu naprężeniu σ_p odkształcenie zastępcze φ oblicza się z następującej zależności:

$$\varphi = \ln \frac{l}{l_0}. \quad (5.21)$$

W momencie utraty stateczności próbki, rozpoczyna się proces lokalizacji odkształcenia, a w rezultacie wspomniane wcześniej przewężenie próbki (rys.

5.8). W strefie tej zmianie ulega stan naprężenia i odkształcenia na trójosiowy (tj. złożony). Utrudnia to obliczenia wartości zastępczych naprężenia σ_p oraz odkształcenia φ . Jednakże, uogólnioną krzywą płynięcia można wyznaczyć dzięki zastosowaniu jednego ze sposobów interpretacji wyników. Zastępcze naprężenie uplastyczniające σ_p odpowiadające stanowi naprężenia występującemu w strefie przewężenia próbki (rys. 5.8) można obliczyć z poniższego wzoru empirycznego [73]:

$$\sigma_p = \frac{P}{S_{min} \cdot \left(1 + \frac{d}{8\rho}\right)}, \quad (5.22)$$

gdzie: P – siła rozciągająca; S_{min} – najmniejsze pole przekroju poprzecznego przewężenia próbki; d , ρ – parametry geometryczne zgodne z rys. 5.8.

Z kolei, odkształcenie zastępcze φ , odpowiadające naprężeniu σ_p , można wyznaczyć z następującej zależności:

$$\varphi = \ln \frac{S}{S_{min}}. \quad (5.23)$$

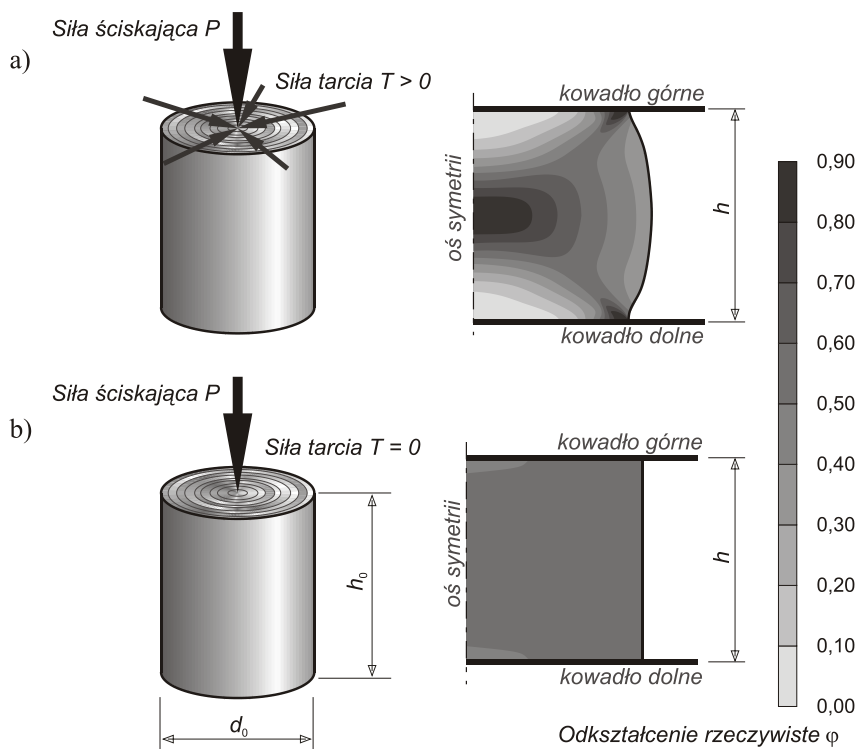
gdzie: S , S_{min} – przekroje podane na rys. 5.7. Jednakże przedstawione parametry geometryczne opisujące kształt przewężenia są zmienne w czasie, co w konsekwencji utrudnia korzystanie z zależności (5.22) oraz (5.23). Dlatego też, w praktyce nie stosuje się tej metody do wyznaczania krzywej płynięcia dla potrzeb analizy procesów obróbki plastycznej, w których występują dużo większe odkształcenia od możliwych do uzyskania w tej próbie.

Próba ściskania

Próba ściskania polega na jednoosiowym spęczaniu próbki płaskiej bądź cylindrycznej pomiędzy płaskimi kowadłami. Rejestrowanymi parametrami procesu jest wartość siły w funkcji przemieszczenia narzędzia ściskającego. W omawianej metodzie dąży się do uzyskania jednorodnego stanu naprężenia i odkształcenia. Taki schemat ma miejsce w procesie idealnym, w którym nie występuje tarcie na powierzchni kontaktu kowadeł z odkształcanym materiałem. Wpływ sił tarcia na schemat odkształceń oraz kształt spęczanej próbki cylindrycznej przedstawiono na rys. 5.9. W przypadku niewystępowania sił tarcia na wspomnianej powierzchni, stan odkształcenia i naprężenia jest jednakowy w całej objętości materiału (rys. 5.9b). Ponadto, kształt próbki pozostaje wciąż cylindryczny – co znacznie upraszcza obliczenia.

Zatem, wartość zastępczego naprężenia uplastyczniającego σ_p wyznacza się na podstawie poniższej zależności:

$$\sigma_p = \frac{4 \cdot P \cdot h}{\pi \cdot d_0^2 \cdot h_0}, \quad (5.23)$$



Rys. 5.9. Wpływ sił tarcia T na zmianę kształtu próbki walcowej oraz rozkład intensywności odkształcenia φ zarejestrowany dla procesu spęczania: a) siły tarcia T osiągają maksymalne wartości (czynniki tarcia $m = 1$), b) brak sił tarcia T na powierzchni kontaktu kowadło-próbka (czynniki tarcia $m = 0$); d_0 – średnica początkowa, h_0 – wysokość początkowa, h – wysokość po spęczeniu

gdzie: P – chwilowa siła spęczająca, h – chwilowa wysokość próbki (odpowiadająca sile P), h_0 , d_0 – początkowa wysokość i średnica próbki, które są zgodne z oznaczeniami umieszczonymi na rys. 5.8b.

Odpowiadające naprężeniu (5.23) zastępcze odkształcenie rzeczywiste φ obliczane jest z następującego wzoru:

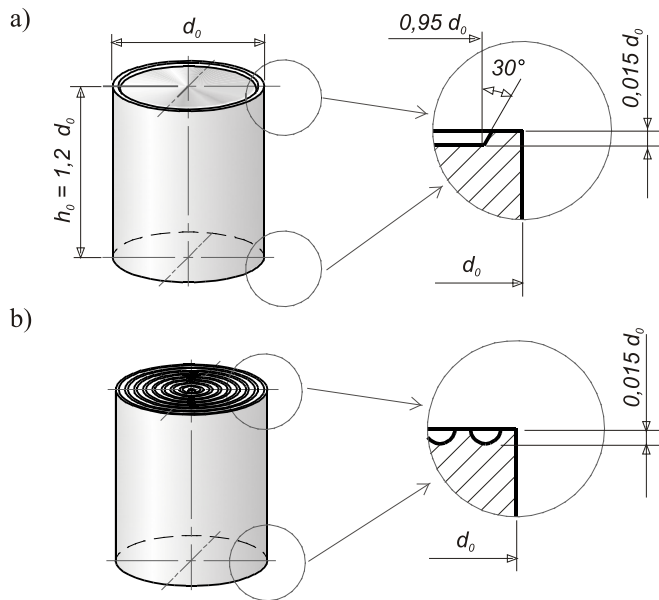
$$\varphi = \ln \frac{h_0}{h} \quad (5.24)$$

Jednakże, w rzeczywistej próbie spęczania na powierzchni kontaktu występuje tarcie (rys. 5.9a), co jest zasadniczą wadą tej metody. Działanie sił tarcia powoduje niejednorodny rozkład naprężenia, odkształcenia oraz prędkości od-

kształceń w całej objętości materiału. Ponadto, wydzielanie ciepła na skutek tarcia oraz zmiany energii odkształcenia na energię cieplną, jak też wymiana ciepła pomiędzy narzędziami i próbką wywołuje niejednorodny rozkład temperatury. Omówione zjawiska powodują, że wyniki z próby ściskania obarczone są pewnym błędem, zazwyczaj trudnym do oszacowania.

Aby uzyskać możliwie równomierny rozkład naprężenia i odkształcenia oraz zminimalizować wartość wcześniej wspomnianego błędu, proces spęczania powinien być przeprowadzany w warunkach eliminujących wpływ tarcia. Według literatury specjalistycznej, warunki takie w pewnym przybliżeniu można uzyskać poprzez następujące sposoby [14, 73]:

- Spęczanie próbek mających płytkie zagłębienia na powierzchniach czołowych (rys. 5.10), które spełniają rolę pojemników na środki smarujące (np. parafinę w stanie stałym). Ta metoda pozwala na obniżenie współczynnika tarcia do wartości $\mu \approx 0$. W takiej sytuacji zależności (5.23) oraz (5.24) są w pełni słuszne.
- Spęczanie z zastosowaniem przekładek zmniejszających tarcie na powierzchni kontaktu próbka-matryca. Przekładki takie są zazwyczaj wykonywane z cienkiej folii ołowianej, polietylenowej lub teflonowej.



Rys. 5.10. Rodzaje próbek cylindrycznych z wytoczeniami na powierzchniach czołowych:
 d_0 , h_0 – wymiary początkowe; szczegółowy opis w tekście

- Spęcznie przy pomocy matryc posiadających stożkowe powierzchnie robocze. Kąt nachylenia tych powierzchni jest tak dobrany, aby jego wartość była równa kątowi tarcia materiału próbki o płaszczyznę narzędzi.
- Stopniowe spęcznie z przerwami czasowymi próbki o kształcie możliwie zbliżonym do cylindrycznego. Przerwy są wykorzystywane do określenia wymiarów próbki oraz smarowania smarem jej powierzchni czołowych. Po zmniejszeniu początkowej wysokości próbki o wartość około 40%, jej średnicę zmniejsza się poprzez obróbkę skrawaniem w celu przywrócenia kształtu cylindrycznego.

Na zakończenie należy wspomnieć, że istnieją również sposoby na zminimalizowanie niejednorodności rozkładu temperatury w odkształcanym materiale. Sposoby te oparte są na idei zapewniania warunków izotermicznych – np. przeprowadzanie próby spęczenia w fizycznym symulatorze GLEEBLE® lub dylatometrze o specjalnej konstrukcji. Z kolei uzyskanie stałej prędkości odkształcenia zapewnia zastosowanie np., plastomeru krzywkowego (rys. 5.6). Jednakże, coraz częściej poszukuje się nowych metod interpretacji wyników, które uwzględniają występowanie wspomnianych niejednorodności. Np. metoda „inverse”, wykorzystująca obliczenia numeryczne, pozwala skorygować wpływ błędów na postać ostatecznego wyniku próby spęczenia [20, 21].

Próba skręcania

Plastometryczna próba skręcania polega na odkształcaniu plastycznym walcowej próbki pełnej bądź drażonej. Zastosowanie próbki rurowej powoduje zmniejszenie błędu wynikającego z niejednorodności rozkładu parametrów naprężenia i odkształcenia w przekroju poprzecznym. Jednakże, takie próbki są rzadko stosowane w praktyce z powodu złożoności i czasochłonności ich przygotowania. Ponadto, próbki drażone szybko tracą stateczność [73].

Cenną zaletą tej metody wyznaczania krzywej płynięcia jest możliwość analizowania odkształceń w zakresie dużych wartości. Brak bezpośredniego kontaktu pomiędzy narzędziami a częścią pomiarową próbki ogranicza w znacznym stopniu wymianę ciepła oraz eliminuje niepożądany wpływ tarcia. Również zaletą tej metody jest zachowanie stałej prędkości odkształcenia w zewnętrznej warstwie próbki, przy stałej prędkości obrotowej skręcania.

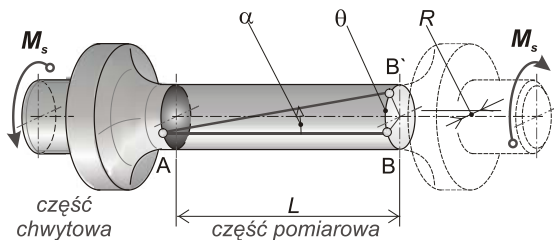
Wielkościami rejestrowanymi w tej metodzie badawczej jest moment skręcający M_s oraz siła osiowa (powstała w wyniku skręcania próbki) w funkcji kąta skręcenia θ pomiędzy dwoma przekrojami poprzecznymi, odległymi od siebie o odległość L . Przykładowy kształt próbki cylindrycznej pełnej (oraz schemat jej odkształcenia) przedstawiono na rys. 5.11. Na podstawie odczytanych danych wyznaczone są parametry stanu naprężenia i odkształcenia dla zewnętrznej warstwy próbki. Wartość naprężenia stycznego τ_m , panującego we wspomnianej warstwie materiału, można wyznaczyć z następującego wzoru empirycznego:

$$\tau_m = (3 + n + m) \cdot \frac{M_s}{2 \cdot \pi \cdot R_z^3} , \quad (5.25)$$

gdzie: M_s – zmierzony moment skręcający (rys. 5.11); R_z – promień zastępczy, zwany również promieniem krytycznym; n, m – współczynniki umocnienia.

Promień zastępczy R_z równy jest iloczynowi promienia części pomiarowej R (rys. 5.11) oraz stałej, która może przyjąć jedną z następujących wartości: 0,6; 0,667; 0,724; 0,75; 0,765 lub (najczęściej) 1,0. Natomiast współczynniki umocnienia odkształceniowego n oraz prędkościowego m można wyznaczyć w oparciu o wykresy skręcania – odpowiednio $M_s = f(\theta)$ lub

$M_s = f(N)$, gdzie θ oznacza kąt skręcenia próbki (rys. 5.11), natomiast N wyraża ilość obrotów wykonanych przez próbkę. Jednakże wartość tych zmiennych jest najczęściej obliczana na podstawie zależności (5.26) oraz (5.27).



Rys. 5.11. Schemat skręcania próbki pełnej, gdzie: L - długość odcinka pomiarowego, R - promień próbki (w części pomiarowej), α - kąt odkształcenia postaciowego, θ - kąt skręcenia próbki

$$n = \frac{\partial \ln M_s}{\partial \ln N} , \quad (5.26)$$

$$m = \frac{\partial \ln M_s}{\partial \ln \omega} , \quad (5.27)$$

gdzie: ω jest prędkością obrotową próbki – wyraża się ją jako pochodną ilości obrotów skręcenia próbki N po czasie t .

Kolejnym ważnym parametrem, jaki należy wyznaczyć w tej próbie, jest odkształcenie postaciowe γ_m . Odkształcenie to reprezentuje stan odkształcenia panujący w warstwie zewnętrznej skręcanej próbki. Jego wartość można obliczyć z poniższego wzoru:

$$\gamma_m = 2\pi \cdot R_z \cdot N \cdot L^{-1} , \quad (5.28)$$

gdzie: R_z – promień zastępczy, o wartości takiej samej jak w zależności (5.25); N – ilość wykonanych obrotów próbki, L – odcinek pomiarowy zgodny z rys. 5.11.

Jednakże, aby móc wyznaczyć uogólnioną krzywą umocnienia w postaci $\sigma_p = f(\varphi)$, uzyskane naprężenie (5.25) i odkształcenie (5.28) należy przekształcić do postaci intensywności naprężenia σ_p oraz intensywności odkształcenia φ (tj. niezmienników stanu naprężenia i odkształcenia). Istnieje wiele hipotez wyrażających związki pomiędzy wymienionymi parametrami. Związki pomiędzy odkształceniem postaciowym γ_m i odkształceniem zastępczym φ zamieszczono w tabeli 5.2, natomiast w tabeli 5.3 umieszczono wzory służące do przeliczania naprężenia postaciowego τ_m na naprężenie zastępcze σ_p .

Tabela 5.2

Związki pomiędzy odkształceniem postaciowym γ_m oraz odkształceniem zastępczym φ

Autorzy hipotezy	Wzór
Huber-Mises-Hencky	$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \gamma_m$, (5.29)
Tresca	$\varphi = \frac{1}{2} \gamma_m$, (5.30)
Nadai-Mises	$\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{ar sinh}\left(\frac{1}{2} \gamma_m\right)$, (5.31)
Nadai-Tresca	$\varphi = \operatorname{ar sinh}\left(\frac{1}{2} \gamma_m\right)$, (5.32)
Hajduk-Mises	$\varphi = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \gamma_m + 1\right)$, (5.33)
Hajduk-Tresca	$\varphi = \ln\left(\frac{1}{2} \gamma_m + 1\right)$, (5.34)
Morozumi	$\varphi = 2 \cdot \ln\sqrt{\frac{2}{3} \gamma_m + 1}$. (5.35)

Tabela 5.3

Związki pomiędzy naprężeniem stycznym τ_m i naprężeniem zastępczym σ_p

Opis i uwagi	Wzór
hipoteza energetyczna Hubera-Mises’a-Hencky’ego	$\sigma_p = \sqrt{3} \cdot \tau_m$, (5.36)
hipoteza Tresci	$\sigma_p = 2 \cdot \tau_m$, (5.37)
Przy uwzględnieniu siły osiowej	$\sigma_p = \sqrt{3 \cdot \tau_m^2 + \sigma_0^2}$. (5.38)
gdzie: σ_0 – naprężenie osiowe.	

5.2. Miary odkształcenia plastycznego

Zagadnienie miary odkształcenia plastycznego poruszono już w rozdziale 2.3. Podana tam zależność (2.9) wyraża najczęstszą jej postać – jako logarytm naturalny współczynnika odkształcenia. Ponieważ logarytm jest funkcją matematyczną, to wspomniany współczynnik ten jest już „sam w sobie” miarą odkształcenia. Ponadto, współczynnik ten jest często w różny sposób nazywany w zależności od typu wymiarów charakterystycznych kształtowanego elementu. Jeżeli wielkości te będą wyrażały długość, szerokość lub wysokość elementu, to współczynnik odkształcenia będzie nazywany odpowiednio **wydłużeniem**, **poszerzeniem** lub **gniotem** [24].

Odształcenie rzeczywiste (2.9) można również wyrazić w odniesieniu do zmiany pola wybranego przekroju kształtowanego ośrodka ciągłego. Po odpowiednim przekształceniu uzyskuje się następującą zależność [24]:

$$\varphi_S = \int_{S_0}^{S_1} \frac{dS}{S} = \ln \frac{S_1}{S_0} \quad , \quad (5.39)$$

gdzie: S_0 – wartość początkowa pola przekroju, S_1 – wartość po odkształceniu. Iloraz S_1/S_0 jest również nazywany współczynnikiem odkształcenia przekroju. Jednakże w praktyce częściej jest używana miara wyrażona wzorem (5.40). W tej sytuacji zmianę pola przekroju odnosi się do jego początkowej wartości. W rezultacie otrzymuje się odkształcenie względne przekroju, które jest nazywane **stopniem zgniotu**.

$$Z = \int_{S_0}^{S_1} \frac{dS}{S_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \quad . \quad (5.40)$$

W przypadku, kiedy przekrój ulega zmniejszeniu, obliczony wskaźnik odkształcenia (5.40) przyjmuje wartości ujemne. Aby temu zapobiec, stopień zgniotu wyznacza się wówczas z następującego wzoru:

$$Z = \frac{S_0 - S_1}{S_0} \quad , \quad (5.41)$$

gdzie: S_0 – wartość pola przekroju przed odkształceniem, S_1 – pole przekroju po odkształceniu.

Wspomniane w rozdziale 2.1 odkształcenie względne (2.1) również może pełnić rolę miary odkształcenia plastycznego. Jednakże tylko w sytuacjach, gdy jego wartość jest odpowiednio mała. Powód ten wyjaśnia rys. 5.12, który przedstawia zależności występujące pomiędzy wybranymi wskaźnikami odkształcenia. Dla wartości mniejszych od 0,3, zarówno odkształcenie rzeczywiste φ jak i odkształcenie względne ϵ , są sobie równe (w pewnym przybliżeniu). Natomiast

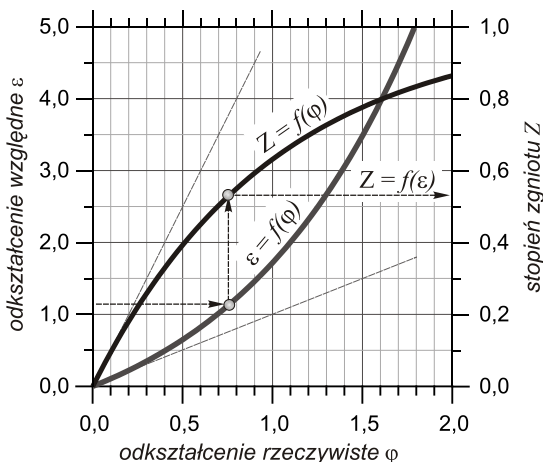
w pozostałym zakresie wartości, polecanym wskaźnikiem odkształcenia plastycznego jest odkształcenie rzeczywiste φ .

Można również miarę odkształcenia wyrazić za pomocą wzoru (5.42). W odróżnieniu od zależności (2.1), ten wskaźnik odkształcenia odnosi się do końcowego wymiaru charakterystycznego. Dlatego też jest on nazywany **względny odkształceniem właściwym** [24, 45].

$$\varepsilon_w = \frac{\Delta l}{l_1}, \quad (5.42)$$

gdzie: Δl – zmiana wymiaru charakterystycznego, l_1 jest wartością końcową.

Przybliżone powyżej miary odkształcenia są jego wskaźnikami. Pomiedzy nimi występuje pewna zależność, którą szczegółowo przedstawiono w tabeli 5.4. Ponadto, do przeliczania wartości poszczególnych wskaźników można wykonać również wykres umieszczony na rys. 5.12.



Rys. 5.12. Zależności między wybranymi wskaźnikami odkształceń (opis w tekście)

Tabela 5.4

Zależności występujące pomiędzy wybranymi wskaźnikami odkształcenia [45]

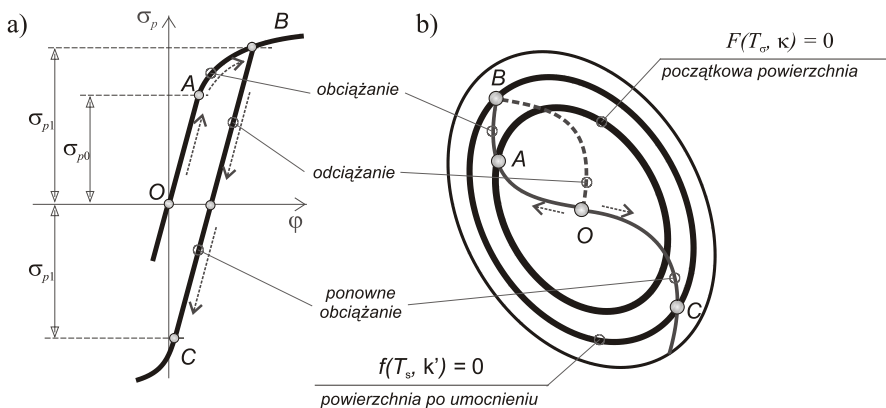
miara odkształcenia	φ	ε	Z
φ	-	$\varphi = \ln(1 + \varepsilon)$	$\varphi = -\ln(1 - Z)$
ε	$\varepsilon = e^{\varphi} - 1$	-	$\varepsilon = \frac{Z}{1 - Z}$
Z	$Z = 1 - e^{-\varphi}$	$Z = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$	-

5.3. Hipotezy umocnienia

Warunek plastyczności Hubera-Missesa lub Tresci określa jedynie początkową wartość granicy plastyczności. Natomiast kształtowanie plastyczne powoduje osiąganie dużych odkształceń przy jednoczesnym ciągłym zwiększaniu wartości obciążenia. Obciążenie to wykracza poza początkowy poziom uplastycznienia – co w rezultacie powoduje zmianę kształtu oraz położenia powierzchni plastyczności (w dziewięciowymiarowej przestrzeni wymiarowej). Ścisłe matematyczne ujęcie tych zmian jest niemożliwe do zrealizowania z powodu złożoności problemu. Dlatego też, zmiany te są opisywane za pomocą zależności uproszczonych, zwanych hipotezami umocnienia [5, 71].

5.3.1. Hipoteza umocnienia izotropowego

Umocnieniem izotropowym materiału nazywa się taki proces odkształcania plastycznego, w którym powierzchnia plastycznego płynięcia – wyrażona równaniem (4.25) – powiększa się symetrycznie z zachowaniem swej postaci. Hipotezę tę, która jest najprostszym rozwiązaniem, zaproponował R. J. Hill. Za podstawę wyjaśnienia tego zagadnienia można przyjąć rys. 5.13. Krzywa płynięcia (rys. 5.13a) uwzględnia jedynie zjawisko umocnienia materiału, natomiast pomija się efekty cieplne i reologiczne oraz efekt Bauschingera. Mimo tych uproszczeń, wiele własności tej krzywej można zaadaptować do złożonych stanów naprężenia, które są przedstawiane za pomocą zmieniającej się powierzchni plastyczności (rys. 5.13b).



Rys. 5.13. Interpretacja geometryczna izotropowego umocnienia materiału, na przykładzie: a) jednoosiowego rozciągania, b) powierzchni plastyczności dla złożonego stanu naprężenia (opis w teście)

Warunek plastyczności dla takiego materiału, bazujący na funkcji (4.25), zapisywany jest w następujący sposób [5, 71]:

$$f(T_{\sigma}, \kappa) \quad \begin{cases} < 0 - & \text{stan sprężysty} \\ = 0 - & \text{stan plastyczny} \end{cases} \quad (5.43)$$

gdzie: T_{σ} – tensor określający aktualny stan naprężenia, κ – parametr umocnienia izotropowego.

Istotną kwestią tej hipotezy jest sposób określenia postaci parametru umocnienia κ . Odpowiedzialny jest on za symetryczne powiększanie się powierzchni plastycznego płynięcia w trakcie odkształceń plastycznych. Ponadto, jego postać jest tak określana, aby przy odkształceniach z zakresu sprężystego wartość jego zawsze wynosiła zero. Najczęściej, za miarę tego parametru są przyjmowane zastępcze odkształcenia plastyczne ϕ lub praca właściwa odkształcenia plastycznego w . Modelem takiego umocnienia jest krzywa płynięcia wyrażona zależnością (5.4).

5.3.2. Hipoteza umocnienia anizotropowego

Hipoteza umocnienia anizotropowego, nazywana również hipotezą umocnienia kinematycznego, została zaproponowana przez W. Pragera oraz A. Iszlińskiego. Jej cechą charakterystyczną jest uwzględnianie idealnego efektu Baushingera (rys. 5.14). Zgodnie z tą hipotezą, w trakcie procesu kształtowania powierzchnia plastycznego płynięcia nie zmienia ani swojego kształtu ani swojego rozmiaru. Natomiast doznaje przemieszczenia (jako obiekt sztywny) w kierunku przyrostu odkształcenia plastycznego [5].

Dla omówionego przypadku równanie powierzchni płynięcia dla zakresu odkształceń plastycznych oraz w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężenia, przyjmuje się w formie [5, 71]:

$$f(T_{\sigma} - T_{\alpha}) = 0, \quad (5.44)$$

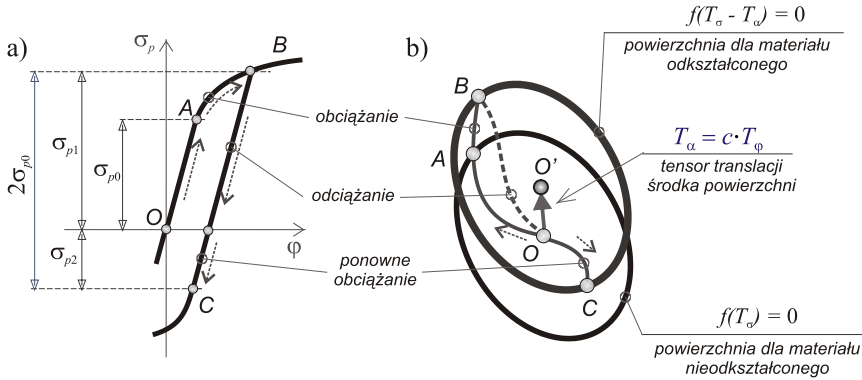
gdzie: T_{σ} – tensor reprezentujący aktualny stan naprężenia, T_{α} – tensor określający całkowite przemieszczenie środka powierzchni plastyczności, która przed translacją miała postać wyrażoną równaniem (rys. 6.14) [5]:

$$f(T_{\sigma}) = 0. \quad (5.45)$$

Składowe tensora przemieszczenia muszą być tak określone, aby były równe zeru, jeśli nie ma odkształceń plastycznych. Warunek ten będzie spełniony przy założeniu, że wspomniane składowe będą związane ze składowymi odkształcenia plastycznego T_{ϕ} następującą zależnością [71]:

$$T_{\alpha} = c \cdot T_{\phi}, \quad (5.45)$$

gdzie: c – wielkość stała, charakteryzująca dany materiał. Natomiast modelem takiego umocnienia jest krzywa płynięcia wyrażona zależnością (5.5).



Rys. 5.14. Interpretacja geometryczna anizotropowego umocnienia materiału, na przykładzie: a) jednoosiowego rozciągania (uwzględnienie efektu Bauschingera), b) powierzchni plastyczności dla złożonego stanu naprężenia (opis w teście)

5.3.3. Hipoteza umocnienia mieszanego

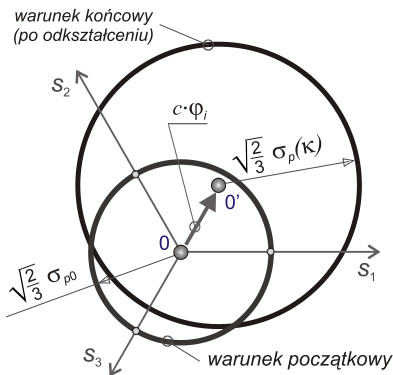
Punktem wyjścia w opracowaniu hipotezy umocnienia mieszanego było stwierdzenie, że w rzeczywistości nie występuje ani czyste umocnienie izotropowe, ani czyste umocnienie kinematyczne. Według tej hipotezy uważa się, że umocnienie materiału ma charakter pośredni – zawiera wybrane cechy obydwu omówionych wcześniej typów umocnienia. Oznacza to, że powierzchnia plastycznego płynięcia zmienia swoje wymiary z zachowaniem podobieństwa geometrycznego oraz doznaje translacji.

Zgodnie z tą hipotezą, równanie wspomnianej powierzchni plastycznego płynięcia przyjmuje następującą postać [71]:

$$f(T_\sigma - T_\alpha, \kappa) = 0 \quad (5.46)$$

gdzie: oznaczenia są identyczne jak dla zależności (5.43) i (5.44).

Przykładową interpretację geometryczną na płaszczyźnie oktaedrycznej (dewiatorowej przestrzeni naprężeń głównych) zmodyfikowanego warunku plastyczności Hubera-Misesa przedstawiono na rys. 5.15.



Rys. 5.15. Zmiana okręgu Hubera-Misesa na płaszczyźnie oktaedrycznej zgodnie z hipotezą umocnienia mieszanego (opis w teście)

5.4. Związki między naprężeniem a odkształceniem w zakresie dużych odkształceń

W zakresie odkształceń plastycznych, nie można określić istniejącego stanu naprężenia tylko na podstawie znajomości końcowego stanu odkształcenia. Jest to związane z tym, że końcowy stan odkształcenia zawsze jest zależny od całego procesu kształtowania, w czasie którego zazwyczaj ulega zmianie schemat obciążenia. Zatem znajomość historii odkształcenia jest wręcz wskazana, szczególnie w przypadku dużych odkształceń trwałych.

Ponadto, wyznaczenie stanu naprężenia w odkształcanym materiale nie zawsze jest możliwe, gdy uwzględnia się tylko informacje o wartościach i schemacie jego obciążenia. Również powinno się uwzględniać aktualną wartość naprężenia uplastyczniającego, ponieważ parametr ten jest funkcją między innymi odkształcenia [14, 24, 25, 45].

Reasumując, chcąc wyznaczyć zależności wiążące stan naprężenia ze stanem odkształcenia dla procesów przeróbki plastycznej metali, należy zawsze uwzględniać wszystkie wyżej wspomniane zagadnienia. Opracowane w ten sposób zależności tworzą prawa i hipotezy, które zostaną szczegółowo przybliżone poniżej.

5.4.1. Odkształceniowa teoria plastyczności

Odkształceniowa teoria plastyczności jest uogólnieniem związków fizycznych określonych dla teorii sprężystości. Powstanie jej wiąże się z ekstrapolacją związków fizycznych wynikających z prawa Hooke’a poza stan sprężysty. Jednocześnie takie rozwiązanie narzuca konieczność uwzględniania odkształceń plastycznych tylko z zakresu wartości stosunkowo małych. Ta cecha sprawia, że omawiana teoria w praktyce jest również nazywana teorią **małych sprężysto-plastycznych odkształceń** Nádía-Hencky’ego-Iliuszyna [24, 45].

Za podstawę odkształceniowej teorii plastyczności uważa się trzy postulaty. Ich treść jest następująca [5, 24]:

- odkształcany materiał jest izotropowy, co oznacza, że kierunki główne naprężeń pokrywają się z kierunkami głównymi odkształceń;
- naprężenie średnie σ_m jest proporcjonalne do odkształcenia średniego φ_m , a wartość współczynnika proporcjonalności w stanie plastycznym jest identyczna jak w stanie sprężystym;
- intensywność naprężenia σ_i jest funkcją tylko i wyłącznie intensywności odkształcenia plastycznego φ_i , przy czym zależność tą (5.47) ustala się na podstawie badań doświadczalnych.

$$\sigma_i = f(\varphi_i) , \quad (5.47)$$

gdzie: odkształcenie φ_i oblicza się tak samo jak odkształcenie ε_H (2.21).

Na podstawie wymienionych postulatów zbudowane zostały równania fizyczne wiążące składowe odkształcenia ze składowymi naprężeniami, mianowicie [5, 24, 45]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_m}{\varphi_1 - \varphi_m} = \frac{\sigma_2 - \sigma_m}{\varphi_2 - \varphi_m} = \frac{\sigma_3 - \sigma_m}{\varphi_3 - \varphi_m} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varphi_i} . \quad (5.48)$$

Powyższa zależność nazywana jest **przyrostowym prawem płynięcia sprężysto-plastycznego**. Dodatkowo na podstawie przytoczonych postulatów, można sformułować **prawo zmiany objętości**, które jest wyrażone w następującej postaci [5]:

$$\sigma_m = 3 \cdot K \cdot \varphi_m , \quad (5.49)$$

gdzie: K – moduł ściśliwości (3.7).

Jednocześnie należy podkreślić, że w zakresie odkształceń plastycznych zamiast prawa zmiany objętości obowiązuje warunek nieściśliwości. Wyrażony jest on równaniem (2.19), z którego wynika, że wartość odkształcenia średniego φ_m jest równa zero.

5.4.2. Wybrane teorie plastycznego płynięcia

Teoria plastycznego płynięcia obejmuje ogół praw określających związki zachodzące pomiędzy naprężeniem σ a przyrostem odkształcenia plastycznego $d\varphi$. Często w rozważaniach zamiast wspomnianych przyrostów $d\varphi$ rozpatruje się prędkość odkształcenia $\dot{\varphi}$, wyrażoną jako pochodną odkształcenia względem czasu $d\varphi/dt$. Takie rozwiązanie znacznie ułatwia zapis oraz operacje matematyczne, jednocześnie nie zmieniając znaczenia związków fizycznych [5, 14, 24, 45, 59, 71, 73].

Prawa te są formułowane na podstawie założeń, które następnie są poddawane weryfikacji doświadczalnej. Podstawowym założeniem teorii plastycznego płynięcia jest istnienie pewnej funkcji stanu naprężenia $\Phi(\sigma)$, którą nazywa się **potencjałem plastycznym** [5]. Pojęcie to po raz pierwszy pojawiło się w pracach R. von Misesa, które dotyczyły zagadnień ośrodka idealnie plastycznego (rys. 5.3d).

Potencjał $\Phi(\sigma)$ jest taką funkcją naprężenia, której pochodne cząstkowe względem poszczególnych składowych stanu naprężenia tworzą następujące związki [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi_1 = d\lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_1} , \\ d\varphi_2 = d\lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_2} , \\ d\varphi_3 = d\lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_3} , \end{array} \right. \quad (5.50)$$

natomiast, po podzieleniu obydwu stron równań (5.50) przez przyrost czasu dt , uzyska się następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_1} , \\ \dot{\varphi}_2 = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_2} , \\ \dot{\varphi}_3 = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_3} , \end{array} \right. \quad (5.51)$$

gdzie: $\dot{\varphi}$ – prędkości odkształcenia, λ – skalarny mnożnik, zależny od energii odkształcenia plastycznego; wartość tego parametru jest stała w danej chwili t i tylko w danym punkcie ośrodka ciągłego.

W przypadku ogólnym zakłada się, że potencjał plastyczny $\Phi(\sigma)$ jest dowolną funkcją niezmienników stanu naprężenia. Jeśli dodatkowo przyjmie się, że funkcja ta spełnia następujący warunek $\Phi(\sigma) = const.$, to potencjał plastyczny można przedstawić geometrycznie jako powierzchnię w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń. Te cechy sprawiają, że omawiana funkcja często jest utożsamiana z powierzchnią plastyczności $f(\sigma)$, którą *de facto* jest warunek plastyczności. W takiej sytuacji – tj. gdy $\Phi(\sigma) = f(\sigma)$ – zależności (5.50) i (5.51) przedstawiają związek fizyczny nazywany **stowarzyszonym prawem płynięcia** z warunkiem plastyczności. Oczywiście postać omówionych związków jest ogólna, jednakże stanowi punkt wyjścia do opracowania konkretnego opisu mechaniki plastycznego płynięcia [5, 58, 59]. Poniżej zostaną przybliżone szczególne rozwiązania wybranych praw plastycznego płynięcia metali.

Teoria plastycznego płynięcia Sant Venanta - Lèvy’ego - Misesa

Omawiana teoria plastycznego płynięcia została zaproponowana przez M. Lèvy’ego oraz B. de Sant Venanta w roku 1870. Bazowała na modelu ośrodka idealnie plastycznego (rys. 5.3d) i dotyczyła tylko zagadnień płaskich. Dopiero R. von Mises rozwinął ją dla ogólnego stanu naprężenia.

Dla zbudowania związków fizycznych dla danej teorii plastycznego płynięcia zostały przyjęte następujące postulaty [5, 71]:

- materiał znajdujący się w stanie kształtowania plastycznego jest nieściśliwy – co oznacza, że zarówno wartość przyrostu odkształcenia średniego $d\varphi_m$ jak i jego prędkość $\dot{\varphi}_m$ jest równa zero;
- kierunki głównych naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ oraz kierunki przyrostów głównych odkształceń plastycznych $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3$ (również dotyczy to ich prędkości) pokrywają się;
- intensywność naprężenia stycznego τ_i jest niezmienna, gdy ośrodek znajduje się w stanie płynięcia plastycznego, a jego wartość wynosi:

$$\tau_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_p, \quad (5.52)$$

gdzie: σ_p jest granicą plastyczności wyznaczoną w próbie jednoosiowego rozciągania próbki walcowej.

Przedstawmy teraz stowarzyszone prawo płynięcia z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa, które w całości jest zgodne z wyżej przedstawionymi hipotezami. W tym celu rozwińmy związki (5.50), podstawiając za funkcję $\Phi(\sigma)$ równanie (4.27) reprezentujące powierzchnię plastyczności. W rezultacie uzyskujemy następujący związek fizyczny [5, 71]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_m}{d\varphi_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_m}{d\varphi_2} = \frac{\sigma_3 - \sigma_m}{d\varphi_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_p}{d\varphi_i}, \quad (5.53)$$

gdzie: σ_m – naprężenie średnie, σ_p – granica plastyczności (wartość stała), $d\varphi_i$ – przyrost intensywności odkształcenia plastycznego, którego wartość można wyznaczyć na podstawie wzoru (2.27). W praktyce często używa się stowarzyszonego prawa płynięcia (5.53) w formie ujmującej prędkości odkształcenia, mianowicie:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_m}{\dot{\varphi}_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_m}{\dot{\varphi}_2} = \frac{\sigma_3 - \sigma_m}{\dot{\varphi}_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_p}{\dot{\varphi}_i}. \quad (5.54)$$

Powyższe związki fizyczne są również słuszne dla modelu materiału podlegającego umocnieniu izotropowemu. Różnica tkwi jedynie w formie wyrażania wartości granicy plastyczności σ_p . W modelu idealnie plastycznym, po osiągnięciu granicy plastyczności dalsze odkształcanie nie powoduje zmiany wartości σ_p . Natomiast, gdy materiał umacnia się izotropowo, wartość σ_p zmienia się zgodnie z funkcją o postaci $\sigma_p = f(\varphi)$. W takim przypadku, stowarzyszone prawo płynięcia (5.53) przyjmuje formę:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_m}{d\varphi_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_m}{d\varphi_2} = \frac{\sigma_3 - \sigma_m}{d\varphi_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_p(\varphi)}{d\varphi_i}. \quad (5.55)$$

Obecnie, przedstawione prawo plastycznego płynięcia jest podstawowym i najczęściej używanym w teorii plastyczności. Przy czym, jest ono stosowane

dla modeli sztywno-plastycznych, które uwzględniają tylko odkształcenia o charakterze plastycznym.

Teoria plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa

Teoria plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa została opracowana z myślą o materiałach, które można zamodelować jako sprężysto-idealnie plastyczne (rys. 5.2c). Pierwsze związki fizyczne dotyczące zagadnień płaskich zostały sformułowane przez L. Prandtla⁸ w roku 1924, natomiast sześć lat później zostały one rozszerzone na ogólny stan naprężenia przez A. Reussa [71].

Punktem wyjścia do opracowania tej teorii było założenie, że zarówno odkształcenia sprężyste jak i plastyczne są jednakowo istotne. Przy czym, materiał nieuplastyczniony podlega prawom Hooke’a, natomiast w momencie osiągnięcia granicy plastyczności obowiązują prawa plastycznego płynięcia. Powoduje to, że równania teorii Prandtla-Reussa są bardziej złożone niż związki fizyczne Saint Venanta-Lévy’ego-Missesa. Jednakże opisują one dokładniej proces płynięcia plastycznego. Równania o których jest mowa nazywane są **przyrostowym prawem płynięcia sprężysto-plastycznego Prandtla-Reussa**. Poniżej zostanie przedstawiona ogólna postać tych związków, które uwzględniają warunek plastyczności Hubera-Missesa, mianowicie [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_1 + d\varphi_1 - d\varepsilon_m = \frac{1}{2G}(\sigma_1 - \sigma_m) + \frac{3 \cdot dw}{2 \cdot \sigma_p}(\sigma_1 - \sigma_m) \\ d\varepsilon_2 + d\varphi_2 - d\varepsilon_m = \frac{1}{2G}(\sigma_2 - \sigma_m) + \frac{3 \cdot dw}{2 \cdot \sigma_p}(\sigma_2 - \sigma_m) \\ d\varepsilon_3 + d\varphi_3 - d\varepsilon_m = \frac{1}{2G}(\sigma_3 - \sigma_m) + \frac{3 \cdot dw}{2 \cdot \sigma_p}(\sigma_3 - \sigma_m) \end{array} \right. \quad (5.56)$$

gdzie: $d\varepsilon$ – przyrost odkształcenia sprężystego, $d\varphi$ – przyrost odkształcenia trwałego, dw – przyrost właściwej energii postaciowego odkształcenia plastycznego, G – moduł Kirchhoffa. Na zakończenie należy wspomnieć, że prawo plastycznego płynięcia (5.53) jest przypadkiem szczególnym związków fizycznych (5.56).

5.5. Praca odkształcenia plastycznego

Celem wyznaczenia pracy odkształcenia plastycznego rozpatrzmy proces jednoosiowego rozciągania pręta o długości l oraz o przekroju kołowym rów-

⁸ **Ludwig Prandtl** (1870-1953), profesor i doświadczony inżynier. Był asystentem i współpracownikiem A. Föppl’a (1854-1924), który z kolei był kontynuatorem prac J. Bauschingera. Wychowankami L. Prandtl’a byli m.in.: Th. Von Kármán, S.P. Timoshenko, A. Nádai oraz W. Prager.

nym S . Na przekrój ten działa naprężenie główne σ spełniające warunek plastyczności. Jeżeli pod wpływem działania obciążenia pręt ten dozna trwałego wydłużenia o wartości dl , to przyrost pracy odkształcenia plastycznego wyniesie [45, 59, 71]:

$$dW_p = \sigma \cdot S \cdot dl \quad , \quad (5.57)$$

gdzie: iloczyn $\sigma \cdot S$ wyraża wartość siły osiowej powodującej odkształcenie trwałe pręta.

Wiedząc, że objętość pręta wynosi $V = S \cdot l$ oraz, że naprężenie główne spełnia warunek plastyczności – czyli $\sigma = \sigma_p$, zależność (5.57) można przekształcić do postaci (5.58). Jednocześnie należy pamiętać, że wartość objętości V jest niezmienna (zgodnie z prawem plastycznego płynięcia).

$$dW_p = V \cdot \sigma_p \cdot \frac{dl}{l} \quad , \quad (5.58)$$

gdzie: σ_p – naprężenie uplastyczniające.

Z kolei biorąc po uwagę, że pręt o długości początkowej l_0 odkształci się trwale osiągając długość l_1 , całkowita praca odkształcenia plastycznego W_p wyniesie:

$$W_p = V \cdot \sigma_p \cdot \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} \quad , \quad (5.59)$$

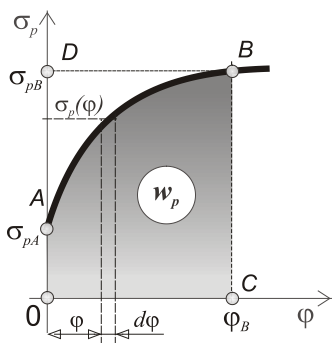
gdzie: całka po prawej stronie zależności wyraża całkowite odkształcenie logarytmiczne φ . Załóżmy, że w przypadku ogólnym granica plastyczności σ_p jest funkcją odkształcenia plastycznego – co jest zgodne z wcześniej przedstawionymi hipotezami umocnienia. Zatem całkowita **praca odkształcenia plastycznego** jest wyznaczana z poniższego wzoru:

$$W_p = V \cdot \int_0^{\varphi} \sigma_p(\varphi) \cdot d\varphi \quad , \quad (5.60)$$

a w przypadku, kiedy odkształcenie jest niejednorodne w objętości ośrodka ciągłego, pracę W_p oblicza się korzystając z zależności:

$$W_p = \int_0^V \int_0^{\varphi} \sigma_p(\varphi) \cdot d\varphi \cdot dV \quad . \quad (5.61)$$

Zgodnie z uprzednio przyjętym założeniem, że naprężenie uplastyczniające σ_p jest znaną funkcją odkształcenia φ , całka w zależności (5.60) przedstawia na



Rys. 5.16. Graficzna interpretacja pracy odkształcenia plastycznego (opis w tekście)

wykresie umocnienia (rys. 5.16) pole figury ograniczonej krzywą płynięcia AB . Pole to (tj. obszar figury $0ABC$) wyraża **właściwą pracę odkształcenia w_p** – czyli pracę potrzebną do odkształcenia trwałego ośrodka ciągłego o objętości jednostkowej [45, 71].

Jednak nie zawsze jest znane równanie krzywej umocnienia $\sigma_p(\varphi)$, a charakterystyka wzmocnienia materiału jest podana w postaci wykresu lub tabeli. Dla ułatwienia obliczeń wprowadza się pojęcie **współczynnika wypełnienia wykresu ξ** (5.62), który jest zdefiniowany jako stosunek pola zawartego pod krzywą umocnienia (pole zaznaczone na rys. 5.16) do pola prostokąta opisanego na tej krzywej o bokach σ_{pB} i φ_B [14, 45].

$$\xi = \frac{\text{pole figury } 0ABC}{\text{pole prostokąta } 0DBC} = \frac{\int_0^{\varphi_B} \sigma_p(\varphi) \cdot d\varphi}{\sigma_{pB} \cdot \varphi_B}, \quad (5.62)$$

gdzie: oznaczenia zgodne z rys. 5.16.

Po wprowadzeniu oznaczenia (5.62) do zależności (5.60), przyjmuje ona postać ostateczną:

$$W_p = V \cdot \xi \cdot \sigma_p \cdot \varphi, \quad (5.63)$$

Przy czym wartości ξ i σ_p można odczytać ze specjalnie przygotowanego wykresu umocnienia lub tabeli dla danej wartości odkształcenia φ .

6. TARCIE W OBRÓBCE PLASTYCZNEJ

Tarcie odgrywa bardzo ważną rolę w przypadku procesów obróbki plastycznej. W szczególności spostrzeżenie to dotyczy tzw. **tarcia zewnętrznego**, występującego między metalem odkształcanym plastycznie a narzędziem. Tarcie to wywiera istotny wpływ na przebieg kształtowania plastycznego, a w efekcie również na własności użytkowe wyrobu i trwałość narzędzi. Siły tarcia oddziałują na rozkład naprężeń i odkształceń w materiale kształtowanym w szczególności w warstwach wierzchnich (przylegających do powierzchni, na które działają narzędzia). W efekcie pola naprężeń i odkształceń nie są jednorodne, co powoduje niejednorodność własności wyrobu kształtowanego.

Tarcie występujące w procesach obróbki plastycznej metali, w sposób zasadniczy różni się od tarcia istniejącego w węzłach mechanizmów, głównie ze względu na występowanie:

- dużych nacisków powierzchniowych (przekraczających granicę plastyczności jednego z metali pary trącej);
- dużych odkształceń plastycznych ciała kształtowanego;
- zmian kształtu i wielkości powierzchni trących;
- małych prędkości poślizgów na powierzchni stryku;
- wysokiej temperatury i związanych z nią tlenków (w przypadku obróbki plastycznej na gorąco).

W przeważającej części procesów obróbki plastycznej tarcie jest zjawiskiem niekorzystnym, gdyż prowadzi ono do [20, 21]:

- zużywania się narzędzi;
- zwiększenia nacisków na powierzchni styku materiał-narzędzie, prowadzącego do wzrostu energochłonności procesu kształtowania;
- nierównomiernego płynięcia metalu, powodującego niejednorodności odkształceń w objętości wyrobu kształtowanego;
- tworzenia narostów i pogorszenia jakości powierzchni wyrobu.

Jednakże w przypadku niektórych procesów obróbki plastycznej tarcie jest nie tylko korzystne, ale wręcz niezbędne do ich realizacji. W tabeli 6.1 zilustrowano wpływ oddziaływania sił tarcia w głównych procesach kształtowania plastycznego.

Tabela 6.1.

Wpływ tarcia na przebieg realizacji głównych procesów obróbki plastycznej metali

Nazwa	Oddziaływanie sił tarcia	
	Dodatnie (+)	Ujemne (-)
Tłoczenie w temperaturze otoczenia	Zmniejszenie naprężeń rozciągających w dnie wytłoczki, następujące w wyniku tarcia między stemplem a metalem. W efekcie zmniejsza się prawdopodobieństwo zerwania dna wytłoczki.	Nierównomierność odkształcenia (może prowadzić do zerwania dna), występowanie naprężeń własnych (mogą być przyczyną pęknięć), uszkodzenia powierzchni wytłoczek, zużycie narzędzi, wzrost sił kształtowania i straty energii.
Ciągnięcie drutów w temperaturze otoczenia	---	Nierównomierność odkształceń, pogorszenie powierzchni wyrobu, ciepło generowane przez tarcie może powodować zmiany strukturalne w metalu, straty energii, zużycie narzędzi.
Wyciskanie, na ogół w temperaturze otoczenia	---	Nierównomierność odkształceń mogąca doprowadzić do powstawania pęknięć wewnętrznych, uszkodzenie powierzchni wyrobu, zużycie narzędzi, wzrost sił kształtowania i straty energii.
Kucie matrycowe na gorąco	Tarcie w rowku wypływki (szczególnie w obszarze mostka) ułatwia wypełnienie wykroju przez metal.	Nierównomierność odkształceń, zużycie narzędzi, wzrost sił kucia, straty energii.
Walcowanie	Wciąganie metalu pomiędzy walce, umożliwiające realizację walcowania.	Nierównomierność odkształceń, uszkodzenie powierzchni wyrobu, zużycie walców, wzrost energii.

6.1. Modele tarcia stosowane w analizie procesów obróbki plastycznej

Ze względu na złożoność zagadnienia niemożliwe jest jednoznaczne opisanie tarcia w procesach obróbki plastycznej. Wciąż trwają poszukiwania coraz dokładniejszych modeli matematycznych opisujących tarcie, które zależne jest od szeregu parametrów, takich jak [64]:

- **material** (gatunek, kształt, topografia powierzchni, temperatura),
- **narzędzia** (gatunek, kształt, topografia powierzchni, sposób obróbki),
- **smar** (skład chemiczny, grubość warstwy, lepkość, odporność na ścieranie),

- **parametry procesu** (naciski normalne, zmiana powierzchni kontaktu i jej wielkość w trakcie kształtowania, prędkość poślizgu),
- **otoczenie** (wilgotność, zakurzenie, temperatura, zanieczyszczenia).

Poniżej opisuje się główne modele tarcia, wykorzystywane obecnie w analizie procesów obróbki plastycznej metali.

6.1.1. Model Amontonsa oraz Coulomba

Sformułowany został w XVII wieku przez francuskiego badacza G. Amontonsa, według którego siła tarcia T jest proporcjonalna do siły normalnej (nacisku) N i nie zależy od powierzchni styku ciał trących. Model ten opisuje następujące równanie [20, 21]:

$$T = \mu N, \quad (6.1)$$

gdzie: μ – współczynnik tarcia.

Z kolei, w XVIII wieku C. A. de Coulomb rozszerzył prawo tarcia opracowane przez G. Amontonsa. Stwierdził on, że z chwilą wprowadzenia ciała w ruch siła tarcia zależy od obciążenia normalnego i sił międzycząsteczkowych, a nie zależy od prędkości. Do określania sił tarcia C. A. de Coulomb zaproponował stosować zależność

$$T = \mu N + A, \quad (6.2)$$

gdzie: A – siły międzycząsteczkowe.

Należy zauważyć, że siły międzycząsteczkowe są bardzo małe w porównaniu do składowej μN . Zatem w obliczeniach ze względów praktycznych zwykle przyjmuje się $A = 0$, co sprowadza zależność C. A. de Coulomba do postaci proponowanej przez G. Amontonsa. Z tego powodu często w literaturze specjalistycznej prawo tarcia opracowane przez G. Amontonsa podawane jest jako **prawo (model) tarcia Coulomba**.

Odnosząc do powierzchni na jaką działają siły prawo (model) tarcia Amontonsa można przedstawić w ujęciu naprężeniowym jako:

$$\tau = \mu p_n, \quad (6.3)$$

gdzie: τ – naprężenie styczne na powierzchni styku, p_n – nacisk normalny.

6.1.2. Model tarcia stałego

W tym modelu (z ang. *law of constant friction*) naprężenie styczne τ na powierzchni styku uzależnione jest od granicy plastyczności materiału przy czystym ścinaniu k według zależności

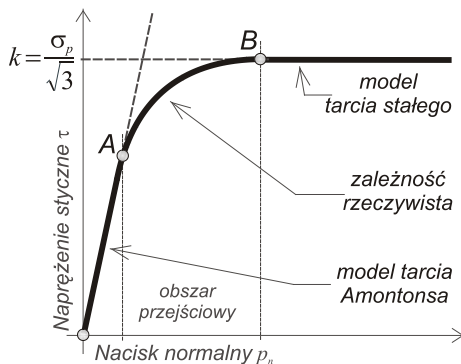
$$\tau = m k, \quad (6.4)$$

gdzie: m – czynnik tarcia na powierzchni styku (nazywany czasami współczynnikiem szorstkości narzędzi) przyjmujący wartości w zakresie $0 \leq m \leq 1$.

Z równania (6.4) wynika iż naprężenie τ nie jest zależne od stanu naprężeń lecz od własności metalu. Wartość czynnika tarcia określa jakość połączenia tarcowego i wskazuje na ile wartość τ różni się od granicy plastyczności przy czystym ścinaniu k .

6.1.3. Zmodyfikowane modele tarcia

Model tarcia Amontonsa zaleca się stosować w analizie procesów kształtowania na zimno oraz przypadków, w których występują stosunkowo małe siły tarcia. Natomiast model tarcia stałego dobrze spisuje się w analizie procesów obróbki plastycznej na gorąco. Czasami w obliczeniach łączy się oba modele, tzn. w zakresie małych nacisków normalnych ($p_n/\sigma_p < 1,5$) stosuje się model tarcia Amontonsa, natomiast przy większych naciskach wykorzystuje się prawo tarcia stałego – rys. 6.1.



Rys. 6.1. Zależność naprężenia stycznego τ od nacisku powierzchniowego p_n

Często w obliczeniach numerycznych, w szczególnie opartych na metodzie elementów skończonych, stosuje się **zmodyfikowane modele tarcia** [20 ÷ 22]. W takim przypadku wzory (6.3) oraz (6.4) przyjmują postać:

$$\tau = \mu p_n \cdot \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{v_r}{\alpha}\right) \cdot \frac{v_r}{|v_r|}, \quad (6.5)$$

oraz

$$\tau = m k \cdot \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{v_r}{\alpha}\right) \cdot \frac{v_r}{|v_r|}, \quad (6.6)$$

gdzie: v_r – względna prędkość poślizgu, α – współczynnik dobierany arbitralnie z przedziału 0,001÷0,01 [20].

6.2. Metody wykorzystywane do oceny tarcia

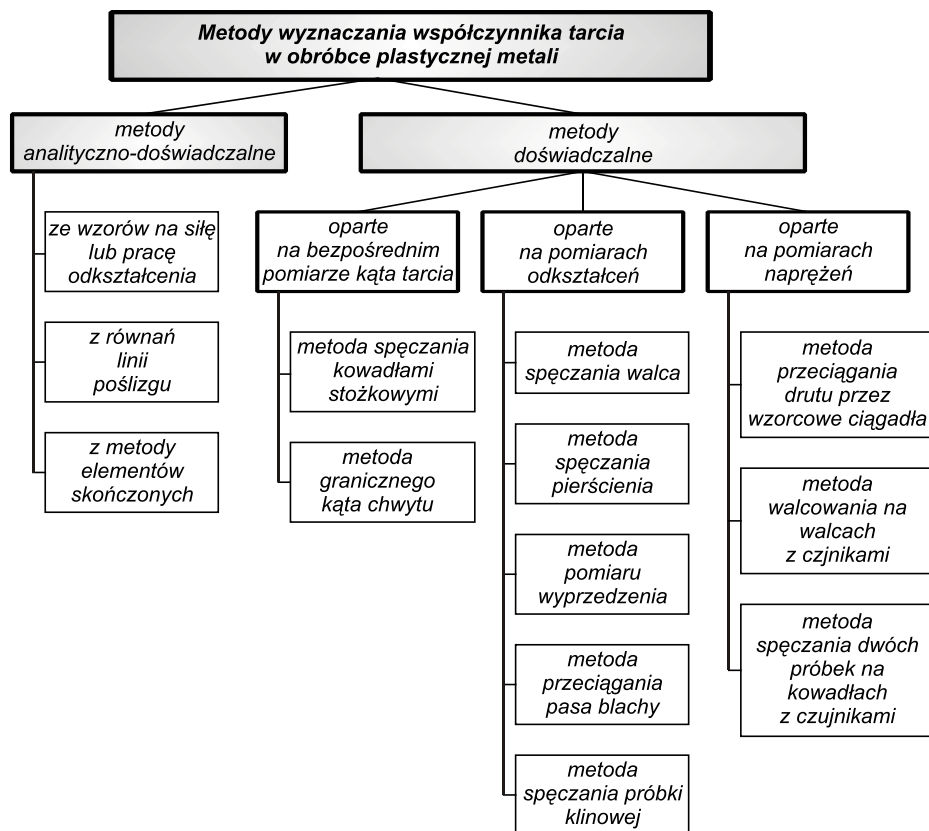
Duży udział sił tarcia w procesach kształtowania plastycznego metali wymaga opisu tego zjawiska zarówno w sensie jakościowym, jak i ilościowym. W tym celu najczęściej wykorzystuje się równania (6.3) i (6.4), których właściwe zastosowanie wymaga znajomości współczynnika tarcia μ lub czynnika tarcia m .

Wartości tych parametrów dla poszczególnych par trących wyznacza się na podstawie badań doświadczalnych.

Istnieje wiele metod służących do określania oporów tarcia, które można podzielić na dwie grupy zasadnicze (rys. 6.2):

- metody analityczno-doświadczalne,
- metody doświadczalne.

W metodach analityczno-doświadczalnych wartość współczynnika (czynnika) tarcia wyznacza się z zależności określających siłę lub pracę odkształcenia plastycznego w badanym procesie technologicznym obróbki plastycznej. Wartość samej siły lub pracy odkształcenia plastycznego jest wyznaczana metodami doświadczalnymi. Według M. Gierzyńskiej [18] zasadniczą wadą metody anali-



Rys. 6.2. Klasyfikacja metod wyznaczania współczynnika (czynnika) tarcia w obróbce plastycznej metali

tyczno-doświadczalnej jest to, że przy wyprowadzaniu wzorów na siłę odkształcania (pracę odkształcenia) stosuje się wiele założeń upraszczających co rzutuje na wartość obliczanego w ten sposób współczynnika tarcia. Jednakże uwaga ta w znikomym stopniu dotyczy stosowania w obliczeniach metody elementów skończonych, która jest uznawana obecnie za najdokładniejszą metodę analizy procesów obróbki plastycznej metali.

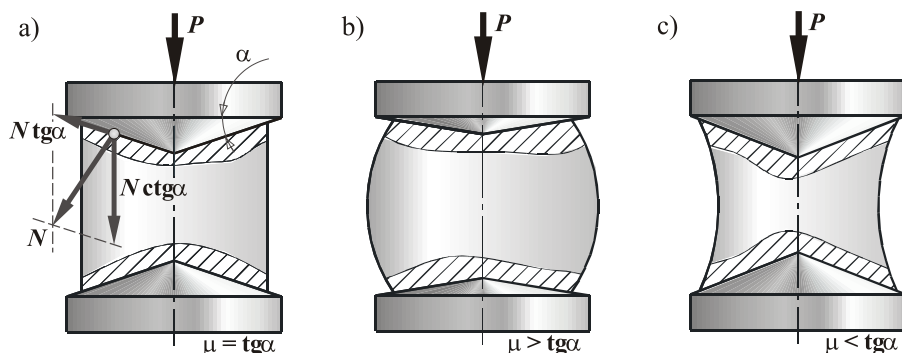
Metody doświadczalne wykorzystywane do określania współczynnika (czynnika) tarcia, w zależności od wielkości mierzonej, dzieli się na następujące podgrupy:

- metody oparte na pomiarze kąta tarcia,
- metody oparte na pomiarach odkształceń,
- metody oparte na pomiarach naprężeń stycznych i normalnych, występujących w strefie styku materiał-narzędzie.

Poniżej w sposób bardziej szczegółowy przybliżyć się częściej stosowane metody służące do oceny tarcia w obróbce plastycznej. Opis innych metod znaleźć można w literaturze specjalistycznej, np. pozycje literatury [3, 12, 18, 19, 40, 64, 67].

6.2.1. Metoda spęcznia kowadłami stożkowymi

Metoda ta, opracowana przez Siebla i Pompa [49], polega na spęczaniu próbek cylindrycznych pomiędzy kowadłami stożkowymi. Pomiar polega na takim doborze kąta stożka α (rys. 6.3) by próbka w trakcie kształtowania zachowywała kształt walca (rys. 6.3a). W tym przypadku składowa siły nacisku N zrzucony na powierzchnię stożka równoważy się z siłą tarcia T . Zatem można zapisać, że



Rys. 6.3. Wygląd próbek otrzymanych w procesach spęczania kowadłami stożkowymi (opis w tekście)

$$N \cdot \operatorname{tg} \alpha = T. \quad (6.7)$$

Przyjmując model tarcia opracowany przez Amontonsa ($T = \mu N$) uzyskuje się ostateczną zależność na współczynnik tarcia μ

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.8)$$

Jeżeli podczas spęczania próbka przyjmuje kształt beczkowaty (rys. 6.3b) to przyjęty kąt stożka α jest za mały. Natomiast, gdy kształt ten jest wklęsły (rys. 6.3c) to kąt α jest zbyt duży.

