

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA TOM I.

PODREČNIK
TEORYI MOSTÓW
BELKI PROSTE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE.

Dla

inżynierów i słuchaczy szkół politechnicznych

z 92 rysunkami w tekście i 4 tablicami

opracował

MAKSYMILIAN THULLIE,

dplomowany inżynier, profesor szkoły politechnicznej we Lwowie.

Wydany staraniem

Komisji wydawniczej Biblioteki politechnicznej.

Cena 4 złr.

LWÓW.

NAKŁADEM AUTORA.

GŁÓWNY SKŁAD W KSIĘGARNI HOSCHEKA I SPÓŁKI.

I. Związkowa drukarnia we Lwowie.

1892.

PRZEDMOWA.

Tom niniejszy Podręcznika teorii mostów jest ciągiem dalszym wydanego przed dwoma laty tomu I. części I. tegoż podręcznika. Tom ten zamyka część I. Podręcznika, traktującą o belkach prostych i obejmuje teorią belek ciągłych, belek kratowych statycznie niewyznaczalnych i nateżeń drugorzędnych.

Jak w poprzednim tomie starałem się, aby praca niniejsza stała się podręcznikiem nie tylko dla moich słuchaczy, ale także i dla inżynierów wykonywujących, dlatego też umieściłem w nim to, co może być w praktyce przy obliczeniu mostów potrzebnem, ale zarazem tylko o tyle, o ile to jest potrzebnem. Z wielu sposobów n. p. wyznaczania nateżeń drugorzędnych podałem tu tylko jeden według mego zdania najprzystępniejszy. Przy teorii belki ciągłej podałem oprócz dokładnej teorii dla przekroju stałego sposób przybliżony Lebera, a inne sposoby dla przekroju zmiennego opisałem jak najkrócej.

Rozumie się, że w pracy niniejszej przypuszczałem znajomość prawideł statyki budowli i części teorii mostów, wyłożonej w pierwszym tomie: niejednokrotnie też powoływałem się na dawniej wydane przezemnie podręczniki tych nauk.

W układzie mej pracy trzymałem się zwłaszcza co do teorii belki ciągłej głównie dzieł prof. Winklera i rozumie się, korzystałem także z prac innych uczonych w tym przedmiocie. Dla dokładnego wyznaczenia nateżeń belki ciągłej i belek kratowych statycznie niewyznaczalnych, użyłem prawa Maxwella i Mohra, a nie korzystałem z prawa Castigliana, które jest zawilszem i bez którego przy użyciu prawa Mohra można się było wygodnie obejść. Trzymałem się bowiem zasady, że w podręczniku należy podawać tylko sposoby najłatwiejsze i najprzy-

IV

stepniejsze, które jedynie mogą znaleźć w praktyce szersze zastosowanie. W dodatku pomieściłem zresztą spis dzieł i ważniejszych artykułów, traktujących odnośnie działy nauki dla tych, którzyby chcieli obszerniej te działy studyować.

Jak w poprzednich podręcznikach użyłem zamiast drzeworytów rycin, litografowanych w zakładzie tutejszym Przyszłaka, co wpłynęło na względne obniżenie ceny dzieła, a nie zmniejszyło zdaniem mojem zewnętrznej wartości dzieła.

Oddając tę moją pracę pod pobłażliwy sąd inżynierów, pospieszam wywiązać z miłego obowiązku podziękowania komisyi wydawniczej Biblioteki politechnicznej, która zajęła się rozpisanem przedpłaty i poparciem moralnem, Towarzystwu politechnicznemu we Lwowie, krakowskiemu Towarzystwu technicznemu i Szanownej Redakcyi Przeglądu Technicznego za łaskawe poparcie wydawnictwa i bezinteresowne zbieranie przedpłaty i asystentowi memu p. Edmundowi Libańskiemu za pomoc w części rysunkowej wydawnictwa.

Maksymilian Thullie.

We Lwowie w lipcu 1892.

SPIS RZECZY.

Str.

§. 1. Wstęp	1
-----------------------	---

A. Belka ciągła bezprzegubowa.

I. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciągłej o ścianie pełnej i przekroju stałym.

§. 2. Ogólne uwagi	1
§. 3. Belka pochyło utwierdzona	2
§. 4. Belka poziomo utwierdzona	4
§. 5. Momenty podporowe belki ciągłej o równo wysokich podporach	6
§. 6. Momenty, siły poprzeczne i oddziaływania	8
§. 7. Obciążenie zupełne jednostajnie rozłożone	8
§. 8. Momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych	9
§. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych	11
§. 10. Momenty podporowe przęsła obciążonego	13
§. 11. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych	14
§. 12. Największe siły poprzeczne	16
§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne	16
§. 14. Najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów	17
§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego	22
§. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego	23

II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęslowa.

§. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej	24
§. 18. Ciężar własny	25
§. 19. Ciężar ruchomy	26
§. 20. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej	31
§. 21. Ciężar własny	32
§. 22. Największe siły poprzeczne	34
§. 23. Największe oddziaływania	36
§. 24. Największe momenty	36
§. 25. Przykład	40

III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

	Str.
§. 26. Zasada	45
§. 27. Najniekorzystniejsze obciążenia	47
§. 28. Belka trzyprzęsłowa	47
§. 29. Przykład	49

IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

§. 30. Ogólne uwagi	52
§. 31. Obciążenie zupełne jednostajne ciągle	52
§. 32. Momenty podporowe dla obciążenia układem ciężarów skupionych	54
§. 33. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych	56
§. 34. Największe siły poprzeczne	57
§. 35. Największe oddziaływania	57

V. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla przekroju stałego.

§. 36. Pierwszy wielobok sznurowy	58
§. 37. Linia ugięcia	59
§. 38. Wielobok ugięcia	60
§. 39. Wyznaczenie momentów podporowych	62
§. 40. Porównanie z belką poziomą obu końcami utwierdzoną	63
§. 41. Przęsło nieobciążone	65
§. 42. Dwa przęsła sąsiednie nieobciążone	66
§. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nie- obciążonych	67
§. 44. Przęsło obciążone	68
§. 45. Dwa sąsiednie przęsła obciążone	69
§. 46. Dowolne obciążenie przęseł	70
§. 47. Obciążenie jednostajne zupełne	72
§. 48. Obciążenie jednostajne częściowe	72
§. 49. Obciążenie jednym ciężarem skupionym	73
§. 50. Linie wpływowe	75
§. 51. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów	77
§. 52. Największe siły zewnętrzne	77

VI. Obliczenie analityczne belki ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 53. Belka pochyła utwierdzona	80
§. 54. Wyznaczenie ilości pomocniczych	81
§. 55. Wyznaczenie ilości $\mathfrak{R}'$ i $\mathfrak{R}''$	82
§. 56. Momenty podporowe belki ciągłej	83
§. 57. Punkty stałe	83
§. 58. Przykład	84

VII. Obliczenie dokładne belki kratowej ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 59. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia	85
§. 60. Zasada dokładnego obliczenia	86

	Str.
§. 61. Prawo pracy przygotowanej	88
§. 62. Prawo Maxwella	89
§. 63. Linia wpływowa ugięcia	90
§. 64. Linia wpływowa oddziaływania belki dwuprzęsłowej	91
§. 65. Linie wpływowe sił poprzecznych i momentów	91

VIII. Wpływ podpór.

§. 66. Ogólne uwagi	92
§. 67. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach	93
§. 68. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory	93
§. 69. Najkorzystniejsza wysokość podpór	94
§. 70. Belka dwu- i trzyprzęsłowa	94
§. 71. Podwójne łożyska	96
§. 72. Wpływ przytwierdzenia belek do filaru	96

B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i natężenia drugorzędne.

IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

§. 73. Pręty nadliczbowe	98
§. 74. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych	99
§. 75. Belka równoległa o kracie złożonej	102
§. 76. Belka wieloboczna	106
§. 77. Belka Howe'a	106
§. 78. Belka ciągła	107
§. 79. Wpływ zmiany ciepłoty	107

X. Natężenia drugorzędne.

§. 80. Określenie natężeń drugorzędnych	107
§. 81. Zasada obliczenia natężeń drugorzędnych	108
§. 82. Zmiana kątów w trójkącie	109
§. 83. Kąt odchylenia osi prętów	109
§. 84. Równanie momentów węzłowych	110
§. 85. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych	111
§. 86. Wpływ mimośrodkowego utwierdzenia prętów	114
§. 87. Wpływ przekroju prętów	115
§. 88. Wpływ obciążenia	115
§. 89. Wpływ ustroju belki	116
§. 90. Połączenia przegibne	116

Dodatek. Literatura	118
-------------------------------	-----



Sprostowanie omyłek drukarskich.

	zamiast	czytaj
Str. 4. wier. 2. z góry	$2 \varepsilon J$	$2 \varepsilon I$
„ 4. „ 3. „	$2 \varepsilon J$	$2 \varepsilon I$
„ 4. „ 6. „	$\frac{1}{6 \varepsilon J}$	$\frac{1}{6 \varepsilon I}$
„ 4. „ 7. „	$\frac{1}{6 \varepsilon J}$	$\frac{1}{6 \varepsilon I}$
„ 14. „ 9. „	$\nu_r M_r + M_{r-1} + \Re''$	$\nu_r M_r + M_{r-1} = \Re''$
„ 14. „ 12. „	$M_r = \frac{\mu \Re'' - \Re'}{\mu_r \nu_r - 1}$	$M_r = \frac{\mu_r \Re'' - \Re'}{\mu_r \nu_r - 1}$

§. 1. Wstęp.

W pierwszym tomie Podręcznika teorii mostów podzieliśmy teorią belek prostych na siedm działów. Cztery pierwsze działy stanowiły tom pierwszy, w niniejszym tomie wyłożymy trzy ostatnie działy. Mówić będziemy mianowicie o belce ciągłej bezprzegubowej, o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych i o nateżeniach drugorzędnych.

A. Belka ciągła bezprzegubowa.

I. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciągłej o ścianie pełnej i przekroju stałym.

§. 2. Ogólne uwagi.

Mówiliśmy już w tomie I., że belkę prostą, spoczywającą na więcej niż dwu podporach, nazywamy belką ciągłą lub wieloprzęślową (n. *continuirlicher Träger*, f. *poutre continue*, a. *continuous beam*). Mówiliśmy też, że oddziaływań podpór nie możemy tu wyznaczyć zapomocą prawideł statyki, lecz badamy odkształcenie belki, które zależne jest od obciążenia i stąd otrzymujemy równania, brakujące do wyznaczenia sił zewnętrznych.

Przy wyznaczeniu odkształcenia wchodzi jednak w rachubę przekrój, przed obliczeniem belki jeszcze nieznany; stąd powstaje bardzo wielka trudność. Gdybyśmy chcieli wprowadzić w rachunek przekrój niewiadomy jako funkcją sił wewnętrznych, zadanie nie byłoby rozwiązalnem. Dlatego obliczamy belkę ciągłą najprzód w przybliżeniu, przyjmując przekrój stały. Na podstawie w ten sposób uzyskanych sił zewnętrznych obliczamy przekroje w poszczególnych punktach, a wtedy dopiero, znając w przybliżeniu przekroje, możemy przystąpić do dokładnego obliczenia belki.

Nazwijmy X_0 moment wypadkowej wszystkich ciężarów (bez oddziaływania) na długości AC , M moment wszystkich sił zewnętrznych (z oddziaływaniem), po lewej stronie będących, ze względu na punkt C , Q' siłę poprzeczną w A , a M' i M'' momenty w punktach A i B na podporach, które nazywamy momentami podporowymi (*Stützenmoment, Normalmoment*), to

$$M' = Q'a, \quad M = Q'(a+x) + X_0 = M' + Q'x + X_0 \quad . \quad . \quad 5)$$

Dla punktu B będzie

$$M'' = M' + Q'l + X'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Stąd otrzymamy $Q' = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{X''}{l}$, a wstawiając to w równanie 5.)

$$M = M' + \frac{M'' - M'}{l} x - \frac{X'' x}{l} + X_0.$$

Dla belki w dwu punktach podpartej jest $M' = M'' = 0$, więc $M = X_0 - \frac{X'' x}{l} = X$, gdy X oznacza moment sił zewnętrznych dla belki w dwu punktach podpartej.

A więc możemy napisać $M = \frac{M'(l-x) + M''x}{l} + X \quad . \quad 6a)$

Podstawiając tę wartość w równanie 2), otrzymamy

$$\epsilon I(\tau_1 + \tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} dx + \int_0^l X dx,$$

albo $2\epsilon I(\tau_1 + \tau_2) = (M' + M'')l + 2 \int_0^l X dx.$

Podstawiając zaś wartość za M w równ. 4), otrzymamy

$$\epsilon I(s - l\tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x)x + M''x^2}{l} dx + \int_0^l X x dx,$$

a stąd $6\epsilon I(s - l\tau_2) = (M' + 2M'')l^2 + 6 \int_0^l X x dx.$

Rozwiązawszy te dwa równania ze względu na M' i M'' , będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} M'l^2 &= 2 \int_0^l X(3x - 2l) dx + 2\epsilon I(2\tau_1 + \tau_2 - 3s) \\ M''l^2 &= 2 \int_0^l X(l - 3x) dx - 2\epsilon I(l\tau_1 + 2\tau_2 - 3s) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 7)$$

Nazwijmy $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ momenty na podporach belki poziomo utwierdzonej o tej samej rozpiętości i tak samo obciążonej, to tu $s=0$, $\alpha=\beta=0$, więc $\tau_1=\tau_2=0$, a zatem według równ. 7) będzie

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}'l^2 &= 2 \int_0^l X(3x - 2l) dx \\ \mathfrak{M}''l^2 &= 2 \int_0^l X(l - 3x) dx \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} M' &= \mathfrak{M}' + 2\varepsilon J \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l^2} \\ M'' &= \mathfrak{M}'' - 2\varepsilon J \frac{l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 9)$$

Z tych dwóch równań możemy wyznaczyć τ_1 i τ_2 , mianowicie otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= + \frac{1}{6\varepsilon J} (2M' + M'' - \mathfrak{M}') + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= - \frac{1}{6\varepsilon J} (M' + 2M'' - \mathfrak{M}'') + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots 10)$$

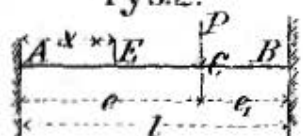
jeżeli dla skrócenia nazwiemy

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= 2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' \\ \mathfrak{M}'' &= \mathfrak{M}' + 2\mathfrak{M}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots 11)$$

§. 4. Belka poziomo utwierdzona.

Momenty $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ dla belki poziomo utwierdzonej możemy dla danego obciążenia obliczyć według równan. 8). Zbadamy tu kilka przypadków.

a) Obciążenie jednym ciężarem skupionym. Tu musimy rozdzielić całkę naznaczoną w równ. 8), bo $X=f(x)$ zmienia się, gdy E (rys. 2.) przekracza punkt C , a mianowicie

rys.2. dla $0 < x < e$ jest $X = \frac{Pe_1 x}{l}$,

a dla $e < x < l$ jest $X = \frac{Pe_1 x}{l} - \mathcal{P}(x-e)^*$,

a więc pierwszy wyraz całkować będziemy od 0 do e , a drugi od e do l .

Zatem będzie na podstawie równania 8)

$$\mathfrak{M}' l^2 = 2P \int_0^e \frac{e_1 x}{l} (3x - 2l) dx - 2P \int_e^l (x - e) (3x - 2l) dx.$$

Pierwszy wyraz jest między granicami 0 i l równy zeru, drugi zaś upraszcza się bardzo i otrzymujemy:

$$\mathfrak{M}' l^2 = -Pe(l^2 + e^2 - 2el) = -Pe e_1^2.$$

Podobnie otrzymamy $\mathfrak{M}'' l^2 = -Pe^2 e_1$ więc,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{Pe e_1^2}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 12a)$$

*) p. Podr. t. m. tom I. str. 39.

$$\mathfrak{M}'' = - \frac{Pe^2 e_1}{l^2} \} \dots \dots \dots 12b)$$

Teraz możemy obliczyć wyrazy $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ z równania 11), a mianowicie będzie

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= - \frac{Pe e_1 (2l - e)}{l^2} = - \frac{Pe_1 (l^2 - e_1^2)}{l^2} \\ \mathfrak{M}'' &= - \frac{Pe e_1 (l + e)}{l^2} = - \frac{Pe (l^2 - e^2)}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 13)$$

Równanie 12) otrzymaliśmy w inny sposób w Podręczniku statyki budowli (str. 145). — Tam też rozważaliśmy wypadek, gdy belka jest ciężarem q

b) całkowicie obciążona i otrzymaliśmy

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = - \frac{1}{2} ql^2, *) \dots \dots \dots 14)$$

a na podstawie równania 11)

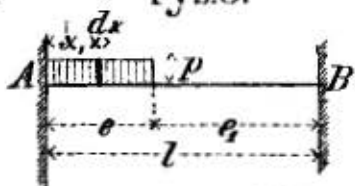
$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = - \frac{1}{4} ql^2 \dots \dots \dots 15)$$

c) Częściowe obciążenie jednostajne.

α) Obciążenie z lewej strony.

W punkcie C działa na długości dx (rys. 3.) ciężar pdx . Możemy uważać go jako ciężar skupiony, otrzymamy więc moment, wywołany tym ciężarem, według 12)

rys.3.



$$d\mathfrak{M}' = - \frac{p dx x_1 (l - x_1)^2}{l^2},$$

a zatem moment w A

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= + \int_0^e d\mathfrak{M}' = - \frac{p}{l^2} \int_0^e x_1 (l - x_1)^2 dx = \\ &= - \frac{p}{l^2} \int_0^e (x_1 l^2 - 2 l x_1^2 + x_1^3) dx = - \frac{p e^2}{12 l^2} (6 l^2 + 8 e l + 3 e^2), \text{ wręście} \\ \mathfrak{M}' &= - \frac{p e^2}{12 l^2} (l^2 + 2 e_1 l + 3 e_1^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Podobnie otrzymamy } \mathfrak{M}'' &= \int d\mathfrak{M}'' = - \frac{p}{l^2} \int_0^e x^2 (l - x_1) dx = \\ &= - \frac{p e^3}{12 l^2} (4 l - 3 e) = - \frac{p e^3}{12 l^2} (l + 3 e_1) \dots \dots \dots 16) \end{aligned}$$

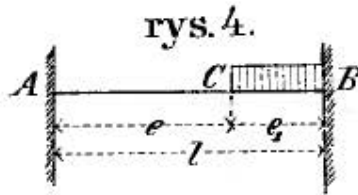
stąd

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= - \frac{p e^2}{12 l^2} (2 l^2 + 4 e_1 l + 6 e_1^2 + l e + 3 e_1 e) = - \frac{p e^2}{4 l^2} (l + e_1)^2 \\ \mathfrak{M}'' &= - \frac{p e}{12 l^2} (2 l e + 6 e e_1 + l^2 + 2 l e + 3 e_1^2) = - \frac{p e^2}{4 l^2} (2 l^2 - e^2) \end{aligned} \right\} 17)$$

*) Podręcznik statyki budowli str. 147. równ. 241.)

3) Obciążenie z prawej strony.

Dla obciążenia jednostajnego z prawej strony punktu C (rys. 4.) aż do prawej podpory otrzymamy momenty podporowe, wstawiając w równanie 16) e_1 zamiast e i na odwrót i $\mathfrak{M}''$ zamiast $\mathfrak{M}'$. A więc



$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{p e_1^3}{12 l^2} (l + 3e) \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{p e_1^2}{12 l^2} (l^2 + 2el + 3e^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots 18)$$

Stąd otrzymamy dalej:

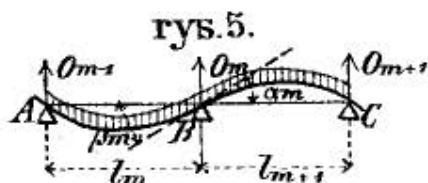
$$\mathfrak{M}' = -\frac{p e_1^2}{4 l^2} (2l^2 - e_1^2), \quad \mathfrak{M}'' = -\frac{p}{4 l^2} (l^2 - e^2)^2. \quad 19)$$

Winkler podaje dla ułatwienia następują tabliczkę dla $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$, obliczoną z równań 17) i 19) dla rozmaitych wartości e :

e	obciążenie z lewej strony (rys. 3.)		obciążenie z prawej strony (rys. 4.)	
	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
0	0	0	0.25000	0.25000
0.1	0.00903	0.00497	0.24097	0.24503
0.2	0.03240	0.01960	0.21760	0.23040
0.3	0.06503	0.04298	0.18497	0.20703
0.4	0.10240	0.07360	0.14760	0.17640
0.5	1.14063	0.10938	0.10938	0.14063
0.6	0.17640	0.14760	0.07360	0.10240
0.7	0.20703	0.18497	0.04298	0.06503
0.8	0.23040	0.21760	0.01960	0.03240
0.9	0.24503	0.24097	0.00497	0.00903
1.0	0.25000	0.25000	0	0
l	pl^2	pl^2	pl^2	pl^2

§. 5. Momenty podporowe belki ciągłej o równo wysokich podporach.

Jeżeli belkę ciągłą (rys. 5.) obciążymy, to ugnie się wskutek tego. Na podporach styczne do linii ugięcia będą, ogólnie biorąc, nachylone do poziomu. Każde przęsło tej belki uważać tedy możemy jako belkę ukośnie utwierdzoną i zastosować doń równanie 10). Przypuśćmy przytem, że podpory wszystkie są w równej wysokości, to $s=0$, więc dla m go przęsła będzie, jeśli $\tau_m = \text{st } \beta_m = \text{st } \alpha_m$,

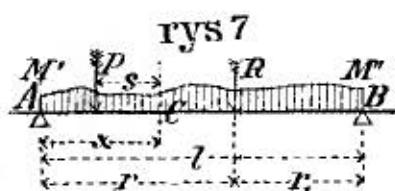


Otrzymujemy zatem jedno równanie więcej, wystarczające do wyznaczenia jeszcze jednej niewiadomej M_0 .

Tak samo, jeżeli belka jest poziomo utwierdzona na n tej podporze, otrzymamy: $M_{n-1}l_n + 2M_nl_n = \mathfrak{N}_n''l_n$,
czyli $M_{n-1} + 2M_n = \mathfrak{N}_n'' \dots \dots \dots 23)$

§. 6. Momenty, siły poprzeczne i oddziaływania.

Niech przęsło AB (rys. 7.) belki ciągłej będzie dowolnie obciążone, wypadkowa wszystkich ciężarów na długości AB działających niech będzie R , a r_1 jej odstęp od B . — Nazwijmy dalej momenty podporowe w A i B , M' i M'' , siłę poprzeczną Q' przy podporze A , Q'' przy podporze B , (obiedwie wewnątrz przęsła), to otrzymamy z równ. 5)



$$M'' = M' + Q'l - Rr_1, \text{ a}$$

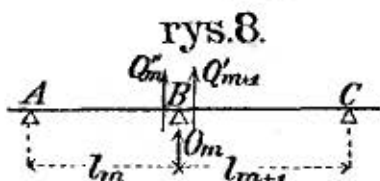
$$Q'' = Q' - R, \text{ stąd wynika } Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Rr_1}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots 24)$$

$$Q'' = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{Rr_1}{l}$$

Chcąc wyznaczyć siłę poprzeczną Q w dowolnym punkcie C , nazwijmy P wypadkową ciężarów, działających na długości $AC=x$, a s jej odstęp od C , to $Q = Q' - P \dots \dots \dots 25)$

$$M = M' + Q'x - Ps \dots \dots \dots 26)$$

Nazwijmy dalej O_m oddziaływanie w punkcie B , to siła poprzeczna przy B (rys. 8.) w m tem przęsle jest Q_m'' , a w $(m+1)$ em przęsle Q_{m+1}' ,



$$\text{a więc } Q_{m+1}' = Q_m'' + O_m,$$

$$\text{czyli } O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}' \dots \dots 27)$$

$$\text{a stąd dla } m=0 \quad O_0 = Q_1', \quad \text{a dla } m=n \quad O_n = -Q_n''.$$

§. 7. Obciążenie zupełne jednostajnie rozłożone.

Dla ciężaru stałego jednostajnie ciągłego g mamy według równania 15) $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = -\frac{1}{4}gl^2$, więc

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{1}{4}gl_1^2$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{1}{4}gl_2^2.$$

Ustawmy teraz równania momentów podporowych według 21), a otrzymamy*)

*) porów. Podręcznik statyki budowlanej str. 151.

§. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych.

Jeżeli przęsło jest nieobciążone, to $R=0$, więc dla m go przęsła otrzymamy z równ. 24)

$$Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} \dots \dots \dots 39)$$

Ponieważ tu M_m i M_{m-1} mają znaki przeciwne, więc Q_m będzie miało ten sam znak, co M_m , a więc naprzemian będzie raz dodatniem, drugi raz ujemnem. W $(m+1)$ przęśle będzie

$$Q_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}}.$$

Podzielimy to równanie przez równ. 39), a otrzymamy

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{M_{m+1} - M_m}{M_m - M_{m-1}} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{1 + \mu_{m+1}}{\mu_m} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = -\frac{\mu_m (1 + \mu_{m+1})}{\mu_m + 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} \quad 40)$$

μ_m i μ_{m+1} są dodatnie, więc cały wyraz jest ujemnym. Ponieważ $1 + \mu_{m+1} > 3$, a $1 + \frac{1}{\mu} < \frac{3}{2}$, więc

$$-\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2 \frac{l_m}{l_{m+1}} \dots \dots \dots 41)$$

Z tego wynika, że siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu, jeżeli, jak zwykle, $2l_m > l_{m+1}$.

Według równ. 27) jest $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}'$; ponieważ Q mają znaki przeciwne, więc z tego wynika, że O_m będzie miało ten sam znak, co Q_{m+1}' , a więc także będzie naprzemian dodatnie i ujemne. — Podobnie możemy napisać

$$O_{m+1} = -Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'.$$

Podzieliwszy to drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy

$$\frac{O_{m+1}}{O_m} = \frac{Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'}{-Q_m'' + Q_{m+1}'} = \frac{-\frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}} + 1}{\frac{Q_m}{Q_{m+1}} - 1}, \text{ przyczem opuściliśmy zna-}$$

czki, bo w przęśle nieobciążonem $Q' = Q'' = Q$.

Licznik jest tu dodatni i większy, niż $1 + 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}$, zaś mianownik ujemny i mniejszy, niż $1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}$, więc

$$-\frac{O_{m+1}}{O_m} > \frac{1+2\frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}}{1+\frac{1}{2}\frac{l_{m+1}}{l_m}} \dots \dots \dots 42)$$

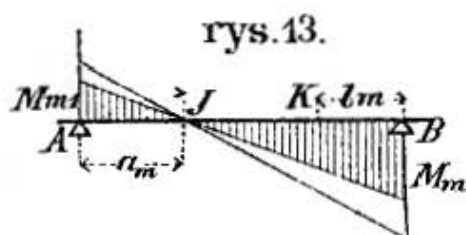
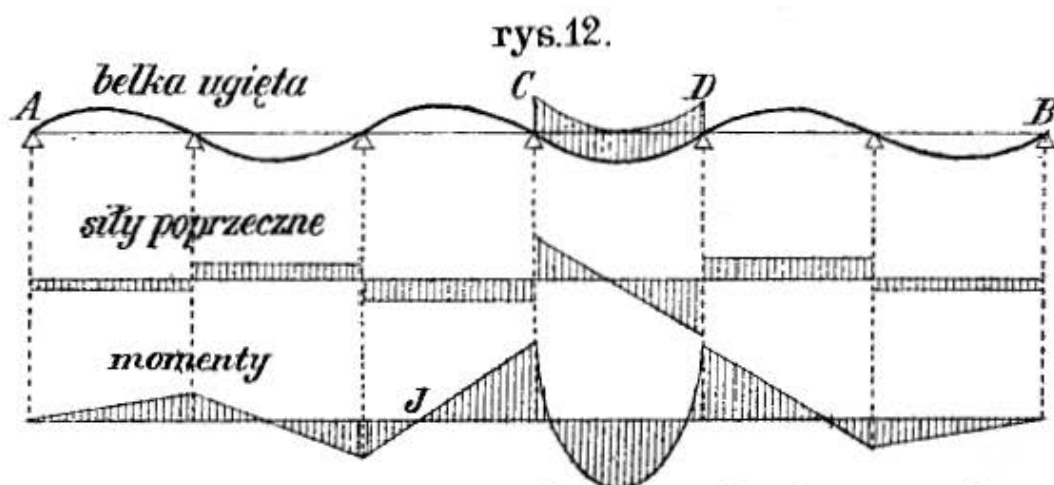
Z równania 42) widzimy, że oddziaływania są na przemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu (jeżeli $4l_m$ nie jest $< l_{m+2}$). Momenty obliczymy z równania 26), mianowicie będzie $M = M_{m-1} + Q_m'x$.

Wstawmy wartość za Q_m , to otrzymamy

$$M = M_{m-1} + \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} x, \text{ czyli}$$

$$M = M_{m-1} \left(1 - \frac{x}{l_m}\right) + \frac{M_m x}{l_m} \dots \dots \dots 43)$$

Ze względu na x jest to równanie 1go stopnia, linia momentów będzie więc prostą. Wyniki te przedstawiliśmy na rys. 12.



Jeżeli w każdym przęśle są momenty dodatnie i ujemne, to musi być w każdym przęśle punkt, w którym $M=0$. Nazwijmy a odnośnie x (rys. 13.), to z równania 43) otrzymamy

$$0 = M_{m-1} \left(1 - \frac{a_m}{l_m}\right) + \frac{M_m a_m}{l_m}, \text{ a stąd } a_m = \frac{M_{m-1} l_m}{M_{m-1} - M_m}, \text{ czyli } a_m =$$

$$= \frac{l_m}{1 - \frac{M_m}{M_{m-1}}}. \text{ A gdy } \frac{M_m}{M_{m-1}} = -\mu_m, \text{ będzie } a_m = \frac{l_m}{1 + \mu_m} \dots \dots \dots 44)$$

Stąd widzimy, że ponieważ μ_m zależy tylko od rozpiętości, a nie zależy od obciążenia, a_m pozostaje niezmiennem, którekolwiek przęsło z prawej strony danego przęsła dowolnie jest obciążonem. Zawsze wtedy linia momentów przechodzi przez I ,

To równanie przedstawia związek między M_{r-1} i M_{r-2} , który, jak wiemy, jest niezależny od obciążenia r -tego przęsła, więc także prawdziwy, gdy r -te przęsło jest dowolnie obciążono.

Podobnie otrzymamy

$$M_{r+1}l_{r+1} + 2M_r(l_r + l_{r+1}) - \nu_r M_r l_r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 52)$$

Te dwa równania dają w połączeniu z równaniami 50) następne:

$$\begin{cases} \mu_r M_{r-1} + M_r = \mathfrak{M}_r' \\ \nu_r M_r + M_{r-1} + \mathfrak{M}_r'' \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 53)$$

Z tych dwu równań otrzymamy

$$\begin{cases} M_{r-1} = \frac{\nu_r \mathfrak{M}_r' - \mathfrak{M}_r''}{\mu_r \nu_r - 1} \\ M_r = \frac{\mu_r \mathfrak{M}_r'' - \mathfrak{M}_r'}{\mu_r \nu_r - 1} \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 54)$$

Wiemy, że współczynniki μ i ν są większe, niż 2, więc mianowniki równania 54) są dodatnie.

Według równania 11) jest $\mathfrak{M}_r' = 2\mathfrak{M}_r' + \mathfrak{M}_r''$,

$$\mathfrak{M}_r'' = 2\mathfrak{M}_r'' + \mathfrak{M}_r',$$

więc $\nu_r \mathfrak{M}_r' - \mathfrak{M}_r'' = 2\nu_r \mathfrak{M}_r' + \nu_r \mathfrak{M}_r'' - 2\mathfrak{M}_r'' - \mathfrak{M}_r' =$
 $= \mathfrak{M}_r' (2\nu_r - 1) + \mathfrak{M}_r'' (\nu_r - 2).$

Ponieważ momenty $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ są zawsze ujemne (według rów. 12), a $2\nu_r - 1$ i $\nu_r - 2$ zawsze dodatnie, więc licznik jest ujemny, a mianownik dodatni; a zatem M_{r-1} jest ujemnem. To samo możemy udowodnić dla M_r . A zatem momenty podporowe przęsła obciążonego są zawsze ujemne.

§. II. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych.

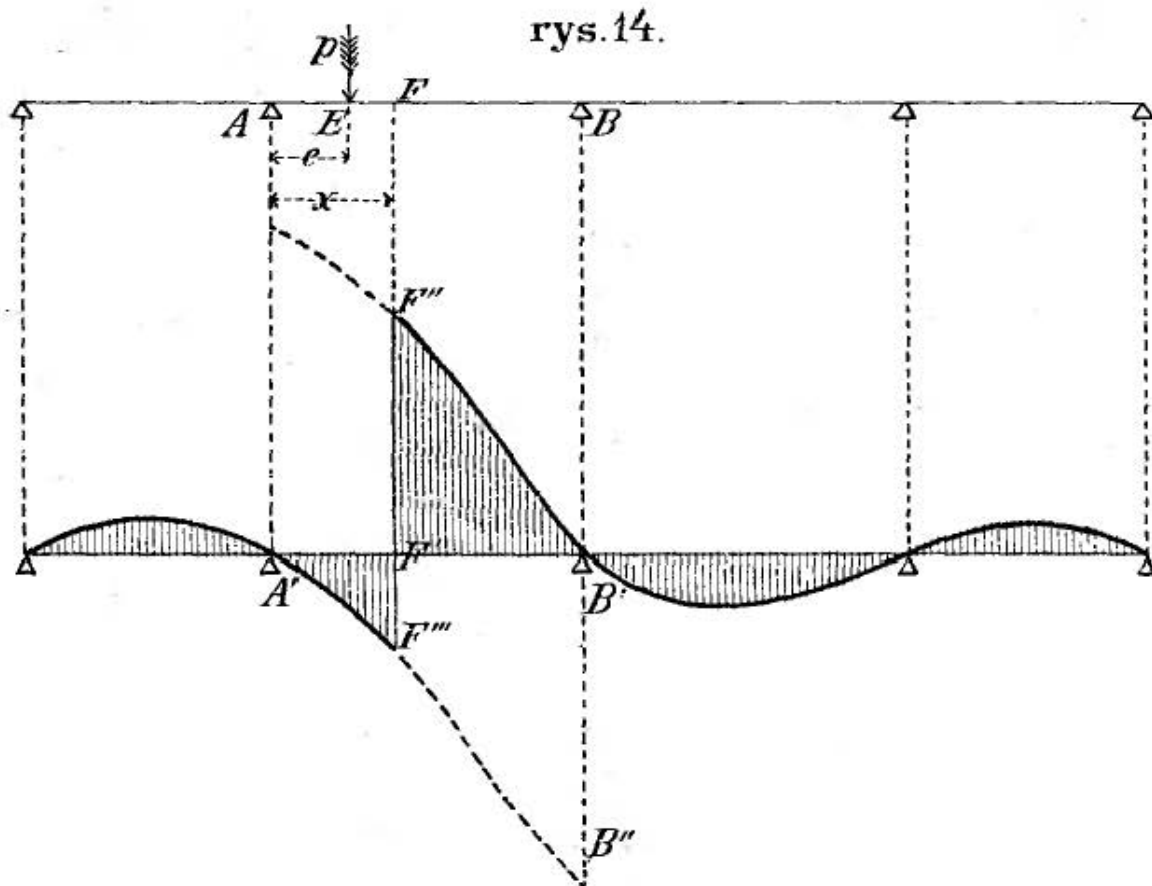
a) Obciążenie odnośnego przęsła.

Niechaj będzie tylko jedno przęsło AB (rys. 14.) belki ciągłej obciążonej, i to niech działa w punkcie E siła P , to siła poprzeczna Q w punkcie F będzie według 24) i 25), gdy $x > e > 0$,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l} - P, & \text{gdy } l > e > x \\ Q &= \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l} & \text{gdy } l > e > x \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

Z równań powyższych widzimy, że linia wpływowa będzie funkcją e wyższego stopnia, niż pierwszego (bo M' i M'' są $f(e)$, a więc będzie to linia krzywa. Wiemy jednak, że dla $e=0$ i $e=l$ jest $Q=0$ i że różnica rzędnych w F wynosi $P=$

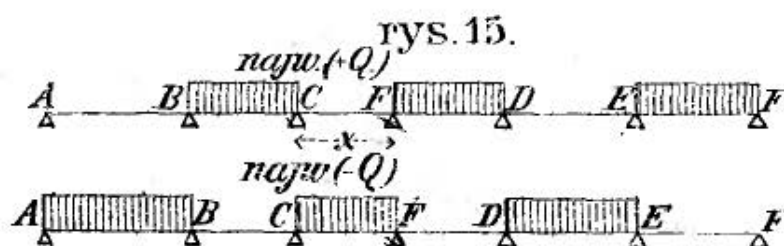
$=F''F'''$. Linie $A'F'''$ i $F''B'$ będą się mało co różniły od prostych, bo wyraz pierwszy jest stosunkowo mały. Z kształtu



linii wpływowej widzimy, że dla *najw* Q musi być obciążona długość FB , a dla *najmn* Q długość AF , a więc tak samo, jak dla belki jednoprzęsłowej. Tak samo musi też dla ciężarów skupionych jeden ciężar stać w F , największe i najgęstsze ciężary blisko F .

b) Obciążenie reszty przęseł.

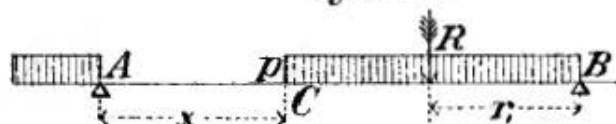
Przypuśćmy teraz, że odnośne przęsło nie jest obciążone, wtedy $Q=Q'$. Z rys. 12. widzimy, że, aby to Q było dodatniem, musi być lewe sąsiednie przęsło obciążone, a prawe nieobciążone, inne zaś przęsła naprzemian, gdyżśmy udowodnili, że siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne w przęsłach nieobciążonych. Stosownie do tego będzie linia wpływowa w innych przęsłach naprzemian pod lub nad osią (rys. 14). A więc dla



najw $(+Q)$ i *najw* $(-Q)$ w punkcie F przęsła CD musi być belka obciążona według rys. 15

§. 12. Największe siły poprzeczne.

Według równania 24) i 25) można obliczyć najw. siły poprzeczne w danym punkcie C



(rys. 16.) dla obciążenia jednostajnego ciągłego. Wiemy, że przytem musi być

długość BC obciążona.

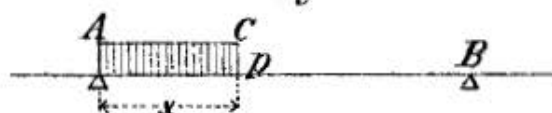
Podstawmy w tych równaniach

$$R = p(l - x), \quad r_1 = \frac{1}{2}(l - x), \quad P = 0,$$

to

$$\text{najw } (+Q) = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} \frac{p(l - x)^2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

Dla najmniejszości sił poprzecznych musi być obciążona długość AC (rys. 17), więc



$$R = px, \quad r_1 = l - \frac{x}{2}, \quad P = px.$$

Wstawmy te wartości w równania 24) i 25), a otrzymamy

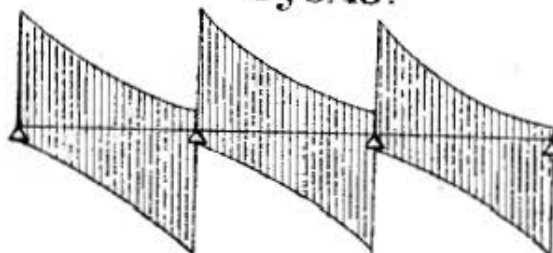
$$\text{najw } (-Q) = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{1}{2} \frac{px^2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 57)$$

Według równ. 30) mamy dla obciążenia zupełnego $Q_z = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} p(l - 2x)$, widzimy więc, że

$$\text{najw } (-Q) = Q_z - \text{najw } (+Q) \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

co zresztą jest oczywistem.

rys. 18.

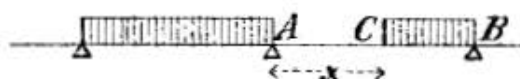


Linie największych i najmniejszych sił poprzecznych, będą prawie paraboliczne, wyraz pierwszy bowiem jest wprowadzić funkcją x , ale jest zazwyczaj bardzo małym (rys. 18).

§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne.

Z rys. 18. i z poprzednich równań widzimy, że największe siły poprzeczne są na podporach i to na lewych każdego przęsła dodatnie, na prawych ujemne. W rys. 19. oznaczyliśmy

rys. 19.



obciążenie dla $\text{najw } (+Q)$ w C. Bezwzględna największość jest dla $x=0$, więc oba przęsła, między którymi leży punkt A, muszą być

rys.20.



obciążone. W rys. 20) oznaczyliśmy znów obciążenie dla *najmn* Q w C . Bezwzględna najmniejszość jest dla $x=l$, więc znów

oba przęsła, między którymi leży podpora B , muszą być obciążone; reszta przęseł ma być naprzemian obciążoną. Z równ. 56) i 57) otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{dla } x=0 \text{ bezwzględnie } \text{najw } Q &= \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} pl \\ \text{" } x=l \text{ " } \text{najm } Q &= \frac{M'' - M'}{l} - \frac{1}{2} pl \end{aligned} \quad \dots \quad 59)$$

Ponieważ oddziaływanie równa się różnicy sił poprzecznych po obu stronach podpory, a obie siły poprzeczne są największe dla tego samego obciążenia, więc oddziaływanie będzie największe także dla tego samego obciążenia, t. j. gdy oba przęsła sąsiednie są obciążone.

Najmniejsze oddziaływanie, powstające z powodu ciężaru ruchomego, jest ujemnem. Jeżeli oddziaływanie dodatnie, wywołane ciężarem własnym, jest większe od oddziaływania ujemnego z powodu ciężaru ruchomego, to oddziaływanie dla ciężaru własnego i ruchomego jest ostatecznie dodatnie; w przeciwnym razie ujemne.

W tym ostatnim wypadku belka musi być przytwierdzoną do podpory, gdyż inaczej podniosłaby się w tem miejscu, czego dopuścić nie możemy ze względów ustrojowych. Największe oddziaływanie ujemne powstaje, gdy dwa sąsiednie przęsła są nieobciążone, a dalsze naprzemian obciążone i nieobciążone.

§. 14. Najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów.

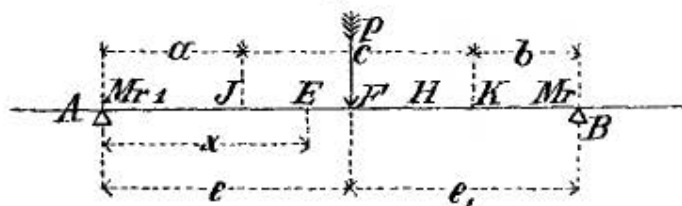
a) Obciążenie przęsła badanego.

Niechaj w punkcie F r -tego przęsła belki ciągłej działa siła P (rys. 21.), to wiemy, że według równań 12 a) i 12 b) będzie

$$M' = -\frac{Pe e_1^2}{l^2}, \quad M'' = -\frac{Pe^2 e_1}{l^2}.$$

Dalej według równań 54) mamy po opuszczeniu zna-

rys.21.



$$\text{czka } r \quad M_{r-1} = \frac{\nu M' - M''}{\mu \nu - 1}, \quad M_r = \frac{\mu M'' - M'}{\mu \nu - 1}.$$

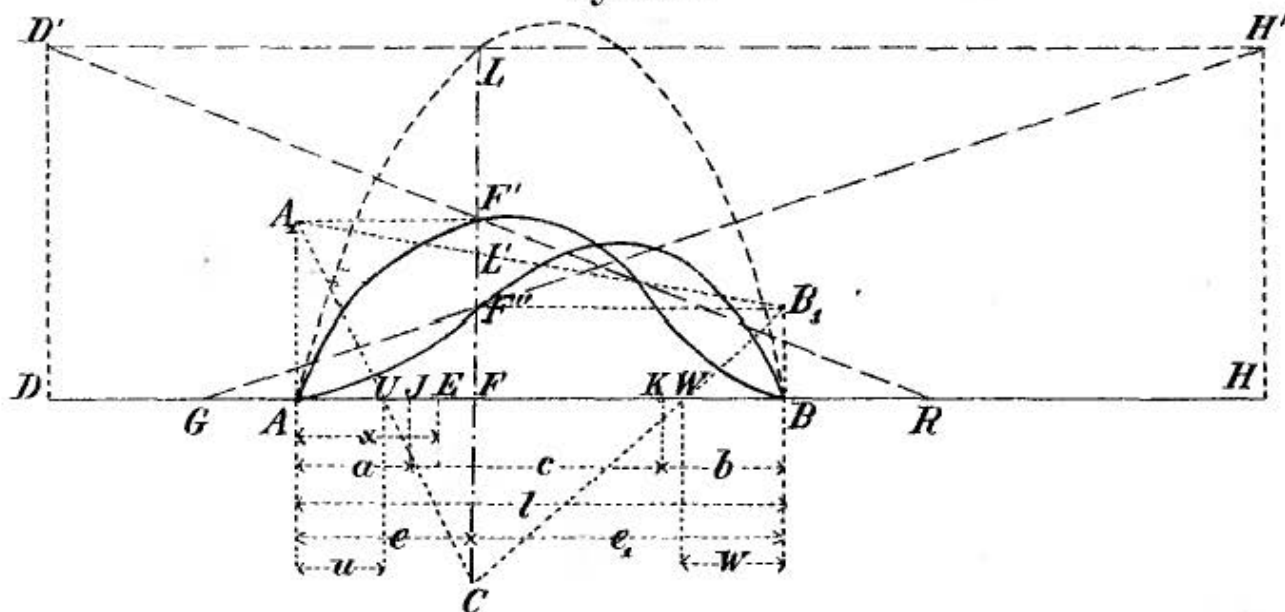
Podstawmy w tych równaniach wartości z równań 44) i 45)
 $\mu = \frac{l}{a} - 1$ i $\nu = \frac{l}{b} - 1$, z rys. 21. $c = l - a - b$ i wartości za $\mathfrak{N}'$
 i $\mathfrak{N}''$ z równ. 11), to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_{r-1} &= -\frac{Pae_1}{cl^2} (2l - 3b - e) \\ M_r &= -\frac{Pbe_1}{cl^2} (l - 3a + e) \end{aligned} \right\} \dots \dots 60)$$

Na podstawie równan. 60) dadzą się linie wpływowe dla momentów podporowych M_{r-1} i M_r według Šolína w następny sposób wykreślić (rys. 22.). Zróbmy $BR = l - 3b = AB - 3BK$, $RD = l \frac{c}{a} = AB \frac{IK}{AI}$, FL momentowi dla belki w dwu punktach podpartej $= \frac{Pe_1}{l}$, $DD' = FL$ i wykreślmy $D'R$, to

$$FF' = \frac{DD' \cdot RF}{RD} = \frac{Pe_1}{l} \cdot \frac{(l - 3b + e_1)}{l \frac{c}{a}} = \frac{Pae_1e}{cl^2} (2l - 3b - e) = M_{r-1}.$$

rys. 22.



Podobnie otrzymamy $FF'' = M_r$. W ten sam sposób możemy otrzymać momenty M_{r-1} i M_r dla innego położenia siły P , a połączwszy końce rzędnych, przedstawiających momenty, otrzymamy linie wpływowe $AF'B$ i $AF''B$. Zróbmy teraz $AA_1 = FF'$, i $BB_1 = FF''$, połączmy A_1 z B_1 i zróbmy $L'C = FL$, to A_1CB_1 będzie przedstawiać linię momentów w przęśle AB , jeżeli siła P działa w F . Ponieważ L' leży zawsze niżej L , więc C będzie zawsze poniżej AB , a zatem moment w punkcie zaczepienia siły

jest zawsze dodatni. Z rysunku widzimy, że, jeżeli siła P leży w F , w punktach U i W jest moment równy zeru. Wyznamy położenie tych punktów obojętnych.

Z rysunku wynika, że $AA_1U \sim UFC$, więc $u : (e - u) = = (-M_{r-1}) : M_1$, gdy $M_1 = FC$, zatem

$$u : e = (-M_{r-1}) : (M_1 - M_{r-1}), \text{ więc}$$

$$u = \frac{M_{r-1} e}{M_{r-1} - M_1}.$$

Z rys. dalej wynika:

$$M_1 = CL' - FL' = \frac{Pe e_1}{l} + \left\{ M_r + (M_{r-1} - M_r) \frac{e_1}{l} \right\}.$$

W równaniu tem dajemy znak (+), bo M_r i M_{r-1} są ujemne.

Wstawivszy wartość za M_1 w poprzednie równanie, otrzymamy po skróceniu

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M_{r-1} l}{M_{r-1} - M_r - Pe_1} \\ w &= \frac{M_r l}{M_r - M_{r-1} - Pe} \end{aligned} \right\} \text{ 61)}$$

podobnie będzie

Wstawmy teraz wartości z rów. 60) za M_{r-1} i M_r , to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)cl - (a + b)e^2} \\ w &= \frac{b(2l - 3a - e_1)e_1l}{cl^2 + (2b - a)e_1l - (a + b)e_1^2} \end{aligned} \right\} \text{ 62)}$$

W przęsłach skrajnych jest w pierwszym $a=0$, w ostatniem $b=0$; więc dla przęsła pierwszego $u=0$, $c=l-b$,

$$w = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{cl^2 + 2be_1l - be_1^2} = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{l^3 - b(l^2 - 2e_1l + e_1^2)} = \frac{b(l^2 - e^2)l}{l^3 - be^2}. \quad 63)$$

W ostatniem przęsle jest $b=0$, $c=l-a$, $w=0$,

$$u = \frac{a(2l - e)el}{(l-a)l^2 + 2ael - ae^2} = \frac{a(l^2 - e_1^2)l}{l^3 - ae_1^2} \text{ 64)}$$

Z rysunku 22. widzimy więc, że, jeżeli siła P stoi w F , momenty na długościach u i w są ujemne, zaś na długości UW dodatnie.

Zbadajmy najprzód, jak wielkie może być u i w .

Z rów. 62) wynika, że dla $e=0$ jest $u=0$,

zaś dla $e=l$ jest $u=a$.

Podobnie dla $e_1=0$ jest $w=0$,

dla $e_1=l$ jest $w=b$.

A zatem widzimy, że gdy u może być najwięcej $=a$, a *najw* $w=b$, a zatem na długości IK między punktami stałymi moment jest zawsze dodatni, zaś na długościach AI i KB może być moment ujemnym lub dodatnim. Rozróżniamy z tego powodu trzy części w każdym przęśle, część pierwszą AI , część drugą, średnią IK i trzecią KB . Rozumie się, że w przęśle pierwszym część pierwsza $AI=0$, a w przęśle ostatnim $KB=0$.

A zatem możemy powiedzieć: W części średniej przęsła belki ciągłej każdy ciężar, gdziekolwiek na tem przęśle działający, sprawia moment dodatni, a więc dla największego M musi być to całe przęsło obciążone, dla najmniejszości wcale nieobciążone.

Dla punktu U , leżącego w części pierwszej, jest moment równy zeru, jeżeli P stoi w punkcie F . Jeżeli siła P posunie się na lewo, moment w punkcie U jest dodatnim, jeżeli na prawo, ujemnym. A zatem dla *najw* M w punkcie U w części pierwszej przęsła musi być to przęsło obciążone od A aż do F , dla *najm* M od F do B .

To samo da się zastosować do punktu W w trzeciej części przęsła. Dla *najw* M w punkcie W musi być obciążone przęsło od F do B , dla *najmn* M od A do F . A zatem badany przekrój jest zawsze dla większości obciążony, a dla najmniejszości nieobciążony.

b) Obciążenie reszty przęseł.

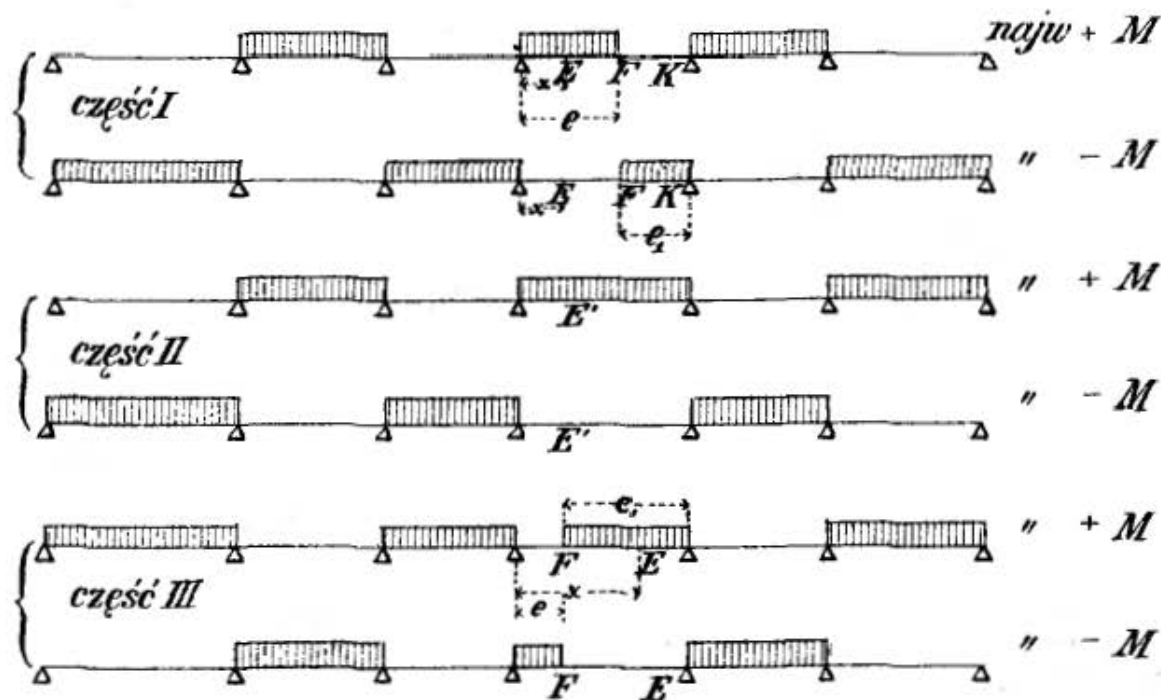
Z rys. 12. widzimy, że obciążenie przęsła CD sprawia w części I i II przęsła sąsiedniego na prawo momenty ujemne, a w części III dodatnie, dla przęsła sąsiedniego lewego zaś w części I dodatnie, w II i III ujemne.

A zatem dla części I dla większości musi być sąsiednie prawe przęsło obciążone, sąsiednie lewe nieobciążone, a reszta przęseł naprzemian (rys. 23.). Dla części średniej muszą być sąsiednie oba przęsła nieobciążone, a inne naprzemian, dla części III zaś musi być sąsiednie prawe przęsło nieobciążone, a lewe obciążone, inne zaś naprzemian.

Ogólnie więc możemy powiedzieć dla wszystkich trzech części: Do części obciążonej danego przęsła przytyka przęsło nieobciążone, do części nieobciążonej obciążone przęsło. Inne przęsła mają być naprzemian obciążone.

W rys. 23. wykreśliłmy schemat najniekorzystniejszych obciążeń ciężarem jednostajnie rozłożonym. Jeżeli mamy belkę obciążać układem ciężarów skupionych, to ponieważ tu otrzymamy linie wpływowe krzywe, nie uzyskujemy tak prostych

rys. 23.



prawideł dla najniekorzystniejszego położenia, jak dla belki jednoprzęsłowej. Linia wpływowa będzie miała jednak w danym przęśle także kształt trójkąta, lecz o bokach krzywych, z wierzchołkiem w punkcie badanym tak, że w przybliżeniu możemy zastosować dla najniekorzystniejszego obciążenia prawidła dla momentów belki w dwu punktach podpartej.

Co do obciążenia reszty przęseł kształt linii wpływowych, które otrzymamy później wykreślić, da nam pewne wskazówki co do ustawienia ciężarów skupionych w rozmaitych przęśłach. Zwrócić jednak musimy uwagę, że obciążenie tego rodzaju, jak na rys. 23., jest w praktyce nieprawdopodobnem, a przy mostach kolejowych wprost niemożliwem. Przy mostach drogowych, gdzie obciążenie takie jest możliwe, przypuszczamy przy obliczeniu rzeczywiście ciężar ruchomy podzielony na kilka części, przy kolejowych możnaby albo przypuszczając jeden pociąg przyjąć na długości, któraby nie powinna być obciążoną, wozy próżne (ważące 6 t), a zresztą parowozy i wozy ładowne*), albo też

*) porów. Podr. t. m. tom I. str. 68.

przyjmujemy tylko dane przeszło obciążone. Przyjmowanie nie-
możliwych obciążeń dla obliczenia belki wydaje nam się nie-
usprawiedliwionem.

§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego.

a) Średnia część przęsła. Dla największych momen-
tów musi być dane przeszło całe obciążone, dla najmniejszości
zaś całe nieobciążone, reszta przęseł naprzemian (rys. 23.). Dla
najw ($-M$) otrzymamy z równ. 24) i 26), gdy $P=R=0$,

$$\text{najw } (-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 65)$$

Jestto równanie linii prostej.

Jeżeli $M' = M''$, to $\text{najw } (-M) = M'$; 66)
jestto równanie linii poziomej.

Podobnie otrzymamy z równań 24) i 26)

$$\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{1}{2} p x (l - x) \quad . \quad . \quad 67)$$

b) Pierwsza część przęsła. Dla *najw* ($-M$) musi być
przędło dane AB obciążone od F do B (rys. 22.) Według
równania 24) otrzymamy więc $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe_1}{2l}$.

Wedle rów. 26) $M = M' + Q'x$, więc

$$\text{najw } (-M) = M' - \frac{M' - M''}{l} x + \frac{pe_1^2 x}{2l} \quad . \quad . \quad 68)$$

Dla *najw* ($+M$) musi być przędło AB obciążone od A do
 F . Tu jest $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe(2l - e)}{2l}$, a $M = M' + Q'x - \frac{1}{2} px^2$,

więc $\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{px}{2l} (2el - e^2 - lx) \quad . \quad 69)$

c) Trzecia część belki. Podobnie otrzymamy dla trze-
ciej części

$$\text{najw } (-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{pe^2(l - x)}{2l} \quad 70)$$

$$\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p(l - x)(lx - e^2)}{2l} \quad 71)$$

We wszystkich częściach przęsła jest

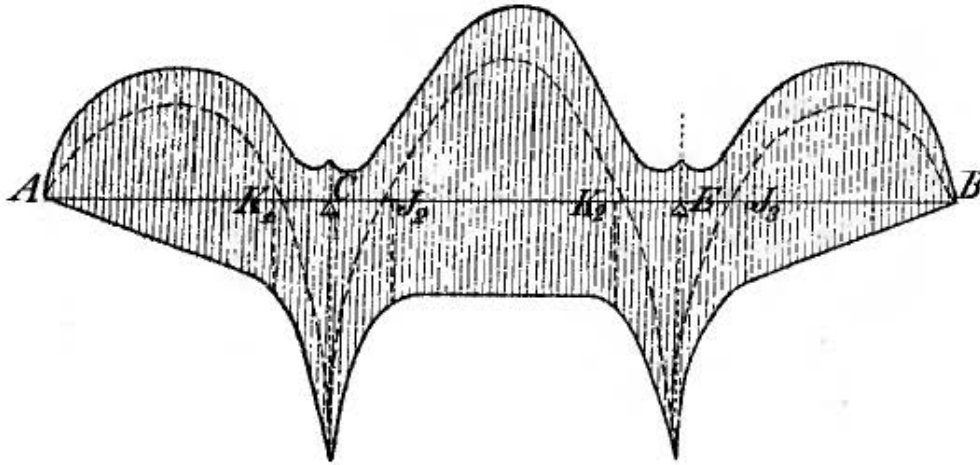
$$\text{najw } (+M) + \text{najw } (-M) = M_z, \quad . \quad . \quad . \quad 72)$$

jeżeli M_z oznacza moment dla obciążenia zupełnego.

Jeżeli wykreślnie przedstawimy linie największych i naj-
mniejszych momentów, to otrzymamy rysunek 24. Dla ujem-

nych największych momentów otrzymujemy w średniej części każdego przęsła linie proste.

rys. 24.



§. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego.

W poprzednich paragrafach przypuszczaliśmy, że ciężar jednostkowy p jest w danym przęśle jednostajny. Dla mostów drogowych jest ciężar ruchomy p dla wszystkich przęseł jednostajny, jeśli liczymy na podstawie obciążenia tłumem ludzi, co zwykle jest wskazaniem dla belek głównych większej rozpiętości. Jeżeli rozpiętości są nierówne, może się wszelako ciężar własny g poszczególnych przęseł różnić. Przy mostach kolejowych jednak, jeżeli rozpiętość przęseł jest nierówna, przyjąć należy dla rozmaitych przęseł różne wartości nie tylko dla ciężaru własnego g , ale też i dla ciężaru zastępczego p . Dla ciężaru zastępczego dla sił poprzecznych należy przyjmować zmienne p , nie według długości przęseł, lecz według długości obciążonej.

Rozporządzenie austr. min. z r. 1887. Mosty kolejowe (§. 3 c). Dla belek ciągłych należy przy obliczeniu pasów przyjmować obciążenia wedle skali a , odpowiadające rozpiętościom obciążonych przęseł i uwzględniać ten rozkład obciążenia, który wywołuje największe momenty.

Dla obliczenia kraty lub ścianki tych belek należy jednak przyjmować w danym przęśle obciążenia według skali b , zaś obciążenia równoczesne innych przęseł według skali a .*)

*) patrz Podr. t. m. tom I. str. 55.

II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa.

§. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej.

Jeżeli rozpiętości pierwszego i drugiego przęsła belki dwuprzęsłowej nazwiemy l_1 i l_2 (rys. 25.), to otrzymamy według

rys. 25. równ. 21.), zważywszy, że $M_A = 0$
i $M_C = 0$,
 $2 M_1 (l_1 + l_2) = \mathfrak{M}_1'' l_1 + \mathfrak{M}_2' l_2$, więc
moment podporowy na średniej

podporze B
$$M_1 = \frac{\mathfrak{M}_1'' l_1 + \mathfrak{M}_2' l_2}{2(l_1 + l_2)} \quad 73)$$

Jeżeli oba przęsła są równe, to $l_1 = l_2 = l$ więc

$$M_1 = \frac{\mathfrak{M}_1'' + \mathfrak{M}_2'}{4} \quad 74)$$

Przypuśćmy, że ciężar jednostkowy w pierwszym przęsle jest p_1 , w drugim p_2 .

Jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 26.), to

$$\mathfrak{M}_1'' = -\frac{1}{2} p_1 l_1^2, \quad \mathfrak{M}_2' = 0.$$

rys. 26.

Wstawiając to w równ. 73),

otrzymamy
$$M_1 = -\frac{p_1 l_1^3}{8(l_1 + l_2)} \quad 75)$$

Zalóżmy $l_1 = 3l$, $l_2 = l$, to

$$M_1 = -\frac{3}{1+3} \frac{p_1 l^3}{8} = -\frac{3^3}{1+3} \frac{p_1 l^3}{8} \quad 76)$$

Jeżeli drugie przęsło jest obciążone (rys. 27.), to otrzymamy
odnośne wzory, jeżeli zamienimy

rys 27 p_1 na p_2 , l_1 na l_2 i l_2 na l_1 ,
zatem
$$M_1 = -\frac{p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{1}{1+3} \frac{p_2 l^3}{8} \quad 77)$$

Jeżeli teraz oba przęsła są obciążone, to otrzymamy

$$M_1 = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{(3^3 p_1 + p_2) l^3}{8(1+3)} \quad 78)$$

Wyrazy $\frac{3^3}{1+3}$ i $\frac{1}{1+3}$ obliczył Leber dla rozmaitych
używanych stosunków 3.

Podajemy tu niektóre wartości:

$\xi=0.5$	0.6	0.7	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
$\frac{\xi^3}{1+\xi}$	0.0833	0.1350	0.2018	0.2411	0.2844	0.3320	0.3837	0.4397
$\frac{1}{1+\xi}$	0.6667	0.6250	0.5882	0.5714	0.5556	0.5405	0.5263	0.5128

§. 18. Ciężar własny.

Dla ciężaru własnego otrzymamy M_1 , moment podporowy w B , z wzoru 78), jeśli tylko p_1 i p_2 zamienimy na g_1 i g_2 , więc

$$M_1 = -\frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{(\xi^3 g_1 + g_2) l^3}{8(1+\xi)} \quad . \quad . \quad . \quad 79)$$

Jeżeli jak zwykle, $l_1 = l_2 = l$, więc $\xi = 1$, a $g_1 = g_2 = g$, to

$$M_1 = -\frac{gl^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 80)$$

Chcąc teraz wyznaczyć siły poprzeczne w pierwszym przęśle, zastosujemy równ. 29), zważywszy, że tu jest $M' = 0$, $M'' = M_1$,

$$Q' = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{(\xi^3 g_1 + g_2) l}{8(1+\xi)\xi} \quad . \quad . \quad 81)$$

a dla $\xi = 1$ i $g_1 = g_2 = g$,

$$Q' = \frac{1}{2} gl - \frac{1}{8} gl = \frac{3}{8} gl = +0.375 gl; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 82)$$

$$\text{zaś} \quad Q'' = -\frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{\xi^3 g_1 + g_2}{8(1+\xi)\xi} l \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 83)$$

a dla przęseł równych

$$Q'' = -\frac{1}{2} gl - \frac{1}{8} gl = -\frac{5}{8} gl = -0.625 gl \quad . \quad . \quad . \quad 84)$$

Według równ. 30) mamy dalej ogólnie $Q = Q' - gx$, a dla przęseł równych $Q = \frac{3}{8} gl - gx = \frac{1}{8} g(3l - 8x)$ 85)

Jestto równanie linii prostej.