Niedogodnością omawianej metody oceny tarcia jest konieczność posiadania dużej liczby kowadeł o zróżnicowanych kątach stożków, warunkująca dokładność określania współczynnika tarcia μ .

6.2.2. Metoda granicznego kąta chwytu

Polega ona na określaniu granicznego kąta chwytu, przy którym materiał zostaje wciągnięty w szczelinę między walcami. Schemat działania sił w chwili chwytu przez walce zilustrowano na rys. 6.4. Korzystając z warunku równowagi sił można zapisać, że:

$$N \sin \alpha = T \cos \alpha. \quad (6.9)$$

Po przyjęciu równania Amontonsa (6.1) otrzymuje się wyrażenie na współczynnik tarcia μ :

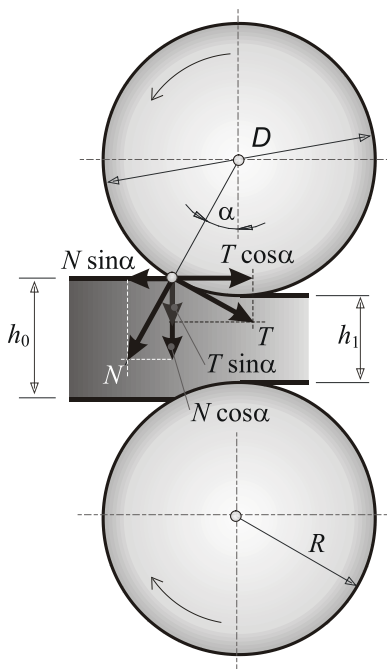
$$\mu = \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.10)$$

Wartość kąta chwytu α wyznacza się z zależności geometrycznych występujących w procesie walcowania. Z rys. 6.4 wynika, że:

$$\cos \alpha = \frac{R - \Delta h}{R} = 1 - \frac{2 \cdot \Delta h}{D}, \quad (6.11)$$

gdzie: $\Delta h = h_0 - h_1$, D – średnica walca.

Przeprowadzenie próby polega na wprowadzeniu prostopadłościenną próbki pomiędzy walce, które są tak ustawione aby chwyt metalu przez walce był niemożliwy. Następnie stopniowo podnoszony jest walec górny, aż do momentu gdy próbka uchwyciona przez walce zo-



Rys. 6.4. Schemat działania sił podczas walcowania, w momencie chwytania metalu przez walce

stanie odwalcowana. Następnie po zmierzeniu wysokości próbki po walcowaniu h_1 , uwzględnieniu jej wysokości początkowej h_0 oraz średnicy walca D , wyznacza się kąt α i w konsekwencji współczynnik tarcia μ .

6.2.3. Metoda spęczania próbki klinowej

Metoda ta opracowana przez E. Šarapina [65] polega na spęczaniu płaskownika pomiędzy kowadłami, z których jedno posiada powierzchnię nachyloną pod kątem α (rys. 6.5). W efekcie zastosowania takich narzędzi próbka jest spęczana na klin. Przed pomiarem na powierzchni bocznej próbki nanosi się pionowo równoległe rysy, które po spęczeniu ulegają zakrzywieniu w wyniku działania sił tarcia, występujących na powierzchni kontaktu materiał-narzędzie. Analizując kształt rys określa się położenie linii obojętnej A-B rozdzielającej płynięcie metalu na część „a” (przemieszczającą się na prawo) oraz „b” (płynącą na lewo) – rys. 6.5.

Z warunku równowagi sił, działających w kierunku x , na kowadło górnym (klinowym) można zapisać następującą zależność:

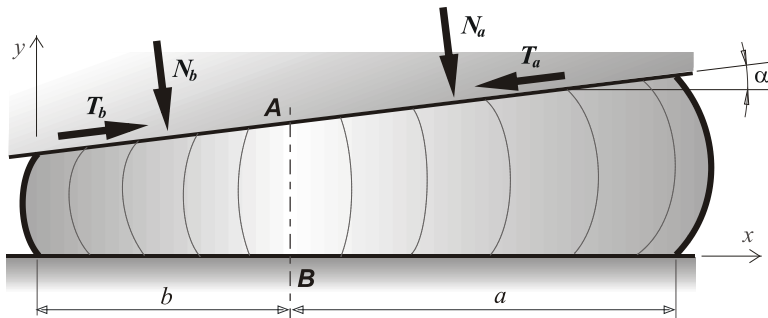
$$N_a \sin \alpha + N_b \sin \alpha + T_b \cos \alpha - T_a \cos \alpha = 0. \quad (6.12)$$

Zakładając, że średni nacisk powierzchniowy na powierzchni styku wynosi p_n zapisuje się następujące zależności na siły normalne:

$$\left. \begin{aligned} N_a &= p_n a l \\ N_b &= p_n b l \end{aligned} \right\}, \quad (6.13)$$

gdzie: a , b – wymiary szerokościowe zgodne z rys. 6.5, l – długość próbki w kierunku prostopadłym do płaszczyzny xy (długość ta powinna być znaczna, tak by w próbce wystąpił płaski stan odkształcenia).

Natomiast siły tarcia (styczne) T_a i T_b oblicza się korzystając z zależności Amontonsa (6.1). Zatem:



Rys. 6.5. Schemat działania sił w procesie spęczania próbki klinowej (opis w tekście)

$$\left. \begin{aligned} T_a &= N_a \mu \\ T_b &= N_b \mu \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Po podstawieniu wyrażeń (6.13) i (6.14) do równania (6.12) otrzymuje się warunek

$$p_n a l \sin \alpha + p_n b l \sin \alpha + \mu p_n b l \cos \alpha - \mu p_n a l \cos \alpha = 0, \quad (6.15)$$

z którego ostatecznie wyznacza się wartość współczynnika tarcia μ

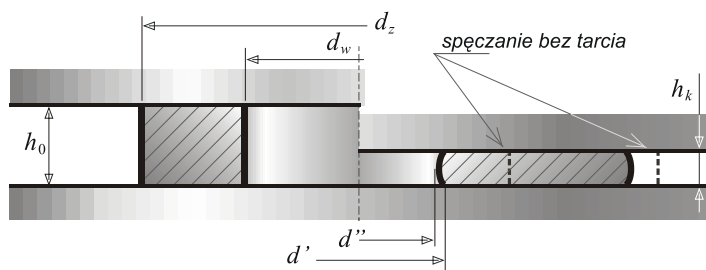
$$\mu = \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.16)$$

Według autorów pracy [65] dobre rezultaty uzyskuje się przyjmując kąt $\alpha=3,5^\circ$ oraz stopnie zgniotu: $8\pm 15\%$ dla ołowiu i aluminium oraz $33\pm 35\%$ dla miedzi.

6.2.4. Metoda spęczania pierścienia

Metoda ta opracowana przez M. Burgdorfa [9], polegająca na spęczaniu próbki w kształcie pierścienia między równoległymi kowadłami płaskimi, jest obecnie najczęściej stosowaną próbą oceny warunków tarcia. W badaniach stosuje się zwykle próbki, których wymiary (rys. 6.6) spełniają zależność $d_z:d_w:h_0=6:3:2$. Spęcznie prowadzi się na ogół do momentu, w którym wysokość próbki zmniejszy się o połowę.

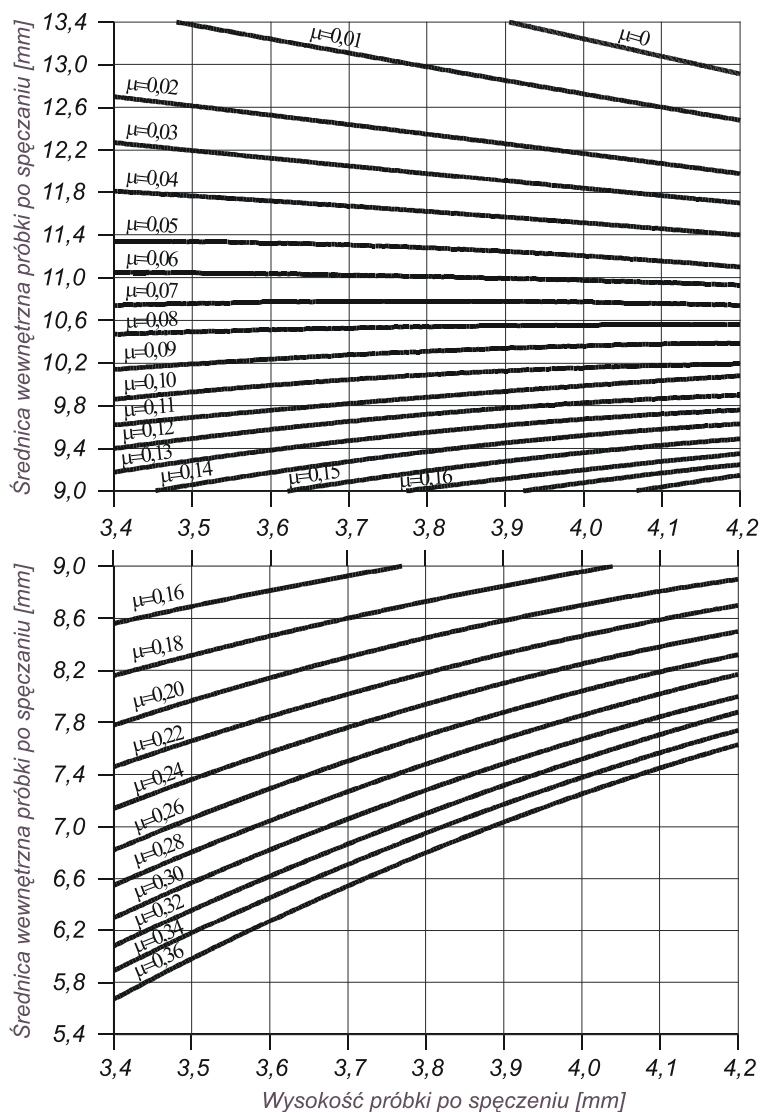
Szerokie zastosowanie metoda spęczania pierścienia zawdzięcza temu, że współczynnik tarcia wyznaczany jest tylko na podstawie wymiarów odkształcanej próbki. Nie ma konieczności pomiaru sił oraz nie jest wymagana znajomość własności mechanicznych odkształcanego metalu, co przekłada się na prostotę wykonywanych prac badawczych. Określenie współczynnika tarcia jest efektem ścisłej zależności między oporami tarcia i kształtem próbki. W wyniku oddziaływania sił tarcia ograniczone jest swobodne płynięcie metalu w kierunku



Rys. 6.6. Schemat procesu spęczania próbki pierścieniowej (opis w tekście)

zewnątrznym, przez co średnice próbki (zewnątrzna i wewnętrzną) są mniejsze niż podczas spęczania bez tarcia (rys. 6.6).

Do określania współczynnika (czynnika) tarcia wykorzystuje się krzywe kalibracji (nomogramy), które przedstawiają zależność średnicy wewnętrznej od



Rys. 6.7. Przykładowe krzywe kalibracji opracowane przez M. Burgdorfa (opis w tekście)

wysokości próbki po spęczeniu oraz wartości μ lub m . Na rys. 6.7 przedstawiono nomogramy opracowane przez M. Burgdorfa, dotyczące spęczania próbek o wymiarach początkowych: $d_z = 20$ mm, $d_w = 10$ mm oraz $h = 7$ mm.

Dokładność wyznaczenia wartości współczynnika tarcia w oparciu o krzywe kalibracji wiąże się z dokładnością określenia średnicy wewnętrznej pierścienia. Jak widać z rysunku 6.6 powierzchnia wewnętrzna pierścienia jest beczkowata. Dlatego też wyznacza się jej średnicę zastępczą d , korzystając z zależności

$$d = \frac{d' + 2d''}{3}, \quad (6.17)$$

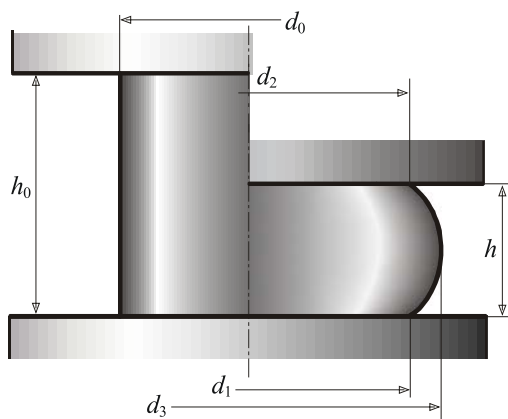
gdzie: d' – minimalna średnica wewnętrzna, d'' – średnica wewnętrzna przy kowadłach (rys. 6.6).

Trudności z dokładnym określeniem średnicy wewnętrznej związane są również z anizotropią własności metalu spęczanego. W takiej sytuacji próbka po odkształceniu przyjmuje kształt owalny lub nieregularny. W takich przypadkach należy przeprowadzić pomiary średnicy wewnętrznej w kilku płaszczyznach i uśrednić wyniki. Innym sposobem jest splanimetrowanie powierzchni wewnętrznej otworu i na tej podstawie wyznaczenie jego średnicy.

6.2.5. Metoda spęczania walca

Metoda ta, przedstawiona w opracowaniu [22], bazuje na rezultatach spęczania próbki walcowej między kowadłami płaskimi (rys. 6.8). Wartość μ lub m wyznacza się w drodze porównania wymiarów (średnic) próbki zmierzonych

z obliczonymi numerycznie MES. Obliczenia wykonuje się wielokrotnie dokonując zamiany warunków tarcia. Ostatecznie wybiera się te wartości μ lub m , dla których różnice między wartościami zmierzonymi i obliczonymi są minimalne. Prostota przeprowadzenia próby sprawia, że może ona być wykonana w warunkach przemysłowych. Tym samym uzyskuje się możliwość wyznaczenia współczynnika (czynnika) tarcia w rzeczywistych procesach, realizowanych w określonym zakła-



Rys. 6.8. Schemat spęczania próbki walcowej
(opis w tekście)

dzie przemysłowym. Za dodatkową zaletę omawianej metody wyznaczania współczynnika μ (czynnika m) uznaje się wykorzystanie MES. Umożliwia to uwzględnienie w obliczeniach szeregu zjawisk takich jak: wymiana ciepła pomiędzy próbką a narzędziem, zmienności prędkości odkształcenia, niejednorodności rozkładu odkształceń i naprężeń itp.

6.3. Wartości współczynnika i czynnika tarcia w typowych procesach obróbki plastycznej

Do regulowania wielkości tarcia w obróbce plastycznej stosuje się różnego rodzaju smary (substancje płynne, maziste, stałe i gazowe), które wprowadzone między materiał i narzędzie zmniejszają opory tarcia. Od rodzaju smarowania zależą siły kształtowania, żywotność narzędzi oraz stan powierzchni wyrobu. Smary powinny posiadać następujące cechy:

- zmniejszać tarcie na powierzchni styku materiał-narzędzie;
- spełniać funkcję czynnika rozdzielającego, przeciwdziałającego kontaktowi metalu z narzędziem;
- posiadać dobre własności izolujące (jest to istotne podczas obróbki plastycznej na gorąco, gdzie występuje intensywna wymiana ciepła między odkształcanym metalem i narzędziami);
- być obojętne chemicznie w stosunku do kształtowanego metalu i narzędzi (w zakresie temperatur procesu);
- nie zawierać cząstek ściernych i redukować zużycie powierzchni narzędzi i odkształcanego metalu;
- nie zawierać substancji trujących, niebezpiecznych dla środowiska oraz nie wydzielać nieprzyjemnych zapachów;
- być proste w stosowaniu oraz łatwo-usuwalne z powierzchni narzędzi i wyrobów;
- być łatwo dostępne i tanie.

W tabeli 6.2 zestawiono wartości współczynnika μ i czynnika tarcia m dla podstawowych procesów obróbki plastycznej metali, realizowanych z wykorzystaniem różnych środków smarnych. Zestawienie to wykonane zostało na podstawie opracowań [40, 55]. Użyte w tej tabeli symbole oznaczają:

- EP – dodatki wysokociśnieniowe zawierające siarkę, chlor i fosfor;
- MoS_2 – dwusiarczek molibdenu;
- P – przywieranie materiału odkształcanego do narzędzi

W przypadku, gdy dla danej pary trącej podana jest wartość tylko jednego z parametrów opisujących tarcie (μ lub m) wartość drugiego z nich można szacować korzystając z zależności:

$$m = 2\mu . \quad (6.18)$$

6. Tarcie w obróbce plastycznej

Tabela 6.2.

Wartości współczynnika μ i czynnika tarcia m w podstawowych procesach obróbki plastycznej metali, w zależności od zastosowanego środka smarnego

Materiał	Smar	Współcz. tarcia μ	Czynnik tarcia m
-1-	-2-	-3-	-4-
CIĄGNIENIE			
stal węglowa	emulsja (olej mineralny+tłuszcze+EP)	0,07	-
	fosforanowanie+emulsje olejowe	0,10	-
	fosforanowanie+mydło	0,15	-
	mydła lub smar stały+MoS ₂	0,15	-
stal nierdzewna	szczawianowanie+mydło	0,05	-
	miedziowanie+olej mineralny	0,15	-
Al, Mg, Cu i stopy	syntetyczne oleje mineralne+tłuszcze	0,15	-
tytan i stopy	powierzchnie utleniane+olej chlorowany	0,15	-
	miedziowanie+mydło lub olej	0,10	-
KUCIE NA GORĄCO			
stal węglowa	brak smaru	P	1,0
	roztwór wodny soli NaCl (na narzędzie)	0,4	0,7
	mydło (na narzędzie)	0,3	0,5
	grafit w wodzie (na narzędzie)	0,2	0,4
stal nierdzewna i stopy Ni	grafit w wodzie (na narzędzie)	0,2	0,4
	szkło (na materiał) + grafit (na narzędzie)	0,05	-
	mydło (na narzędzie)	P	1,0
Al i Mg i ich stopy	grafit w wodzie (na narzędzie)	0,3	0,5
	mydło (na narzędzie)	0,3	0,5
Cu i stopy	grafit w wodzie (na narzędzie)	0,15	0,3
	MoS ₂ (na narzędzie)	0,2	0,5
Ti i stopy	szkło + grafit (na narzędzie)	0,05	-
KUCIE NA ZIMNO / WYCISKANIE			
stal węglowa	emulsja (olej mineralny+tłuszcz+EP)	0,2	-
	olej mineralny+grafit lub MoS ₂	0,15	-
	łój sulfonowany	0,1	-
	fosforanowanie+mydło+MoS ₂	0,05	-
stal nierdzewna i stopy Ni	olej mineralny+chlorowanie	0,2	-
	wapno+oleje	0,15	-
	miedziowanie+oleje	0,1	-
	szczawianowanie+mydło	0,05	-

-1-	-2-	-3-	-4-
KUCIE NA ZIMNO / WYCISKANIE			
Al, Mg i ich stopy	brak smaru	-	0,5
	olej mineralny+pochodne tłuszczów	0,15	-
	stearynian cynku	0,1	-
	lanolina; warstwa suchego mydła	0,07	-
	fosforanowanie+mydło	0,05	-
Cu i stopy	roztwory mydła	0,1	-
	emulsja (olej mineralny+tłuszcze)	0,1	-
	grafit lub MoS ₂ + smar stały	0,07	-
	stearynian cynku	0,05	-
Ti i stopy	olej mineralny+chlorowanie	0,2	-
	utlenianie+smar MoS ₂	0,15	-
	warstwa Cu lub Zn + smar	0,1	-
	warstwy polimerowe	0,05	-
TŁOCZENIE I GIĘCIE			
stal węglowa	roztwory mydeł	0,15	-
	olej mineralny+tłuszcze+EP	0,15	-
	łój	0,07	-
	polietylenowe smary płynne	0,07	-
	woski	0,05	-
	fosforanowanie+mydło	0,05	-
	folie polietylenowe	0,05	-
stal nierdzewna, Ni i stopy	oleje chlorowane	0,15	-
	chloroparafina	0,07	-
	szczawianowanie+mydło	0,05	-
	folie polietylenowe	0,05	-
Al i stopy	olej mineralny+pochodne tłuszczów	0,15	-
	mydła, woski, lanolina	0,07	-
	emulsje mydlane z olejami roślinnymi	0,05	-

7. ROZDZIELANIE ODKSZTAŁCANEGO METALU

7.1. Wiadomości ogólne

W trakcie odkształcania metalu może wystąpić jego rozdzielanie na dwie lub więcej części. Odkształcenia, przy których następuje podział osiągają bardzo różne wartości, w zależności od własności materiału oraz od warunków kształtowania.

Rozdzielenie metalu może nastąpić według dwóch, zasadniczo różnych sposobów [14]:

- przez naruszenie spójności metalu w wyniku zerwania wiązań atomowych,
- na drodze odkształceń plastycznych bez naruszenia spójności materiału.

W pierwszym wymienionym wyżej przypadku, proces rozdzielania metalu nazywa się pękaniem, w efekcie którego powstaje **złom kruchy** – powierzchnię tego złomu nazywa się przełomem. Natomiast podczas rozdzielania metalu według drugiego sposobu – powstaje **złom plastyczny**.

Według innej klasyfikacji wyróżnia się dwa kolejne rodzaje złomu. Wykonane prace badawcze wykazały, że złom może powstać w dwóch różnych płaszczyznach w stosunku do kierunku działania naprężeń głównych, mianowicie w płaszczyźnie [14, 51, 52]:

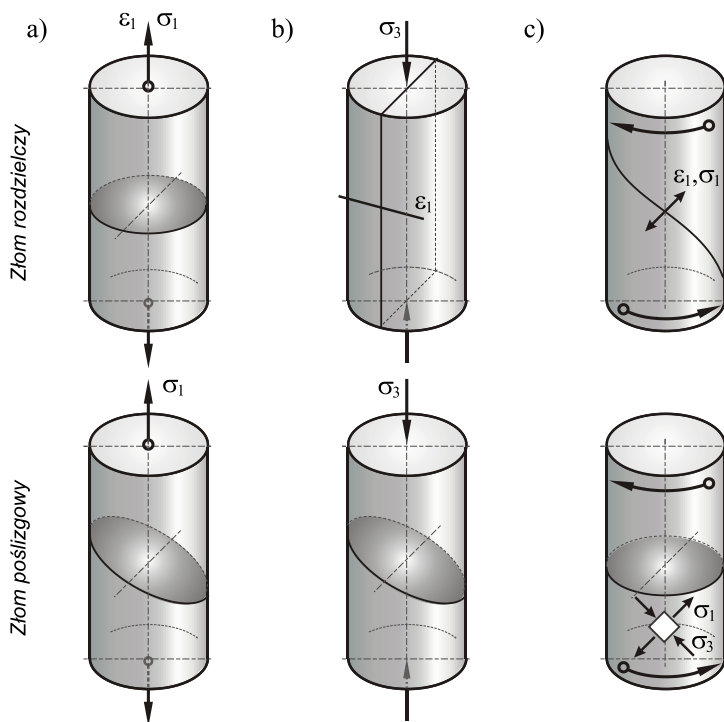
- prostopadłej do największego naprężenia głównego σ_1 – powstaje wówczas **złom rozdzielczy**;
- największych naprężeń stycznych – **złom poślizgowy**.

Na rys. 7.1 przedstawiono płaszczyzny, w których powstają wymienione złomy w procesach jednoosiowego rozciągania, jednoosiowego ściskania i skręcania.

Na uwagę zasługuje fakt, iż pękanie metali jest zawsze poprzedzone odkształceniami plastycznymi. Nawet wówczas, gdy pękanie zachodzi w zakresie odkształceń sprężystych w najbliższym sąsiedztwie przełomu występują odkształcenia plastyczne.

Analizując mechanizm rozdzielania metalu na poziomie atomowym wyodrębnia się trzy stadia jego powstawania [14, 16]:

- skupianie się swobodnych dyslokacji na przeszkodach,
- powstawanie zarodków pęknięć w postaci szczelin lub pustek,
- rozwój i łączenie się utworzonych szczelin i innych istniejących defektów aż do rozdzielania.



Rys. 7.1. Powierzchnie złomu rozdzielczego i poślizgowego w procesach:
a) jednoosiowego rozciągania, b) jednoosiowego ściskania, c) skręcania

Zaobserwowano również, że są trzy różne mechanizmy rozwoju i łączenia szczelin oraz innych defektów:

- **łupanie**, w trakcie którego następuje kolejne odsuwanie od siebie atomów leżących w dwóch płaszczyznach sąsiadujących ze sobą;
- **pękanie międzykrystaliczne**, zachodzące wzdłuż granic ziaren w sposób podobny jak łupanie;
- **przewężenie**, polegające na stopniowym powiększaniu się szczelin w efekcie odkształceń plastycznych otaczającego je metalu.

Poniżej, w dwóch podrozdziałach omówiono podstawowe sposoby rozdzielania metalu, tj. rozdzielanie kruche oraz plastyczne (wiązkie).

7.2. Złom kruchy

W przypadku gdy dowolny materiał poddany zostanie działaniu wzrastającego obciążenia, to nastąpi jego pęknięcie lub przejście w stan plastyczny. W przypadku projektowania procesów obróbki plastycznej należy tak dobierać parametry procesu by pękanie kruche nie występowało.

Pierwsze zarodki pęknięć (mikropęknięcia) powstają wskutek spiętrzenia swobodnych dyslokacji na przeszkodach, którymi są na ogół obce wtrącenia, niektóre rodzaje granic ziaren, przecięcia płaszczyzn poślizgów należących do różnych systemów itp. Wówczas, gdy przeszkody te są dostatecznie trwałe liczba skupionych na nich dyslokacji może być na tyle duża, że wytworzone wokół nich pole naprężeń doprowadza do zerwania wiązań atomowych (tworzone jest mikropęknięcie). Z punktu widzenia spójności metalu za najbardziej niebezpieczne uznaje się naprężenia rozciągające, które zwiększają odległość między atomami i powodują zerwanie wiązań atomowych. Natomiast naprężenia ściskające prowadzą do zmniejszenia odległości międzyatomowych i tym samym nie mogą doprowadzić do pęknięcia metalu. W momencie, gdy tworzone są mikropęknięcia (szczeliny) zmniejsza się poziom naprężeń własnych. Przy działaniu obciążeń zewnętrznych szczeliny mogą być stabilne lub rozrastać się. Według **teorii pęknięcia kruchego Griffitha** rozrost szczeliny następuje wtedy, gdy naprężenia rozciągające osiągną wartość krytyczną σ_{kr} (zależną od wymiaru szczeliny) określoną zależnością:

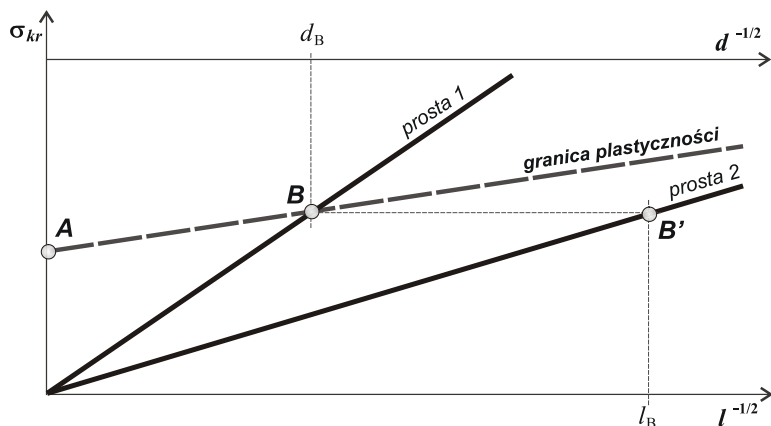
$$\sigma_{kr} = \sqrt{\frac{4E\gamma}{\pi l}}, \quad (7.1)$$

gdzie: E – moduł sprężystości wzdłużnej (moduł Younga), γ - powierzchniowa energia właściwa, l – długość szczeliny.

Teoria Griffitha odnosi się wyłącznie do ciał doskonale sprężystych. Natomiast jak stwierdzono na podstawie badań rentgenograficznych, na powierzchniach kruchych przełomów metali występuje cienka warstwa metalu podlegającego dużym odkształceniom plastycznym. Po uwzględnieniu pracy odkształcenia plastycznego w_p (przypadającego na jednostkę długości szczeliny) oraz uwzględnieniu, że $w_p \gg \gamma$ równanie (7.1) na σ_{kr} można zapisać jako:

$$\sigma_{kr} = \sqrt{\frac{4Ew_p}{\pi l}}. \quad (7.2)$$

Mechanizm łączenia się mikropęknięć w pęknięcie główne nie został dotychczas w pełni wyjaśniony. Wiadomo natomiast jest, że zwiększanie rozciągających naprężeń normalnych może prowadzić do szybkiego rozprzestrzeniania się szczelin poprzez granice ziaren, co wynika z rys. 7.2 – przedstawiającego zależność między krytycznym naprężeniem rozciągającym σ_{kr} a rozmiarem ziaren d (prosta 1) oraz długością szczelin l (prosta 2). Obszar na lewo od pro-



Rys. 7.2. Zależność między krytycznym naprężeniem rozciągającym σ_{kr} , a rozmiarem ziaren d (prosta 1) raz długością szczeliny l (prosta 2)

stej 2 jest obszarem pęknięcia kruchego, w którym mikropęknięcia powstają po przekroczeniu naprężenia uplastyczniającego określonego linią AB. W chwili powstania pęknięcia szczelina odpowiadająca rozmiarowi ziaren d_B ma długość l_B , która jest mniejsza od średnicy ziaren. Z rysunku 7.2 wynika, że metale o strukturze gruboziarnistej wykazują większą skłonność do pęknięcia kruchego (tworzone są większe szczeliny) niż metale drobnoziarniste.

Wpływ stanu naprężenia na pękanie wyraża warunek pęknięcia kruchego (4.14), który w przypadku rys. 7.2 przyjmuje następującą postać:

$$\sigma_{zr} = R_0. \quad (7.3)$$

W powyższym równaniu R_0 oznacza wytrzymałość rozdzielczą materiału zaś σ_{zr} – naprężenie zredukowane określone z hipotez wyężeniowych: największego naprężenia głównego (gdzie $\sigma_{zr} = \sigma_1$), największego wydłużenia sprężystego ($\sigma_{zr} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$).

Możliwość pęknięcia kruchego metalu można przewidywać stosując wykresy naprężeń granicznych, które omówiono w podrozdziale 5.3.

7.3. Złom plastyczny

Uniknięcie pęknięcia kruchego jest wstępnym warunkiem, jaki należy spełnić projektując proces technologiczny obróbki plastycznej metali. Jednakże w trakcie kształtowania plastycznego metalu może powstać złom plastyczny

(**pęknięcie wiązkie**), który określa granice odkształceń trwałych jakie można uzyskać w danym procesie obróbki plastycznej.

Złom plastyczny powstaje w wyniku tworzenia się szczelin i następnego przewężania materiału osnowy. Najczęściej szczeliny powstają w wyniku pęknięcia kruchych zanieczyszczeń, wtrąceń niemetalicznych, obcych faz itp. Powstaje wówczas szczelina o średnicy ziarna zanieczyszczenia. Podobną rolę odgrywają pustki i pęcherze gazowe znajdujące się wewnątrz materiału. Dalsze powiększanie się wymiarów szczelin zachodzi nie wskutek pęknięcia, lecz w wyniku odkształceń plastycznych osnowy. Materiał znajdujący się pomiędzy poszczególnymi pustkami, podlegając naprężeniom rozciągającym, przewęża się aż do rozdzielenia. Na powierzchni utworzonego w ten sposób złomu rozdzielczego występuje wiele wgłębień (kraterów) o ostrych krawędziach, na dnie których widoczne są na ogół zanieczyszczenia zapoczątkowujące proces pęknięcia. Szczeliny mogą się również łączyć w wyniku oddziaływania naprężeń stycznych, tworząc złom poślizgowy. W takim przypadku wgłębienia występujące na powierzchni złomu mają kształt wydłużony w jednym kierunku (podobnie do układu rybich łusek). Obserwując powierzchnię przełomu można na podstawie wyglądu wgłębień rozróżnić **złom plastyczny rozdzielczy** od **złomu poślizgowego**.

Kryteria powstawania pęknięć

Powstaniu złomu plastycznego towarzyszy zwiększanie się odkształceń plastycznych metalu. Zmianę energii materiału wywołaną kumulowaniem się odkształceń plastycznych prowadzących do powstania złomu można opisać za pomocą następującego wyrażenia:

$$\int_0^{\varphi^*} \Phi(\sigma) d\varphi = C, \quad (7.4)$$

gdzie: $\Phi(\sigma)$ – funkcja wyrażająca wpływ stanu naprężenia na prędkość powstawania i łączenia się szczelin, φ^* – graniczne odkształcenie pęknięcia, C – stała materiałowa wyznaczana doświadczalnie.

Poniżej wyszczególnia się ważniejsze kryteria powstawania złomu plastycznego, opracowane na podstawie zależności (7.4), różniące się przyjętą funkcją $\Phi(\sigma)$. Są to:

- kryterium Freudenthala [15]

$$\int_0^{\varphi^*} \sigma_i d\varphi = C_1, \quad (7.5)$$

- kryterium Cockrofta – Lathama [11]

$$\int_0^{\varphi^*} \sigma_1 d\varphi = C_2, \quad (7.6)$$

- znormalizowane kryterium Cockrofta – Lathama [51, 52]

$$\int_0^{\varphi^*} \frac{\sigma_1}{\sigma_m} d\varphi = C_3, \quad (7.7)$$

- kryterium Brozo i in. [8]

$$\int_0^{\varphi^*} \frac{2\sigma_1}{3(\sigma_1 - \sigma_m)} d\varphi = C_4, \quad (7.8)$$

- kryterium Oyane i in. [43]

$$\int_0^{\varphi^*} \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\sigma_m}{\sigma_i} \right) d\varphi = C_5, \quad (7.9)$$

- kryterium Oh’a i in. [41]

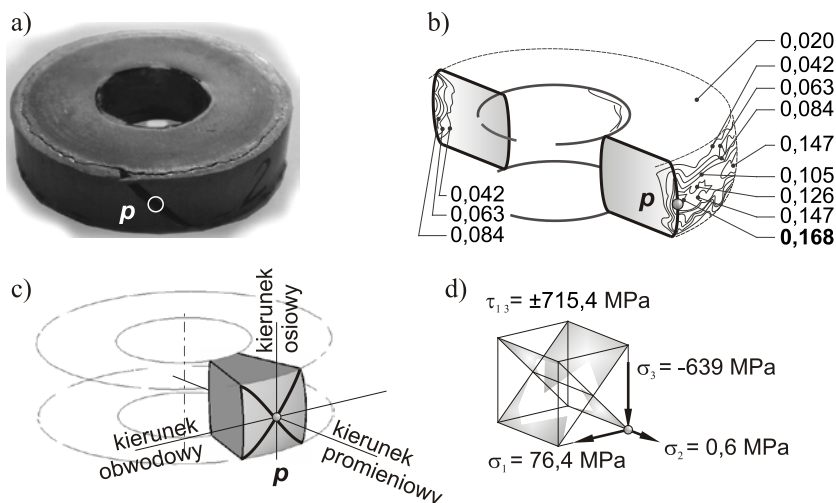
$$\int_0^{\varphi^*} \frac{\sigma_1}{\sigma_i} d\varphi = C_6. \quad (7.10)$$

W powyższych zależnościach przyjęto następujące oznaczenia: $C_{1...6}$ – stałe materiałowe wyznaczone doświadczalnie w sposób podany w opracowaniach specjalistycznych [5, 22, 23, 52], A – stała materiałowa [43], σ_i – naprężenie zastępcze (intensywność naprężenia), σ_1 – największe naprężenie główne, σ_m – naprężenie średnie.

Na rys. 7.3 przedstawiono przykład powstawania pęknięcia wiązkowego w próbce pierścieniowej wykonanej ze stopu tytanu $\alpha+\beta$, podczas spęczniania z małymi prędkościami w temperaturze otoczenia oraz wyjaśniono aspekty teoretyczne tego zjawiska [52].

Pęknięcie próbki pojawiło się w momencie, kiedy średnie odkształcenie wynosiło $\varphi = 0,35$. Jest ono zlokalizowane na zewnętrznej powierzchni walcowej (rys. 7.3a), a jego linia jest nachylona do kierunku osiowego (zgodnego z kierunkiem działania siły spęczniającej) pod kątem 45° . Analizując stan naprężenia (rys. 7.3d) można przyjąć, że linia pęknięcia jest zawarta w płaszczyźnie największych naprężeń stycznych. Należy wyjaśnić, że widoczne na rys. 7.3a dodatkowe rozwarstwienie obwodowe materiału, nazywane pęknięciem wtórnym, powstało w trakcie kontynuowania spęczniania uszkodzonej próbki i jest spowodowane przez istniejące już pęknięcia główne.

Na podstawie obliczonego rozkładu zniszczenia wg kryterium (7.7) – rys. 7.3b – można jedynie oszacować moment pojawienia się pęknięć wiązkowych oraz



Rys. 7.3. Pęknięcie powstałe w spęczanej próbce pierścieniowej (a) oraz obliczony: b) rozkład zniszczenia wg kryterium (7.7); c), d) stan naprężenia w punkcie p [52]; opis w tekście

lokalizację strefy materiału, w której mogą one powstać. Natomiast określenie prawdopodobnego przebiegu linii pęknięcia (rys. 7.3) jest możliwe na podstawie dodatkowej analizy stanu naprężenia panującego w punkcie p , dla którego obliczona wartość zniszczenia (7.7) jest największa (ściślej: równa stałej materiałowej C_3 wyznaczonej w próbie doświadczalnej). Jak wynika z rys. 7.3, przebieg linii pęknięcia jest określony przez lokalizację płaszczyzn działania największego naprężenia stycznych τ_{13} . Ponadto zauważono, że obliczone naprężenie obwodowe σ_1 jest naprężeniem największym i ma charakter rozciągający. Taki stan naprężenia przyczynia się w znacznym stopniu do wystąpienia pęknięć wiązkowych w odkształcanym materiale.

Podsumowując, podczas analizy teoretycznej procesów obróbki plastycznej dokonywanej pod kątem utraty spójności, oprócz poznania rozkładu zniszczenia (7.4) powinno się również brać pod uwagę stan naprężenia panujący w określonej strefie metalu. Pozwoli to określić orientację płaszczyzny działania największych naprężeń stycznych oraz stwierdzić, czy największe naprężenie σ_1 ma charakter rozciągający (tj. sprzyjający powstawaniu pęknięć) [52].

Odształcenie pękania i spójności

Podczas rozdzielania materiału, następującego w efekcie mechanizmu przewężania, doznaje on nieskończenie dużych odkształceń. W związku z tym za **odkształcenie pękania φ^*** przyjmuje się największe z odkształceń granicznych, w pobliżu powstania złomu. Należy podkreślić, że w przypadku ustalonego i nieustalonego schematu naprężeń głównych odkształcenie pękania zależy tylko od własności materiału odkształcanego. Może być ono zatem uznane za cechę charakteryzującą skłonność materiału do utraty spójności.

Do wyznaczania odkształcenia pękania stosuje się metody doświadczalne. Jedną z nich jest skręcanie próbki walcowej, prowadzone do momentu jej rozdzielania (następującego zwykle na powierzchni). Następnie dokonuje się pomiaru kąta skręcenia γ linii śrubowej, powstałej podczas skręcania z rysy naniezionej pierwotnie wzdłuż tworzącej próbki. Znając kąt γ oblicza się odkształcenie pękania φ^* , korzystając z zależności:

$$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \gamma. \quad (7.11)$$

Wyznaczone z próby skręcania wartości odkształcenia pękania, dla różnych materiałów φ^* , zestawiono w tabeli 7.1. Podane w tej tabeli wartości odkształcenia pękania dotyczą ustalonego stanu naprężenia występującego na powierzchni próbki skręcanej, charakteryzowanego przez: $\sigma_1 = \sigma_p / \sqrt{3}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_p / \sqrt{3}$. W przypadku, gdy na ten stan naprężenia zostanie nałożone dodatkowe trójosiowe naprężenie ściskające, odpowiadające naprężeniu średniemu σ_m , to odkształcenie pękania φ^* (rys. 7.2) wzrośnie zgodnie z równaniem:

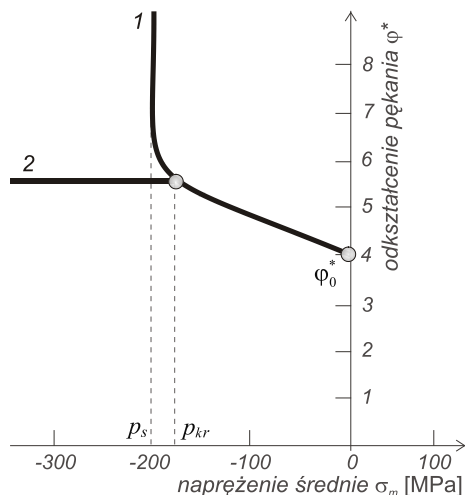
$$\varphi^* = \varphi_0^* + k_\varphi \sigma_m, \quad (7.12)$$

gdzie: φ_0^* – odkształcenie pękania bez udziału naprężenia hydrostatycznego
 σ_m – naprężenie średnie, k_φ – współczynnik zależny od rodzaju materiału.

Tabela 7.1.

Odształcenia pękania φ^ dla różnych materiałów, wyznaczone w próbie skręcania [14]*

Materiał	Odształcenie pękania φ^*	Materiał	Odształcenie pękania φ^*
Aluminium	4,2	Stal 16HG	1,5
Miedź	3,3	Stal 40H	1,1
Stal 10	1,5	Stal 2H13	1,4
Stal 25	1,0	Stal ŁH15	1,0
Stal 55	0,7	Stal NC6	0,7



Rys. 7.4. Zależność odkształcenia pęknięcia φ^* od naprężenia średniego σ_m dla aluminium: w przypadku zachowania warunku spójności (1), przy bezpośrednim kontakcie cieczy z próbką skręcaną (2) [14]

Według Erbla i in. [14] zwiększanie odkształcenia φ^* następuje tylko do pewnej wartości naprężenia średniego σ_m . Po osiągnięciu tej wartości materiał nie będzie podlegał rozdzielaniu, bez względu na wywołane odkształcenie (krzywa 1 – rys. 7.4). Ta wartość naprężenia średniego nazwana **ciśnieniem spójności p_s** , zależna jest od rodzaju materiału. Przykładowo, dla aluminium A1 wynosi ona 190 MPa, dla miedzi elektrolitycznej 500 MPa, a dla żelaza Armco 1200 MPa.

Ciśnienie spójności najprawdopodobniej zapobiega powstawaniu pęknięć wewnętrznych. Równocześnie jest ono jednak zbyt małe by zapobiec pękaniu obcych wtrąceń, które mają gorsze własności plastyczne niż materiał osnowy. Ciśnienie spójności stwarza warunki

do „zaleczania” tych pęknięć podczas odkształcania, następującego w wyniku rozdrabniania obcych wtrąceń i spojenia ich z materiałem osnowy. Spajanie to może zająć tylko wówczas, gdy dostatecznie blisko zostaną zbliżone do siebie bardzo czyste powierzchnie materiału. W przypadku, gdy ciśnienie spójności uzyskiwane jest w wyniku oddziaływania cieczy, to wnika ona w pęknięcia wychodzące na powierzchnię próbki (rozdzielając powierzchnie metalu) i prowadzi do powstania złomu. Wówczas odkształcenie pęknięcia ustala się na stałym poziomie i nie zależy od naprężenia średniego σ_m (krzywa 2 – rys. 7.4).

8. METODA ENERGETYCZNA

8.1. Wiadomości podstawowe

Metoda ta oparta jest na **zasadzie zachowania energii**, którą formułuje się następująco: *praca sił zewnętrznych W_z na odpowiadających im przemieszczeniach, konieczna do odkształcenia plastycznego, jest równa pracy sił wewnętrznych, która składa się z pracy odkształcenia plastycznego W_p oraz pracy związanej z pokonaniem sił tarcia W_t* . Zasadę tę zapisuje się jako:

$$W_z = W_p + W_t . \quad (8.1)$$

Praca sił zewnętrznych określona jest przez pracę narzędzi potrzebną do odkształcenia materiału. Praca odkształcenia plastycznego równa jest iloczynowi jednostkowej pracy odkształcenia plastycznego w_p oraz objętości kształtowanego materiału V ($W_p = w_p V$). Jednostkowa praca odkształcenia plastycznego w_p dla materiałów idealnie plastycznych określona jest wartością granicy plastyczności materiału σ_p i odkształcenia zastępczego ϕ_i , zgodnie z rys. 5.16. Natomiast, elementarna praca tarcia dW_t równa jest pracy naprężenia stycznego τ wykonanej na elementarnym przesunięciu dl

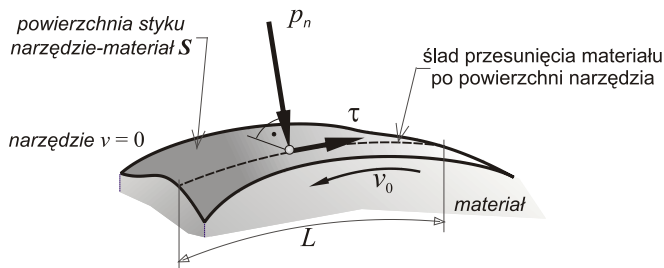
$$dW_t = \tau dl . \quad (8.2)$$

Naprężenie styczne τ (rys. 8.1) można wyznaczyć znając wielkość nacisku powierzchniowego p_n , normalnego do powierzchni narzędzia. Korzystając z prawa Amontonsa, $\tau = \mu p_n$ – równanie (6.3), całkowitą pracę tarcia wyznacza się na drodze dwukrotnego całkowania zależności (8.2)

$$W_t = \int \int_{S L} \tau dl ds , \quad (8.3)$$

gdzie S oznacza powierzchnię styku materiału uplastycznionego z narzędziem, L – wartość przesunięcia materiału po powierzchni narzędzia. Energia rozproszona w wyniku tarcia określona zależnością (8.3) wymaga znajomości pola naprężeń (warunkującego wielkość nacisku normalnego p_n), którego nie wyznacza się w metodzie energetycznej. Dlatego też często w rozwiązaniach stosuje się prawo tarcia stałego, $\tau = m k$ – zależność (6.4). Pracę tarcia W_t określa się wówczas na podstawie zależności

$$W_t = \int \int_{S L} m k dl ds . \quad (8.4)$$



Rys. 8.1. Schemat do wyznaczania naprężenia stycznego na powierzchni kontaktu narzędzie – materiał (opis w tekście)

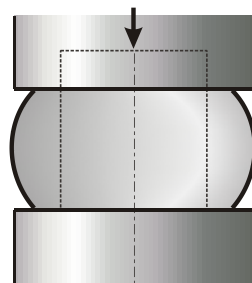
8.2. Spęczanie swobodne walca

Spęczanie (rys. 8.2) jest jedną z podstawowych operacji kucia swobodnego, w trakcie której narzędzia (kowadła) wywierają nacisk tylko na część powierzchni metalu. Pozostałe powierzchnie nie są ograniczone kształtem rzędzi i odkształcany metal może płynąć w kilku dowolnych kierunkach. W trakcie spęczania zmniejsza się wysokość odkuwki, przy równoczesnym zwiększeniu jej przekroju poprzecznego. Operacja ta poprawia znacznie własności metalu, zwłaszcza, gdy odkuwki konuje się bezpośrednio z wlewków [71].

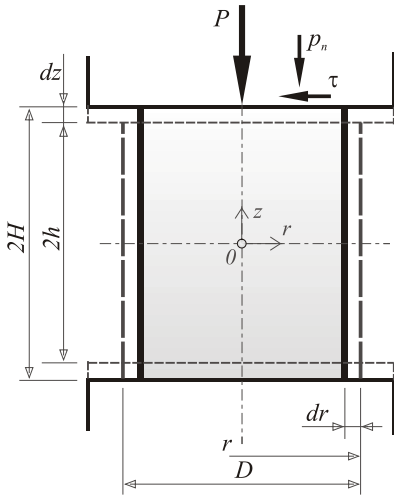
Ze względu na symetrię osiową procesy spęczania wyrobów osiowo-symetrycznych rozpatruje się w walcowym układzie odniesienia $\{r, v, z\}$. Z tego samego powodu analizę ogranicza się do jednej połowy spęczki. Schemat spęczania próbki walcowej, między dwoma sztywnymi kowadłami, pokazano schematycznie na rys. 8.3.

Praca wykonana przez **siły zewnętrzne** P na drodze dz dana jest następującą zależnością

$$W_z = P dz = \pi r^2 dz p_n. \quad (8.5)$$



Rys. 8.2. Proces spęczania swobodnego



Rys. 8.3. Schemat spęczania swobodnego próbki walcowej (opis w tekście)

Zakładając, że walec wykonany jest z materiału idealnie plastycznego ($\sigma_p = \sigma_0 = \text{const}$) jednostkową pracę odkształcenia plastycznego określa się na podstawie poniższego wzoru

$$w_p = \sigma_0 d\varphi_i. \quad (8.6)$$

Przyjmując, że dla małych odkształceń składowa osiowa odkształcenia nie zależy od współrzędnej r można zapisać, że

$$d\varphi_z = -\frac{dz}{h}. \quad (8.7)$$

Wykorzystując warunek stałej objętości otrzymuje się dla analizowanego przypadku zależność

$$\pi r^2 dz = 2\pi r dr h. \quad (8.8)$$

z której po przekształceniach uzyskuje się, że

$$\frac{dz}{h} = 2\frac{dr}{r} = 2d\varphi_r. \quad (8.9)$$

Następnie wychodząc z warunku stałej objętości ($d\varphi_v + d\varphi_z + d\varphi_r = 0$) wyznacza się wartość składowej odkształcenia $d\varphi_v$

$$d\varphi_v = -d\varphi_z - d\varphi_r = \frac{dr}{r}. \quad (8.10)$$

Wartość odkształcenia zastępczego $d\varphi_i$ oblicza się z definicji, uwzględniając zależność (8.10)

$$\begin{aligned} d\varphi_i &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varphi_r^2 + d\varphi_v^2 + d\varphi_z^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(\frac{dr}{r}\right)^2 + \left(\frac{dr}{r}\right)^2 + \left(-\frac{dz}{h}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(\frac{dz}{2h}\right)^2 + \left(\frac{dz}{2h}\right)^2 + \left(\frac{dz}{h}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{dz}{h}\right)^2} = \frac{dz}{h}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Zatem jednostkowa praca odkształcenia plastycznego określona jest zależnością

$$w_p = \sigma_0 \frac{dz}{h}, \quad (8.12)$$

na podstawie której, po uwzględnieniu objętości próbki, oblicza się całkowitą pracę odkształcenia plastycznego

$$W_p = V w_p = \pi r^2 h \sigma_0 \frac{dz}{h} = \pi r^2 \sigma_0 dz. \quad (8.13)$$

Pracę tarcia określa się zakładając, że naprężenie styczne na powierzchni styku S materiału z narzędziem nie zależy od promienia r i można je obliczyć stosując prawo Amontonsa ($\tau = \mu p_n$)

$$W_t = \mu p_n \int_S u_r dS. \quad (8.14)$$

Przesunięcie metalu względem narzędzi u_r oblicza się z zależności

$$u_r = \int d\phi_r dr = d\phi_r r + C. \quad (8.15)$$

Uwzględniając, że dla warunków brzegowych $r = 0$ i $u_r = 0$, otrzymuje się $C = 0$. Po wykorzystaniu zależności (8.9) wyznacza się przesunięcie promieniowe u_r

$$u_r = d\phi_r r = \frac{1}{2} \frac{dz}{h} r. \quad (8.16)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (8.14) otrzymuje się

$$W_t = \mu p_n \int_S \frac{1}{2} \frac{dz}{h} r dS. \quad (8.17)$$

Elementarną powierzchnię styku materiał-narzędzie wyznacza się na podstawie rys. 8.4 jako

$$dS = r dv dr. \quad (8.18)$$

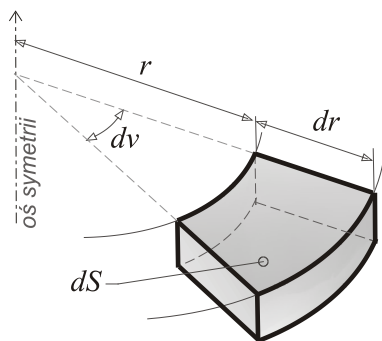
Zatem ostateczna postać wyrażenia na pracę tarcia ma postać

$$W_t = \mu p_n \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{2} \frac{dz}{h} r^2 dr dv = \frac{1}{2} \mu p_n \frac{dz}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 dr dv = \frac{1}{3} \mu p_n \pi r^3 \frac{dz}{h}. \quad (8.19)$$

Bilansując pracę włożoną (8.5) z rozproszoną, na odkształcenie plastyczne (8.13) i tarcie (8.19), otrzymuje się:

$$\pi r^2 dz p_n = \pi r^2 \sigma_0 dz + \frac{1}{3} \mu p_n \pi r^3 \frac{dz}{h}. \quad (8.20)$$

Stąd wyznacza się wartość nacisku średniego, w postaci bezwymiarowej



Rys. 8.4. Elementarna powierzchnia styku materiał-narzędzie, w procesie spęczania swobodnego walca

$$\frac{p_n}{\sigma_0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\mu \frac{r}{h}}. \quad (8.21)$$

Otrzymane rozwiązanie jest słuszne wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\mu p_n \leq k. \quad (8.22)$$

Z zależności (8.21) otrzymuje się

$$\sigma_0 = p_n \left(1 - \frac{1}{3}\mu \frac{r}{h} \right). \quad (8.23)$$

Następnie uwzględniając, zgodnie z hipotezą Hubera, że $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ uzyskuje się

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = \frac{p_n}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\mu \frac{r}{h} \right). \quad (8.24)$$

Podstawiając zależność (8.24) do nierówności (8.22) uzyskuje się warunek

$$\mu p_n \leq \frac{p_n}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\mu \frac{r}{h} \right), \quad (8.25)$$

z którego po przekształceniach wyznacza się granicę stosowalności wzoru (8.21)

$$\frac{r}{h} \leq \frac{3}{\mu} - 3\sqrt{3}. \quad (8.26)$$

W przypadku, gdy powyższy warunek nie jest spełniony przyjmuje się, że naprężenie styczne na powierzchni styku równe jest granicy plastyczności na ściskanie k , czyli

$$\mu p_n = k. \quad (8.27)$$

Modyfikacji ulega wówczas wyrażenie na pracę tarcia, które przyjmuje postać

$$W_t = \frac{k}{3} \pi r^3 \frac{dz}{h}. \quad (8.28)$$

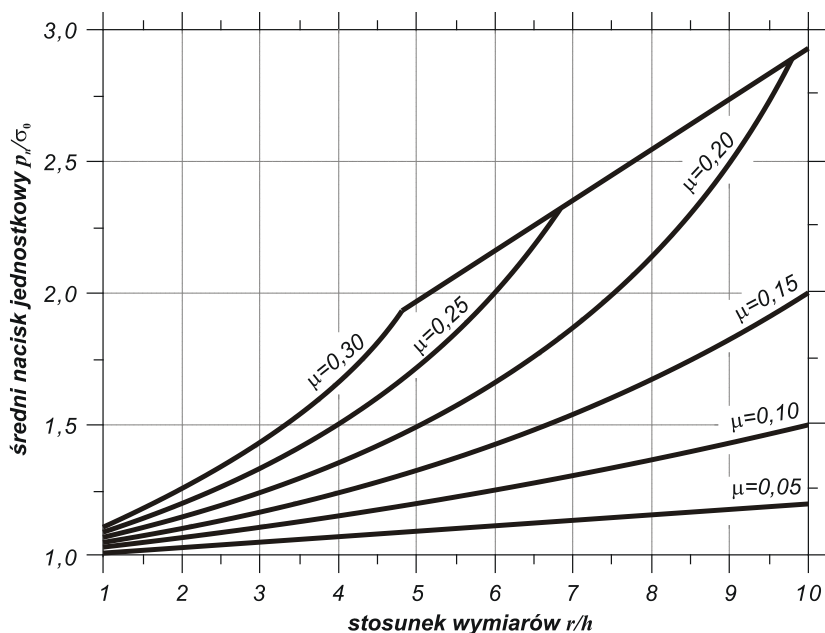
W konsekwencji zmienia się bilans pracy włożonej i prac rozproszonych

$$\pi r^2 dz p_n = \pi r^2 \sigma_0 dz + \frac{k}{3} \pi r^3 \frac{dz}{h}. \quad (8.29)$$

Z bilansu tego po uwzględnieniu, że $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ wyznacza się średni nacisk jednostkowy w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p_n}{\sigma_0} = 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{r}{h}. \quad (8.30)$$

Zależność nacisku jednostkowego p_n/σ_0 od kształtu spęczki (określonego stosunkiem wymiarów r/h) oraz od wartości współczynnika tarcia μ przedstawiono na rys. 8.5.



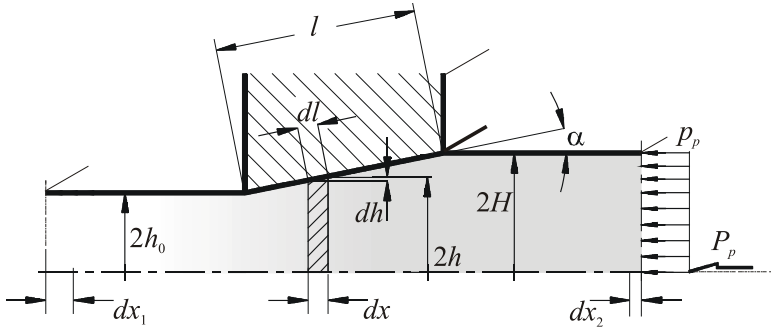
Rys. 8.5. Wpływ stosunku wymiarów r/h i współczynnika tarcia μ na nacisk stempla, w procesie spęczania swobodnego walca

8.3. Przepychanie pasma

Przepychanie polega na tym, że kształtowanie materiału następuje na skutek działania osiowej siły ściskającej, oddziałującej na nieodkształcony odcinek półwyrobu (rys. 8.6).

Redukcja przekroju poprzecznego w procesie przepychania jest ograniczona wartością siły P , która nie może być większa od siły potrzebnej do uplastycznienia nieodkształconego odcinka półwyrobu. Przepychanie stosuje się w produkcji takich wyrobów jak śruby, sworznie itp. Przepychaniu najczęściej poddaje się wyrób tylko na części długości, gdyż zwykle operacja ta stosowana jest dla zestopniowania średnic. W przypadku kształtowania na zimno części wyrobu o średnicach zmniejszonych, ze względu na występujące umocnienie materiału, posiadają wytrzymałość większą od wytrzymałości odcinków nieodkształconych [16, 39, 74].

Schemat procesu przepychania pasma przez symetrycznie zbieżną szczelinę przedstawiono na rys. 8.6.



Rys. 8.6. Schemat procesu przepychania pasma, w warunkach płaskiego stanu odkształcenia

Pracę siły przepychania pasma o szerokości jednostkowej na drodze dx_2 wyznacza się na podstawie zależności:

$$W_z = P_p dx_2 = p_p 2H dx_2. \quad (8.31)$$

Rozpatrzmy proces przepychania pasma z materiału idealnie plastycznego ($\sigma_p = \sigma_0$). W takim przypadku jednostkowa praca odkształcenia plastycznego wyrażona jest zależnością (8.6). Natomiast **pracę odkształcenia plastycznego**, odpowiadającą przesunięciu pasma odkształcanego o dx_1 określa wzór

$$W_p = 2h_0 dx_1 \sigma_0 \varphi_i. \quad (8.32)$$

Upraszczając przyjmuje się, że kierunki x i y są kierunkami głównymi. W takim przypadku zakładając, że proces zachodzi w płaskim stanie odkształcenia poszczególne odkształcenia elementarne są równe:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_x &= \frac{dh}{h} \\ d\varphi_y &= -\frac{dh}{h} \end{aligned} \right\}, \quad (8.33)$$

a elementarne odkształcenie zastępcze wynosi:

$$d\varphi_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{dh}{h}. \quad (8.34)$$

Całkowitą wartość odkształcenia zastępczego φ_i oblicza się jako

$$\varphi_i = \int_{h_0}^H d\varphi_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{h_0}^H \frac{dh}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{H}{h_0}. \quad (8.35)$$

Po uwzględnieniu zależności (8.35) praca odkształcenia plastycznego wyrazi się zależnością:

$$W_p = \frac{4}{\sqrt{3}} h_0 dx_1 \sigma_0 \ln \frac{H}{h_0}. \quad (8.36)$$

Zgodnie z hipotezą Hubera naprężenie $\sigma_0 = k\sqrt{3}$. Stąd

$$W_p = 4h_0 dx_1 k \ln \frac{H}{h_0}. \quad (8.37)$$

Energię dysypowaną w wyniku tarcia oblicza się z zależności:

$$W_t = 2m k l dl_{sr}, \quad (8.38)$$

gdzie: m – czynnik tarcia, dl_{sr} – średnia wartość przesunięcia materiału wzdłuż płaszczyzny matrycy. Z geometrii procesu (rys. 8.6) wynika, że

$$l = \frac{H - h_0}{\sin \alpha}. \quad (8.39)$$

Średnią wartość przesunięcia materiału dl_{sr} oblicza się uśredniając przesunięcia metalu na wejściu i na wyjściu z matrycy

$$dl_{sr} = \frac{dx_1 + dx_2}{2 \cos \alpha}. \quad (8.40)$$

Korzystając z warunku stałej objętości, w postaci

$$h_0 dx_1 = H dx_2, \quad (8.41)$$

wyznacza się średnią wartość przesunięcia dl_{sr} w zależności od dx_1

$$dl_{sr} = \frac{\frac{h_0}{H} + 1}{2 \cos \alpha} dx_1. \quad (8.42)$$

Po podstawieniu wyrażeń (8.39) i (8.42) do (8.38) otrzymujemy zależność na energię rozpraszaną w wyniku tarcia:

$$W_t = m k \frac{dx_1}{\sin \alpha \cos \alpha} \frac{H^2 - h_0^2}{H}. \quad (8.43)$$

Zestawiając **bilans pracy** włożonej (8.31) oraz pracy odkształcenia plastycznego (8.37) i pracy tarcia (8.43) otrzymuje się równanie:

$$p_p 2H dx_2 = 4h_0 dx_1 k \ln \frac{H}{h_0} + m k \frac{dx_1}{\sin \alpha \cos \alpha} \frac{H^2 - h_0^2}{H}, \quad (8.44)$$

które po uwzględnieniu warunku (8.41) sprowadza się do postaci

$$p_p 2H dx_2 = 4H dx_2 k \ln \frac{H}{h_0} + m k \frac{dx_1}{\sin \alpha \cos \alpha} \frac{H^2 - h_0^2}{H}. \quad (8.45)$$

Z powyższej zależności oblicza się wartość nacisku jednostkowego stempla w postaci bezwymiarowej $p_p/2k$

$$\frac{p_p}{2k} = \ln \frac{H}{h_0} + \frac{1}{2} m \left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H} \right) \frac{1}{\sin 2\alpha} . \quad (8.46)$$

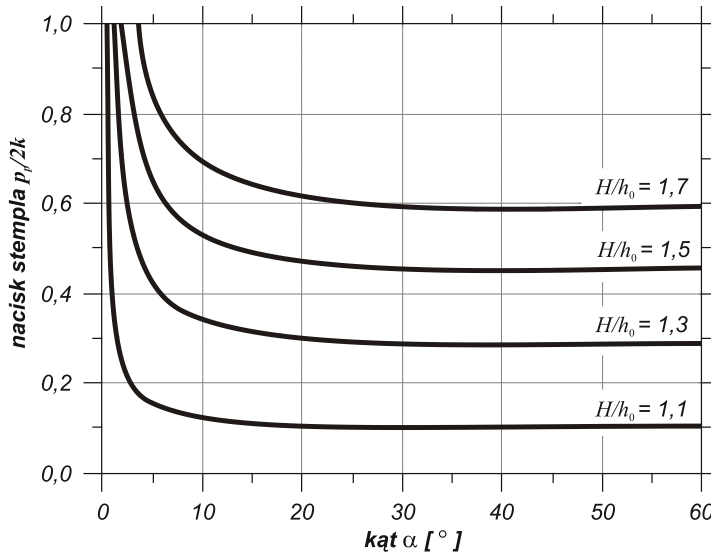
Ilustrację graficzną otrzymanego wyrażenia na $p_p/2k$, w funkcji stosunku grubości pasma H/h_0 oraz kąta α , przedstawia się (dla różnych wartości czynnika tarcia m) na rys. 8.7÷8.12.