Moment otrzymamy według 32)

$$M = \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) + \frac{M_1 x}{l_1} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86)$$

a dla przęseł równych będzie

$$M = \frac{1}{2} gx (l - x) - \frac{1}{8} gl^2 \frac{x}{l} = \frac{1}{8} gx (3l - 4x) \quad . \quad . \quad 87)$$

Jestto równanie paraboli.

Niech będzie dla najw M $x = x_1$, to znajdziemy x_1 , różniczkując równanie 86), więc $\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} g_1 (l_1 - 2x_1) + \frac{M_1}{l_1} = 0$, zatem $x_1 = \frac{1}{2} l_1 + \frac{M_1}{g_1 l_1}$. Dla przęseł równych $M_1 = -\frac{1}{8} gl^2$, więc $x_1 = \frac{3}{8} l = 0.375 l$.

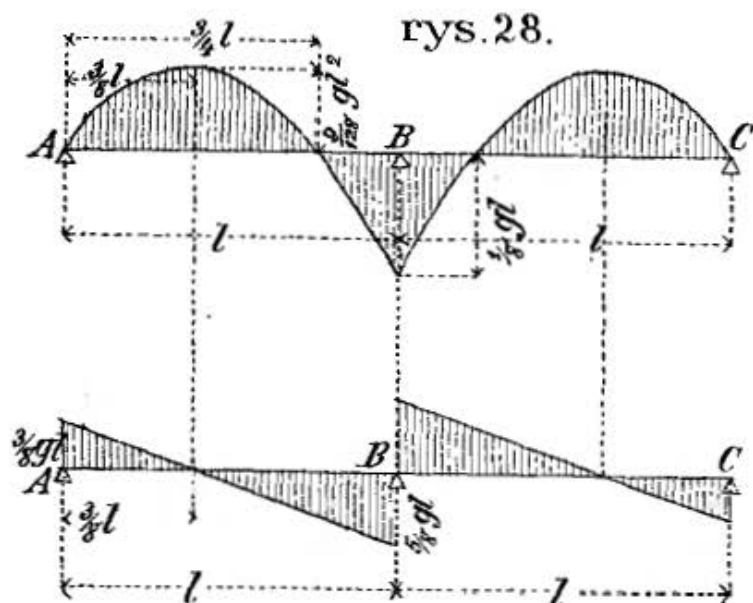
Wstawmy tę wartość w równanie 87), to będziemy mieli

$$\begin{aligned} \text{najw } M &= \frac{1}{8} g \cdot \frac{3}{8} l (3l + \frac{3}{2} l) = \frac{9}{128} g l^2 = \\ &= 0.07036 g l^2 . \quad 88) \end{aligned}$$

Z równ. 87) widzimy, że $M=0$ dla $3l=4x'$, więc dla $x'=\frac{3}{4} l=0.75 l$.

Wyniki te zestawiliśmy na rys. 28), z którego jeszcze widzimy, że oddziaływanie w B jest

$$\begin{aligned} O_1 &= \frac{5}{8} g l + \frac{5}{8} g l = \\ &= \frac{5}{4} g l . \quad 89) \end{aligned}$$

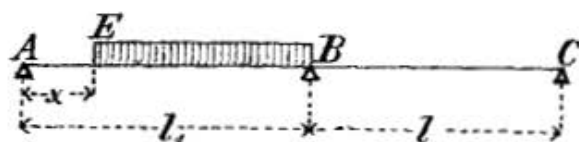


Ogólnie jest $O_1 = \frac{1}{8 l_1 l_2} [g_1 l_1^2 (4 l_2 + l_1) + g_2 l_2^2 (4 l_1 + l_2)]$. 90)

§. 19. Ciężar ruchomy.

Teraz obliczymy siły zewnętrzne, wywołane ciężarem ruchomym.

rys. 29.



a) Siły poprzeczne.
Dla *najw* (+ Q) w p. E (rys. 29.) musi być obciążona długość EB , a drugie przęsło nieobciążone.

Otrzymamy więc z rów. 19)

$$Q_1'' = -\frac{p_1 (l_1^2 - x^2)^2}{4 l_1^2}, \quad Q_2' = 0.$$

Moment w B będzie według równ. 73)

$$M_1 = \frac{Q_1 l_1}{2 (l_1 + l_2)} = -\frac{p_1 (l_1^2 - x^2)^2}{8 l_1 (l_1 + l_2)} . \quad 91)$$

Dalej otrzymamy wedle równania 56), wstawiwszy $M'=0$, $M''=M_1$,

$$\text{najw } (+Q) = -\frac{p_1 (l_1^2 - x^2)^2}{8 l_1^2 (l_1 + l_2)} + \frac{1}{2} \frac{p_1 (l_1 - x)^2}{l_1}$$

czyli $\text{najw } (+Q) = \frac{p_1 (l_1 - x)^2}{8 l_1^2 (l_1 + l_2)} \{3 l_1^2 + 4 l_1 l_2 - 2 l_1 x - x^2\}$. 92)

$$\begin{aligned} najw (-O_0) &= \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1}, \\ najw (-O_0) &= \frac{4g_1(l_1 + l_2)l_1^2 - (g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3 + p_2 l_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1}. \end{aligned} \quad 99)$$

A więc $najw (-O_0)$ jest ujemnem, jeżeli

$$g_1 l_1^3 + (g_2 + p_2) l_2^3 > 4g_1(l_1 + l_2)l_1^2,$$

czyli jeżeli
$$p_2 > \left(3 \frac{l_1^3}{l_2^3} + 4 \frac{l_2}{l_1}\right) g_1 - g_2 \quad . \quad . \quad . \quad 100)$$

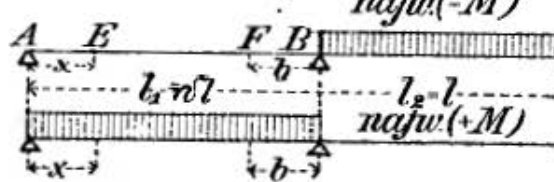
Jeżeli rozpiętości są równe, oddziaływanie O_0 jest ujemne, jeśli $p > 6g$.

Możliwem zatem jest oddziaływanie ujemne tylko, jeśli l_2 , a zatem i g_2 jest znacznie większe niż l_1 , względnie g_1 . Przy równych długościach pręseł mogłoby to nastąpić tylko przy bardzo małych rozpiętościach około $l=10^m$. O_1 nie może być wcale ujemnem.

c) Momenty. Przęsło pierwsze, część druga.

W przęśle skrajnem, jak wiemy, nie ma części pierwszej, tu punkt stały wpada na punkt A (rys. 30). Według równania

rys. 30. $najw(-M)$ 37) mamy
$$v_1 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1}, \quad \mu_1 = 0,$$



wiec według 45)

$$b_1 = \frac{l_1}{1 + v_1} = \frac{l_1^2}{3l_1 + 2l_2} \quad . \quad . \quad . \quad 101)$$

a dla $l_1 = l_2 = l$

$$b = \frac{1}{5} l = 0.2 l \quad . \quad . \quad . \quad 102)$$

Dla $najw (-M)$ musi być pierwsze przęsło nieobciążone, a drugie obciążone, więc według 77) $M_1 = -\frac{p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}$.

Wstawivszy w rów. 65) $M' = 0$, $M'' = M_1$, otrzymamy

$$najw (-M) = M_1 \frac{x}{l_1} = -\frac{p_2 l_2^3 x}{8 l_1 (l_1 + l_2)} \quad . \quad . \quad . \quad 103)$$

$Najw (+M)$ jest dla obciążenia uzupełniającego, więc nzwzględniając rów. 86)

$$\begin{aligned} najw (+M) &= \frac{1}{2} p_1 x (l_1 - x) - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} \frac{x}{l_1} + \frac{p_2 l_2^3 x}{8 l_1 (l_1 + l_2)}, \\ najw (+M) &= \frac{p_1 x}{8(l_1 + l_2)} [3 l_1 + 4 l_2] l_1 - 4(l_1 + l_2)x] \quad . \quad 104) \end{aligned}$$

Wstawivszy tę wartość za e w 110), otrzymamy

$$\text{najw } (+M) = \frac{1}{2} p \left(4lx - x^2 - 5l^2 + 2 \frac{l^3}{x} \right) \quad . \quad . \quad 112)$$

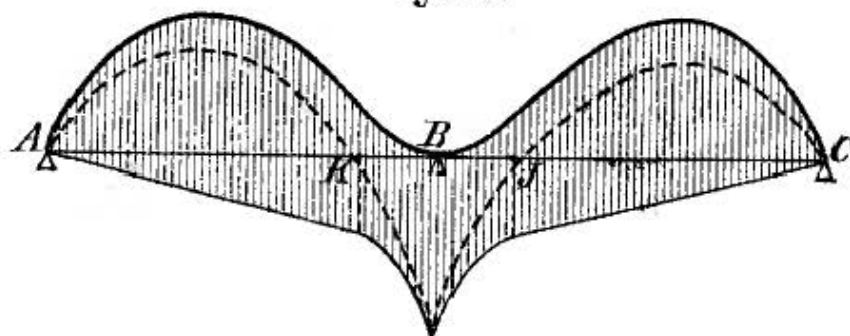
M_z dla obciążenia zupełnego jest według równ. 87)

$$M_z = -\frac{1}{8} px (4x - 3l), \text{ więc}$$

$$\text{najw } (-M) = -\frac{1}{8} px (4x - 3l) - \text{najw } (+M), \text{ zatem}$$

$$\text{najw } (-M) = -\frac{1}{8} pl^2 \left(13 \frac{x}{l} - 20 + 8 \frac{l^2}{x^2} \right) \quad . \quad . \quad 113)$$

rys 32.



Na podstawie tych równań wykreśliśmy linie najw. momentów dla belki dwuprzęsłowej o równych przęsłach (rys. 32.) Dla takiejże belki obliczył Winkler tablice

według poprzednich wzorów, które tu podajemy.

Ciśnienie na podpory.

$$\text{najw } (+O_0) = 0.3750 gl + 0.4375 pl$$

$$\text{najw } (-O_0) = 0.3750 gl - 0.0625 pl$$

$$\text{najw } (+O_1) = 1.25 (g + p) l$$

$$\text{najmn } (+O_1) = 1.25 gl.$$

Sil y p o p r z e c z n e.

x	Sil y p o p r z e c z n e		
	ciężar własny	ciężar ruchomy	
	q	$\text{najw } (+q)$	$\text{najw } (-q)$
0	+ 0.375	+	—
0.1	+ 0.275	0.4375	0.0625
0.2	+ 0.175	0.3437	0.0687
0.3	+ 0.075	0.2624	0.0874
0.375	0	0.1932	0.1182
0.4	— 0.025	0.1491	0.1491
0.5	— 0.125	0.1359	0.1609
0.6	— 0.225	0.0898	0.2148
0.7	— 0.325	0.0544	0.2794
0.8	— 0.425	0.0287	0.3537
0.9	— 0.525	0.0119	0.4369
1.0	— 0.625	0.0027	0.5277
		0	0.6250
l	gl	pl	pl

M o m e n t y.

<i>x</i>	<i>e</i>	m o m e n t		
		ciężar własny	ciężar ruchomy	
		<i>M</i>	<i>najw</i> (+ <i>M</i>)	<i>najw</i> (— <i>M</i>)
0	—	0	+	—
0.1	—	+ 0.0325	0.03875	0.00625
0.2	—	0.0550	0.06750	0.01250
0.3	—	0.0675	0.08625	0.01875
0.4	—	0.0700	0.09500	0.02500
0.5	—	0.0625	0.09375	0.03125
0.6	—	0.0450	0.08250	0.03750
0.7	—	0.0175	0.06125	0.04375
0.75	—	0	0.04688	0.04688
0.8	0	— 0.0200	0.03000	0.05000
0.85	0.5423	— 0.0425	0.01523	0.05773
0.9	0.7454	— 0.0675	0.00611	0.07361
0.95	0.8885	— 0.0950	0.00138	0.09638
1.00	1.00	— 0.1250	0	0.12500
<i>l</i>	<i>l</i>	<i>gl</i> ²	<i>pl</i> ²	<i>pl</i> ²

najw (+ *M_p*) = + 0.07031 *gl*², dla *x* = 0.3750 *l*.

" (+ *M_p*) = + 0.09566 *pl*², " *x* = 0.4374 *l*.

§. 20. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej.

Tu przypuścimy, że przęsła skrajne są równe i że ich rozpiętość *l*₁ = *ℑl*, zaś rozpiętość przęsła średniego *l*.

Otrzymamy wtedy według 21)

$$2 M_1 (l_1 + l) + M_2 l = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l$$

$$M_1 l + 2 M_2 (l + l_1) = \mathfrak{N}_2'' l + \mathfrak{N}_3' l_1,$$

albo

$$2 M_1 (1 + \mathfrak{S}) + M_2 = \mathfrak{N}_1'' \mathfrak{S} + \mathfrak{N}_2'$$

$$M_1 + 2 M_2 (1 + \mathfrak{S}) = \mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' \mathfrak{S},$$

a stąd otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{\mathfrak{S}(1 + \mathfrak{S})(\mathfrak{N}_1'' \mathfrak{S} + \mathfrak{N}_2') - (\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' \mathfrak{S})}{4(1 + \mathfrak{S})^2 - 1} \\ M_2 &= \frac{\mathfrak{S}(1 + \mathfrak{S})(\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' \mathfrak{S}) - (\mathfrak{N}_1'' \mathfrak{S} + \mathfrak{N}_2')}{4(1 + \mathfrak{S})^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad 114)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe pierwsze przęsło ciężarem jednostkowym *p*₁, to

$$\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4} p_1 l_1^2 \quad \mathfrak{N}_3' = \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0, \text{ więc}$$

$$M_1 = - \frac{4 \mathfrak{S}(1 + \mathfrak{S})}{4(1 + \mathfrak{S})^2 - 1} \frac{p_1 l_1^2}{8} = - \frac{4 \mathfrak{S}^3(1 + \mathfrak{S})}{4(1 + \mathfrak{S})^2 - 1} \frac{p_1 l^2}{8} \quad 115 a)$$

$$M_2 = \frac{2\mathfrak{S}}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} \frac{p_1 l_1^2}{8} = \frac{2\mathfrak{S}^3}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} \frac{p_1 l^2}{8} \quad . \quad 115b)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe drugie przęsło ciężarem jednostkowym p , to

$$\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_3' = 0, \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2, \text{ więc}$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{2(1+\mathfrak{S})\frac{1}{4}pl^2 - \frac{1}{4}pl^2}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} = \frac{2(1+2\mathfrak{S})}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} \frac{pl^2}{8}, \text{ albo}$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{2}{3+2\mathfrak{S}} \frac{pl^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 116)$$

Jeśli wszystkie przęsła są całkowicie obciążone, otrzymamy

$$M_1 = M_2 = -\frac{[4\mathfrak{S}^3(1+\mathfrak{S}) - 2\mathfrak{S}^3]p_1 + 2(1+2\mathfrak{S})p}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} \frac{l^2}{8},$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{(1+2\mathfrak{S})2\mathfrak{S}^3p_1 + 2(1+2\mathfrak{S})p}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} \frac{l^2}{8} = -\frac{2(\mathfrak{S}^3p_1 + p)}{3+2\mathfrak{S}} \frac{l^2}{8} \quad 117)$$

$$\text{Jeżeli } p_1 = p, \text{ to } M_1 = M_2 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}^3)}{3+2\mathfrak{S}} \frac{pl^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 118)$$

Leber obliczył dla rozmaitych wartości $\mathfrak{S}$ współczynniki rów. 115), 116), 118). Podajemy tu z nich niektóre:

dla $\mathfrak{S}=0.5,$	0.6,	0.7,	0.8,	0.85,	0.9,	0.95,	1.00	
$\frac{4\mathfrak{S}(1+\mathfrak{S})}{4(1+\mathfrak{S})^2-1}$	=0.375	0.416	0.451	0.482	0.496	0.509	0.521	0.533
$\frac{4\mathfrak{S}^3(1+\mathfrak{S})}{4(1+\mathfrak{S})^2-1}$	=0.094	0.150	0.221	0.308	0.358	0.412	0.471	0.533
$\frac{2}{3+2\mathfrak{S}}$	=0.500	0.476	0.455	0.435	0.426	0.417	0.408	0.400
$\frac{2(1+\mathfrak{S}^3)}{3+2\mathfrak{S}}$	=0.563	0.579	0.610	0.657	0.687	0.720	0.758	0.800
$\frac{2\mathfrak{S}}{4(1+\mathfrak{S})^2-1}$	=0.125	0.130	0.133	0.134	0.134	0.134	0.134	0.133
$\frac{2\mathfrak{S}^3}{4(1+\mathfrak{S})^2-1}$	=0.031	0.047	0.065	0.086	0.097	0.108	0.121	0.133

§. 21. Ciężar własny.

a) Momenty podporowe otrzymamy według 117)

$$M_1 = M_2 = -\frac{2(\mathfrak{S}^3g_1 + g)}{3+2\mathfrak{S}} \frac{l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 119)$$

a dla $g=g_1$ $M_1 = M_2 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}^3)}{3+2\mathfrak{S}} \frac{gl^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 120)$

b) Siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle jest $M'=0$, $M''=M_1$, więc według 29)

$$Q_1' = \frac{1}{2} g l_1 + \frac{M_1}{l_1} = \frac{1}{2} g l_1 - \frac{2(\vartheta^3 g_1 + g)}{3 + 2\vartheta} \frac{l_1}{8\vartheta^2},$$

$$Q' = \{3 g_1 \vartheta^2 (\vartheta + 2) - g\} \frac{l_1}{4 \vartheta^2 (3 + 2\vartheta)}, \quad . \quad . \quad 121)$$

$$a \quad Q_1'' = Q_1' - g_1 l_1 = - \{g_1 \vartheta^2 (5\vartheta + 6) + g\} \frac{l_1}{4 \vartheta^2 (3 + 2\vartheta)}, \quad 122)$$

$$a \text{ dla dowolnego punktu } Q = Q' - g_1 x, \quad . \quad . \quad . \quad 123)$$

W drugim prześle otrzymamy $M' = M'' = M_1$, więc

$$Q_2' = \frac{1}{2} g l, \quad Q_2'' = - \frac{1}{2} g l, \quad . \quad . \quad . \quad 124)$$

$$a \text{ dla dowolnego punktu } Q = Q_2' - g x = \frac{1}{2} g (1 - 2x) \quad . \quad . \quad 125)$$

jak dla belki jednoprzęsłowej.

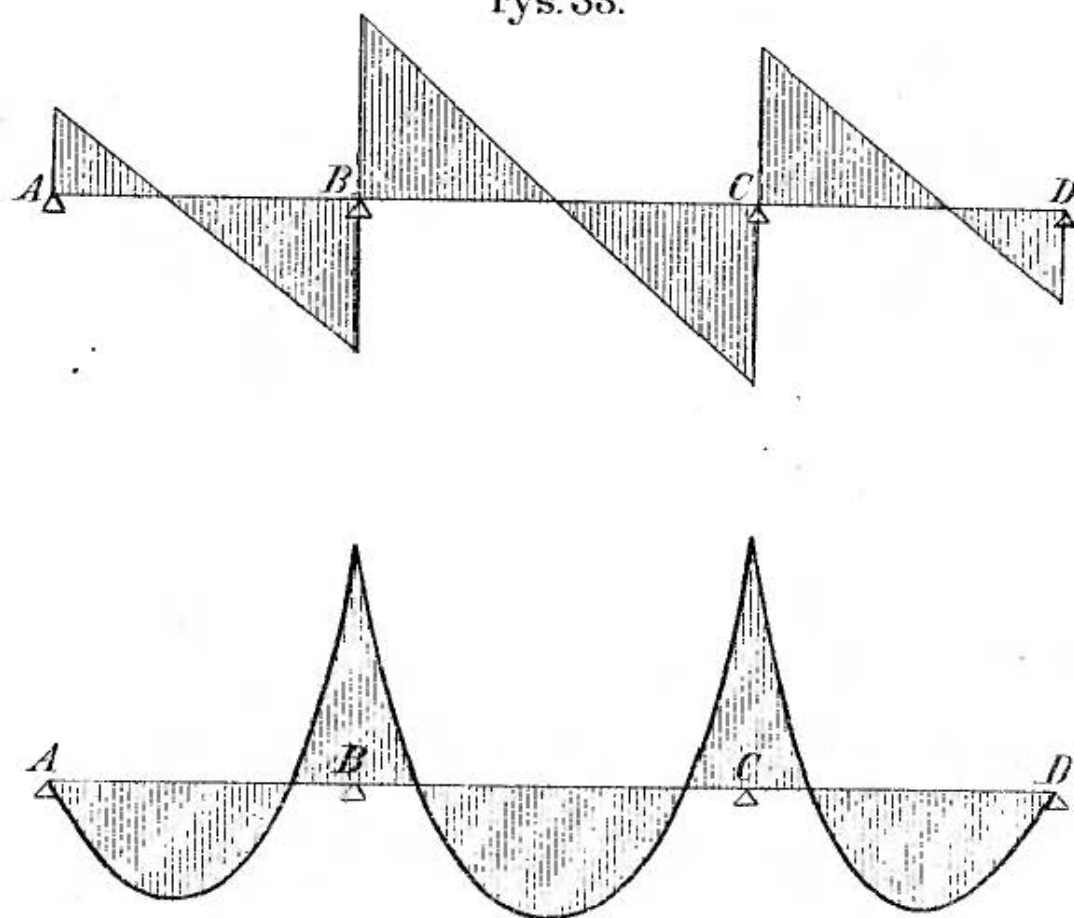
c) Oddziaływanie O_0 na podporze skrajnej równe jest Q_1' , na drugiej według 27)

$$O_1 = Q_2' - Q_1'' = \frac{1}{2} g l + \frac{g_1 \vartheta^2 (5\vartheta + 6) + g}{4 \vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} l,$$

$$Q = \frac{g (6\vartheta + 4\vartheta^2 + 1) + g_1 (5\vartheta^3 + 6\vartheta^2)}{4\vartheta (3 + 2\vartheta)} l, \quad . \quad . \quad . \quad 126)$$

d) Moment otrzymamy w dowolnym punkcie na podstawie rów. 32)

rys. 33.



W pierwszym przęśle jest $M'=0$, $M''=M$, więc

$$M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) \quad . \quad . \quad . \quad 127)$$

W drugim przęśle jest $M'=M''=M$, więc

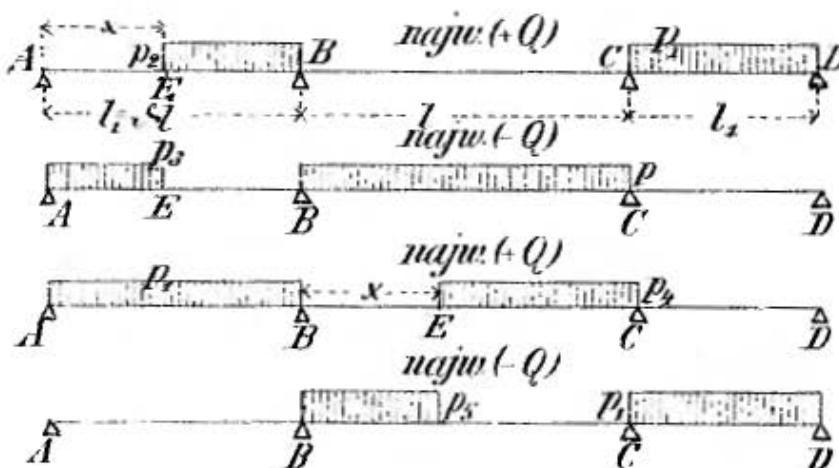
$$M = M_1 + \frac{1}{2} g x (l - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 128)$$

Wykreślnie przedstawiliśmy siły poprzeczne i momenty na rys. 33,

$$\text{dla } \vartheta = 0.77, \quad g_1 = 0.891 g.$$

§. 22. Największe siły poprzeczne.

rys. 34.



W pierwszym przęśle otrzymamy *najw* (+Q), obciążając pierwsze przęsło od E do B i całe trzecie przęsło (rys. 34).

Wtedy otrzymamy

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p_2(l_1^2 - x^2)^2}{4l_1^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0,$$

$$\mathfrak{N}_3' = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2, \text{ więc według 114)}$$

$$M_1 = -\frac{2(1+\vartheta)p_2(l_1^2 - x^2)^2\vartheta - p_1 l_1^4 \vartheta}{4l_1^2[4(1+\vartheta)^2 - 1]}, \text{ a nazwawszy } \frac{x}{l_1} = m,$$

$$M_1 = -\frac{2(1+\vartheta)p_2(1-m^2)^2 - p_1 l_1^2 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{l^2}{4},$$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} p_2(1-m^2)^2 + \frac{2p_1\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{l^2}{8} \quad 129)$$

Jeżeli teraz w rów. 56) wstawimy $M'=0$, $M''=M_1$, to otrzymamy

$$\text{najw } (+Q) = \frac{-2(1+\vartheta)p_2(1-m^2)^2 + p_1 l_1 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{l_1 \vartheta}{4} + \frac{1}{2} p_2(1-m)^2 l_1 \quad 130)$$

Dla *najw* (—Q) musi być przęsło pierwsze obciążone od A do E i drugie całe przęsło. A więc

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p_3 x^2}{4l_1^2} (2l_1^2 - x^2), \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4} p l^2, \quad \mathfrak{N}_3' = 0,$$

więc według 114)

$$M_1 = - \frac{2(1+\vartheta) \left[\frac{p_3 x^2 (2l_1^2 - x^2) \vartheta}{4l_1^2} \right] - \frac{1}{4} p l^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1}, \text{ a dla } \frac{x}{l_1} = m,$$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+\vartheta) \vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} p_3 m^2 (2 - m^2) + \frac{2}{3+2\vartheta} p \right] \frac{l^2}{8}. \quad 131)$$

Jeżeli teraz w równ. 57) wstawimy $M' = 0$, $M'' = M_1$, otrzymamy

$$\text{najw } (-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} \frac{p_3 x}{l_1} \dots \dots \dots 132)$$

Dla najw. sił poprzecznych w punkcie E drugiego przęsła musimy obciążyć całe pierwsze przęsło, a drugie od E do C . A więc będzie:

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2, \quad \mathfrak{N}_2'' = -p_4 \frac{(l^2 - x^2)^2}{4l^2}$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{p_4 (l-x)^2}{4l^2} [2l^2 - (l-x)^2] = -\frac{p_4 (l-x)^2}{4l^2} (l^2 + 2lx - x^2).$$

Według 114) jest

$$M_1 - M_2 = \frac{\mathfrak{N}_1'' \vartheta + \mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_1'' - \mathfrak{N}_2' \vartheta}{1+2\vartheta},$$

a wstawiając otrzymane wartości, otrzymamy po skróceniu

$$M_1 - M_2 = \frac{2p_4 (l-x)^2 x^2 - p_1 l^4 \vartheta^3}{4l^2 (1+2\vartheta)},$$

a więc według 56) i zważywszy, że $M' = M_1$, $M'' = M_2$,

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p_1 l^4 \vartheta^3 - 2p_4 (l-x)^2 x^2}{4l^3 (1+2\vartheta)} + \frac{1}{2} p_4 \frac{(l-x)^2}{l}, \text{ albo}$$

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p_1 l^4 \vartheta^3 + 2p_4 (l-x)^2 (l^2 + 2\vartheta l^2 - x^2)}{4l^3 (1+2\vartheta)},$$

a wstawiając $\frac{x}{l} = n$, otrzymamy

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p_1 \vartheta^3 + 2p_4 (1-n)^2 (1+2\vartheta - n^2)}{4(1+2\vartheta)} \cdot l \quad 133)$$

$\text{Najw } (-Q)$ otrzymamy z równania 133), zmieniając znak i x na $(l-x)$, lub n na $(1-n)$, więc

$$\text{najw } (-Q) = - \frac{p_1 l^4 \vartheta^3 + 2p_4 x^2 (2\vartheta l^2 + 2lx - x^2)}{4l^3 (1+2\vartheta)}, \text{ lub}$$

$$\text{najw } (-Q) = - \frac{p_1 \vartheta^3 + 2p_4 n^2 (2\vartheta + 2n - n^2)}{4(1+2\vartheta)} \cdot l \quad 134)$$

§. 23. Największe oddziaływania.

Największe oddziaływanie ujemne w A otrzymamy, wstawiając w rów. 131) i 132) $x=0$ i $m=0$. Otrzymamy więc z rów. 131) $M_1 = \frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}$,

$$\text{zatem} \quad \text{najw}(-0_0) = -\frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} \quad \dots \quad 135)$$

$\text{Najw}(+0_0)$ otrzymamy, odciągając w rów. 135) od rów. 121) dla obciążenia zupełnego, zmieniając w niem g_1 i g na p_1 i p . Więc

$$\text{najw}(+0_0) = \frac{3p_1\vartheta^2(\vartheta+2) - p}{4\vartheta(3+2\vartheta)} l_1 + \frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} = \frac{3\vartheta(\vartheta+2)}{4(3+2\vartheta)} p_1 l \quad 136)$$

$$\text{Najw}(-0_1) \text{ otrzymamy, wstawiając w rów. 134) } x=0 \text{ i } n=0, \text{ a mianowicie } \text{najw}(-0_1) = -\frac{p_1 l \vartheta^3}{4(1+2\vartheta)} \quad \dots \quad 137)$$

$\text{Najw}(+0_1)$ otrzymamy, odciągając w rów. 137) od rów. 126) dla obciążenia zupełnego i zmieniając g_1 i g na p_1 i p ,

$$\text{najw}(+0_1) = \frac{p(6\vartheta+4\vartheta^2+1) + p_1(5\vartheta^3+6\vartheta^2)}{4\vartheta(3+2\vartheta)} l_1 + \frac{p_1 l \vartheta^3}{4(1+2\vartheta)},$$

$$\text{najw}(+0_1) = \frac{p(6\vartheta+4\vartheta^2+1)(1+2\vartheta) + 2p_1\vartheta^2(6\vartheta^2+10\vartheta+3)}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{l}{4} \quad 138)$$

§. 24. Największe momenty.

I. przęsło, część średnia. Największy ujemny moment w części średniej otrzymamy przy obciążeniu średniego przęsła, największy dodatni przy obciążeniu obu skrajnych przęseł. Dla $\text{najw}(-M)$ otrzymamy więc $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_3 = 0$, $\mathfrak{M}_2 = -\frac{1}{4}pl^2$, więc według 114)

$$M_1 = -\frac{(1+2\vartheta)pl^2}{4(4(1+\vartheta)^2-1)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}.$$

A więc według 65), wstawiając $M'=0$ i $M''=M_1$, otrzymamy

$$\text{najw}(-M) = -\frac{pl_1^2}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} = -\frac{pl_1 x}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} \quad 139)$$

$\text{Najw}(+M)$ otrzymamy, jeśli pierwsze i trzecie przęsło są obciążone, więc $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_3 = -\frac{1}{4}p_1 l_1^2$, $\mathfrak{M}_2 = 0$.

A zatem według 114)

$$M_1 = - \frac{(1+2\vartheta)\vartheta p_1 l_1^2}{4(4(1+\vartheta)^2-1)} = - \frac{\vartheta p_1 l_1^2}{4(3+2\vartheta)} = - \frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8},$$

a więc według 67)

$$\text{najw } (+M) = - \frac{\vartheta p_1 l_1 x}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2} p_1 x (l_1 - x) =$$

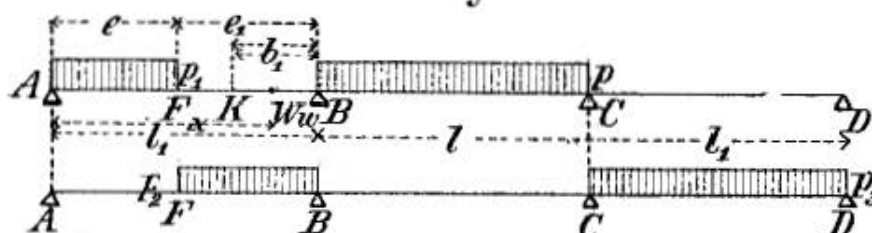
$$\text{najw } (+M) = - \frac{3(2+\vartheta)l_1 - 2(3+2\vartheta)x}{4(3+2\vartheta)} p_1 x =$$

$$= \frac{3(2+\vartheta) - 2(3+2\vartheta)m}{4(3+2\vartheta)} p_1 l_1^2 m, \quad . \quad . \quad . \quad 140)$$

jeśli $m = \frac{x}{l_1}$.