Warunkiem ograniczającym przebieg procesu przepychania jest nieuplastycznienie się materiału przed wejściem do matrycy. Warunek ten zapisuje się w postaci

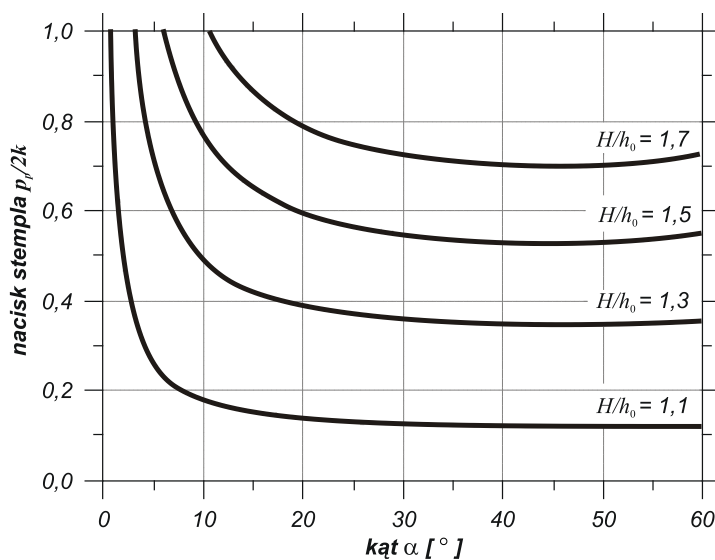
$$p_p < 2k , \quad (8.47)$$

który po wykorzystaniu zależności (8.46) wyrażony jest jako:

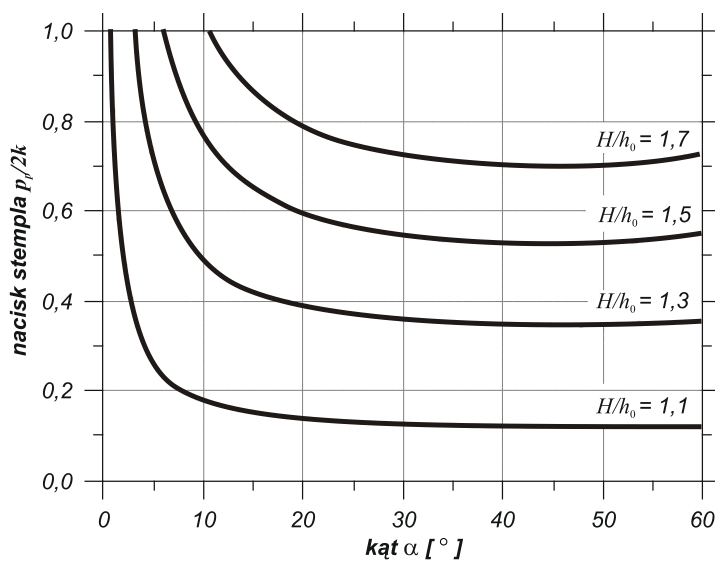
$$\ln \frac{H}{h_0} + \frac{1}{2} m \left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H} \right) \frac{1}{\sin 2\alpha} < 1 . \quad (8.48)$$



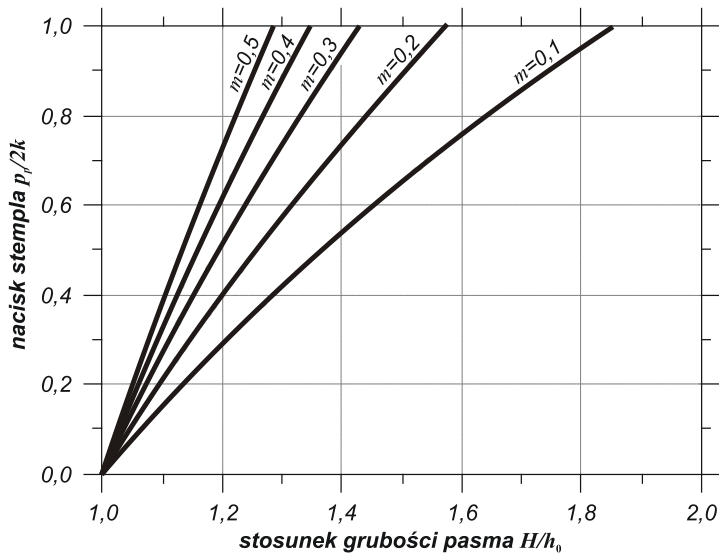
Rys. 8.7. Zależność $p_p/2k$ od stosunku grubości pasma H/h_0 i kąta α , obliczona dla procesu przepychania przy $m = 0,1$



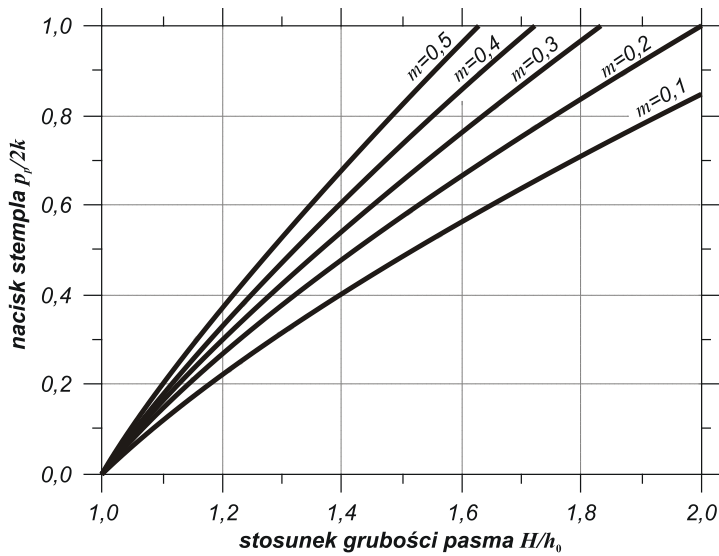
Rys. 8.8. Zależność $p_p/2k$ od stosunku grubości pasma H/h_0 i kąta α , obliczona dla procesu przepychania przy $m = 0,2$



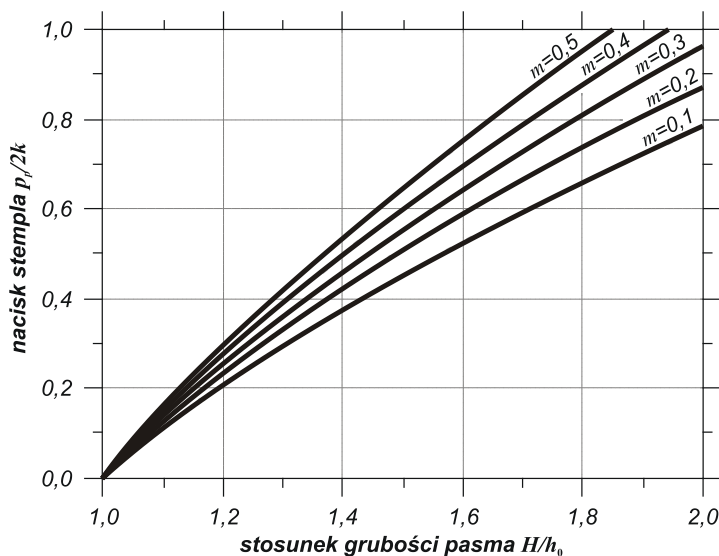
Rys. 8.9. Zależność $p_p/2k$ od stosunku grubości pasma H/h_0 i kąta α , obliczona dla procesu przepychania przy $m = 0,3$



Rys. 8.10. Zależność $p_p/2k$ od stosunku grubości pasma H/h_0 i czynnika tarcia na powierzchni narzędzia m , obliczona dla procesu przepychania przy $\alpha = 5^\circ$



Rys. 8.11. Zależność $p_p/2k$ od stosunku grubości pasma H/h_0 i czynnika tarcia na powierzchni narzędzia m , obliczona dla procesu przepychania przy $\alpha = 15^\circ$



Rys. 8.12. Zależność $p_p/2k$ od stosunku grubości pasma H/h_0 i czynnika tarcia na powierzchni narzędzia m , obliczona dla procesu przepychania przy $\alpha = 30^\circ$

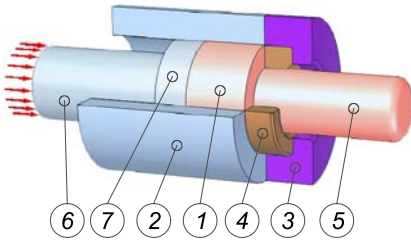
8.4. Wyciskanie pasma przez matrycę płaską

Wyciskanie jest jednym z podstawowych procesów obróbki plastycznej i polega na przemieszczaniu odcinków prętów, krążków, płytek lub innych półfabrykatów przez otwór matrycy nadający żądany kształt. Wywieranie nacisku, powodujące przemieszczanie się cząstek materiału wprowadzonego w stan plastycznego płynięcia, jest realizowane za pomocą stempla stykającego się bezpośrednio z kształtowanym materiałem (wyciskanie mechaniczne) lub za pośrednictwem ośrodka nieciąglego materiału (np. wyciskanie hydrostatyczne, wybuchowe).

Wyciskanie stosowane jest do wytwarzania wyrobów o różnych kształtach: walcowych i stożkowych, gładkich i stopniowanych, pełnych i wydrążonych, o przekroju okrągłym i nieokrągłym. Rozróżnia się dwie zasadnicze metody wyciskania: współbieżne i przeciwbieżne [71, 74].

8.4.1. Wyciskanie współbieżne

W czasie wyciskania współbieżnego (rys. 8.13) materiał 1 umieszczony wewnątrz rycypienta 2 zamkniętego z jednej strony matrycą 4 (o kształcie klinowym lub płaskim), zamocowaną w oprawce 3, wypływa w postaci pręta 5,



Rys. 8.13. Wyciskanie współbieżne pręta walcowego (opis w tekście)

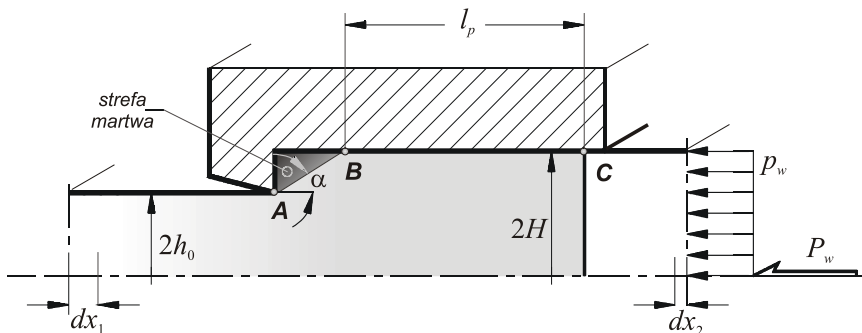
w wyniku oddziaływania sił zewnętrznych pochodzących od tłoczyska 6, a przenoszonych na materiał za pośrednictwem przedtłoczki 7, przy czym wypływanie materiału jest zgodne z kierunkiem ruchu tłoczyska [71]. Podobny przebieg ma wyciskanie współbieżne pasma.

Przy wyciskaniu w rycypieniec z płaskim dnem tworzy się w materiale, przy wejściu do części kalibrującej, klinowa dysza, przez którą płynie wyciskany materiał (rys. 8.14). Na zewnątrz dyszy powstaje tzw. „martwa” strefa, która nie ulega odkształceniu. Należy również pamiętać o tym, że martwe strefy mogą także tworzyć się w przypadkach zastosowania matryc klinowych o dużych kątach rozwarcia, przewyższających wielkość graniczną $2\alpha_{gr}$. Wartość graniczną α_{gr} wyznacza się z warunku, by całkowita praca (moc) na kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeniach osiągnęła wartość najmniejszą.

Schemat procesu wyciskania współbieżnego, materiału idealnie plastycznego, przez matrycę płaską w warunkach płaskiego stanu odkształcenia przedstawiono na rys. 8.14.

Przy obliczaniu nacisku stempla p_w wykorzystamy częściowo równania wyprowadzone w trakcie analizy procesu przepychania pasma.

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną P_w na drodze dx_2 określona jest zależnością (8.31). Zatem



Rys. 8.14. Schemat procesu wyciskania współbieżnego przez matrycę płaską, w warunkach płaskiego stanu odkształcenia

$$W_z = p_w 2H dx_2. \quad (8.49)$$

Natomiast praca sił wewnętrznych składa się z, identycznej jak przy przepychaniu, pracy odkształcenia plastycznego W_p

$$W_p = 4h_0 dx_1 k \ln \frac{H}{h_0}, \quad (8.50)$$

oraz pracy tarcia W_t na powierzchni AB i pracy tarcia W_{t1} na powierzchni BC rycypienta (w przypadku, gdy materiał w pojemniku matrycy znajduje się w stanie plastycznym). Prace na powierzchni nieciągłości można obliczyć korzystając z zależności (8.43) przyjmując, że napężenie styczne ma wartość graniczną $\tau = k$. Zatem

$$W_t = k \frac{dx_1}{\sin \alpha \cos \alpha} \frac{H^2 - h_0^2}{H}. \quad (8.51)$$

W przypadku, gdy materiał przed wejściem do matrycy jest sztywny to nacisk stempla p_w jest identyczny jak w procesie przepychania i określony wzorem (8.46). Natomiast wówczas, gdy warunek (8.47) ograniczający proces przepychania nie jest spełniony, to materiał w części równoległej matrycy jest uplastyczniony i wywiera nacisk na powierzchnie boczne. Nacisk ten powoduje stratę energii, którą na przemieszczeniu dx_2 wyraża zależność:

$$W_{t1} = 2k m l_p dx_2. \quad (8.52)$$

Z bilansu pracy włożonej i dysypowanej otrzymuje się równanie

$$p_w 2H dx_2 = 4h_0 dx_1 k \ln \frac{H}{h_0} + k \frac{dx_1}{\sin \alpha \cos \alpha} \frac{H^2 - h_0^2}{H} + i 2k m l_p dx_2, \quad (8.53)$$

z którego po uwzględnieniu warunku stałej objętości w postaci

$$h_0 dx_1 = H dx_2, \quad (8.54)$$

po przekształceniach wyznacza się wartość nacisku jednostkowego stempla w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p_w}{2k} = \ln \frac{H}{h_0} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H} \right) \frac{1}{\sin 2\alpha} + i m \frac{l_p}{H} \right]. \quad (8.55)$$

Graniczny kąt α , określający wielkość strefy martwej, oblicza się z warunku by całkowita energia dysypowana osiągnęła wartość minimalną (wraz z nią minimum osiąga nacisk średni wyciskania). Warunek ten zapisuje się jako:

$$\frac{\partial(p_w/2k)}{\partial \alpha} = 0. \quad (8.56)$$

Różniczkując zależność (8.55) względem α otrzymuje się

$$\cos 2\alpha = 0, \quad (8.57)$$

a stąd wyznacza się poszukiwaną wartość α

$$\alpha = 45^\circ. \quad (8.58)$$

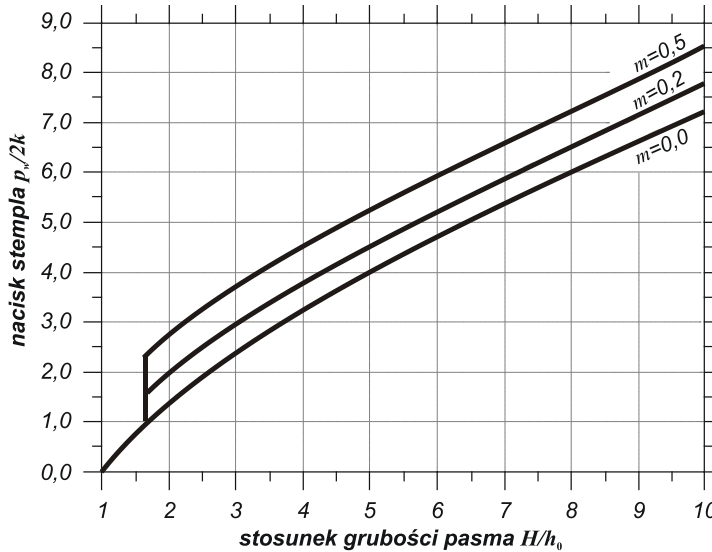
Uwzględniając zależność (8.58), z równania (8.55) uzyskuje się ostateczną postać wyrażenia na nacisk stempla w procesie wyciskania współbieżnego przez matrycę płaską (w warunkach płaskiego stanu odkształcenia)

$$\frac{p_w}{2k} = \ln \frac{H}{h_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H} + i m \frac{l_p}{H} \right), \quad (8.59)$$

gdzie: $i = 0$, gdy $\ln \frac{H}{h_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H} \right) < 1$,

$i = 1$ w pozostałych przypadkach.

Ilustrację graficzną zależności (8.59), w funkcji podstawowych parametrów procesu (stosunku wymiarów H/h_0 oraz czynnika tarcia m) przedstawiono na rys. 8.15, jednocześnie przyjmując stałą wartość stosunku $l_p/H = 5$.



Rys. 8.15. Zależność nacisku stempla $p_w/2k$ od wartości stosunku grubości wyciskanego pasma H/h_0 , obliczona przy różnych wartościach czynnika tarcia m , gdy $l_p/H=5$

8.4.2. Wyciskanie przeciwbieżne

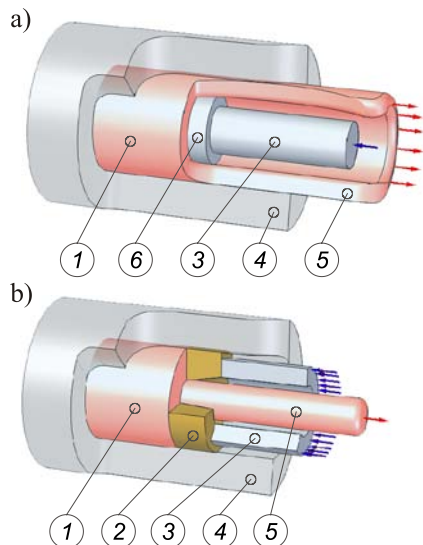
W procesie wyciskania przeciwbieżnego (rys. 8.16) materiał 1 wypychany jest matrycą 2, przesuwaną względem ścian rycypienta 4 przez stempel 3. Przy wyciskaniu wyrobów drążonych (rys. 8.16a) materiał 1 wyciskany jest przez otwór pierścieniowy powstały pomiędzy przedtłoczką 6 i ścianami rycypienta 4, a przy wyciskaniu wyrobów pełnych przez otwór w matrycy (rys. 9.16b). W procesie tym kierunek płynięcia materiału jest przeciwny do kierunku ruchu tłoczyska.

W procesie wyciskania przeciwbieżnego można wyróżnić trzy fazy: początkowe stadium nieustalone, w którym zmienia się stan odkształcenia i naprężenia; stadium ustalone, w czasie którego stan odkształcenia i naprężenia oraz obszar odkształceń plastycznych pozostają praktycznie niezmienione oraz końcowe stadium nieustalone, w którym obszar uplastyczniony osiąga dno matrycy. Prezentowane rozwiązanie ogranicza się do stadium ustalonego, w którym odbywa się zasadniczy proces wyciskania.

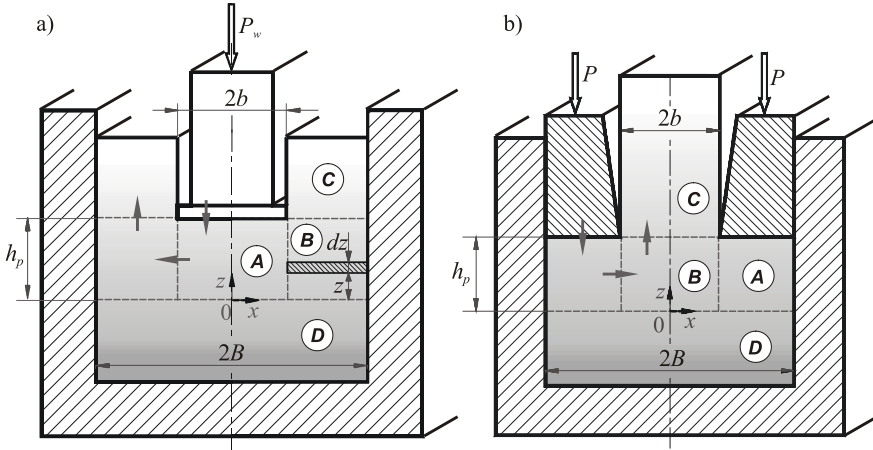
Rozważany proces wyciskania przeciwbieżnego wyrobu drążonego, w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, przedstawiony został na rys. 8.17a. Kształtowany materiał podzielono na cztery strefy: „A” i „B”, w których materiał jest uplastyczniony oraz strefy sztywne „C” i „D”. Zakłada się, że powierzchnie rozgraniczające poszczególne strefy są powierzchniami nieciągłości prędkości, a odkształcany materiał zachowuje się jak materiał idealnie plastyczny. W obliczeniach pomija się tarcie, w strefie „C”, materiału o powierzchnie stempla i matrycy. Materiał w strefie „A” pod wpływem nacisku stempla P ulega spęczeniu prostopadłe do strefy „B”.

Pracę odkształcenia plastycznego w strefie „A”, przyjmuje się jak w procesie spękania i zapisuje się w postaci:

$$W_p^A = V_A \sigma_0 d\varphi_i^A = 2b h_p \sigma_0 d\varphi_i^A, \quad (8.60)$$



Rys. 8.16. Wyciskanie przeciwbieżne tulei (a) oraz pręta (b) – opis w tekście



Rys. 8.17. Wyciskanie przeciwbieżne tulei (a) i pręta (b), w warunkach płaskiego stanu odkształcenia

gdzie h_p oznacza wysokość uplastycznionej strefy „A”, a ϕ_i^A – odkształcenie zastępcze w tej strefie.

Wyrażenie określające pracę sił tarcia materiału o powierzchnię czołową stempla, odpowiadającą przemieszczeniu narzędzia o wartość dh , określone jest iloczynem sił tarcia i przesunięcia średniego $db/2$:

$$W_t^{A0} = 2b \tau \frac{db}{2} . \quad (8.61)$$

Z warunku nieściśliwości dla strefy „A” zapisanego jako

$$b \, dh = h_p \, db \quad (8.62)$$

uzyskuje się, że

$$db = b \frac{dh}{h_p} . \quad (8.63)$$

Po podstawieniu uzyskanej zależności do wzoru (8.61) pracę tarcia W_t^{A0} określa wyrażenie

$$W_t^{A0} = \tau b^2 \frac{dh}{h_p} . \quad (8.64)$$

Stan odkształcenia w strefie „A” określają następujące składowe

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_z &= -\frac{dh}{h_p} \\ d\varphi_x &= \frac{dh}{h_p} \\ d\varphi_y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (8.65)$$

a obliczone na ich podstawie odkształcenie zastępcze wynosi

$$d\varphi_i^A = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{d\varphi_x^2 + d\varphi_y^2 + d\varphi_z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{dh}{h_p}. \quad (8.66)$$

Stąd przemieszczenie stempla dh , względem obszaru „A”, można zapisać jako

$$dh = \frac{\sqrt{3}}{2} h_p d\varphi_i^A. \quad (8.67)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do zależności (8.64), po uwzględnieniu, że $\tau = mk$ otrzymuje się

$$W_t^{A0} = mk \frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi_i^A b^2. \quad (8.68)$$

W przypadku, gdy założy się, że przemieszczenie poprzeczne materiału wzdłuż powierzchni kontaktu ze stemplem jest takie same jak wzdłuż powierzchni nieciągłości ze strefą sztywną „D”, to do wyznaczenia pracy ścinania pomiędzy strefami „A” i „D” można wykorzystać zależność (8.68). Ponieważ przemieszczenie to wymaga aby między tymi strefami występowało naprężenie styczne równe granicy plastyczności na ścinanie k , to podstawiając do wyrażenia (8.68) $m = 1$ otrzymuje się

$$W_t^{AD} = k \frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi_i^A b^2. \quad (8.69)$$

Dla wyznaczenia pracy odkształcenia plastycznego w strefie „B” należy obliczyć wartość odkształcenia zastępczego $d\varphi_i^B$ w tym obszarze. W tym celu wykorzystywany jest warunek przepływu stałej objętości materiału ze strefy „A” do „B” w postaci

$$2b h_p d\varphi_z^A = 2h_p (B - b) d\varphi_z^B. \quad (8.70)$$

Uwzględniając zgodnie z (8.65) i (8.66), że

$$d\varphi_i^A = \frac{2}{\sqrt{3}} |d\varphi_z^A| \quad (8.71)$$

oraz, że praca rozproszona ma wartość dodatnią warunek (8.70) sprowadza się do postaci

$$d\varphi_z^B = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{b}{B-b} d\varphi_i^A. \quad (8.72)$$

Z zasady stałej objętości dla płaskiego stanu odkształcenia mamy

$$d\varphi_x^B = -d\varphi_z^B, \quad (8.73)$$

zatem korzystając z definicji wyznacza się wyrażenie na odkształcenie zastępcze $d\varphi_i^B$

$$d\varphi_i^B = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(d\varphi_x^B)^2 + (d\varphi_z^B)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varphi_z^B = \frac{b}{B-b} d\varphi_i^A, \quad (8.74)$$

a następnie zależność na pracę odkształcenia plastycznego w obszarze „B”

$$W_p^B = V_B \sigma_0 d\varphi_i^B = 2b h_p \sigma_0 d\varphi_i^A. \quad (8.75)$$

Przyjmując, że na powierzchni styku strefy „B” z matrycą naprężenie styczne $\tau = mk$ nie zależy od współrzędnej z , elementarna praca tarcia wykonana na przemieszczeniu elementu dz (o wartość u_B) względem powierzchni matrycy wyraża się zależnością

$$W_t^{0B} = \tau u_B dz. \quad (8.76)$$

Wartość przesunięcia u_B oblicza się z zależności

$$u_B = \int d\varphi_z^B dz = d\varphi_z^B z + C. \quad (8.77)$$

Stała całkowania C nie zależy od współrzędnej z i dla warunków brzegowych, $u = 0$ przy $z = 0$, mamy $C = 0$. Zatem podstawiając wyrażenie

$$u_B = d\varphi_z^B z \quad (8.78)$$

do zależności (8.76) uzyskuje się wyrażenie na elementarną pracę tarcia

$$dW_t^{0B} = m k d\varphi_z^B z dz. \quad (8.79)$$

Całkowitą pracę tarcia W_t^{0B} wyznacza się całkując zależność (8.79)

$$W_t^{0B} = \int_0^{h_p} m k d\varphi_z^B z dz = \frac{1}{2} m k d\varphi_z^B h_p^2, \quad (8.80)$$

a po uwzględnieniu zależności (8.72) otrzymuje się, że

$$W_t^{0B} = \frac{\sqrt{3}}{4} m k h_p^2 \frac{b}{B-b} d\varphi_i^A. \quad (8.81)$$

Elementarna praca sił stycznych na powierzchniach ścinania pomiędzy strefami „A” i „B” może być wyznaczona z zależności (8.76). Należy wówczas uwzględnić, że naprężenie styczne na granicy tych stref równe jest granicy plastyczności materiału na ścinanie k oraz, że wielkość przesunięcia materiału określa zależność

$$u_{AB} = u_A + u_B, \quad (8.82)$$

gdzie u_B określone jest za pomocą wyrażenia (8.78), a u_A wynosi

$$u_A = \int d\varphi_z^A dz = d\varphi_z^A z + C = d\varphi_z^A z. \quad (8.83)$$

Ponieważ $u_A = 0$ dla $z = 0$, to w powyższym równaniu stała całkowania C równa jest zero. Zatem, przesunięcie u_{AB} wynosi

$$u_{AB} = (d\varphi_z^A + d\varphi_z^B) z, \quad (8.84)$$

a po wykorzystaniu zależności (8.71) oraz (8.72)

$$u_{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi_i^A + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{b}{B-b} d\varphi_i^A \right) z = \frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi_i^A \frac{B}{B-b} z. \quad (8.85)$$

Praca ścinania wykonana na powierzchni AB wynosi więc

$$W_t^{AB} = \int_0^{h_p} k u_{AB} dz = k \frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi_i^A \frac{B}{B-b} \int_0^{h_p} z dz = \frac{\sqrt{3}}{4} k h_p^2 \frac{B}{B-b} d\varphi_i^A. \quad (8.86)$$

Ponieważ strefy „C” i „D” przyjęto jako sztywne, to praca wykonana przez siły styczne na powierzchniach ścinania pomiędzy strefami „B” i „C” oraz „B” i „D” jest taka sama. Elementarną pracę można wyznaczyć stosując zależność

$$dW_t^{BC} = dW_t^{BD} = k t_B dx. \quad (8.87)$$

Wartość przemieszczenia t_B wynosi

$$t_B = \int d\varphi_x^B dx = d\varphi_x^B x + C. \quad (8.88)$$

Stałą całkowania oblicza się korzystając z następującego warunku brzegowego

$$\left. \begin{array}{l} x = B, \\ t_B = 0. \end{array} \right\} \quad (8.89)$$

Podstawiając (8.89) do równania (8.88) otrzymuje się

$$C = -d\varphi_x^B B, \quad (8.90)$$

a następnie wyrażenie opisujące wartość przemieszczenia t_B

$$t_B = d\varphi_x^B x - d\varphi_x^B B = d\varphi_x^B (x - B). \quad (8.91)$$

Całkując zależność (8.87) uzyskuje się wyrażenie na pracę całkowitą tarcia

$$W_t^{BC} = W_t^{BD} = k \int_b^B d\varphi_x^B (x - B) dx = k d\varphi_x^B x \left(\frac{x}{2} - B \right) \Big|_b^B = k d\varphi_x^B \left(Bb - \frac{B^2 - b^2}{2} \right). \quad (8.92)$$

Wykorzystując zależności (8.72) i (8.73) otrzymuje się ostateczną postać wyrażenia określającego pracę ścinania między strefami „B” i „C” oraz „B” i „D”

$$W_t^{BC} = W_t^{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2} k \frac{b}{B-b} d\varphi_i^A \left(\frac{B^2 - b^2}{2} - Bb \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} k d\varphi_i^A b (B-b). \quad (8.93)$$

Całkowita praca rozproszona, w analizowanym procesie wyciskania przeciwbieżnego tulei, wynosi

$$W = W_p^A + W_p^B + W_t^{A0} + W_t^{AD} + 2W_t^{0B} + 2W_t^{AB} + 2W_t^{BC} + 2W_t^{BD}. \quad (8.94)$$

Podstawiając wzory określające poszczególne składowe pracy rozproszonej otrzymuje się

$$\begin{aligned} W = & 2b h_p \sigma_0 d\varphi_i^A + 2b h_p \sigma_0 d\varphi_i^A + mk \frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi_i^A b^2 + k \frac{\sqrt{3}}{2} d\varphi_i^A b^2 + \\ & + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} m k h_p^2 \frac{b}{B-b} d\varphi_i^A + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} k h_p^2 \frac{B}{B-b} d\varphi_i^A + \\ & + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} k d\varphi_i^A b (B-b) + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} k d\varphi_i^A b (B-b). \end{aligned} \quad (8.95)$$

Uwzględniając, że

$$\sigma_0 = \sqrt{3} k \quad (8.96)$$

po uszeregowaniu wyrazów uzyskuje się

$$W = 2b h_p \sigma_0 d\varphi_i^A \left[4 + \frac{b(m+1)}{2h_p} + \frac{h_p}{2b(B-b)}(mb+B) + \frac{B-b}{h_p} \right]. \quad (8.97)$$

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną P , działającą na stempel na drodze dh , określona jest zależnością

$$W = P dh = p 2b dh, \quad (8.98)$$

a po uwzględnieniu wyrażenia (8.67)

$$W_z = \sqrt{3} b h_p p d\varphi_i^A. \quad (8.99)$$

Z bilansu pracy włożonej (8.99) i dysypowanej (8.97) otrzymuje się wyrażenie określające nacisk jednostkowy stempla w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p}{2k} = 2 + \frac{2B + b(m-1)}{4h_p} + \frac{mb+B}{4b(B-b)} h_p. \quad (8.100)$$

Jak wynika z zależności (8.97) o wartości pracy decydują parametry ustalone oraz wysokość strefy uplastycznionej h_p . W przyjętym schemacie stanu odkształcenia wysokość h_p musi mieć taką wartość, aby całkowita praca na kinematycznie możliwych przemieszczeniach osiągnęła najmniejszą wartość. Musi więc być spełniony warunek:

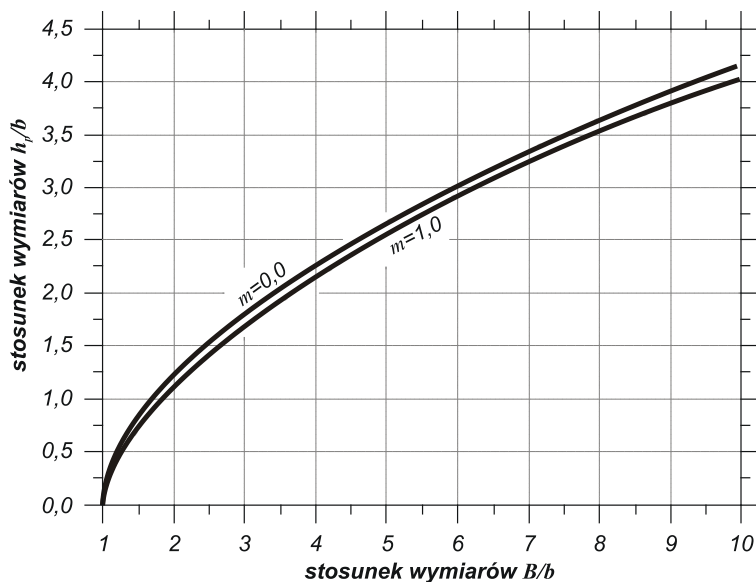
$$\frac{\partial W}{\partial h_p} = 0. \quad (8.101)$$

Różniczkując zależność (8.95) względem h_p otrzymuje się

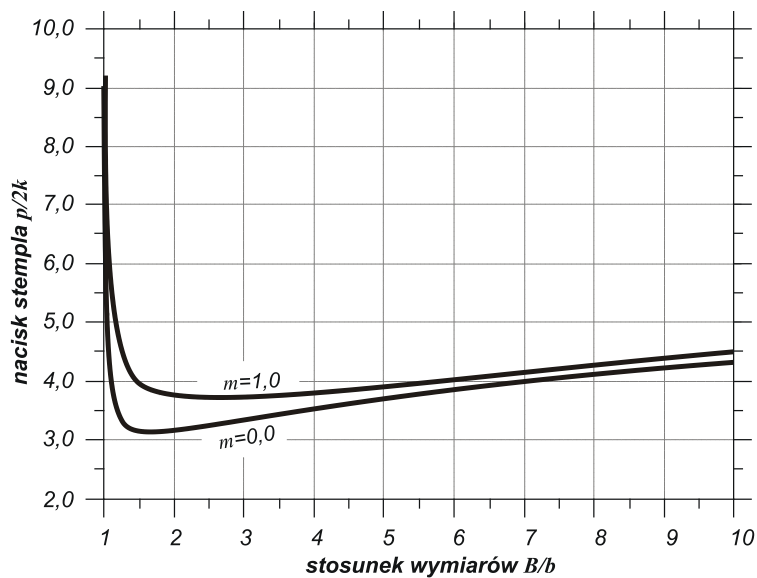
$$h_p = \sqrt{\frac{b(B-b)[2B+b(m-1)]}{mb+B}}. \quad (8.102)$$

Z zależności (8.100) i (8.102) wynika, że zarówno o rozległości strefy uplastycznionej jak i o wartości nacisku $p/2k$ decyduje głównie wartość stosunku wymiarów B/b , natomiast siły tarcia nie wpływają w tak dużym stopniu na h_p . Wpływ wartości stosunku B/b na wartość h_p/b przedstawiono na rys. 8.18, natomiast na rys. 8.19 zilustrowano wpływ tych parametrów na $p/2k$. Wykresy wykonano dla różnych wartości sił tarcia, określonych czynnikiem tarcia m .

W sposób analogiczny do przytoczonego powyżej można rozpatrzeć proces wyciskania przeciwbieżnego pasma. Schemat takiego procesu, wraz z podziałem na strefy, przedstawiono na rys. 8.17b.



Rys. 8.18. Zależność wymiarów h_p/b od stosunku B/b (oznaczenia zgodne z rys. 8.17a), obliczona dla procesu wyciskania przeciwbieżnego, przy $m=0$ i $m=1$



Rys. 8.19. Zależność nacisku powierzchniowego $p/2k$ od B/b w procesie wyciskania przeciwniebnego, przy $m=0$ oraz $m=1$

9. METODA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RÓWNOWAGI

9.1. Wiadomości podstawowe

Metoda równań różniczkowych równowagi⁹ (nazywana również metodą uproszczonej analizy) opiera się na równaniach równowagi i warunku plastyczności. Czasami stosowane uproszczenia są tak duże, że obliczone pole naprężeń nie jest statycznie dopuszczalne, a tym samym rozwiązanie nie stanowi jakiegś oceny, lecz powinno być traktowane jako rozwiązanie przybliżone o nieznanym stopniu tego przybliżenia. Tylko wówczas, gdy założenia prowadzą do statycznie dopuszczalnych pól naprężeń otrzymane rozwiązanie stanowi ocenę dolną. Pomimo podanych uproszczeń metoda ta jest bardzo często stosowana, a większość wzorów występujących w literaturze uzyskana została na jej podstawie.

Metoda równań różniczkowych równowagi polega na rozpatrzeniu warunków równowagi elementarnej objętości, wyciętej myślowo z odkształcanego ciała. Przy stosowaniu tej metody najczęściej wprowadza się następujące założenia upraszczające [42, 71, 73]:

- zadanie sprowadza się do układu osiowo-symetrycznego lub płaskiego, przy czym w przypadku układu płaskiego może być rozpatrywany płaski stan odkształcenia lub płaski stan naprężenia;
- elementy o kształcie złożonym dzieli się umownie na objętości, w których stan naprężenia można w przybliżeniu przyjąć jako płaski lub osiowo-symetryczny;
- równania plastyczności przyjmuje się w formie uproszczonej, odpowiadającej przyjętym stanom (osiowo-symetrycznemu lub płaskiemu).

Dzięki przyjętym uproszczeniom otrzymuje się z reguły jedno różniczkowe równanie równowagi, w którym pochodne cząstkowe zastępuje się pochodnymi zwykłymi.

⁹ Pierwsza publikacja na temat metody równań różniczkowych równowagi (z ang. *slab method*) pojawiła się w 1923 roku i przedstawiała sposób analizy spęczania próbki walcowej. Autorem był **Erich Siebel** (1891-1961), związany z niemieckim ośrodkiem naukowym, który sukcesywnie rozszerzał zastosowanie tej metodą na inne procesy obróbki plastycznej. Podobny sposób analizy procesu walcowania wzdłużnego pasma blachy przedstawił Th. Von Kármán (1925), a procesu ciągnięcia drutów – G. Sachs (1927). W drugiej połowie XX wieku, metoda ta była powszechnie stosowana w warunkach przemysłowych do wykonywania obliczeń inżynierskich.

W omawianej metodzie analizy zwykle zakłada się znajomość kierunków głównych oraz pomija się składowe styczne stanu naprężenia w warunku plastyczności. Jednakże składowe te z kolei uwzględnia się w warunku równowagi. Niejednokrotnie prowadzi to do sprzeczności, że pomimo występowania siły tarcia na powierzchni kontaktu materiału z narzędziem przyjmuje się kierunek naprężeń głównych prostopadły do tej powierzchni.

Stosując metodę równań różniczkowych równowagi wyznacza się rozkład nacisków i nacisk średni na powierzchni kontaktu metalu z narzędziem, co wystarcza (po uwzględnieniu powierzchni styku) do określenia siły odkształcenia.

9.2. Spęczanie swobodne bloku

Przeprowadzenie analizy procesu spęczania swobodnego bloku o przekroju prostokątnym, między dwiema sztywnymi płytami (rys. 9.1), wymaga poczynienia następujących założeń upraszczających:

- składowe naprężenia σ_x i σ_y nie zależą od współrzędnej y , a więc naprężenia te są stałe na grubości;
- wpływ naprężenia stycznego τ_{xy} na uplastycznienie materiału jest pomijalnie mały, w efekcie warunek plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia sprowadza się do postaci

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k, \quad (9.1)$$

a naprężenie styczne nie powoduje nierównomiernego odkształcenia się materiału;

- współczynnik tarcia μ jest stały na całej powierzchni styku materiału z narzędziem;
- rozpatrywany materiał zachowuje się jak materiał idealnie plastyczny.

Rozpatrując równowagę nieskończenie małego elementu, o wymiarach $2h$ oraz dx (rys. 9.1), w kierunku osi x otrzymuje się zależność

$$(\sigma_x + d\sigma_x) 2h - \sigma_x 2h - 2\tau_{xy} dx = 0. \quad (9.2)$$

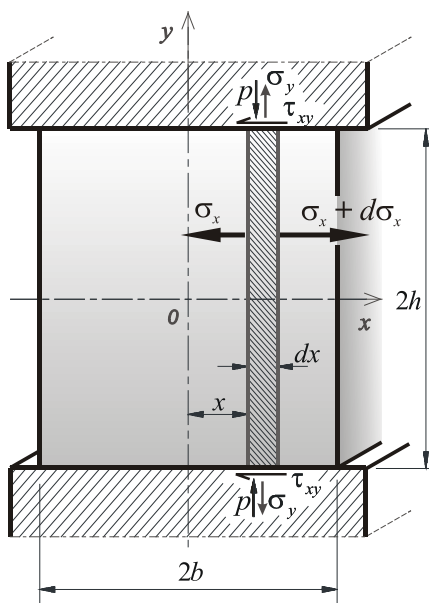
Zgodnie z prawem tarcia Amontonsa-Coulomba naprężenie τ_{xy} na powierzchni styku narzędzie-materiał wynosi

$$\tau_{xy} = \mu p. \quad (9.3)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do zależności (9.2) po przekształceniach uzyskuje się

$$\frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{\mu}{h} p = 0. \quad (9.4)$$

Wykorzystując zależność (9.1) po uwzględnieniu (zgodnie z zasadą akcji i reakcji), że



Rys. 9.1. Schemat działania naprężeń w procesie spęczania bloku, w warunkach płaskiego stanu odkształcenia

$$\sigma_y = -p \quad (9.5)$$

otrzymuje się warunek plastyczności w postaci

$$\sigma_x + p = 2k. \quad (9.6)$$

Po zróżniczkowaniu powyższej zależności względem x i po podstawieniu do warunku (9.4) otrzymuje się

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu}{h} dx. \quad (9.7)$$

Po scałkowaniu powyższego równania uzyskuje się zależność

$$\ln p = -\frac{\mu}{h} x + \ln C, \quad (9.8)$$

z której oblicza się nacisk jednostkowy

$$p = C \exp\left(-\frac{\mu}{h} x\right). \quad (9.9)$$

Stałą całkowania C , występującą w równaniu (9.8) oblicza się z warunku brzegowego powierzchni $x = \pm b$, na której naprężenie $\sigma_x = 0$. Wykorzystując uproszczony warunek plastyczności (9.6) dla tych powierzchni zapisuje się

$$p = 2k. \quad (9.10)$$

Z porównania zależności (9.9) i (9.10) oblicza się stałą całkowania C

$$C = 2k \exp\left(\frac{\mu}{h} b\right). \quad (9.11)$$

Podstawiając stałą całkowania C (9.11) do zależności (9.9) uzyskuje się wyrażenie na nacisk jednostkowy

$$p = 2k \exp\left[\frac{\mu}{h} (b - x)\right], \quad (9.12)$$

które przekształca się do postaci bezwymiarowej (odnoszącej się do granicy plastyczności metalu)

$$\frac{p}{2k} = \exp\left[\frac{\mu}{h}(b-x)\right]. \quad (9.13)$$

Z powyższego równania wynika, że rozkład nacisków jednostkowych na powierzchni styku jest nierównomierny. W płaszczyźnie symetrii (rys. 9.1), dla której $x = 0$, nacisk jest największy i wynosi

$$\frac{p}{2k} = \exp\left(\frac{\mu}{h}b\right). \quad (9.14)$$

Nacisk maleje w kierunku powierzchni bocznej ($x = b$), przy której osiąga wartość minimalną $p/2k = 1$.

Ze względu na nierównomierny rozkład nacisku jednostkowego p na powierzchni styku, oblicza się średni nacisk jednostkowy p_n korzystając z wzoru

$$p_n = \frac{1}{b} \int_0^b p \, dx. \quad (9.15)$$

Podstawiając zależność (9.12) do (9.15) otrzymuje się

$$p_n = \frac{1}{b} \int_0^b 2k \exp\left[\frac{\mu}{h}(b-x)\right] dx. \quad (9.16)$$

Powyższą całkę rozwiązuje się przez podstawienie

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu}{h}(b-x) &= a \\ da &= -\frac{h}{\mu} dx \end{aligned} \right\}. \quad (9.17)$$

Otrzymane rozwiązanie, po sprowadzeniu do postaci bezwymiarowej, wyrażone jest równaniem

$$\frac{p_n}{2k} = \frac{h}{\mu b} \left[\exp\left(\mu \frac{b}{h}\right) - 1 \right]. \quad (9.18)$$

Przedstawione rozwiązanie jest słuszne dopóty, dopóki wartość naprężenia stycznego na powierzchni styku narzędzia z materiałem nie przekroczy wartości granicy plastyczności materiału przy czystym ścinaniu

$$\tau_{xy} = \mu p \leq k. \quad (9.19)$$

Podstawiając maksymalną wartość nacisku p daną zależnością (9.14) do warunku (9.19) otrzymuje się

$$2\mu \exp\left(\frac{\mu}{h}b\right) \leq 1. \quad (9.20)$$

Stąd zaś uzyskuje się

$$\frac{b}{h} \leq \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{2\mu}. \quad (9.21)$$

Niespełnienie powyższego ograniczenia oznacza, że w środkowej części stempla (gdzie naciski są największe) naprężenia styczne byłyby większe od granicy plastyczności na ścinanie k . Ponieważ nie jest to możliwe w procesie realnym, zakłada się, że składowa naprężenia stycznego τ przyjmuje wartości

$$\tau_{xy} = \mu p \leq k, \text{ dla } a \leq x \leq b, \quad (9.22)$$

$$\tau_{xy} = k, \text{ dla } 0 \leq x \leq a, \quad (9.23)$$

gdzie a jest wartością graniczną współrzędnej x , rozdzielającą rozpatrywane podobszary. Wartość graniczną a wyznacza się korzystając z warunku

$$\mu p = k, \text{ dla } x = a. \quad (9.24)$$

Po uwzględnieniu zależności (9.12) powyższy warunek sprowadza się do postaci

$$2\mu \exp\left[\frac{\mu}{h}(b-a)\right] = 1, \quad (9.25)$$

z którego po przekształceniach uzyskuje się następującą zależność na wartość graniczną a

$$a = \frac{h}{\mu} \ln 2\mu + b. \quad (9.26)$$

Z zależności tej wynika, że a zależy od warunków tarcia i wymiarów spęzanego bloku, przy czym dla współczynnika tarcia $\mu = 0,5$ otrzymuje się $a = b$, co oznacza, że na całej powierzchni styku naprężenie τ_{xy} przyjmuje wartość graniczną równą k .

W celu wyznaczenia nacisku stempla w zakresie $0 \leq x \leq a$, po podstawieniu w równaniu (9.2) wartości k , w miejsce naprężenia stycznego τ_{xy} , otrzymuje się:

$$(\sigma_x + d\sigma_x)2h - \sigma_x 2h - 2k dx = 0. \quad (9.27)$$

Stąd po przekształceniach uzyskuje się

$$\frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{k}{h} = 0. \quad (9.28)$$

Następnie różniczkując zależność (9.6) uzyskuje się $d\sigma_x = -dp$. Po uwzględnieniu powyższego i po kolejnych przekształceniach otrzymuje się równanie różniczkowe

$$dp = -\frac{k}{h} dx, \quad (9.29)$$

z którego wyznacza się zależność na nacisk powierzchniowy

$$p = -\frac{k}{h}x + C. \quad (9.30)$$

Stałą całkowania C oblicza się korzystając z warunku, że dla $x = a$, nacisk jednostkowy p wyznaczony z zależności (9.12) musi być równy p obliczonemu z równania (9.30)

$$2k \exp\left[\frac{\mu}{h}(b-a)\right] = -\frac{k}{h}a + C. \quad (9.31)$$

Stąd

$$C = 2k \exp\left[\frac{\mu}{h}(b-a)\right] + \frac{k}{h}a. \quad (9.32)$$

Podstawiając do pierwszego składnika równania (9.32) zależność (9.26) na wartość graniczną a otrzymuje się

$$C = 2k \exp\left[\frac{\mu}{h}\left(b - \frac{h}{\mu} \ln 2\mu - b\right)\right] + \frac{k}{h}a = 2k \exp\left(\ln \frac{1}{2\mu}\right) + \frac{k}{h}a = \frac{k}{\mu} + \frac{k}{h}a. \quad (9.33)$$

Następnie, po uwzględnieniu otrzymanego wyrażenia na stałą całkowania w równaniu (9.30), uzyskuje się wyrażenie na nacisk jednostkowy

$$p = k \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{h}(a-x) \right] \quad (9.34)$$

i na nacisk jednostkowy w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{h}(a-x) \right]. \quad (9.35)$$

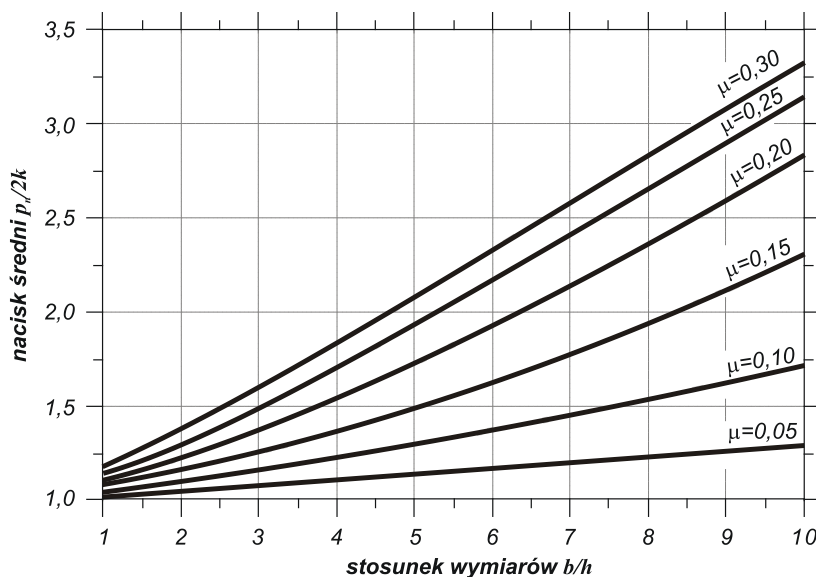
Ponieważ i w tym przypadku rozkład nacisku jednostkowego na powierzchni styku jest nierównomierny, wyznacza się średni nacisk jednostkowy korzystając z wzorów (9.13) i (9.35):

$$\frac{p_n}{2k} = \frac{1}{b} \left\{ \int_0^a \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{h}(a-x) \right] dx + \int_a^b \exp\left[\frac{\mu}{h}(b-x)\right] dx \right\}. \quad (9.36)$$

Po scałkowaniu i zgrupowaniu wyrazów uzyskuje się ostateczną postać wyrażenia na średni nacisk jednostkowy w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p_n}{2k} = \frac{1}{2b} \left(\frac{a^2}{2h} + \frac{a}{\mu} + \frac{h}{\mu^2} - \frac{2h}{\mu} \right). \quad (9.37)$$

Zależność średnich nacisków $p_n/2k$ od stosunku wymiarów spęczanego bloku b/h i współczynnika tarcia μ obliczoną z równań (9.18) i (9.37) przedstawiono na rys. 9.2. Należy zauważyć, że zastosowanie metody równań różniczkowych równowagi do analizy procesu spęczania bloku pozwala nie tylko na wy-



Rys. 9.2. Zależność $p_n/2k$, od stosunku wymiarów b/h i współczynnika tarcia μ , w procesie spęczania bloku

znaczenie siły spęczającej i nacisków średnich, lecz również na obliczenie rozkładu nacisków występujących na powierzchni styku materiału z narzędziem.

9.3. Kucie w matrycach otwartych

Kucie matrycowe wypływkowe jest procesem technologicznym realizowanym w matrycach otwartych (rys. 9.3), gdzie nagrany materiał układa się w wykroju matrycy dolnej 1, a następnie pod wpływem uderzeń lub nacisku matrycy górnej 3 materiał odkształca się i wypełnia wykrój 2, przyjmując jego kształt. Nadmiar metalu po wypełnieniu wykroju wypływa pomiędzy matryce w płaszczyźnie podziału 5 tworząc wypływkę 4, której objętość może stanowić 20-30% objętości materiału wsadu.

Przy kuciu w matrycach otwartych wypełnienie wykroju może odbywać się przez **spęczanie**, **dziurowanie** lub **wyciskanie**. Jeżeli odkuwki mają kształt bardziej złożony to proces wypełnienia może odbywać się na drodze równoczesnego spęczania i dziurowania czy też spęczania, dziurowania i wyciskania.

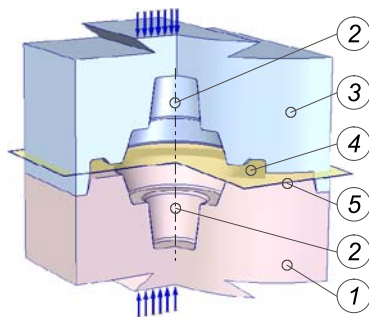
Proces wypełnienia wykroju dla każdego schematu można podzielić na kilka etapów. Jak wykazały badania doświadczalne [20, 21, 50, 70, 72] zarówno stan

naprężenia jak i schemat płynięcia ulega zmianie w poszczególnych etapach procesu kucia. Zmienia się również siła odkształcenia, która najwyższą wartość przyjmuje w ostatnim etapie kształtowania, kiedy to odkuwka ma najniższą temperaturę i największe wymiary. W związku z tym siłę odkształcenia wyznacza się dla końcowego etapu kucia.

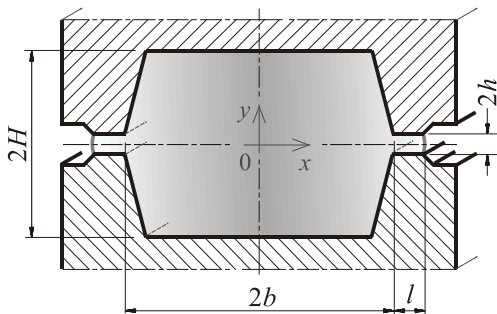
Kucie matrycowe w warunkach płaskiego stanu odkształcenia rozpatruje się w sposób podobny do spęczniania swobodnego. Z tego też powodu częściowo w podanej analizie wykorzystane będą wzory wyprowadzone w poprzednim podrozdziale 9.2. Wyznaczenie siły kucia przeprowadza się dla zaawansowanego stadium procesu, kiedy materiał po wypełnieniu wykroju matrycy wypływa na boki tworząc wypływkę – rys. 9.4.

Zakłada się, że materiał płynie tylko w środkowej części odkuwki o wysokości $2h$ równej wysokości mostka na wypływkę. Rozpatrując tylko ten obszar dokonuje się jego podziału na dwa podobszary – zgodnie z rys. 9.5. Podobszar „A” obejmuje materiał odkuwki na szerokości $0 \leq x \leq b$, a podobszar „B” dotyczy materiału zgniatanego w mostku wypływki $b \leq x \leq b+l$. Ponadto zakłada się, że na powierzchniach $y = \pm h$ podobszaru „A” występuje czyste ścinanie ($\tau_{xy} = k$). Natomiast wartość naprężenia stycznego τ_{xy} w podobszarze „B” zależy od warunku (9.26). Rozpatrzmy przypadek, w którym warunek ten jest spełniony w całym podobszarze „B”, czyli:

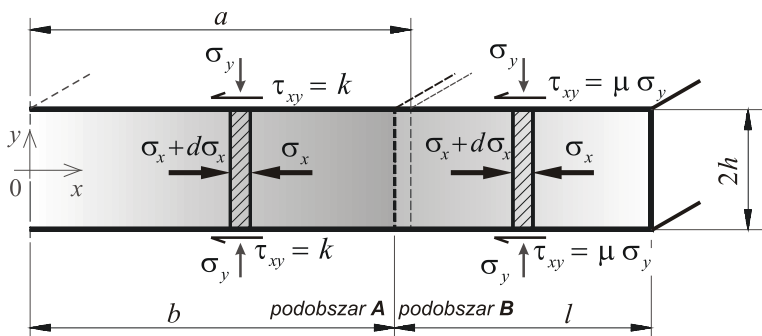
$$a = h \frac{\ln 2\mu}{\mu} + b + l \leq b, \quad (9.38)$$



Rys. 9.3. Kucie w matrycach otwartych (opis w tekście)



Rys. 9.4. Końcowy etap procesu kucia wypływkowego, realizowanego w matrycach otwartych



Rys. 9.5. Rozkład naprężeń w środkowej uplastycznionej części odkuwki

a po uproszczeniu

$$a = h \frac{\ln 2\mu}{\mu} + l \leq 0. \quad (9.39)$$

Dla tego przypadku składowa naprężenia $\sigma_y/2k$ w podobszarze „B” równa jest $-p/2k$ i określona zależnością (9.13)

$$\frac{\sigma_y^B}{2k} = -\exp\left[\frac{\mu}{h}(b+l-x)\right], \text{ dla } b \leq x \leq b+l. \quad (9.40)$$

Wykorzystując warunek równowagi dla płaskiego stanu odkształcenia w postaci

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k \quad (9.41)$$

lub

$$\frac{\sigma_x}{2k} - \frac{\sigma_y}{2k} = 1, \quad (9.42)$$

wyznacza się składową naprężenia $\sigma_x/2k$ w rozpatrywanym podobszarze „B”

$$\frac{\sigma_x^B}{2k} = 1 + \frac{\sigma_y}{2k}, \quad (9.43)$$

która po uwzględnieniu zależności (9.40) przyjmuje ostatecznie postać

$$\frac{\sigma_x^B}{2k} = 1 - \exp\left[\frac{\mu}{h}(b+l-x)\right], \text{ dla } b \leq x \leq b+l. \quad (9.44)$$

Następnie rozpatrując równowagę elementu wydzielonego w podobszarze „A” – rys. 9.5 zapisuje się

$$(\sigma_x + d\sigma_x)2h - \sigma_x 2h - 2k dx = 0. \quad (9.45)$$

Stąd po przekształceniach wyznacza się równanie różniczkowe równowagi wydzielonego elementu

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{k}{h}. \quad (9.46)$$

Po całkowaniu powyższego równania uzyskuje się zależność

$$\sigma_x^A = k \frac{x}{h} + C. \quad (9.47)$$

Stałą całkowania C wyznacza się z warunku brzegowego na powierzchni rozgraniczającej oba podobszary, tzn. dla $x = b$, gdzie $\sigma_x^A = \sigma_x^B$. Zatem korzystając z wzorów (9.44) i (9.47) otrzymuje się

$$2k \left[1 - \exp\left(\frac{\mu}{h} l\right) \right] = k \frac{b}{h} + C. \quad (9.48)$$

Stąd

$$C = 2k \left[1 - \exp\left(\frac{\mu}{h} l\right) \right] - k \frac{b}{h}. \quad (9.49)$$

Wstawiając powyższą zależność do równania (9.47) otrzymuje się wyrażenie na σ_x^A

$$\sigma_x^A = 2k \left[1 - \exp\left(\frac{\mu}{h} l\right) \right] - k \frac{b-x}{h}, \quad (9.50)$$

które w postaci bezwymiarowej zapisuje się jako

$$\frac{\sigma_x^A}{2k} = 1 - \exp\left(\frac{\mu}{h} l\right) - \frac{b-x}{2h}. \quad (9.51)$$

Następnie wykorzystując warunek plastyczności (9.42) oblicza się składową naprężenia σ_y^A , w postaci bezwymiarowej, w rozpatrywanym podobszarze „A”

$$\frac{\sigma_y^A}{2k} = -\exp\left(\frac{\mu}{h} l\right) - \frac{b-x}{2h}. \quad (9.52)$$

Średni nacisk oblicza się z zależności

$$\frac{p_n}{2k} = \frac{1}{b+l} \left(\int_0^b \frac{\sigma_y^A}{2k} dx + \int_b^{b+l} \frac{\sigma_y^B}{2k} dx \right). \quad (9.53)$$

Wykorzystując wzory (9.40) i (9.52), po scałkowaniu i zgrupowaniu wyrazów, otrzymuje się ostateczną postać wyrażenia na średni nacisk jednostkowy wyrażony w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p_n}{2k} = \frac{1}{b+l} \left[\frac{h}{\mu} - \exp\left(\frac{\mu}{h} l\right) \left(b + \frac{h}{\mu} \right) - \frac{b^2}{4h} \right]. \quad (9.54)$$

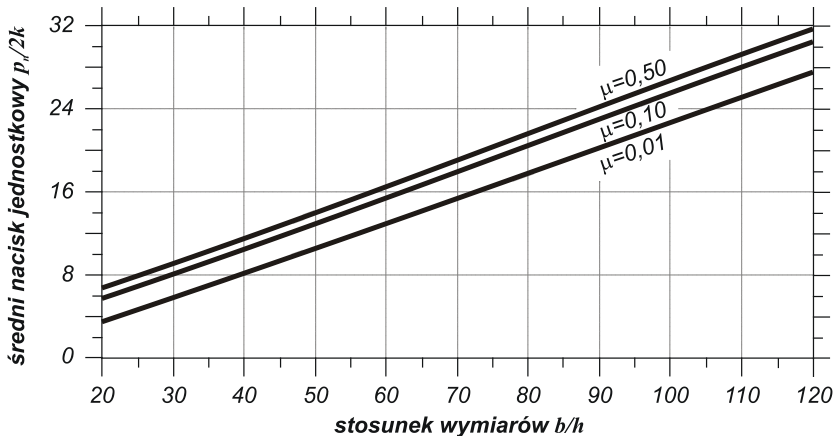
W przypadku, gdy warunek (9.39) nie jest spełniony w całym obszarze $b \leq x \leq b+l$, należy w pierwszej kolejności wyznaczyć wartość graniczną a . W tym celu korzysta się z zależności (9.26), która dla analizowanego przypadku przybiera postać

$$a = h \frac{\ln 2\mu}{\mu} + b + l. \quad (9.55)$$

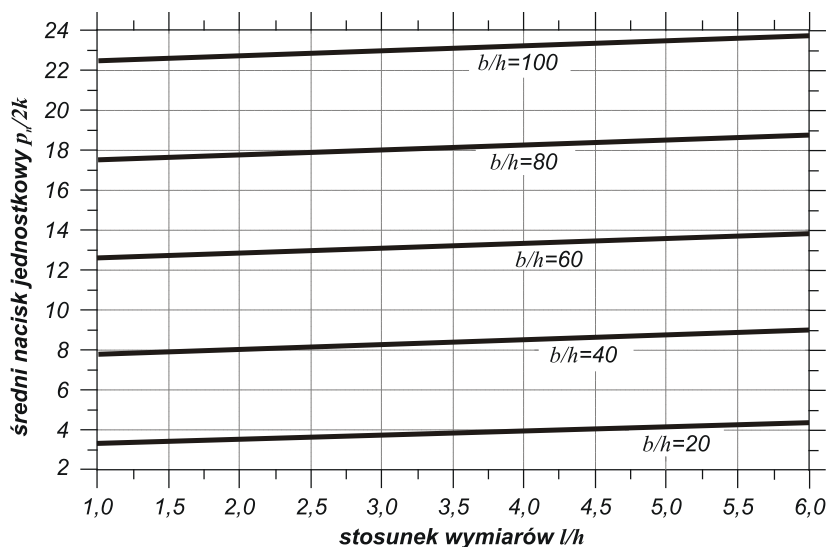
W podanej sytuacji, rozpatrzonej w podrozdziale 9.2, do obliczania średniego nacisku powierzchniowego stosowana jest zależność (9.37)

$$\frac{p_n}{2k} = \frac{1}{2(b+l)} \left\{ \frac{a^2}{2h} + \frac{a}{\mu} + \frac{h}{\mu^2} - \frac{2h}{\mu} \right\}. \quad (9.56)$$

Zależność średnich nacisków jednostkowych $p_n/2k$, w funkcji stosunku wymiarów b/h oraz wartości współczynnika tarcia μ , obliczoną na podstawie wzorów (9.54) i (9.56) podaje się na rys. 9.6. Natomiast na rys. 9.7 przedstawia się wpływ wymiarów l i h mostka rowka na wypływkę (przy różnych wartościach b/h) na wartość nacisku $p_n/2k$.