Trzecia część. *Najw* ($-M$) otrzymamy w punkcie W ,

rys. 35.



gdy pierwsze
przęsło obciążone
jest od A do F i
całe drugie przę-
sło (rys. 35.).

Według 63)

jest $w = \frac{b_1(2l_1 - e_1)e_1 l_1}{l_1^3 - b_1(l_1^2 - 2e_1 l_1 + e_1^2)}$, a stąd

$$e_1 = l_1 \left(1 - \sqrt{\frac{(b_1 - w)l_1}{b_1(l_1 - w)}} \right), \quad . \quad . \quad . \quad 141)$$

czyli

$$e = l_1 \sqrt{\frac{l_1 b_1 - w}{b_1 l_1 - w}}, \quad . \quad . \quad . \quad 142)$$

Odstęp b_2 punktu stałego K , od C w drugim przęśle jest według 45) $b_2 = \frac{l}{1+\nu_2}$, zaś według 37) $\nu_2 = \frac{2(l_1 + l)}{l} = 2(1+\vartheta)$, więc

$$b_2 = \frac{l}{3+2\vartheta} = a_2, \quad . \quad . \quad . \quad 143)$$

$$\text{Dalej } \nu_1 = \frac{2(l+l_1) - \frac{l}{\nu_2}}{l_1} = \frac{2(1+\vartheta)}{\vartheta} - \frac{1}{2\vartheta(1+\vartheta)},$$

$$\nu_1 = \frac{(3+2\vartheta)(1+2\vartheta)}{2\vartheta(1+\vartheta)}, \text{ więc, ponieważ } b_1 = \frac{l_1}{1+\nu_1},$$

$$b_1 = \frac{2\vartheta(1+\vartheta)}{3+10\vartheta+6\vartheta^2} l_1, \quad . \quad . \quad . \quad 144)$$

Dla obciążenia pierwszego przęsła od A do F i całego drugiego przęsła jest

$$\mathfrak{M}_1'' = - \frac{p_1 e^2}{4l^2} (2l^2 - e^2), \quad \mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = - \frac{1}{4} p l^2, \quad \mathfrak{M}_3' = 0,$$

więc według rów. 131), wstawivszy e zamiast x , gdy $\frac{e}{l_1} = m_1$,

$$M_1 = \frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3 p_1 m_1^2 (2 - m_1^2) + 2(1+2\vartheta)p l^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{l^2}{8}$$

$$= \left[\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} p_1 m_1^2 (2 - m_1^2) - \frac{2}{3+2\vartheta} p \right] \frac{l^2}{8}.$$

Teraz otrzymamy wedle 70)

$$\text{najw } (-M) = \frac{M_1 x}{l_1} + \frac{p_1 e^2 (l_1 - x)}{2 l_1} \quad . \quad . \quad 145)$$

$\text{Najw } (+M)$ obliczymy, obciążając długość FB i trzecie przęsło. Otrzymamy wtedy analogicznie do 129)

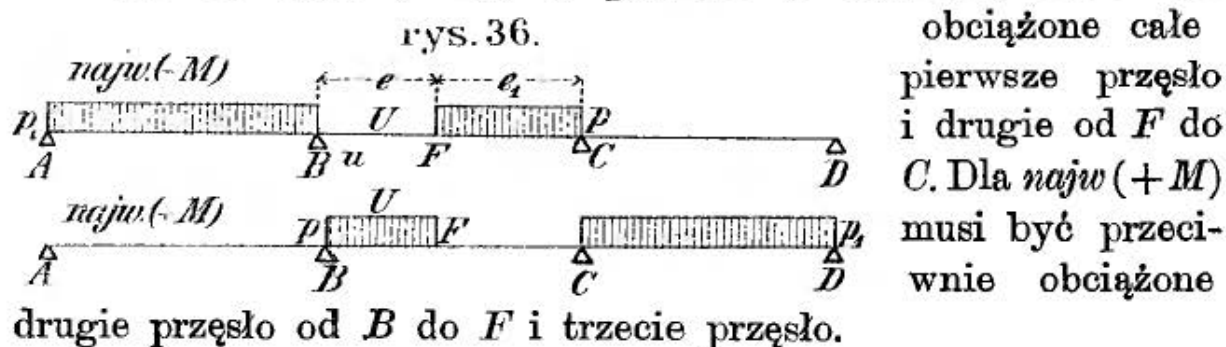
$$M_1 = \frac{-2(1+\vartheta)p_2 (1 - m_1^2)^2 + p_3 \frac{l_1^2 \vartheta}{4}}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \quad , \quad . \quad . \quad 146)$$

a według równ. 71)

$$\text{najw } (+M) = M_1 \frac{x}{l} + \frac{p_2 (1 - m)(m - m_1^2)}{2} l_1^2 \quad . \quad 147)$$

II. przęsło, część pierwsza.

Tu dla $\text{najw } (-M)$ w punkcie U (rys. 36.) musi być



Według 62) $u = \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)el - (a + b)e^2},$

a ponieważ $a_2 = b_2$, więc $c = l - 2b_2$,

$$u = \frac{b_2 (2l - 3b_2 - e)cl}{l^3 - 2b_2 l^2 + b_2 el - 2b_2 e^2}, \text{ a ze względu na 143)}$$

$$u = \frac{(3+4\vartheta)l - (3+2\vartheta)e}{(1+2\vartheta)l^2 + el - 2e^2} \frac{el}{3+2\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad 148)$$

albo rozwiązawszy to równanie ze względu na e

$$e^2 - el \frac{l(3+4\vartheta) - u(3+2\vartheta)}{(3+2\vartheta)(l - 2u)} + \frac{(1+2\vartheta)ul^2}{l - 2u} = 0 \quad . \quad 148a)$$

Przy obciążeniu, dla którego otrzymamy $\text{najw } (-M)$ jest

$$\mathfrak{N}_1 = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2, \quad \mathfrak{N}_2'' = -p \frac{(l^2 - e^2)^2}{4 l^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{p(l-e)^2}{4l^2} (l^2 + 2le - e^2),$$

a więc według 114)

$$M_1 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}) \left[\frac{1}{4} p_1 l_1^2 \mathfrak{S} + \frac{p(l-e)^2}{4l^2} (l^2 - 2le - e^2) \right] - p \frac{(l^2 - e^2)^2}{4l^2}}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1},$$

$$M_1 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}) [p_1 l_1^2 l^2 \mathfrak{S} + p(l-e)^2 (l^2 + 2el - e^2)] - p(l^2 - e^2)^2}{4l^2 [4(1+\mathfrak{S})^2 - 1]},$$

a wstawiając $\frac{e}{l} = n_1$,

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\mathfrak{S}) \mathfrak{S}^3 p_1}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} - \frac{4(1+\mathfrak{S}) (1-n_1)^2 (1+2n_1-n_1^2) p}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} + \frac{2p(1-n_1^2)^2}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} \right] \frac{l^2}{8},$$

$$a \quad M_1 - M_2 = \frac{2p(l-e)^2 e^2 - p_1 l^4 \mathfrak{S}^3}{4l^2 (1+2\mathfrak{S})} =$$

$$= \left(\frac{4p}{1+2\mathfrak{S}^2} (1-n_1)^2 n_1^2 - \frac{2p_1 \mathfrak{S}^3}{1+2\mathfrak{S}} \right) \frac{l^2}{8}. \quad \left. \vphantom{\frac{2p(l-e)^2 e^2 - p_1 l^4 \mathfrak{S}^3}{4l^2 (1+2\mathfrak{S})}} \right\} 149)$$

Teraz otrzymamy według rów. 68)

$$\text{najw} (-M) = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{1} x + \frac{pe_1^2 x}{2l} \dots \dots 150)$$

Najw (+M) otrzymamy, obciążywszy drugie przęsło od B do F, i całe trzecie przęsło, a zatem $\mathfrak{N}_1 = 0$, $\mathfrak{N}_2' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l - e)^2$, $\mathfrak{N}_2'' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2)$, $\mathfrak{N}_3 = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2$,

$$M_1 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}) \frac{pe^2}{4l^2} (2l-e)^2 - \frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2) - \frac{1}{4} p_1 l_1^2 \mathfrak{S}}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1},$$

$$M_1 = -\left[\frac{2pn_1^2}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} (2(1+\mathfrak{S})(2-n_1)^2 - (2-n_1^2)) + \frac{2\mathfrak{S}^3 p_1}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} \right] \frac{l^2}{8} \dots \dots 151)$$

$$M_1 - M_2 = \frac{-\frac{pe^2}{4l^2} (2l - e^2) + \frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2) + \frac{1}{4} p_1 l_1^2 \mathfrak{S}}{1+2\mathfrak{S}},$$

$$M_1 - M_2 = \left(-\frac{4}{1+2\mathfrak{S}} p n_1^2 (1-n_1)^2 + \frac{2\mathfrak{S}^3}{1+2\mathfrak{S}} p_1 \right) \frac{l^2}{8} \quad 152)$$

$$\text{najw } (+M) = M_1 - (M_1 - M_2)n + \frac{pn}{2} (2n_1 - n_1^2 - n)l^2 \quad 153)$$

jeśli $n = \frac{x}{l}$.

Średnia część.

Dla średniej części otrzymamy $\text{najw } (-M)$, obciążwszy pierwsze i trzecie przęsło, zaś $\text{najw } (+M)$, obciążwszy drugie przęsło. Jeśli pierwsze i trzecie przęsło jest obciążone, otrzymamy z rów. 129, robiąc $m=0$ a $p_2=p_1$,

$$M_1 = M_2 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 154)$$

Wstawivszy w rów. 65) $M' = M_1 = M_2 = M''$, otrzymamy

$$\text{najw } (-M) = M' = M_1 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 155)$$

Jestto równanie linii poziomej.

Dla $\text{najw } (+M)$ należy obciążyć drugie przęsło, więc

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_3 = 0, \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2,$$

zatem
$$M_1 = M_2 = \frac{2(1+\vartheta)\mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2''}{4(1+\vartheta)^2 - 1} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)},$$

a według 67)

$$\text{najw } (+M) = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2}px(1-x) \quad . \quad . \quad . \quad 156)$$

§. 25. Przykład.

Dane. Most kolejowy ma dwie belki główne ciągle trzyprzęsłowe. Rozpiętość przęseł skrajnych wynosi $l_1 = 27.87\text{ m}$, średniego $l = 36.2\text{ m}$. Obliczyć należy największe siły poprzeczne i momenty, przypuszczając ciężar zastępczy wedle rozporządzenia austriackiego. Jako ciężar stały przyjmujemy dla przęseł skrajnych wedle wzoru $g = 30l + 800^*)$, $g_1 = 30 \cdot 27.87 + 800 = 1636\text{ kg/m} = 1.64\text{ t/m}$; $g = 30 \cdot 36.2 + 800 = 1886\text{ kg/m} = 1.89\text{ t/m}$.

Na jedną belkę wypada więc

$$g_1 = 0.82\text{ t/m}, \quad g = 0.94\text{ t/m}.$$

Obliczenie. Wedle rozporządzenia ministeryalnego austriackiego jest dla obu belek ciężar zastępczy dla momentów dla obciążenia całkowitego przęsła skrajnego 6145 kg/m , zaś dla średniego 5771 , więc $p_1 = 3.073\text{ t/m}$, $p = 2.8855\text{ t/m}$.

a) Ciężar stały.

Spółczynnik $\vartheta = \frac{l}{l_1} = \frac{27.87}{36.2} = 0.77$, więc według 119)

$$M_1 = M_2 = -\frac{2(0.77^3 \cdot 0.82 + 0.94)}{3 + 2 \cdot 0.77} \cdot \frac{36.2^2}{8} = -94.81\text{ tm}.$$

*) patrz Podr. t. m. tom I. str. 6.

α) Siły poprzeczne. Według 121)

$$Q_1' = (3 \cdot 0.82 \cdot 0.77 (2 + 0.77) - 0.77) \frac{27.87}{4 \cdot 0.77^2 (3 + 2 \cdot 0.77)} = 8.29 \text{ t}$$

$$Q_1'' = 8.29 - 0.82 \cdot 27.87 = -14.57 \text{ t.}$$

W drugim przęśle $Q_2' = \frac{1}{2} 0.94 \times 36.2 = +17.01 \text{ t}$

$$Q_2'' = -\frac{1}{2} 0.94 \times 36.2 = -17.01 \text{ t.}$$

β) Oddziaływania. $O_1 = Q_1' = 8.29 \text{ t,}$

$$Q_2 = 14.57 + 17.01 = 3.58 \text{ t.}$$

γ) Momenty.

W pierwszym przęśle otrzymamy według 127)

$$M = -94.84 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} 0.82 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) l_1^2,$$

$$M = -94.84 \frac{x}{l_1} + 318.47 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right).$$

$$\text{Dla } \frac{x}{l_1} = 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$$

$$M = 0 \quad +19.18 \quad +31.98 \quad +38.42 \quad +38.90 \quad +32.20 \text{ tm.}$$

$$\frac{x}{l_1} = 0.6 \quad 0.7 \quad 0.8 \quad 0.9 \quad 1.00$$

$$M = +19.53 \quad +0.48 \quad -24.84 \quad -56.70 \quad -94.84 \text{ tm.}$$

W drugim przęśle otrzymamy według 128)

$$M = -94.84 + \frac{1}{2} 0.94 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = -94.84 + 0.47 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) l^2,$$

$$M = -94.84 + 615.91 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

$$\text{Zatem dla } \frac{x}{l} = 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$$

$$M = -94.84 \quad -39.41 \quad +3.70 \quad +34.50 \quad +52.98 \quad +59.14 \text{ tm.}$$

b) Ciężar ruchomy.

α) Siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle otrzymamy największe dodatnie siły poprzeczne, obciążając pierwsze przęsło od E do B (rys. 34.) i całe trzecie przęsło. Otrzymamy wtedy według 130)

$$\text{najw } (+Q) = \frac{-2(1 + 0.77)p_2(1 - m^2)^2 + 3.073}{4(1 + 0.77)^2 - 1} \frac{27.87 \cdot 0.77}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2} p_2 (1 - m^2)^2 \cdot 27.87$$

$$\text{najw } (+Q) = -1.647 p_2 (1 - m^2)^2 + 1.429 + 13.935 p_2 (1 - m^2).$$

$$\text{Dla } m = 0 \text{ jest } p_2 = \frac{7.049}{2}, \text{ więc } \text{najw } (+Q) = 44.732 \text{ t.}$$

Wstawiając dla innych m wartości m i p_2 , otrzymamy

$$\frac{x}{l_1} = 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.7 \quad 0.8 \quad 0.9 \quad 1.0$$

$$\text{najw } (+Q) = 44.732 \quad 36.465 \quad 28.955 \quad 22.440 \quad 17.325 \quad 12.801 \quad 8.928 \quad 6.101 \quad 3.763 \quad 2.132 \quad 1.429 \text{ t.}$$

Najw $(-Q)$ otrzymamy z rów. 131) i 132)

$$M_1 = -(0.2803 p_3 m^2 (2 - m^2) + 0.4405 p) \frac{36.2^2}{8},$$

a wedle 132)
$$najw(-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} \cdot p_3 m^2 l_1$$

$$najw(-Q) = - (0.2803 p_3 m^2 (2 - m^2) + 0.4405 \times 2.8855) \frac{163.805}{27.87} + \\ - \frac{1}{2} p_3 m^2 27.87,$$

$$najw(-Q) = - (1.647 p_3 m^2 (2 - m^2) + 7.470 + 13.935 p_3 m^2).$$

Wstawiwszy wartości za $m = \frac{x}{l_1}$ i za p_3 wedle rozporządzenia austriackiego zmienne wedle długości obciążonej, otrzymamy

dla $m =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$najw(-Q) =$	-7.470,	-9.038,	-12.111,	-16.163,	-20.572,	-26.014,	-31.994,
	0.7	0.8	0.9	1.00			
	-38.410,	-45.949,	-54.101,	-62.389 t.			

W drugim przęśle otrzymamy $najw(+Q)$ z rów. 133)

$$najw(+Q) = \frac{3.073 \times 0.77^3 + 2 p_4 (1-n)^2 (1 + 2 \times 0.77 - n^2)}{4(1 + 2 \times 0.77)} l$$

$$najw(+Q) = + 5.0 + 7.126 p_4 (1-n)^2 (2.54 - n^2).$$

Wstawiwszy wartości za $n = \frac{x}{l}$ i p_4 według długości obciążonej przęsła średniego, otrzymamy,

dla $\frac{x}{l} =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$najw(+Q) =$	63.517	54.059	44.747	35.921	27.858	21.210	15.763	11.405	8.302	5.996	5.00.

Ponieważ belka jest symetryczną, więc $najw(+Q)$ dla n jest zarazem równe $- najw(-Q)$ dla $(1-n)$. Powyższe wartości dają nam więc zarazem $najw(-Q)$.

β) Momenty. Pierwsze przęsło, część średnia.

Według 38) jest $v_2 = 2(1 + \xi) = 2(1 + 0.77) = 3.54$, zaś $b_2 = \frac{l}{1 + v_2} =$
 $= \frac{l}{1 + 3.54} = \frac{l}{4.54} = 0.22l = 0.22 \times 36.2 = 7.964 m.$

$$v_1 = \frac{2(1 + \xi)}{\xi} - \frac{1}{\xi v_2} = \frac{2(1 + 0.77)}{0.77} - \frac{1}{0.77 \times 3.54} = 4.231,$$

$$b_1 = \frac{l_1}{1 + 4.231} = \frac{l_1}{5.231} = 0.1912 l_1 = 5.328 m.$$

Wprost możemy otrzymać b_1 z rów. 144)

$$b_1 = \frac{2 \times 0.77 (1 + 0.77)}{3 + 10 \times 0.77 + 6 \cdot 0.77^2} 27.87 = 0.1912 \times 27.87 = 5.328 m.$$

Według rów. 139) i 140) otrzymamy

$$najw(-M) = - \frac{2.855 \times 36.2^2}{4(3 + 2 \times 0.77)} \frac{x}{l_1} = - 208.2 \frac{x}{l_1},$$

a
$$najw(+M) = \frac{3(2 + 0.77) - 2(3 + 2 \times 0.77)m}{4(3 + 2 \times 0.77)} \cdot 3.073 \cdot 27.87^2 m,$$

$$najw(+M) = 1092.251 m - 1193.456 m^2.$$

Dla $m =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$najw(+M) =$	0	+97.29	+170.71	+220.26	+247.75	+247.76	+225.71
$najw(-M) =$	0	-20.82	-41.64	-62.46	-83.28	-104.20	-124.92

$$\begin{array}{rr} 0.7 & 0.8 \\ +179.79 & +99.99 \\ -145.74 & -166.56. \end{array}$$

Pierwsze przeszło, część trzecia.

Tu wyznaczmy $najw (+M)$ i $najw (-M)$ tylko jeszcze dla punktów dla których $m = 0.9$ i 1.0 , czyli dla $w = 0.1$ i $w = 0$.

Z rów. 142) otrzymamy

$$\begin{array}{ll} \text{dla } w = 0.1 & e_1 = 27.87 \sqrt{\frac{l_1}{b_1} \frac{5.328 - 2.787}{27.87 - 2.787}} = 22.551 m, \\ \text{„ } w = 0 & e_1 = l_1. \end{array}$$

Dalej mamy dla $w = 0.1$, $p_1 = 3.192$, $p = 2.885$,

$$m_1 = \frac{22.551}{27.87} = 0.8092, \text{ więc według 145)}$$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} \times 3.192 \times 0.8092^2 (2 - 0.8092^2) + \frac{2}{3+2\vartheta} 2.885 \right] \frac{36.2^2}{8},$$

$$M_1 = - (0.2803 \times 3.192 \times 0.6547 \times 1.3453 + 0.4405 \times 2.885) 163.805,$$

$$M_1 = - (0.7880 + 1.2790) 163.805 = - 338.585 tm.$$

$$Najw (-M) = - 338.585 \times 0.9 + \frac{2.711 \times 22.551^2 (1 - 0.9)}{2},$$

$$najw (-M) = - 304.72 + 68.93 = - 255.79 tm.$$

Dla $w = 0$, $p_1 = 3.073$ i $m_1 = 1$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} 3.073 + \frac{2}{3+2\vartheta} 2.885 \right] \frac{36.2^2}{8},$$

$$M_1 = - (0.2803 \times 3.073 + 0.4405 \times 2.885) 163.805,$$

$$M_1 = - 350.525 tm.$$

Dalej otrzymamy według 146)

$$\text{dla } w = 0.1 \text{ i } p_2 = \frac{11.308}{2} = 5.654,$$

$$\begin{aligned} najw (+M) &= \frac{-2(1+0.77) 5.654 (1 - 0.8092^2)^2 + 3.073}{4(1+0.77)^2-1} \frac{27.87^2 \times 0.77}{4} = \\ &= + 8.856 tm, \end{aligned}$$

a według rów. 147)

$$\begin{aligned} najw (+M) &= 8.856 \times 0.9 + \frac{5.654 \times 0.1 (0.9 - 0.8092^2)}{2} 27.87^2 = \\ &= 7.970 + 41.50 = 49.47 tm. \end{aligned}$$

Dla $w = 0$ otrzymamy $p_2 = 0$, więc z rów. 146)

$$M_1 = \frac{3.073 \times 27.87^2 \times 0.77}{4(4(1+0.77)^2-1)} = 39.86 tm,$$

a więc otrzymamy

$$\begin{array}{rrr} \text{dla } m = & 0.9 & 1.0 \\ najw (+M) & +49.47 & +39.86 tm \\ najw (-M) & -255.79 & -349.29 „ \end{array}$$

Drugie przeszło, część pierwsza.

Otrzymaliśmy pierwiej $b_2 = 0.22l = a_2$, a więc wyznaczmy największe i najmniejsze momenty dla $u = 0.1l$ i $u = 0.2l$, bo dla $u = 0$, czyli dla średniej podpory, jużśmy otrzymali $najw (+M)$ i $najw (-M)$.

Z rów. 148a otrzymamy, wstawiając $v = \frac{u}{l}$,

$$e^2 - e \times 36.2 \frac{(3 + 4 \times 0.77) - v(3 + 2 \times 0.77)}{(3 + 2.0.77)(1 - 2v)} + \frac{(1 + 2 \times 0.77)v}{1 - 2v} 36.2^2 = 0.$$

$$e^2 - e \times 7.97 \frac{6.08 - 4.54v}{1 - 2v} + \frac{2.54v}{1 - 2v} \times 1310.44 = 0.$$

Stąd otrzymamy dla $v = 0.1$

$$e^2 - 56.047e + 416.065 = 0, \text{ więc}$$

$$e = + 28.023 - \sqrt{28.023^2 - 416.065} = 8.81 m,$$

a dla $v = 0.2$

$$e^2 - 68.701e + 1109.2 = 0, \text{ zatem}$$

$$e = 34.35 - \sqrt{34.35^2 - 1109.2} = 25.94 m.$$

M_1 wyznaczmy z rów. 149),

$$\text{zatem dla } v = \frac{u}{l} = 0.1, \quad m_1 = \frac{8.81}{36.2} = 0.2434, \text{ a } p_1 = 3.073 t/m$$

$$M_1 = \left[- \frac{2(1+0.77)(3.073 \times 0.77^2 + 3.084(1-0.2434)^2(1+2 \times 0.2434-0.2434^2))}{4 \times 4(1+0.77)^2-1} + \right. \\ \left. + \frac{-3.084(1-0.2434^2)^2}{4(4(1+0.77)^2-1)} \right] 36.2^2, \text{ czyli} \\ M_1 = - 323.55 tm.$$

Dalej mamy

$$M_1 - M_2 = \frac{2 \times 3.084(1-0.2434)^2 0.2434^2 - 3.073 \times 0.77^2}{4(1+2 \times 0.77)} \times 36.2^2 = - 122.89 tm, \\ \text{więc według 150)}$$

$$najw (+M) = - 323.55 + 122.89 \times 0.1 + \frac{3.084 \times 27.39^2 \times 0.1}{2} = \\ = - 323.55 + 12.29 + 115.68 = - 195.58 tm.$$

Dla $v = \frac{u}{l} = 0.2, \quad m_1 = \frac{25.94}{36.2} = 0.7066, \quad p = 4.214 t/m, \quad s = 0.77,$
otrzymamy wedle 149)

$$M_1 = [- 0.2803 \times 3.073 - 0.614(1 - 0.7066)^2(1 + 2 \times 0.7066 - 0.7066^2) 4.214 + \\ + 0.1734(1 - 0.7066^2)^2 4.214] 163.805 = 180.98 tm.$$

Dalej mamy $M_1 - M_2 = [1.5748(1 - 0.7066)^2 0.7066^2 \times 4.214 - 0.7874 \times \\ \times 0.4565 \times 3.073] 163.805 = - 134.67$, więc według 150)

$$najw (-M) = - 180.98 + 134.67 \times 0.2 + \frac{1}{2} 4.214 \times 10.26^2 \times 0.2 = 109.70 tm.$$

$Najw (+M)$ otrzymamy według rów. 151), 152) i 153), a mianowicie

$$\text{dla } v = 0.1, \text{ wstawiając } e = 8.81 m, \quad p = \frac{9.214}{2} = 4.607 t/m, \quad p_1 = 3.073 tm, \\ M_1 = (- 0.1734 \times 4.607 \times 0.2434^2 [2(1 + 0.77)(2 - 0.2434)^2 - (2 - 0.2434^2)] + \\ + 0.07918 - 3.073) 163.805 = - 29.72 tm.$$

$$\text{Dalej } M_1 - M_2 = (- 4 \times 0.3937 \times 4.607 \times 0.2434^2)(1 - 0.2434^2) + \\ + 0.3937 \times 0.77^2 \times 2 \times 3.073) 163.805 = 140.67 tm.$$

$$Najw (+M) = - 29.72 - 14.07 + \frac{4.607}{2} 0.1(2 \times 0.2434 - 0.2434^2 + \\ - 0.1) 36.2^2 = 45.09 tm.$$

Dla $v = 0.7$ jest $e = 25.94 m$ a $p = \frac{6.232}{2} = 3.116 t/m, \quad m_1 = 0.7066$, więc

$$M_1 = (-0.1734 \times 3.116 \times 0.7066^2 [2(1 + 0.77)(2 - 0.7066)^2 - (2 - 0.7066^2)] + \\ + 0.07918 \times 3.073) 163.805 = -141.01 \text{ tm.}$$

$$\text{Dalej mamy } M_1 - M_2 = (-4 \times 0.3937 \times 3.116 \times 0.7066^2)(1 - 0.7066)^2 + \\ + (0.3937 \times 0.77^2 \times 2 \times 3.073) 163.805 = 146.40 \text{ tm.}$$

$$\text{Zatem } najw (+M) = -141.01 - 146.4 \times 0.2 + \frac{1}{2} 3.116 \times 0.2 (2 \times \\ \times 0.7066 - 0.7066^2 - 0.2) 36.2^2 = -170.29 + 291.44 = +121.15 \text{ tm.}$$

Przeszło drugie, część druga.

Według rów. 155. otrzymamy

$$najw (-M) = -\frac{2.5^3}{3 + 2.5} 3.073 \times \frac{36.2^2}{8},$$

$$najw (-M) = -0.44053 \times 0.4555 \times 3.073 \times 163.805 = 101.23 \text{ tm.}$$

Najw (+M) otrzymamy z rów. 156), mianowicie

$$najw (+M) = -0.44053 \times 2.885 \times 163.805 + \frac{1}{2} 2.885 n (1 - n) 36.2^2 = \\ = -208.18 - 1890.97 n (1 - n),$$

$$\text{a więc dla } n = \frac{x}{l} = \begin{matrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{matrix}$$

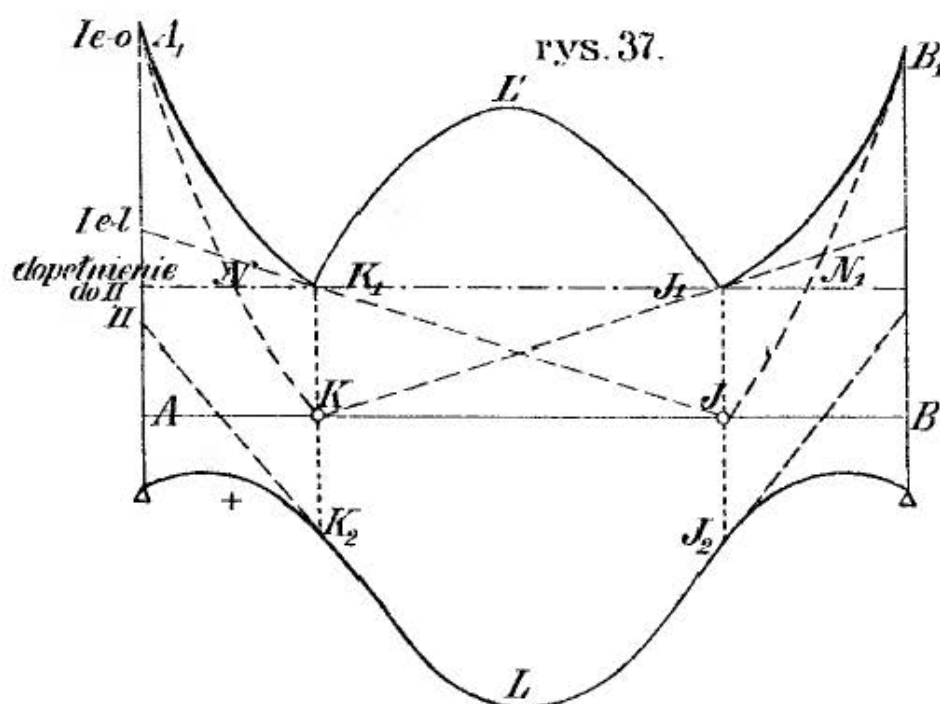
$$najw (+M) = \begin{matrix} 188.92 & 245.65 & 264.56 \text{ tm.} \end{matrix}$$

III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

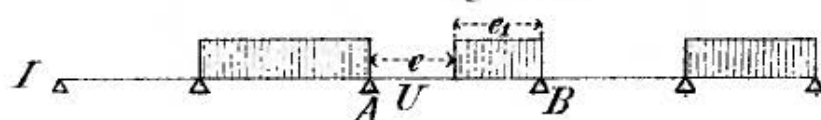
§. 26. Zasada.

Widzieliśmy na przykładzie, jak żmudne jest obliczenie sił zewnętrznych belki ciągłej trójprzęsłowej. Jeżeli belka ma więcej przęseł, obliczenie staje się jeszcze żmudniejszem. Znacznie uprościć da się jednak rachunek, jeżeli według Lebera przyjmować będziemy dla momentów tylko całkowite obciążenie przęseł. Wiemy z poprzedniego rozdziału, że każde przęsło średnie da się podzielić na trzy części. W części średniej otrzymamy największe lub najmniejsze momenty, gdy dane przęsło jest całe obciążone lub całe nieobciążone, a inne przęsła naprzemian. W pierwszej i trzeciej części linie największych i najmniejszych M są liniami czwartego stopnia, które jednak dadzą się w przybliżeniu zastąpić prostą i parabolami, przyczem otrzymamy zamiast $A_1 K_1$ (rys. 37.) linią $A_1 N K_1$. Ta linia łamana odpowiada obciążeniu całkowitemu przęseł, i tak *najw* ($-M$) w A odpowiada obciążeniu I (rys. 38.), gdy $e=0$, dla którego otrzymujemy parabolę $A_1 N$. *Najw* ($-M$) w K odpowiada obciążeniu I, gdy $e=l$, dla którego otrzymujemy prostą $N K_1$, przechodzącą przez punkt stały I .

Leber udowadnia, że linie te *najw* ($-M$) przybliżonych mają wspólne styczne z linią dokładną w A_1 i K_1 tak, że wy-



rys. 38.



rys. 39.

sze wartości, więc, jeśli chcemy je otrzymać, obrócimy *najw* ($-M$) około osi poziomej. Przelóżmy je na górę, wtedy punkt L przypadnie na L' . Widzimy stąd, że bezwzględnie największe momenty możemy łatwo wyznaczyć w przybliżeniu, przyjmując obciążenie całkowite przęseł.

Metoda Lebera polega na tem, że obliczamy momenty podporowe dla obciążenia całkowitego każdego przęsła z osobna. Obciążenia te i momenty kombinujemy w ten sposób, aby otrzymać przybliżoną linią momentów. Leber uwzględnia zarazem ciężar własny, inny dla każdego przęsła; można jednak łatwo obliczyć osobno momenty podporowe w skutek ciężaru własnego, a osobno w skutek ciężaru ruchomego. Znając momenty podporowe, łatwo obliczymy albo wykreślimy zapomocą szablonu parabolicznego momenty w drugim przęśle całkowicie obciążonem lub nieobciążonem. Dla sił poprzecznych musi być w da-

kreśliwszy te linie mogliśmy jeszcze na podstawie tych stycznych wykreślić A_1K_1 . Różnice są jednak tak małe, że w praktyce możemy się nawet zadowolnić liniami przybliżonemi*).