Rys. 9.6. Zależność nacisków jednostkowych $p_n/2k$ od stosunku wymiarów b/h , uzyskana przy różnych wartościach współczynnika tarcia μ



Rys. 9.7. Wpływ wymiarów rowka na wypływkę (l/h) na wartość nacisków jednostkowych $p_n/2k$, przy różnym stosunku wymiarów b/h , gdy współczynnik tarcia $\mu=0,1$

9.4. Tłoczenie blach

W analizie procesów tłoczenia blach wykorzystuje się **model powłoki błonowej**, któremu przypisuje się następujące cechy [38]:

- zdolność przenoszenia sił jednostkowych $F_1 = \sigma_1 g$ i $F_2 = \sigma_2 g$ działających w kierunkach głównych 1 i 2, leżących w płaszczyźnie stycznej do powłoki;
- idealną wiotkość, tzn. niezdolność przenoszenia momentów zginających i sił poprzecznych;
- zdolność do odkształceń plastycznych zachodzących w warunkach płaskiego stanu naprężenia, gdy spełniony jest warunek plastyczności

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_p, \quad (9.57)$$

przy czym w analizie procesów tłoczenia na ogół pomija się odkształcenia sprężyste, zakładając sztywno-plastyczny model kształtowanego ciała;

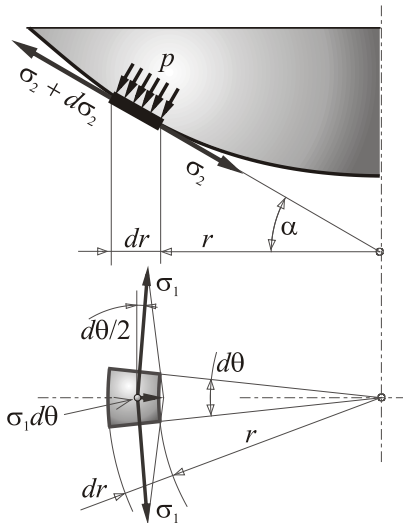
- idealną jednorodność powłoki, zgodnie z którą jednostkowa siła uplastyczniająca $F_p = \sigma_p g$ jest jednakowa w każdym punkcie powłoki; warunek ten jest spełniony, gdy powłoka ma stałą grubość ($g = \text{const.}$) i wykonana jest z materiału o jednorodnych własnościach plastycznych ($\sigma_p = \text{const.}$);

- w miejscu zetknięcia powłoki z narzędziem nie występuje tarcie; w efekcie nacisk p wywierany przez narzędzie działa prostopadłe do powierzchni powłoki.

Wymienione powyżej cechy powłoki łatwiej spełniają wytłoczki o grubości dużo mniejszej od jej pozostałych wymiarów, które są kształtowane z jednorodnej blachy w procesie realizowanym z udziałem bardzo małych sił tarcia (np. poprzez wytłaczanie zachodzące pod wpływem ciśnienia cieczy). W innych procesach wytłaczania przyjęcie teorii błonowej obarczone jest błędami wynikającymi z niespełnienia jednej lub kilku cech przyporządkowanych modelowi powłoki błonowej.

9.4.1. Warunki równowagi

Na rys. 9.8 pokazano element wyodrębniony w kołowo-symetrycznej powłoce, którego wymiary określają dwie współosiowe powierzchnie walcowe (o promieniach r i $r+dr$) oraz dwie płaszczyzny przechodzące przez oś powłoki i tworzące ze sobą kąt $d\Theta$. Na wyodrębniony w ten sposób element działają: naprężenia obwodowe σ_1 , naprężenia południkowe σ_2 oraz ciśnienie p wywierane prostopadłe do powłoki. Ze względu na symetrię samej powłoki jak i działających na nią obciążeń, analizę ogranicza się do rozpatrzenia warunków równowagi sił działających w dwóch kierunkach: stycznym i normalnym do zarysu powłoki w płaszczyźnie przechodzącej przez jej oś symetrii.



Rys. 9.8. Schemat działania naprężeń na element powłoki błonowej

Rozpatrując równowagę sił działających w kierunku stycznym do rozpatrywanego elementu powłoki pomija się siłę pochodzącą od ciśnienia p , które działa prostopadłe do obranego kierunku. Siła pochodząca od naprężeń σ_2 działająca na wewnętrzny bok elementu wynosi $\sigma_2 g r d\Theta$, natomiast siła działająca na bok zewnętrzny równa jest $(\sigma_2 + d\sigma_2) g (r + dr) d\Theta$. Naprężenia σ_1 działające na dwa pozostałe boki elementu (o powierzchni $g dr / \cos \alpha$) dają siłę wypadkową (działającą wzdłuż promienia, prostopadłe do osi symetrii powłoki) o wartości $\sigma_1 g dr d\Theta / \cos \alpha$.

Warunek równowagi sił działających w kierunku stycznym zapisany jako

$$(\sigma_2 + d\sigma_2) g(r + dr) d\Theta - \sigma_2 g r d\Theta - \frac{\sigma_1 g dr}{\cos \alpha} d\Theta \cos \alpha = 0, \quad (9.58)$$

po wymnożeniu oraz uproszczeniach przyjmuje postać

$$\sigma_2 dr + d\sigma_2 r + d\sigma_2 dr - \sigma_1 dr = 0. \quad (9.59)$$

Pomijając w powyższej zależności wyrażenie $d\sigma_2 dr$, jako małą wyższego rzędu, otrzymuje się równanie

$$dr \sigma_2 + r d\sigma_2 - dr \sigma_1 = 0, \quad (9.60)$$

z którego po podzieleniu obu stron równania przez $r dr$ uzyskuje się

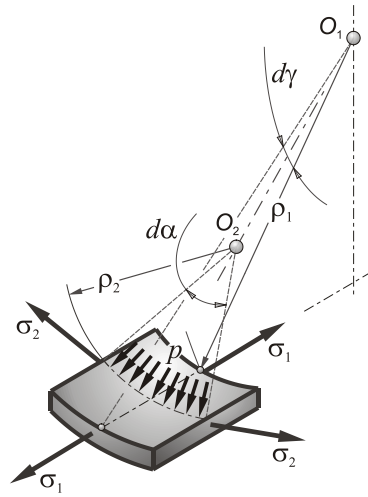
$$\frac{d\sigma_2}{dr} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r} = 0, \quad (9.61)$$

Drugie równanie wyznacza się z warunku równowagi sił działających w kierunku normalnym do rozpatrywanego elementu (rys. 9.9). Jeżeli założyć się, że promień krzywizny powłoki w płaszczyźnie południkowej przechodzącej przez oś symetrii wynosi ρ_2 , a promień krzywizny w płaszczyźnie prostopadłej do poprzedniej (o środku O_1 leżącym na osi powłoki) równy jest ρ_1 to długości boków wyodrębnionego elementu równe będą odpowiednio $\rho_2 d\alpha$ i $\rho_1 d\gamma$ (gdzie $d\alpha$ oraz $d\gamma$ oznaczają kąty, pod którymi widać element ze środków krzywizn O_1 oraz O_2). Jeżeli na krawędzie wyodrębnionego w ten sposób elementu działać będą naprężenia σ_1 i σ_2 , a na powierzchnię nacisk normalny p , to warunek równowagi sił działających w kierunku normalnym zapisuje się w postaci:

$$\rho_2 d\alpha g \sigma_1 d\gamma + \rho_1 d\gamma g \sigma_2 d\alpha = p \rho_1 d\alpha \rho_2 d\gamma. \quad (9.62)$$

Po podzieleniu obu stron równania przez $g \cdot \rho_1 d\alpha \rho_2 d\gamma$ ostatecznie otrzymuje się

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{g}. \quad (9.63)$$



Rys. 9.9. Schemat powłoki błonowej wykorzystywany do wyznaczenia warunku równowagi w kierunku normalnym

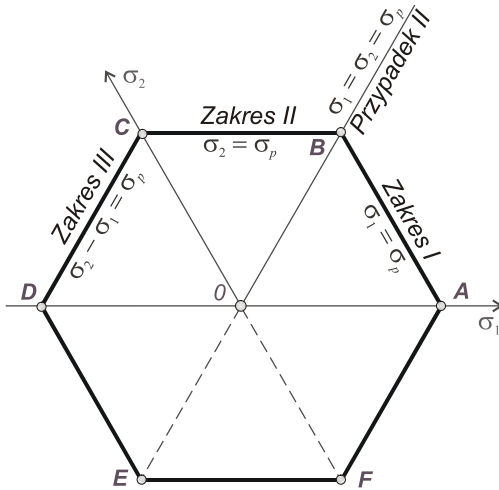
9.4.2. Rozkład naprężeń

Otrzymane warunki równowagi (9.61) i (9.63) wraz z warunkiem plastyczności (9.57) tworzą układ trzech równań, z którego można obliczyć naprężenia σ_1 , σ_2 i nacisk p . Ponieważ nacisk p występuje tylko w równaniu (9.63) to do wyznaczenia rozkładów naprężeń σ_1 i σ_2 , w funkcji promienia r , wykorzystuje się warunek równowagi (9.61) przekształcony do postaci:

$$\frac{d\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} = -\frac{dr}{r} \quad (9.64)$$

oraz warunek plastyczności.

Na rys. 9.10 przedstawiono, w ukośnokątnym układzie współrzędnych, warunek plastyczności Treski dla płaskiego stanu naprężenia. Ponieważ przyjęty model powłoki wiotkiej nie może być stosowany do analizowania procesów ściskania rozważania zawężymy do przypadków, w których naprężenia południkowe są rozciągające ($\sigma_2 > 0$). W takim przypadku warunek plastyczności Treski zapisuje się jako (rys. 9.10):



Rys. 9.10. Warunek plastyczności Treski, przedstawiony w ukośnokątnym układzie współrzędnych

$$\sigma_1 = \sigma_p, \text{ gdy } 0 < \sigma_2 < \sigma_p, \quad (9.65a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_p, \text{ gdy } 0 < \sigma_1 < \sigma_p, \quad (9.65b)$$

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_p, \text{ gdy } 0 < \sigma_1 < \sigma_p. \quad (9.65c)$$

Każdy z podanych powyżej warunków plastyczności odpowiada określonemu schematowi naprężeń i tylko w tym zakresie może być stosowany. Zatem w zależności od zastosowanego sposobu obciążenia powłoki rozróżnić można trzy następujące zakresy naprężeń:

Zakres I

Zakres ten, odpowiadający bokowi AB sześciokąta z rys. 9.10, reprezentuje rozciąganie pierścieni o swobodnej krawędzi wewnętrznej. W tym przypadku dla wyznaczenia rozkładu naprężeń σ_2 należy rozwiązać układ równań (9.65a) oraz (9.64). Podstawiając σ_p w miejsce σ_1 do równania (9.64) po scałkowaniu otrzymuje się

$$\ln(\sigma_2 - \sigma_p) = -\ln r + C. \quad (9.66)$$

Dla określenia stałej całkowania C przyjmuje się, że dla $r = r_0$ naprężenie $\sigma_2 = 0$. Po podstawieniu tych wartości do równania (10.66) uzyskuje się zależność

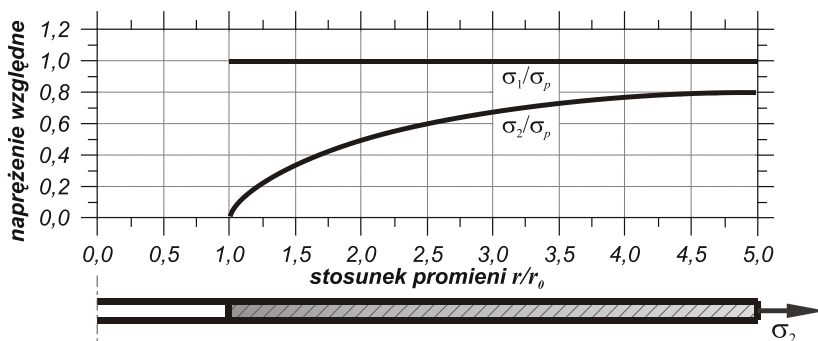
$$\ln(-\sigma_p) = -\ln r_0 + C. \quad (9.67)$$

Po odjęciu od siebie równań (9.66) i (9.67) oraz przekształceniach ostatecznie otrzymuje się

$$\sigma_2 = \sigma_p \left(1 - \frac{r_0}{r} \right), \quad (9.68)$$

przy czym z warunku plastyczności mamy $\sigma_1 = \sigma_p$.

Spełnienie warunku $\sigma_2 > 0$ wymaga żeby $r > r_0$. Zatem otrzymany rozkład naprężeń odpowiada pierścieniowi, którego krawędź wewnętrzna o promieniu r_0 jest wolna od obciążeń, gdy na krawędź zewnętrzną działają naprężenia σ_2 . Na rys. 9.11 zilustrowano graficznie rozkład naprężeń dla procesu rozciągania powłok z otworem (o promieniu r_0).



Rys. 9.11. Rozkład naprężeń w procesie rozciągania powłoki z otworem

Zakres II

Zakres ten odpowiada bokowi BC sześciokąta z rys. 9.10. Warunek plastyczności (9.65b) dla tego przypadku przyjmuje postać $\sigma_2 = \sigma_p = \text{const}$. W tym przypadku $d\sigma_2/dr = 0$, a zależność (9.64) może być spełniona tylko dla jednorodnego stanu dwuosiowego rozciągania (odpowiadającego punktowi B – rys. 9.11), dla którego

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_p. \quad (9.69)$$

Zakres III

Zakres ten odpowiada bokowi CD sześciokąta z rys. 9.10, dla którego $-\sigma_p < \sigma_1 < 0$ oraz $0 < \sigma_2 < \sigma_p$. Dla tego przypadku rozwiązując układ równań (9.64) i (9.65c) otrzymuje się zależność

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_p} = -\ln r + C. \quad (9.70)$$

Oznaczając przez R promień krawędzi swobodnej powłoki, dla której $\sigma_2 = 0$ otrzymuje się

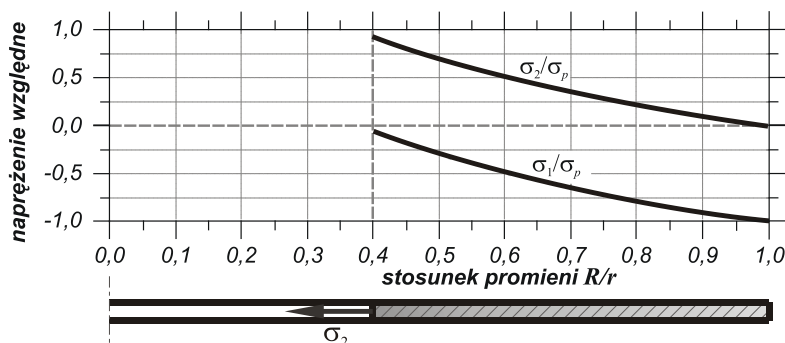
$$\sigma_2 = \sigma_p \ln \frac{R}{r}. \quad (9.71)$$

Następnie korzystając z równania (9.65c) oblicza się naprężenie σ_1 , które wynosi

$$\sigma_1 = \sigma_p \left(\ln \frac{R}{r} - 1 \right). \quad (9.72)$$

Z warunku (9.65c) wynika, że $0 < \ln R/r < 1$, czyli $R/e < r < R$. Oznacza to, że rozkład naprężeń określonych zależnościami (9.71) i (9.72) może wystąpić w pierścieniu, na którego krawędź wewnętrzną (o promieniu większym od R/e) działa naprężenie σ_2 . Przypadek takiego rozciągania pokazano na rys. 9.12. W sytuacji, gdy promień wewnętrzny jest mniejszy od R/e naprężenia σ_2 przyłożone do krawędzi wewnętrznej nie mogą wywołać plastycznego płynięcia pierścienia. Wówczas ma miejsce lokalne uplastycznienie materiału w obszarze przylegającym do miejsca oddziaływania naprężeń σ_2 .

Analiza rozkładu naprężeń w procesach kształtowania blach, wykonana przy założeniu warunku plastyczności Hubera przedstawiona jest w literaturze specjalistycznej, np. w opracowaniach [37, 38].



Rys. 9.12. Rozkład naprężeń w procesie ciągnięcia powłoki z otworem

9.4.3. Nacisk powierzchniowy

W przypadku gdy znany jest rozkład naprężeń σ_1 i σ_2 , w funkcji promienia r , można wyznaczyć na podstawie równania (9.63) nacisk normalny p wywierany przez narzędzie.

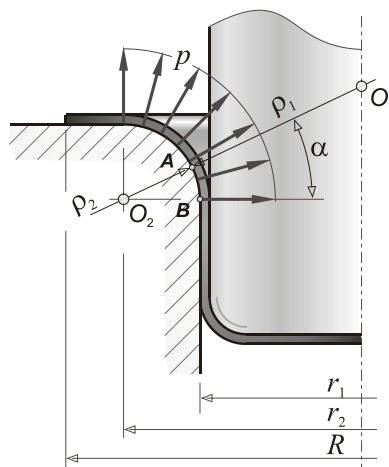
Dla zilustrowania metodyki postępowania przy określaniu nacisku przedstawia się analizę procesu ciągnięcia w matrycy ciągowej o promieniu $\rho = r_2 + g/2$ (rys. 9.13) wytłoczki o promieniu zewnętrznym równym R . Rozpatrując geometrię powłoki w punkcie A leżącym w odległości

$$r_A = r_2 - \rho_2 \cos \alpha \quad (9.73)$$

od osi symetrii wyznacza się promień krzywizny powłoki ρ_1 , w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni rysunku, który wynosi

$$\rho_1 = -\left(\frac{r_2}{\cos \alpha} - \rho_2\right), \quad (9.74)$$

gdzie: ρ_2 – promień krzywizny w płaszczyźnie południkowej. Ujemny znak promienia ρ_1 wynika z tego, że jego zwrot jest przeciwny do zwrotu wektora nacisku powierzchniowego p .



Rys. 9.13. Rozkład nacisków w procesie ciągnięcia powłoki błonowej (opis w tekście)

W procesie wytłaczania schemat obciążenia powłoki odpowiada zakresowi III stanu naprężeń, w którym krawędź zewnętrzna pierścienia odkształcanego jest wolna od obciążeń. Zatem zgodnie z zależnościami (9.71) i (9.72) naprężenia σ_1 i σ_2 w punkcie leżącym na promieniu r_A wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_p \ln \frac{R}{r_A} \\ \sigma_1 &= \sigma_p \left(\ln \frac{R}{r_A} - 1 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (9.75)$$

gdzie r_A jest uzależnione od kąta α , w sposób określony wyrażeniem (9.73). Po podstawieniu zależności (9.74) oraz (9.75) do równania równowagi (9.63) oblicza się nacisk p , w funkcji kąta α . Wyznaczony w ten sposób nacisk p (pokazany na rys. 9.13) przyjmuje największe wartości w punkcie B, dla którego:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= r_1, \\ \sigma_2 &= \sigma_p \ln \frac{R}{r_1}, \\ \sigma_1 &= \sigma_p \left(\ln \frac{R}{r_1} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.76)$$

Stąd ostatecznie oblicza się nacisk maksymalny, który dla rozważanego przypadku kształtowania wynosi

$$p_B = \sigma_p \left(\frac{\ln \frac{R}{r_1}}{\rho_2} + \frac{\ln \frac{R}{r_1} - 1}{r_1} \right). \quad (9.77)$$

10. METODA OCEN GRANICZNYCH

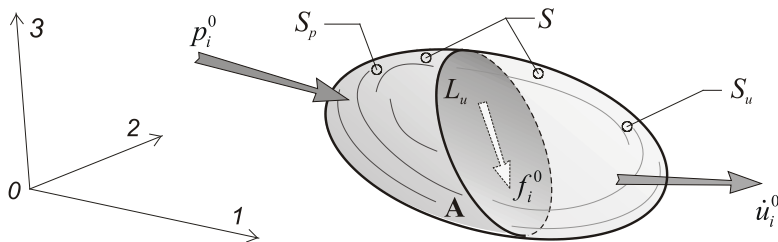
10.1. Wiadomości podstawowe

Metoda ocen granicznych jest metodą przybliżoną pozwalającą na dwustronne oszacowanie obciążeń uplastyczniających, potrzebnych do realizacji procesów obróbki plastycznej. W przypadku ogólnym metoda ta nie daje możliwości wyznaczenia rzeczywistego pola naprężeń oraz rzeczywistego pola prędkości. Jedynie w przypadku szczególnym, gdy oszacowania dolne i górne są sobie równe otrzymuje się rozwiązanie ścisłe, a przyjęte pola naprężeń i prędkości przemieszczeń są rzeczywiste.

Do wyznaczenia obciążeń granicznych potrzebna jest znajomość lub założenie *a priori* dopuszczalnych pól naprężeń, pól prędkości odkształceń, warunku plastyczności i prawa plastycznego płynięcia. Warunkiem wystarczającym jest aby znane lub założone pole naprężeń było statycznie dopuszczalne, a pole prędkości odkształceń tylko kinematycznie dopuszczalne. Dopuszczalność tych pól oznacza, że spełniają one pewne związki i odpowiednie warunki brzegowe.

Pomimo założeń upraszczających trafność otrzymanych rozwiązań w wielu przypadkach potwierdzają wyniki badań weryfikujących. Natomiast prostota analizy i niska pracochłonność czyni metodę ocen granicznych bardzo przydatną w praktyce, przy wstępnych opracowaniach procesu technologicznego. Wówczas rozwiązanie ścisłe nie jest wymagane, a znajomość obciążeń uplastyczniających pozwala na prawidłowy dobór maszyn lub ich zaprojektowanie łącznie z oprzyrządowaniem.

Rozpatrzmy pewien ośrodek ciągły (ciało A) ograniczone powierzchnią S (rys. 10.1). Wewnątrz tego ciała dopuszcza się istnienie **powierzchni nieciągłości** L_u . Zakłada się, że na części powierzchni tego ciała S_p zadane jest obciążenie powierzchniowe $p_i^0 = p_i^0(x_j)$, a na pozostałej powierzchni tego ciała S_u zadane jest pole prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i^0 = \dot{u}_i^0(x_j)$. Wewnątrz tego ośrodka może występować pole sił masowych $f_i^0 = f_i^0(x_j)$. W przyjętym sposobie oznaczeń indeks górny „0” oznacza znajomość wartości tych wielkości. Występującemu obciążeniu odpowiadają rzeczywiste pole naprężeń $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k)$ i rzeczywiste pole prędkości przemieszczeń $\dot{u}_j = \dot{u}_j(x_k)$, i prędkości odkształceń $\dot{\phi}_{ij} = \dot{\phi}_{ij}(x_k)$ wynikające ze ścisłego rozwiązania rozpatrywanego problemu. Jednakże to rozwiązanie ścisłe nie jest znane. **Twierdzenia ekstremalne** pozwalają



Rys. 10.1. Ciało A (ośrodek ciągły), ograniczone powierzchnią S , ilustrujące sposób wyznaczania dolnej i górnej oceny obciążenia granicznego

na oszacowanie wartości oceny dolnej i oceny górnej wartości obciążenia uplastyczniającego [4].

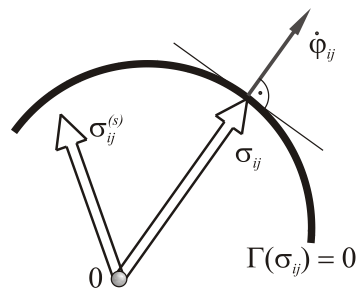
10.1.1. Ocena dolna wartości obciążenia granicznego

Przyjmijmy w ciele A z rys. 10.1 dowolny stan naprężenia $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^s(x_k)$, który spełnia następujące warunki statyczne:

- równanie równowagi wewnętrznej,
- warunki brzegowe na powierzchni S_p ,
- warunek plastyczności.

Ze względu na spełnienie powyższych warunków przyjęty stan naprężenia σ_{ij}^s nazywa się statycznie dopuszczalnym, w odróżnieniu od rzeczywistego stanu naprężenia σ_{ij} spełniającego również warunki kinematyczne dla rozpatrywanego problemu (rys. 10.2).

Twierdzenie o ocenie dolnej zapisuje się w postaci: *Przy plastycznym płynięciu ciała A moc rzeczywistych sił powierzchniowych p_i rozwijana na rzeczywistym polu prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$ jest większa lub równa mocy sił powierzchniowych p_i^s , wynikających z dowolnie przyjętego statycznie dopuszczalnego stanu naprężenia σ_{ij}^s na tymże, rzeczywistym polu prędkości przemieszczeń.* Twierdzenie to zapisuje się jako:



Rys. 10.2. Schemat do wyznaczania oceny dolnej obciążenia granicznego

$$\int_{S_u} p_i \dot{u}_i ds \geq \int_{S_u} p_i^s \dot{u}_i ds. \quad (10.1)$$

Wynika stąd, że dla dowolnie przyjętego statycznie dopuszczalnego stanu naprężenia otrzymuje się tylko ocenę dolną rzeczywistych sił powierzchniowych, powodujących płynięcie plastyczne ciała A.

10.1.2. Ocena górna wartości obciążenia granicznego

Założmy teraz w ciele A (rys. 10.1) dowolny mechanizm płynięcia plastycznego, w postaci pola prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i^k = \dot{u}_i^k(x_j)$ i odpowiadające temu polu prędkości – pole prędkości odkształceń $\dot{\phi}_{ij}^k = \dot{\phi}_{ij}^k(x_j)$, które spełniają:

- kinematyczne warunki brzegowe na powierzchni S_u ,
- warunek zwartości ośrodka,
- warunek nieujemności mocy dysypowanej $\sigma_{ij} \dot{\phi}_{ij}^k \geq 0$.

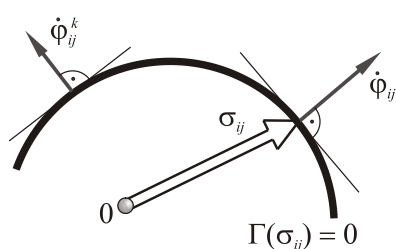
Są to warunki kinematyczne i dlatego pole prędkości $\dot{u}_i^k$ oraz odpowiadające mu pole prędkości odkształceń $\dot{\phi}_{ij}^k$ nazywa się kinematycznie dopuszczalnym mechanizmem plastycznego płynięcia, w odróżnieniu od rzeczywistego mechanizmu płynięcia określonego polami $\dot{u}_i$ i $\dot{\phi}_{ij}$ – wynikającymi z rozwiązania ściśłego (rys. 10.3).

Twierdzenie o ocenie górnej podaje się jako: *Przy plastycznym płynięciu ciała A moc rzeczywistych sił powierzchniowych p_i rozwijana na rzeczywistym polu prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$ jest mniejsza lub równa mocy dysypowanej na kinematycznie dopuszczalnym polu prędkości odkształceń $\dot{\phi}_{ij}^k$ przez odpowiadające mu pole σ_{ij}^k (rys. 10.4).* Twierdzenie to zapisuje się jako:

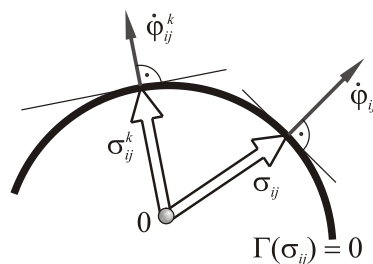
$$\int_{S_u} p_i \dot{u}_i^0 ds \leq \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\phi}_{ij}^k dV + \int_{L_u} \sigma_{ij} n_j [\dot{u}_i^k] dl - \int_{S_p} p_i^0 \dot{u}_i^k ds - \int_V f_i \dot{u}_i^k dV, \quad (10.2)$$

gdzie: $[\dot{u}_i^k]$ – skok prędkości na powierzchniach nieciągłości przemieszczeń, n_j – wektor normalny do powierzchni nieciągłości L_u w punkcie x_i , pozostałe oznaczenia jak poprzednio.

Z równania (10.2) wynika, że moc sił powierzchniowych zewnętrznych na zadanym rzeczywistym polu prędkości przemieszczeń jest mniejsza lub równa mocy sił na kinematycznie dopuszczalnym polu prędkości. W przypadku granicznym, gdy $\dot{u}_i^k \Rightarrow \dot{u}_i$ oraz $\dot{\phi}_{ij}^k \Rightarrow \dot{\phi}_{ij}$ to (zgodnie z rys. 10.4) $\sigma_{ij}^k \Rightarrow \sigma_{ij}$, a nierówność (10.2) sprowadza się do równości.



Rys. 10.3. Kinematycznie dopuszczalne $\dot{\phi}_{ij}^k$ i rzeczywiste $\dot{\phi}_{ij}$ pole prędkości



Rys. 10.4. Schemat do wyznaczania oceny górnej obciążenia granicznego

Reasumując, z przytoczonych **twierdzeń ekstremalnych** o dolnej oraz górnej ocenie wynikają następujące wnioski:

- z dwu statycznie dopuszczalnych rozwiązań to jest bliższe rzeczywistemu, które dopuszcza większe obciążenie;
- z dwu kinematycznie dopuszczalnych rozwiązań to jest bliższe rzeczywistemu, które dopuszcza mniejsze obciążenie;
- równość ocen górnej i dolnej oznacza, że otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym.

W dalszej części niniejszego rozdziału przedstawia się przykłady zastosowania metody ocen granicznych w analizie procesów ciągnięcia, które są podstawową metodą wytwarzania: drutów, rur oraz prętów okrągłych i kształtowych. Proces ten odznacza się m.in. takimi zaletami jak: bardzo duża wydajność oraz bardzo wysoki uzysk materiału, praktycznie niespotykany w innych procesach obróbki plastycznej metali [35, 70].

Proces ciągnięcia stosowany jest jako jedyny w przypadkach, gdy:

- należy wykonać drut o średnicy poniżej 5 mm,
- konieczne jest wykonanie rur o małych grubościach ścianek,
- stawiane są wysokie wymagania odnośnie własności mechanicznych i dokładności powierzchni wyrobu [39].

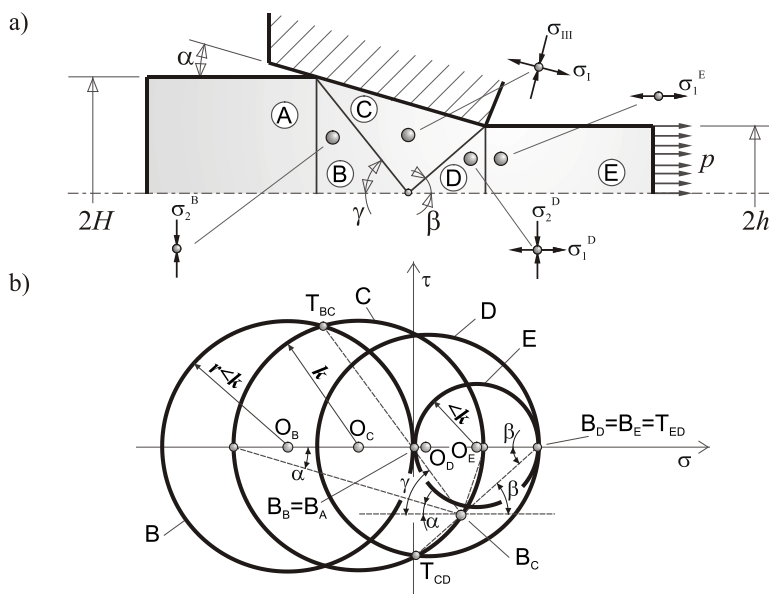
10.2. Ciągnięcie pasma w płaskim stanie odkształcenia przy założeniu pól jednorodnych

10.2.1. Ocena dolna

W celu określenia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń dokonuje się podziału całego przekroju materiału na podobzary, które numeruje się w sposób pokazany na rys. 10.5. Przyjmuje się, że: obszar „A” jest wolny od naprężeń

($\sigma_1^A = \sigma_2^A = 0$), w obszarze „B” składowa naprężenia $\sigma_2^B \geq -2k$, zaś obszar „C” jest całkowicie uplastyczniony. Zakłada się również znajomość kierunków głównych w obszarze „C”, przyjmowanych równoległe i prostopadłe do zbieżnej powierzchni narzędzia (takie założenie jest słuszne w przypadku, gdy powierzchnia narzędzia jest idealnie gładka). Z fizyki procesu wiadomo jest, że naprężenia σ_I^C i σ_{III}^C są różnych znaków, czyli mają zwroty zgodne z rys. 10.5. W obszarze „D”, ze względu na sąsiedztwo z obszarem „E” znane są kierunki główne. Z fizycznego punktu widzenia wiemy również, że składowa naprężenia $\sigma_1^D > 0$ oraz, że w obszarze „E” składowa naprężenia $\sigma_2^E = 0$.

Na podstawie rys. 10.5a można stwierdzić, że obszar przekroju pasma ciągnionego w sposób jednoznaczny określają następujące parametry: α , h , H_0 . Natomiast geometria podobszarów sparametryzowana jest kątami β i γ , z których tylko jeden jest niezależny. Przyjęte w ten sposób pole naprężeń spełnia warunki brzegowe. Dla spełnienia warunku plastyczności przeprowadza się konstrukcję wykreślną, zestawiając na płaszczyźnie naprężeń $\{\tau, \sigma\}$ koła Mohra dla poszczególnych podobszarów.



Rys. 10.5. Ciągnięcie pasma przez idealnie gładkie, symetrycznie zbieżne ciągnadło:

a) podział pasma na podobszary, b) konstrukcja kół Mohra w celu wyznaczenia statycznie dopuszczalnego obciążenia

Konstrukcję tę rozpoczyna się od podobszaru „C”, w którym z założenia materiał jest uplastyczniony. Koło Mohra dla tego obszaru ma promień równy granicy plastyczności na ścinanie k i oznaczone jest literą C. Środek tego koła O_C umieszcza się dowolnie na osi σ (rys. 10.5b), ze względu na nieznajomość początku układu odniesienia $\{\tau, \sigma\}$. Ponieważ znane są kierunki główne w podobszarze „C”, zatem możliwe jest wyznaczenie bieguna koła Mohra B_C .

Wyznaczając koło Mohra dla podobszaru „B” wykorzystuje się własności bieguna B_C . Stan naprężeń na powierzchni l_{BC} (rozgraniczającej obszary „B” i „C”) wyznacza prosta równoległa do l_{BC} , poprowadzona z bieguna B_C i przecinająca koło C w punkcie T_{BC} . Punkt ten zawiera się również w kole opisującym stan naprężenia na powierzchni l_{BC} w podobszarze „B”. Ponieważ kierunki główne w podobszarze B są zgodne z osiami σ i τ , to biegun B_B dla koła B leży na osi σ . Położenie bieguna B_B określa punkt przecięcia prostej wychodzącej z punktu T_{BC} , prowadzonej równoległe do l_{BC} , z osią σ .

Znajomość położenia punktów B_B i T_{BC} jest wystarczająca do wykreślenia koła Mohra dla podobszaru „B”. W celu znalezienia środka O_B tego koła wykreśliła się symetralną cięciwy $B_B T_{BC}$. W miejscu przecięcia się symetralnej z osią σ znajduje się poszukiwany środek O_B . Promień r wykreślonego koła musi spełniać warunek $r \leq k$. Z przyjętego dla podobszaru „B” założenia $\sigma_1^B = 0$ wynika, że biegun B_B jest położony w początku układu współrzędnych $\{\tau, \sigma\}$, oznaczonym przez O. Stan naprężenia w podobszarze „A” reprezentuje punkt B_A , pokrywający się z początkiem układu odniesienia.

W celu określenia koła Mohra dla podobszaru „D”, prowadzimy z bieguna B_C prostą równoległą do linii l_{CD} , rozgraniczającej strefy „C” i „D” – rys. 10.5a. Prosta ta w przecięciu z okręgiem C wyznacza punkt T_{CD} , który należy również do koła D. Ponieważ w podobszarze „D” kierunki główne są równoległe do osi σ i τ , to biegun B_D tego koła musi leżeć na osi σ . Znajduje się on więc w miejscu przecięcia prostej, przechodzącej przez punkty B_C i T_{CD} , z osią σ . Znajomość położenia punktów T_{CD} i B_D w sposób jednoznaczny określa koło Mohra dla podobszaru „D”.

Dla podobszaru „E” mamy $\sigma_1^E = \sigma_1^D$ oraz $\sigma_2^E = 0$. Zatem okrąg koła Mohra dla tego podobszaru musi przechodzić przez punkty O i B_D , przy czym bieguny B_E i B_D pokrywają się (rys. 10.5b).

Ocenę dolną naprężenia ciągnienia $p^{(-)}$ w analizowanym procesie ciągnienia określa składowa naprężenia σ_1^E . Jednakże wartość $p^{(-)}$ zależna jest od przyjętego podziału na podobszary, wynikającego z przyjętych wartości kątów β i γ (rys. 10.5a). Na podstawie konstrukcji z rys. 10.5b można zapisać, że:

$$p^{(-)} = l (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma), \quad (10.3)$$

gdzie

$$l = k \sin 2\alpha. \quad (10.4)$$

Z trójkąta przedstawiającego strefę „C”, wynika iż:

$$(H - h) \operatorname{ctg} \alpha = h \operatorname{ctg} \beta + H \operatorname{ctg} \gamma. \quad (10.5)$$

Z powyższego równania określa się zależność na $\operatorname{ctg} \gamma$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{H - h}{H} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{h}{H} \operatorname{ctg} \beta. \quad (10.6)$$

Następnie dodając do obu stron równania (10.6) $\operatorname{ctg} \beta$ otrzymuje się

$$\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{H - h}{H} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta). \quad (10.7)$$

Po podstawieniu zależności (10.4) i (10.7) do równania (10.3) po przekształceniach uzyskuje się ocenę dolną, w następującej postaci bezwymiarowej:

$$\frac{p^{(-)}}{2k} = \frac{H - h}{2H} \sin 2\alpha (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta). \quad (10.8)$$

Wyznaczona wartość oceny dolnej zależna jest od przyjętego parametru kątownego β . Z twierdzeń ekstremalnych wiadomo jest, że uzyskiwane rozwiązanie jest tym bliższe rzeczywistemu, im większe jest $p^{(-)}$. Należy zatem znaleźć maksymalną wartość funkcji (10.8). Jednakże analizowana funkcja $p^{(-)}(\beta)$ nie posiada ekstremum. Z tego względu w celu znalezienia rozwiązania narzuca się na funkcję (10.8) dodatkowe ograniczenia wynikające z fizyki procesu. Polegają one na tym, że promienie wykreślonych kół Mohra nie mogą być większe od granicy plastyczności materiału przy czystym ścinaniu. Ponadto metal w strefie „E” nie może ulec uplastycznieniu, gdyż wówczas zamiast ciągnięcia nastąpiłoby przewężenie (zerwanie) pasma odkształcanego.

Jeżeli założymy, że zarówno obszar „C” jak i „D” jest uplastyczniony to promienie odpowiadających im kół Mohra będą maksymalne i równe k . Wówczas zgodnie z oznaczeniami z rys. 10.6b mamy

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= \phi_4, \\ \phi_3 &= 2\eta, \\ \phi_4 &= 2\beta. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

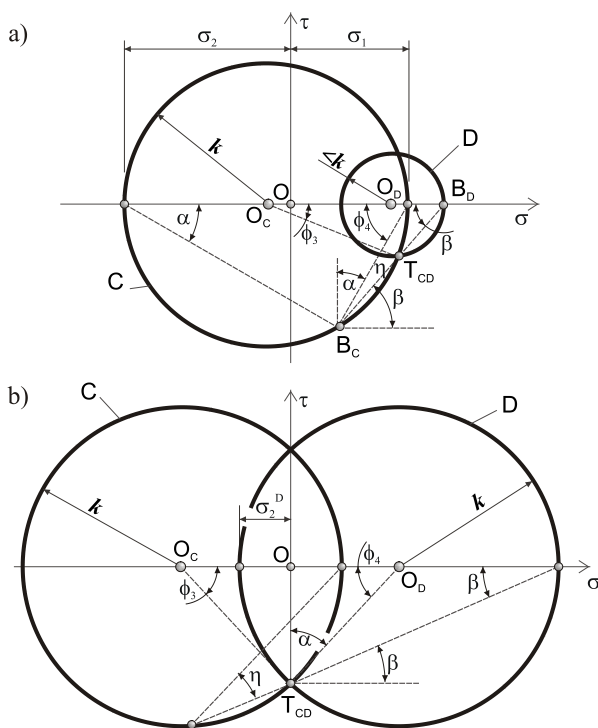
Stąd zaś otrzymuje się, że

$$\eta = \beta. \quad (10.10)$$

Z rys. 10.6a wynika natomiast, że

$$\alpha + \beta + \eta = \frac{\pi}{2}. \quad (10.11)$$

Rozwiązując układ równań (10.10) i (10.11) otrzymuje się warunek



Rys. 10.6. Maksymalizacja oceny dolnej w procesie ciągnięcia pasma:
a) i b) rozpatrywane przypadki statycznie dopuszczalnych pól naprężeń

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad (10.12)$$

przy którym ocena dolna jest maksymalna. Podstawiając do zależności trygonometrycznej

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad (10.13)$$

warunek (10.12) otrzymuje się

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (10.14)$$

Po pomnożeniu licznika i mianownika strony prawej przez licznik oraz po wykorzystaniu trygonometrycznych wzorów połówkowych uzyskuje się

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}. \quad (10.15)$$

Wykorzystując powyższą zależność w wyrażeniu (10.8) otrzymuje się wzór na wartość maksymalną oceny dolnej

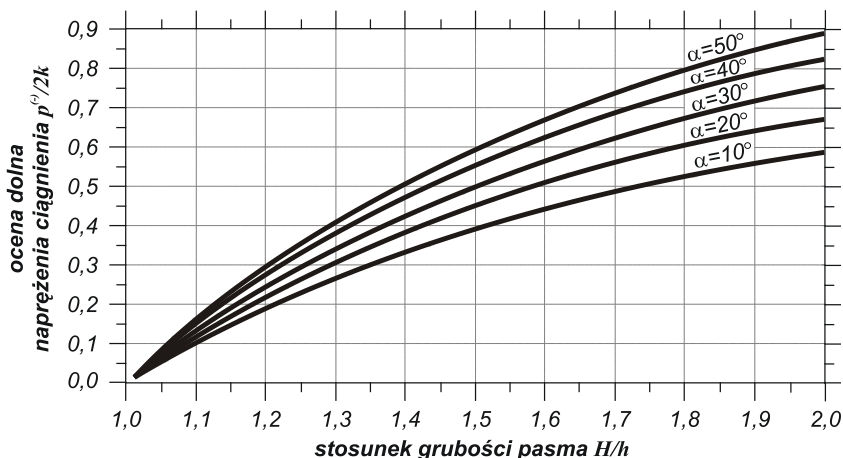
$$\frac{p^{(-)}}{2k} = \frac{H-h}{H} (1 + \sin \alpha) \quad (10.16)$$

w procesie ciągnięcia przez symetrycznie zbieżną, gładką matrycę.

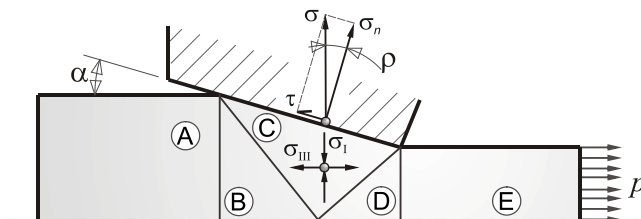
Interpretację graficzną otrzymanej zależności na $p^{(-)}/2k$, w funkcji H/h oraz kąta α , przedstawia się na rys. 10.7.

W przypadku gdy na powierzchniach matrycy pojawiają się siły tarcia następuje odchylenie kierunków głównych (w obszarze „C”) w kierunku przemieszczania się narzędzia o kąt tarcia ρ – rys. 10.8. W tej sytuacji znajdując biegun B_C dla koła C (rys. 10.5b) należy przyjąć w miejsce α wartość $(\alpha + \rho)$. Spowoduje to jedynie zmianę zależności (10.4) do postaci

$$l = k \sin 2(\alpha + \rho). \quad (10.17)$$



Rys. 10.7. Zależność wartości naprężenia ciągnięcia $p^{(-)}/2k$, obliczona metodą dolnej oceny, od stosunku grubości pasma ciągniętego H/h oraz kąta zbieżności α idealnie gładkiego ciągnadła



Rys. 10.8. Zmiana kierunku działania naprężeń głównych w strefie „C”, wywołana działaniem naprężeń stycznych τ na powierzchni styku metal-narzędzie (opis w tekście)

W konsekwencji zmienia się wzór (10.8) na ocenę dolną, która w tej sytuacji wyniesie

$$\frac{p^{(-)}}{2k} = \frac{H-h}{2H} \sin 2(\alpha + \rho) (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta), \quad (10.18)$$

gdzie kąt tarcia $\rho = 0,5 \arcsin m$.

Ponieważ wzór (10.7) na sumę cotangensów nie zależy od czynnika tarcia m , to maksymalną wartość oceny dolnej możemy zapisać jako:

$$\frac{p^{(-)}}{2k} = \frac{H-h}{H} \sin 2(\alpha + \rho) \frac{1 + \sin \alpha}{\sin 2\alpha}. \quad (10.19)$$

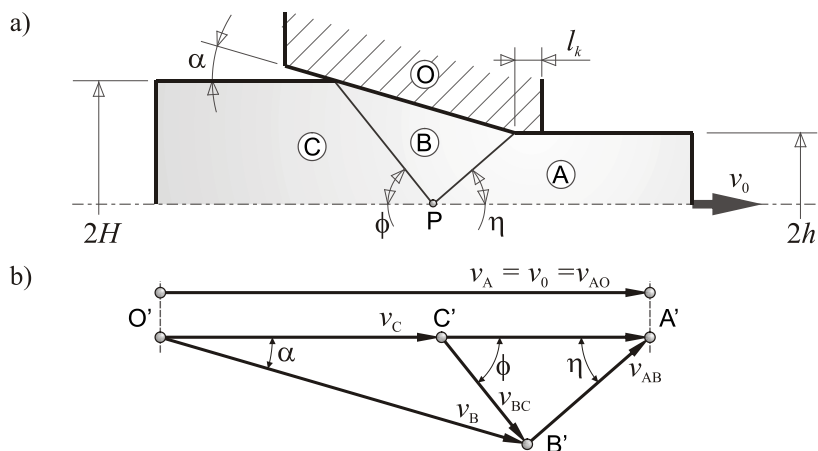
10.2.2. Ocena górna

Wyznaczenie naprężenia ciągnienia metodą oceny górnej rozpoczyna się od przyjęcia kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości, w postaci przesuwających się wzajemnie po sobie sztywnych bloków, powstałych w wyniku podziału przekroju ciągnionego wyrobu na podobszary – rys. 10.9a. Ze względu na symetrię rozważania ogranicza się do jednej połowy ciągnionego pasma.

Działanie przyjętego mechanizmu odkształcenia polega na wymuszonym sile ciągnienia przemieszczaniu się podobszaru „A” wzdłuż płaszczyzny symetrii z prędkością v_A . Podobszar ten wymusza ruch podobszaru „B” wzdłuż płaszczyzny matrycy klinowej, który z kolei wciąga stopniowo do matrycy podobszar „C”, równoległe do płaszczyzny symetrii.

Na rys. 10.9b przedstawiono hodograf prędkości. Rozpatrując jego geometrię wyznacza się składowe prędkości przemieszczeń lub poślizgu. Korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkąta $O'C'B'$ zapisuje się, że:

$$\frac{v_B}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{v_C}{\sin(\phi - \alpha)}, \quad (10.20)$$



Rys. 10.9. Ciągnięcie płaskownika przez ciągadło klinowe:
a) schemat podziału płaskownika na obszary; b) hodograf prędkości

$$\frac{v_{BC}}{\sin \alpha} = \frac{v_C}{\sin(\phi - \alpha)}. \quad (10.21)$$

Natomiast rozpatrując trójkąt $O'A'B'$ uzyskuje się

$$\frac{v_{AB}}{\sin \alpha} = \frac{v_B}{\sin \eta}. \quad (10.22)$$

Po przekształceniach z układu równań (10.20), (10.21) i (10.22) otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} v_B &= v_C \frac{\sin \phi}{\sin(\phi - \alpha)}, \\ v_{BC} &= v_C \frac{\sin \alpha}{\sin(\phi - \alpha)}, \\ v_{AB} &= v_C \frac{\sin \phi}{\sin(\phi - \alpha)} \frac{\sin \alpha}{\sin \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Aby uzależnić interesujące nas składowe prędkości przemieszczeń i poślizgu od prędkości ciągnięcia v_0 wykorzystuje się dodatkowo warunek nieściśliwości materiału, w postaci:

$$v_0 h = v_C H. \quad (10.24)$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku zależności, wyrażone układem równań (10.23), sprowadza się do postaci

$$\left. \begin{aligned} v_B &= v_0 \frac{h}{H} \frac{\sin \phi}{\sin(\phi - \alpha)}, \\ v_{BC} &= v_0 \frac{h}{H} \frac{\sin \alpha}{\sin(\phi - \alpha)}, \\ v_{AB} &= v_0 \frac{h}{H} \frac{\sin \phi}{\sin(\phi - \alpha)} \frac{\sin \alpha}{\sin \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Prędkość poślizgu materiału na powierzchni kalibrującej matrycy równa jest prędkości ciągnięcia

$$v_{A0} = v_0. \quad (10.26)$$

Długość powierzchni nieciągłości prędkości wynika z geometrii narzędzia i przyjętego podziału przekroju na podobszary:

$$\left. \begin{aligned} l_{0B} &= \frac{H - h}{\sin \alpha}, \\ l_{AB} &= \frac{h}{\sin \eta}, \\ l_{BC} &= \frac{H}{\sin \phi}, \\ l_{A0} &= l_k. \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

Moc dysypowaną na powierzchniach nieciągłości prędkości i na powierzchni matrycy wyznacza się z równania:

$$\dot{W}_N = k (v_{AB} l_{AB} + v_{BC} l_{BC} + v_B l_{0B} + v_{A0} l_{A0} m), \quad (10.28)$$

gdzie: m – czynnik tarcia.

Natomiast moc włożoną $\dot{W}_W$ określa się z zależności

$$\dot{W}_W = p^{(+)} v_0 h. \quad (10.29)$$

Bilansując moc włożoną i dysypowaną uzyskuje się

$$\begin{aligned} p^{(+)} h &= k \frac{h}{H} \left[\frac{\sin \phi \sin \alpha}{\sin(\phi - \alpha) \sin^2 \eta} h + \frac{\sin \alpha}{\sin(\phi - \alpha) \sin \phi} H + \right. \\ &\quad \left. + m \frac{\sin \phi}{\sin(\phi - \alpha) \sin \alpha} (H - h) \right] + k m l_k. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Po uporządkowaniu wyznacza się ocenę górną naprężenia ciągnięcia w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p^{(+)}}{2k} = \frac{1}{2H \sin(\phi - \alpha)} \left[\frac{\sin \alpha \sin \phi}{\sin^2 \eta} h + \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} H + m \frac{\sin \phi}{\sin \alpha} (H - h) \right] + \frac{m l_k}{2h}. \quad (10.31)$$

Wartość oceny górnej naprężenia ciągnięcia zależy od położenia punktu P wzdłuż osi symetrii (rys. 10.9a). Ponieważ za najlepsze oszacowanie górne uważa się takie, które daje najmniejszą wartość, należy tak dobrać położenie tego punktu aby warunek ten był spełniony.

W celu znalezienia wartości minimalnej oceny górnej naprężenia ciągnięcia należy ją uzależnić tylko od jednego parametru kąтового; w równaniu (10.31) występują dwa parametry kątowe ϕ i η . Korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkątnego podobozaru „B” zapisuje się

$$\left(\frac{h}{\sin \eta}\right)^2 = \left(\frac{H-h}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{H}{\sin \phi}\right)^2 - 2\frac{H-h}{\sin \alpha} \frac{H}{\sin \phi} \cos(\phi - \alpha). \quad (10.32)$$

Z powyższej zależności wyznacza się występujące w równaniu (10.31) wyrażenie

$$\frac{1}{\sin^2 \eta} = \left(\frac{H-h}{h}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \left(\frac{H}{h}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \phi} - 2\frac{(H-h)H}{h^2} \frac{\cos(\phi - \alpha)}{\sin \alpha \sin \phi}. \quad (10.33)$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (10.31) uzyskuje się wyrażenie na ocenę górną naprężenia ciągnięcia, uzależnione tylko od jednego parametru kąтового ϕ

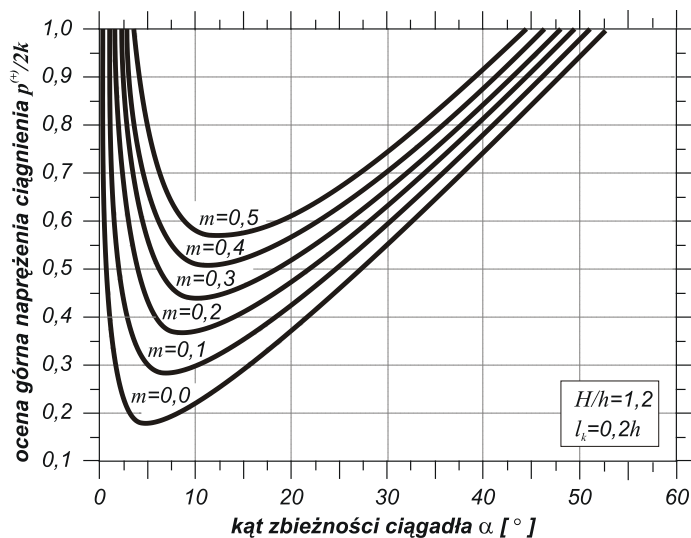
$$\begin{aligned} \frac{p^{(+)}}{2k} = \frac{1}{2H \sin(\phi - \alpha)} & \left\{ \left(H + \frac{H^2}{h} \right) \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} + \left[\frac{(H-h)^2}{h} + m(H-h) \right] \frac{\sin \phi}{\sin \alpha} + \right. \\ & \left. - 2\frac{(H-h)H}{h} \cos(\phi - \alpha) \right\} + \frac{ml_k}{2h}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Wartość optymalną kąta ϕ określającą minimalną wartość $p^{(+)}/2k$ wyznacza się przez obliczenie pochodnej prawej strony wyrażenia (10.34) względem ϕ i przyrównanie jej do zera. W ten sposób uzyskuje się wyrażenie

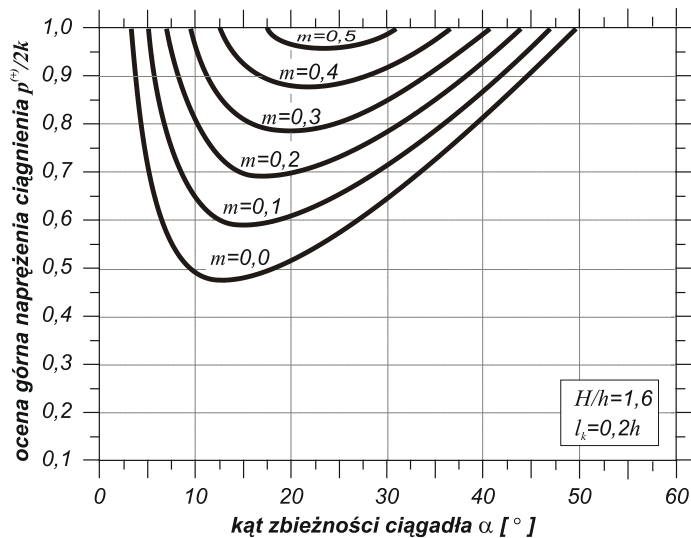
$$\phi = \arctg \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \left[\cos \alpha - \sqrt{\frac{h}{H} \left(1 + m \frac{H-h}{h} \right)} \right] \right\}. \quad (10.35)$$

Korzystając z równania (10.34) można przeanalizować zależność wartości naprężenia ciągnięcia od następujących parametrów:

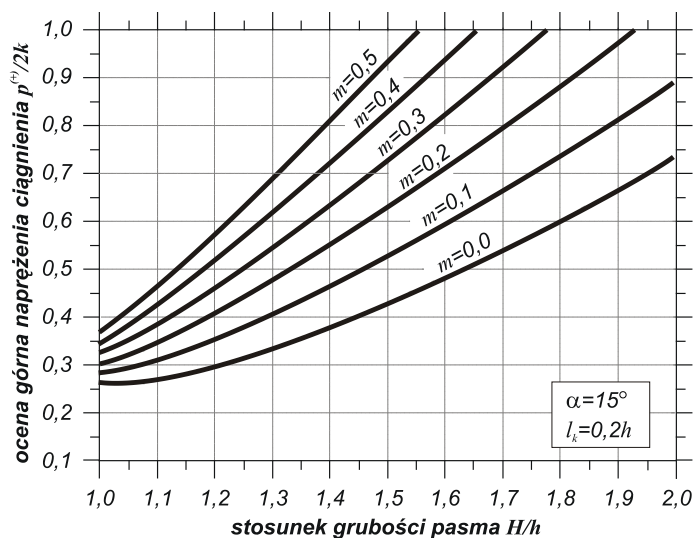
- kąta ciągadła α (rys. 10.10 i 10.11),
- stosunku grubości pasma H/h (rys. 10.12),
- czynnika tarcia m (rys. 10.10 ÷ 10.12).



Rys. 10.10. Zależność wartości naprężenia ciągnięcia $p^{(+)} / 2k$ od kąta α , obliczona metodą górnej oceny, przy: $H/h = 1,2$, $l_k = 0,2h$ oraz różnych wartościach czynnika tarcia m



Rys. 10.11. Zależność wartości naprężenia ciągnięcia $p^{(+)} / 2k$ od kąta α , obliczona metodą górnej oceny, przy: $H/h = 1,6$, $l_k = 0,2h$ oraz różnych wartościach czynnika tarcia m



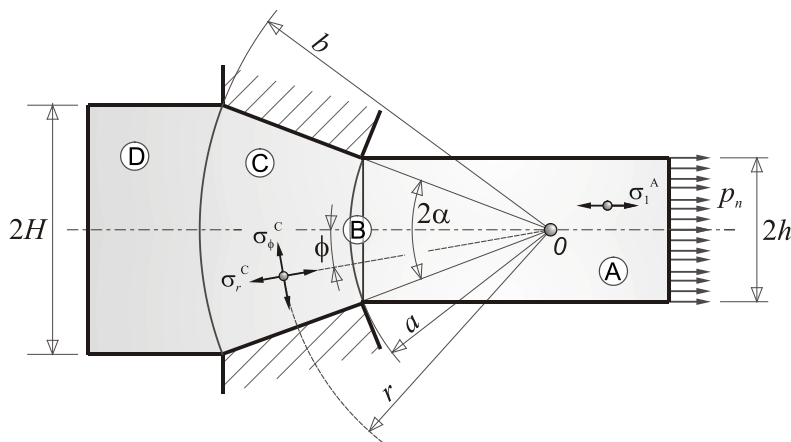
Rys. 10.12. Zależność wartości naprężenia ciągnięcia $p^{(+)} / 2k$ od stosunku grubości pasma H/h , obliczona metodą górnej oceny, przy: $\alpha = 15^\circ$, $l_k = 0,2h$ oraz różnych wartościach czynnika tarcia m

10.3. Ciągnięcie pasma w płaskim stanie odkształcenia przy założeniu pól niejednorodnych

Procesy ciągnięcia w płaskim stanie odkształcenia można analizować metodą ocen granicznych zakładając niejednorodność pól, statycznie bądź kinematycznie dopuszczalnych. Stosuje się tutaj możliwość wydzielenia podobszarów w postaci segmentów walcowych. W podobszarach tych oblicza się z warunków równowagi pole naprężeń (spełniające warunek plastyczności i warunki brzegowe dla naprężeń) oraz dobiera się promieniowe pole prędkości przemieszczeń (spełniające warunek zwartości i kinematyczne warunki brzegowe).

10.3.1. Ocena dolna

Wyznaczenie oceny dolnej rozpoczyna się od podziału ciągniętego pasma na podobszary – rys. 10.13. Zakłada się, że uplastyczniony metal występuje w podobszarze „C”, który jest ograniczony płaszczyznami narzędzia oraz powierzchniami walcowymi $r = a$ i $r = b$. W obszarze tym występuje osiowo-symetryczny stan naprężenia, w sąsiednim obszarze „D” naprężenia są zerowe, zaś w podobszarach „A” i „B” występują naprężenia jednoosiowe. Metal w stre-



Rys. 10.13. Schemat podziału ciągniętego pasma na podobszary w celu wyznaczenia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń

fie „A” nie może ulegać uplastycznieniu ze względu na realizację procesu ciągnięcia.

Właściwy proces kształtowania plastycznego zachodzi w podobszarze „C”, dla którego znane są kierunki główne. Statykę tego procesu można opisać stosując równania równowagi w naprężeniach głównych – podrozdział 1.2 oraz podrozdział 1.7.2, mianowicie:

$$\frac{d\sigma_r^C}{dr} + \frac{\sigma_r^C - \sigma_\phi^C}{r} = 0. \quad (10.36)$$

oraz warunek plastyczności

$$\sigma_r^C - \sigma_\phi^C = 2k, \quad (10.37)$$

gdzie: k – granica plastyczności przy czystym ścinaniu ($k = \sigma_p/2$ – warunek plastyczności Treski, $k = \sigma_p/\sqrt{3}$ – warunek plastyczności Hubera). Z równania (10.37) wyznacza się zależność na σ_ϕ^C , którą podstawia się do równania (10.36) otrzymując

$$\frac{d\sigma_r^C}{dr} + 2\frac{k}{r} = 0. \quad (10.38)$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu powyższego równania uzyskuje się

$$\sigma_r^C = -2k \ln r + C. \quad (10.39)$$

Stałą całkowania C oblicza się z warunku brzegowego $\sigma_r^C = 0$ dla $r = b$, z którego otrzymuje się

$$C = 2k \ln b. \quad (10.40)$$

Ostatecznie napężenie promieniowe w obszarze „C” określone jest wyrażeniem

$$\sigma_r^C = 2k \ln \frac{b}{r}. \quad (10.41)$$

Z warunku plastyczności (10.37) uzyskuje się zależność na składową obwodową napężenia:

$$\sigma_\phi^C = -2k \left(1 - \ln \frac{b}{r} \right). \quad (10.42)$$

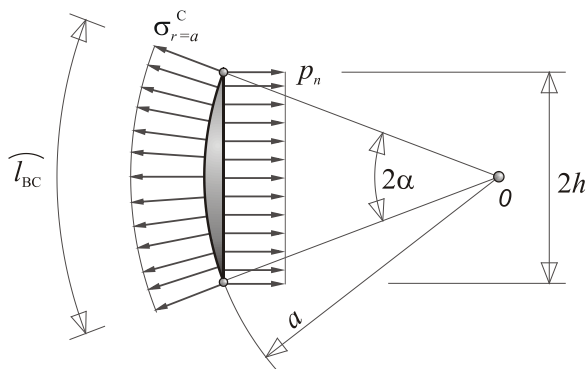
Na powierzchni rozgraniczającej strefy „B” i „C”, dla której $r = a$, składowa promieniowa naprężeń wynosi

$$\sigma_{r=a}^C = 2k \ln \frac{b}{a}. \quad (10.43)$$

Natomiast na powierzchni rozgraniczającej strefy „A” i „B” działa napężenie skierowane równoległe do osi pasma ciągnionego, które jest równe napężeniu ciągnienia p_n . Rozpatrując równowagę podobszaru „B” (rys. 10.14) zapisuje się równanie

$$P^{(-)} = p_n^{(-)} 2h = \int_{l_{BC}} \sigma_r^C \cos \phi dl. \quad (10.44)$$

W założonym cylindrycznym układzie odniesienia $\{r, \phi, z\}$ różniczka powierzchni, dla $r = 0$, wynosi



Rys. 10.14. Równowaga podobszaru „B” z rys. 10.13 oraz schemat działania naprężeń na podobszar „C” ($\sigma_{r=a}^C$), gdzie $\widehat{l_{BC}}$ – długość granicy między podobszarami „B” i „C”

$$dl = a d\phi. \quad (10.45)$$

Zatem

$$p_n^{(-)} 2h = 2k \ln \frac{b}{a} a \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \phi d\phi, \quad (10.46)$$

a po scałkowaniu

$$p_n^{(-)} 2h = 2k a \ln \frac{b}{a} 2 \sin \alpha. \quad (10.47)$$

Z rys. 10.14 wynika, że

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{h}{a}, \\ \frac{b}{a} &= \frac{H}{h}. \end{aligned} \right\}. \quad (10.48)$$

Po podstawieniu powyższych zależności do równania (10.47) oraz niezbędnych przekształceniach ostatecznie otrzymuje się następujący wzór wyrażający ocenę dolną

$$\frac{p_n^{(-)}}{2k} = \ln \frac{H}{h}. \quad (10.49)$$

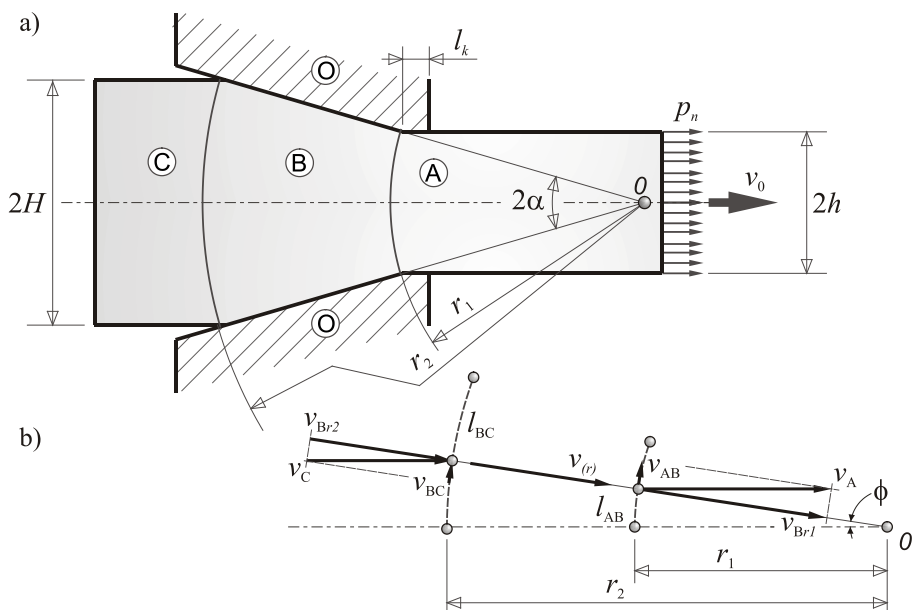
10.3.2. Ocena górna

W przypadku przyjęcia niejednorodnego pola prędkości zmienia się wartość oceny górnej (uzyskanej dla pól jednorodnych), bowiem dodatkowo w obliczeniach uwzględniana jest praca odkształcenia plastycznego wewnątrz wydzielonych obszarów. W procesach ciągnięcia przez matrycę klinową wykorzystuje się możliwość wydzielenia obszarów w postaci segmentów walcowych.

Wyprowadzenie górnej oceny naprężenia ciągnięcia przy założeniu niejednorodnych pól prędkości podano w pracy [4].

Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości (rys. 10.15) obejmuje uplastyczniony obszar „B”, w postaci segmentu walcowego ograniczonego płaszczyznami matrycy i powierzchniami walcowymi o promieniach r_1 i r_2 oraz obszary sztywne „A” i „C”. Zakłada się, że w obszarze „B” materiał płynie w kierunku promieniowym przyjętego walcowego układu odniesienia z prędkością $v(r)$.

Na powierzchniach walcowych l_{AB} i l_{BC} występują nieciągłości prędkości. Spowodowane jest to tym, że w obszarze „B” materiał płynie w kierunku równoległym do płaszczyzny symetrii ciągnionego wyrobu. Dla zachowania zwartości ośrodka na tych powierzchniach musi być spełniony warunek (zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 10.15):



Rys. 10.15. Ciągnięcie płaskownika przez symetrycznie zbieżne ciągadło: a) schemat podziału płaskownika na obszary; b) kinematycznie dopuszczalne pole prędkości

$$v_{Br1} = v_A \cos \phi, \quad (10.50)$$

$$v_{Br2} = v_C \cos \phi. \quad (10.51)$$

Nieciągłości prędkości na tych powierzchniach wynoszą:

$$v_{AB} = v_A \sin \phi, \quad (10.52)$$

$$v_{BC} = v_C \sin \phi. \quad (10.53)$$

Rozkład prędkości przemieszczeń wewnątrz obszaru „B” wyznacza się z warunku nieściśliwości. Wykorzystuje się w tym celu zasadę strumienia pola wektorowego przez powierzchnię wyodrębnionego elementu obszaru „B” (rys. 10.16), którą dla płaskiego stanu odkształcenia zapisuje się jako:

$$v_{Br1} d\phi r_1 = v_{Br} d\phi r. \quad (10.54)$$

Po uwzględnieniu zależności (10.50) z równania (10.54) wyznacza się bieżącą wartość prędkości, wydzielonego elementu obszaru „B”:

$$v_{Br} = v_A \frac{r_1}{r} \cos \phi. \quad (10.55)$$

Na powierzchni granicznej l_{BC} dla $r = r_2$ otrzymuje się

$$v_{B_{r_2}} = v_A \frac{r_1}{r_2} \cos \phi. \quad (10.56)$$

Pole prędkości odkształceń w obszarze „B” określone jest polem prędkości przemieszczeń w tym obszarze. Korzystając z definicji składowe prędkości odkształcenia, we współrzędnych wektorowych $\{r, \phi, z\}$ wyraża się wzorami [61]:

$$\dot{\phi}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (10.57)$$

$$\dot{\phi}_\phi = \frac{v_r}{r}, \quad (10.58)$$

$$\dot{\phi}_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right). \quad (10.59)$$

Pozostałe składowe tensora prędkości odkształcenia dla płaskiego stanu odkształcenia są równe zero.

Uwzględniając, że dla obszaru „B” składowa prędkości v_r dana jest zależnością (10.55), natomiast składowa v_ϕ równa jest zero, uzyskuje się:

$$\dot{\phi}_r^{(B)} = -v_A \frac{r_1}{r^2} \cos \phi, \quad (10.60)$$

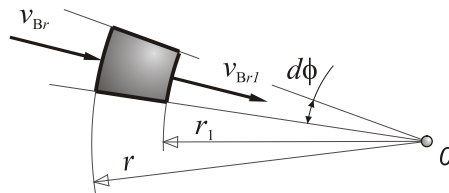
$$\dot{\phi}_\phi^{(B)} = v_A \frac{r_1}{r^2} \cos \phi, \quad (10.61)$$

$$\dot{\phi}_{r\phi}^{(B)} = -\frac{1}{2} v_A \frac{r_1}{r^2} \sin \phi. \quad (10.62)$$

Zastępcza prędkość odkształcenia wyznaczona z definicji wynosi

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^{(B)} &= \sqrt{\frac{2}{3} \left(\dot{\phi}_r^{(B)} \right)^2 + \left(\dot{\phi}_\phi^{(B)} \right)^2 + 2 \left(\dot{\phi}_{r\phi}^{(B)} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} v_A \frac{r_1}{r^2} \sqrt{\cos^2 \phi + \cos^2 \phi + \frac{1}{2} \sin^2 \phi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} v_A \frac{r_1}{r^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \phi} = \frac{2}{\sqrt{3}} v_A \frac{r_1}{r^2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \phi}. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Uzależnienie prędkości odkształcenia od promienia r i kąta ϕ świadczy o jego niejednorodności w obszarze „B”.



Rys. 10.16. Wyodrębniony element podobzaru „B” z rys. 10.15

Oszacowanie górne naprężenia ciągnienia określa się z bilansu mocy włożonej i dysypowanej:

$$\dot{W}_W = \dot{W}_p + \dot{W}_N. \quad (10.64)$$

Moc dysypowaną w wyniku odkształcenia plastycznego w obszarze „B” wyznacza się z zależności:

$$\dot{W}_p = \sigma_0 \int_{V_B} \dot{\phi}^{(B)} dV. \quad (10.65)$$

Elementarną objętości wydzielonego elementu obszaru „B” oblicza się ze wzoru

$$dV = r d\phi dr. \quad (10.66)$$

Po uwzględnieniu w wyrażeniu (10.65) zależności (10.63) oraz (10.66) otrzymuje się

$$\dot{W}_p = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_0 r_1 v_A \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \int_0^\alpha \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \phi} d\phi. \quad (10.67)$$

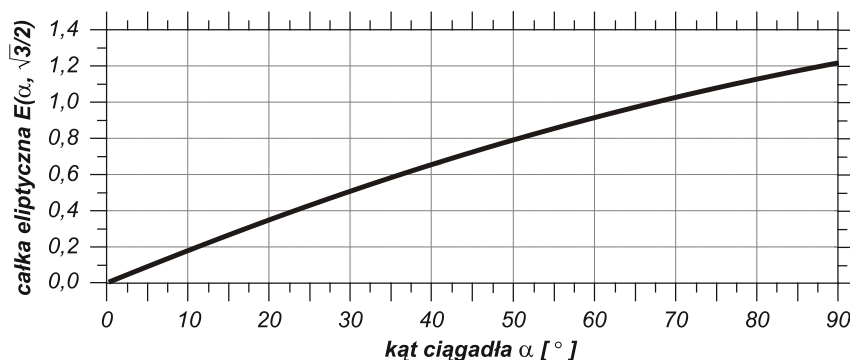
Po częściowym całkowaniu (względem r) uzyskuje się

$$\dot{W}_p = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_0 r_1 v_A \ln \frac{r_2}{r_1} E(\alpha, \sqrt{3}/2), \quad (10.68)$$

gdzie

$$E(\alpha, \sqrt{3}/2) = \int_0^\alpha \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \phi} d\phi \quad (10.69)$$

jest całką eliptyczną drugiego rodzaju, o nieznanym rozwiązaniu analitycznym. Rozwiązanie tej całki metodą numeryczną przedstawiono na rys. 10.17 (w funkcji kąta α).



Rys. 10.17. Rozwiązanie całki eliptycznej drugiego rodzaju $E(\alpha, \sqrt{3}/2)$, w funkcji kąta α

Moc dysypowaną na powierzchniach nieciągłości prędkości oraz na powierzchniach matrycy wyznacza się z równania

$$\dot{W}_N = \int_{l_{AB}} k v_{AB} dl + \int_{l_{BC}} k v_{BC} dl + \int_{l_{OB}} mk v_{OB} dl + \int_{l_{OA}} mk v_{OA} dl . \quad (10.70)$$

Pierwszą całkę określającą moc dysypowaną na powierzchni nieciągłości l_{AB} , wyznacza się wykorzystując zależności na nieciągłości prędkości (10.52) oraz na powierzchni elementarną

$$dl = r_1 d\phi . \quad (10.71)$$

Zatem

$$\dot{W}_{AB} = 2 \int_0^\alpha k v_A \sin \phi r_1 d\phi = 2k v_A r_1 (1 - \cos \alpha) . \quad (10.72)$$

Moc dysypowana na powierzchni nieciągłości l_{BC} , określona jest przez drugą całkę wyrażenia (10.70). Wartość nieciągłości prędkości v_{BC} wyrażona jest zależnością (10.53), która po wykorzystaniu zasady stałej objętości materiału

$$v_A r_1 \sin \alpha = v_C r_2 \sin \alpha \quad (10.73)$$

sprowadza się do postaci

$$v_{BC} = v_A \frac{r_1}{r_2} \sin \phi . \quad (10.74)$$

Natomiast elementarna powierzchnia nieciągłości określona jest przez

$$dl = r_2 d\phi . \quad (10.75)$$

Stąd

$$\dot{W}_{BC} = 2 \int_0^\alpha k v_A \frac{r_1}{r_2} \sin \phi r_2 d\phi = 2k v_A r_1 (1 - \cos \alpha) . \quad (10.76)$$

Trzecia całka określa moc rozpraszania, na powierzchniach zbieżnych matrycy, w wyniku tarcia. Prędkość poślizgu v_{OB} wyznacza się z zależności (10.55) przyjmując za kąt ϕ jego wartość graniczną równą α . Elementarna powierzchnia nieciągłości w przyjętych współrzędnych walcowych (w warunkach płaskiego stanu odkształcenia) równa jest różniczce promienia pomnożonej przez szerokość jednostkową

$$dl = dr . \quad (10.77)$$

Stąd

$$\dot{W}_{OB} = 2 \int_{r_1}^{r_2} mk v_A \frac{r_1}{r} \cos \alpha dr = 2mk v_A r_1 \cos \alpha \ln \frac{r_2}{r_1} . \quad (10.78)$$

Ostatnia całka wyrażenia (10.69) określa moc rozpraszaną w wyniku tarcia materiału o powierzchnię kalibrującą narzędzia. Prędkość poślizgu v_{0A} równa jest prędkości obszaru „A”, a więc

$$\dot{W}_{0A} = 2 \int_0^l mk v_A dl = 2 mk v_A l_k. \quad (10.79)$$

Moc włożoną oblicza się korzystając z zależności

$$\dot{W}_W = 2 p^{(+)} h v_A. \quad (10.80)$$

Z bilansu mocy włożonej i dysypowanej uzyskuje się

$$\begin{aligned} p^{(+)} 2h = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_0 r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} E(\alpha, \sqrt{3}/2) + 4k r_1 (1 - \cos \alpha) + \\ + 2 mk r_1 \cos \alpha \ln \frac{r_2}{r_1} + 2mk l_k. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Z geometrii procesu i przyjętego podziału wynika, że

$$r_1 = \frac{h}{\sin \alpha} \quad (10.82)$$

oraz, że

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{H}{h}. \quad (10.83)$$

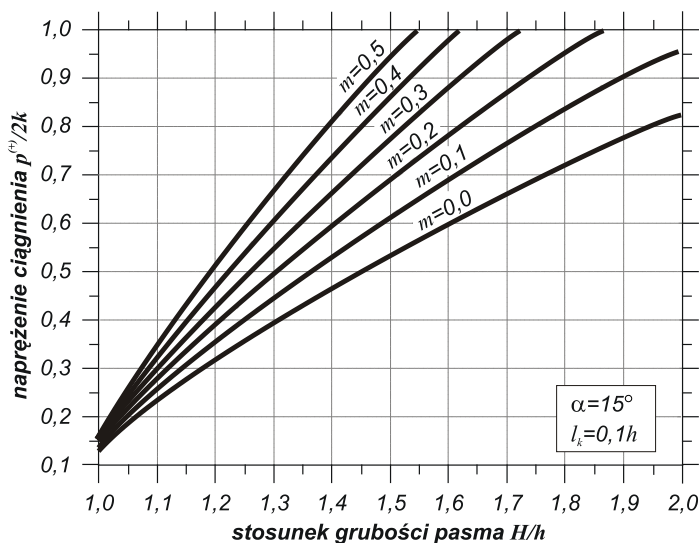
Po uwzględnieniu powyższych zależności w równaniu (10.81) uzyskuje się

$$\begin{aligned} p^{(+)} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_0 \frac{1}{\sin \alpha} \ln \frac{H}{h} E(\alpha, \sqrt{3}/2) + 2k \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ + mk \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \ln \frac{H}{h} + \frac{l_k}{h} \right). \end{aligned} \quad (10.84)$$

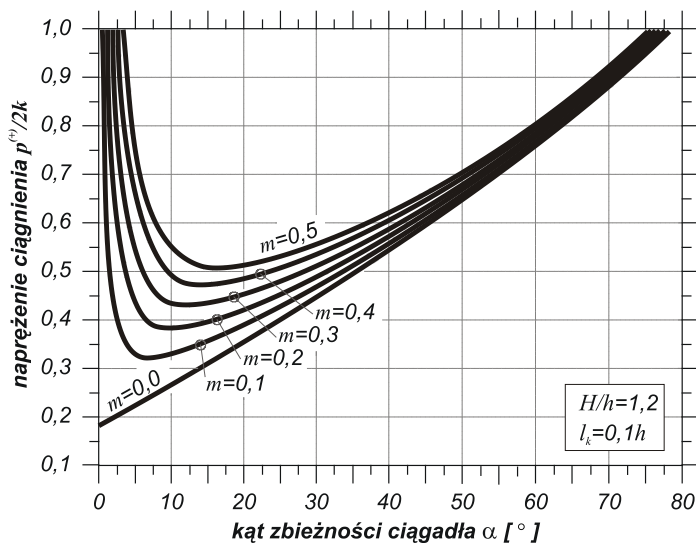
Natomiast po wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera ($\sigma_0 = k\sqrt{3}$) oraz po uporządkowaniu wyrazów wyprowadza się zależność na naprężenie ciągnięcia w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p^{(+)}}{2k} = \left(\frac{E(\alpha, \sqrt{3}/2)}{\sin \alpha} + \frac{m}{2} \operatorname{ctg} \alpha \right) \ln \frac{H}{h} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{ml_k}{2h}. \quad (10.85)$$

Na rys. 10.18 przedstawiono zależność $p^{(+)}/2k$ od stosunku grubości pasma H/h , a na rys. 10.19 – od kąta zbieżności matrycy α (przy różnych wartościach czynnika tarcia m). Natomiast na rys. 10.20 zilustrowano zależność $p^{(+)}/2k$ od

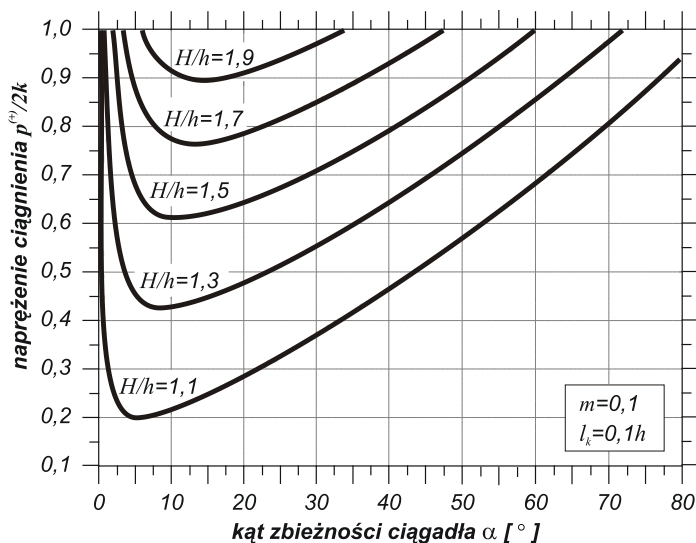


Rys. 10.18. Zależność wartości naprężenia ciągnienia $p^{(+)} / 2k$ od stosunku grubości pasma H/h , obliczona metodą górnej oceny, dla różnych wartości czynnika tarcia m , przy: $\alpha = 15^\circ$ oraz $l_k = 0, 1h$



Rys. 10.19. Zależność wartości naprężenia ciągnienia $p^{(+)} / 2k$ od kąta α , uzyskana metodą górnej oceny, dla różnych wartości czynnika tarcia m , przy: $H/h = 1, 2$ oraz $l_k = 0, 1h$

kąta α , wyznaczoną przy różnym H/h . Wykresy wykonano przy założeniu, że długość odcinka kalibrującego wynosi $l_k=0,1h$. Z danych zamieszczonych na tych wykresach widać, że istnieje optymalna wartość kąta α , przy których górna ocena naprężenia ciągnienia osiąga minimum. Ta optymalna wartość kąta α wzrasta wraz ze wzrostem czynnika tarcia m oraz z podwyższeniem wartości stosunku wymiarów H/h przeciąganego pasma.



Rys. 10.20. Zależność wartości naprężenia ciągnienia $p^{(+)} / 2k$ od kąta α , uzyskana metodą górnej oceny, dla różnych wartości stosunku grubości pasma H/h , przy: $m=0,1$ oraz $l_k=0,1h$

11. METODA LINII POŚLIZGU I CHARAKTERYSTYK

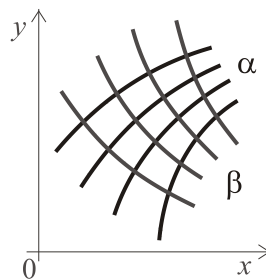
11.1. Wiadomości podstawowe

Częstym zjawiskiem występującym w niektórych procesach obróbki plastycznej jest pojawienie się na powierzchni odkształcanego materiału charakterystycznych linii, wykazujących prawidłowy i regularny przebieg. Linie te tworzą ortogonalną sieć krzywych i są zawsze nachylone pod kątem 45° do kierunku naprężeń głównych, a więc przebiegają zgodnie z kierunkiem największych naprężeń stycznych. Zauważono, że wzdłuż tych charakterystycznych linii występuje wzajemne przesunięcie materiału i z tego powodu nazwano je **liniami poślizgu**.

Metoda charakterystyk stosowana jest do analizy rozkładu naprężeń i odkształceń oraz obliczania wielkości nacisków występujących w płaskich i osiowo symetrycznych procesach obróbki plastycznej metali. Szybki rozwój tej metody tłumaczy się tym, że pozwala ona określić nie tylko siłę kształtowania ale umożliwia również wyznaczenie pola naprężeń i prędkości płynięcia w przekroju odkształcanego ciała, które są niezbędne przy projektowaniu procesu technologicznego.

11.1.1. Linie poślizgu i charakterystyk

W dowolnym punkcie przekroju ośrodka ciągłego znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia plastycznego, istnieją dwa wzajemnie prostopadłe do siebie kierunki, wzdłuż których naprężenia styczne osiągają wartość maksymalną. Idąc nieprzerwanie od punktu do punktu i wyznaczając kierunki maksymalnych naprężeń stycznych otrzymuje się siatkę ortogonalną, składającą się z dwóch rodzin linii α i β (rys. 11.1). Styczne do tych linii pokrywają się z kierunkami maksymalnych naprężeń stycznych, a linie te nazywają się **liniami poślizgu**.



Rys. 11.1. Siatka linii poślizgu

Statykę płaskiego stanu odkształcenia opisują w układzie kartezjańskim $\{x, y\}$ dwa równania równowagi wewnętrznej – zależność (1.59) – oraz warunek plastyczności:

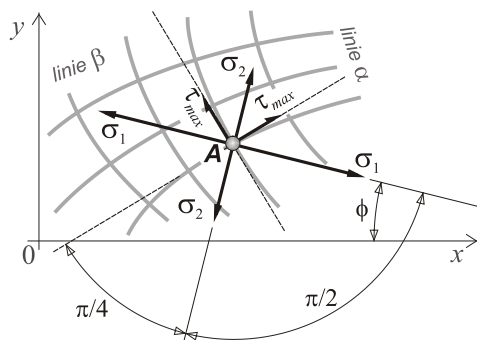
$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (11.1)$$

gdzie: k jest granicą plastyczności materiału na ścinanie, przy czym $k = \sigma_p/2$ dla warunku plastyczności Treski lub $k = \sigma_p/\sqrt{3}$ dla warunku plastyczności Hubera (σ_p – granica plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu).

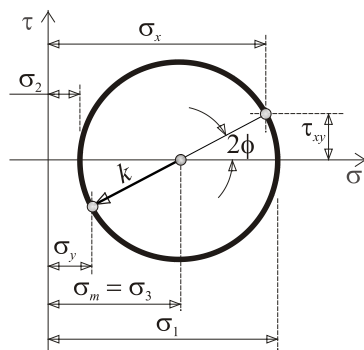
Wyznaczenie wielkości naprężeń w każdym punkcie ciała sprowadza się więc do rozwiązania układu trzech równań (1.59) i (11.1) z trzema niewiadomymi σ_x , σ_y , τ_{xy} . Metoda rozwiązania tego układu podana przez Levy’ego polega na wprowadzeniu w miejsce naprężeń dwóch nowych niewiadomych, mianowicie **funkcji** σ_m (naprężenie średnie) zależnej od sumy naprężeń głównych oraz **kąta** ϕ , jaki tworzy większe z naprężeń głównych z osią x (rys. 11.2). Warunek plastyczności w punkcie A można przedstawić za pomocą koła Mohra. Przyjmując, że naprężenia główne tworzą uporządkowanie $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$, warunek ten dany zależnością (11.1) na płaszczyźnie naprężeń $\{\sigma, \tau\}$, przedstawia koło ze środkiem w punkcie A', o promieniu równym k (rys. 11.3). Środek tego koła określa wartość naprężenia średniego, zwanego również ciśnieniem hydrostatycznym:

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y). \quad (11.2)$$

Podstawienie Levy’ego wynika bezpośrednio z przedstawionego koła Mohra i wyraża się układem równań:



Rys. 11.2. Schemat pokazujący kierunki działania naprężeń głównych w punkcie A



Rys. 11.3. Koło Mohra dla płaskiego stanu odkształcenia

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_m + k \cos 2\phi, \\ \sigma_y &= \sigma_m - k \cos 2\phi, \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\phi. \end{aligned} \right\}. \quad (11.3)$$

Podstawienie to spełnia tożsamościowo warunek plastyczności (11.1), a równania równowagi (1.59) po wykorzystaniu zależności (11.3), zawierają tylko dwie niewiadome funkcje (σ_m oraz ϕ) i przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Jest to układ dwu równań różniczkowych cząstkowych, quasi-liniowych, typu hiperbolicznego, z dwiema niewiadomymi funkcjami σ_m i ϕ zmiennych niezależnych x i y , który rozwiązuje się metodą charakterystyk. Rozwiązanie to (przykładowo podane w [61]) prowadzi w pierwszej części do równań kierunków charakterystycznych, które nazywa się **równaniami charakterystyk**:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\phi \pm \frac{\pi}{4} \right). \quad (11.5)$$

Otrzymane dwa kierunki charakterystyczne tworzą dwie rodziny linii wzajemnie ortogonalnych, które oznacza się literami alfabetu greckiego α i β , tak aby tworzyły układy prawoskrętne $\{\alpha, \beta\}$. Otrzymuje się to wówczas, gdy założy się, że:

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right), \\ \beta) \quad \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

W drugiej części rozwiązania układu równań (11.4) otrzymuje się związki pomiędzy funkcjami σ_m i ϕ zachodzące wzdłuż kierunków charakterystycznych (11.6). Związki te na odpowiednich rodzinach charakterystyk mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad \sigma_m - 2k \phi &= \text{const}, \\ \beta) \quad \sigma_m + 2k \phi &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Charakterystyki odgrywają zasadniczą rolę w teorii płaskiego stanu odkształcenia, nie tylko dlatego, że umożliwiają uzyskanie efektywnych rozwiązań, ale również z powodu ich znaczenia fizycznego. Z równań (11.7) bezpośrednio wynika, że są one nachylone w każdym punkcie pod kątem $+\pi/4$ lub $-\pi/4$ względem kierunków głównych określonych kątem ϕ . **Kierunki charakterystyk** są zatem kierunkami działania maksymalnych naprężeń stycznych, albo inaczej liniami poślizgu.

11.1.2. Własności linii poślizgu

Linie poślizgu (charakterystyk) cechują własności geometryczne i fizyczne, które wykorzystywane są przy konstruowaniu rozwiązania. Najważniejsze z nich to:

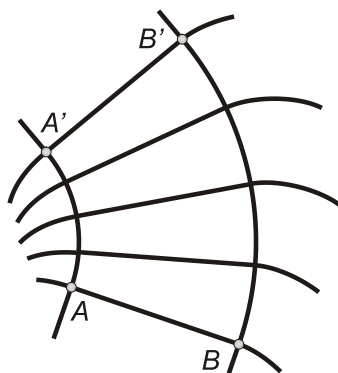
- Linie poślizgu rodziny α i β tworzą siatkę ortogonalną. Własność ta wynika bezpośrednio z równania (11.5).
- Wzdłuż linii poślizgu przyrost naprężenia średniego σ_m jest proporcjonalny do przyrostu kąta ϕ . Własność ta wynika ze związków na charakterystykach (11.7) i dana jest dla rodziny α zależnością

$$d\sigma_m = 2k d\phi, \quad (11.8)$$

a dla rodziny β

$$d\sigma_m = -2k d\phi. \quad (11.9)$$

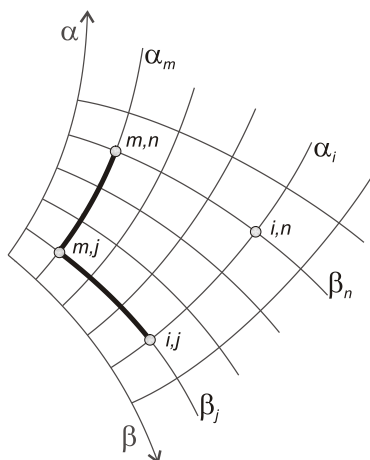
- Kąt pomiędzy stycznymi do dwóch linii poślizgu jednej rodziny, prowadzonymi w punktach ich przecięcia z tą samą linią drugiej rodziny, ma stałą wartość niezależną od wyboru tej ostatniej. Jest to tak zwana **pierwsza zasada Hencky’ego**.
- Jeżeli pewien odcinek AB linii poślizgu jest prostoliniowy (rys. 11.4), to prostoliniowe są również odcinki wszystkich linii poślizgu tej samej rodziny, zawarte pomiędzy dwiema liniami poślizgu drugiej rodziny, przechodzącymi przez punkty A i B.
- Jeżeli pewien odcinek linii poślizgu jest prostoliniowy, to wzdłuż niego wielkości naprężeń nie zmieniają się. Własność ta jest oczywista, gdyż dla wszystkich punktów tego odcinka kąt α jest stały, a więc stała musi być również wartość σ_m , co bezpośrednio wynika z równań (11.7).
- Jeżeli znane jest naprężenie średnie $\sigma_{m(i,j)}$ w dowolnym punkcie siatki linii poślizgu to można obliczyć σ_m w każdym innym punkcie tej siatki np. o współrzędnych (m, n) – rys. 11.5. W tym celu stosuje się zależność:



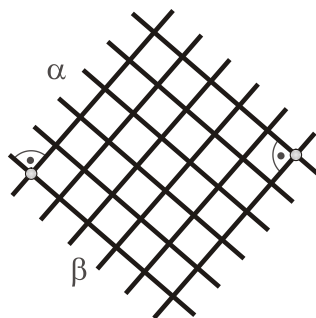
Rys. 11.4. Przykład siatki zawierającej odcinki prostoliniowe; gdzie: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$$\sigma_{m(m,n)} = \sigma_{m(i,j)} + 2k (\phi_{(i,j)} - 2\phi_{(m,j)} + \phi_{(m,n)}). \quad (12.10)$$

- Przyrost naprężenia średniego $\Delta\sigma_m$ przy przejściu z jednej charakterystyki na sąsiednią tej samej rodziny, wzdłuż charakterystyki drugiej rodziny, nie zależy od wyboru tej ostatniej, a więc jest stały.
- Jeżeli obie rodziny linii poślizgu są prostoliniowe (rys. 11.6), to w obrębie tych linii istnieje jednorodny stan naprężenia. Własność ta wynika bezpośrednio z wcześniej podanej własności prostoliniowego odcinka linii poślizgu i oznacza, że w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru stan naprężenia jest identyczny.
- Prostoliniowe odcinki linii poślizgu jednej rodziny, ograniczone tymi samymi liniami poślizgu drugiej rodziny mają jednakową długość. Własność ta wynika z poprzednich.



Rys. 11.5. Sposób obliczenia naprężeń w punktach (m,j) i (m,n) przy znanym naprężeniu w punkcie (i,j)



Rys. 11.6. Naprężenie σ_m rozłożone jest równomiernie, obie linie poślizgu są prostoliniowe w obrębie danego obszaru

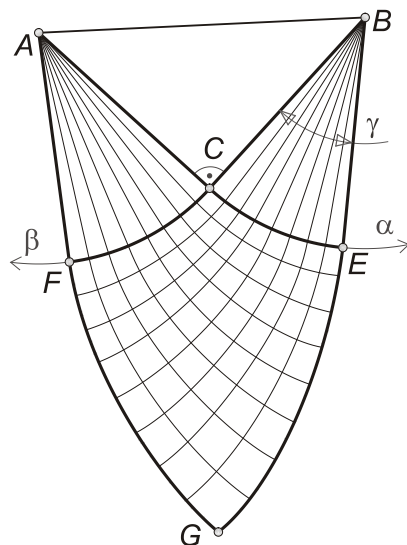
11.1.3. Siatki elementarne linii poślizgu

Wyznaczenie siatek charakterystyk ma podstawowe znaczenie przy rozpatrywaniu konkretnych zagadnień. W wielu przypadkach można je zestawiać z siatką o budowie elementarnej.

Na rys. 11.7 przedstawiono typowe elementarne siatki charakterystyk spotykane w rozwiązaniach konkretnych problemów. Pole ABC pokrywa najprostsza siatka złożona z dwóch rodzin prostych, o jednorodnym stanie naprężenia (w celu uproszczenia, linii poślizgu wewnątrz tego obszaru nie rysuje się).

W wycinkach koła CBE i CAF siatkę biegunową tworzą prostoliniowe promienie, zbiegające się w jednym punkcie, i łuki kołowe zatoczone z tych punktów. Kąt γ tego wycinka może być dowolny. Wzdłuż prostoliniowych charakterystyk kąt $\phi = \text{const}$ ale ma oczywiście różną wartość na każdej z nich. Podobnie mamy $\sigma_m = \text{const}$ wzdłuż tych charakterystyk. Wielkość σ_m na każdej z nich oblicza się z odpowiedniej zależności $\sigma_m + 2k\phi = \text{const}$ lub $\sigma_m - 2k\phi = \text{const}$, która obowiązuje wzdłuż charakterystyk drugiej rodziny.

Siatka pokrywająca pole ECFG nie może być otrzymana w sposób elementarny. Jednakże jest ona tak często spotykana w zastosowaniach, że wartości ϕ i σ_m w jej punktach węzłowych zostały stabelaryzowane i są podane w monografiach specjalistycznych, na przykład pozycje literaturowe [61, 69].



Rys. 11.7. Siatki elementarne linii poślizgu (opis w tekście)

11.1.4. Wyznaczenie prędkości płynięcia

Po obliczeniu naprężeń, w sposób opisany w poprzednich punktach, konieczne jest sprawdzenie rozkładu prędkości płynięcia. Może się bowiem okazać, że otrzymane rozwiązanie mimo iż spełnia równania równowagi, związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami oraz warunki brzegowe, jest kinematycznie niedopuszczalne, to znaczy daje sprzeczności w polu prędkości. Takie rozwiązania są niepoprawne i mogą stanowić tylko orientacyjną ocenę. Poza tym wyznaczenie pola prędkości płynięcia umożliwia analizę przebiegu odkształcenia, ustalenie stref odkształconych plastycznie i obszarów martwych, w których zachodzi tylko odkształcenie sprężyste.

Punktem wyjścia do wyznaczenia pola prędkości dla odkształcanego metalu jest stowarzyszone prawo płynięcia (11.11) oraz warunek nieściśliwości (11.12).

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (\sigma_x - \sigma_y) - 4 \frac{\partial v_x}{\partial x} \tau_{xy} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

Powyższy układ równań (11.11) i (11.12) zawierający dwie niewiadome v_x i v_y jest typu hiperbolicznego i może być rozwiązany metodą charakterystyk.

W pierwszej części rozwiązania otrzymuje się równanie kierunków charakterystycznych, określone zależnością (11.5), które są identyczne jak dla pola naprężeń. Wynika stąd, że siatki linii poślizgu dla naprężeń i prędkości przemieszczeń są identyczne.

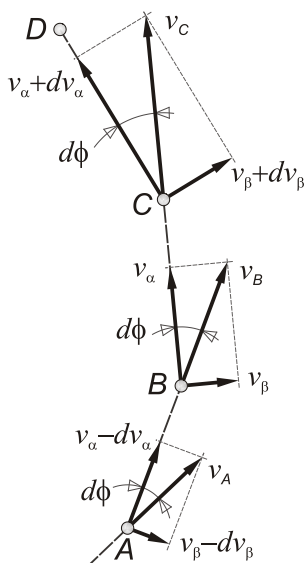
W drugiej części rozwiązania kinematyki otrzymuje się związki kinematyczne na charakterystykach. Związki te w lokalnym układzie odniesienia $\{\alpha, \beta\}$ mają postać:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \quad dv_\alpha - v_\beta d\phi = 0, \\ \beta) \quad dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0. \end{array} \right\} \quad (11.13)$$

Zależności te podane przez H. Geiringer¹⁰ [42, 61] mają proste znaczenie geometryczne. Rozpatrzmy dwa sąsiednie elementarne odcinki BC i CD linii α (rys. 11.8). Kąt nachylenia zmienił się przy przejściu od B do C o wielkość $d\phi$, a prędkości wzrosły o dv_α i dv_β . Przyrost prędkości skierowanej wzdłuż BC po odrzuceniu małych wyższego rzędu wynosi $dv_\alpha + v_\beta d\phi$. Zależności (11.13) oznaczają więc, że prędkość wydłużenia względnego na liniach poślizgu jest równa zero.

Drugą ważną własnością charakterystyk jest fakt, że tylko one mogą być liniami nieciągłości prędkości [62].

W konkretnych rozwiązaniach pole prędkości może być wyznaczone w sposób numeryczny metodą różnic skończonych, po zastąpieniu w równaniach (11.13) różniczek różnicami skończonymi. Procedura obliczeniowa polega na kolejnym rozwiązywaniu zagadnień brzegowych. Sposób ten nie jest jednak często stosowany, ponieważ znacznie prościej można wyznaczyć pole prędkości budując wykresnie



Rys. 11.8. Geometryczna interpretacja równań H. Geiringer (11.13)

¹⁰ **Hilda Geringer** (1893-1973) – początkowo związana z Uniwersytetem Wiedeńskim, następnie podjęła pracę w Instytucie Matematyki Stosowanej na Uniwersytecie Berlińskim. W latach 1921-27 była asystentem R. von Mises'a. Jej prace naukowe znacząco wzbogaciły matematyczne podstawy teorii plastyczności. Wybuch II Wojny Światowej spowodował, że H. Geringer była jednym z wielu naukowców, którzy musieli emigrować poza Europę.

plan prędkości. Ważną zaletą planu prędkości jest wizualizacja wyników, pozwalająca bezpośrednio otrzymać obraz ruchu cząstek.

Plan prędkości buduje się na płaszczyźnie prędkości, na której wszystkie wektory prędkości odkłada się od wspólnego bieguna. Przy budowie hodografu wykorzystuje się geometryczne zależności pomiędzy siatką charakterystyk i odpowiadającą jej konstrukcją na płaszczyźnie prędkości. Zależności te znaleźć można w literaturze specjalistycznej, przykładowo pozycje [4, 62, 71].

W niniejszej pracy ze względu na jej objętość ograniczono się tylko do obliczeń statyki (wyznaczenia naprężeń, obciążeń uplastyczniających). Należy jednak zauważyć, że dla większości przytoczonych rozwiązań konstrukcje planów prędkości znaleźć można w literaturze specjalistycznej [4, 31, 61, 71].

11.2. Spęczanie bloku

Pierwsze rozwiązanie zagadnienia ściskania prostokątnego bloku w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, wykorzystując metodę linii poślizgu podał L. Prandtl [49]. Jednakże, jak wykazał R. Hill i in. [27] rozwiązanie to jest słuszne w przypadku, gdy materiał oraz płyty odkształcające są nieskończenie szerokie.

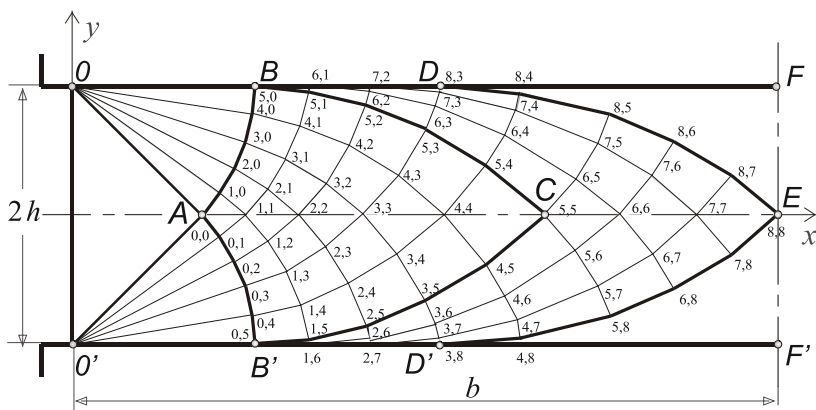
11.2.1. Spęczanie przy czynniku tarcia $m = 1$

W przypadku, gdy wartość czynnika tarcia $m = 1$ ($\mu \geq 0,39$), naprężenie styczne na powierzchni styku osiąga swą maksymalną wartość równą granicy plastyczności na ścinanie k . Rozwiązanie dla tego przypadku spęczania przedstawione jest m.in. w pracach [26, 27, 58].

Wyznaczenie pola linii poślizgu rozpoczyna się od wykreślenia obszaru o jednorodnym stanie naprężenia, trójkąta OAO' , przy czym ze względu na symetrię rozważania można ograniczyć do jednej, np. lewej części prasowanego bloku – rys. 11.9. Punkt O jest punktem osobliwym, ze względu na nieciągłość obciążenia, z którego wychodzi wachlarz promieniowych charakterystyk. Ponieważ brzeg OO' jest nieobciążony, a jednak uplastyczniony to z faktu tego wynika, że w trójkącie OAO' występuje jednorodny stan naprężenia: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -2k$ lub $\sigma_m = -k$, $\phi = 0$. W polu OAB linie poślizgu wychodzące promiennie z punktu A , należą do rodziny α , a zatem wzdłuż tych linii naprężenie średnie σ_m (ze względu na stałą wartość kąta ϕ) jest stałe. Natomiast korzystając ze związku na charakterystyce β można zapisać, że

$$\sigma_{m(OB)} + 2k \phi_{(OB)} = \sigma_{m(OA)} + 2k \phi_{(OA)}. \quad (11.14)$$

Po przekształceniach oraz uwzględnieniu, że $\phi_{(OB)} = \pi/4$, $\sigma_{m(OA)} = -k$, $\phi_{(OA)} = 0$ uzyskuje się wartość naprężenia średniego na linii OB



Rys. 11.9. Siatka linii poślizgu dla przypadku zgniatania płaskownika przy $b/h = 5,45$ oraz $m = 1$

$$\sigma_{m(OB)} = -k - 2k \frac{\pi}{4} = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right). \quad (11.15)$$

Nacisk jednostkowy na linii OB równy jest składowej naprężenia σ_y , czyli

$$p_{(OB)} = \sigma_{y(OB)} = \sigma_{m(OB)} - k \cos 2\phi_{(OB)} = \sigma_{m(OB)} = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right). \quad (11.16)$$

Zgodnie z założeniem siła tarcia na linii styku OB ma być równa k , zatem z otrzymanego wyrażenia (11.16) wynika graniczna wartość współczynnika tarcia μ . Mamy bowiem

$$p \mu = k, \quad (11.17)$$

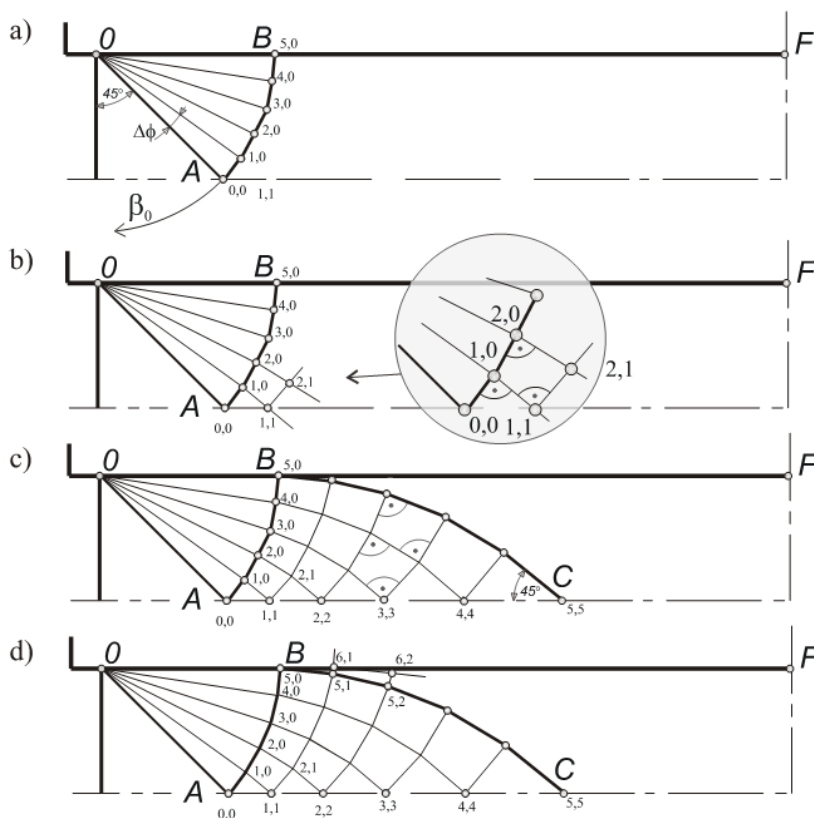
stąd

$$\mu = \frac{k}{p} = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}} \cong 0,39. \quad (11.18)$$

Konstrukcji siatki charakterystyk w krzywoliniowym czworokącie ABCB' dokonuje się przez rozwiązanie zagadnienia charakterystycznego. W tym celu zastępuje się łukową charakterystykę β_0 linią łamaną składającą się z kolejnych cięciw łączących sąsiednie węzły (rys. 11.10a). Ze względu na symetrię procesu, konstrukcję siatki charakterystyk prowadzi się tak by jej linie przecinały się z osią x pod kątem $\pm\pi/4$. W węzłach na charakterystyce β_0 wykreśla się normalne do cięciw, kończących się w danym węźle. I tak kreśląc normalną do cięciwy

łączącej węzły (0,0) i (1,0), wychodzącą z punktu (1,0) otrzymuje się w wyniku przecięcia się tej normalnej z osią x punkt (1,1) – rys. 11.10b. Wykreślona normalna łącząca punkty (1,0) i (1,1) jest styczną poszukiwanego łuku charakterystyki α_1 . Następnie w węźle (1,1) wykreśla się normalną do tej stycznej, która przecinając się z normalną wykreśloną z węzła (2,0) wyznacza następny węzeł siatki charakterystyk (2,1). Konstrukcję taką powtarza się aż do wykreślenia wszystkich węzłów w obszarze trójkąta krzywoliniowego ABC – rys. 11.10c.

Następnie konstruuje się przedłużenie charakterystyki w obszar trójkąta krzywoliniowego ograniczonego brzegiem charakterystyki α_5 , na odcinku BC i brzegiem BF. Jest to problem mieszany. Ze względu na założenie, zgodnie z którym τ na powierzchni styku równe jest k , brzeg płyty stanowi obwiednię charakterystyk α , które dochodzą do tego brzegu stycznie, podczas gdy charak-



Rys. 11.10. Schemat postępowania przy wykreślaniu siatki linii poślizgu dla procesu spęczania płaskownika

terystyki β dochodzą normalnie. Położenie węzłów siatki wyznacza się metodą wykreślną. Z węzła (5,1) kreśli się normalną do odcinka łączącego punkty (5,0) i (5,1). W miejscu przecięcia się normalnej z brzegiem OF znajduje się poszukiwany węzeł (6,1). Następnie wykreśla się pozostałe węzły leżące na charakterystyce α_6 , wykorzystując w tym celu konstrukcję opisaną przy wyznaczaniu węzła (2,1) (zagadnienie charakterystyczne) oraz w przypadku węzła (6,6) konstrukcję dla punktu (1,1) – rys. 11.10d. Konstrukcję przedłużenia powtarza się dopóty, dopóki skrajna charakterystyka α nie przejdzie przez środek symetrii przekroju poprzecznego F. Dokładność opisanej metody równa jest połowie przyjętego podziału kąтового i wynosi dla analizowanego przypadku $\pm 4,5^\circ$.

W tabeli 11.1 zestawiono wartości współrzędnych x i y oraz funkcji ϕ i σ_m , w poszczególnych punktach węzłowych, dla analizowanego przypadku spęczenia ($b/h = 5,45$ oraz $m = 1$).

Znajomość wartości parametru kąтового ϕ oraz naprężenia średniego σ_m , w poszczególnych punktach węzłowych pozwala na wyznaczenie składowych tensora naprężenia w tych punktach. W tym celu wykorzystuje się wzory Levy'ego w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y(i,j)} &= \sigma_{m(i,j)} - k \cos 2\phi_{(i,j)}, \\ \sigma_{x(i,j)} &= \sigma_{m(i,j)} + k \cos 2\phi_{(i,j)}, \\ \tau_{xy(i,j)} &= k \sin 2\phi_{(i,j)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

Obliczone wartości zestawiono w tabeli 11.2.

Wyznaczenie nacisku płyt ściskających

Nacisk p wywierany przez płytę na odcinku OD (rys. 11.11) równy jest naprężeniu normalnemu σ_y . I tak dla odcinka OB, będącego prostoliniowym odcinkiem charakterystyki α_5 nacisk ten jest stały i wynosi (patrz tab. 11.2).

$$\frac{p_{AC}}{2k} = \frac{p_{(5,0)}}{2k} = \frac{\sigma_{y(5,0)}}{2k} = -1,285, \quad (11.20)$$

a następnie wzrasta na odcinku BD osiągając kolejno dla poszczególnych węzłów brzegowych następujące wartości:

$$\left. \begin{aligned} \text{Punkt (6,1)} \quad \frac{p_{(6,1)}}{2k} &= \frac{\sigma_{y(6,1)}}{2k} = -1,600, \\ \text{Punkt (7,2)} \quad \frac{p_{(7,2)}}{2k} &= \frac{\sigma_{y(7,2)}}{2k} = -1,914, \\ \text{Punkt (8,3)} \quad \frac{p_{(8,3)}}{2k} &= \frac{\sigma_{y(8,3)}}{2k} = -2,228. \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

Tabela 11.1.

Wartości funkcji ϕ , σ_m oraz wartości współrzędnych punktów węzłowych x i y , dla przypadku spękania przy $b/h=5,45$ i $m=1$

β α		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	x/h	1,000	1,144	1,260	1,345	1,397	1,414	---	---	---
	y/h	0,000	-0,169	-0,358	-0,563	-0,779	-1,000	---	---	---
	ϕ	0,000	-0,157	-0,314	-0,471	-0,628	-0,780	---	---	---
	$\sigma_m/2k$	-0,500	-0,657	-0,814	-0,971	-1,128	-1,285	---	---	---
1	x/h	1,144	1,342	1,514	1,656	1,763	1,829	1,832	---	---
	y/h	0,169	0,000	-0,202	-0,434	-0,691	-0,967	-1,000	---	---
	ϕ	0,157	0,000	-0,157	-0,314	-0,471	-0,628	-0,785	---	---
	$\sigma_m/2k$	-0,657	-0,814	-0,971	-1,128	-1,285	-1,442	-1,600	---	---
2	x/h	1,260	1,514	1,751	1,962	2,139	2,273	2,298	2,301	---
	y/h	0,358	0,202	0,000	-0,247	-0,535	-0,801	-0,963	-1,000	---
	ϕ	0,314	0,157	0,000	-0,157	-0,314	-0,471	-0,628	-0,785	---
	$\sigma_m/2k$	-0,814	-0,971	-1,128	-1,285	-1,442	-1,600	-1,757	-1,914	---
3	x/h	1,345	1,656	1,962	2,251	2,512	2,735	2,806	2,834	2,837
	y/h	0,563	0,434	0,247	0,000	-0,306	-0,699	-0,844	-0,958	-1,000
	ϕ	0,471	0,314	0,157	0,000	-0,157	-0,314	-0,471	-0,628	-0,785
	$\sigma_m/2k$	-0,971	-1,128	-1,285	-1,442	-1,600	-1,757	-1,914	-2,071	-2,228
4	x/h	1,397	1,763	2,139	2,512	2,871	3,200	3,343	3,425	3,457
	y/h	0,779	0,691	0,535	0,306	0,000	-0,385	-0,619	-0,816	-0,951
	ϕ	0,628	0,471	0,314	0,157	0,000	-0,157	-0,314	-0,471	-0,628
	$\sigma_m/2k$	-1,128	-1,285	-1,442	-1,600	-1,757	-1,914	-2,071	-2,228	-2,385
5	x/h	1,414	1,829	2,273	2,735	3,200	3,650	3,892	4,058	4,153
	y/h	1,000	0,967	0,801	0,699	0,385	0,000	-0,283	-0,554	-0,784
	ϕ	0,785	0,628	0,471	0,314	0,157	0,000	-0,157	-0,314	-0,471
	$\sigma_m/2k$	-1,285	-1,442	-1,600	-1,757	-1,914	-2,071	-2,228	-2,385	-2,542
6	x/h	---	1,832	2,298	2,806	3,343	3,892	4,223	4,477	4,649
	y/h	---	1,000	0,963	0,844	0,619	0,283	0,000	-0,297	-0,579
	ϕ	---	0,785	0,628	0,471	0,314	0,157	0,000	-0,157	-0,314
	$\sigma_m/2k$	---	-1,600	-1,757	-1,914	-2,071	-2,228	-2,385	-2,542	-2,699
7	x/h	---	---	2,301	2,834	3,425	4,058	4,477	4,825	5,089
	y/h	---	---	1,000	0,958	0,816	0,554	0,297	0,000	-0,309
	ϕ	---	---	0,785	0,628	0,471	0,314	0,157	0,000	-0,157
	$\sigma_m/2k$	---	---	-1,914	-2,071	-2,228	-2,385	-2,542	-2,699	-2,856
8	x/h	---	---	---	2,837	3,457	4,153	4,649	5,089	5,451
	y/h	---	---	---	1,000	0,951	0,784	0,579	0,309	0,000
	ϕ	---	---	---	0,785	0,628	0,471	0,314	0,157	0,000
	$\sigma_m/2k$	---	---	---	-2,228	-2,385	-2,542	-2,699	-2,856	-3,013

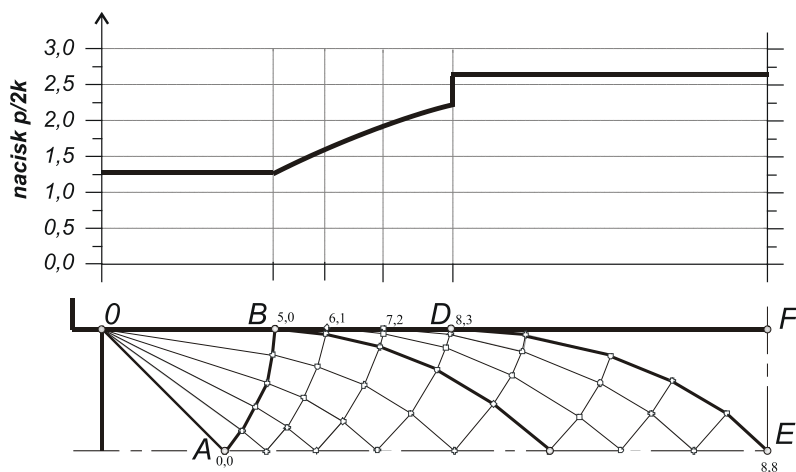
Tabela 11.2.

Wartości składowych stanu naprężenia w punktach węzłowych, dla przypadku spękania bloku przy $b/h=5,45$ i $m=1$

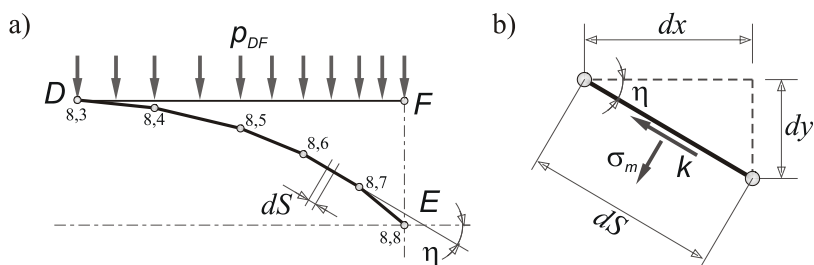
β α		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\sigma_y/2k$	-1,000	-1,133	-1,219	-1,265	-1,281	-1,285	---	---	---
	$\sigma_x/2k$	0,000	-0,182	-0,410	-0,677	-0,974	-1,285	---	---	---
	$\tau_{xy}/2k$	0,000	0,155	0,294	0,405	0,476	0,500	---	---	---
1	$\sigma_y/2k$	-1,133	-1,314	1,447	-1,533	-1,579	-1,597	-1,600	---	---
	$\sigma_x/2k$	-0,182	-0,314	-0,496	-0,724	-0,992	-1,288	-1,600	---	---
	$\tau_{xy}/2k$	0,155	0,000	0,155	0,294	0,405	0,476	0,500	---	---
2	$\sigma_y/2k$	1,219	1,447	-1,628	-1,761	-1,847	-1,893	-1,911	-1,914	---
	$\sigma_x/2k$	-0,410	-0,496	-0,628	-0,810	-1,038	-1,306	-1,602	-1,914	---
	$\tau_{xy}/2k$	0,294	0,155	0,000	0,155	0,294	0,405	0,476	0,500	---
3	$\sigma_y/2k$	-1,265	-1,533	-1,761	-1,942	-2,075	-2,161	-2,208	-2,225	-2,228
	$\sigma_x/2k$	-0,677	-0,724	-0,810	-0,942	-1,124	-1,352	-1,620	-1,916	-2,228
	$\tau_{xy}/2k$	0,405	0,294	0,155	0,000	0,155	0,294	0,405	0,476	0,500
4	$\sigma_y/2k$	-1,281	-1,579	-1,847	-2,075	-2,257	-2,389	-2,475	-2,522	-2,539
	$\sigma_x/2k$	-0,974	-0,992	-1,038	-1,124	-1,257	-1,438	-1,666	-1,934	-2,230
	$\tau_{xy}/2k$	0,476	0,405	0,294	0,155	0,000	0,155	0,294	0,405	0,476
5	$\sigma_y/2k$	1,285	-1,597	-1,893	-2,161	-2,389	-2,571	-2,703	-2,789	-2,838
	$\sigma_x/2k$	-1,285	-1,288	-1,306	-1,352	-1,438	-1,571	-1,752	-1,980	-2,248
	$\tau_{xy}/2k$	0,500	0,476	0,405	0,294	0,155	0,000	0,155	0,294	0,405
6	$\sigma_y/2k$	---	-1,600	-1,911	-2,208	-2,475	-2,703	-2,885	-3,018	-3,104
	$\sigma_x/2k$	---	-1,600	-1,602	-1,620	-1,666	-1,752	-1,885	-2,067	-2,295
	$\tau_{xy}/2k$	---	0,500	0,476	0,405	0,294	0,155	0,000	0,155	0,294
7	$\sigma_y/2k$	---	---	-1,914	-2,225	-2,522	-2,789	-3,018	-3,199	-3,332
	$\sigma_x/2k$	---	---	-1,914	-1,916	-1,934	-1,980	-2,067	-2,199	-2,381
	$\tau_{xy}/2k$	---	---	0,500	0,476	0,405	0,294	0,155	0,000	0,155
8	$\sigma_y/2k$	---	---	---	-2,228	-2,539	-2,838	-3,104	-3,332	-3,513
	$\sigma_x/2k$	---	---	---	-2,228	-2,230	-2,248	-2,295	-2,381	-2,513
	$\tau_{xy}/2k$	---	---	---	0,500	0,476	0,405	0,294	0,155	0,000

Ze względu na założenie, że obszar DEF jest sztywny to rozkład naprężeń w nim jest nieokreślony, a tym samym nieznan jest rozkład nacisku na odcinku DF. Jednakże z równowagi obszaru DEF można wyznaczyć wartość średniego nacisku p_{DE} . Rozpatrując równowagę DEF (rys. 11.12a) względem osi y otrzymuje się następujący warunek

$$p_{DE} \Delta x_{DE} = \int_D^E \sigma_m \cos \eta \, ds - \int_D^E k \sin \eta \, ds. \quad (11.22)$$



Rys. 11.11. Rozkład nacisku $p/2k$ na powierzchni płyty (w wartościach bezwzględnych), wyznaczony dla analizowanego przypadku podanego na rys. 11.9



Rys. 11.12. Określenie nacisku płyty na odcinku DF: a) wydzielony sztywny element DFE, b) elementarny odcinek charakterystyki brzegowej DE

Korzystając z rysunku 11.12b można zapisać, że

$$\left. \begin{aligned} ds \cos \eta &= dx, \\ ds \sin \eta &= dy. \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

Zatem

$$p_{DE} \Delta x_{DE} = \int_D^E \sigma_m dx - \int_D^E k dy, \quad (11.24)$$

a średni nacisk p_{DE} wynosi

$$p_{DE} = \frac{1}{\Delta x_{DE}} \left(\int_D^E \sigma_m dx - \int_D^E k dy \right). \quad (11.25)$$

Linia charakterystyk α_8 łącząca punkty D i E wyznaczona jest przez cięciwy międzywęzłowe. Z tego też względu możliwe jest zastąpienie całkowania sumowaniem, przy czym ponieważ średnie naprężenie σ_m wyznaczone jest tylko w punktach węzłowych to do obliczeń przyjmuje się średnie wartości σ_m obliczone wg zależności

$$\sigma_{m_j} = \frac{1}{2} (\sigma_{m(8,j)} + \sigma_{m(8,j+1)}). \quad (11.26)$$

Zatem zgodnie z powyższym można zapisać, że

$$\int_D^E \sigma_m dx = \sum_{j=3}^7 \sigma_{m_j} \Delta x_j = \sum_{j=3}^7 \frac{1}{2} (\sigma_{m(8,j)} + \sigma_{m(8,j+1)}) (x_{(8,j+1)} - x_{(8,j)}) \quad (11.27)$$

oraz

$$\int_D^E k dy = \sum_{j=3}^7 k \Delta y_j = k \sum_{j=3}^7 (y_{(8,j)} - y_{(8,j+1)}) = k h. \quad (11.28)$$

Wykorzystując powyższe zależności zapisuje się dla analizowanego przypadku, średni nacisk jednostkowy p_{DE} w postaci bezwymiarowej, jako

$$\frac{p_{DE}}{2k} = \frac{1}{\Delta x_{DE}} \sum_{j=3}^7 \frac{\sigma_{m_j}}{2k} \Delta x_j - \frac{h}{2\Delta x_{DE}}. \quad (11.29)$$

Dla danych przedstawionych w tabelach 11.1 i 11.2 wyznaczenie wartości odjemnej w równaniu (11.29) przedstawiono w tabeli 11.3.

Po uwzględnieniu, że $x_{DE} = 2,764$ otrzymuje się

$$\frac{p_{DE}}{2k} = -\frac{6,728}{2,764} - \frac{1}{2 \cdot 2,764} = -2,615. \quad (11.30)$$

Tabela 11.3.