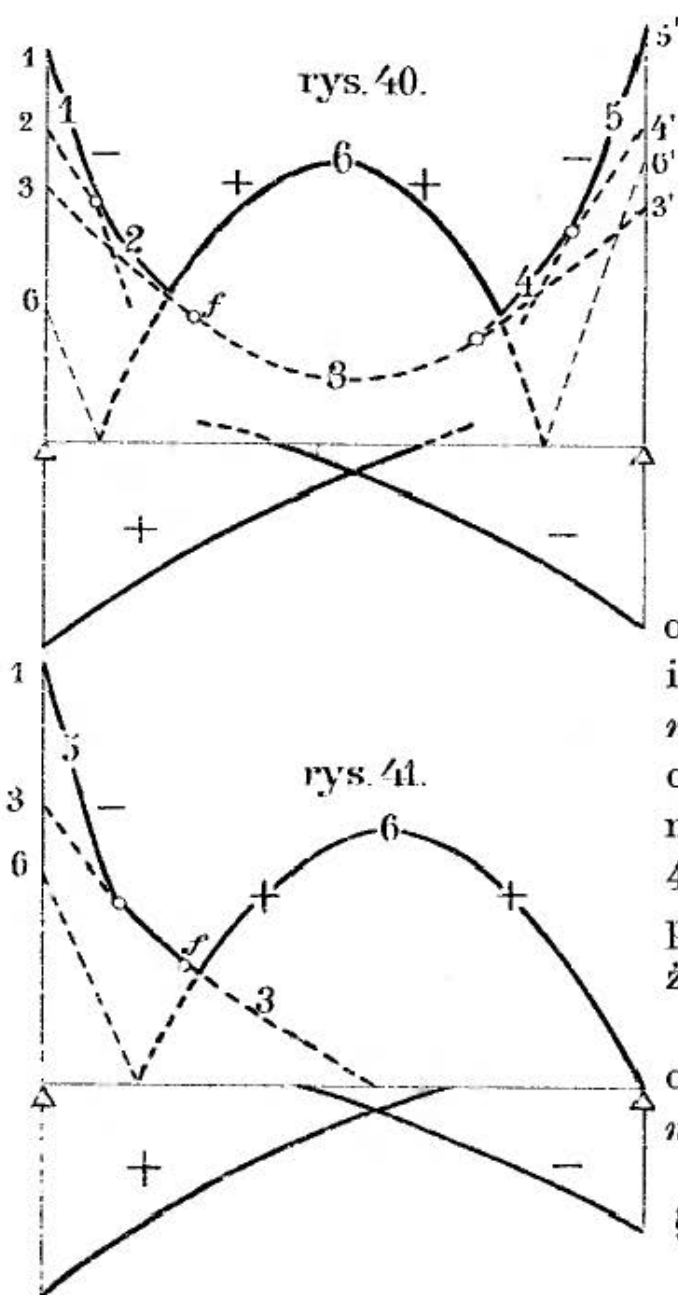
Ponieważ dla obliczenia przekroju chodzi zwykle głównie o bezwzględnie największe

*) Weyrauch przyjmuje nawet w przybliżeniu proste A_1K_1 i I_1B_1 , linie te są jednak zanadto niedokładne.

nem przeszłe obciążenie jednostronne. Dla tego obciążenia oblicza się momenty podporowe i dodaje do nich momenty, powstałe z obciążenia całkowitego innych przęseł. Na tej podstawie oblicza się największe siły poprzeczne w kilku punktach przęsła.

§. 27. Najniekorzystniejsze obciążenia.

Na rysunku 40. i 41. są wykreślone linie największych i najmniejszych momentów i sił poprzecznych dla sumy ciężarów stałego i ruchomego dla przęsła średniego i skrajnego. Na



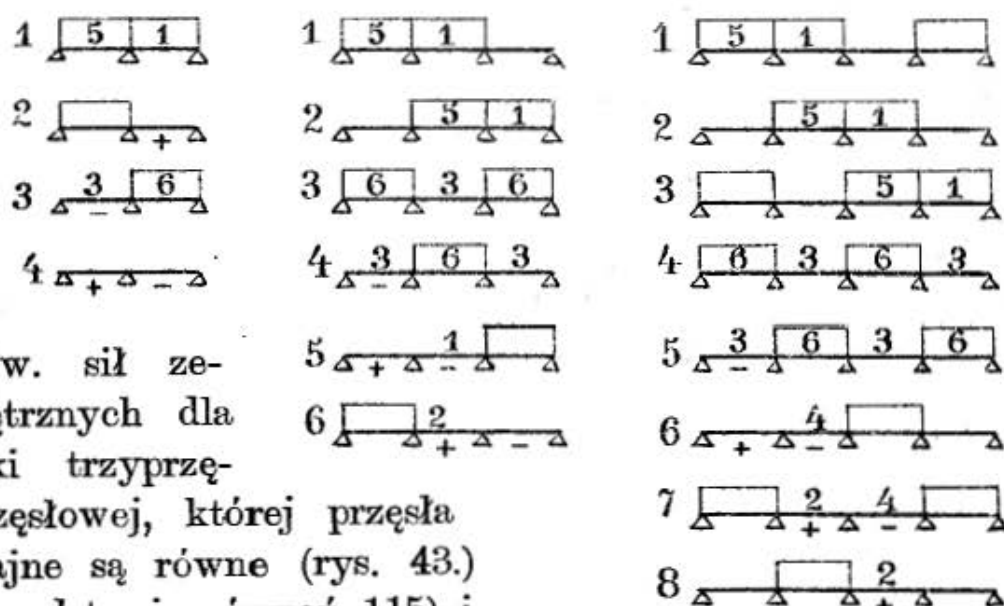
rys. 42. podajemy wedle Lebera schemat obciążeń, które sprawiają w różnych częściach belki najw. i najmn. momenty. Jeśli belka jest symetryczna, liczba kombinacyj znacznie się zmniejsza.

Ciężar własny, który zmienia się wedle rozpiętości, przedstawiliśmy czarną kreską, ciężar ruchomy prostokątami białymi. Liczby wpisane odnoszą się do rys. 40 i 41. i wskazują, którą część linii najw (+M) lub najw (-M) otrzymamy danem obciążeniem. Znaki + i - na rys. 42. oznaczają, że w tem przeszle po dodaniu obciążenia jednostronnego dla tego obciążenia przęsła otrzymamy najw (+Q) lub najw (-Q).

§. 28. Belka trzyprzęsłowa.

Jako przykład wskażemy tu sposób wyznaczenia

rys. 42.



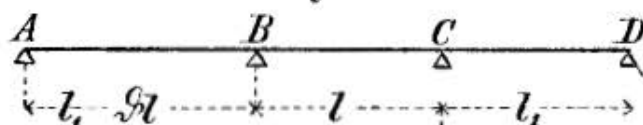
najw. sił zewnętrznych dla belki trzyprzę-

przęsłowej, której przęsła skrajne są równe (rys. 43.)

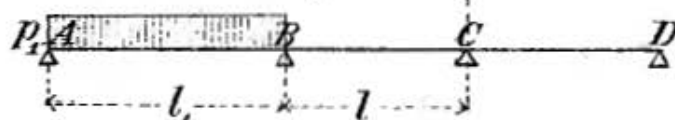
Na podstawie równań 115) i

116) otrzymamy, jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 44.)

rys. 43.

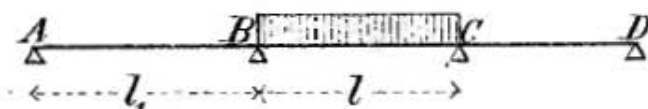


rys. 44.



$$\left. \begin{aligned} M_1 &= - \frac{4 \vartheta^3 (1 + \vartheta)}{4 (1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{p_1 l^2}{8} \\ M_2 &= + \frac{2 \vartheta}{4 (1 - \vartheta)^2 - 1} \frac{p_1 l^2}{8} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 157)$$

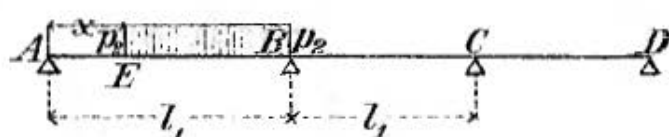
rys. 45.



Jeżeli drugie przęsło jest całkowicie obciążone (rys. 45.), otrzymamy

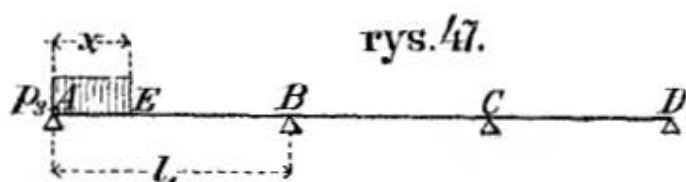
$$M_1 = M_2 = - \frac{2}{3 + 2 \vartheta} \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 158)$$

rys. 46.



Jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone od E do B (rys. 46.), to otrzymamy z 129) gdy $m = \frac{x}{l_1}$,

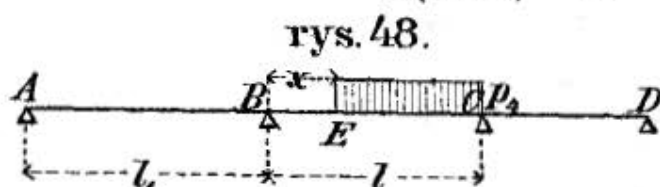
$$M_1 = - \frac{4 (1 + \vartheta) \vartheta^3}{4 (1 - \vartheta)^2 - 1} p_2 (1 - m^2)^2 \frac{l^2}{8} \dots \dots \dots 159)$$



rys. 47.

Jeżeli pierwsze przęsło (rys. 47.) jest obciążone od A do E, to według 131)

$$M_1 = - \frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} p_3 m^2 (2-m^2) \frac{l^2}{8} \quad . \quad . \quad 160)$$



rys. 48.

Jeżeli drugie przęsło jest obciążone od E do C (rys. 48.), to według 133), jeżeli $\frac{x}{l} = n$,

$$M_1 - M_2 = \frac{4(1-n)^2 n^2}{1+2\vartheta} p_4 \frac{l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 161)$$

Nakoniec otrzymamy wedle 56) i 57)

$$\left. \begin{aligned} \text{najw } (+Q) &= \frac{M'' - M'}{l_m} + \frac{1}{2} p_m (1-m)^2 l_m \\ \text{najw } (-Q) &= \frac{M'' - M'}{l_m} - \frac{1}{2} p_m m^2 l_m \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 162)$$

§. 29. Przykład.

Dla porównania sposobu Lebera ze sposobem dokładnym, obliczymy przybliżonym sposobem ten sam przykład, co w §. 25.

Dla ciężaru własnego wzory są tak proste i obliczenie tak łatwe, że użycie sposobu Lebera nie przedstawia tu żadnej korzyści. Ograniczymy się więc tylko na ciężarze ruchomym.

a) Momenty. Najprzód obliczymy, jak w §. 25., odstępów punktów stałych, potem momenty podporowe.

Jeżeli jest obciążone pierwsze przęsło, to dla $\vartheta = 0.77$ wedle 157)

$$M_1 = - 0.2803 \times 3.073 \frac{36.2^2}{8} = - 141.09 \text{ tm},$$

$$M_2 = + 0.0792 \times 3.073 \frac{36.2^2}{8} = + 39.87 \text{ tm}.$$

Jeżeli drugie przęsło jest obciążone, otrzymamy według 158)

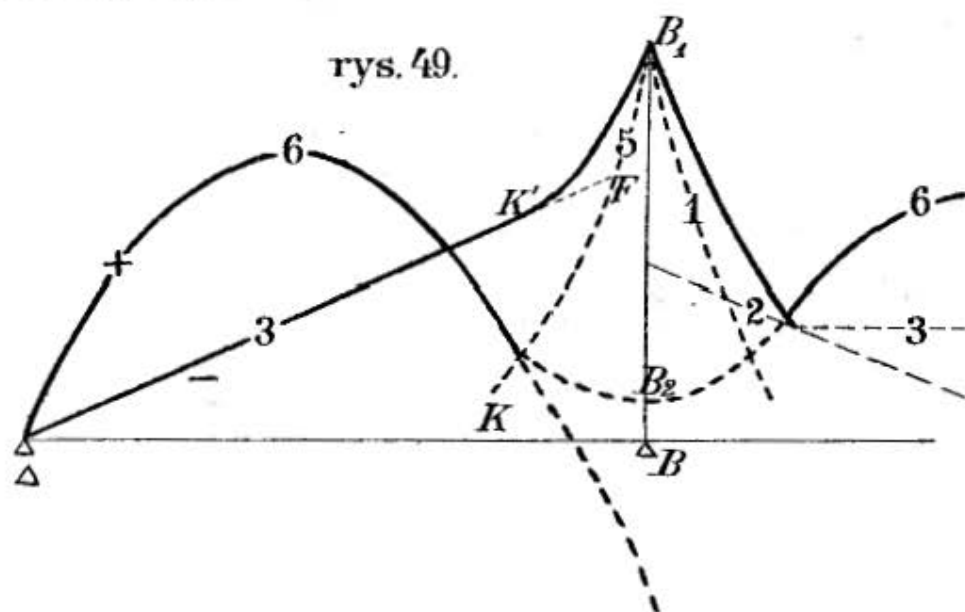
$$M_1 = M_2 = - 0.4405 \times 2.8855 \frac{36.2^2}{8} = - 208.20 \text{ tm}.$$

Pierwsze przęsło. Dla wyznaczenia linii 6 (rys. 49.) t. j. linii *najw* (+M) w pierwszym przęśle średniej części, obciążyć musimy pierwsze i trzecie przęsło (rys. 42. układ 3), więc

$$M_1 = - 141.09 + 39.87 = - 101.22 \text{ tm}$$

Wykreślić moglibyśmy więc zrobić $B_6 = 101.22 \text{ tm}$ i wykreślić szabloną paraboliczną dla $p_1 = 3.073$ linię 6. Szablonę tę możemy wyciąć z pa-

pierś wykreśliwszy parabolę momentów według rów. $M = \frac{p_1}{2} x(l-x)$, jak dla belki zwykłej.



Liczebnie możemy obliczyć punkty linii 6 wedle równania 67):

$$najw(+M) = -M_1 m + \frac{l_1^2}{2} 3.073 m(1-m) = 101.22 m + 388.37 \times 3.073 m(1-m),$$

$$najw(+M) = 1092.25 m - 1193.45 m^2,$$

zupełnie jak w §. 25.

Z wzoru tego otrzymamy, jak poprzednio:

dla $m = 0, 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.7 \quad 0.8$

$$najw(+M) = 0, 97.29, 170.71, 220.26, 247.75, 247.76, 225.71, 179.79, 99.99.$$

Linia 3. leży poniżej 6, nie potrzebujemy więc jej koniecznie wyznaczać, co zresztą nie przedstawia żadnej trudności. Dla $najw(-M)$ musi być przęsło średnie obciążone (rys. 42. układ 4), a zatem $najw(-M) = -208.2 m$, jak w §. 25; a więc

dla $m = 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6$

$$najw(-M) = 0, -20.82, -41.64, -62.46, -83.28, -104.2, -124.92,$$

0.7 0.8

$$-145.74, -166.56 tm.$$

Dla wyznaczenia linii 5) obciążymy pierwsze i drugie przęsło (rys. 42. układ 1), a więc

$$M_1 = -141.09 - 208.20 = -349.29 \text{ (punkt } B_1 \text{ rys. 49.)}. \text{ Dla } m = \frac{x}{l_1} \text{ otrzymamy}$$

$$M = -349.29 m + \frac{l_1^2}{2} 3.073 m(1-m) = 844.16 m - 1193.45 m^2.$$

Więc dla $m = 0.8 \quad 0.9$

$$M = -88.48 \quad -206.95 tm.$$

Widzimy, że w §. 25. otrzymaliśmy dla $m = 0.9$, $M = -255.79 tm$, gdy według Lebera otrzymujemy tylko $-206.95 tm$. Jeżeli jednak zaokrąglimy kąt przy F łukiem parabolicznym, to zbliżymy się znacznie do wartości dokładnych. Punkt B_2 możemy także łatwo otrzymać, gdyż dla

najw (+ M) musi być wtedy obciążone tylko trzecie przęsło, więc $M_1 = + 39.87 tm$, jak w §. 25.

Drugie przęsło.

Dla wyznaczenia linii 1. w drugim przęśle obciążamy pierwsze dwa przęsła (rys. 42, układ I) więc

$$M_1 = - 349.29 tm$$

$$M_2 = + 39.87 - 208.20 = - 168.33 tm,$$

a według 67)

$$M = - 349.29 - (-349.29 + 168.33)n + \frac{36.2^2}{2} 2.8855 n(1-n),$$

$$M = - 349.29 + 180.91 n + 1890.65 n(1-n),$$

$$\begin{array}{ll} \text{A zatem dla } n = 0.1 & n = 0.2 \\ M = -161.05 & -10.60 tm. \end{array}$$

Dla wyznaczenia linii 2 obciążamy tylko pierwsze przęsło, więc

$$M_1 = - 141.09, \quad M_2 = + 39.87,$$

$$M = - 141.09 - (-141.09 - 39.87)n = - 141.09 + 180.96 n.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Stąd dla } n = 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ M = -122.99, & 104.89, & 82.79 tm. \end{array}$$

I tu widzimy, że linie 1 i 2 dość znacznie odstępują od linii *najw* ($-M$), że jednak wrysowawszy między te dwie linie łuk paraboliczny znacznie się zbliżymy do prawdy.

Dla wyznaczenia poziomej 3 obciążymy oba przęsła skrajne, więc

$$M_1 = M_2 = M = - 141.09 + 39.87 = - 101.22 tm.$$

Dla wyznaczenia paraboli 6 obciążamy tylko średnie przęsło, więc

$$M_1 = - 208.2 tm \text{ a } M = - 208.2 + 1890.65 n(1-n), \text{ zatem jak w §. 25.}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Dla } n = & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ M = & 104.31 & 188.84 & 245.55 & 264.46 tm. \end{array}$$

b) Siły poprzeczne.

Pierwsze przęsło. Dla *najw* (+ Q) w pierwszym przęśle musi być oprócz obciążenia jednostronnego w tem przęśle obciążone także 3-cie przęsło, więc według 159)

$$M_1 = - 0.2803 p_2 (1-m^2)^2 \frac{36.2^2}{8} + 39.87.$$

$$M_1 = - 45.914 p_2 (1-m^2)^2 + 39.87.$$

Jeżeli teraz w równ. 56) wstawimy $M' = 0$ i $M'' = M_1$, to *najw* (+ Q) = $= 1.647 p_2 (1-m^2)^2 + 1.431 + 13.985 p_2 (1-m)^2$, jak w §. 25.

Dla *najw* ($-Q$) obciążamy przęsło pierwsze z lewej strony danego punktu i drugie przęsło, więc według 160)

$$M_1 = - \frac{4(1+5)5^3}{4(1+5)^2-1} p_3 m^2 (2-m^2) \frac{l^2}{8} - 208.20,$$

$$M_1 = - 45.914 p_3 m^2 (2-m^2) - 208.20.$$

Jeżeli teraz wstawimy w rów. 57) tę wartość, to

$$\begin{aligned} \textit{najw} (-Q) &= \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p_3 m^2 l_1 = - 1.647 p_3 m^2 (2-m^2) - 7.470 - 13.985 p_3 m^2, \\ &\text{jak w §. 25.} \end{aligned}$$

Drugie przeszło.

Dla *najw* (+ *Q*) obciążymy pierwsze przeszło całe, a drugie po prawej stronie danego punktu, więc według 161)

$$M_1 - M_2 = -141.09 - 39.87 + \frac{4(1-n)^2 n^2 l^2}{1+2.9} \frac{l^2}{8} =$$

$$= -180.96 + 257.959(1-n)^2 n^2 p_4.$$

Więc według 162) *najw* (+ *Q*) = + $\frac{180.96 - 257.959 p_4 (1-n)^2 n^2}{36.2}$ + $+\frac{1}{2} p_4 (1-n)^2 36.2 = 5.0 - 7.126 p_4 (1-n)^2 n^2 + 18.1 p_4 (1-n)^2$, jak w §. 25.

IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

§. 30. Ogólne uwagi.

Jeżeli belka ciągła ma 4 lub 5 przęseł, to możemy w praktyce obliczać siły zewnętrzne w ten sposób, jak gdyby ilość przęseł była nieskończona. Stosuje się to zwłaszcza do obliczenia szyn kolejowych i podłużnic. Z tego powodu zastanowimy się tu nad belką o nieskończonej ilości przęseł.

Przypuśćmy przytem, że wszystkie przęsła są równe, to według rów. 37)

$$\mu_2 = 4, \quad \mu_3 = \frac{4l - \frac{l}{4}}{l} = 3.75, \quad \mu_4 = 3.733,$$

$$\mu_5 = \mu_6 = 3.732, \text{ więc otrzymamy z rów. 44)}$$

dla przęsła	2	3	4	5
$\frac{a}{l}$	= 0.2000	0.2105	0.2113	0.2113.

Przy dowolnem obciążeniu możemy teraz momenty i siły poprzeczne obliczyć według rozdziału II. My tu jednak zastanowimy się bliżej nad tem, gdy belka jest obciążona ciężarem stałym jednostajnie rozłożonym *g* i gdy jeden ciężar skupiony może leżeć w jednym przęsle.

§. 31. Obciążenie zupełne jednostajne ciągłe.

Jeżeli belka o nieskończonej ilości równych przęseł jest obciążoną całkowicie ciężarem jednostkowym *g*, to według rów. 28) otrzymamy następnne równania.

$$2 M_1 (l+l) + M_2 l = -\frac{1}{4} g (l^3 + l^3) = -\frac{1}{2} g l^3,$$

$$M_1 l + 2 M_2 (l+l) + M_3 l = -\frac{1}{2} g l^3$$

. czyli

§. 33. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych.

Momenty podporowe, któreśmy wyznaczyli w poprzednim paragrafie są największymi momentami ujemnymi, dodatnie najw. momenty otrzymamy zawsze w punktach zaczepienia siły P . W tym wypadku mamy według 24) $Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Pe_1}{l}$, a według 26)

$$M = M' + (M'' - M') \frac{e}{l} + \frac{Pe_1 e}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 183)$$

Przęsło skrajne.

Jeżeli tylko przęsło skrajne jest obciążone ciężarem P , to

$$M' = 0, \quad M'' = -\frac{Pbe(l^2 - e^2)}{cl^2}, \quad \text{więc}$$

$$M = -\frac{Pbe^2(l^2 - e^2)}{cl^3} + \frac{Pe(l - e)}{l}.$$

Chcąc wyznaczyć *najw* ($+M$), zrobmy

$$\frac{dM}{de} = -\frac{Pb}{cl^3} (2e_0 l^2 - 4e_0^3) + \frac{P}{l} (l - 2e_0) = 0, \quad \text{zatem}$$

$$-\frac{2b}{cl} e_0 + \frac{4b}{cl^3} e_0^3 + 1 - \frac{2}{l} e_0 = 0, \quad \text{a stąd } e_0 = 0.427 l,$$

a zatem $\text{najw } (+M) = +0.2047 Pl$.

Jeżeli oprócz tego obciążymy inne przęsła najniekorzystniej, to otrzymamy według 182) $M_1 = 0.02290 Pl$, a $M = 0.02290 Pl \frac{x}{l}$. Wstawiając $x = 0.427 l$ i dodawszy ten moment do poprzedniej wartości, otrzymamy

$$\text{najw } (+M) = 0.2047 Pl + 0.0098 Pl = +0.2145 Pl \quad . \quad 184)$$

Przęsło średnie. W przęśle średnim największy moment otrzymamy, gdy $e_0 = \frac{1}{2} l$, a to z powodu, że $M' = M''$, a zatem według rów. 183), $M = M' + \frac{Pl}{4} \quad . \quad . \quad . \quad 185)$

Wstawiając $e = \frac{l}{2}$ w rów. 173) otrzymamy wręcz

$$M = -\frac{P}{12.9287 l^2} (3.7321 \frac{3}{8} l^3 - \frac{3}{8} l^3) + \frac{Pl}{4} = 0.17076 Pl \quad 186)$$

Jeżeli oprócz tego obciążymy inne przęsła na prawo i na lewo najniekorzystniej, to według rów. 180)

$$\text{najw } (+M) = \left(0.17076 + 0.02454 \frac{l - 2b}{l - b} \right) Pl = +0.18873 Pl \quad 187)$$

§. 34. Największe siły poprzeczne.

Największą siłę poprzeczną otrzymamy, gdy ciężar P leży na którejkolwiek podporze, wtedy z 24) otrzymamy $M''=M'=0$, $r_1=l$, więc $Q'=P$.

Oprócz tego należy inne przęsła tak obciążyć, aby $\frac{M''-M'}{l}$ było największością. Dla przęsła skrajnego musi być $\frac{M'}{l}$ największością, więc wedle rów. 182)

$$\text{najw } (+Q) = (1 + 0.02290) P = +1.0229 P \quad . \quad . \quad 188)$$

W przęsle średnim otrzymamy dla najkorzystniejszego obciążenia jednostronnego z rów. 175) $M_r = -0.09159 Pl$, a $M_{r-1} = \frac{+0.09159}{3.732} Pl = 0.02454 Pl$, $M_{r-2} = -0.0658 Pl$. Dla *najw* $(+Q)$ albo *najw* $(-Q)$ musi być obciążone dane przęsło i co drugie na prawo i na lewo, a zatem będzie

$$M_r = -(0.09159 + 0.00658) Pl = -0.09817 Pl,$$

$$M_{r-1} = + (0.02454 + 0.02454) Pl = 0.04908 Pl,$$

$$\text{więc najw } (-Q) = -(1 + 0.09817 + 0.04908) P = -1.14725 P \quad . \quad . \quad 189)$$

$$\text{" } (+Q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = +1.14725 P$$

Najw $(-Q)$ w pierwszym przęsle otrzymamy, obciążając przęsło pierwsze, drugie, czwarte itd. najniekorzystniej. Otrzymamy zatem według 174)

$$\text{najw } (-Q) = -(1 + 0.08505) P = -1.08505 P \quad . \quad 190)$$

§. 35. Największe oddziaływania.

Oddziaływanie O_0 na podporze 0 jest równe sile poprzecznej, więc

$$\text{Najw } (+O_0) = 1.02290 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 191)$$

$$\text{" } (-O_0) = -1.08505 P$$

Według 27) jest $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}'$. Dla najniekorzystniejszego obciążenia otrzymamy więc z rów. 189), zważywszy, że siły P na r -tej podporze wcale nie kładziemy,

$$\text{najw } (-O_r) = -(0.14725 + 0.14725) P = -0.2945 P.$$

Najw $(+O_r)$ otrzymamy z rów. 189), jeżeli zważać będziemy na to, że ciężar P na r -tej podporze wywiera oddziaływanie P i uwzględniając rów. 27)

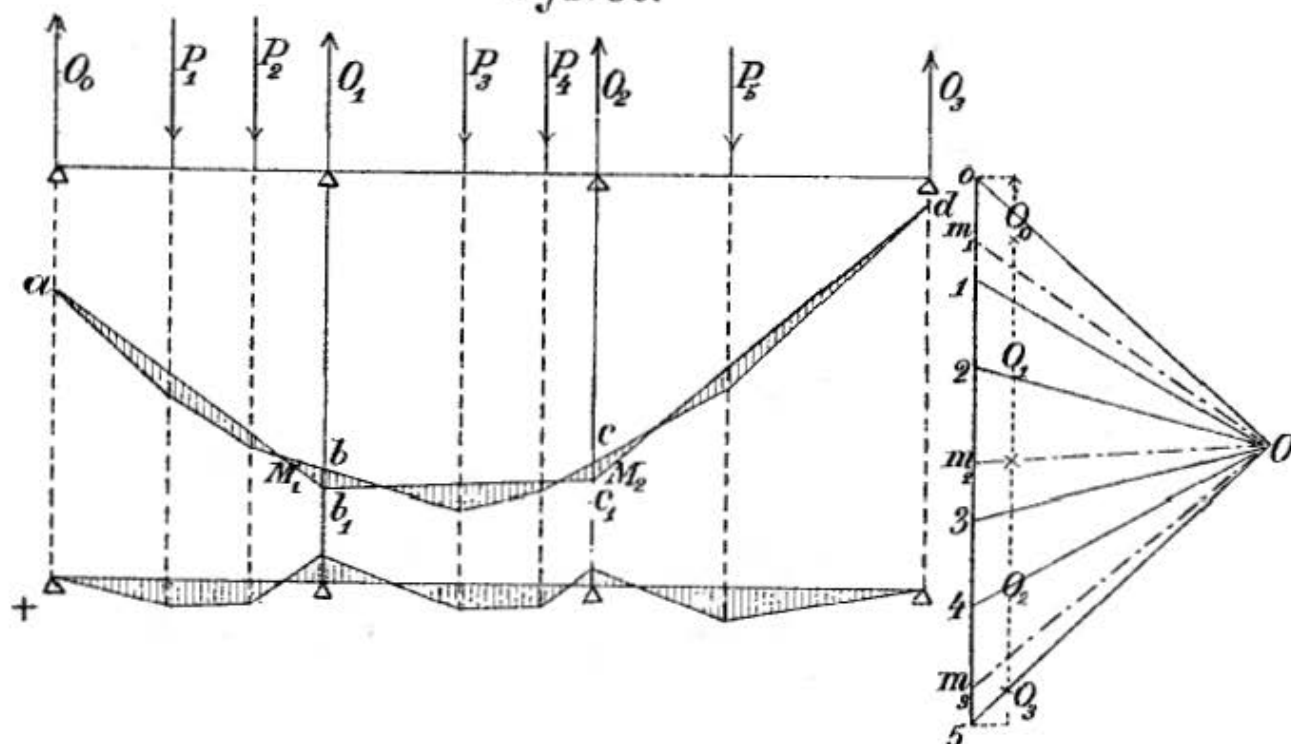
$$\text{najw } (+O_r) = (1 + 0.14725 + 0.14725) P = +1.2945 P.$$

V. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla przekroju stałego.

§. 36. Pierwszy wielobok sznurowy.

Jeżeli belka ciągła jest obciążona ciężarami P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (rys. 50.), to możemy wykreślić dla tych ciężarów wielobok sił i wielobok sznurowy, zamknąć ich jednak nie możemy, bo wiemy wprawdzie, że $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = O_0 + O_1 + O_2 + O_3$, lecz wielkości pojedynczych oddziaływań nie znamy. Gdybyśmy

rys. 50.



w jakimkolwiek sposób wyznaczyli momenty podporowe, to moglibyśmy zamknąć wielobok sznurowy i wielobok sił i wszystkie siły zewnętrzne byłyby wyznaczone. Momenty M_0 i M_n są równe zeru, pozostałe $(n - 1)$ momenty odciawszy w pionowych podporowych, możemy teraz łatwo wykreślić zamykające ab_1, b_1c_1, c_1d we wszystkich przęsłach. Jeżeli teraz wykreślimy w wieloboku sił równoległe do zamykających, to otrzymamy oddziaływania O_0, O_1, O_2, O_3 .

Jeżeli znamy oddziaływania, wyznaczenie momentów i sił poprzecznych nie podlega już najmniejszej trudności*). Widzimy więc, że w celu wyznaczenia sił zewnętrznych belki ciągłej dążyć nam wypada najpierw do wyznaczenia momentów podporowych.

*) por. Podręcznik statyki budowli str. 14.

§. 37. Linia ugięcia.

Wiemy ze statyki budowli *), że równanie linii ugięcia jest:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon I} = -\frac{\left(\frac{M}{a^2}\right)}{\left(\frac{\epsilon I}{a^2}\right)} \dots \dots \dots 192)$$

w którym moment sił zewnętrznych M wyrazić mamy jako funkcję x , a a oznacza długość, którą możemy dowolnie przyjąć.

Równanie zaś linii sznurowej (lub linii ciśnienia w sklepieniu **) jest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H} \dots \dots \dots 193)$$

jeśli q oznacza ciężar jednostkowy, a H odległość biegunową.

Widzimy więc, że obie linie będą te same, gdy zrobimy $q = \frac{M}{a^2}$, a $H = \frac{\epsilon I}{a^2}$, a zatem linia ugięcia jest linią sznurową, dla której obciążenie jednostkowe jest proporcjonalne do momentu M , a odległość biegunowa do ϵI , iloczynu momentu bezwładności i współczynnika sprężystości.

Więc jeśli powierzchnię momentów uważamy jako powierzchnię obciążenia i do wykreślenia wieloboku sznurowego użyjemy odległości biegunowej $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$ (b w podziałce sił), to ten wielobok sznurowy będzie przedstawiał oś belki. Jestto twierdzenie Mohra.

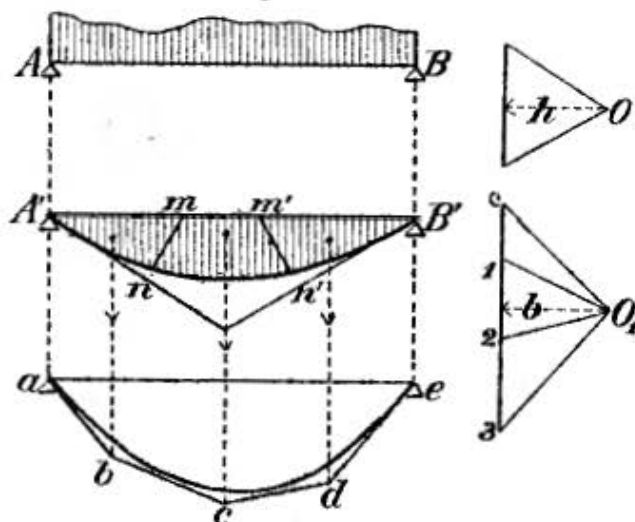
Jeżeli zamiast $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$, przyjmiemy $b = \frac{1}{n} \frac{\epsilon I}{a^2}$, to rzędne linii ugięcia będą n razy większe. Jeżeli więc długości były wykreślone w podziałce $\frac{1}{n}$, to teraz rzędne linii ugięcia będą w naturalnej wielkości.

Jeżeli więc belka AB (rys. 51.) jest dowolnie obciążona i dla tego obciążenia wyznaczmy zapomocą odległości biegunowej h momenty, to uważamy teraz według twierdzenia Mohra powierzchnię momentów, jako powierzchnię obciążenia, dzielimy ją na części dowolnie liniami mn i $m'n'$, kreślimy wielobok sił 0123, używając do przemiany powierzchni na linie podstawy a ,

*) porów. Podręcznik statyki budowli str. 137.

**) " " " " " 220.

rys. 51.



obieramy biegun O_1 w odległości b i kreślimy drugi wielobok sznurowy. Jeżeli linie podziału są pionowe, to, jak wiemy*), wielobok ten jest styczny do linii sznurowej. W ten sposób otrzymujemy wykreślenie ugięcia belki o przekroju stałym. Jeżeli zaś linie podziału mn i m_1n_1 nie są pionowe, to wielobok sznurowy $abcde$ nie będzie stycznym do linii sznurowej. Tylko

boki skrajne, równoległe do promieni skrajnych wieloboku są styczne w a i e do linii sznurowej, która według twierdzenia Mohra przedstawia ugiętą oś belki. Boki skrajne drugiego wieloboku sznurowego są więc stycznymi do linii sznurowej na podporach czyli tak zwanymi stycznymi podporowymi (n. *Stützentangente*, a. *tangential lines over the points of support*).

Z rów. 192) i 193) wynika, że

$$\frac{q}{H} = \frac{M}{\epsilon I}, \dots \dots \dots 194)$$

a jeśli chcemy, aby rzędne linii ugięcia były n razy większe, to robimy $\frac{q}{H} = \frac{nM}{\epsilon I} = \frac{nhy}{\epsilon I}$, gdzie y oznacza rzędną linii momentów, a h pierwszą odległość biegunową. Jeżeli zrobimy teraz $aq = y \cdot 1$ i wstawimy $b = H$, to $\frac{y}{ab} = \frac{nhy}{\epsilon I}$, więc

$$n = \frac{\epsilon I}{ab h}, \dots \dots \dots 195)$$

przyczem b odczytać należy w podziałce sił.

Jeżeli podpory są w nierównej wysokości, to należy różnice wysokości rysować według n razy większej podziałki niż długość.

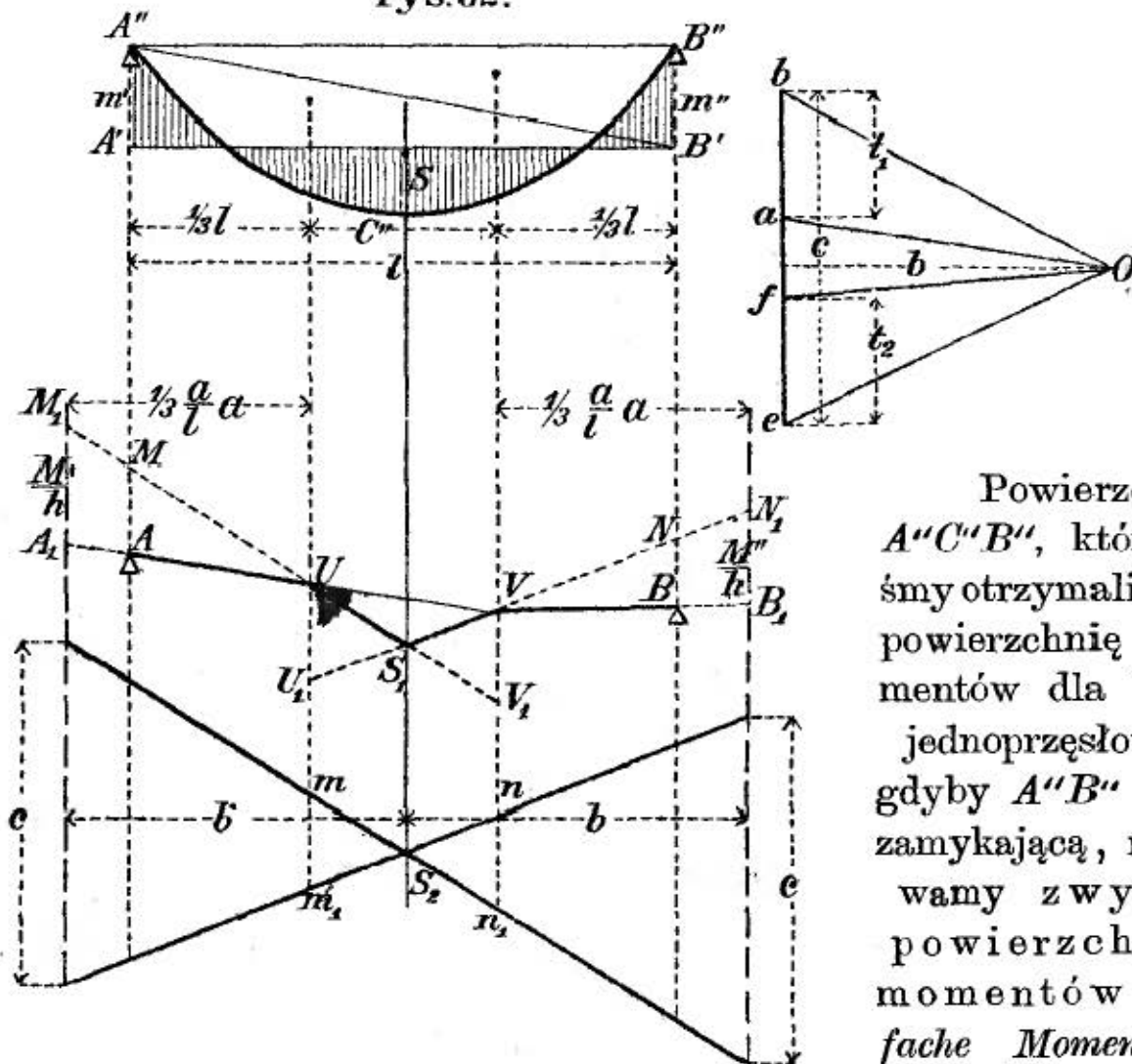
§. 38. Wielobok ugięcia.

Dla belki ciągłej potrzebne nam są tylko styczne podporowe, które dla pewnej podpory są te same dla obu sąsiednich

*) porów. Podręcznik statyki budowli str. 18.

przęseł. W takim razie powierzchnię momentów możemy podzielić prostymi ukośnymi, a że na podporach momenty zwykle są ujemne, więc dzielimy powierzchnię momentów, jak to uwidoczniliśmy, na rys. 52, na trzy części prostymi $A''B'$ i $A''B''$.

rys. 52.



Powierzchnię $A''C''B''$, którąbyśmy otrzymali jako powierzchnię momentów dla belki jednoprzęsłowej, gdyby $A''B''$ była zamykającą, nazywamy zwykłą powierzchnią momentów (*einfache Momentenfläche*). Niech będzie

wielkość jej ac , to

$$A'A''C''B''B' = -A'A''B' - A''B''B' + A''C''B'' = a(-t_1 - t_2 + c).$$

Z rysunku widzimy, że

$$at_1 = A'A''B' = \frac{1}{2} m' l = \frac{1}{2} \frac{M' l}{h},$$

$$at_2 = A'B''B' = \frac{1}{2} m'' l = \frac{1}{2} \frac{M'' l}{h},$$

nareszcie $ac = A''C''B'' = \frac{\mathfrak{M} l}{h}$, jeżeli $\mathfrak{M}$ oznacza średni moment belki jednoprzęsłowej.

Kreślimy teraz wielobok sił $abef$, obieramy biegun O w odległości $b = \frac{\epsilon I}{a^2 n}$ według poprzedniego paragrafu, więc będzie

$$t_1 = \frac{1}{2} M' \frac{l}{ah}, \quad t_2 = \frac{1}{2} M'' \frac{l}{ah}, \quad c = \mathfrak{M} \frac{l}{ah}, \quad b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n}. \quad 196)$$

Długość a , służącą za podstawę przy wyrażaniu płaszczyzny przez proste, możemy przyjąć dowolnie, a więc np. możemy przyjąć $a =$ średniej rozpiętości albo jednej z rzeczywistych rozpiętości. Gdy wszystkie przesła są równe, wtedy przyjmujemy $a = l$, więc mamy następne siły: $t_1 = \frac{1}{2} \frac{M'}{h}$, $t_2 = \frac{1}{2} \frac{M''}{h}$, $c = \frac{\mathfrak{M}}{h}$.

Gdyby styczne podporowe były znane, to konstrukcyja drugiego wieloboku sznurowego byłaby następują:

W odstępnie b od pionowej przez środek ciężkości S zwykłej powierzchni momentów odcinamy z obu stron długość $c = \mathfrak{M} \frac{l}{ah}$ i łączymy te punkty na krzyż, otrzymane w ten sposób proste nazywamy liniami krzyżowymi (n. *Kreuzlinien*, fr. *transversales*), które pierwszy wprowadził Cullmann, a które przedstawiają promienie wieloboku sił.

Jeżeli znamy styczne podporowe A_1U i B_1V , to zrobmy $UU_1 = mm_1$ i $VV_1 = nn_1$, połączmy U z V_1 i U_1 z V , a otrzymamy drugi wielobok sznurowy, który przedstawia linię ugięcia i który dlatego nazywamy drugim wielobokiem sznurowym lub wielobokiem ugięcia (n. *elastisches Polygon*, fr. *le second polygon funiculaire*). Konstrukcyę powyższą podał Mohr.

§. 39. Wyznaczenie momentów podporowych.

Z rys. 52. widzimy, że $AMU \sim abO$ i $BNV \sim Ofc$, a więc

$$AM:t_1 = \frac{1}{3} l:b \quad \text{i} \quad BN:t_2 = \frac{1}{3} l:b,$$

a stąd
$$AM = \frac{t_1 l}{3b} \quad \text{i} \quad BN = \frac{t_2 l}{3b}.$$

Podstawmy wartości za t_1 i t_2 , a otrzymamy

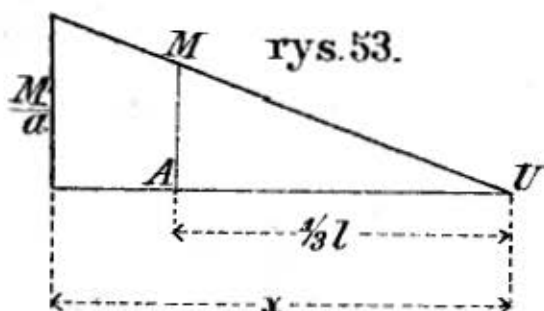
$$AM = \frac{\frac{1}{2} M' \frac{l}{ah} l}{3b} = \frac{M' l^2}{6abh}, \quad BN = \frac{M'' l^2}{6abh},$$

a więc odcinki AM i BN są proporcjonalne do momentów podporowych. Jeżeli przyjmiemy

$$b = \frac{1}{8} a, \quad \text{to} \quad \left. \begin{aligned} AM &= \frac{M'}{h} \left(\frac{1}{a} \right)^2 \\ BM &= \frac{M''}{h} \left(\frac{1}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 197)$$

a jeżeli $a=l$, to

$$\left. \begin{array}{l} AM = \frac{M'}{h} = m' \\ BN = \frac{M''}{h} = m'' \end{array} \right\} \dots \dots \dots 198)$$



Jeżeli chcemy wyznaczyć odległość x (rys. 53.), w której pionowy odcinek między przedłużeniami pierwszego i drugiego boku drugiego wieloboku sznurowego równa się $\frac{M'}{h}$, to otrzymamy

$$\frac{M'}{h} : AM = x : \frac{1}{3} l, \text{ więc } x = \frac{M' \cdot \frac{1}{3} l}{h \cdot \frac{M'}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2} =$$

$= \frac{1}{3} \frac{a}{l} a$, a zatem pionowa w odległości $x = \frac{1}{3} \frac{a}{l} a$ odcina $\frac{M'}{h}$ (rys. 52.).

Gdy $a=l$, to $AM = \frac{M'}{h}$.

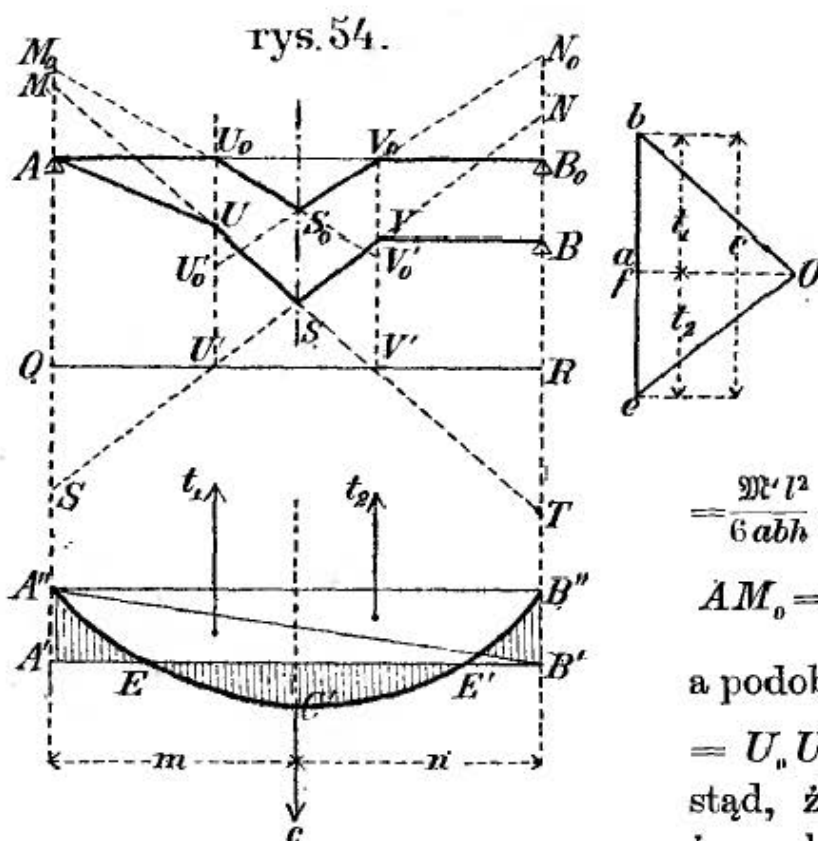
§. 40. Porównanie z belką poziomą obu końcami utwierdzoną.

Poprzednia konstrukcja da się wprost zastosować do belki jednostronnie lub obustronnie poziomo utwierdzonej. Poprzednio przyjęliśmy $b = \frac{\epsilon I}{a^2 n}$, przyczem b mierzymy według podziałki sił, teraz przypuszczamy $b = \frac{1}{6} a$ według podziałki długości. Jeśli więc zrobimy oba te przypuszczenia, to stosunek podziałki sił do podziałki długości jest już dany.

Dla belki obustronnie poziomo utwierdzonej są obie styczne podporowe poziome, więc oba odnośne promienie Oa i Of (rys. 54.) poziome; zatem punkt a wpada na f , a stąd $c = t_1 + t_2$, albo $A'A''E + B'B''E = EE'C'$, co się da słowami wyrazić: Dla belki poziomo obu końcami utwierdzonej jest suma powierzchni ujemnych momentów równa powierzchni momentów dodatnich*). A zatem $Ml = \frac{1}{2} M'l + \frac{1}{2} M''l$, jeżeli M' i M'' oznaczają momenty podporowe belki poziomo utwierdzonej, a więc $M' = \frac{1}{2} (M' + M'')$. Dla belki poziomo utwierdzonej otrzymamy więc drugi wielobok sznurowy $AU_0S_0V_0B_0$, a dla tak samo obciążonej belki ciągłej $AUSVB$.

*) porów. Podręcznik statyki budowli str. 232.

Z rys. widzimy, że $AU_0M_0 \cong U_0V_0V_0'$, więc $AM_0 = V_0V_0' = VV'$,



odstępowi linii krzyżowych MT i NS . Dalej otrzymamy $AM_0: \frac{1}{3}l = t_1:b$, a zatem wstawiając

$$AM_0 = \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{M}' \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{3}l}{b} =$$

$$= \frac{\mathfrak{M}' l^2}{6abh}, \text{ a jeżeli } b = \frac{1}{6}a, \text{ więc}$$

$$AM_0 = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a}\right)^2 = V_0V_0' = VV',$$

$$\text{a podobnie } B_0N_0 = \frac{\mathfrak{M}''}{h} \left(\frac{l}{a}\right)^2 =$$

$= U_0U_0' = UU'$. Widzimy stąd, że odstępów linii krzyżowych w pionowych trzecich części

(n. *Drittelverticale*, fr. *verticale trisectrice*) są proporcjonalne do momentów $\mathfrak{M}''$ i $\mathfrak{M}'$. Dla $a=l$ a $b=\frac{1}{6}l$ byłyby te odstępów pomnożone przez odległość biegunową równe momentom $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$. Zmieniwszy odpowiednio podziałkę i odczytując $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ w podziałce momentów, otrzymamy $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ wprost równe odstępom linii krzyżowych w pionowych trzecich części. Na przyszłość przyjmować będziemy, że momenty odczytujemy według osobnej podziałki momentów.

Z rysunku widzimy, że

$$QM = 2UU' = 2\mathfrak{M}'' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \quad QS = VV' = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \text{ więc}$$

$$MS = (2\mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}') \left(\frac{l}{a}\right)^2 = \mathfrak{M}'' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \text{ podobnie } NT = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \text{ a więc}$$

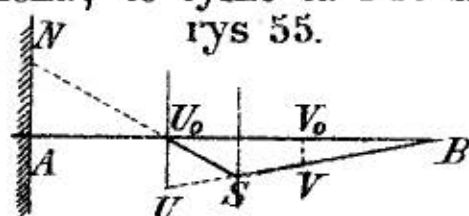
odstępów linii krzyżowych w pionowych podporowych są proporcjonalne do ilości $\mathfrak{M}''$ i $\mathfrak{M}'$, a dla $a=l$ równe ilościom $\mathfrak{M}''$ i $\mathfrak{M}'$. Ilości $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ i $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ są zależne tylko od obciążenia i dadzą się, jak wiemy, analitycznie wyznaczyć (§. 4). Znając je, możemy linie krzyżowe wykreślić.

Z rysunku widzimy też, że odcinki MS i NT są to momenty statyczne siły c , działającej w S , ze względu na pionowe podporowe AS i BT^*). Mamy więc

$$\left. \begin{aligned} MS \cdot b &= cm, & MS &= \frac{c \cdot m}{b} \\ NT \cdot b &= cn, & NT &= \frac{cn}{b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 199)$$

Długości c , m i n są znane, jeżeli obciążenie jest dane, dla danego b możemy więc obliczyć także w ten sposób MS i NT i wykreślić linie krzyżowe.

Jeżeli belka jest tylko z jednej strony poziomo utwierdzona, to tylko ta strona ma styczną poziomą AU_0 (rys. 55.)



rys. 55.

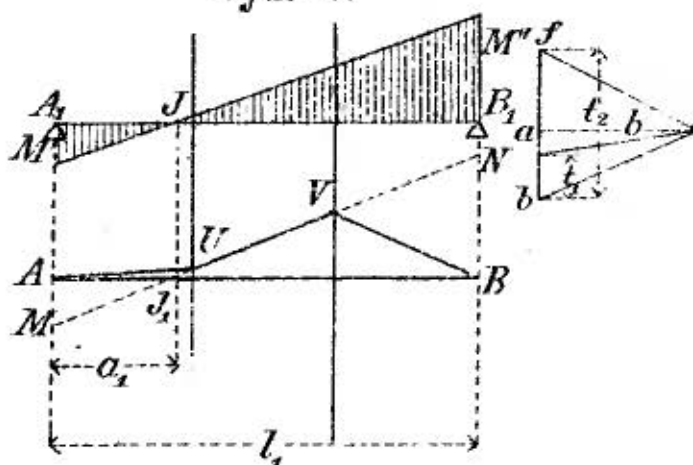
Ponieważ na drugiej podporze B moment jest równy zero, $BN=0$, zatem UVB jest linią prostą. Znając linie krzyżowe potrzebujemy więc tylko wykreślić UU_0 = odstępowi

odnośnemu linii krzyżowych i wykreślić BS i U_0S .

§. 41. Przęsło nieobciążone.

Jeżeli dane przęsło jest nieobciążone, a którekolwiek inne przęsło obciążone, to $c=0$, więc drugi wielobok sił składa się tylko z dwóch sił $t_1 = \frac{1}{2} M' \frac{l}{ah}$ i $t_2 = \frac{1}{2} M'' \frac{l}{ah}$. Jeżeli styczne podporowe są dane, to jest

rys. 56.



on zupełnie oznaczony.

Wiemy z poprzedniego, że momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu (rys. 56). Wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, mamy:

$$AM = \frac{M'}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2, \quad BN = \frac{M''}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2, \quad \text{więc } AM:BN = M':M''. \quad \text{Z rysunku widzimy też, że}$$

*) por. Podręcznik statyki budowli str. 12.

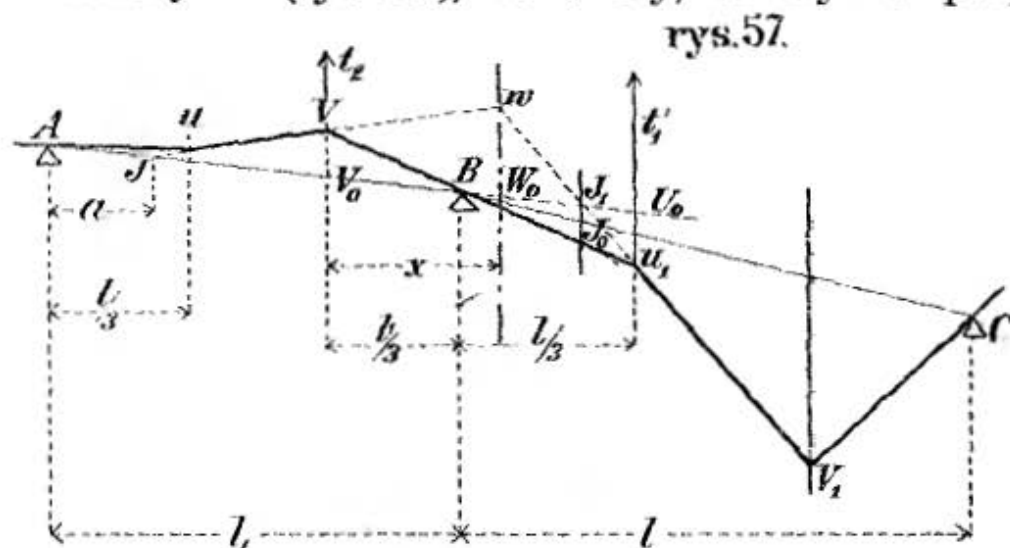
$a_1 : (l - a_1) = AM : BN$, więc $a_1 : (l - a_1) = M' : M''$, a że także $A_1 I : IB_1 = M' : M''$, więc

$$a_1 = A_1 I, \quad (l - a_1) = IB_1.$$

A zatem punkt I_1 przecięcia się boku średniego UV z prostą AB wyznacza punkt, w którym moment staje się zerem w prześle nieobciążonem. Jestto ów punkt stały znany z §. 9; że rzeczywiście jest on punktem stałym, udowodnimy to w następnym paragrafie.

§. 42. Dwa przęsła sąsiednie nieobciążone.

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę dwa sąsiednie przęsła nieobciążone (rys. 57.), to wiemy, że styczna podporowa w B



rys. 57.

jest wspólna dla obydwu przęseł. Jeżeli przedłużymy boki średnie wieloboku ugięcia obu przęseł, to WW_0 wyznaczy kie-

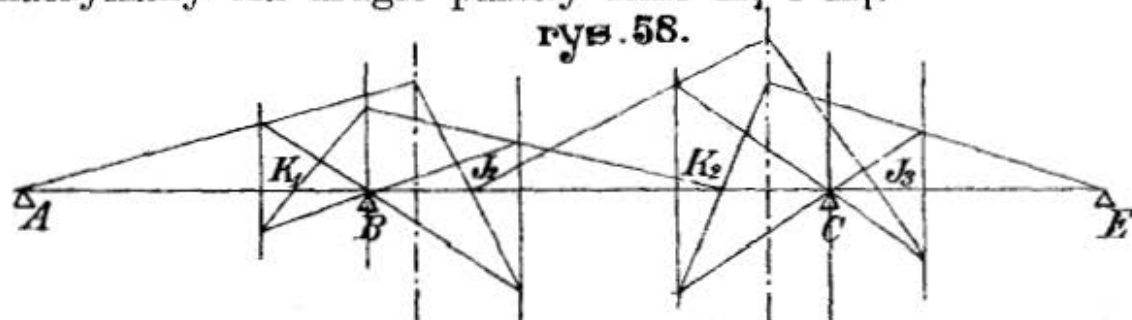
runek wypadkowej dwóch sił t_2 i t_1' , działających w V i U_1 . A że $t_2 : t_1' = \frac{1}{2} \frac{M_1}{h} \frac{l_1}{a} : \frac{1}{2} \frac{M_1}{h} \frac{l}{a} = l_1 : l$, więc odstęp poziomy wypadkowej $W_0 W_1$ od V i U_1 muszą się mieć jak $l : l_1$, a zatem $x = \frac{l}{3}$.

Pionową WW_0 , odległą od V o $\frac{l}{3}$ a od U_1 o $\frac{l_1}{3}$, niezależną od obciążenia, nazywamy przesuniętą pionową podporową (n. *verschränkte Stützenverticale*, fr. *verticale auxiliaire, contreverticale*); widzimy więc, że przedłużenia boków średnich dwóch przęseł nieobciążonych przecinają się w przesuniętej podporowej.

Z rysunku widzimy dalej, że $I_1 U_0 : I_1 W_0 = U_0 U_1 : WW_0$, a także $U_0 U_1 : V_0 V = l : l_1$, $V_0 V : WW_0 = IV_0 : IW_0$, a więc $U_0 U_1 : WW_0 = l IV_0 : l_1 IW_0$, nareszcie $I_1 U_0 : I_1 W_0 = l IV_0 : l_1 IW_0$.

Widzimy więc że położenie punktu I_1 jest przy danych l i l_1 zależne tylko jeszcze od położenia punktu I , więc dla jakiegokolwiek wieloboku sznurowego pozostaje punkt I_1 ten sam, jeżeli punkt I się nie zmienia. Ponieważ w przeszle skrajnym punkt I , w którym moment staje się zerem, jest zawsze na podporze, więc położenie jego się nie zmienia, a zatem i w następnych przeszłach punkty I nie zmieniają swego położenia, są więc stałymi. Z tego wynika następna konstrukcja wyznaczenia punktów stałych: Z punktu stałego I (a w pierwszym przeszle z podpory A) kreślimy dowolną prostą IW i otrzymujemy punkty V i W , kreślimy VB aż do przecięcia się z pionową trzecich części w U_1 i łączymy U_1 z W . Punkt przecięcia się z prostą AB wyznacza punkt stały I_1 . Jeżeli A , B i C nie leżą w linii prostej, to właściwym punktem stałym dla przęsła BC jest punkt I_0 , a punkt I_1 leży w pionowej punktu stałego.

W rys. 58. wyznaczyliśmy w ten sposób punkty stałe I_2 i I_3 dla podpór równo wysokich. Zaczynając z drugiego końca E wyznaczyliśmy też drugie punkty stałe K_2 i K_1 .



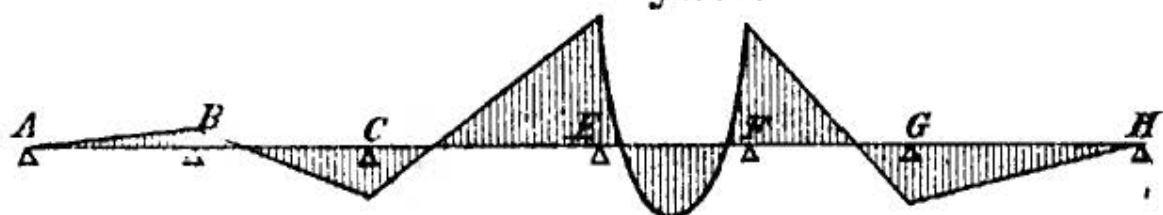
Jeżeli belka jest na pierwszej podporze w A poziomo utwierdzona, to wedle poprzedniego (§. 9.) punkt stały I_1 leży nie w A , lecz w jednej trzeciej pierwszego przęsła.

Z konstrukcyi tej podanej przez Mohra wynika bezpośrednio, że punkty stałe leżeć muszą w skrajnych trzecich częściach przęsła.

§. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przeszłach nieobciążonych.

Rysunek 59. przedstawia pierwszy wielobok sznurowy dla belki ciągłej, której n -te przeszło jest obciążone. Linie momentów są w przeszłach nieobciążonych proste i przechodzą przez punkty stałe, stąd momenty podporowe są naprzemian dodatnie i ujemne, wzrastają ku przeszłu obciążonemu i są więcej niż dwa razy większe od poprzednich. Siły poprzeczne są to pochodne

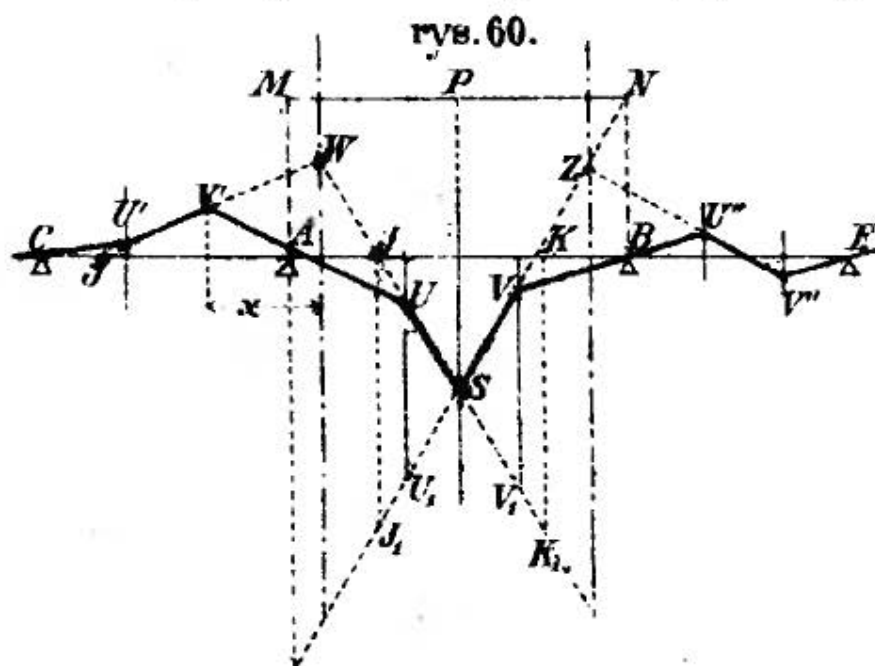
funkcyi momentów, a więc w przęsłach nieobciążonych linie sił poprzecznych są poziome. a że stąd jest naprzemian dodatnia
rys. 59.



i ujemna, więc i siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne. Oddziaływania równają się różnicy algebraicznej sił poprzecznych z prawej i lewej strony podpory, a więc gdy siły poprzeczne zmieniają naprzemian znaki, oddziaływania są też naprzemian dodatnie i ujemne.

§. 44. Przęsło obciążone.