Schemat obliczeń całki określonej zależnością (11.27), wchodzącej w skład równania (11.29)

j	Δx_j	$\frac{\sigma_{m_j}}{2k}$	$\frac{\sigma_{m_j}}{2k} \Delta x_j$
3	0,620	-2,306	-1,430
4	0,696	-2,463	-1,714
5	0,496	-2,620	-1,300
6	0,440	-2,777	-1,222
7	0,362	-2,934	-1,062
Suma			-6,728

Uzyskane wyniki rozkładu nacisku przedstawione zostały w formie wykresu na rys. 11.11. Wartość średniego nacisku p_{sr} na powierzchni styku można wyznaczyć wykorzystując otrzymany rozkład nacisku (rys. 11.11), w oparciu o równanie:

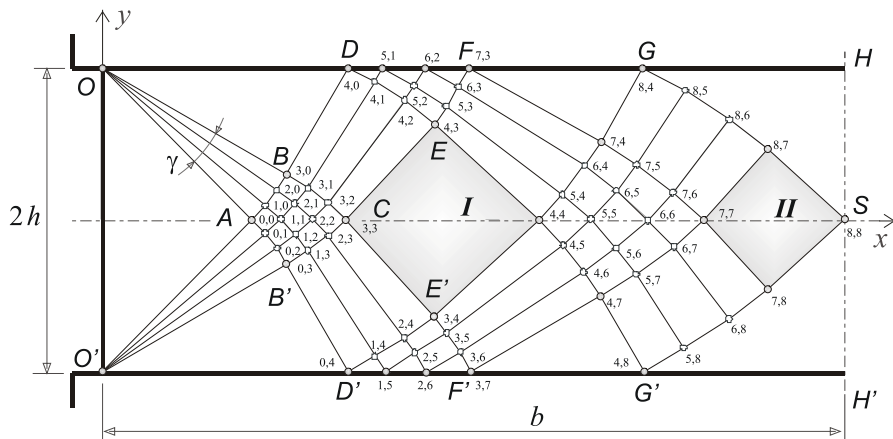
$$\frac{p_{sr}}{2k} = \frac{1}{b} \int_{x_D}^{x_F} p \, dx. \quad (11.31)$$

11.2.2. Spęszczanie przy czynniku tarcia $m < 1$

W przypadku, gdy czynnik tarcia m na powierzchni kontaktu jest mniejszy od 1 (odpowiada to spęczaniu przy $\mu < 0,39$) to napężenie styczne na tej powierzchni przyjmuje wartości mniejsze od granicznych, równych k . Rozwiązanie zagadnienia spęczania bloku, przy takich parametrach tarcia ma odmienny charakter od omówionego uprzednio. Siatkę linii poślizgu dla przypadku spęczania przy $m = 0,26$ oraz $b/h = 4,88$ podaje się na rysunku 11.13.

Rozwiązanie zaczyna się jak poprzednio od założenia prostoliniowej linii poślizgu OA. Wielkość przylegającej do tej linii biegunowej siatki linii poślizgu ograniczona jest kątem γ . Wartość tego kąta wynika z warunku tarcia na powierzchni styku, zapisywanego równaniem tarcia stałego. Po wykorzystaniu podstawienia Levy'ego otrzymuje się następujący układ równań:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy(0,D)} &= m k \\ \tau_{xy(0,D)} &= k \sin \phi_{(0,D)} \end{aligned} \right\}, \quad (11.32)$$



Rys. 11.13. Siatka linii poślizgu dla przypadku spęczania bloku, przy $m = 0,26$ oraz $b/h = 4,88$ (opis w tekście)

z którego oblicza się wartość parametru kąowego $\phi_{(0,D)}$ w trójkącie podstawowym OBD:

$$\phi_{(0,D)} = \frac{1}{2} \arcsin(m), \quad (11.33)$$

Ze względu na fakt, że w trójkącie OBD występuje jednorodny stan naprężenia mamy $\phi_{(0,B)} = \phi_{(0,D)}$. Wartość kąta wierzchołkowego γ wynika bezpośrednio ze związku na charakterystyce α_0 i rozważanym przypadku wynosi

$$\gamma = \phi_{(0,B)} - \phi_{(0,0)} = \phi_{(0,B)}, \quad (11.34)$$

gdyż $\phi_{(0,0)} = 0$, ze względu na symetrię bloku spęczanego.

Podstawiając dane wejściowe dla analizowanego przypadku spęczania ($m = 0,26$) otrzymuje się $\gamma = 0,2618$ (15°). Korzystając ze związku na charakterystyce α można zapisać, że

$$\sigma_{m(0,B)} = \sigma_{m(0,D)} = \sigma_{m(0,0)} + \phi_{(0,0)} - \phi_{(0,B)} = -0,5 + 0 - \gamma = -0,5 - \gamma. \quad (11.35)$$

Wyznaczenie stanu naprężenia w czworokątach ABCB' i BCED, polega na rozwiązaniu zagadnień charakterystycznych w oparciu o znane już wartości na liniach ABD i AB'. Następnie rozwiązuje się zagadnienie mieszane utworzone przez dane na linii poślizgu DE i warunek $\tau_{xy} = mk$, wzdłuż powierzchni kontaktu DF. Następny krok stanowi przedłużenie rozwiązania na pozostałą część ośrodka. Cechą charakterystyczną rozwiązania jest stała wartość parametru kąowego ϕ w punktach węzłowych, znajdujących się na powierzchni kontaktu materiał-narzędzie.

W tabeli 11.4 zestawiono wartości parametrów x , y , ϕ i σ_m uzyskane dla poszczególnych punktów węzłowych analizowanego rozwiązania. Szczególną cechą otrzymanej siatki linii poślizgu jest występowanie obszarów z jednorodnym stanem naprężenia w postaci szeregu trójkątów prostokątnych, przylegających do linii styku oraz czworoboków I, II (rys. 11.13) wzdłuż poziomej osi symetrii. Obszary te w miarę oddalania się od brzegu OO' są coraz mniejsze.

Wyznaczenie nacisku na powierzchni styku przeprowadza się w sposób analogiczny jak dla przypadków spęczania przy $m = 1$ ($\mu > 0,39$). Na odcinku OG rozkład nacisku p określony jest wartościami σ_y w poszczególnych punktach brzegowych leżących na tym odcinku. Natomiast wartość nacisku średniego p_{GH} należy obliczyć z warunku równowagi obszaru GHS.

W sposób odmienny od prezentowanego w niniejszym podrozdziale wyznacza się siatkę linii poślizgu przy założeniu stałej wartości współczynnika tarcia μ . Wówczas ze względu na wzrastające naprężenie σ_y zwiększeniu ulega również wartość naprężenia τ_{xy} ($\tau_{xy} = m\sigma_y$) wzdłuż powierzchni kontaktu. Schemat rozwiązania, przy założeniu $\mu = \text{const} < 0,39$, podany został przez Alexandera

[1]. Rozwiązanie takie zawarte jest również w poprzednich opracowaniach autorów, np. [73].

Tabela 11.4.

Wartości funkcji ϕ , σ_m oraz wartości współrzędnych punktów węzłowych x i y , dla przypadku spęczania przy $b/h = 4,88$ i $m = 0,26$

β α		0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	x/h	1,000	1,083	1,158	1,224	1,633	---	---	---	---
	y/h	0,000	-0,091	-0,189	-0,293	-1,000	---	---	---	---
	ϕ	0,000	-0,087	-0,174	-0,262	-0,262	---	---	---	---
	$\sigma_m/2k$	-0,500	-0,587	-0,674	-0,762	-0,762	---	---	---	---
1	x/h	1,083	1,182	1,274	1,375	1,800	1,856	---	---	---
	y/h	0,091	0,000	-0,100	-0,208	-0,208	-1,000	---	---	---
	ϕ	0,087	0,000	-0,087	-0,174	-0,174	-0,262	---	---	---
	$\sigma_m/2k$	-0,587	-0,674	-0,762	-0,849	-0,849	-0,936	---	---	---
2	x/h	1,158	1,274	1,383	1,485	1,997	2,062	2,132	---	---
	y/h	0,189	0,100	0,000	-0,110	-0,778	-0,881	-1,000	---	---
	ϕ	0,174	0,087	0,000	-0,087	-0,087	-0,174	-0,262	---	---
	$\sigma_m/2k$	-0,674	-0,762	-0,849	-0,936	-0,936	-1,024	-1,111	---	---
3	x/h	1,224	1,375	1,485	1,605	2,186	2,273	2,352	2,426	---
	y/h	0,293	0,208	0,110	0,000	-0,633	-0,746	-0,872	-1,000	---
	ϕ	0,262	0,174	0,087	0,000	0,000	-0,087	-0,174	-0,262	---
	$\sigma_m/2k$	-0,762	-0,849	-0,936	-1,024	-1,024	-1,111	-1,198	-1,285	---
4	x/h	1,633	1,800	1,997	2,186	2,877	3,029	3,171	3,273	3,555
	y/h	1,000	0,208	0,778	0,633	0,000	-0,166	-0,351	-0,511	-1,000
	ϕ	0,262	0,174	0,087	0,000	0,000	-0,087	-0,174	-0,262	-0,262
	$\sigma_m/2k$	-0,762	-0,849	-0,936	-1,024	-1,234	-1,198	-1,285	-1,373	-1,373
5	x/h	---	1,856	2,062	2,273	3,029	3,211	3,383	3,513	3,823
	y/h	---	1,000	0,881	0,746	0,166	0,000	-0,188	-0,358	-0,845
	ϕ	---	0,262	0,174	0,087	0,087	0,000	-0,087	-0,174	-0,174
	$\sigma_m/2k$	---	-0,936	-1,024	-1,111	-1,198	-1,285	-1,373	-1,460	-1,460
6	x/h	---	---	2,132	2,352	3,171	3,383	3,588	3,750	4,118
	y/h	---	---	1,000	0,872	0,351	0,188	0,000	-0,176	-0,657
	ϕ	---	---	0,262	0,174	0,174	0,087	0,000	-0,087	-0,087
	$\sigma_m/2k$	---	---	-1,111	-1,198	-1,285	-1,373	-1,460	-1,547	-1,547
7	x/h	---	---	---	2,426	3,273	3,513	3,750	3,943	4,369
	y/h	---	---	---	1,000	0,511	0,358	0,176	0,000	-0,465
	ϕ	---	---	---	0,262	0,262	0,174	0,087	0,000	0,000
	$\sigma_m/2k$	---	---	---	-1,285	-1,373	-1,460	-1,547	-1,634	-1,634
8	x/h	---	---	---	---	3,555	3,823	4,118	4,369	4,876
	y/h	---	---	---	---	1,000	0,845	0,657	0,465	0,000
	ϕ	---	---	---	---	0,262	0,174	0,087	0,000	0,000
	$\sigma_m/2k$	---	---	---	---	-1,373	-1,460	-1,547	-1,634	-1,634

11.3. Ciągnienie pasma

Geometria procesu ciągnięcia charakteryzowana jest stosunkiem grubości pasma (przed i po procesie) H/h oraz kątem zbieżności ścian matrycy α . W zależności od relacji pomiędzy tymi parametrami rozróżnia się dwa schematy budowy linii charakterystyk. Przypadek graniczny pomiędzy tymi schematami stanowi ciągnięcie pasma (przy danym α) z $(H/h)_{gr}$ określonym zależnością

$$(H/h)_{gr} = 1 + 2 \sin \alpha . \quad (11.36)$$

Ponadto, przy budowaniu siatek ważna jest znajomość sił tarcia na powierzchniach narzędzia, charakteryzowana np. czynnikiem tarcia m .

11.3.1. Ciągnienie z $H/h < (H/h)_{gr}$

Konstrukcję siatki (rys. 11.14a) przeprowadzono przy założeniu, że powierzchnie robocze narzędzia są idealnie gładkie ($m = 0$) oraz, że nacisk p_n wywierany przez materiał na powierzchnie narzędzia jest równomiernie rozłożony. W analizowanym przykładzie przyjęto $\alpha = 30^\circ$ oraz $H/h = 1,5$.

Zgodnie z przyjętymi założeniami konstrukcję siatki rozpoczyna się od wykreślenia trójkąta A 0,0 B (rys. 11.14b) charakteryzującego się równomiernym stanem naprężenia z prostoliniową siatką charakterystyk. Narożne punkty A i B są punktami osobliwymi (ze względu na nieciągłość obciążenia), z których wychodzą wachlarze siatek biegunowych. Rozwiązanie prowadzi się w ten sposób, aby charakterystyki obu rodzin zbiegły się na płaszczyźnie symetrii, dochodząc do tej płaszczyzny pod kątem $\pm\pi/4$. Kolejne etapy postępowania przy wykreślaniu siatki zilustrowane są na rys. 11.14c÷h. Dokładność kątowa zastosowanej, uproszczonej metody konstrukcji siatki charakterystyk wynosi $\pm d\phi$, a więc w analizowanym przypadku $\pm 5^\circ$.

Znajomość siatki charakterystyk oznacza znajomość zarówno kątów ϕ jak i wartości współrzędnych poszczególnych punktów węzłowych – tabela 11.5.

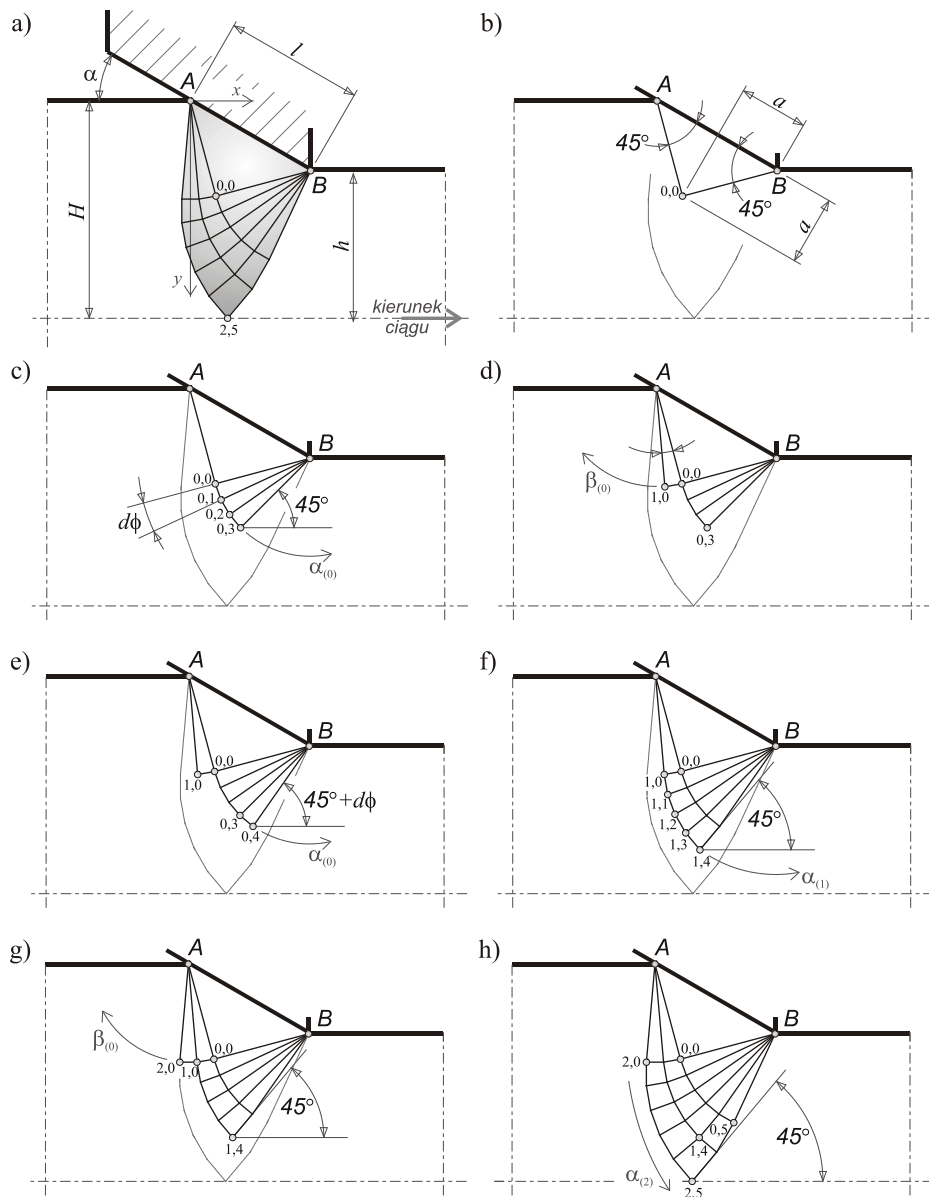
W celu określenia naprężenia ciągnięcia należy najpierw określić wartość naprężenia średniego w węźle 0,0. Wyznacza się go z warunku równowagi sił działających na obszar sztywny charakterystyki brzegowej $\alpha_{(2)}$. Na obszar ten działają siły wewnętrzne (rys. 11.15a). Przyjmując szerokość ciągniętego pasma równą jedności, otrzymuje się (po zrzutowaniu sił na oś x) następujące równanie

$$\int_{2.5}^A \sigma_m \sin \eta \, ds + \int_{2.5}^A k \cos \eta \, ds = 0 . \quad (11.37)$$

Zapisując, zgodnie z rys. 11.15b, że:

$$dx = ds \cos \eta , \quad (11.38)$$

$$dy = ds \sin \eta , \quad (11.39)$$

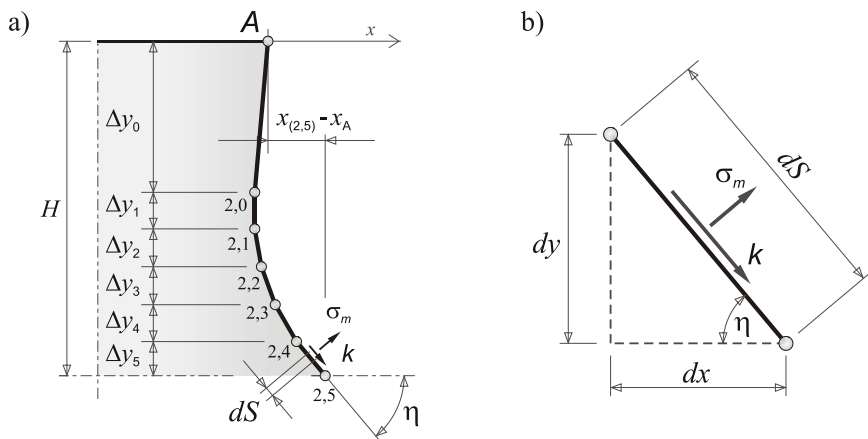


Rys. 11.14. Konstrukcja siatki poślizgu dla procesu ciągnięcia przez idealnie gładkie ciągnadło przy $\alpha=30^\circ$ oraz $H/h=1,5$: a) siatka linii poślizgu, b-h) kolejne etapy postępowania przy wykreślaniu siatki (linie rodziny $\alpha_{(i)}$ oraz $\beta_{(i)}$)

Tabela 11.5.

Wartości funkcji ϕ oraz wartości współrzędnych punktów węzłowych x i y , przy $\alpha=30^\circ$ i $H/h = 1,5$

β α		0	1	2	3	4	5
0	ϕ	-0,5236	-0,3491	-0,1745	0,0000	0,1745	0,3093
	x/a	-0,5000	-0,4157	-0,2924	-0,1340	0,0549	0,2179
	y/a	0,8660	1,0977	1,3112	1,5000	1,6585	1,7569
1	ϕ	-0,6981	-0,5236	-0,3491	-0,1745	0,0000	0,1348
	x/a	-0,7428	-0,6918	-0,5884	-0,4331	-0,2280	-0,0378
	y/a	0,9088	1,1982	1,4821	1,7510	1,9955	2,1617
2	ϕ	-0,8329	-0,6584	-0,4838	-0,3093	-0,1348	0,0000
	x/a	-0,9332	-0,9201	-0,8464	-0,7088	-0,5061	-0,3055
	y/a	0,9126	1,2431	1,5818	1,9176	2,2385	2,5000


Rys. 11.15. Schemat do wyznaczania wartości naprężenia średniego $\sigma_{m(0,0)}$:

- a) obszar sztywny płaskownika przed wejściem w szczelinę ciągadłą;
b) wydzielony elementarny element z charakterystyki brzegowej

warunek równowagi sił przekształca się do

$$\int_{2,5}^A \sigma_m dy + \int_{2,5}^A k dx = 0. \quad (11.40)$$

Ponieważ charakterystyka brzegowa $\alpha_{(2)}$ zadana jest w postaci odcinków prostych (rys. 11.15a) łączących poszczególne węzły, to możliwe jest zastąpienie całkowania sumowaniem

$$\sum_{j=0}^5 \sigma_{m(j)} \Delta y_{(j)} + k \sum_{j=0}^5 \Delta x_{(j)} = 0, \quad (11.41)$$

gdzie

$$\sigma_{m(j)} = \sigma_{m(2,0)} \quad \text{dla } j = 0, \quad (11.42)$$

$$\sigma_{m(j)} = \frac{1}{2} (\sigma_{m(2,j)} + \sigma_{m(2,j-1)}) \quad \text{dla } j = 1 \dots 5. \quad (11.43)$$

Ze związków na charakterystyce $\beta_{(0)}$ można zapisać, że

$$\sigma_{m(2,0)} = \sigma_{m(0,0)} + 2k(\phi_{(0,0)} - \phi_{(2,0)}), \quad (11.44)$$

natomiast ze związków na charakterystyce $\alpha_{(2)}$ uzyskuje się

$$\sigma_{m(2,j)} = \sigma_{m(2,0)} + 2k(\phi_{(2,j)} - \phi_{(2,0)}) = \sigma_{m(0,0)} + 2k(\phi_{(0,0)} + \phi_{(2,j)} - 2\phi_{(2,0)}). \quad (11.45)$$

Z geometrii procesu (rys. 11.15a) wynika, że

$$\sum_{j=0}^5 \Delta y_{(j)} = H, \quad (11.46)$$

$$\sum_{j=0}^5 \Delta x_{(j)} = x_{(2,5)} - x_{(A)}. \quad (11.47)$$

Korzystając z powyższych zależności przekształca się pierwszy składnik równania (11.41) do postaci zawierającej naprężenie średnie $\sigma_{m(0,0)}$, w węźle (0,0)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^5 \sigma_{m(j)} \Delta y_{(j)} &= [\sigma_{m(0,0)} + 2k(\phi_{(0,0)} - \phi_{(2,0)})] \Delta y_0 + \\ &+ \sum_{j=0}^5 [\sigma_{m(0,0)} + 2k(\phi_{(0,0)} - 2\phi_{(2,0)}) + k(\phi_{(2,j)} - 2\phi_{(2,j-1)})] \Delta y_{(j)} = \\ &= [\sigma_{m(0,0)} + 2k(\phi_{(0,0)} - \phi_{(2,0)})] \sum_{j=0}^5 \Delta y_{(j)} + \sum_{j=1}^5 k[(\phi_{(2,j)} + \phi_{(2,j-1)}) - 2\phi_{(2,0)}] \Delta y_{(j)} = \\ &= \sigma_{m(0,0)} H + 2k(\phi_{(0,0)} - \phi_{(2,0)}) H + k \sum_{j=1}^5 (\phi_{(2,j)} + \phi_{(2,j-1)} - 2\phi_{(2,0)}) (y_{(2,j)} - y_{(2,j-1)}). \end{aligned} \quad (11.48)$$

Natomiast drugi składnik równania (11.41) można zapisać w postaci

$$k \sum_{j=0}^5 \Delta x_{(j)} = k(x_{(2,5)} - x_{(A)}). \quad (11.49)$$

Podstawiając zależności (11.48) i (11.49) do równania (11.41) uzyskuje się

$$\sigma_{m(0,0)}H + 2k(\phi_{(0,0)} - \phi_{(2,0)})H + k \sum_{j=1}^5 (\phi_{(2,j)} + \phi_{(2,j-1)} - 2\phi_{(2,0)}) \cdot (y_{(2,j)} - y_{(2,j-1)}) + k(x_{(2,5)} - x_{(A)}) = 0. \quad (11.50)$$

Po przekształceniach z równania tego otrzymuje się następującą zależność na napężenie średnie w punkcie (0,0) w postaci bezwymiarowej

$$\frac{\sigma_{m(0,0)}}{2k} = -\frac{1}{H} \left[(\phi_{(0,0)} - \phi_{(2,0)})H + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^5 (\phi_{(2,j)} + \phi_{(2,j-1)} - 2\phi_{(2,0)}) \cdot (y_{(2,j)} - y_{(2,j-1)}) + \frac{1}{2} (x_{(2,5)} - x_{(A)}) \right]. \quad (11.51)$$

Podstawiając do powyższego równania odpowiednie wartości ϕ , x/a , y/a – tabela 11.5 – oraz uwzględniając, że $H = 3a$ oraz $x_{(A)}/a = -0,866$ uzyskano dla analizowanego przypadku

$$\frac{\sigma_{m(0,0)}}{2k} = -0,6248. \quad (11.52)$$

Wartości napężenia średniego dla poszczególnych punktów węzłowych wyznacza się wykorzystując związki na charakterystykach. Znając napężenie średnie oblicza się z kolei składowe stanu napężenia w danym punkcie. W tym celu wykorzystuje się podstawienie Levy'ego dane układem równań (11.3). Wyliczone wartości poszczególnych składowych stanu napężenia dla analizowanego przypadku zestawiono w tabeli 16.6.

Tabela 11.6.

Wartości stanu napężenia w poszczególnych punktach węzłowych obliczone dla procesu ciągnięcia przy $\alpha = 30^\circ$ oraz $H/h = 1,5$

β		0	1	2	3	4	5
α							
0	$\sigma_x/2k$	-0,3748	-0,0672	0,1941	0,3988	0,5432	0,6155
	$\sigma_y/2k$	-0,8748	-0,8333	-0,7456	-0,6012	-0,3965	-0,1992
	$\tau_{xy}/2k$	-0,4330	-0,3214	-0,1710	0,0000	0,1710	0,2900
1	$\sigma_x/2k$	-0,3634	-0,0257	0,2818	0,5432	0,7479	0,8646
	$\sigma_y/2k$	-0,5371	-0,5257	-0,4842	-0,3965	-0,2521	-0,0993
	$\tau_{xy}/2k$	-0,4924	-0,4330	-0,3214	-0,1710	0,0000	0,1332
2	$\sigma_x/2k$	-0,3629	-0,0153	0,3172	0,6155	0,8646	1,0174
	$\sigma_y/2k$	-0,2680	-0,2666	-0,2500	0,1992	-0,0993	0,0174
	$\tau_{xy}/2k$	-0,4977	-0,4840	-0,4118	0,2900	-0,1332	0,0000

Średnie napężenie ciągnięcia wyznacza się z warunku równowagi sił działających na obszar sztywny przeciągniętego pasma. Na obszar ten działają siły wewnętrzne wzdłuż charakterystyki brzegowej $\beta_{(5)}$ oraz siła zewnętrzna pochodząca od napężenia ciągnięcia. Dla jednostkowej szerokości ciągniętego pasma otrzymuje się po zrzutowaniu sił na oś x następujące równanie:

$$\int_{2,5}^B \sigma_m \sin \eta \, ds + \int_{2,5}^B k \cos \eta \, ds = p_c h. \quad (11.53)$$

Rozwiązując powyższą zależność oblicza się wartość p_c .

Znacznie prostszym rozwiązaniem jest jednakże wyznaczenie nacisku jednostkowego p na powierzchni roboczej narzędzia, na podstawie którego (w oparciu o warunek równowagi zewnętrznej ciągniętego materiału) określa się napężenie ciągnięcia. Nacisk p wynika bezpośrednio z koła Mohra (rys. 11.16).

$$p = \sigma_{m(0,0)} - k. \quad (11.54)$$

Warunek równowagi zewnętrznej podaje równanie

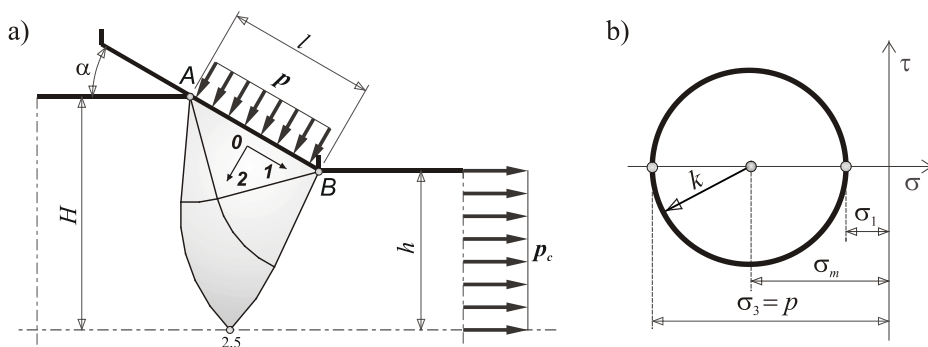
$$p_c h - p l \sin \alpha = 0. \quad (11.55)$$

Z geometrii procesu otrzymuje się, że

$$l = \frac{H - h}{\sin \alpha}. \quad (11.56)$$

Stąd średnie napężenie ciągnięcia w postaci bezwymiarowej

$$\frac{p_c}{2k} = \frac{p}{2k} \frac{H - h}{h} = \left(\frac{\sigma_{m(0,0)}}{2k} + \frac{1}{2} \right) \frac{H - h}{h}. \quad (11.57)$$



Rys. 11.16. Wyznaczenie napężenia ciągnięcia: a) obciążenie zewnętrzne działające na materiał ciągnięty; b) koło Mohra

Ponieważ

$$\phi_{(0,3)} - \phi_{(0,0)} = \alpha, \quad (11.62)$$

to po przekształceniach uzyskuje się zależność na napężenie średnie w punkcie (0,0) w postaci

$$\frac{\sigma_{m(0,0)}}{2k} = -\frac{1}{2H} [\alpha \Delta y_{03} + (x_C - x_A)]. \quad (11.63)$$

Przy założeniu, że $\alpha = 15^\circ$, $H = 50$ mm, a $h = 32,9$ mm (dla danych tych spełniony jest warunek graniczny) uzyskuje się

$$\frac{\sigma_{m(0,0)}}{2k} = -0,3915. \quad (11.64)$$

Natomiast napężenie ciągnienia w postaci bezwymiarowej obliczone z zależności (11.57) wynosi

$$\frac{p_c}{2k} = 0,4633. \quad (11.65)$$

Rozwiązanie to spełnia ograniczenie siłowe.

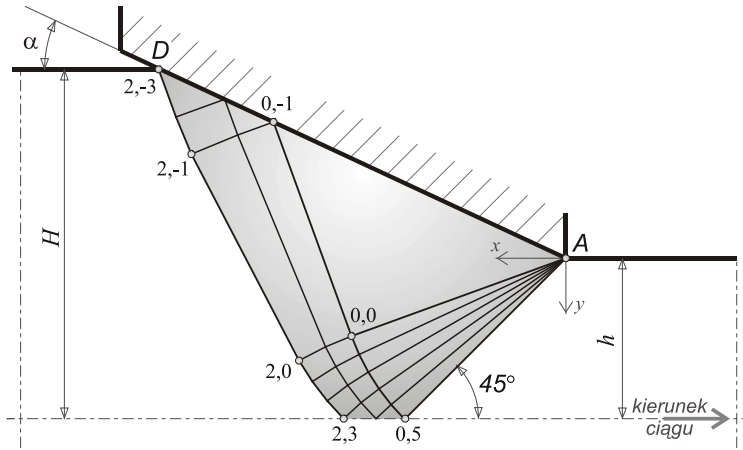
Do wyznaczenia napężenia ciągnienia w postaci bezwymiarowej można wykorzystać również empiryczną zależność [16]:

$$\frac{p_c}{2k} = \frac{2(1 + \alpha) \sin \alpha}{1 + 2 \sin \alpha}. \quad (11.66)$$

11.3.3. Ciągnienie z $H/h > (H/h)_{gr}$

W przypadku ciągnienia z $H/h > (H/h)_{gr}$ konstrukcja siatki linii poślizgów różni się od poprzednio omówionych przykładów (rys. 11.18). Przy założeniu idealnie gładkiej powierzchni matrycy ($m = 0$), jak również równomiernego, co najmniej odcinkami, rozkładu nacisku jednostkowego na powierzchni styku materiał-matryca charakterystyki dochodzą do powierzchni narzędzia pod kątami $\pm\pi/4$.

Konstrukcję siatki charakterystyk rozpoczyna się od wykreślenia trójkąta $A(0,0)B$ charakteryzującego się równomiernym stanem napężenia (rys. 11.19a). Przyjmuje się, że odległość punktu B od A równa jest $2h$. Punkt A jest punktem osobiwym ze względu na nieciągłość obciążenia. Z punktu tego wychodzi wachlarz promieniowych charakterystyk do punktu (0,5) – rys. 11.19b. W następnej kolejności konstruuje się przedłużenia poczynając od osi symetrii aż do momentu, gdy charakterystyka brzegowa przejdzie przez punkt C. Kolejne etapy postępowania przy konstruowaniu siatki zilustrowane są na rys. 11.19c oraz rys. 11.19d. Czynności te powtarza się aż do momentu, kiedy charakterystyka osiągnie punkt D.



Rys. 11.18. Siatka linii poślizgu dla ciągnięcia pasma przy $H/h = 2,177$, $\alpha = 25^\circ$ i $m = 0$

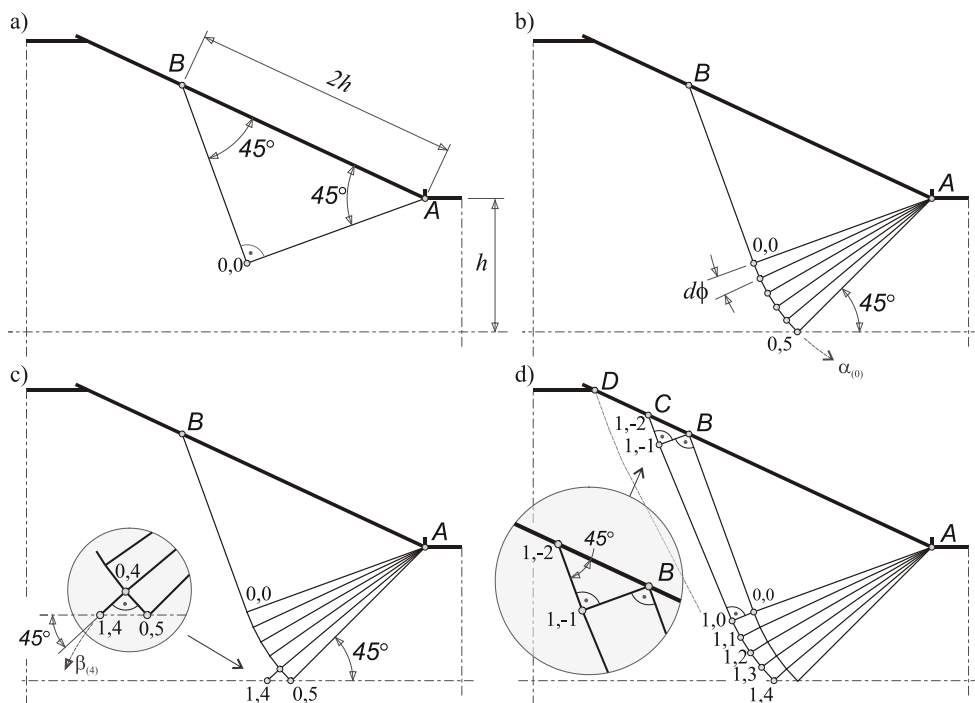
Wartości funkcji ϕ oraz współrzędnych poszczególnych punktów węzłowych dla siatki przedstawionej na rys. 11.18 (gdy $H/h = 2,177$ oraz $\alpha = 25^\circ$) zestawiono w tabeli 11.7.

Tabela 11.7.

Wartości funkcji ϕ oraz wartości współrzędnych punktów węzłowych x i y , przy $\alpha = 25^\circ$ oraz $H/h = 2,177$

β	α		-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	ϕ	--	--	-0,4363	-0,4363	-0,3491	-0,2618	-0,1745	-0,0873	0,0000	
	x/a	--	--	1,8126	1,3289	1,2817	1,2247	1,1588	1,0834	1,0000	
	y/a	--	--	-0,8452	0,4837	0,5977	0,7071	0,8112	0,9090	1,0000	
1	ϕ	--	-0,4363	-0,4363	-0,3491	-0,2618	-0,1745	-0,0873	0,0000	--	
	x/a	--	2,1149	2,0342	1,4896	1,4259	1,3522	1,2694	1,1743	--	
	y/a	--	-0,9862	-0,7646	0,5502	0,6727	0,7883	0,8963	0,0000	--	
2	ϕ	-0,4363	-0,4363	-0,3491	-0,2618	-0,1745	-0,0873	0,0000	--	--	
	x/a	2,5252	2,4157	2,3202	1,6531	1,5706	1,4784	1,3731	--	--	
	y/a	-1,1775	-0,8767	-0,6461	0,6354	0,7649	0,8851	1,0000	--	--	

Wyznaczenie naprężenia ciągnięcia p_c rozpoczyna się od określenia naprężenia średniego w punkcie (0,0). W tym celu rozpatruje się warunek równowagi sił działających na obszar sztywny charakterystyki brzegowej $\alpha_{(2)}$



Rys. 11.19. Metodyka postępowania przy wykreślaniu siatki linii poślizgu dla przypadku ciągnięcia przy $H/h > (H/h)_{gr}$

$$\int_{2,3}^{2,-3} \sigma_m \sin \eta \, ds + \int_{2,3}^{2,-3} k \cos \eta \, ds = 0. \quad (11.67)$$

Po zastąpieniu całkowania sumowaniem oraz wykorzystaniu związków na charakterystykach, w sposób analogiczny jak dla przypadku $H/h < (H/h)_{gr}$, wyznacza się wartość $\sigma_{m(0,0)}$. W analizowanym przykładzie uzyskuje się

$$\frac{\sigma_{m(0,0)}}{2k} = -0,3069. \quad (11.68)$$

Mając daną wartość naprężenia średniego w węźle (0,0) oblicza się $\sigma_{m(1,-1)}$ oraz $\sigma_{m(2,-2)}$. Korzystając ze związków na charakterystykach otrzymuje się

$$\frac{\sigma_{m(1,-1)}}{2k} = -0,3942, \quad (11.69)$$

$$\frac{\sigma_{m(2,-2)}}{2k} = -0,4815. \quad (11.70)$$

Wielkość naprężenia ciągnienia p_c określa się z warunku równowagi zewnętrznej ciągniętego wyrobu. W tym celu należy wyznaczyć wartość nacisku jednostkowego p na powierzchni roboczej narzędzia. Zgodnie z założeniem równomiernego (co najmniej odcinkami) rozkładu nacisku jednostkowego (rys. 11.20) można zapisać, że

$$p_1 = \sigma_{m(0,0)} - k, \quad (11.71)$$

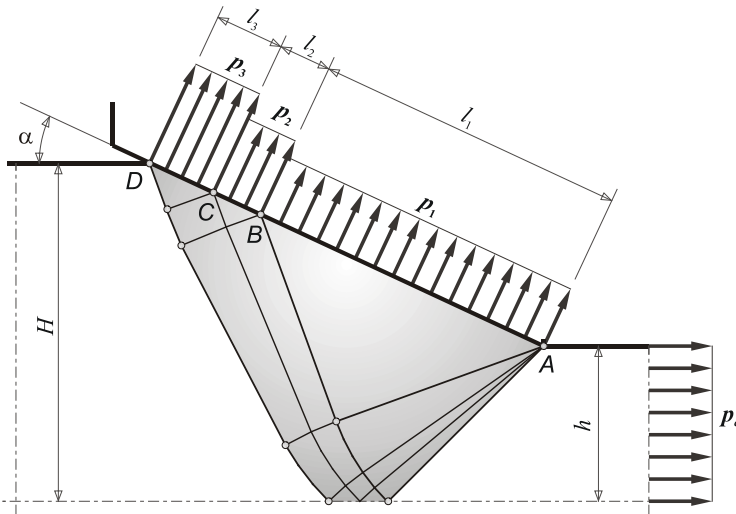
$$p_2 = \sigma_{m(1,-1)} - k, \quad (11.72)$$

$$p_3 = \sigma_{m(2,-2)} - k. \quad (11.73)$$

Po zrzutowaniu wszystkich sił zewnętrznych działających na ciągnięty wyrób uzyskuje się:

$$p_c h = \sum_{i=1}^3 p_i l_i \sin \alpha. \quad (11.74)$$

Stąd, po wykorzystaniu zależności (11.71)÷(11.73) otrzymuje się



Rys. 11.20. Rozkład naprężeń dla przypadku z rys. 11.18

$$\frac{p_c}{2k} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\sigma_{m(i-1, -i+1)}}{2k} - \frac{1}{2} \right) l_i \sin \alpha. \quad (11.75)$$

W analizowanym przypadku naprężenie ciągnięcia wynosi

$$\frac{p_c}{2k} = 0,9958. \quad (11.76)$$

Spełnione jest zatem ograniczenie siłowe wynikające z nieuplastycznienia się już przeciągniętego pasma.

W przypadku ciągnięcia wyrobów przy założeniu szorstkiej powierzchni matrycy ($m > 0$) konstrukcja siatki poślizgu ulega zmianie. Przykład zmodyfikowanej siatki, gdy $m = 0,5$ przedstawiono na rys. 11.21. Zmianie ulega konstrukcja trójkąta $A(0,0)B$, którego kąty są funkcją czynnika tarcia, a ich wartości wynoszą

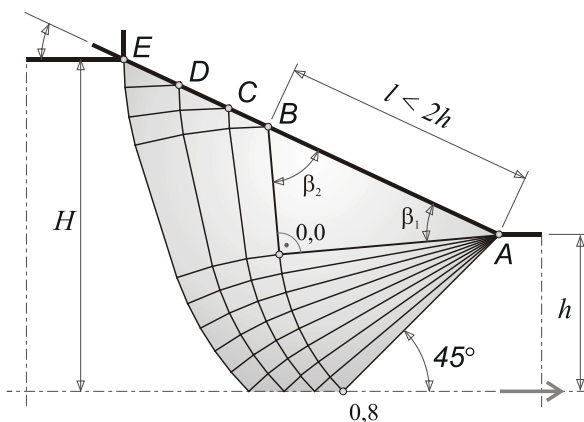
$$\beta_1 = 45^\circ - \rho = 45^\circ - \frac{1}{2} \arcsin(m), \quad (11.77)$$

$$\beta_2 = 45^\circ + \rho = 45^\circ + \frac{1}{2} \arcsin(m). \quad (11.78)$$

Długość odcinka AB spełnia nierówność $l < 2h$, a jego wartość wynosi dokładnie

$$l = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2 \cdot \cos \beta_1}. \quad (11.79)$$

Szczegółowa metodyka postępowania przy wykreślaniu siatki linii poślizgów oraz jej analiza w takim przypadku przedstawiona jest w literaturze specjalistycznej, przykładowo w pozycjach [13, 66].



Rys. 11.21. Siatka linii poślizgu dla ciągnięcia pasma przy $H/h = 2,177$, $\alpha = 25^\circ$ i $m = 0,5$

12. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

12.1. Wiadomości podstawowe

Metoda elementów skończonych (MES) jest obecnie powszechnie stosowanym numerycznym narzędziem obliczeń inżynierskich. Rozwój metody elementów skończonych, szczególnie w przeciągu ostatnich trzydziestu lat, jest ściśle związany z rozwojem techniki komputerowej. Pierwsze prace stosujące MES zostały opublikowane jeszcze w latach czterdziestych ubiegłego wieku. W tym samym czasie powstały pierwsze komputery, np. ENIAC w 1946 roku. Początkowo obliczenia przeprowadzane za pomocą metody elementów skończonych dotyczyły obiektów o bardzo prostej geometrii (najczęściej modeli jednowymiarowych 1D) i o stałych własnościach materiałowych oraz zjawisk opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi. Począwszy od lat siedemdziesiątych XX wieku MES zaczęto stopniowo stosować do rozwiązywania problemów nieliniowych, ale dalej dla obiektów o stosunkowo prostych geometriach, modelowanych jako 1D lub 2D (obiekty płaskie). Gwałtowny rozwój techniki komputerowej w latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia, związany z coraz większą mocą obliczeniową komputerów oraz możliwością operowania i przechowywania bardzo dużych zbiorów danych, umożliwił zastosowanie metody elementów skończonych do obliczeń problemów nieliniowych dla obiektów o dowolnie złożonych geometriach, szczególnie 3D (obiekty przestrzenne). Spośród autorów, którzy szczególnie przyczynili się do rozwoju MES (w zakresie analizy procesów obróbki plastycznej) przede wszystkim należy wymienić O.C. Zienkiewicza [75], R.H. Gallaghiera [17], C.H. Lee i S. Kobayashi'ego [36], a z polskich J. Szmeltera [63] i M. Pietrzyka [46].

Istotą metody elementów skończonych w obrębie modelowania procesów obróbki plastycznej jest zamiana obiektów rzeczywistych (materiału kształtowanego, narzędzi) na modele dyskretne, których geometria jest odzwierciedlana skończoną ilością **elementów** połączonych ze sobą skończoną liczbą **węzłów**. Do węzłów tych są przypisane odpowiednie własności określające jednoznacznie ich przemieszczenia, cechy modelowanego obiektu oraz zależności zachodzące zarówno w obrębie jednego elementu jak i pomiędzy sąsiadującymi elementami. W węzłach występują również **siły węzłowe**, które powstają w wyniku przemieszczenia. Siły te dają równowagę węzłów, elementów i całego układu. Na podstawie przemieszczeń węzłów obliczane są odkształcenia, a następnie naprężenia we wszystkich punktach obszaru. Metoda ta podaje sposób łączenia

założonych elementów w jedną całość, biorąc pod uwagę równania równowagi elementów, warunki brzegowe dla przemieszczeń i sił, przemieszczenia, odkształcenia, warunki ciągłości, prawo plastycznego płynięcia i warunek plastyczności. W równaniach MES występują również parametry specjalne (np. macierz Jacobiego, funkcja kary – z ang. *penalty function*), które zapewniają spełnienie określonych cech obiektu (np. nieściśliwość modelu) lub wpływają na zachowanie stabilności obliczeń numerycznych. Szczegółowy opis uzyskiwania rozwiązania metodą elementów skończonych, dla zagadnień dotyczących obróbki plastycznej przedstawiony jest np. w pracach [16, 21, 36, 46, 51÷54].

MES stanowi obecnie uznawany standard w analizie zadań z zakresu mechaniki. O ogromnym zainteresowaniu tą metodą świadczy m.in. liczba konferencji naukowych poświęconych tematyce wykorzystania MES do analizy problemów z zakresu nauki i techniki. Wzrasta również ilość programów komputerowych przeznaczonych do projektowania i optymalizacji różnych procesów wytwórczych. Pakiety te można podzielić na programy uniwersalne stosowane w mechanice konstrukcji (np. Nastran, Abaqus, Ansys, Algor) oraz przeznaczone do projektowania specyficznych procesów wytwarzania np. kucia (Deform, Forge 2 i 3, MSC.SuperForm, Qform 3D, SimuFact), tłocznictwa (Optris, Indeed, Dynaform, Pam-Stamp 2G), obróbki skrawaniem (Radios, Forge 2).

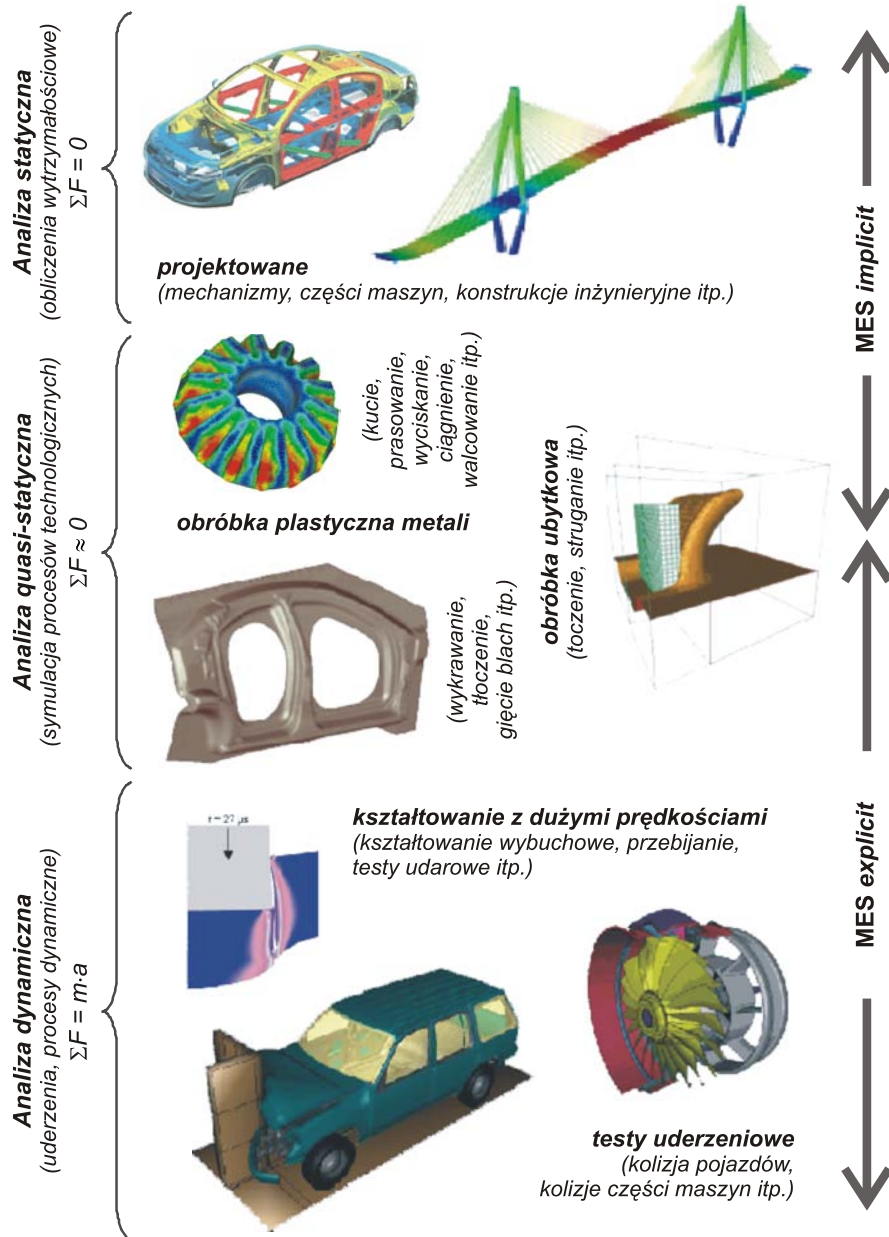
Do głównych zalet metody elementów skończonych należy zaliczyć:

- algorytmiczność metody, tj. możliwość korzystania ze standardowych procedur rozwiązania;
- funkcyjną formę metody, pozwalającą otrzymać rozwiązanie dla dowolnych warunków granicznych oraz różnych kształtów obiektów modelowanych;
- możliwość uogólnienia wyników.

Zalety te czynią MES bardziej przydatną do rozwiązywania różnych zagadnień niż którąkolwiek z pozostałych metod. Dokładność tej metody przy umiejętnym podziale obszaru odkształcenia na elementy i doborze odpowiedniej ich liczby, może być oceniana wyżej od dokładności najbardziej dokładnej metody eksperymentalnej [71]. Mimo to, MES jest bezustannie rozwijany i udoskonalany. Najnowsze implementacje komputerowe tej metody pozwalają przeprowadzać symulacje procesów kształtowania wyrobów, dla których uzyskiwane wyniki w bardzo małym stopniu odbiegają od rzeczywistości.

Ze względu na różnorodność zadań inżynierskich, obecnie można wyróżnić kilka odmiennych form metody elementów skończonych – rys. 12.1. W praktyce funkcjonują dwie podstawowe klasyfikacje MES [21].

Według pierwszej klasyfikacji – w oparciu o obszar zastosowania MES, wyróżnia się metodę do obliczeń zagadnień o naturze statycznej, quasi-statycznej oraz dynamicznej. Ten podział jest związany z tym, że dla różnych klas problemów inżynierskich stosuje się w praktyce zarówno odmienne równania MES



Rys. 12.1. Obszar zastosowania metody elementów skończonych (MES) w technologii maszyn oraz w mechanice, gdzie: F – siła, m – masa, a – przyspieszenie

(włącznie z algorytmami rozwiązywania ich) jak i również różniące się między sobą ogólne zasady modelowania.

Druga klasyfikacja dzieli MES na dwie grupy, ze względu na sposób rozwiązania jego równań. Mianowicie, wyróżnia się MES *implicit* oraz MES *explicit*. Pierwszy typ metody elementów skończonych obejmuje te odmiany MES, w których do rozwiązania równań są stosowane algorytmy całkowania niejawnego. Natomiast w MES typu *explicit* do rozwiązania równań używa się algorytmu całkowania jawnego w czasie rzeczywistym. Ze względu na konieczność uwzględnienia czasu jako parametru w sposób jawny, ten drugi algorytm ma zastosowanie tylko w rozwiązywaniu zagadnień o charakterze dynamicznym.

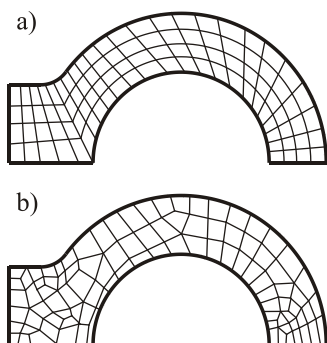
12.1.1. Ogólne zasady modelowania MES

Modelowanie MES zagadnień inżynierskich realizuje się według następującej procedury:

- na podstawie obiektu rzeczywistego buduje się obiekt dyskretny podzielony na pewną skończoną ilość geometrycznie prostych elementów;
- formułuje się układ niewiadomych, który składa się z poszukiwanych wielkości przypisanych do węzłów;
- dobiera się funkcje kształtu (funkcje węzłowe), które określają rozkład analizowanych wielkości wewnątrz elementów;
- układa się równania różniczkowe opisujące analizowany obiekt dyskretny, a następnie przekształca się je do postaci równań algebraicznych;
- wykonuje się asemblację układu niewiadomych, równań algebraicznych i funkcji kształtu wraz z ich modyfikacją bazując na warunkach brzegowych obiektu dyskretnego – efektem jest **układ równań MES**, w którym liczba równań jest równa ilości węzłów przemnożonej przez liczbę niewiadomych przypisanych węzłowi.

Rozwiązanie układu równań MES jest równoznaczne z uzyskaniem wyniku. Ilość równań w tym układzie jest ściśle zależna od ilości elementów, liczby stopni swobody elementu (tj. ilości węzłów przemnożonych przez liczbę niewiadomych przypisanych pojedynczemu węzłowi) oraz klasy geometrii obiektu (dwuwymiarowy lub przestrzenny). Są one wyrażone matematycznie w formie macierzy wielowymiarowych – dlatego też, rozwiązanie układu równań MES o tak dużej złożoności obliczeniowej jest możliwe tylko poprzez zastosowanie odpowiednich algorytmów numerycznych zaimplementowanych do postaci programu komputerowego [21].

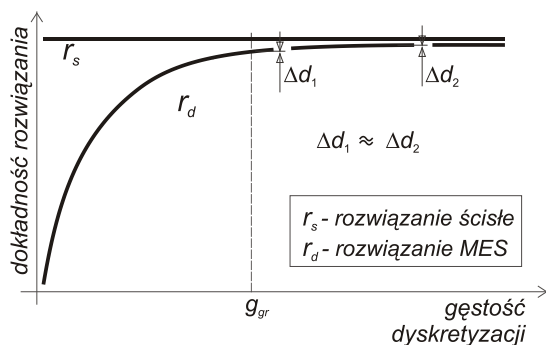
Podział obszaru na określoną ilość elementów odbywa się na drodze dyskretyzacji. Proces dyskretyzacji jest wykonywany zazwyczaj automatycznie metodą zalgorytmizowaną. Ze względu na sposób realizacji dyskretyzacji obszaru wyróżnia się podział [76]:



Rys. 12.2. Podział na elementy obszaru opisanego modelem geometrycznym w sposób regularny (a) i nieregularny (b) [76]

- regularny (rys. 12.2a) – jest on wykonywany na podstawie zarysu geometrycznego obszaru, a algorytm dąży do uzyskania siatki elementów o dużym stopniu jednorodności, co w efekcie zapewnia dobrą dokładność obliczeń;
- nieregularny (rys. 12.2b) – również jest wykonywany w oparciu o model geometryczny, jednak w tym przypadku kosztem jakości dyskretyzacji uzyskuje się siatkę w sposób szybszy (zalecany do obszarów o bardzo złożonym kształcie geometrycznym);
- swobodny – jest to metoda bezpośredniej budowy siatki elementów (poprzez podanie współrzędnych węzłów) bez wykorzystywania modelu geometrycznego obszaru.

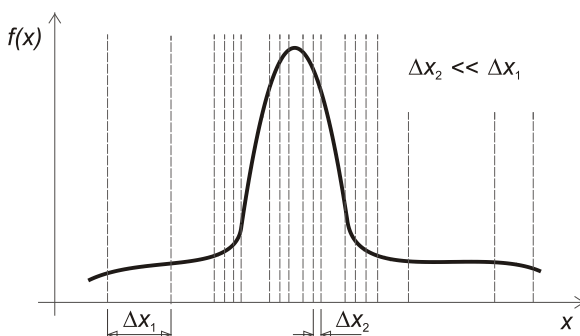
Dokładność uzyskania rozwiązania MES (r_d) zależy przede wszystkim od gęstości siatki elementów. Jak wynika z rys.13.3, osiągnięcie pewnego pułapu granicznej gęstości dyskretyzacji g_{gr} obszaru powoduje takie zbliżenie rozwiązania r_d do rozwiązania ścisłego r_s , że dalsze zwiększanie gęstości dyskretyzacji jest nieuzasadnione. Powoduje jedynie zwiększenie ilości równań (pośrednio: czasu obliczeń) bez widocznej poprawy dokładności obliczeń.



Rys. 12.3. Wpływ gęstości dyskretyzacji na dokładność rozwiązania MES

Innym sposobem poprawy dokładności rozwiązania MES bez konieczności zwiększania rozmiaru równań MES jest stosowanie jedynie miejscowego zagęszczania siatki elementów. Taki zabieg jest stosowany w podobszarach będących w sąsiedztwie kątów, miejscach przyłożenia obciążenia skupionego, przy skokowych zmianach kształtu, na granicy między ośrodkami o różnych własnościach itp.

Uzasadnienie stosowania takiego rozwiązania wyjaśnia rys. 12.4, który nawiązuje do aproksymacji funkcji jednej zmiennej za pomocą np. odcinków liniowych. W obszarach, w których funkcja wykazuje dużą zmienność, gęstość dyskretyzacja powinna być większa niż w pozostałych, ustabilizowanych obszarach funkcji.



Rys. 12.4. Uzasadnienie stosowania zagęszczania dyskretyzacji na przykładzie zadania aproksymacji funkcji $f(x)$

Istotnym etapem modelowania MES jest dobór właściwego **rodzaju elementów skończonych** użytych do dyskretyzacji obszaru. Istnieje wiele różnych typów elementów, które wyróżnia określony zespół cech. W celu ich sklasyfikowania wprowadzono pewne kryteria, do których zalicza się wymiar elementu, jego kształt geometryczny, typ i stopień wielomianu funkcji opisującej element oraz ilość węzłów w elemencie.

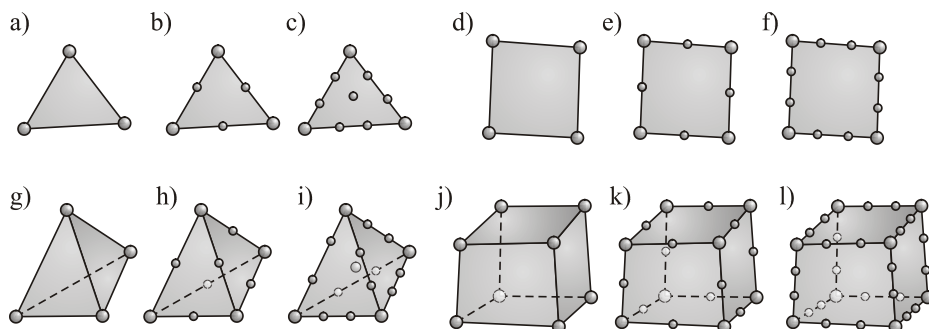
Podstawową klasyfikacją elementów jest podział ze względu na wymiar. Wyróżnia się elementy [71, 76]:

- jednowymiarowe, które są opisywane w przestrzeni jednowymiarowej i nie są stosowane do analizy procesów obróbki plastycznej (np. są wykorzystywane w analizie konstrukcji kratownic);
- dwuwymiarowe (rys. 12.5a÷f) – reprezentują przestrzeń dwuwymiarową i są stosowane w analizie procesów, gdzie przyjmuje się płaski stan odkształcenia, płaski stan naprężenia (np. procesy kształtowania blach) lub osiowo-symetryczny stan naprężenia i odkształcenia;
- trójwymiarowe (rys. 12.5a÷l), które są używane w analizie procesów w przestrzennym stanie naprężenia i odkształcenia.

Kolejną, często stosowaną klasyfikacją jest podział elementów ze względu na ich geometrię. Elementy skończone mogą być:

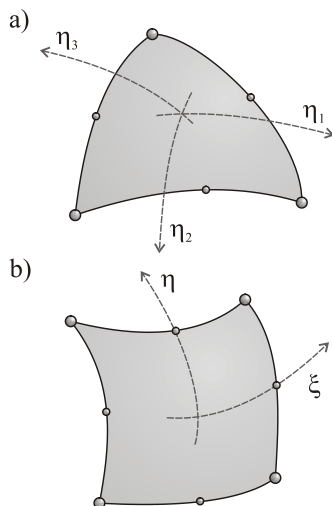
- trójkątne (rys. 12.5a÷c);
- czworokątne (rys. 12.5d÷f);
- czworościenne (rys. 12.5g÷i), nazywane również elementami tetragonalnymi;
- prostopadłościenne (rys. 12.5j÷l), określane jako elementy heksagonalne.

Podstawowymi typami elementów skończonych stosowanych powszechnie do modelowania procesów obróbki plastycznej są elementy wyżej wymienione,



Rys. 12.5. Typowe rodzaje elementów skończonych o konturach prostych – opis w tekście

w których węzły występują tylko w narożach, a boki (ściany) są proste (płaskie). Takie elementy posiadają możliwie najmniejszą ilość stopni swobody, co determinuje stosunkowo krótki czas obliczeń oraz nie wymaga zbyt dużych zasobów pamięciowych komputera. Jednak takie założenie powoduje, że w skrajnych przypadkach, podczas opisywania obszaru o nieregularnym i zakrzywionym brzegu, dyskretyzacja jest mało dokładna. W takiej sytuacji zaleca się stosować elementy o konturach zakrzywionych, które niestety powodują zwiększenie stopnia złożoności obliczeń.



Rys. 12.6. Elementy płaskie o konturach zakrzywionych (opis w tekście)

Na rys. 12.6 umieszczono przykłady elementu płaskiego trójkątnego i czworokątnego o konturach zakrzywionych. Elementy tego typu są elementami o zwiększonej ilości węzłów oraz charakteryzują się użyciem dodatkowych funkcji modelujących, a współrzędne znormalizowane (ściśle wiążą się z geometrią danego elementu) posiadają osie zakrzywione. W przypadku elementu trójkątnego (rys. 12.6a) używa się trzech współrzędnych znormalizowanych $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, gdzie trzecia współrzędna jest zależna od dwóch pozostałych współrzędnych niezależnych, natomiast w elemencie czworokątnym (rys. 12.6b) – dwóch współrzędnych niezależnych $\{\eta, \xi\}$.

Warunkiem koniecznym jest, aby kontury elementu zakrzywionego były odwzorowaniem ciągłym i różniczkowalnym w obszarze

współrzędnych uogólnionych oraz globalnych (tj. współrzędnych kartezjańskich lub walcowych przyjętych, odnoszących się do całości obszaru analizowanego i podzielonego na elementy). Odwzorowanie to powinno być wyrażone wielomianem klasy C^1 , gdy są rozpatrywane tylko odkształcenia sprężyste lub klasy C^2 , jeżeli odkształcenia są plastyczne.

Ze względu na sposób opisu geometrii elementu zakrzywionego oraz wyrażenia pola przemieszczeń jego węzłów, wyróżnia się następujące klasy elementów zakrzywionych [71]:

- izoparametryczne, gdzie geometria i pole przemieszczeń są opisane tymi samymi funkcjami kształtu we wszystkich węzłach;
- superparametryczne – wszystkie węzły elementu służą do opisu geometrii, a jedynie wybrane węzły mają dodatkowo przypisane pole przemieszczeń;
- subparametryczne – większa część wszystkich węzłów elementu jest użyta do opisu pola przemieszczeń niż do określenia geometrii.

Ostatnią klasyfikacją elementów skończonych jest ich podział ze względu na ilość węzłów występujących w jednym elemencie. Zazwyczaj, podział ten jest dokonywany ściśle w obrębie trzech tzw. rodzin elementów płaskich trójkątnych, czworokątnych oraz tetra- i heksagonalnych. W obrębie elementów płaskich trójkątnych wyróżnia się elementy skończone [71, 76]:

- pierwszego rzędu (rys. 12.5a), gdzie węzły znajdują się tylko w narożach, a funkcje kształtu są współrzędnymi znormalizowanymi powierzchniowymi i są klasy C^0 – w efekcie tego pole przemieszczeń jest ciągle i zmienia się liniowo wzdłuż krawędzi; niestety funkcje te nie zapewniają ciągłości pola naprężeń, których wartości są stałe w obrębie jednego elementu, a przechodząc do sąsiedniego elementu następuje zmiana skokowa ich wartości;
- drugiego rzędu (rys. 12.5b), w których trzy dodatkowe węzły są umieszczone centralnie na krawędziach elementu, a funkcja aproksymująca pole przemieszczeń jest wielomianem drugiego stopnia, dzięki temu uzyskuje się dokładniejsze rozwiązanie, gdzie odkształcenia i naprężenia zmieniają się liniowo wzdłuż krawędzi;
- trzeciego stopnia (rys. 12.5c), które posiadają trzy węzły w narożach, po dwa węzły rozmieszczone równomiernie na krawędziach oraz dodatkowy węzeł w środku elementu – wielomian aproksymujący pole przemieszczeń jest trzeciego stopnia z aż dziesięcioma współczynnikami (tyle ile jest węzłów), a pole odkształceń i naprężeń w obrębie elementu jest opisane funkcją kwadratową.

Elementy skończone wyższego rzędu pozwalają na uzyskanie dokładniejszych wyników, dają możliwość lepszego odwzorowania krzywoliniowego brzegu obszaru analizowanego oraz dokładniejszej aproksymacji pola przemieszczeń wewnątrz elementu. Zaleca się, aby tego typu rozwiązania używać podczas modelowania elementami zakrzywionymi lub gdy dokładność wyniku

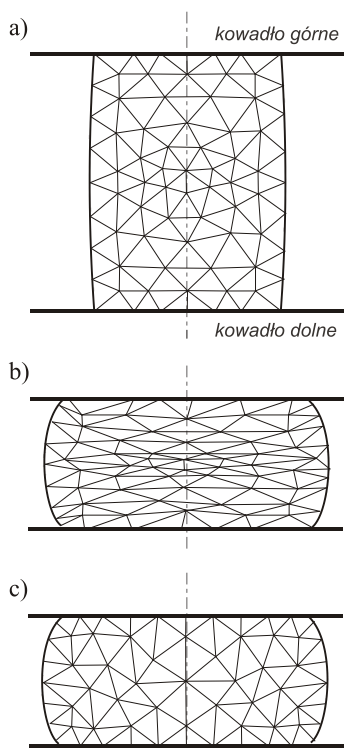
jest najwyższym priorytetem. Budowanie wielomianów, aproksymujące rozkład parametrów, których stopień jest większy niż trzy jest nieopłacalny.

W podobny sposób można również sklasyfikować pozostałe typy elementów (czworokątne oraz prostopadłościennie zaliczane są do jednej rodziny tzw. **serendipowskiej** [71]. Przykład elementów skończonych z tej grupy umieszczono na rys. 12.5d÷f oraz 12.5 j÷l i można je podzielić na elementy:

- pierwszego rzędu (rys. 12.5d, j), gdzie funkcja aproksymująca pole przemieszczeń jest wielomianem niepełnym drugiego stopnia, ale zapewnia ciągłość i liniowość zmiany parametru opisywanego wzdłuż krawędzi elementu;
- drugiego rzędu (rys. 12.5e, k) – funkcja opisująca pole przemieszczeń jest wielomianem pełnym trzeciego stopnia w obrębie elementu oraz drugiego stopnia wzdłuż krawędzi;
- trzeciego rzędu (rys. 12.5f, l), gdzie wielomian aproksymujący pole przemieszczeń jest trzeciego stopnia i jest taki sam dla całego elementu.

Elementy tetragonalne (rys. 15.5g÷i) są klasyfikowane w taki sam sposób jak elementy płaskie trójkątne. Cechy funkcji aproksymujących parametry charakterystyczne również są takie same.

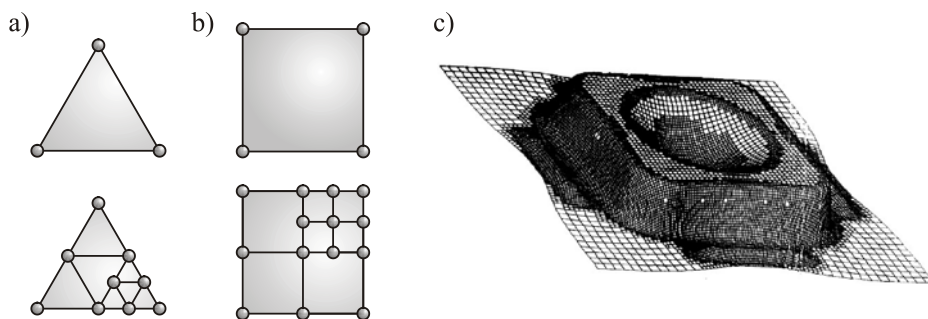
Kolejnym ważnym zagadnieniem metody elementów skończonych, szczególnie w kontekście analizy procesów obróbki plastycznej, jest przebudowa lub adaptacja siatki elementów skończonych, która jest wykonywana w trakcie analizy. Funkcja przebudowy siatki elementów (z ang. *remeshing*) jest stosowana w przypadku, gdy pierwotna siatka zostanie zniekształcona w stopniu powodującym generowanie znaczących błędów obliczeń. Najczęściej używany algorytm *remeshing*'u oparty jest na metodzie postępującego brzegu (AFM, z ang. *Advancing Front Method*) [50]. Ideę przebudowy siatki elementów ilustruje przykład spęczania bloku przedstawiony na rys. 12.7. Siatka elementów silnie zniekształconych (rys. 12.7b) jest w całości kasowana, ale wartości parametrów w węzłach są zapa-



Rys. 12.7. Przykład przebudowy siatki elementów skończonych (opis w tekście)

miętywane. Następnie na miejscu starej siatki jest budowana nowa siatka składająca się z elementów o poprawnej geometrii (rys. 12.7c). Wykorzystując zapamiętane parametry, na drodze aproksymacji wylicza się nowe wartości parametrów węzłowych z co najmniej trzech najbliższych skasowanych punktów węzłowych.

Odmienną metodą modyfikacji siatki elementów jest jej adaptacja (rys. 12.8). Zakłada się, że elementy dla których obliczone odkształcenie przekracza wartość graniczną zostają podzielone symetrycznie – tj. do elementu zostają dodane nowe węzły, które sprawiają „złudzenie” jego podziału na cztery mniejsze elementy. Współrzędne dodanych węzłów oraz ich parametry węzłowe są określane na drodze interpolacji liniowej na podstawie węzłów bazowych. Celem stosowania tej procedury modyfikacji siatki elementów skończonych jest zapewnienie większej dokładności obliczeń w miejscach newralgicznych (np. podczas tłoczenia blachy takimi miejscami są promienie zaokrągleń).



Rys. 12.8. Adaptacja siatki elementów skończonych: a) podział elementu płaskiego trzywęzłowego, b) podział elementu płaskiego czterowęzłowego (adaptacja czteropoziomowa), c) końcowa postać siatki elementów skończonych (4315 elementów) dla wytłoczki o złożonym kształcie, gdzie początkowa ilość elementów płaskich czterowęzłowych wynosiła 400 [21]

12.1.2. Analiza quasi-statyczna metodą *implicit*

Jednym z podstawowych sposobów rozwiązania równań MES jest algorytm typu *implicit*, który polega na numerycznym całkowaniu niejawnym równań liniowych lub quasi-liniowych. Równania MES są budowane w oparciu o reprezentację przemieszczeniową, naprężeniową lub mieszaną.

Metoda elementów skończonych bazująca na wymienionym sposobie budowy i rozwiązania modelu stosowana jest do analizy:

- statycznej obejmującej obliczenia pól naprężenia i odkształcenia w zakresie stanu sprężystego pod kątem wytrzymałości projektowanych konstrukcji inżynierskich;
- quasi-statycznej, mającej na celu obliczenie pola naprężeń i odkształceń w zakresie sprężysto-plastycznym lub sztywno-plastycznym.

Analiza quasi-statyczna metodą elementów skończonych jest wykorzystywana głównie do symulacji pewnej grupy procesów technologicznych. W obróbce plastycznej tego typu MES jest używany do symulowania procesów plastycznego kształtowania brył (kucia, prasowania, walcowania, wyciskania, ciągnięcia itd.). Podczas wykonywania obliczeń zakłada się, że nie uwzględnia się efektów inercyjnych oraz innych zjawisk zależnych od czasu, a kolejne etapy symulacji procesu są rozpatrywane jako przypadki statyczne.

Zazwyczaj równanie MES jest budowane w oparciu o model przemieszczeniowy, który jest formułowany na podstawie funkcjonału Φ całkowitej energii potencjalnej w odniesieniu do elementu skończonego. Funkcjonał Φ spełnia zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej układu

$$U = U_e + U_p, \quad (12.1)$$

mówiącą, że *spośród wszystkich dopuszczalnych (tj. ciągłych, różniczkowalnych i spełniających geometryczne warunki brzegowe) pól przemieszczeń u , minimalną wartość całkowitej energii potencjalnej rozpatrywanego ośrodka ciągłego daje te pole rzeczywiste u_r , które zapewnia dodatkowo spełnienie warunków równowagi i statycznych warunków brzegowych*. We wzorze (12.1) U_e wyraża energię potencjalną odkształcenia, a U_p – potencjał obciążenia zewnętrznego.

Wartość funkcjonału Φ zależy tylko od jednej zmiennej wyrażonej w postaci pola przemieszczeń

$$u = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}, \quad (12.2)$$

gdzie: $\mathbf{r}$ - wektor przemieszczeniowych parametrów węzłowych, będących jednocześnie współrzędnymi znormalizowanymi; $\mathbf{N}$ – macierz zawierająca funkcje kształtu elementu aproksymujące pole przemieszczeń dla poszczególnych parametrów wektora $\mathbf{r}$.

Podstawowym opisem modelu przemieszczeniowego jest układ równań algebraicznych względem parametrów wektora $\mathbf{r}$. Układ ten jest reprezentowany przez równanie macierzowe równowagi elementu

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (12.3)$$

gdzie $\mathbf{K}$ jest macierzą sztywności, adekwatną do przyjętych niezerowych parametrów węzłowych $\mathbf{r}$, natomiast $\mathbf{F}$ jest wektorem wewnętrznych sił węzłowych.

Model przemieszczeniowy jest najczęściej wybierany do budowy równań MES, ponieważ wymaga on ustalenia warunków brzegowych geometrycznych.

Takie podejście jest naturalne dla analizy obiektów będących układem narzędzie-materiał odkształcany – rozwiązanie takiego modelu nie sprawia większych trudności.

Zapiszmy teraz warunek równowagi sił działających na materiał odkształcany podczas analizy quasi-statycznej, mianowicie

$$F - P = 0, \quad (12.4)$$

gdzie P reprezentuje zbiór zewnętrznych sił węzłowych, które są związane z wywieranym naciskiem na materiał przez narzędzia.

Bazując na równaniu (12.3) można zapisać warunek (12.4) w postaci

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - P = 0. \quad (12.5)$$

Otrzymane wyrażenie (12.5) nazywane jest równaniem sztywności, które jest podstawowym opisem analizy quasi-statycznej opartej o MES typu *implicit*.

Równanie sztywności (12.5) jest wyrażeniem nieliniowym, gdyż składniki macierzy sztywności $\mathbf{K}$ są zależne od obliczanych przemieszczeń węzłowych $\mathbf{r}$. Ponieważ zaleca się, aby opis modelu dyskretnego był liniowy, wszystkie równania i opisy o charakterze nieliniowym są zamieniane na postać tzw. quasi-liniową. Niestety proces linearyzacji modelu MES wymaga zastosowania algorytmów numerycznych o naturze iteracyjnej. Dlatego też obliczenia cechują się stosunkowo dużą złożonością czasową, a częstym problemem jest trudność uzyskania zbieżności rozwiązania – tj. linearyzacji nieliniowego opisu modelu. Podstawowe metody linearyzacji nieliniowych równań stosowanych w MES zestawiono w tabeli 12.1.

Generalnie, proces rozwiązywania zadań kształtowania plastycznego brył, za pomocą analizy quasi-statycznej metodą typu MES *implicit*, jest wyjątkowo skomplikowany. Oprócz omówionego procesu budowy modelu przemieszczeniowego oraz przedstawionych w tabeli 12.1 technik linearyzacji równań nieliniowych należy dodatkowo w obliczeniach uwzględnić szereg zasad teorii plastyczności. W symulacjach MES najczęściej przyjmuje się następujące założenia upraszczające [50]:

- ośrodek ciągły jest w stanie równowagi;
- stan naprężenia, obciążenie zewnętrzne i/lub wewnętrzne zastępuje się siłami uogólnionymi przyłożonymi do punktów węzłowych;
- siły węzłowe (wartość, kierunek i zwrot) nie ulegają zmianie w trakcie przemieszczania się punktów na odcinku elementarnym, zgodnym z przyjętym wektorem przemieszczeń $\mathbf{r}$;
- odkształcany ośrodek na elementarnym przemieszczeniu zachowuje się liniowo;
- wykonana praca na elementarnym przemieszczeniu nie zależy od drogi;
- przemieszczenia węzłów reprezentują przemieszczenia całego elementu.

Tabela 12.1.*Metody iteracyjne linearyzacji nieliniowych równań stosowane w MES [50]*

Metoda	Opis metody
Przyrostowa	Polega ona na podziale zależności nieliniowej na odcinki stosując interpolację liniową. Z matematycznego punktu widzenia jest to zastąpienie rozwiązania równania nieliniowego wielokrotnym rozwiązaniem równań liniowych. Jest to metoda mało dokładna.
Zmiennej sztywności	Jest odmianą metody przyrostowej. W każdej iteracji przyjmuje się przybliżoną postać macierzy sztywności, która prezentuje gradient zależności naprężeń od odkształceń w danym punkcie węzłowym.
Kolejnych przybliżeń	Otrzymuje się w każdej iteracji sukcesywne rozwiązanie niewiadomych, gdzie każdy wynik z poprzedniego kroku obliczeń jest wykorzystywany do określania zmiennych równania liniowego w kolejnej iteracji. Przy czym, rozwiązanie linearyzacji w tej metodzie, może być zbieżne lub rozbieżne. W przypadku uzyskania zbieżności, każda kolejna wyliczona wartość zbliża się do wartości rzeczywistej.
Newtona-Raphsona	Zakłada się, że istnieje pewna dodatkowa zależność addytywna (macierz Jakobiego), która jest funkcją poszukiwanych niewiadomych i jednocześnie wyraża „miarę odległości” równania od rozwiązania rzeczywistego. Macierz ta może mieć postać jednakową dla wszystkich iteracji lub w każdym etapie obliczeń dobierana jest indywidualnie (tzw. macierz zmienna). Metoda ta jest obecnie metodą najdokładniejszą.

Sposób rozwiązania równań MES w analizie quasi-statycznej zależy od przyjętego modelu materiałowego modelowanego ośrodka. Pierwszym sposobem jest rozwiązanie **metodą wariacyjną**, w której przyjmuje się, że materiał jest traktowany jako ośrodek sprężysto-plastyczny, a jego kształtowanie przebiega przy zachowaniu najmniejszej energii odkształcenia. Drugi sposób polega na użyciu **metody macierzowej**. Zakłada ona, że materiał jest modelowany jako ośrodek sztywno-plastyczny lub (częściej) sztywno-lepkoplastyczny. Różnica pomiędzy tymi dwoma metodami jest taka, że w metodzie macierzowej zamiast bilansu pracy rozpatrywany jest funkcjonal mocy, natomiast zamiast przemieszczeń węzłów – ich prędkości. Dodatkowo, w metodzie macierzowej występuje **mnożnik Lagrange’a**, który odpowiada za matematyczne spełnienie warunku nieściśliwości materiału kształtowanego. Ponadto, nie uwzględnianie w obliczeniach odkształceń sprężystych z punktu widzenia numerycznego jest zaletą

(szczególnie w przypadku, gdy odkształcenia plastyczne są zdecydowanie większe niż sprężyste), gdyż powoduje to radykalne zmniejszenie ogólnego czasu trwania symulacji MES (w porównaniu z metodą wariacyjną).

12.1.3. Analiza dynamiczna metodą *explicit*

Ideą MES dla zastosowań dynamicznych jest dyskretyzacja obiektu rzeczywistego w oparciu o system budowy modelu ruchu dynamicznego. Na rys. 12.9 przedstawiono schematycznie zasadę budowy takiego modelu dla zagadnienia

kontaktowego, które jest typowe dla analizy obróbki plastycznej. Równanie równowagi dynamicznej (w odniesieniu np. do jednego elementu) wyraża się jako

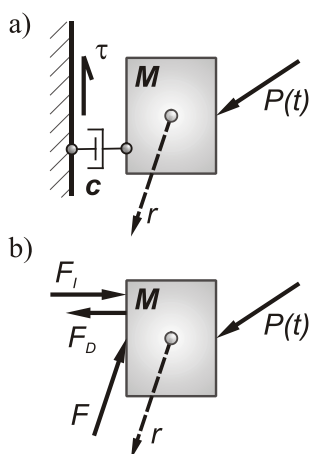
$$F_I + F_D = P(t) - F, \quad (12.6)$$

gdzie: F_I – siła inercji wynikająca z bezwładności obiektu; F_D – siła tłumienia wiskotycznego; $P(t)$ – siła zewnętrzna (wymuszenia) w funkcji czasu, F – siła wewnętrzna (węzłowa) wynikająca z przyjętego modelu tarcia, wzajemnych oddziaływań węzłowych oraz warunków realizowania zagadnienia kontaktowego. Po rozwinięciu poszczególnych wyrazów zależności (12.6) oraz uwzględnieniu wszystkich elementów, z których składa się model dyskretny, otrzymuje się równanie ruchu dynamicznego:

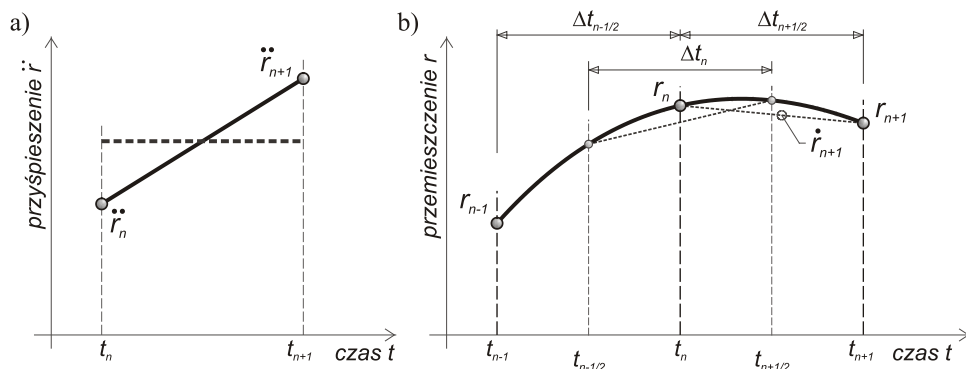
$$M \cdot \ddot{r} + D \cdot \dot{r} = P(t) - F, \quad (12.7)$$

gdzie: r – wektor przemieszczeń węzłowych, M – macierz mas, D – macierz tłumienia wiskotycznego, $P(t)$ – wektor sił zewnętrznych, F – wektor sił wewnętrznych.

Równanie ruchu dynamicznego (12.7) jest zależne od czasu t , który jest parametrem jawnym. Zatem rozwiązanie tego równania wymaga dyskretyzacji w oparciu o ten parametr, co jest realizowane za pomocą jednego z dwóch schematów całkowania w czasie rzeczywistym. Pierwszy z nich nazywa się metodą Newmarka, natomiast drugi – metodą różnic centralnych. Idea tych sposobów została zilustrowana na rys. 12.10.



Rys. 12.9. System budowy modelu ruchu dynamicznego: a) obiekt rzeczywisty, b) model, gdzie: c – współczynnik tłumienia wiskotycznego, τ – naprężenie styczne, M – masa, r – wektor przemieszczenia

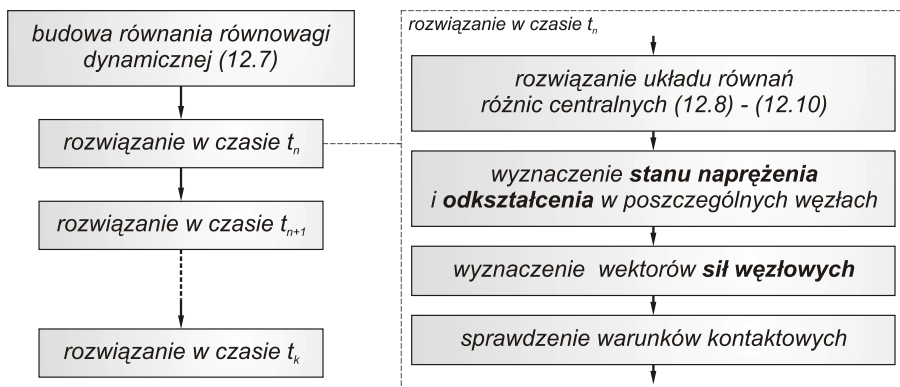


Rys. 12.10. Schemat linearyzacji funkcji (rozwiązania ścisłego) podczas całkowania równania dynamicznego w czasie rzeczywistym: a) metoda Newmarka (całkowanie niejawne – *implicit*), b) metoda różnic centralnych (całkowanie jawne – *explicit*) [21]

Metoda Newmarka (rys. 12.10a) zakłada, że równanie dynamiczne ruchu rozwiązywane jest dla czasu t_{n+1} określającego moment zakończenia aktualnego kroku czasowego. Schemat niejawnego całkowania równania ruchu po czasie t wymusza linearyzację przyspieszeń jako funkcji zależnej od czasu. Takie założenie sprawia, że algorytm niejawnego całkowania charakteryzuje się cechami:

- równowaga układu musi być bezwzględnie spełniona w czasie t_{n+1} ;
- wielkość kroku czasowego nie wpływa na stabilność obliczeń;
- wartość wyżej wspomnianego kroku często jest duża co sprawia, że ilość kroków obliczeniowych oraz dokładność rozwiązania (ze względu na linearyzację przyspieszeń – rys. 12.10a) jest zdecydowanie mniejsza;
- często występują problemy w uzyskaniu zbieżności rozwiązania dla przyjętego kroku czasowego, co wymusza iteracyjność algorytmu linearyzacji;
- rozwiązanie równania ruchu poprzez całkowanie niejawne po czasie t wymaga użycia komputera o bardzo dobrych parametrach obliczeniowych.

Alternatywą dla wyżej opisaney metody jest schemat całkowania jawnego po czasie rzeczywistym – czyli **metoda różnic centralnych** (rys. 12.10b). Zakłada ona, że równanie dynamiczne ruchu rozwiązywane jest dla czasu t_n określającego moment rozpoczęcia kroku czasowego. Powoduje to, że linearyzacji należy poddać funkcję przemieszczeń (rys. 12.10b), co w porównaniu z metodą Newmarka jest bardziej naturalne, a wyniki są obarczone mniejszym błędem. Algorytm ten (rys. 12.11) sprowadza się do rozwiązania układu równowagi składającego się z trzech równań powstałych na podstawie równania ruchu



Rys. 12.11. Schemat blokowy przedstawiający algorytm całkowania w czasie rzeczywistym t

(12.7) oraz zależności wynikających z rys. 12.10b. Układ ten nazywany jest różnicami centralnymi i przyjmuje postać:

$$\ddot{r}_n = M_n^{-1} \cdot (P_n - F_n - D_n \cdot \dot{r}_n) , \quad (12.8)$$

$$\dot{r}_{n+1/2} = \dot{r}_{n-1/2} + \frac{1}{2} \cdot (\Delta t_{n+1} + \Delta t_n) \cdot \ddot{r}_n , \quad (12.9)$$

$$r_{n+1} = r_n + \Delta t_{n+1} \cdot \dot{r}_{n+1/2} , \quad (12.10)$$

gdzie: oznaczenia zgodne z równaniem (12.7) oraz rys. 12.10. Macierze masy M i tłumienia wiskotycznego D mają postać diagonalną. Takie założenia sprawiają, że transformacja ich w trakcie obliczeń nie jest konieczna, a rozwiązanie zadania MES jest proste i szybkie. Powyższe równania różnic centralnych umożliwiają wyznaczenie wprost wektorów przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń punktów węzłowych w chwili czasu t_n .

Podstawowymi cechami metody różnic centralnych są [21]:

- równowaga układu musi być spełniona w czasie t_n , natomiast nie musi być spełniona w czasie t_{n+1} ;
- całkowanie równania ruchu jest stabilne tylko w przypadku, gdy wartość kroku czasowego Δt_n jest mniejsza od wartości krytycznej obliczanej dla każdego kroku z osobna;
- często wartość kroku czasowego jest mała (w stosunku do kroku obliczonego metodą Newmarka) co powoduje, że ich ilość jest znaczna (ale zapewnia dobrą jakość wyników);
- rozwiązanie równania równowagi nie wymaga stosowania obliczeń o charakterze iteracyjnym;

- wielkość układu równań równowagi w porównaniu z metodą Newmark jest zdecydowanie mniejsza co sprawia, że obliczenia można wykonywać przy użyciu standardowo wyposażonego komputera klasy PC.

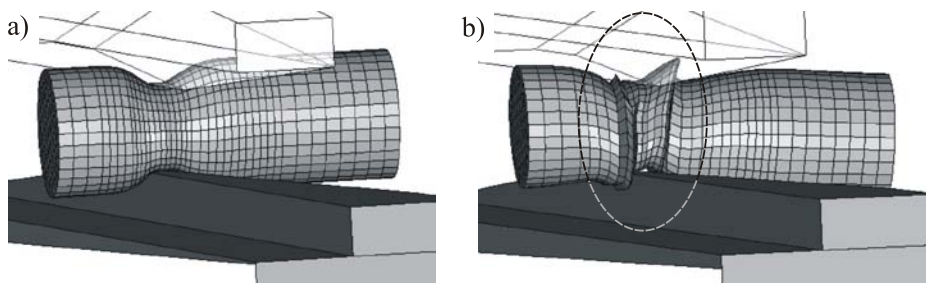
Porównując ze sobą te dwie metody stwierdza się, że metoda różnic centralnych (w skrócie *explicit*) jest metodą efektywną i niezawodną. Dlatego też obecnie obliczenia MES zadań o charakterze dynamicznym są wykonywane w oparciu o solver typu *explicit*.

Jedynym ograniczeniem tej metody jest maksymalna wartość kroku obliczeniowego Δt , który decyduje o stabilności rozwiązania. Dopuszczalna wartość wspomnianego kroku czasowego jest wyznaczana z następującej zależności [21, 51]:

$$\Delta t = \kappa \cdot l \cdot \left(\frac{E}{\rho} \right)^{-0,5}, \quad (12.11)$$

gdzie: κ – współczynnik skalujący (zazwyczaj nie większy niż 0,9), l – charakterystyczny wymiar liniowy (zawsze jest to minimalna długość najmniejszego elementu), E – moduł Younga, ρ – gęstość materiału.

Z zależności (12.11) wynika, że długość kroku czasowego (a zarazem stabilność obliczeń – rys. 12.12) ściśle zależy od wielkości elementów skończonych oraz od współczynnika skalującego κ . Zatem należy dążyć do budowania siatki o elementach jednorodnych i dostatecznie dużych (aby czas obliczeń był możliwie najmniejszy) oraz nie można przekraczać wartości krytycznej kroku czasowego. Jeżeli Δt będzie zbyt duży ($\kappa > 1$), to wyniki symulacji będą obarczone błędem, a najczęstszym efektem tego jest przesadne przemieszczenia węzłów powodujące absurdalne zniekształcenie geometrii odkuwki (rys. 12.12b).

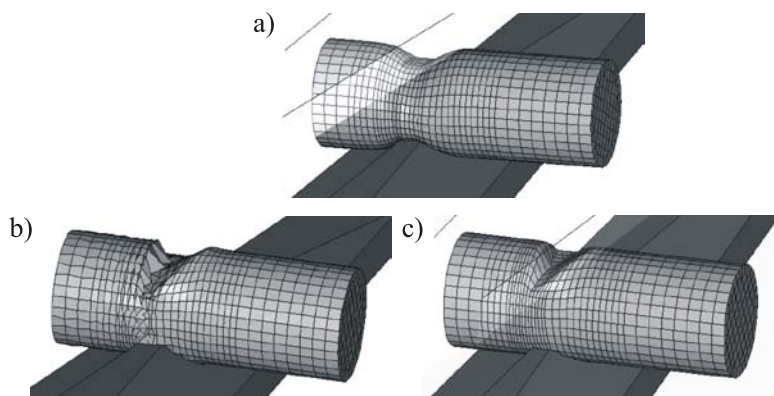


Rys. 12.12. Przykład przedstawiający wpływ wartości kroku czasowego Δt na stabilność symulacji MES *explicit* procesu walcowania: a) Δt mniejszy od wartości krytycznej ($\kappa = 0,9$), b) Δt większy od wartości krytycznej ($\kappa = 2,0$) [21]

Szczególną osobliwością MES typu *explicit* jest występowanie na poziomie elementu charakterystycznego stanu energetycznego, którego wartość wypadkowa jest równa zero. Osobliwość ta występuje tylko w elementach powierzchniowych czterowzłowych oraz bryłowych ośmiowzłowych, w których obliczane parametry są aproksymowane do jednego punktu referencyjnego (nie będącego węzłem). Zjawisko to jest niepożądane i objawia się poprzez określoną formę niestabilności geometrycznej elementu. Ze względu na jej charakter – tj. występujące oscylacyjne zmiany postaci elementu przypominające swoim kształtem klepsydrę – stan ten jest nazywany mianem „*hourglass*”.

Osobliwość tą można kontrolować np. przez wprowadzenie do równań MES dodatkowej macierzy sztywności sprężystej, która powoduje wyeliminowanie niepożądanych zniekształceń elementu. Jednakże, rozwiązanie to nie zapewnia globalnej stateczności stanu „*hourglass*”. Alternatywnym sposobem, który jest najczęściej stosowany, jest zapobieganie zjawiska utraty formy geometrycznej elementu za pomocą wymuszonego tłumienia wiskotycznego. Algorytm oparty na tym rozwiązaniu zapewnia automatyczną stabilizację geometrii elementu i jest w pełni kontrolowany przez użytkownika [21].

Na rys. 12.13 przedstawiono przykład symulacji walcowania poprzeczno-klinowego (WPK) wyrobu pełnego, w którym uwidoczniono wpływ zjawiska utraty stateczności geometrii elementów na wynik ostateczny. Rys. 12.13a obrazuje przypadek, gdzie kontrola omawianej osobliwości jest prawidłowo wykonana. Z kolei, na rys. 12.13b umieszczono sytuację odmienną – widać na nim charakterystyczne zwichrowanie elementów w strefie odkształcenia odkuwki.



Rys. 12.13. Wpływ zjawiska „*hourglass*” na wyniki analizy MES typu *explicit*: a) zjawisko kontrolowane, b) zjawisko niekontrolowane, c) zjawisko częściowo kontrolowane [21]

Natomiast na rys. 12.13c zilustrowano przypadek, w którym wybrano złą metodę kontroli zjawiska „hourglass”. W rezultacie, proces walcowania utracił stabilność (wystąpił poślizg niekontrolowany odkuwki), która wynika tylko i wyłącznie z błędu numerycznego.

W dalszej części niniejszego rozdziału przedstawia się kilka przykładów ilustrujących zastosowanie MES w analizie procesów obróbki plastycznej metali. Prezentowane rozwiązania uzyskane zostały głównie w oparciu o oprogramowanie komercyjne MSC.SuperForm, bazujące na reprezentacji przemieszczeniowej MES (analiza quasi-statyczna), umożliwiające symulowanie numeryczne procesów realizowanych w płaskim, osiowo-symetrycznym i przestrzennym stanie odkształcenia.

12.2. Kucie bezwypływkowe

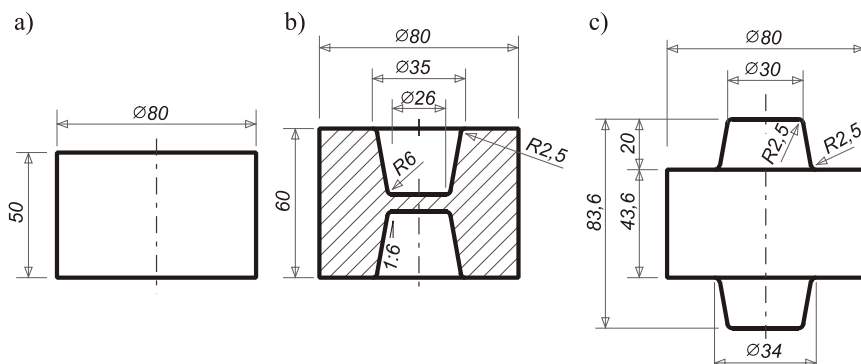
Przy kuciu bezwypływkowym (w **matrycach zamkniętych**) dopuszczalny stopień odkształcenia jest większy niż w procesach kucia wypływkowego (w **matrycach otwartych**), ze względu na występujący korzystny stan trójosiowych naprężeń ściskających. Z tego też powodu przy kuciu w matrycach zamkniętych praktycznie nie zachodzi niebezpieczeństwo wystąpienia pęknięć wewnętrznych.

Stosując MES można dokładnie prześledzić przebieg płynięcia materiału w procesach kucia bezwypływkowego. Znajomość kinematyki płynięcia metalu jest bardzo ważna, gdyż umożliwia właściwy dobór parametrów procesu, prawidłową konstrukcję oprzyrządowania, dokładne określenie siły kucia, jak również może stanowić podstawę opracowania systemu automatycznego sterowania procesem.

Wcześniejsze opracowania dotyczące kinematyki płynięcia materiału w procesach kucia bezwypływkowego [7, 70] opierały się na pracochłonnych badaniach kształtowania materiału modelowego (ołowiu lub plasteliny). Zastosowanie MES w analizie procesów obróbki plastycznej metali stworzyło nowe możliwości o charakterze poznawczym i użytecznym, do których zalicza się również możliwość dokładnego śledzenia kinematyki płynięcia materiału.

W procesach kucia bezwypływkowego wypełnienie wykroju może odbywać się przez spęczanie, dziurowanie i wyciskanie. W przypadku odkuwek mających kształt prosty (rys. 12.14a) wykrój wypełnia się przez spęczanie. Jeżeli odkuwka ma wgłębienia (rys. 12.14b) to wykrój wypełnia się przez spęczanie i dziurowanie. Natomiast wówczas, gdy odkuwki posiadają występy (rys. 12.14c), o średnicach mniejszych od średnicy materiału wyjściowego, to wypełnienie wykroju realizowane jest poprzez spęczanie i wyciskanie.

Obliczenia numeryczne, bazujące na MES, wykonano dla trzech odkuwek podanych na rys. 12.14. Analizę zagadnienia prowadzono przyjmując następują-



Rys. 12.14. Odkuwki wykorzystane w analizie MES procesu kucia bezwypływkowego

ce parametry procesu: materiał odkuwek – ołów w gatunku Pb1, wymiary wsadu $\varnothing 60 \times 90$ mm, prędkość przesuwu suwaka prasy 0,0012 m/s, współczynnik tarcia $\mu = 0,32$, temperatura kucia 20°C . W obliczeniach pominięto zagadnienia termiczne i przyjęto, że krzywa płynięcia kształtowanego materiału określona jest zależnością

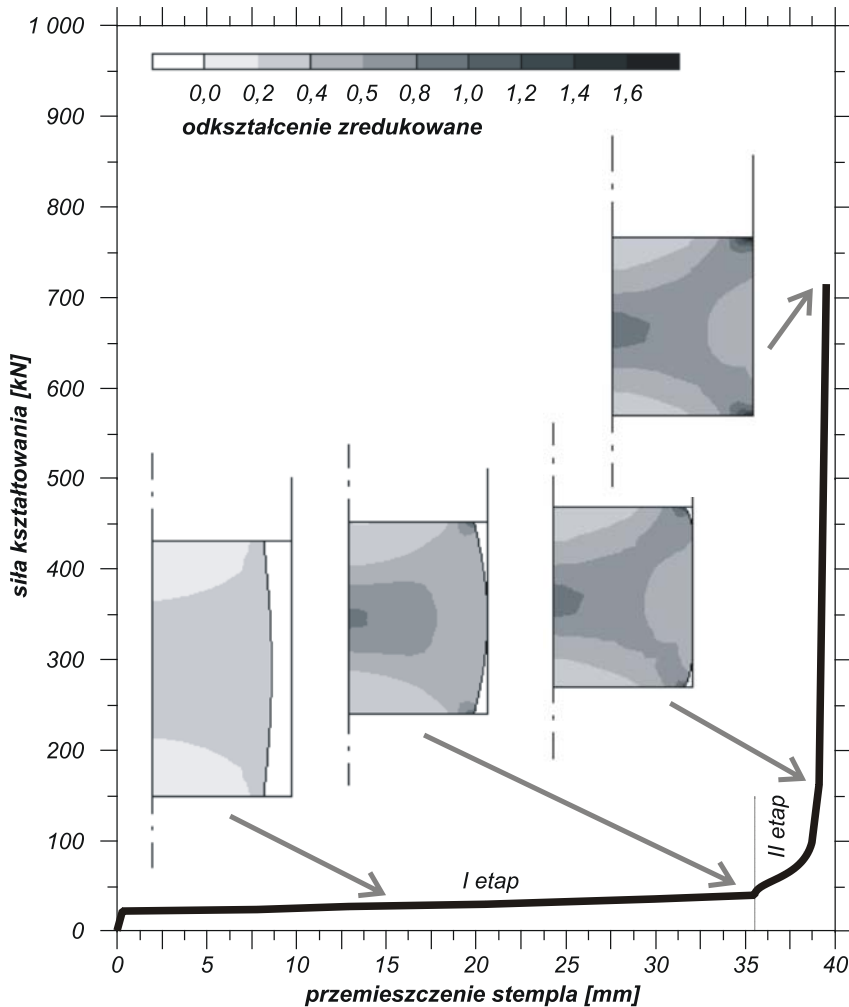
$$\sigma_p = 24,8 \dot{\varphi}^{0,088}, \quad (12.12)$$

gdzie: σ_p – naprężenie uplastyczniające, $\dot{\varphi}$ – prędkość odkształcenia.

Proces wypełniania wykroju dla każdej z rozpatrywanych odkuwek można podzielić na kilka etapów. W celu zilustrowania zakresu etapów oraz przybliżenia mechanizmu odkształcenia poszczególnych odkuwek wykonano wykresy zależności siły kształtowania, w funkcji przemieszczenia suwaka, które pokazano na rys. 12.15 ÷ 12.17.

Przy wypełnieniu wykroju przez spęczanie wyróżnia się dwa etapy (rys. 12.15). W pierwszym ma miejsce swobodne spęczanie materiału. Etap ten kończy się z chwilą zetknięcia się materiału z boczną ścianą wykroju. W etapie drugim następuje dalsze spęczanie materiału, aż do całkowitego wypełnienia naroży wykroju. Należy zwrócić uwagę na fakt, że w II etapie procesu kształtowania bardzo małym przyrostom drogi stempla odpowiadają duże przyrosty siły kucia.

W procesie wypełniania wykroju przez dziurowanie wyróżnić można cztery etapy (rys. 12.16). W etapie pierwszym czopy dziurujące wgłębiają się w materiał odkuwki. Etap ten kończy się w momencie zetknięcia się materiału z górną

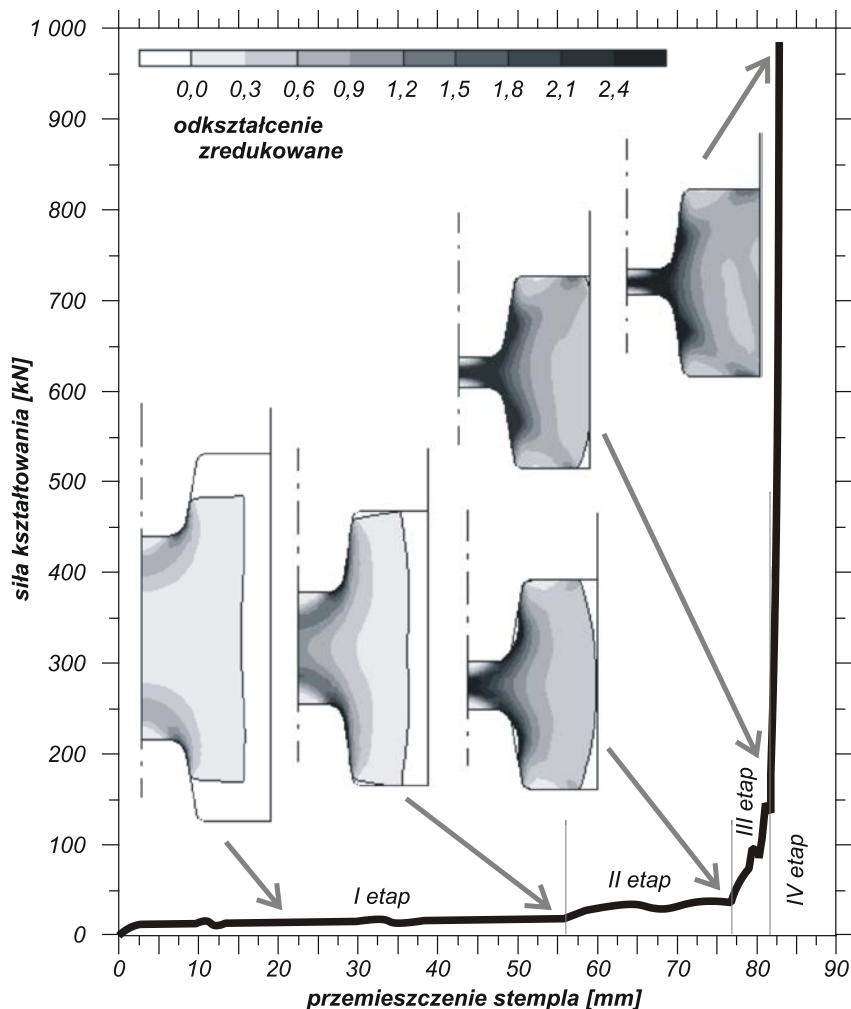


Rys. 12.15. Wykres siły kucia w procesie spęczania w matrycach zamkniętych

i dolną powierzchnią wykroju matrycy. W etapie drugim materiał podlega swobodnemu płynięciu w kierunku promieniowym, wypełniają się wtedy wewnętrzne naroża kształtowanej odkuwki. Ta faza procesu kończy się w chwili, w której następuje zetknięcie materiału z bocznymi ściankami matrycy. Należy zwrócić uwagę na fakt, że (w przypadku nieprawidłowo dobranych parametrów procesu)

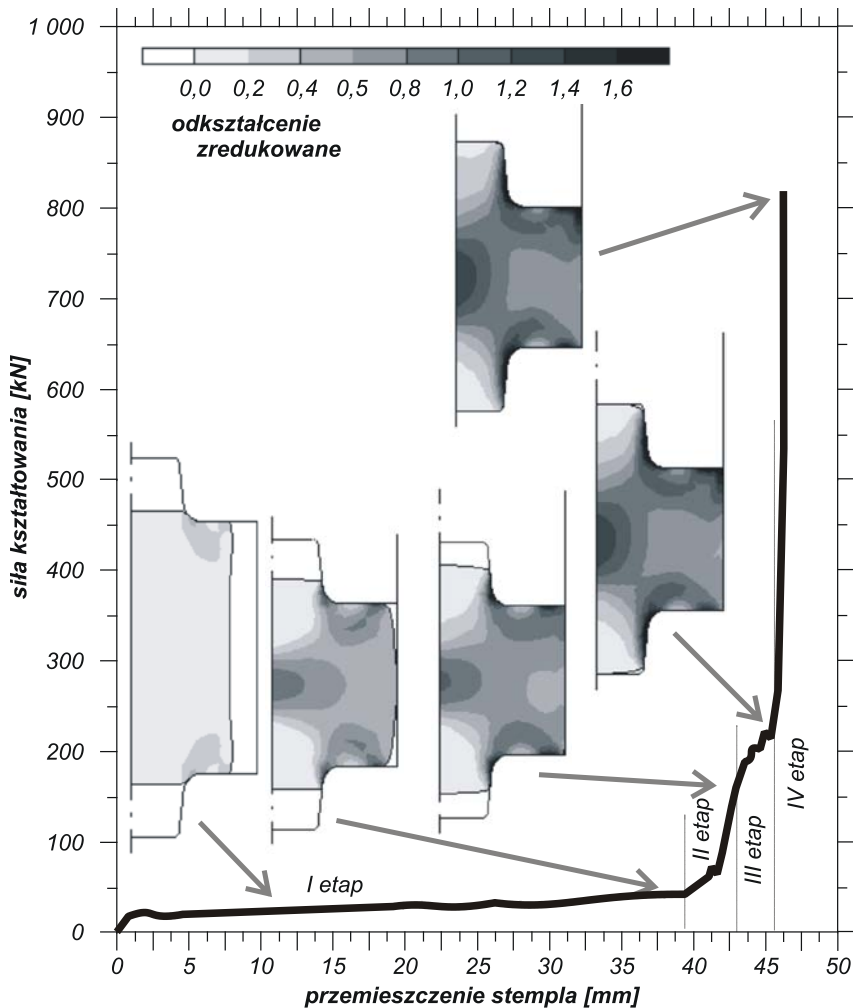
w etapie tym może wystąpić kształtowanie zakuć na bocznych powierzchniach czopów dziurujących.

W etapie trzecim zachodzi dalsze zagłębianie się czopów w materiał oraz wypełnianie wykroju w wyniku spęczania. W ostatniej fazie procesu, charakteryzującej się szybkim wzrostem siły kształtowania, zachodzi całkowite wypełnienie naroży zewnętrznych kształtowanej odkuwki.



Rys. 12.16. Wykres siły kucia w procesie kucia bezwplywkowego, gdy wypełnienie wykroju odbywa się przez dziurowanie

Proces wyciskania zachodzi w czterech etapach – rys. 12.17. Pierwszy etap podobnie jak w przypadku spęczania kończy się w momencie, gdy materiał dochodzi do bocznych ścianek wykroju. Ponadto w etapie tym na odkuwce zostają zaznaczone lekko wyciskane czopy. W etapie drugim, w dalszym ciągu realizowany jest proces spęczania, aż do całkowitego wypełnienia zewnętrznych narozży odkuwki. Etap trzeci trwa do momentu kiedy wciskane czopy dotkną dna



Rys. 12.17. Wykres siły kucia w procesie kucia bezwplywkowego, gdy wypełnienie wykroju odbywa się przez wyciskanie

wykroju. W ostatnim etapie następuje całkowite wypełnienie naroży kształtowych czopów odkuwki.

12.3. Dziurowanie tulei grubościennych w dwuwalcowej walcarce skośnej

Walcowanie skośne jest wiodącą metodą wytwarzania tulei grubościennych. W procesie tym wykorzystuje się dwa lub trzy walce (ustawiane skośnie do osi walcowanej tulei), główkę dziurującą kalibrującą wewnętrzną średnicę rury oraz (w przypadku metody dwuwalcowej) prowadnice utrzymujące kształtowany półwyrób w przestrzeni międzywalcowej. Najtrudniejsze warunki pracy w procesie walcowania skośnego ma główka dziurująca, która podczas kształtowania nagrzewa się do bardzo wysokich temperatur. W połączeniu z dużymi naciskami występującymi na powierzchni styku metal-główka wymusza to częstą wymianę główek dziurujących na nową [32].

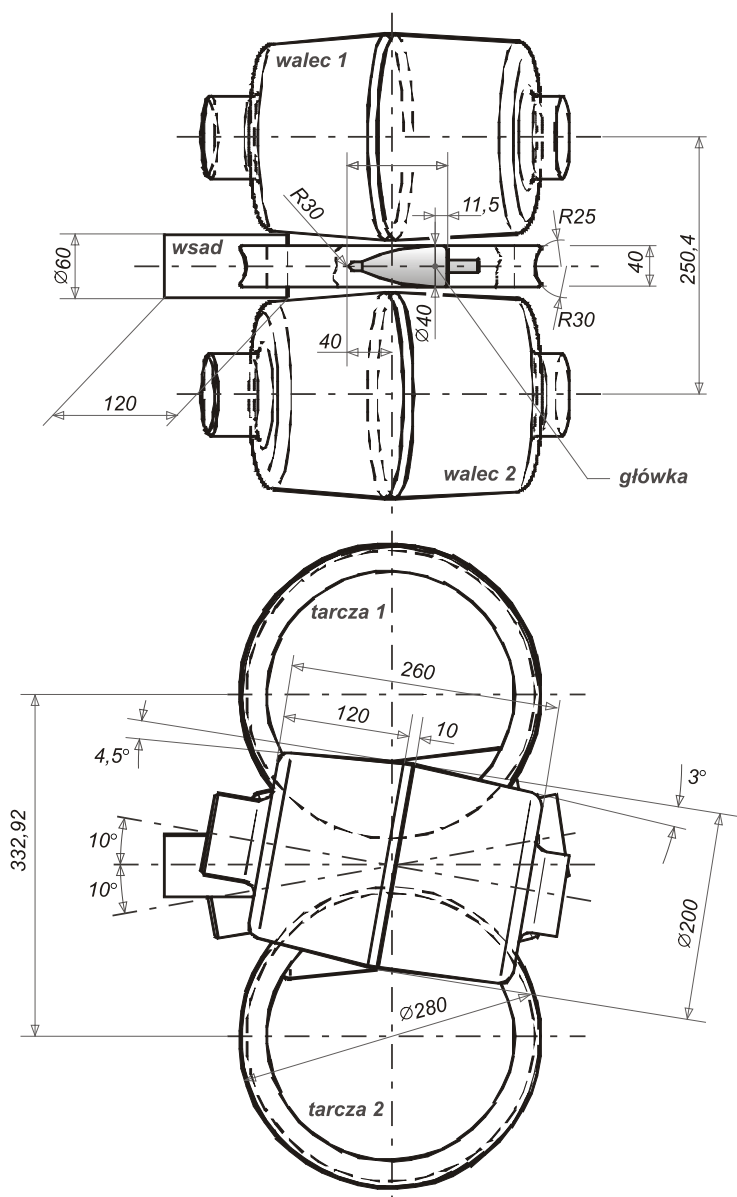
Pomimo ponad stuletniej historii zastosowań przemysłowych procesu dziurowania w walcarkach skośnych technologia ta nie została dotychczas poznana w stopniu satysfakcjonującym, co jest wynikiem bardzo złożonej kinematyki płynięcia metalu. Poprawy tego faktu upatruje się w możliwościach stwarzanych przez intensywnie rozwijające się metody modelowania numerycznego objętościowych procesów kształtowania plastycznego metali. W niniejszym podrozdziale przedstawia się wyniki analizy procesu dziurowania, wykonanej w oparciu o MES i opisaną w opracowaniu [44].

12.3.1. Opis zastosowanego modelu MES

Do analizy procesu dziurowania w walcarce skośnej wykorzystano komercyjny pakiet oprogramowania MSC.SuperForm, korzystający z reprezentacji przemieszczeniowej MES. Przyjęto, że ze względu na złożoność zagadnienia proces dziurowania w walcarce skośnej powinien być symulowany wyłącznie w warunkach przestrzennego stanu odkształcenia.

W ramach analizy rozpatrzono proces dziurowania tulei grubościennych w walcarce dwuwalcowej z prowadnicami tarczowymi typu Dieschera. Schemat tego procesu pokazano na rys. 12.18, na którym zaznaczono również podstawowe parametry geometryczne. Przyjęto, że wsadem do walcowania jest próbka cylindryczna (o wymiarach $\varnothing 60 \times 120$ mm) ze stali w gatunku 100Cr6. Założono, że walce obracają się w tym samym kierunku z jednakową prędkością obrotową wynoszącą $n = 60$ obr./min., zaś prowadnice tarczowe obracają się (przeciwnie) z prędkością 6,8 obr./min. Przyjęto również, że gniot w części międzywalcowej wynosi 16%, a współczynnik owalizacji równy jest 1,05.

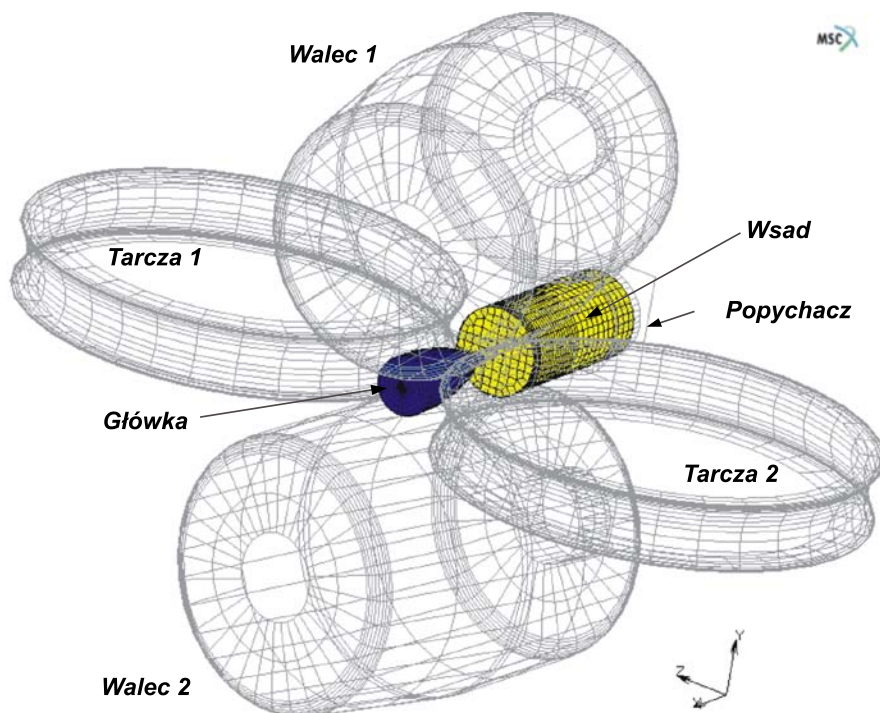
Na kolejnym rys. 12.19 pokazano opracowany na potrzeby obliczeń model MES procesu dziurowania, wg schematu z rys. 12.18. W skład modelu wchodzi



Rys. 12.18. Schemat analizowanego procesu dziurowania w walcach skórnych, wyposażonej w prowadnice tarczowe typu Dieschera

dwa walce beczkowe oraz dwie prowadnice tarczowe (zamodelowane jako ciała sztywne), główka dziurująca i wsad. Dodatkowo dla wprowadzenia wsadu w przestrzeń międzywalcową wykorzystano popychacz (niewidoczny na rys. 12.18). Do modelowania wsadu zastosowano ośmiowęzłowe elementy prostopadłościennie. Wybór rodzaju elementów wynikał z konieczności wielokrotnego stosowania w trakcie obliczeń aktualizacji siatki elementów modelujących półwyrób walcowany. Moment, w którym następowała przebudowa siatki uzależniono od przyrostu odkształcenia. Główkę dziurującą zamodelowano za pomocą 4200 elementów, które mogły odkształcać się wyłącznie w zakresie sprężystym. Przy tym węzły główki znajdujące się w osi obrotu zostały utwierdzone.

W obliczeniach zastosowano termomechaniczny schemat obliczeń. Przyjęto, że wsad nagrzewany jest do temperatury 1180°C, a temperatura narzędzi sztywnych (walce i tarcze prowadzące) jest stała podczas całego procesu kształtowania i wynosi 50°C. W przypadku główki założono, że początkowa temperatura



Rys. 12.19. Model MES procesu dziurowania w walcierce skośnej z prowadnicami tarczowymi typu Diescher'a, z którego określano obciążenie główki dziurującej

tego narzędzia jest identyczna z temperaturą otoczenia i wynosi 30°C. Na podstawie opracowania [47] przyjęto, że współczynnik wymiany ciepła między narzędziami a materiałem kształtowanym wynosi 4000 W/m²K. Natomiast wartość tego współczynnika, określającego wyminę ciepła między metalem a otoczeniem, wynosi 200 W/m²K.

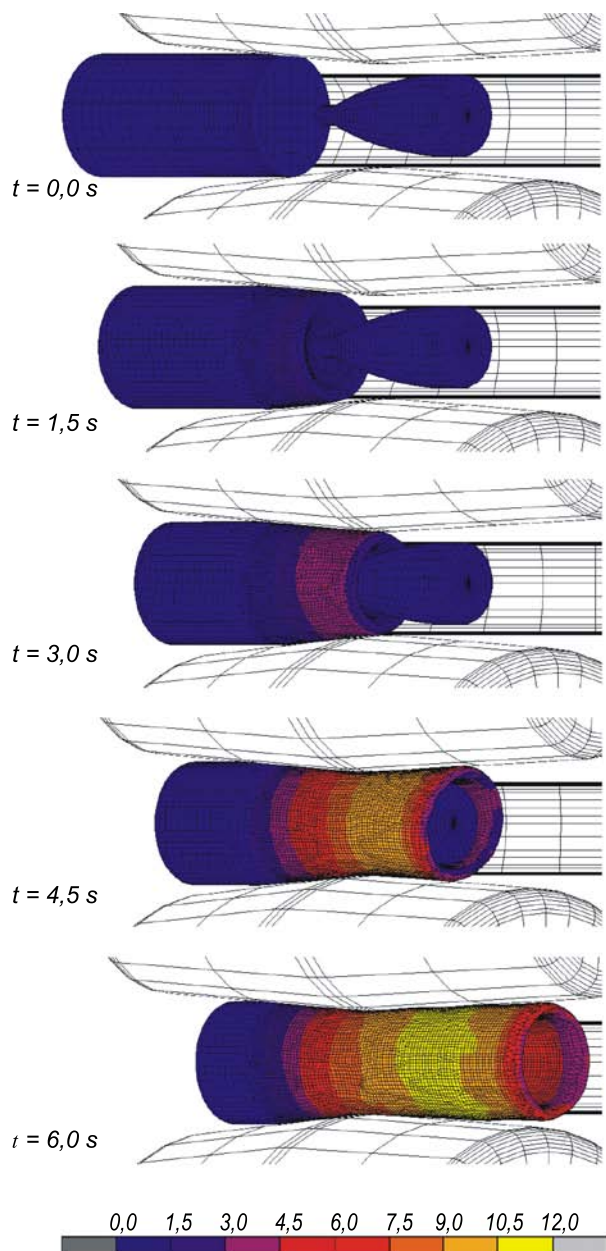
Model kształtowanego materiału – stali w gatunku 100Cr6 – przyjęto z biblioteki programu MSC.SuperForm. Natomiast model materiału, z którego wykonano główkę dziurującą w sposób jednoznaczny opisują: moduł sprężystości wzdłużnej – 324000 N/mm², współczynnik Poissona – 0,3, gęstość – 8120 kg/m³, współczynnik przewodzenia ciepła 27,6 W/mK, ciepło właściwe 456 J/kgK.

W analizie założono model tarcia stałego, uzależniony od prędkości poślizgu metalu względem narzędzi. Ze względu na brak smarowania oraz celowe chropowacenie walców (dla łatwiejszego wciągania wsadu w przestrzeń międzywalcową) przyjęto, że czynnik tarcia dla walców osiąga wartość graniczną $m = 1,0$. Natomiast ze względu na fakt, że podczas dziurowania obracający się półfabrykat wprawia w ruch obrotowy główkę w obliczeniach pominięto tarcie na powierzchni kontaktu materiał – główka. Konsekwencją takiego założenia było zmniejszenie czynnika tarcia między prowadnicą tarczową a metalem do wartości 0,3 (w celu zrównoważenia sił tarcia działających na prowadnicy tarczowej i główce dziurującej).

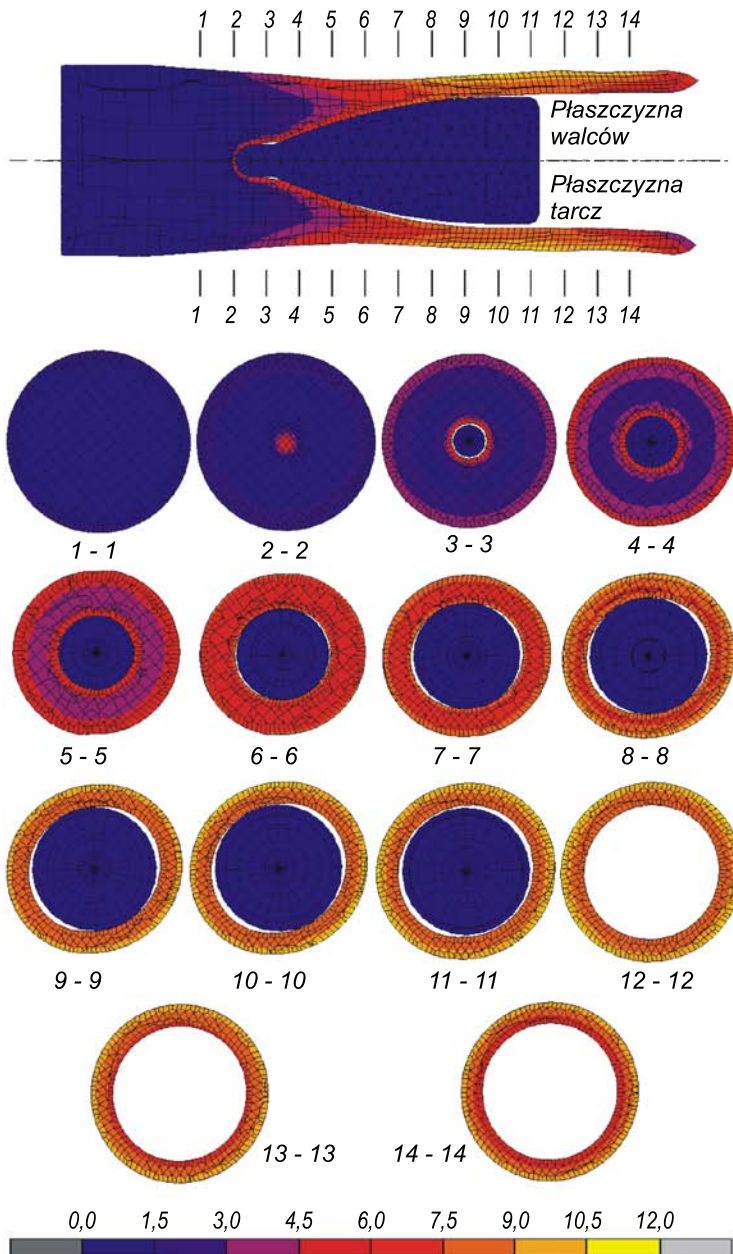
12.3.2. Wyniki obliczeń

Na podstawie wykonanych obliczeń prześledzono zmiany kształtu półwyrobu zachodzące podczas procesu dziurowania. Zmiany te pokazano na rys. 12.20, na którym dla poprawy czytelności wygaszono jedną z prowadnic tarczowych. Na początku procesu wsad chwytny jest przez walce, które wprawiają go w ruch obrotowy i przemieszczają w kierunku osiowym. Realizowany jest wówczas proces obrotowego obciskania dwoma narzędziami, który trwa do momentu gdy czoło półwyrobu wejdzie w kontakt z główką. Następnie rozpoczyna się proces kształtowania otworu wewnętrznego tulei, którego rozmiar określony jest wymiarem zastosowanej główki dziurującej. Po czasie wynoszącym około 3 sekundy w kontakt z półwyrobem wchodzi prowadnice tarczowe, które obracając się zwiększają siły osiowe sprzyjające wciąganiu półwyrobu na główkę dziurującą. Proces dziurowania przechodzi w stan ustalony, charakteryzujący się względną stabilnością sił kształtowania, po czasie wynoszącym około 5 sekund.