Jeżeli przęsło AB (rys. 60.) jest obciążone, a inne przęsła nieobciążone, to można podobnie, jak w §. 41, łatwo dowieść,



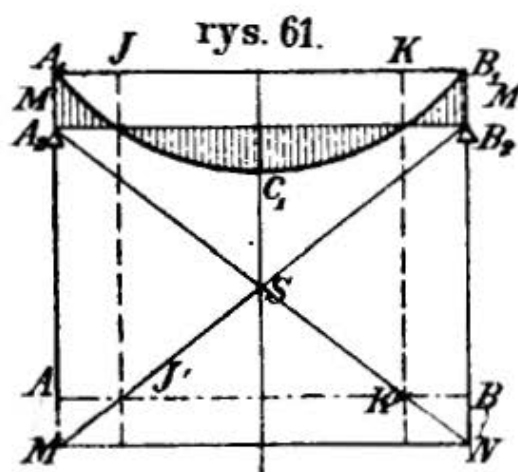
że przedłużenia boków średnich drugiego wieloboku sznurowego dwóch sąsiednich przęseł przecinają się w przesuniętej podporowej i przedłużenia boków średnich SM

i SN przechodzą przez punkty stałe I i K , gdy podpory są w jednej linii prostej, inaczej zaś przez punkt przecięcia się prostej CA względnie BE i pionowej przez punkt stały. Aby więc wykreślić drugi wielobok sznurowy przęsła obciążonego, postępujemy w następujący sposób. Jeżeli mamy dane obciążenie, wykreślamy linie krzyżowe. W §. 40 udowodniliśmy, że UU_1 i VV_1 są równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, a że odnosi się to i do innych odcinków, więc i do II_1 i KK_1 , które

robimy równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, kreślimy IK , i KI , i w ten sposób otrzymujemy dwa średnie boki drugiego wieloboku sznurowego. Odcinki AM i BN , któreśmy teraz uzyskali, są proporcjonalne do momentów podporowych.

Ponieważ $AI < \frac{1}{3}l$, a $AUS < 180^\circ$, więc siła działająca w $U = \frac{1}{2}M' \frac{l}{a}$ działa do góry i jest ujemna, a stąd i M' jest ujemnem. Widzimy więc, że momenty podporowe przęśla obciążonego są ujemne.

Jeżeli podpory leżą w linii prostej. to do wyznaczenia momentów podporowych możemy użyć następnej konstrukcyi (rys. 61).



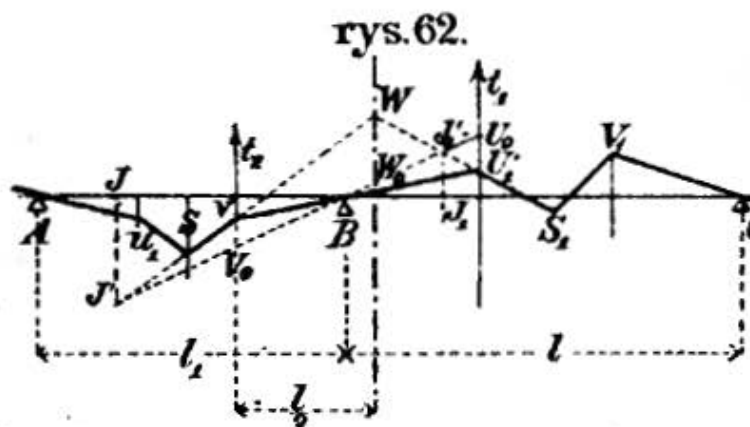
rys. 61.

Jeżeli A, C, B jest zwykłą powierzchnią momentów, a SN i MT liniami krzyżowymi, to spuszczaemy z punktów stałych I i K pionowe, które przecinają linie krzyżowe w I' i K' , a IK' jest wtedy linią zamykającą AB , jak w (rys. 60.), odcinki zatem AM i BN są równe (jeżeli $a_1 = l$), albo proporcjonalne do momen-

tów M' i M'' . Robimy teraz momenty $M' = A_1A_2$ i $M'' = B_1B_2$, a A_2B_2 jest linią zamykającą dla belki ciągłej.

§. 45. Dwa sąsiednie przęśla obciążone.

I tu (rys. 62.) W jest wypadkową sił t_1 i t_2 , leży więc w odległości $\frac{l}{3}$ od V_1 , a zatem przedłużenia boków średnich



rys. 62.

dwóch sąsiednich przęśli przecinają się w przesuniętej podporowej. Możemy tu także udowodnić, że prosta $I'I_1'$ poprowadzona przez punkt B przecina przedłużenia boków śred-

nych VS i U_1S_1 w pionowych punktach stałych. Widzimy bowiem z rysunku, że: U_0U_1 i $VV_0 = l:l_1$ i $VV_0:WW_0 = IV_0:IW_0$, a zatem $U_0U_1:WW_0 = lIV_0:l_1IW_0$.

Dalej mamy $U_0 U_1 P \sim W_0 W_1 P$, więc

$$U_0 U_1 : W_0 W_1 = U_0 I_1' : W_0 I_1', \text{ zatem}$$

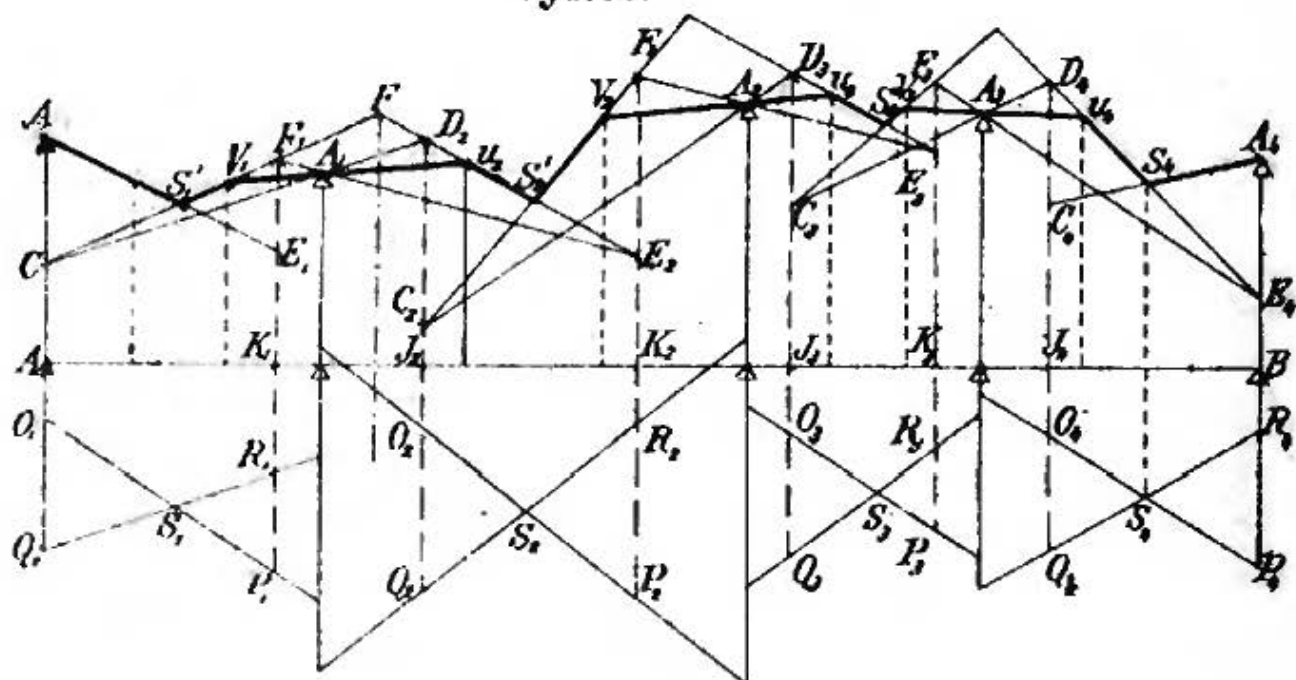
$$U_0 I_1' : W_0 I_1' = l_1 P V_0 : l_1 P W_0.$$

Gdy punkt P porusza się w pionowej, nie zmienia się stosunek $I' V_0 : I' W_0$, więc i stosunek $U_0 I_1' : W_0 I_1'$ zostaje ten sam, a zatem I_1' pozostaje w tej samej pionowej. Gdy więc punkt P jest stałym, to i I' jest także punktem stałym.

§. 46. Dowolne obciążenie przęseł.

Jeżeli belka ciągła o nierówno wysokich podporach jest dowolnie obciążona (rys. 63.), to korzystając z poprzednich twierdzeń, możemy wykreślić drugi wielobok sznurowy i zeń

rys. 63.



wyznaczyć momenty podporowe. Postępujemy wtedy w następujący sposób.

1. Wyznaczamy punkty stałe $A_1, I_1, I_2, \dots, K_1, K_2, \dots$ zapomocą konstrukcyi, opisanej w §. 42.
2. Wykreślamy we wszystkich przęsłach linie krzyżowe, a to według §. 38., wykreśliwszy drugi wielobok sił i przyjmąwszy odpowiednią odległość biegunową $b = \frac{1}{2} a$, lub też, co lepiej i prędzej, obliczając $\mathfrak{N}'$ i $\mathfrak{N}''$, a stąd odstępów linii krzyżowych w pionowych podporowych według §. 40.

Według §. 38. odstęp między średnimi bokami w pionowych trzecich części, a zatem i w innych pionowych jest równy

odpowiedniemu odstępowi linii krzyżowych. A więc robimy $AC=O_1Q_1$, kreślimy CA_1 aż do D_1 , do przecięcia się z pionową punktu stałego w drugim przęśle, wtedy D_1 jest punktem boku średniego drugiego wieloboku sznurowego według §. 45. Dalej robimy $D_2C_2=O_2Q_2$, kreślimy C_2A_2 aż do D_2 i t. d. Potem zaczynamy znów od A_4 . robimy $A_4E_4=R_4P_4$, kreślimy E_4A_4 aż do F_4 , robimy $F_3E_3=R_3P_3$ itd.

4. W ten sposób otrzymamy dla każdego boku średniego dwa punkty C i F_1 , C_2 i F_2 , A i E_1 itd. tak, że te boki możemy wykreślić. Pionowe trzecich części, przecinające boki średnie, wyznaczają punkty boków skrajnych, które teraz możemy wykreślić. Odcinki pionowe między przedłużeniami boków średnich a podporami są, jak wiadomo, proporcjonalne do momentów podporowych, które w ten sposób możemy wyznaczyć. Czy konstrukcja była dokładna, możemy sprawdzić w następujący sposób:

1. Boki średnie przecinają się w przesuniętych podporowych np. CF_1 i E_1D_1 w F .

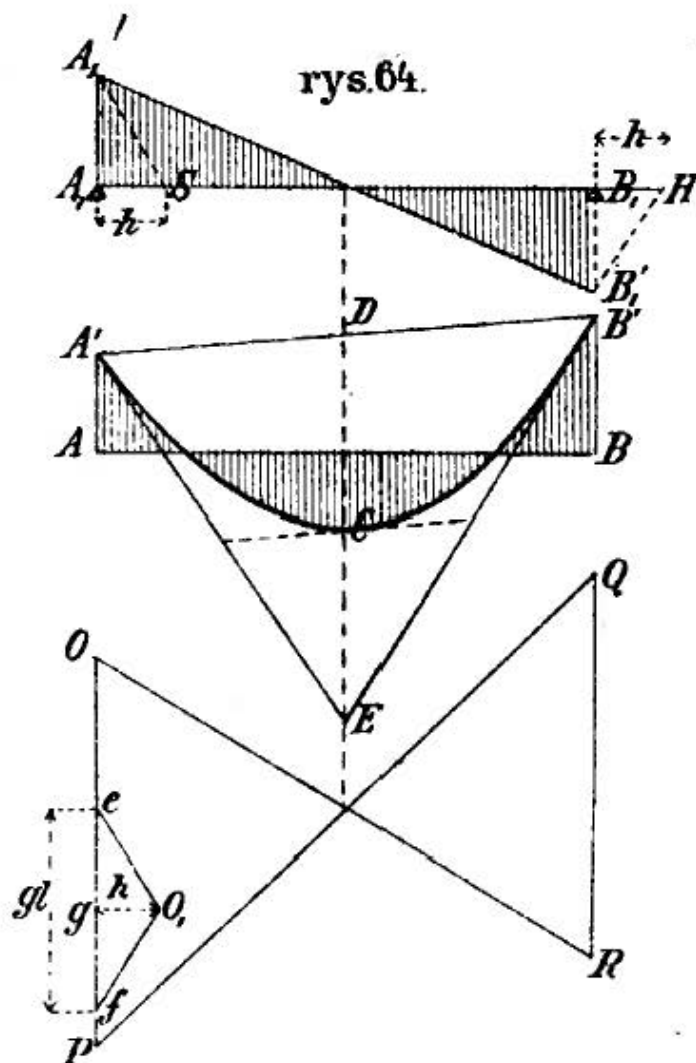
2. Punkt przecięcia się boków średnich jednego przęsła musi leżeć w pionowej nad punktem przecięcia się linii krzyżowych np. S_1' nad S_1 .

3. Prosta łącząca punkty przecięcia się boków średnich z pionowymi trzecich części w przęsłach sąsiednich musi przechodzić przez podporę, np. punkty V_1 , A_1 i U_1 muszą leżeć w prostej. Jeżeli przęsło które nie jest obciążone, $\sqrt{\text{to}}$ obie linie krzyżowe wpadają na siebie. Konstrukcję tę podał pierwszy Culmann.

Co się tyczy podziałek musimy pamiętać, że stosunek podziałki momentów jest, jak wiemy, $\frac{1}{hm}$, jeżeli stosunek podziałki długości jest $1/m$. Druga odległość biegunowa b ma być równą $\frac{a}{6}$. Jeżeli nie chodzi nam o ugięcie, a podpory są w linii prostej, to obojętna jest podstawa a do zamieniania powierzchni; jeżeli zaś podpory są w nierównych wysokościach, a różnice wysokości wykreślimy w podziałce $\frac{1}{n}$, to musimy według 196) przyjąć $b = \frac{n \epsilon I}{a^2 m}$. Przyjmujemy więc najprzód a równe rozpiętości średniej lub jednej z danych rozpiętości, przyjmujemy dalej $b = \frac{a}{6}$ w podziałce długości i obieramy taką podziałkę sił, aby $b = \frac{n \epsilon I}{a^2 m}$.

§. 47. Obciążenie jednostajne zupełne.

Jeżeli przęsło AB (rys. 64.) belki ciągłej jest jednostajnie



rys. 64.

obciążone, to linia momentów jest tu parabolą. Płóci $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ wyznaczmy według równania 15), mianowicie $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{4}gl^2$, a więc według §. 40) odcinki podporowe linii krzyżowych $OP = QR = \frac{1}{4}gl^2\left(\frac{l}{a}\right)^2 = \frac{1}{4}ga^2\left(\frac{l}{a}\right)^4$. Wyznaczenie momentów podporowych w ogóle odbywa się podług poprzedniego paragrafu w razie, jeśli podpory znajdują się w linii prostej, według §. 44 (rys. 61).

Znając momenty podporowe AA' i BB' , kreślimy $A'B'$ i w połowie przęsła pionową $DE = \frac{1}{4}gl^2$, wtedy $A'E$ i EB' są stycznymi paraboli a $DC = \frac{DE}{2} = \frac{1}{8}gl^2$.

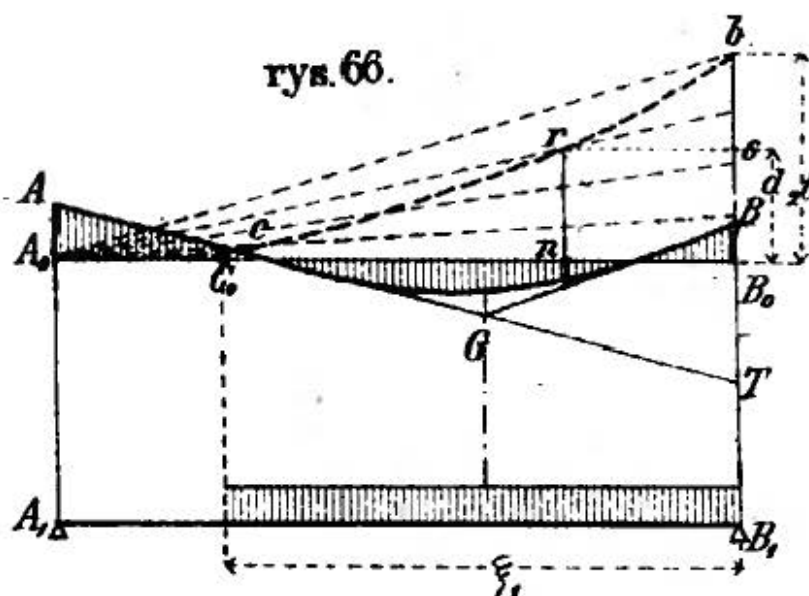
Sily poprzeczne wyznaczamy w następnym sposobie: Robimy $ef = gl$, $fO \parallel EB'$ i $eO \parallel A'E$, to otrzymamy biegun O , i pierwszą odległość biegunową h . Prowadzimy teraz $Og \parallel AB$, jako zamykającą, a będzie $eg = Q'$, $gf = Q''$. Zróbmy teraz $A_1A_1' = Q' = eg$ i $BB' = Q'' = gf$, to A_1A_1' jest linią sił poprzecznych.

A_1A_1' i B_1B_1' możemy też wprost otrzymać. Zróbmy $B_1H = A_1S = h$, dalej $SA_1' \parallel EA'$ i $HB_1' \parallel B'E$, to otrzymamy Q' i Q'' .

§. 48. Obciążenie jednostajne częściowe.

Jeżeli tylko część przęsła C_1B_1 (rys. 65.) jest jednostajnie obciążona, to linia sznurowa składa się z prostej AC i paraboli CB . Jeżeli w wieloboku sił wykreślimy promienie równoległe do stycznych podporowych, to dla obciążenia całego przęsła styczna byłaby EF' , więc odnośny promień $OE' \parallel EF'$. Zróbmy

rys. 66.



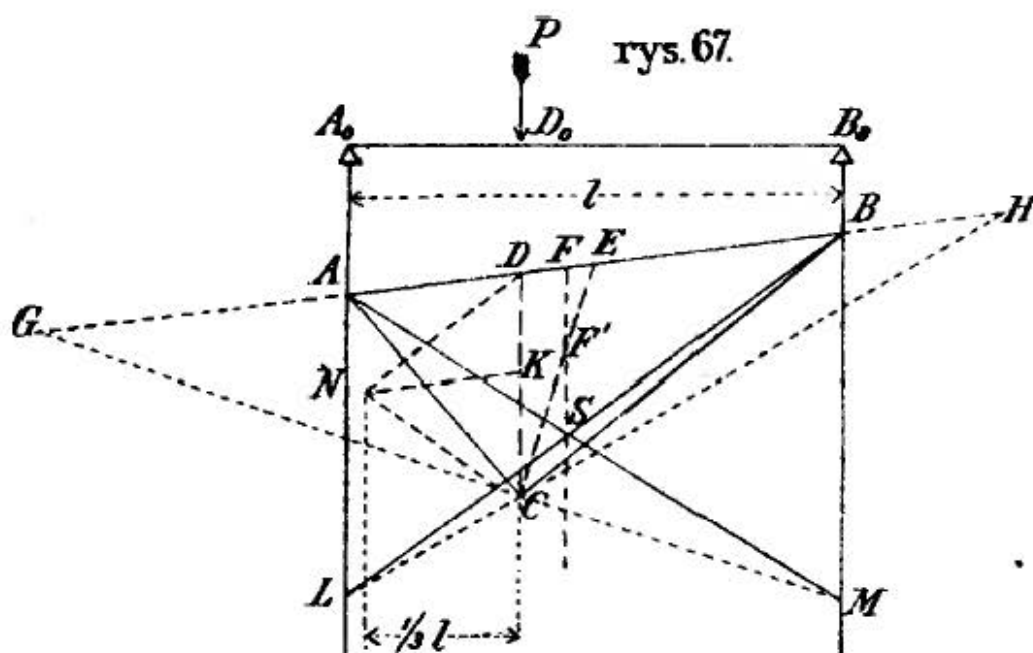
momentów, to jeżeli
 $CD=f$, $ABC=\frac{1}{2}lf$,
 więc $M=\frac{ABC}{l}=\frac{1}{2}f$.

Zróbmy $AE=EB$,
 $EF=\frac{1}{3}ED$, to przez F
 przechodzi oś ciężkości
 trójkąta ACB , bo
 $EF'=\frac{1}{3}EC$. Ponieważ
 $CD=f$ jest proporcjo-
 nalne do M , więc mo-
 żemy tu zaraz wykre-
 ślić drugi wielobok
 sznurowy. Z powodu,

że $f=2M$,
 więc dla-
 tego i b
 przyjmie-
 my 2 razy
 większe,
 więc $b=$
 $=2\frac{1}{2}a=\frac{5}{3}a$.

Jeżeli
 chodzi nam
 o wyzna-
 czenie mo-
 mentów
 podporo-

rys. 67.



wych tylko danego przęsła, to możemy przyjąć $l=a$; jeżeli zaś
 jest kilka przęseł nierównych równocześnie obciążonych, a mo-
 menty wyznaczamy według §. 46), to wtedy musimy przyjąć a
 wspólne dla wszystkich przęseł, najlepiej średnią długość przęseł.

Tu przyjmiemy $a=l$, zatem $b=\frac{5}{3}l$. Jeżeli więc N jest dru-
 gim biegunem, to ND i NC są promieniami skrajnymi drugiego
 wieloboku sznurowego. Jeżeli $NK \parallel AB$, to $NK=\frac{1}{3}AB$. Linie
 krzyżowe są równoległe do ND i NC , jeżeli chcemy, aby prze-
 chodziły przez A i B , to wykreślmy $AM \parallel NC$ i $BL \parallel ND$. Punkt
 przecięcia się linii krzyżowych S musi leżeć w pionowej pod
 środkiem ciężkości pojedynczej powierzchni momentów i mamy

$SBM \simeq NDC$, zatem $BM:CD=BF:NK$. Ale $BF=\frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}AB - AD)=\frac{1}{3}(2AB - AD)$, a $NK=\frac{1}{3}AB$,

więc $BM:CD=(2AB - AD):AD$.

Zróbmy teraz $DG=AB$ i $DH=AB$, to $BG=2AB - AD$. A więc prosta GC musi przechodzić przez punkt M , gdyż w takim razie

$$BM:CD=BG:GD, \text{ czyli}$$

$$BM:CD=(2AB - AD):AB, \text{ jak pierwiej.}$$

Podobnie otrzymamy, przedłużając linią HC , punkt L .

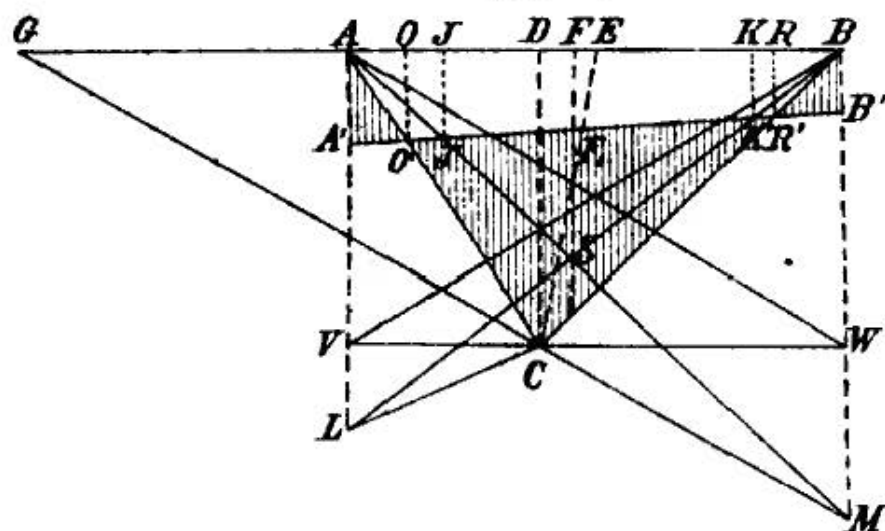
Jeżeli punkt G wypada za papier, użyć możemy drugiego sposobu wyznaczenia punktów L i M .

Wykreślmy $VW \parallel AB$ (rys. 68.), $CL \parallel BV$ i $CM \parallel AW$. Wtedy linie AM i BL są liniami krzyżowymi, jak to zaraz udowodnimy. Przedłużmy AB i MC aż do G , to $GDC \simeq ABW$,

bo $DC=BW$,

a wszystkie boki równoległe, więc $GD=AB$, a zatem na mocy poprzedniego dowodu punkt M jest punktem linii krzyżowej. To samo możemy udowodnić co do

rys. 68.



punktu L . Z konstrukcji powyższej wynika, że punkt S musi leżeć wewnątrz trójkąta ABC . Po wykreśleniu linii krzyżowych możemy teraz łatwo według §. 44) wyznaczyć momenty w danym przęśle. Spuszczamy z punktów stałych pionowe do przecięcia się z liniami krzyżowymi w P i K' i kreślimy przez P i K' zamykającą $A'B'$. Powierzchnia kreskowana przedstawia powierzchnię momentów.

§. 50. Linie wpływowe.

Na podstawie poprzednich twierdzeń możemy wyznaczyć łatwo linie wpływowe sił poprzecznych i momentów. Tok konstrukcji wedle Steinera (tabl. I, rys. 1.) jest następujący:

1. Wyznaczamy punkty stałe (rys. α) według §. 42. w znany sposób.

2. Dzielimy każde przęsło na pewną ilość części np. na 4 części i wyznaczamy momenty dla położenia ciężaru w punktach 1, 2, 3, 5, 6. Niech np. ciężar $P=1\text{ t}$ działa w punkcie 2. Przyjawszy podziałkę $\frac{1\text{ t}}{2\text{ cm}}$ i $\frac{1\text{ mm}}{1\text{ m}}$, wykreślamy wielobok sił, a mianowicie $a'b'=P$ (rys. γ), obieramy biegun O w odległości $h=\frac{1}{2}t$, kreślimy promień i wielobok sznurowy (rys. β). $A'2'B'$ jest pojedynczą powierzchnią momentów.

Zrobiwszy $2H=A'B'$, kreślimy $H2'$ aż do A'' , a prosta $B'A''$ jest linią krzyżową. Druga linia krzyżowa przechodzi przez A . Z punktów stałych A i K_1 spuszcza my pionowe aż do przecięcia z liniami krzyżowymi, łączymy punkty przecięcia się i otrzymujemy zamykającą $A'b$, która odcina na pionowej w B odcinek $B'b$, równy momentowi podporowemu dla tego obciążenia. Linię tę momentów sprowadzamy teraz do poziomej zamykającej (rys. δ) i wykreślamy też momenty w innych przęsłach, prowadząc linie momentów przez punkty stałe. Linie te momentów oznaczyliśmy na rysunku cyframi 2. Tak samo wykreślamy linie momentów dla położenia ciężaru P w punktach 1 aż do 6 i linie te oznaczone są znaczkiem punktu zaczepienia siły. Teraz możemy wykreślić linie wpływowe momentów (rys. η). Jeżeli chcemy np. wykreślić linię wpływową dla punktu 2, to gdy siła P stoi w 1, w punkcie 2 $M=2''a$, robimy więc (rys. η) $1'a'=2''a$. Gdy ciężar P stoi w punkcie 2, to moment w tym punkcie $2'2$, robimy więc (rys. η) $2'2=2''2$ i t. d.

Jeżeli ciężar stoi w punkcie 7, to sprawia ten sam moment w punkcie 2, co ciężar w punkcie 5 sprawia w punkcie 10, więc $b10''$, robimy więc $b10''=7'b'$ i t. d. Połączywszy poszczególne punkty, otrzymamy linię wpływową momentów dla 2. Tak samo wykreślamy linie wpływowe dla innych punktów. Stosunek podziałki dla momentów będzie $\frac{1\text{ mm}}{1\text{ m } \frac{1}{2}t} = \frac{1\text{ mm}}{\frac{1}{2}tm}$.

Na rys. ε wykreśliliśmy linie wpływowe dla sił poprzecznych. Pełna linia jest dla punktu 2, dla innych linie kreskowane. Jeżeli ciężar P stoi w punkcie 2, jak w danym wypadku, to kreślimy w wieloboku sił promień $Om \parallel A'b$, a wtedy $Om=O_0$. Na długości od A do 2 jest więc $Q=O_0=a'm$, dla punktów zaś od 2 do 4 $Q=O_0-P=mb'$. Widzimy więc, że wszystkie linie

wpływowe dla punktów od A do 2 będą miały w 2 tę samą rzędną, zaś linie wpływowe dla punktów od 2 do B mają w 2 rzędną $c 2'$. Długość $2'2 = P$. Wyznaczenie linii wpływowych dla sił poprzecznych jest więc bardzo łatwe, bo te nakrywają się po części.

Jeżeli ciężary przenoszą się na belkę zapomocą poprzecznic, to linie te zmieniają się wskutek tego tak, jak przy belce jedno-przęsłowej. Zamiast linii wpływowych otrzymujemy wieloboki, których wierzchołki, odpowiadające poprzecznicom, leżą na tych liniach krzywych.

§. 51. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów.

Z kształtu linii wpływowych sił poprzecznych widzimy, że siła poprzeczna w danym przekroju jest największą lub najmniejszą, gdy obciążenie sięga od przekroju do prawej lub lewej podpory tegoż przęsła, a następne przęsła są naprzemian obciążone. Chcąc wyznaczyć najniekorzystniejsze położenie dla momentów, założmy, że w punkcie D przęsła AB (rys. 68.) działa ciężar P . Dla tego położenia ciężaru wyznaczyliśmy linią zamykającą $A'B'$, a więc jeśli $a=l$, AA' i BB' są równe momentom podporowym. Z rysunku widzimy, że jeżeli ciężar jest w D , w O moment jest równy zeru. Jeżeli ciężar posunie się na prawo, w O moment jest ujemny, jeżeli na lewo, dodatni. Dla *najw* M w punkcie O musi więc być obciążona długość AD , dla *najmn* M długość DB . Ponieważ punkt S jest wewnątrz trójkąta ABC , więc punkty O i R leżą po za punktami stałymi. Widzimy więc, że tylko dla punktów pierwszej i trzeciej części przęsła mamy punkt obojętny, dla punktów części średniej między punktami stałymi nie ma takiego punktu obojętnego, moment jest zawsze dodatni, a zatem *najw* M jest dla zupełnego obciążenia (tabl I, rys. 27). Inne przęsła muszą być naprzemian obciążone.

§. 52. Największe siły zewnętrzne.

Siły poprzeczne i momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych najlepiej obliczymy zapomocą linii wpływowych. Sposób wyznaczenia największych sił zewnętrznych na podstawie linii wpływowych podaliśmy w Podr. teor. most. w tomie I (str. 33). Jeżeli belka jest obciążona ciężarem jednostajnym

ciągłym, to największe siły poprzeczne i momenty wyznaczymy w następujący sposób:

1. Wyznaczamy najpierw punkty stałe znanym sposobem według §. 42 (tab. I, rys. 2a).

2. Dla wyznaczenia momentów podporowych (rys. 2b) postępujemy w następujący sposób:

Na pionowej przez podporę A odcinamy T_4 odległość linii krzyżowych na podporach dla obciążenia zupełnego pierwszego przęsła. Według §. 47) jest $T_4 = \mathfrak{N}' \left(\frac{l_1}{a} \right)^2 = \frac{1}{4} p l_1^2 \left(\frac{l_1}{a} \right)^2$. Gdy przyjmiemy $a = l_1$, to $T_4 = \mathfrak{N}' = \frac{1}{4} p l_1^2$, a z konstrukcyi otrzymamy wprost moment podporowy M . T_4 możemy też otrzymać zapomocą konstrukcyi, łącząc B z wierzchołkiem paraboli wykreślonej dla belki zwykłej, T_4 będzie wtedy także $= 2 \frac{1}{8} p l_1^2 = = \frac{1}{4} p l_1^2$. Dalej obliczymy T_3 , T_2 i T_1 dla obciążeń częściowych pierwszego przęsła od podpory A do punktu 3, 2 lub 1 (§. 40.) Jeżeliśmy, jak tu, przyjęli $a = l_1$, to $T_3 = \mathfrak{N}_3'$ i t. d., zaś $\mathfrak{N}'$ wyznaczymy według równania 17). Punkty w ten sposób wyznaczone łączymy z B_1 , a punkty przecięcia się tych prostych z pionową punktu stałego K_1 , połączone z A , wyznaczają na podporowej B punkta 1, 2, 3, 4. Odcinki $B1$, $B2$, $B3$, $B4$ są to momenty podporowe dla obciążeń długości $A1$, $A2$, $A3$ i AB .

Podobnie otrzymujemy i w drugim przęśle momenty podporowe $B5$, $B6$, $B7$, $B8$ i $C5$, $C6$, $C7$, $C8$. I tu odcinamy najpierw na obu pionowych podporowych ilości T_3 , $T_4 \dots T_4'$, $T_3' \dots$, łączymy te punkty z C , a względnie z B i przez punkty przecięcia się z pionowymi punktów stałych prowadzimy zamykające, które odcinają momenty podporowe dla odnośnych obciążeń częściowych drugiego przęsła.