Korzystając z MES można dokładnie prześledzić zmiany stanu odkształcenia zachodzące w trakcie dziurowania w walcu skośnej. Na rys. 12.21 pokazano rozkłady odkształceń wyznaczone dla ustalonej fazy dziurowania ($t = 5,5$ s) w płaszczyznach wzdłużnych oraz poprzecznych. Z danych zamieszczonych na tym rysunku wynika, iż odkształcenia rozkładają się w sposób warstwowy. Przy



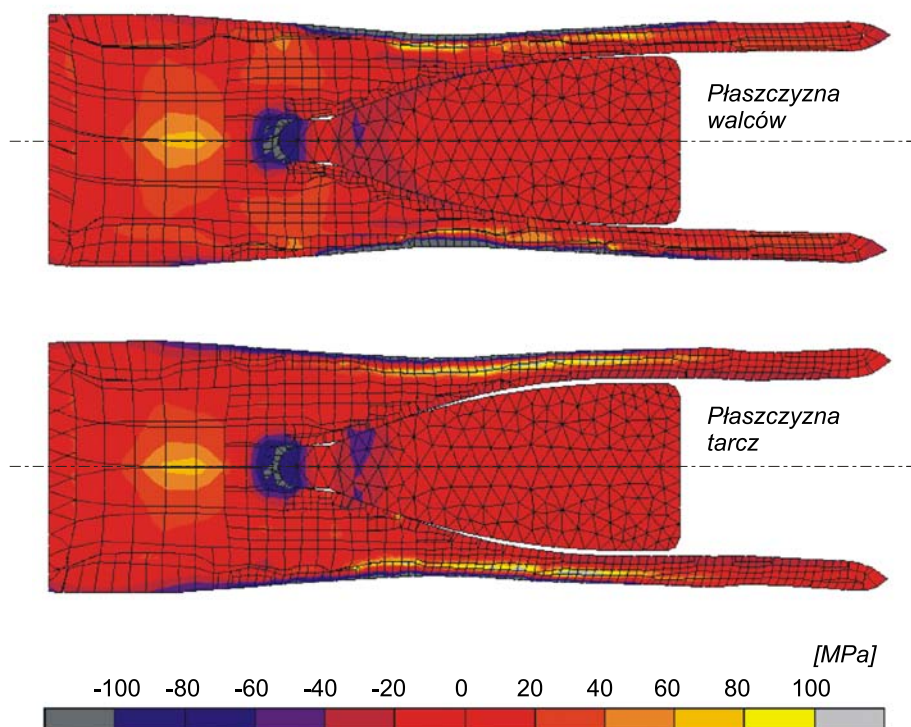
Rys. 12.20. Progresja kształtu półwyrobu podczas dziurowania w walcierce skośnej, obliczona na podstawie modelu MES pokazanego na rys. 12.19



Rys. 12.21. Strefa odkształcenia w fazie ustalonej ($t = 5,5$ s) procesu dziurowania tulei w walcierce skośnej, wraz z rozkładem intensywności odkształcenia

czym największe odkształcenia występują w warstwach zewnętrznych ukształtowanej tulei rurowej. Na podstawie rys. 12.21 można również prześledzić jak zmienia się przekrój poprzeczny półwyrobu na całej długości strefy kształtowania. W wyniku oddziaływania walców następuje owalizacja przekroju poprzecznego, która przyjmuje wartości największe w strefie cylindrycznej główki dziurującej. Owalizacja ta jest ostatecznie usuwana po przejściu metalu przez główkę, gdzie tuleja uzyskuje pożądany kształt kołowy.

Na rysunku 12.22 pokazano rozkłady naprężenia średniego σ_m w przekrojach wzdłużnych półwyrobu oraz główki dziurującej. Z rozkładów tych wynika, że najmniejsze naprężenia występują w miejscu, gdzie nosek główki oddziałuje na kształtowany metal. Należy zauważyć, że w analizowanym przykładzie formowanie otworu tulei odbywa się wyłącznie w efekcie odkształcania siatki elementów, która jest wielokrotnie przebudowywana. Może to prowadzić



Rys. 12.22. Rozkłady naprężenia średniego w półwyrobie oraz główce, wyznaczone dla fazy ustalonej procesu dziurowania ($t = 5,5$ s)

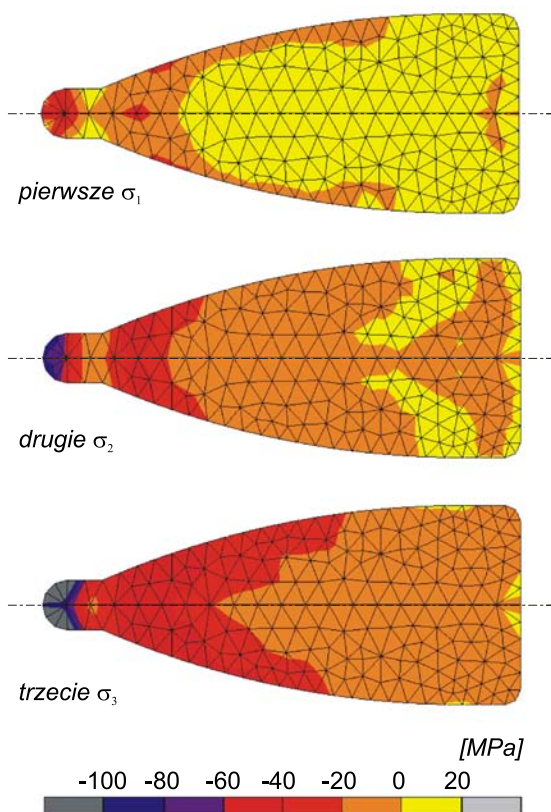
do zawyżenia wartości obliczanych nacisków powierzchniowych oraz naprężeń na nosku główki, w stosunku do wartości rzeczywistych. Bowiem, w praktyce w wyniku działania w strefie osiowej półwyrobu znacznych naprężeń rozciągających (dobrze widocznych na rys. 12.22) dochodzi do rozluźnienia struktury metalu ułatwiającej kształtowanie otworu.

Precyzyjną ocenę wyteżenia główki w czasie kształtowania można uzyskać z analizy rozkładów naprężeń głównych, wyznaczonych dla tego narzędzia i pokazanych na rys. 12.23. Z kolei na rys. 12.24 przedstawiono jak podczas dziurowania zmienia się temperatura główki. Z analizy danych zamieszczonych na rys. 12.23 i 12.24 wynika, że w najbardziej obciążonej części główki – nosku

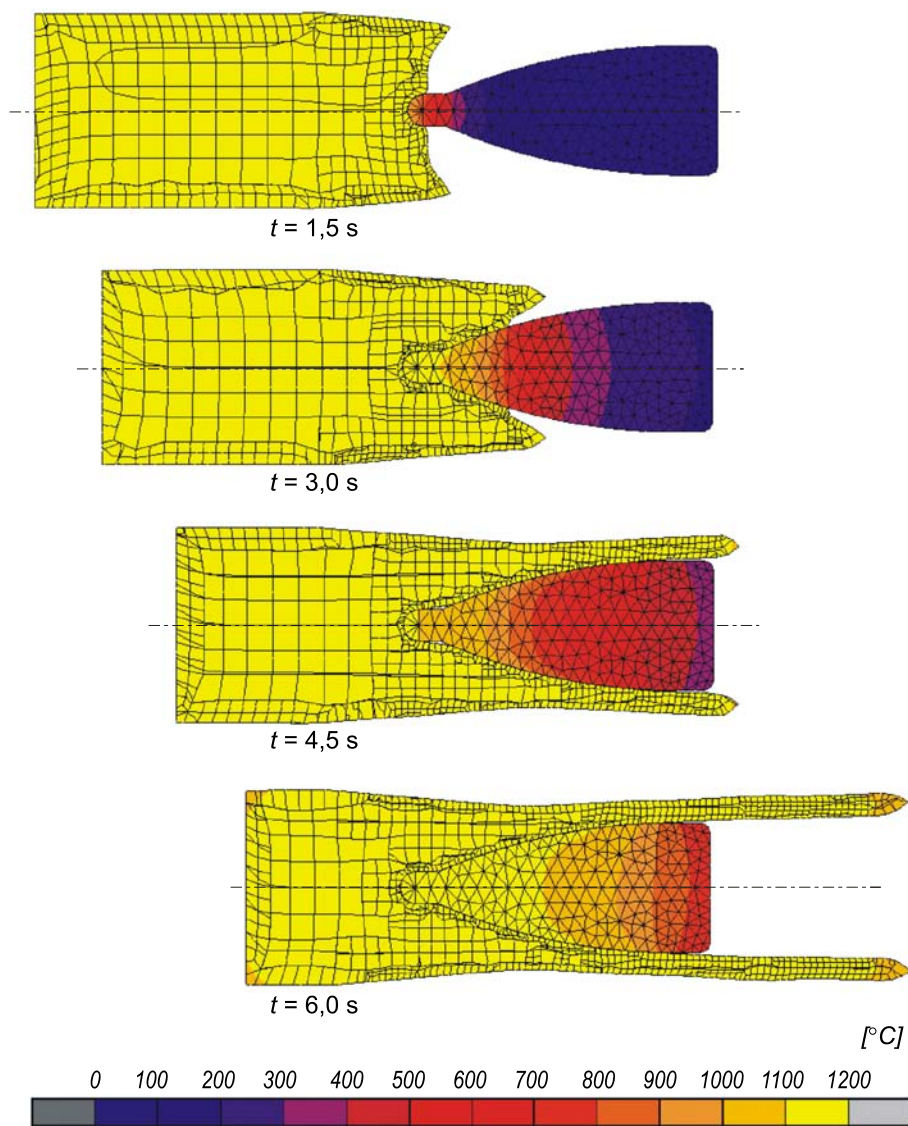
występują trójosiowe naprężenia ściskające. Taki stan naprężeń jest korzystny, pomimo dużych temperatur narzędzia w tym miejscu (powyżej 1100°C), gdyż nie wywołuje on pęknięć i deformacji. W mniej obciążonej cylindrycznej części główki występuje stan naprężenia, charakterystyczny dla procesów wydłużania (dwuosiowe ściskanie z jednoosiowym rozciąganiem). Jednakże w tej części główka ma niższą temperaturę, przez co jest bardziej sztywna i odporna na odkształcanie.

Rozkład temperatur w półwyrobie, odpowiadający 6 sekundzie kształtowania, pokazano na kolejnym rysunku 12.25.

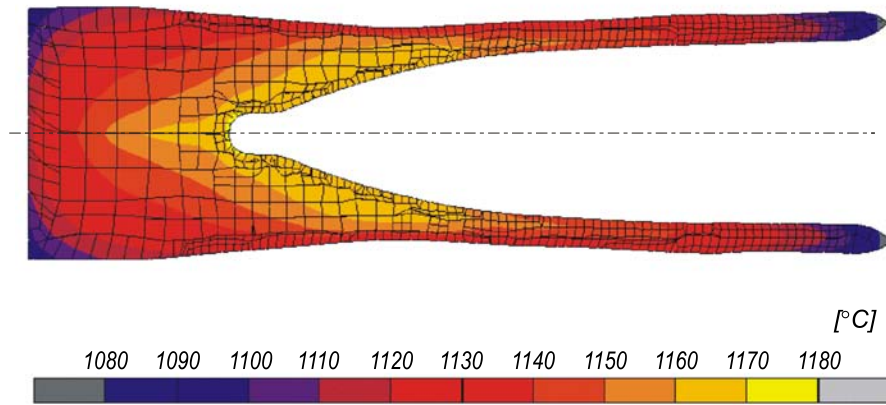
Na rys. 12.26 pokazano jak zmienia się temperatura na powierzchni główki, w wytypowanych siedmiu węzłach. Istotną informacją uzyskaną z obliczeń jest fakt, iż nosk główki nagrzewa



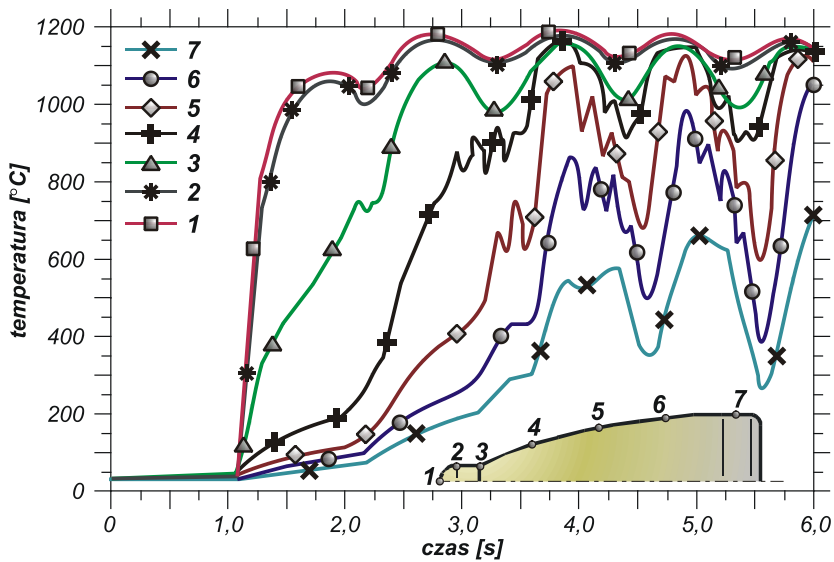
Rys. 12.23. Rozkłady naprężeń głównych w główce, wyznaczone dla fazy stabilnej procesu dziurowania ($t = 5,5$ s)



Rys. 12.24. Rozkłady temperatury w półwyrobie oraz główce, wyznaczone na podstawie modelu MES z rys. 12.19



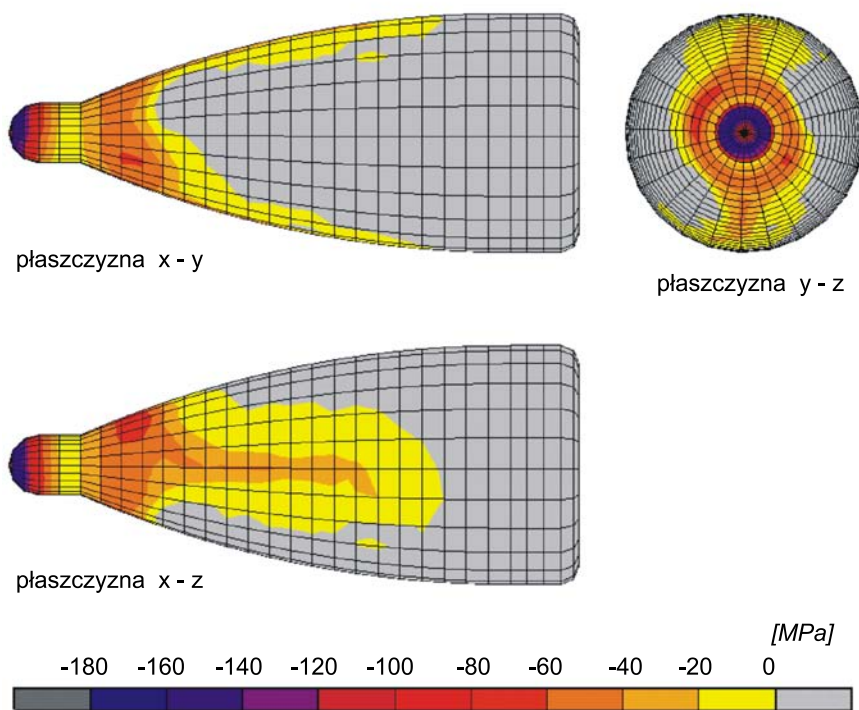
Rys. 12.25. Rozkłady temperatury w półwyrobie (w płaszczyźnie walców), wyznaczone dla fazy ustalonej procesu dziurowania



Rys. 12.26. Zmiany temperatury na powierzchni główki dziurującej w trakcie procesu dziurowania w walcu skośnej

się do temperatury około 1150°C, w czasie około 1,5 sekundy. Zatem w obliczeniach numerycznych procesu dziurowania, w których przyjmuje się główkę jako ciało nieodkształcalne (sztywne) należy zakładać temperaturę tego narzędzia niewiele mniejszą od temperatury kształtowanego materiału (np. 900°C).

Zgodnie z rys. 12.27 stwierdza się, że największe naciski jednostkowe występują na nosku główki dziurującej, gdzie osiągają one wartości w zakresie 100÷180 MPa. Znacznie mniejsze naciski (poniżej 50 MPa) odnotowuje się w strefie stożkowej główki, przy czym naciski te lokalizowane są w płaszczyźnie walców. Wyznaczone wartości nacisków jednostkowych pokrywają się z wartościami podanymi w literaturze specjalistycznej [32], odnoszącymi się do kształtowania stali stopowych. Świadczy to o prawidłowym zamodelowaniu procesu dziurowania w walcierce skośnej, wyposażonej w prowadnice tarczowe.



Rys. 12.27. Naciski jednostkowe na powierzchni główki dziurującej w fazie ustalonej procesu dziurowania w walcierce skośnej ($t = 5,5$ s)

12.4. Modelowanie pęknięcia metalu w wybranych procesach kształtowania plastycznego

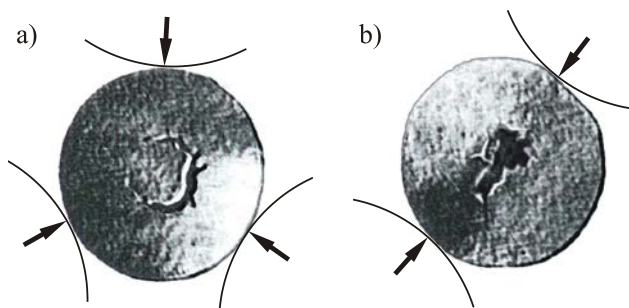
W bieżącym podrozdziale przedstawia się wyniki symulacji numerycznych procesów kształtowania plastycznego, w których dochodzi do rozdzielenia odkształcanego metalu, następującego w efekcie przekroczenia granicznego odkształcenia pęknięcia. W obliczeniach wykorzystano kryterium powstawania złomu plastycznego, podane przez Cockrofta – Lathama i opisane zależnością (7.6).

12.4.1. Obciskanie obrotowe prętów okrągłych

Obciskanie obrotowe prętów okrągłych (walcowanie poprzeczne na płaskich beczkach walców) opisuje przypadek obciążenia występujący w procesach rotacyjnej obróbki plastycznej, do których zalicza się m.in.: kucie na kowarkach, dziurowanie metodą Mannesmanna, walcowanie poprzeczno-klinowe, walcowanie walcami śrubowymi. Proces ten można realizować za pomocą dwóch narzędzi (walce, szczęki płaskie i wklęsłe) lub trzech walców. Stabilność procesu obrotowego obciskania może być naruszona głównie z powodu wystąpienia poślizgu (pomiędzy metalem a narzędziami) lub ze względu na pęknięcia powstające wewnątrz odkuwki.

Pęknięcia wewnętrzne, nazywane również **efektem Mannesmanna**, występujące w procesach obciskania obrotowego mogą przyjmować dwojaki kształt. I tak, podczas kształtowania dwoma narzędziami powstają pęknięcia w kształcie wzdłużnych, osiowych szczelin (rys. 12.28b). Natomiast wówczas, gdy obciskanie realizowane jest trzema walcami pęknięcia przybierają kształt pierścieni (rys. 13.28a).

Według Thompsona oraz Hawkyarda [68] główną przyczyną powstawania pęknięć w procesach obciskania obrotowego jest niskocyklowe zmęczenie mate-

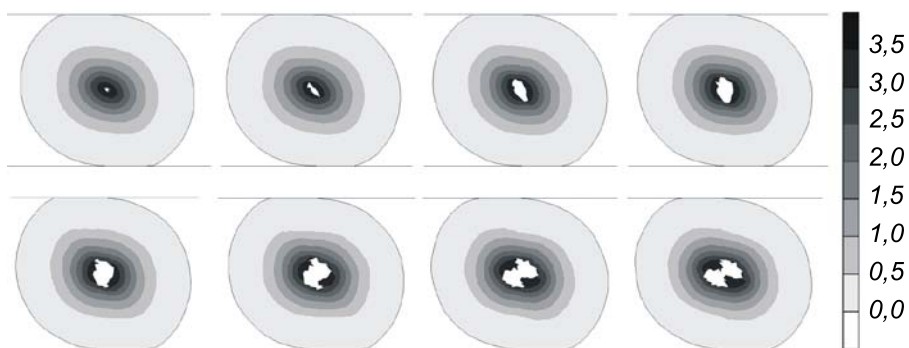


Rys. 12.28. Pęknięcia osiowe występujące w odkuwkach obciskanych obrotowo za pomocą: a) trzech walców, b) dwóch narzędzi [10]

riału. W większości przypadków kształtowania warstwy materiału (w strefie centralnej odkuwki) w kierunku normalnym do powierzchni narzędzi podlegają ścisaniu, natomiast w kierunku prostopadłym do kierunku normalnego – rozciąganiu. Po wykonaniu $\frac{1}{4}$ obrotu warstwy rozciągane podlegają ścisaniu, a ścisane rozciąganiu. Występowanie w strefie osiowej takiego stanu naprężenia może doprowadzić do powstawania pęknięć zmęczeniowych.

Moment powstawania pęknięć wewnątrz odkuwek kształtowanych metodą obciskania obrotowego można przewidywać stosując MES oraz kryterium pęknięcia (7.6), opracowane przez Cockrofta – Lathama. Do wykonania obliczeń niezbędna jest znajomość stałej materiałowej C , określającej krytyczną wartość pracy (wykonanej przez największe naprężenie rozciągające) doprowadzającej do pęknięcia metalu. Dla wyznaczenia stałej materiałowej C , w przypadku kształtowania odkuwek ze stali węglowej C45 (wg EN), przy temperaturze 1000°C , zasymulowano procesy obciskania zrealizowane przez Andreeva i in. [2]. Analizując wartości osiągane przez całkę (7.6) stwierdzono, że pęknięcie nastąpić będzie wówczas, gdy stała C osiągnie wartość 3,32. Korzystając z powyższej informacji wykonano następnie symulacje procesów obciskania obrotowego, realizowanych za pomocą dwóch segmentów płaskich oraz trzech walców. Obliczenia wykonano zakładając, że kształtowanie przebiegać będzie przy $\delta = 1,1$ oraz $T = 1000^{\circ}\text{C}$.

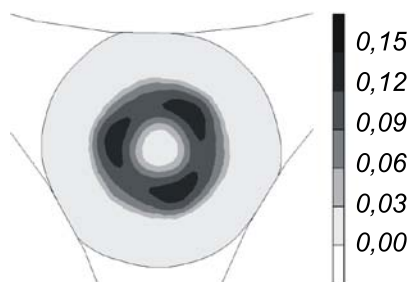
Na rys. 12.29 pokazano, uzyskany w wyniku obliczeń, przebieg kształtowania pęknięcia osiowego w procesie obciskania obrotowego szczękami płaskimi. Z rysunku tego wynika, iż pęknięcie inicjowane dokładnie w osi próbki początkowo postępuje w kierunku zbliżonym do działania maksymalnych na-



Rys. 12.29. Propagacja pęknięcia osiowego w procesie obciskania obrotowego narzędziami płaskimi, obliczona MES przy założeniu kryterium pęknięcia Cockrofta –Lathama, w próbce ze stali C45 kształtowanej przy temperaturze 1000°C – w skali szarości pokazano rozkłady kryterium zniszczenia, określonego całką (7.6)

prężen stycznych. Następnie rozszerza się ono osiągając kształt zbliżony do owalnego i ostatecznie (w wyniku intensywnego płynięcia metalu w kierunku stycznym) ulega skręceniu osiągając kształt zbliżony do litery S. Należy zauważyć, że pęknięcia osiowe o kształcie zbliżonym (wyznaczone doświadczalnie) zamieszczono w opracowaniu Andreeva i in. [2].

W przypadku obciskania obrotowego trzema walcami, realizowanego w warunkach określonych przez $\delta = 1,1$ i $T = 1000^{\circ}\text{C}$, nie stwierdzono pęknięcia materiału. Na uwagę zasługuje



Rys. 12.30. Rozkład kryterium zniszczenia metalu, obliczony MES przy założeniu kryterium pęknięcia Cockrofta - Lathmana, w próbce ze stali C45 obciskanej obrotowo trzema walcami przy temperaturze 1000°C i $\delta = 1,1$

jednakże, prezentowany na rys. 12.30, rozkład zniszczenia metalu obliczony wg kryterium Cockrofta – Lathmana. Wskazuje on bowiem na charakterystyczny kształt pierścieniowy, potwierdzający, iż w tym przypadku obciskania ewentualne pęknięcie nie występuje w osi próbki lecz w pewnej odległości od jej środka. Tym samym wyniki obliczeń numerycznych, jednoznacznie potwierdziły spostrzeżenia praktyczne, prezentowane przez autorów opracowań [2, 10].

12.4.2. Ciągnienie prętów

Przebieg procesów wydłużania (ciągnienia, wyciskania) ograniczony jest możliwością wystąpienia pęknięć wewnętrznych, o charakterystycznym półksiężycowym kształcie, pokazanych na rys. 12.31. Pęknięcia te powstają podczas kształtowania przy źle dobranych parametrach procesu wydłużania.

Analiza mechaniczna w osiowo-symetrycznym stanie odkształcenia

W tej części podrödziału przedstawia się wyniki analizy numerycznej ukazującej tworzenie pęknięć w procesie ciągnienia pręta z miedzi, dla której krzywą płynięcia określa następujące równanie:

$$\sigma_p = 450(\varphi + 0,01)^{0,22} \quad [\text{MPa}], \quad (12.13)$$

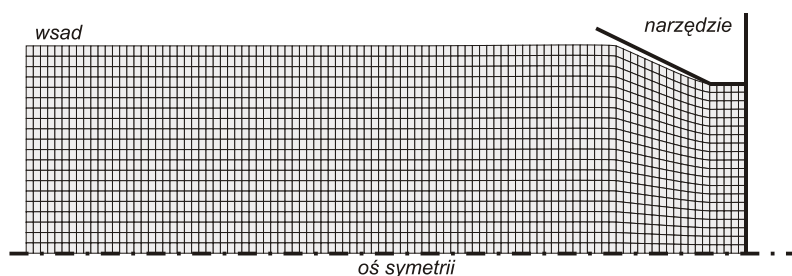
gdzie φ jest intensywnością odkształcenia.



Rys. 12.31. Pęknięcia wewnętrzne obserwowane w prętach ciągnionych, przy niewłaściwie dobranej technologii wydłużania [33]

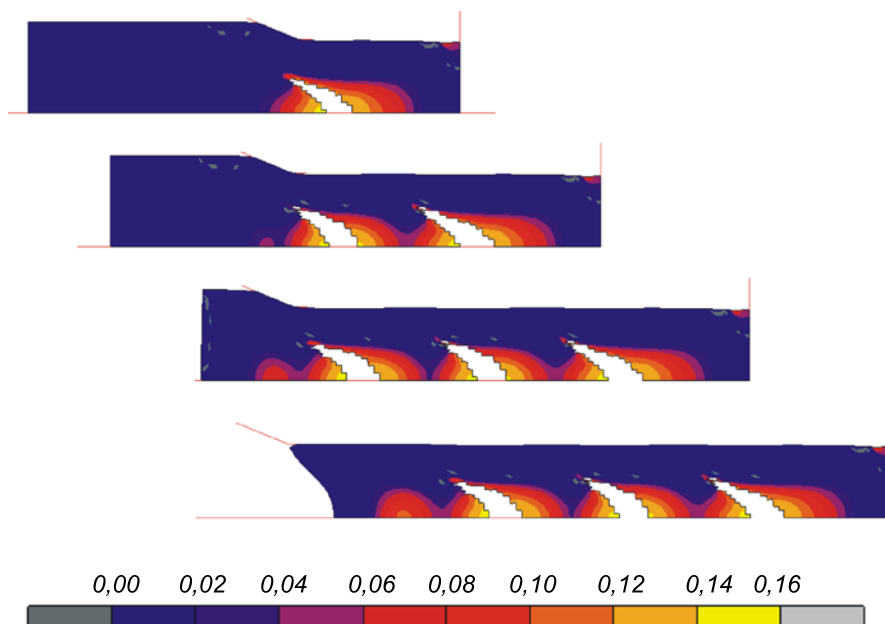
Poniżej przedstawia się wyniki symulacji procesu ciągnięcia pręta (w temperaturze otoczenia) o wymiarach początkowych $\varnothing 14 \times 26,4$ mm, za-modelowanego za pomocą 2280 elementów płaskich – w sposób pokazany na rys. 12.32. W obliczeniach przyjęto, że: współczynnik tarcia na powierzchni metal-narzędzie wynosi $\mu = 0,05$, moduł sprężystości wzdłużnej materiału ciągnionego równy jest $1,2 \cdot 10^5$ MPa, zaś współczynnik Poissona wynosi 0,33. Założono również, że ciągnięcie realizowane jest z prędkością 1,5 m/s.

W analizowanym przypadku kształtowania przyjęto osiowo-symetryczny stan odkształcenia oraz, że pęknięcie metalu wystąpi wówczas, gdy całka (7.6) osiągnie wartość graniczną równą 0,15. Taka wartość, dla badanego materiału została wyznaczona eksperymentalnie przez Komoriego i podana w opracowaniu [33].



Rys. 12.32. Przyjęty w obliczeniach MES podział ciągnionego pręta na 2280 elementów płaskich czworokątnych czterowęzłowych (rys. 12.5d)

Na kolejnym rys. 12.33 pokazano sposób tworzenia się pęknięć wewnętrznych w analizowanym procesie ciągnięcia. Ponadto, na rysunku tym przedstawiono rozkład funkcji zniszczenia (7.6), wykorzystywanej w obliczeniach numerycznych.



Rys. 12.33. Obliczony MES mechanizm tworzenia się pęknięć w procesie ciągnięcia pręta wykonanego z miedzi – rozkład funkcji zniszczenia (7.6)

Analiza termo-mechaniczna w przestrzennym stanie odkształcenia

Przedstawiony w poprzedniej części przykład modelowania procesu ciągnięcia obrazuje pewne podejście, w którym przyjmuje się, że pęknięcia są symulowane poprzez procedurę usuwania elementów. Praktyka wykazuje, że ten sposób obliczeń nie zawsze pozwala uzyskać zadowalający wynik. Poniżej przedstawia się przykład modelowania procesu ciągnięcia, gdzie nie stosuje się procedury usuwania elementu, a możliwość i miejsce pęknięcia ocenia się tylko na podstawie rozkładu zniszczenia.

Symulację procesu ciągnięcia pręta o średnicy początkowej $\varnothing 13$ mm wykonano używając komercyjny program DEFORM-3D, zakładając przestrzenny stan odkształcenia oraz termo-mechaniczny model MES (rys. 12.34). Wyrób jest

wykonany z miedzi CW003A, dla której przyjęto następującą krzywą płynięcia materiału według modelu Johnsona-Cooka

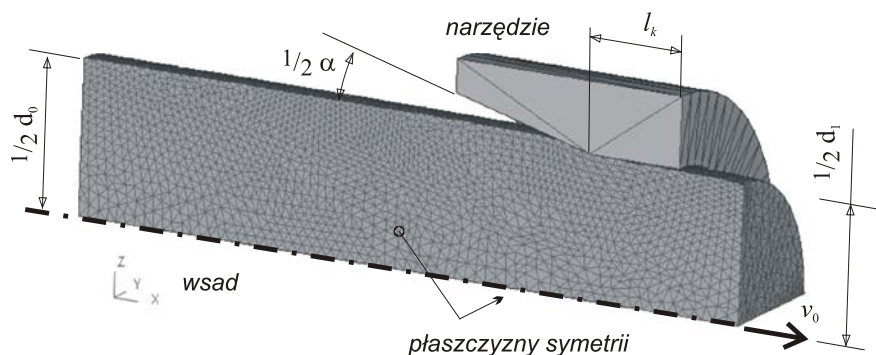
$$\sigma_p = (123,7 + 435,1 \cdot \phi^{0,31}) \cdot (1 + 0,022 \cdot \ln \phi) \cdot \left[1 - \left(\frac{T - 293}{1063} \right)^{0,03} \right], \quad (12.14)$$

gdzie: σ_p – granica plastyczności, ϕ – odkształcenie rzeczywiste, T – temperatura bezwzględna wyrobu.

Podczas modelowania wykorzystano symetrię geometryczną (zaznaczone na rys. 12.34 dwie ortogonalne powierzchnie symetrii), a obszar materiału podzielono na 40 tys. elementów tetragonalnych (rys. 12.5g). Przyjęto, że średnica początkowa wsadu jest równa $d_0 = 13$ mm, kąt stożka roboczego $\alpha = 18^\circ$ oraz $\alpha = 30^\circ$, długość powierzchni kalibrującej $l_k = 0,5$ mm oraz $l_k = 4,0$ mm a średnica końcowa d_1 wynosi tyle, by uzyskać stopień redukcji przekroju poprzecznego pręta $\varepsilon = 15\%$ i $\varepsilon = 25\%$. Wartości parametrów procesu są tak dobrane, aby uzyskać ekstremalne warunki kształtowania. W obliczeniach zastosowano kryterium pęknięcia (7.7).

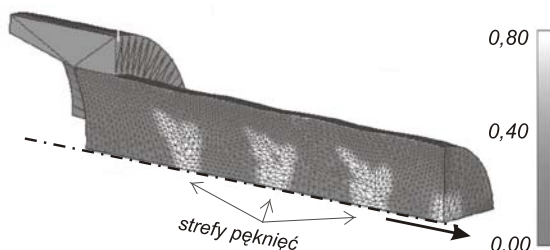
Warunki kontaktowe zamodelowano modelem tarcia Coulomba przyjmując, że współczynnik tarcia $\mu = 0,05$, $\mu = 0,1$, $\mu = 0,2$ oraz $\mu = 0,3$. Temperatura materiału, narzędzi oraz otoczenia wynosiła $T = 20^\circ\text{C}$ - proces realizowany na zimno, ale z uwzględnieniem modelu termo-mechanicznego, dla którego przyjęto, że przewodność cieplna wynosi $43 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Prędkość ciągnięcia wynosiła $v_0 = 150$ mm/s

Zamieszczony na rys. 12.35 przypadek ciągnięcia ilustruje rozkład zniszczenia w materiale, gdy wartości parametrów procesu są zdecydowanie zawyżone w stosunku do zaleceń projektowych. Strefy potencjalnych pęknięć są bardzo wyraźne. Ponadto, dokładna analiza wyników MES wykazała, że tak dobrane



Rys. 12.34. Przyjęty w obliczeniach MES model procesu ciągnięcia – opis w tekście

parametry powodują znaczące pogorszenie jakości powierzchni pręta. Co więcej, również i na niej można wyszczególnić liczne strefy, w których wartości zniszczenia osiągają poziom porównywalny ze strefami pęknięć wewnętrznych. Ale już w przypadku ciągnięcia przez ciągadło z kątem $\alpha = 14^\circ$, symulacja wykazała, że w materiale nie pojawiają się strefy pęknięć.



Rys. 12.35. Rozkład zniszczenia (7.7) obliczony w symulacji MES, gdy $\alpha = 30^\circ$, $\varepsilon = 25\%$, $\mu = 0,20$ oraz $l_k = 4,0$ mm

Szczegółowe wyniki analizy numerycznej w oparciu o przedstawiony model MES zestawiono w tabeli 12.2. Modelowanie tworzenia pęknięć w przedstawiony sposób jest wystarczające do prawidłowego prognozowania utraty spójności w materiale ciągnionym i jest szczególnie użyteczne w przypadku symulowania procesów kształtowania wyrobów o przekroju nieokrągłym, które nie wykazują symetrii osiowej.

Tablica 12.2.

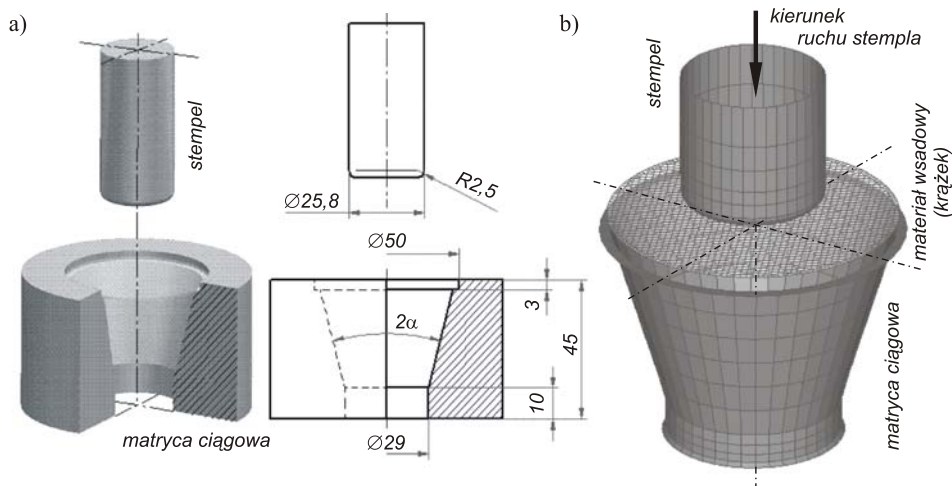
Zestawienie wybranych wyników z obliczeń MES

Parametry ciągnięcia				Wyniki	
ε	α [°]	μ	l_k [mm]	max. wartość funkcji (7.7)	odstęp między strefami pęknięć [mm]
15%	14	0,05	0,5	<i>brak wyraźnych stref pęknięcia wewnętrznego</i>	
	18	0,05		0,62	7,20
		0,10		0,80	7,70
		0,20		0,95	8,30
		0,3		1,33	9,00
	30	0,05		0,86	8,10
		0,10		0,97	8,42
		0,20		1,45	9,10
		0,30		2,50	9,11
		0,05		0,80	9,20
25%	18	0,10	4,0	1,10	9,22
		0,20		2,10	9,30
		0,30		<i>zerwanie pręta</i>	
		0,20		<i>zerwanie pręta</i>	
	30	0,20			
		0,20			

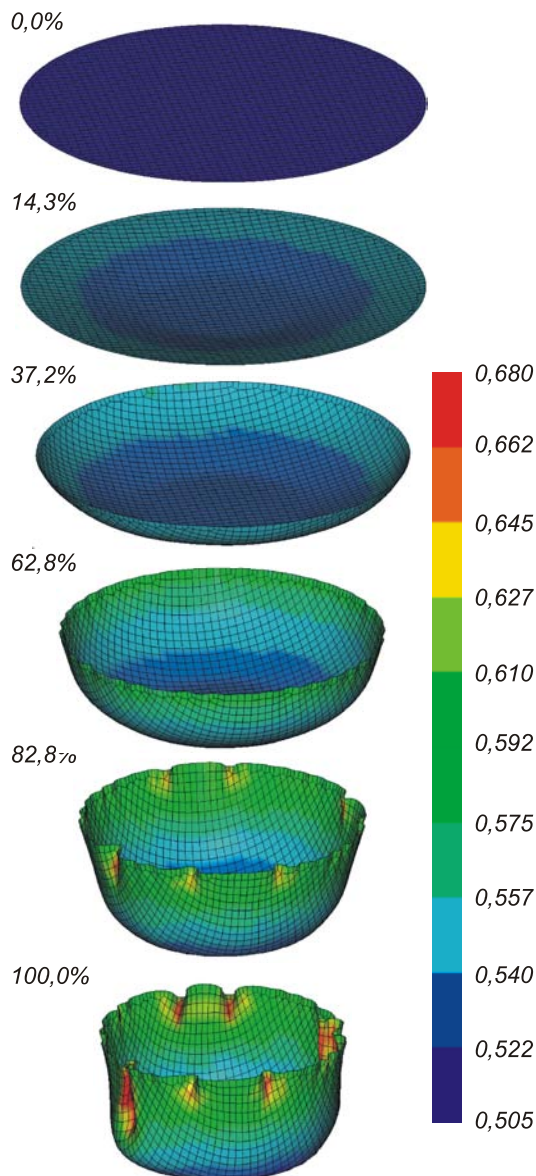
12.5. Wytłaczanie swobodne

Proces wytłaczania swobodnego wytłoczek cylindrycznych jest najprostszym sposobem kształtowania wyrobów o powierzchni nierozwijalnej. W podrozdziale tym zostanie przedstawiony przykład obliczeń metoda elementów skończonych typu *explicit* procesu wytłaczania poprzez ciągnięcie kołnierza, który jest realizowany w ramach Laboratorium Obróbki Plastycznej. Symulacje wykonano przy użyciu programu Dynaform, który jest wyposażony w solver o nazwie LS-Dyna®.

Model geometryczny oraz numeryczny analizowanego procesu wytłaczania przedstawiono na rys. 12.36. Założono, że krążek o średnicy $\varnothing 50$ mm i grubości wynoszącej $g = 0,54$ mm lub $1,58$ mm jest wykonany z aluminium będącego w stanie wyżarzonym. Do obliczeń przyjęto następujące parametry materiałowe: gęstość $\rho = 2,7 \cdot 10^{-6}$ kg/mm³, moduł Younga $E = 70$ GPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,34$, granica plastyczności $\sigma_{p0} = 26,015$ MPa oraz współczynnik anizotropii normalnej $r = 1,8$. Narzędzia są obiektami sztywnymi, wykonanymi ze stali konstrukcyjnej ($\rho = 7,8 \cdot 10^{-6}$ kg/mm³, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$). Stempel porusza się zgodnie z wektorem przemieszczenia (rys. 12.36b), a jego prędkość wynosi 15 mm/s. Ponadto, w analizie przyjęto model tarcia Amoutonsa, dla którego współczynnik tarcia pomiędzy krążkiem a narzędziami wynosi $\mu = 0,08$.



Rys. 12.36. Wytłaczanie swobodne wytłoczki cylindrycznej: a) model geometryczny wraz z wymiarami charakterystycznymi, b) model MES, w którym użyto elementów płaskich czterokątnych (rys. 125d) – opis w tekście [21]



Rys. 12.37. Kolejne fazy wytłaczania wytłoczki ($g = 0,54$ mm) oraz obliczony rozkład zmiany jej grubości (wartości podane w mm)

Geometria zarówno materiału wsadowego, jak i narzędzi jest opisana za pomocą elementów płaskich cztero-kątnych (rys. 12.5d), w których wymiar reprezentujący grubość krążka blachy jest wyrażony poprzez parametr liczbowy. Podczas obliczeń, specjalny algorytm wylicza zmianę grubości blachy zakładając, że panuje w niej płaski stan naprężenia.

Na rys. 12.37 zamieszczono wyniki obliczeń MES procesu wytłaczania wytłoczki o początkowej grubości $g = 0,54$ mm. Przedstawia on progresję kształtu wytłoczki oraz rozkład zmiany jej grubości.

Jest to przypadek, dla którego względna grubość blachy wynosi

$$\frac{g}{D} = 0,011 \quad (12.15)$$

i jest mniejsza od wartości granicznej obliczanej na podstawie wzoru

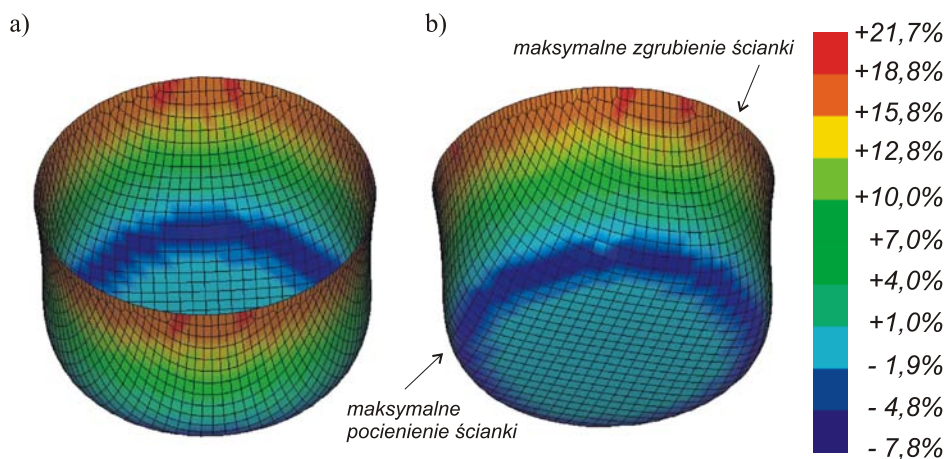
$$\left(\frac{g}{D}\right)_{gr} = 0,05 \cdot (1 - m) \quad (12.16)$$

gdzie: m – współczynnik wytłaczania – w analizowanym przypadku wynosi 0,52, natomiast wartość graniczna (12.16) równa jest 0,024.

W takiej sytuacji niezastosowanie podczas wytłaczania dociskacza prowadzi do po-

fałdowania ścianek bocznych kołnierza wytłoczki. Jest to pewna forma wyboczenia wynikająca z utraty stateczności blachy. Należy jednocześnie pamiętać, że w tej strefie materiału naprężenia obwodowe mają charakter ściskający. Jak wynika z rys. 12.37, również grubość blachy ulega zmianie. Największe pocienienie obserwuje się w części dennej na wysokości zaokrąglenia powierzchni czołowej stempla. Natomiast w górnej strefie kołnierza następuje zgrubienie.

Natomiast na rys. 12.38 przedstawiono rozkład grubości ścianki wytłoczki, dla której względna grubość $g/D = 0,032$ i jest większa od wartości granicznej (12.16). Wytłoczka ta jest ukształtowana w sposób prawidłowy. Stwierdzono przy tym, że największe pocienienie ścianki wytłoczki nie przekracza 8%. Natomiast największe zgrubienie ścianki znajduje się w części kołnierzowej i wynosi ponad 20%.



Rys. 12.38. Procentowa zmiana grubości ścianki wytłoczki, gdzie początkowa wartość $g_0 = 1,58$ mm; a) widok od strony stempla, b) widok od strony matrycy ciągowej

LITERATURA

1. Alexander J. M. The effect of Coulomb friction in the plane strain compression of plastic-rigid material. *J. Mech. Pchys. Solids* 1955 nr 3 s. 233
2. Andreev G. V., Klušín V. A., Makušok E. M., Segal V. M., Ščukin V. Ja. *Poperečno – klinovaja prokatka*. Minsk: Nauka i Technika 1974
3. Bay N., Wibom O., Nielsen J.A. A new friction and lubrication test for cold forging. *Annals of the CIRP* 1995 vol.4 4/1 s. 217-221
4. Bednarski T. *Teoria procesów obróbki plastycznej. Cz. I – kształtowanie brył*. Warszawa: Wyd. Politechniki Warszawskiej 1987
5. Bednarski T. *Mechanika plastycznego płynięcia metali*. Warszawa: Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej 1993
6. Behrens A., Just H. Verification of the damage model of effective stresses in cold and warm forging operations by experimental testing and FE simulations. *Journal of Materials Processing Technology* 2002 vol. 125-126 s. 295-301
7. Brodziński A. Investigation of total pressure values with regard to the type of cavity filling in axial symmetric forging in closed dies. *Prace ITIM PL* 1981 nr 6 s. 51-67
8. Brozzo P., De Luca B., Renolina R. A new method for the prediction of formability limits in metal sheets. W: *Proceedings of the Seventh Bennial Conference of the International Deep Drawing Research Group on Sheet Metal Forming and Formability* 1972
9. Burgdorf M. Über die Ermittlung des Reibewerts für Verfahren der Massivum Formung durch den Reingstanchversuch. *Ind. Anzeiger* 1967 nr 3
10. Celikov A. I. Elementy teorii poperečnoj prokatki i chłodnaja prokatka na trechvalkovych stanach. *Vestnik Mašinostroenija* 1961 nr 7 s. 49-54
11. Cockfort M. G., Latham D. J. Ductility and the workability of metals. *Journal of the Institute of Metals* 1968, 96 s. 33-39
12. Dobrucki W., Odrzywołek E.: Analiza metod wyznaczania współczynnika tarcia między narzędziem i metalem w stanie płynięcia plastycznego, opartych na procesie spęczania. *Obróbka Plastyczna* 1979 t. XVIII z. 4 s. 189-197
13. Drujanov B. A., Neprešin R. I. *Teorija tehnologičeskoj plastičnosti*. Moskwa: Wyd. Mašinostroenie 1990
14. Erbel S., Kuczyński K., Marciniak Z. *Obróbka plastyczna*. Warszawa: Wyd. PWN 1981

15. Freudenthal F. A. *The Inelastic Behaviour of Solids*. New York: Wyd. Wiley 1950
16. Gabryszewski Z., Gronostajski J. *Mechanika procesów obróbki plastycznej*. Warszawa: Wyd. PWN 1991
17. Gallagher R. H. *Finite Element Analysis-Fundamentals*. Wyd. Englewood Cliffs-Prentice Hall Inc. 1975
18. Gierzyńska M. *Tarcie i smarowanie w obróbce plastycznej metali*. Warszawa: Wyd. Naukowo Techniczne 1983
19. Gontarz A. Badania warunków tarcia w zależności od temperatury i prędkości odkształcenia dla pary trącej stal St4S - stal narzędziowa. *Folia Societatis Scientiarum Lublinensis* 2001 vol. 10 s. 57-65
20. Gontarz A., Pater Z., Weroński W.S. *Przeprowadzone badania procesów plastycznego kształtowania w latach 2005-2007*. Lublin: Wyd. Pol. Lubelskiej 2008
21. Gontarz A. *Aspekty teoretyczne i badawcze prac zrealizowanych w KKMiTOP w 2008 r.* Lublin: Wyd. Pol. Lubelskiej 2009
22. Gouveia B. P. P. A., Rodrigues J. M. C., Martins P. A. F. Fracture predicting in bulk metal forming. *Int. J. Mech. Sci.* 1996 vol. 38 s. 361-372
23. Gouveia B. P. P. A., Rodrigues J. M. C., Martins P. A. F. Ductile fracture in metalworking: experimental and theoretical research. *Journal of Materials Processing Technology* 2000 vol. 101 s. 52-63
24. Gronostajski J. *Obróbka plastyczna metali*. Wrocław: Wyd. Pol. Wrocławskiej 1973
25. Grosman F. Kryteria doboru charakterystyk technologicznej plastyczności materiałów do symulacji procesów obróbki plastycznej. *Obróbka Plastyczna Metali* 2004 nr 3 s. 35-45
26. Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford 1950
27. Hill R., Lee E.H., Tupper S.J. A method of numerical of plastic flow in the plane strain and its application to the compression of a ductile material between rough plates. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 1951 18 s. 46-52
28. Hoffman O., Sachs G. *Wprowadzenie do teorii plastyczności*. Warszawa: PWT 1959
29. Huber M.T. *Teoria sprężystości. Tom I*. Kraków: Polska Akademia Umiejętności 1948
30. Huber M.T. *Teoria sprężystości. Tom II*. Kraków: Polska Akademia Umiejętności 1950
31. Johnson W., Sowerby R., Venter R.D. *Plane Strain Slip-Line Fields for Metal-Deformation Processes*. Pergamon Press 1982
32. Kazanecki J. *Wytwarzanie rur bez szwu*. Kraków: Wyd. AGH 2003

33. Komori K. Effect of ductile fracture criteria on chevron crack formation and evolution in drawing. *International Journal of Mechanical Sciences* 2003 vol. 45 s. 141-160
34. Lee C.H., Kobayashi S. New Solution to Rigid-Plastic Deformation Problems Using Matrix Method. *ASME J. Eng. Ind.* 1973 95 s. 865-873
35. Łuksza J., Sadok L. *Wybrane zagadnienia z cięgarstwa*. Kraków: Wyd. AGH 1986
36. Malinowski Z. *Numeryczne modele w przeróbce plastycznej i wymianie ciepła*. Kraków: Wyd. AGH 2005
37. Marciniak Z. *Mechanika procesów tłoczenia blach*. Warszawa: WNT 1961
38. Marciniak Z., Kołodziejski J. *Teoria procesów obróbki plastycznej. Cz. II. Tłoczenie blach*. Warszawa: Wyd. Politechniki Warszawskiej 1983
39. Morawiecki M., Sadok L., Wosiek E. *Przeróbka plastyczna – podstawy teoretyczne*. Katowice: Wyd. Śląsk 1986
40. Muster A.: *Tarcie i smarowanie w technologiach plastycznego kształtowania metali*. Warszawa: Wyd. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 1997
41. Oh S. I., Chen C. C., Kobayashi S. Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing. Part II. *Trans. ASME J. Eng. Ind.* 1978 no 101 s. 36-48
42. Osakada K. History of plasticity and metal forming analysis. *Journal of material Processing Technology* 2010 vol. 210 s. 1436-1454
43. Oyane M., Sato T., Okimoto K., Shima S. Criteria for ductile fracture and their applications. *J. Mech. Working Technology* 1980 no 4 s. 65-81
44. Pater Z., Kazanecki J. Thermo-mechanical analysis of piercing plug loads in the skew rolling process of thick-walled tube shell. *Metallurgy and Foundry Engineering* 2006 vol. 32 no 1 s. 31-40
45. Pełczyński W.T., Pełczyński T.A. *Teoria procesów obróbki plastycznej. Część I. Mechanika procesów obróbki plastycznej*. Warszawa: Wyd. Pol. Warszawskiej 1982
46. Pietrzyk M. *Metody numeryczne w przeróbce plastycznej metali*. Kraków: Wyd. AGH 1992
47. Prince J.C., Marono R., Leon F. Thermomechanical analysis of a piercing mandrel for the production of seamless steel tubes. *Proc. Instn Mech. Engrs Vol. 217 Part E: J. Process Mechanical Engineering* s. 337-344
48. Rao K.P., Sivaram K.: A review of ring-compression testing and applicability of the calibration curves. *Journal of Materials Processing Technology* 1993 vol. 37 s. 295-318
49. Richert J. Analiza wpływu kształtu narzędzi na zachowanie stateczności plastycznego płynięcia podczas wyciskania promieniowego metali. *Zeszyty Naukowe AGH, s. Metalurgia i Odlewnictwo* z. 135 Kraków 1991

50. Samołyk G., Pater Z. *Rowek na wypływkę w kuciu matrycowym*. Lublin: Wyd. LTN 2005
51. Samołyk G., Pater Z., Bartnicki J. Modelowanie numeryczne centralnych pęknięć metalu w procesie ciągnięcia prętów. *Hutnik. Wiadomości Hutnicze* 2009 nr 1 s. 95-97
52. Samołyk G., Bartnicki J., Gontarz A.: Fracture Model for FEM Modelling of Cold Metal Forging. *Steel Research International* 2010 vol. 81 No 9 s. 302-305
53. Samołyk G. Zastosowanie prasowania obwiedniowego do wytwarzania tarczy sprzęgła kłowego wykonanego ze stopu AlMgSi. *Obróbka Plastyczna Metali* 2010 t. XXI nr 4 s. 229-238
54. Samołyk G. Analiza płynięcia metalu podczas prasowania obwiedniowego wyrobu typu tarcza. *Hutnik. Wiadomości Hutnicze* 2011 nr 1 s. 109-112
55. Shey J. A. *Tribology in Metal Working*. ASFM, Metal Park, Ohio 1984
56. Siebel E. *Obrabotka metalov v plastičeskom sostojani*. Moskva: Wyd. ONTI 1934
57. Skrzypek J. *Plastyczność i pełzanie. Teoria, zastosowania, zadania*. Warszawa: PWN 1986
58. Sokołowski W. W. *Teoria plastyczności*. PWN 1957
59. Stanisławski S. *Podstawy teorii plastyczności. Teoria i zadania*. Poznań: Wyd. Pol. Poznańskiej 1977
60. Steigner Z. *Ciągnięcie drutów stalowych – wybrane zagadnienia*. Katowice: Wyd. Śląsk 1975
61. Szczepiński W. *Wstęp do analizy obróbki plastycznej*. Warszawa: Wyd. PWN 1967
62. Szczepiński W. *Mechanika plastycznego płynięcia*. Warszawa: Wyd. PWN 1978
63. Szmelter J. i in. *Programy elementów skończonych*. Warszawa: Wyd. Arkady 1973
64. Świątkowski K. Sposoby oceny wielkości tarcia na powierzchniach kontaktu niemetalicznego materiału modelowego i narzędzia. *Obróbka Plastyczna Metali* 2000 nr 1 s. 21-30
65. Šarapin E. F., Maksimov N. V. Primenenie osadki klinovidnych obrazcov dlja opredelenija koefficienta trenija. *Izv. VUZ Černaja Metallurgija* 1963 nr 3
66. Šofman L.A. *Osnovy rasščeta processov štamповki i presovanija*. Moskva: Wyd. Mašgiz 1961
67. Tan X., Zhang W., Bay N.: A new friction test using simple upsetting and flow analysis. *Proceedings of the 6th ICTP*, Sept. 19-24 1999 s. 365-370
68. Thompson G., Hawkyard J. B. Crack formation in transverse rolling – a review. W: *Proc. of 1st Int. Conf. Rotary Metalworking Processes*. 20-22 XI 1979 London UK s. 171 – 184

69. Thomsen E.G., Yang C.T., Kobayashi S. *Mechanics of plastic deformation in metal processing*. New York: Wyd. Mc Millan Co. 1965
70. Wasiuńyk P. Eksperymentalne wyznaczenie siły odkształcenia przy kuciu odkuwek na kuźniarkach. *Zeszyty Naukowe AGH* nr 36, Kraków 1966
71. Wasiuńyk P. *Teoria procesów kucia i prasowania*. Warszawa: Wyd. WNT 1981
72. Wasiuńyk P., Mentel F. Płynięcie metalu oraz rozkład i wielkość nacisku przy kuciu odkuwek w matrycach otwartych. *Zeszyty Naukowe AGH* 1982 z. 1
73. Weroński W., Pater Z. *Obróbka plastyczna. Obliczenia sił kształtowania*. Lublin: Wyd. Politechniki Lubelskiej 1994
74. Weroński W. i in. *Obróbka plastyczna – Technologia*. Lublin: Wyd. Politechniki Lubelskiej 1991
75. Zienkiewicz O.C. *Metoda elementów skończonych*. Warszawa: Wyd. Arkady 1972
76. Zagrajek T., Krzesiński G., Marek P. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Warszawa: Oficyna Wyd. Pol. Warszawskiej 2006

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- C – parametr materiałowy, wartość zniszczenia,
- D – macierz tłumienia wiskotycznego,
- E – moduł sprężystości wzdłużnej (Younga),
- F – siła wewnętrzna,
- G – moduł sprężystości poprzecznej (Kirchoffa),
- K – moduł ściśliwości, macierz sztywności,
- L – charakterystyczny wymiar liniowy,
- M – macierz mas,
- P – siła powierzchniowa,
- R_0 – granica wytrzymałości rozdzielczej,
- S – pole powierzchni,
- T – temperatura, siła tarcia,
- T_σ, T_ε – tensor naprężenia i odkształcenia,
- U – energia,
- V – objętość,
- W_p – praca odkształcenia plastycznego,
- $\dot{W}$ – moc,
- Z – stopień zgniotu,
- b, h, d – wymiary geometryczne materiału odkształcanego,
- k – granica plastyczności materiału przy czystym ścinaniu,
- l – charakterystyczny wymiar liniowy,
- m – czynnik tarcia, wykładnik w krzywej umocnienia,
- n – wykładnik w krzywej umocnienia,
- l, m, n – cosinusy kierunkowe ścianki skośnej,
- p_n – naciski powierzchniowe,
- r – wektor przemieszczeń węzłowych,
- t – czas,
- u – przemieszczenie, pole przemieszczeń,
- v – prędkość liniowa,
- w – wyężenie materiału,
- w_p – jednostkowa praca odkształcenia plastycznego,
- $\{x, y, z\}$ – kartezjański układ współrzędnych,
- $\{z, r, v\}$ – układ współrzędnych walcowych,

- $\{z, \rho, \theta\}$ – układ współrzędnych walcowych,
- $\{1, 2, 3\}$ – układ współrzędnych oparty na kierunkach głównych,
- ε – odkształcenie względne,
- $\dot{\varepsilon}$ – prędkość odkształcenia,
- ϕ – energia właściwa, parametr kątowy Levy’ego,
- γ – odkształcenie postaciowe (kątowe),
- φ – odkształcenie rzeczywiste (logarytmiczne),
- φ_H, φ_i – niezmiennik stanu odkształcenia, intensywność odkształcenia,
- μ – współczynnik tarcia,
- ν – liczba Poissona,
- ρ – gęstość materiału,
- σ – naprężenie,
- σ_H, σ_i – niezmiennik stanu naprężenia (naprężenie postaciowe Huberowskie), intensywność naprężenia,
- σ_N – naprężenie normalne,
- σ_m – niezmiennik stanu naprężenia, naprężenie hydrostatyczne (średnie),
- σ_{okt}, τ_{okt} – naprężenia występujące na płaszczyźnie oktaedrycznej,
- σ_p – granica plastyczności materiału,
- σ_{zred} – naprężenie zredukowane,
- τ – naprężenie styczne,
- ω – niezmiennik stanu odkształcenia i naprężenia,

STRESZCZENIE

W podręczniku zamieszczono podstawowe informacje na temat zagadnień z zakresu teorii sprężystości i plastyczności, tarcia, pękania metalu poddanego kształtowaniu oraz analizy procesów obróbki plastycznej. Adresowany jest on do studentów kierunków technicznych, w szczególności studiujących na kierunkach mechanika i budowa maszyn, inżynieria materiałowa i metalurgia. Zawartość książki podzielono na dwanaście tematycznych części. W pierwszych pięciu rozdziałach omówiono zagadnienia dotyczące naprężenia, odkształcenia, związków pomiędzy naprężeniem i odkształceniem dla stanu sprężystego i plastycznego, energii i pracy odkształcenia, wyężenia materiału i hipotez wyężeniowych. W trakcie omawiania tych zagadnień podano szereg definicji, podstawy teoretyczne oraz sposoby graficznego przedstawiania omawianych zagadnień. W rozdziale szóstym przybliżono tematykę tarcia w obróbce plastycznej metali – przedstawiono modele oraz metody oceny tarcia. Rozdział siódmy dotyczy zagadnień utraty spójności materiału podczas jego kształtowania. Omówiono przyczyny i sposób modelowania pęknięć kruchych oraz plastycznych. Pozostałe rozdziały dotyczą metod analizy procesów obróbki plastycznej. Omówiono metodę energetyczną, równań różniczkowych równowagi, ocen granicznych, linii poślizgu i charakterystyk oraz metodę elementów skończonych. Każdy rozdział zawiera krótkie wprowadzenie i omówienie podstaw teoretycznych danej metody oraz zawiera liczne przykłady praktyczne. Omawiając metodę elementów skończonych (MES) skupiono się na rozwiązaniach, które są wykorzystywane do analizy kształtowania brył oraz symulowania tłoczenia blach. Zamieszczone przykłady mają na celu ukazanie możliwości praktycznych modelowania MES, w szczególności pod kątem wyjaśnienia aspektów teoretycznych procesów obróbki plastycznej metali. Dodatkowo, podczas omawiania ważnych zagadnień treść podręcznika wzbogacono w liczne przypisy, gdzie zamieszczono opisy sylwetek wybranych osób świata nauki, które znacząco przyczyniły się do rozwoju teorii obróbki plastycznej metali.