3. Teraz rysujemy najmniejsze momenty i to najprzód w pierwszym przęśle. Na długości AK_1 są najmniejsze momenty, gdy jest obciążone przęsło średnie (obciążenie I, rys. 7), wtedy moment na podporze B jest $B8$. Zróbmy (rys. 8) $B'O'' = B8$ i połączmy A' z O'' , wtedy prosta ta do K_1 będzie linią najmniejszych momentów. Dla wykreślenia dalszej części tej linii najlepiej będzie wyznaczyć ją stycznymi dla obciążenia $\frac{l_1}{4}$, $\frac{2l_1}{4}$, $\frac{3l_1}{4}$ i $\frac{4l_1}{4}$ i dla równoczesnego obciążenia drugiego przęsła [II, III, IV, V, rys. 7]. Najprzód wyznaczymy według rów. 201) długość $d = 2t \left(\frac{\xi_1}{l_1} \right)^2$ dla powyższych obciążeń i otrzymamy $d_4 = 2t =$

$=A'4'''$ (rys. δ), $d_3=A'3'''$, $d_2=A'2'''$, $d_1=A'1'''$. Moment podporowy dla obciążenia II jest $=B1+B8=B0''' + 0'''1''' = B1'''$, zatem $1''1'''$ jest styczną do linii sznurowej dla obciążenia II. Podobnie otrzymamy styczne $2''2'''$, $3''3'''$, $4''4'''$ dla obciążenia III, IV i V, które wyznaczają resztę linii najmniejszych momentów w pierwszym przęśle.

W przęśle średnim także najpierw wykreślimy linią najmniejszych momentów. Dla obciążenia IV (rys. γ) otrzymamy moment ujemny w C $CO'=B4$. Połączmy O z F_2 , a otrzymamy moment podporowy w B . Punkt K_2' tej prostej wyznacza najmn. moment w punkcie K ; jeżeli więc przez K_2' poprowadzimy poziomą, to $F_2''K_2'$ będzie linią najmniejszych momentów. Pozostaje jeszcze krzywa 4go stopnia $K_2'8'$, którą znowu wyznaczymy stycznymi.

Dla najmniejszych momentów na trzeciej części średniego przęsła musi być obciążona pewna długość od B i trzecie przęsło (obciąż. VII do X, rys. γ). Najprzód więc wyznaczymy momenty podporowe dla każdego obciążenia. Np. dla obciążenia VII, otrzymamy ujemny moment w C dodając CO' do $C5$, otrzymamy więc $C5'$, na podporze zaś B będzie $M=B5-B0$. Teraz wyznaczamy według §. 48)

$d_8=2t_8=B'8'$, $d_7'=B7'$ itd., odcinamy od tego odnośny moment podporowy w B i otrzymujemy wtedy punkty $8''7''$ i t. d.; które połączone z punktami $8'$ i $7'$ itd. dają styczne do linii najmniejszych momentów.

Resztę linii najmniejszych momentów dopełniamy, rysując symetrycznie do środka belki.

Linią największych momentów otrzymamy przez odcinanie rzędnych linii najmniejszych momentów od linii momentów dla całkowitego obciążenia. Aby zaś tę linię otrzymać, zauważymy, że dla zupełnego obciążenia otrzymamy momenty podporowe, dodając momenty, wywołane obciążeniem każdego przęsła, więc w punkcie B będzie $M=-B4-B8+B0$. W C będzie moment także tak wielki, a znając teraz momenty podporowe, wykreślić możemy z łatwością paraboliczne linie sznurowe.

Wyznaczenie sił poprzecznych jest łatwe; zważyć nam tylko trzeba, że obciążenia w schemacie (rys. γ) uwidocznione, wywołują najmn Q dla odnośnych punktów. Jeżeli więc od punktu A , 1, 2, 3, B , 5, 6 itd. (rys. ϵ) na lewo odetniemy odległość biegunową a i wykreślimy równoległe do odnośnych stycznych

przyczem całkować mamy od początku do końca belki przez wszystkie przęsła.

Nazwijmy dalej dla pewnego przęsła

$$\frac{I_0}{l} \int_0^l \frac{dx}{I} = A, \quad \frac{2 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{x dx}{I} = B, \quad \frac{3 I_0}{l^3} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = C,$$

to, jeśli I stałe, $A=B=C=1$.

Nazwijmy jeszcze dla skrócenia

$$-\frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X x dx}{I} = \mathfrak{M}', \quad \frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X(l-x) d(l-x)}{I} = \mathfrak{M}'', \quad (207)$$

$$\text{to} \quad \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = -\frac{6 I_0}{l} \int_0^l \frac{X dx}{I} \quad \dots \quad (208)$$

Wstawiając te wartości w rów. 205) i 205 a), otrzymamy

$$6 \varepsilon I_0 l (\tau_1 - \tau_2) = 3(2A - B) M' l^2 + 3 B M'' l^2 - (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'') l^2,$$

$$6 \varepsilon I_0 (s - l \tau_2) = (3B - 2C) M' l^2 + 2 C M'' l^2 - \mathfrak{M}'' l^2.$$

A stąd otrzymamy

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{6 \varepsilon I_0} (2 \alpha M' + \gamma M'' - \mathfrak{M}') + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= -\frac{1}{6 \varepsilon I_0} (\gamma M' + 2 \beta M'' - \mathfrak{M}'') + \frac{s}{l} \end{aligned} \quad \dots \quad (209)$$

$$\text{jeżeli} \quad \alpha = 3A - 3B + C, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C \quad \dots \quad (210)$$

Dla przekroju stałego otrzymamy znowu $\alpha = \beta = \gamma = 1$, a wtedy rów. 209), przechodzi w rów. 10).

Jeżeli dla belki poziomo utwierdzonej nazwiemy, jak pierwszej, momenty podporowe $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$, to według rów. 209)

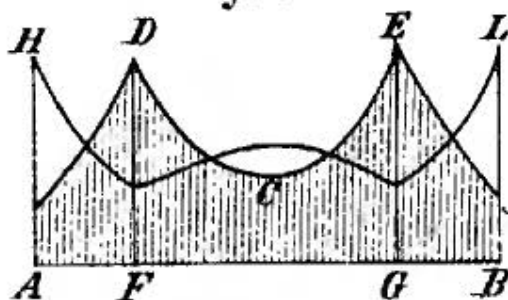
$$0 = 2 \alpha \mathfrak{M}' + \gamma \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}', \quad 0 = \gamma \mathfrak{M}' + 2 \beta \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}'',$$

$$\text{więc} \quad \mathfrak{M}' = 2 \alpha \mathfrak{M}' + \gamma \mathfrak{M}'', \quad \mathfrak{M}'' = \gamma \mathfrak{M}' + 2 \beta \mathfrak{M}'' \quad \dots \quad (211)$$

Dla przekroju stałego przechodzi rów. 211) w rów. 11).

§. 54. Wyznaczenie ilości pomocniczych.

rys. 69.



W celu wyznaczenia ilości pomocniczych α , β i γ , wykreślmy w każdym punkcie belki rzędną proporcjonalną do odwrotności momentu bezwładności, więc $\frac{1}{I}$ (rys. 69.). Końce tych rzędnych, wyznaczają

linię krzywą, a powierzchnia między tą linią a osią niech się nazywa odwrotną powierzchnią bezwładności (n. *Krümmungsfläche*).

Całki $\int_0^l \frac{dx}{I}$, $\int_0^l \frac{x dx}{I}$, $\int_0^l \frac{x^2 dx}{I}$ oznaczają zatem powierzchnię odwrotną bezwładności A' , moment jej statyczny S' i bezwładności I' ze względu na AH , więc

$$A = \frac{I_0 A'}{l}, \quad B = \frac{2 I_0 S'}{l^2}, \quad C = \frac{3 I_0 I'}{l^3}.$$

Nazwijmy moment statyczny i bezwładności ze względu na BL S'' i I'' i $B_1 = \frac{2 I_0 S''}{l^2}$, $C_1 = \frac{3 I_0 I''}{l^3}$, to

$$S'' = \int_0^l \frac{(l-x) dx}{I} = l \int_0^l \frac{dx}{I} - \int_0^l \frac{x dx}{I} = A' l - S',$$

$$I'' = \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} = l^2 \int_0^l \frac{dx}{I} - 2l \int_0^l \frac{x dx}{I} + \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = A_1 l^2 - 2l S' + I',$$

więc $B_1 = \frac{2 I_0}{l^2} (A' l - S') = 2 A - B,$

$$C_1 = \frac{3 I_0}{l^3} (A_1 l^2 - 2l S' + I') = 3 A - 3 B + C,$$

a zatem według 210)

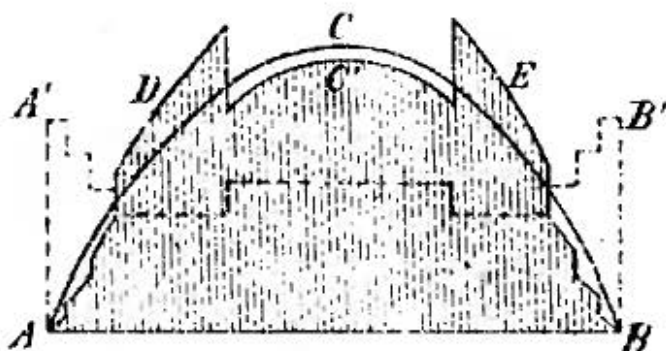
$$\alpha = C_1, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C = 3A - \alpha - \beta \quad . \quad . \quad 212)$$

Do wyznaczenia ilości pomocniczych α , β i γ potrzebujemy więc tylko A , C i C_1 , a więc powierzchnię i momenty bezwładności odwrotnej powierzchni bezwładności, co możemy wyznaczyć albo rachunkiem sposobem zwykłym lub Simpsona albo konstrukcją albo planimetrem.

§. 55. Wyznaczenie ilości $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{A}''$.

Według rów. 207

rys. 70.



$$\mathfrak{A}'' = - \frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X x dx}{I},$$

$$\mathfrak{A}' = + \frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X (l-x) d(l-x)}{I},$$

przyczem X oznacza moment dla belki w dwu punktach podpartej. Jeżeli wykreślimy zwykłą linią momentów ACB (rys. 70.) i jeżeli każdą

nemu; podobnie też w każdym przęśle znajdują się dwa punkty stałe, dla których, jak w 44 i 45),

$$a = \frac{1}{1+\mu}, \quad b = \frac{1}{1+\nu} \quad \dots \quad 216)$$

Dalsze obliczenie odbywa się zupełnie, jak dla przekroju stałego.

§. 58. Przykład.

Jako przykład obliczmy momenty, wywołane ciężarem własnym, dla tej samej belki trzyprzęsłowej, którą obliczyliśmy dla przekroju stałego w §. 25. A więc niech będzie $l_1 = 27.87 m$, $l = 36.2 m$, $g_1 = 0.82 t/m$, $g = 0.94 t/m$. Na rys. 1. tab. II. wyznaczyliśmy na podstawie poprzedniego obliczenia przybliżonego dla przekroju stałego przekroje pasów, do których przy stałej wysokości proporcjonalne są momenty bezwładności. Jeżeli przyjmiemy wysokość belki $3.16 m$, to $I = \frac{Ah^3}{2} = 5 A$. Na rys. 3. wykreśliliśmy na tej podstawie $\frac{1}{I}$ (linie kreskowane), i wypisaliśmy $\frac{1000}{I}$. Dla połowy belki obliczyliśmy teraz powierzchnie prostokątów, odczytując długości w mm , wysokości według liczb na rysunku $\left(\frac{1000}{I}\right)$ i otrzymaliśmy powierzchnię 215.9. Podzieliwszy tę powierzchnię przez długość 138.5 mm , otrzymaliśmy 1.56 czyli właściwie 0.00156 jako średni odwrotny moment bezwładności $\frac{1}{I^0}$. Aby wyznaczyć $\frac{I_0}{I}$, podzieliśmy $\frac{1}{I}$ przez $\frac{1}{I_0}$ i wykreślili i oznaczyli na rysunku $\frac{I_0}{I}$ (linie pełne).

Jeżeli $l_3 = l_1$ mierzyć będziemy w mm , więc $l_3 = 83.9 mm$, to $A' = 88.2$, a że $I_0 = 1$, więc $A = \frac{88.2}{83.9} = 1.051$.

Dla pierwszego przęsła jest $I' = 17294$, $I'' = 252025$, więc gdy $I_0 = 1$
 $C = \frac{3 \cdot 17294}{83.9^3} = 0.870 = \beta_1$, $C_1 = \frac{3 \cdot 252025}{83.9^3} = 1.111 = \alpha_1$, $\gamma = 3 \cdot 1.051 - 0.870 +$
 $- 1.111 = 1.172$.

Podobnie otrzymamy dla drugiego przęsła

$$A = \frac{109.8}{109.2} = 0.919, \quad I' = I'' = 377533,$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{3 \cdot 377533}{109.2^3} = 0.944, \quad \gamma_2 = 3 \cdot 0.919 - 2 \cdot 0.944 = 0.869.$$

W celu wyznaczenia $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ wykreślamy zwykle powierzchnie momentów (rys. 2.). W pierwszym przęśle otrzymamy dla $x = \frac{1}{2} l_1$
 $\frac{1}{2} 0.82 \cdot 27.87^2 = 79.6 tm$, w drugim $\frac{1}{2} 0.94 \cdot 36.2^2 = 154.0 tm$. Mnożąc odnośne rzędne przez $\frac{I_0}{I}$ otrzymaliśmy skurczoną powierzchnię momentów.

Dalej otrzymamy moment statyczny tej powierzchni w pierwszym przęśle
 $S_1 = 39038 tm^3$, $S_2 = 46823 tm^3$,

a więc według 213)

$$\mathfrak{R}_1'' = - \frac{6.39038}{27.87^2} = 301.56 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{R}_1' = + \frac{6.46823}{27.87^2} = 361.71 \text{ tm.}$$

Dla drugiego przęsła otrzymamy

$$S_1 = S_2 = 97950 \text{ tm}^3, \text{ a więc według 213)}$$

$$\mathfrak{R}_2'' = \mathfrak{R}_2' = \frac{6.97950}{36.2^2} = 448.47 \text{ tm.}$$

Teraz ustawimy równanie momentów podporowych. Ponieważ tu z powodu symetrii $M_1 = M_2$, więc wystarczy jedno równanie, które otrzymamy z 214), wstawiając $m = 1$,

$$2(\beta_1 l_1 + \alpha_1 l) M_1 + \gamma_1 l M_1 = l_1 \mathfrak{R}_1'' + l \mathfrak{R}_2',$$

a po wstawieniu wartości

$$\{2(0.87.27.87 + 0.944.36.2) + 0.869.36.2\} M_1 = 27.87.301.56 + 36.2.448.47,$$

a stąd

$$M_1 = M_2 = -165.4 \text{ tm.}$$

W §. 25. otrzymaliśmy dla przekroju stałego $M_1 = M_2 = -94.84 \text{ tm}$. Widzimy więc, że wpływ zmienności przekroju jest bardzo znaczny.

VII. Obliczenie dokładne belki ciągłej kratowej o przekroju zmiennym.

§. 59. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia.

Powyżej wyłożony sposób obliczenia belki ciągłej o przekroju zmiennym jest bardzo żmudny, a pomimo tego dla belek kratowych, o który tu zwykle chodzi, niedokładny. Obliczając bowiem belki ciągłe kratowe, według poprzedniego sposobu uwzględnimy przy wyznaczeniu momentu bezwładności tylko przekrój pasów, krzyżulców zaś wcale nie uwzględniamy. Błąd, jaki z tego powodu popełniamy w wyznaczeniu momentów podporowych jest bardzo znaczny, tak dalece, że mniejszy błąd popełniamy, licząc według sposobu dla przekroju stałego, niż uwzględniając zmienność pasów, a nie uwzględniając krzyżulców. Dlatego licząc sposobem przybliżonym, będziemy zawsze przyjmować przekrój stały, a licząc dokładnie, musimy uwzględnić także i krzyżulce.

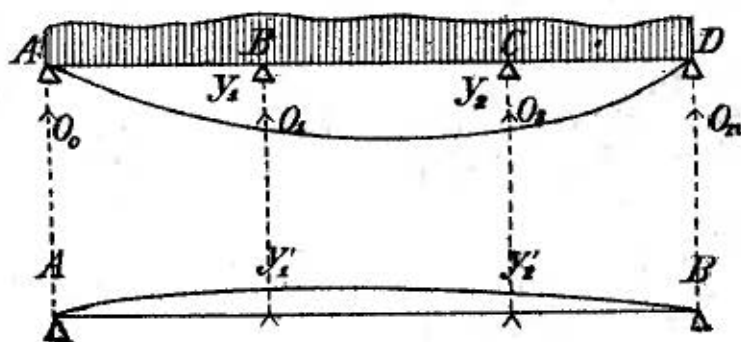
§. 60. Zasada dokładnego obliczenia.

Zasada obliczenia dokładnego belki ciągłej polega na tem*), że uważamy belkę jako w dwu punktach na skrajnych podpo-

*) p. sposób Fontviolanta. Köchlin. Statique graphique str. 338.

rach A i D (rys. 71.) podpartą i wyznaczamy ugięcie obciążonej belki liczebnie lub wykreślnie. Otrzymujemy w ten sposób ugięcia na podporach $y_1, y_2, \dots$

rys. 71.



Teraz przypuszczamy, że na podporze B działa do góry siła $O_1 = 1$ na belkę nieobciążoną (ani ciężarem własnym) i wyznaczamy ugięcia na podporach $-y_1'$ i $-y_2'$. Tak samo wyznaczamy ugięcie, jeśli siła $= 1$ działa na drugiej podporze i otrzymujemy $-y_1''$, $-y_2''$ itd. Dla belki ciągłej ugięcia w punktach $B, C, \dots$ muszą być równe zero, więc

$$\left. \begin{aligned} y_1 - O_1 y_1' - O_2 y_1'' - \dots &= 0 \\ y_2 - O_1 y_2' - O_2 y_2'' - \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 217)$$

Otrzymamy w ten sposób $(n-1)$ równań, właśnie tyle, co mamy nieznanymi. Z równań tych wyznaczymy teraz $O_1, O_2, \dots$ dla danego obciążenia.

Ponieważ dla rozmaitych prętów belki najniekorzystniejsze obciążenia są rozmaite, więc dla każdego z nich musielibyśmy powtórzyć cały żmudny rachunek.

Dla wyznaczenia linii wpływowych trzeba by przyjąć $P=1$ działające po kolei we wszystkich węzłach dolnych i dla tych przypadków wyznaczyć siły wewnętrzne. Droga to dość żmudna, do wykreślenia linii wpływowych możemy dojść jeszcze innym sposobem, który poniżej podamy.

Przykład. Belka ciągła ABC (t. III r. 1) dwuprzęsłowa o rozpiętości 2 razy po 24 m jest obciążona tylko w drugim przęśle BC , pierwsze przęsło AB nie jest wcale obciążone. Niechaj będzie ciężar własny jednej belki $0.9t/m$, z czego wypada $0.6t/m$ na pas dolny a $0.3t/m$ na górny. Ciężar ruchomy niech będzie $3.16t/m$. Według tego obliczone ciężary węzłowe są oznaczone na rysunku.

Przekroje pojedynczych prętów, które należy tymczasowo wyznaczyć wedle przybliżonej zwykłej teorii, uwidoczniliśmy poniżej w tabliczce. Przypuszczając, że belka jest tylko podparta na podporach skrajnych A i C , kreślimy wielobok sznurowy i plan sił (rys. 2. i 3.), obliczamy skrócenia i przedłużenia wszystkich prętów i wyznaczamy ugięcie belki sposobem Williota*) (rys. 4.). Otrzymaliśmy w ten sposób ugięcie punktu B $y_1 = 168mm$.

*) patrz Podr. t. m. tom I. str. 161.

Prêt	A	l	P	dl	P'	dl'	P''	Prêt	A	l	P	dl	P'	dl'	P''
	cm ²	cm	t	mm	t	mm	t		cm ²	cm	t	mm	t	mm	t
a	35	600	+ 31.0	+ 2.7	- 20.15	- 1.7	+ 11.5	a'	48	420	- 43	- 1.9	+ 28.5	+ 1.2	- 15.8
b	90	600	+ 86.5	+ 2.9	- 60.4	- 2.0	+ 26.4	a''	42	420	+ 42	+ 2.1	- 28.5	- 1.4	+ 13.5
c	60	600	+ 131.5	+ 6.6	- 100.65	- 6.0	+ 29.8	b'	18	420	- 36.5	- 4.3	+ 28.5	+ 3.3	- 8.0
d	75	600	+ 166.0	+ 6.6	- 140.9	- 7.5	+ 22.5	b''	18	420	+ 34.8	+ 3.8	- 28.5	- 3.3	+ 5.0
e	75	600	+ 193.5	+ 7.7	- 140.9	- 7.5	+ 50.5	c'	36	420	- 29.5	- 1.7	+ 28.5	+ 1.6	- 0.5
f	60	600	+ 196.6	+ 9.7	- 100.65	- 6.0	+ 92.7	c''	55	420	+ 26.8	+ 1.0	- 28.5	- 1.05	- 2.5
g	90	600	+ 150.0	+ 5.0	- 60.4	- 2.0	+ 88	d'	75	420	- 21.8	- 0.6	+ 28.5	+ 0.8	+ 7.0
h	35	600	+ 57.8	+ 4.7	- 20.15	- 1.7	+ 37.2	d''	90	420	+ 20.0	+ 0.5	- 28.5	- 0.7	- 9.5
i	55	300	- 0.45	- 0.02	0	0	- 0.45	e'	60	300	- 0.9	- 0.02	0	0	- 0.9
k	38	300	0	0	0	0	- 0	e''	90	420	- 18.5	- 0.6	- 28.5	- 0.7	- 48.0
l	60	600	- 114.8	- 5.7	+ 40.25	+ 2.0	- 73.4	f'	75	420	+ 16.5	+ 0.7	+ 28.5	+ 0.8	+ 45.2
m	70	600	- 183.5	- 7.9	+ 80.5	+ 3.4	- 101.2	f''	55	420	+ 14.0	+ 0.5	- 28.5	- 1.05	- 15.0
n	60	600	- 205.0	- 10.2	+ 120.75	+ 6.0	- 82.0	g'	36	420	- 17.0	- 1.0	+ 28.5	+ 1.6	+ 12.4
o	110	600	- 180.5	- 4.9	+ 161.0	+ 8.05	- 17.0	g''	18	420	+ 47.2	+ 5.2	- 28.5	- 3.3	+ 18.8
p	60	600	- 150.5	- 7.5	+ 120.75	+ 6.0	- 28.0	h'	18	420	- 50.0	- 5.5	+ 28.5	+ 3.3	- 21.0
r	70	600	- 110.5	- 4.7	+ 80.5	+ 3.4	- 29.8	h''	42	420	+ 80.2	+ 4.0	- 28.5	- 1.4	+ 50.8
s	60	600	- 60.5	- 3.0	+ 40.25	+ 2.0	- 20.8		48	420	- 82.4	- 3.6	+ 28.5	+ 1.2	- 53.0
t	38	300	0	0	0	0	0								
u	55	300	- 0.45	- 0.01	0	0	- 0.45								

Teraz przypuśćmy, że w B działa siła $P=40t$ do góry. Dla tego obciążenia kreślimy plan sił (rys. 5.) i otrzymujemy siły, zestawione w tabliczce w rubryce P' . Obliczywszy odpowiednie dl' , wykreślamy połowę (z powodu symetrii) ugiętej belki i otrzymujemy ugięcie punktu B 165 mm.

Zatem dla siły $P=1$ $y_1' = \frac{165}{40}$, a według 217)

$$168 - O_1 \frac{165}{40} = 0, \quad \text{stad } O_1 = 40 \cdot \frac{168}{165} = 40.7t.$$

W rysunku 2. otrzymaliśmy $O_0=31.7$, $O_2=58.18$, od tego odjąć należy $\frac{40.7}{2}=20.35$, więc

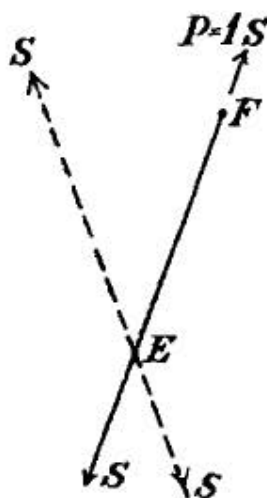
$$O_0=11.35t, \quad O_1=40.7t, \quad O_2=37.83t.$$

Na tej podstawie wykreśliliśmy plan sił (rys. 7.), z którego otrzymujemy dokładne siły wewnętrzne dla danego obciążenia (P'' w tabliczce).

§. 61. Prawo pracy przygotowanej.

Jeżeli na pręt jakiś belki kratowej działają równe i wprost przeciwne siły S (rys. 72.), to praca ich, t. j. iloczyn sił przez drogi w kierunku sił, jest w czasie jakiegokolwiek ruchu pręta $=0$. Ruch ten możemy bowiem rozłożyć na

rys.72



postępowy, podczas którego prace obu sił S są równe i wprost przeciwne i znoszą się i na obrotowy, około dowolnego punktu pręta E , podczas którego praca jest równa zeru, bo kierunki sił przechodzą przez punkt obrotu.

Jeżeli długość pręta wzrośnie z jakichkolwiek przyczyn (a więc niekoniecznie wskutek sił S) o Δs , to praca sił S da się wyrazić równaniem

$$A = S \int_0^{\Delta s} d\Delta s = S \Delta s.$$

Ponieważ odnosi się ona do jakichkolwiek, byle nadzwyczaj małych możliwych przesunięć, więc nazywa się ona pracą możliwą, przygotowaną (n. *virtuelle Arbeit*). Dla całej belki kratowej będzie

$$A = \sum S ds \dots \dots \dots 218)$$

Siły wewnętrzne, działające w prętach belki, możemy zastąpić każdy dwiema siłami S , działającymi w kierunku pręta, zaczepiającymi w węzłach. Ponieważ mają one zatem kierunek wprost przeciwny, więc praca ich jest $-\sum S ds$. Przypuśćmy, że

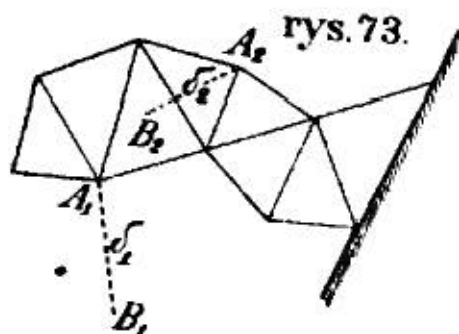
na belkę tę działają siły zewnętrzne P , które są w równowadze między sobą i z siłami wewnętrznymi, a rzuty przesunąć się odnośnych punktów zaczepienia na kierunki tych sił nazwiemy dp , to w każdym węźle dla równowagi suma składowych pionowych i poziomych wszystkich sił jest równa zeru, a na podstawie zasady momentów przygotowanych*) i praca ich jest równa zeru. Zatem praca możliwa wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych musi być równa zeru. Więc

$$\sum Pdp - \sum Sds = 0 \dots\dots\dots 219)$$

Prawo powyższe zwane prawem pracy przygotowanej**) lub możliwych przesunięć (n. *Princip der virtuellen Arbeit, der virtuellen Verschiebungen*) można w ten sposób wyrazić: W stanie równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych praca przygotowana sił zewnętrznych równa się pracy odkształcenia belki kratowej (n. *Formänderungsarbeit*).

§. 62. Prawo Maxwella.

Przypuśćmy, że wskutek jakichkolwiek sił zewnętrznych



zmieniły się długości s prętów belki kratowej A_1A_2 (rys. 73.) o Δs , przy czem węzeł A_1 zrobił drogę $\delta_1 = A_1B_1$, a węzeł A_2 drogę $\delta_2 = A_2B_2$.

Na mocy prawa pracy przygotowanej możemy wyznaczyć δ_1 , które powstają wskutek Δs , nazwawszy S_1

siły wewnętrzne, wywołane siłą $= 1$, działającą w A_1 w kierunku A_1B_1 . Mianowicie mamy wtedy $1 \cdot \delta_1 = \sum S_1 \Delta s$.

Podobnie wyznaczymy δ_2 , nazwawszy S_2 siły wewnętrzne, wywołane siłą $= 1$, działającą w A_2 w kierunku A_2B_2 . Otrzymamy wtedy

$$1 \cdot \delta_2 = \sum S_2 \Delta s.$$

Dla pewnego obciążenia jest

$$\Delta s = \frac{Ss}{\epsilon A} \dots\dots\dots 220)$$

*) p. Franke. Mechanika teoretyczna str. 163.

**) Mohr. Betrag zur Theorie des Fachwerkes Z. d. Ar. u. J. V. zu Hann. 1874. 1875.

***) p. Podręcznik statyki budowli str. 31.

jeżeli S oznacza siłę wewnętrzną, odpowiadającą danemu obciążeniu a A przekrój pręta. A zatem otrzymamy

$$\delta_1 = \sum \frac{S_1 S_s}{\epsilon A}, \quad \delta_2 = \sum \frac{S_2 S_s}{\epsilon A}.$$

Założmy, że $S = S_2$, to $\delta_1 = \sum \frac{S_1 S_2}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 221)$

a gdy $S = S_1$, to $\delta_2 = \sum \frac{S_2 S_1}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 221 a)$

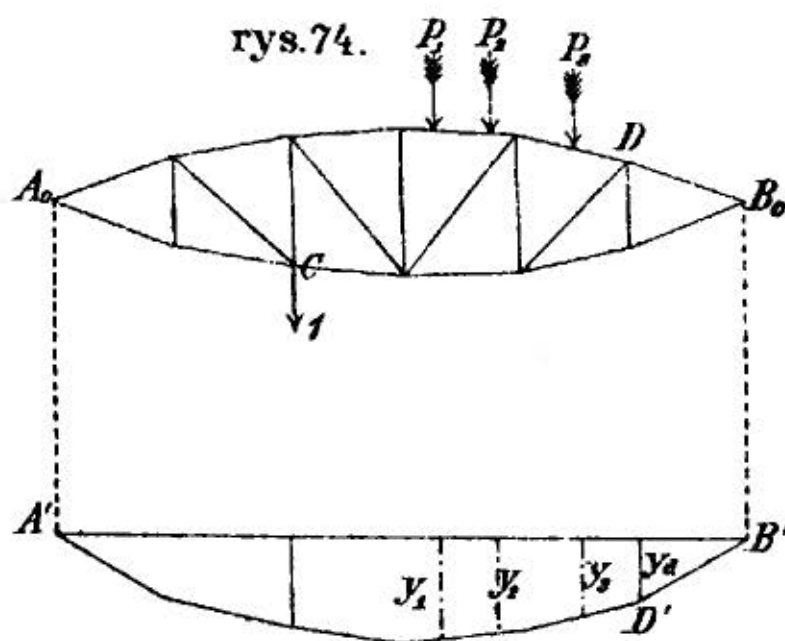
a ponieważ wtedy $\delta_1 = \delta_2$, zatem możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Siła równa jedności, zaczepiająca w A_1 w kierunku $A_1 B_1$, przesuwa punkt A_2 w kierunku $A_2 B_2$ o długość, która jest tak wielką, jak długość $A_1 B_1$, o którą przesuwa się A_1 , gdy w A_2 działa siła $= 1$ w kierunku $A_2 B_2$.

Twierdzenie to nazywamy twierdzeniem Maxwella.

§. 63. Linia wpływowa ugięcia.

Aby wyznaczyć linię wpływową ugięcia punktu C (rys. 74)



postąpimy według Müllera Breslaua w następujący sposób:

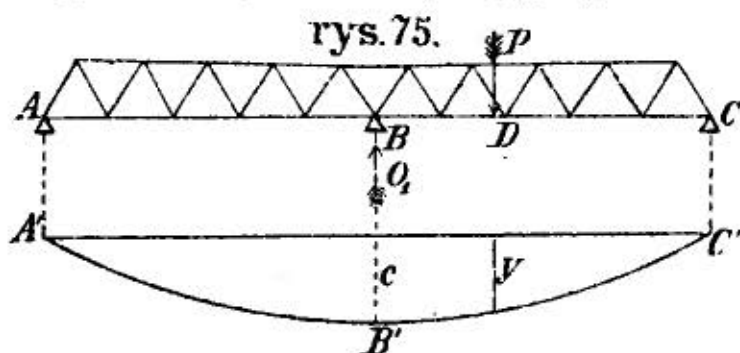
Zaczepmy w C siłę pionową $= 1$ i wyznaczmy w znany sposób liczebny, lub wykreślmy wielobok ugięcia pasu, na którym leży pomost (np. pasu górnego), to rzędna y_d oznacza ugięcie punktu D , gdy

w C działa siła $= 1$. Uwzględniamy tu jednak tylko ugięcia pionowe. Na mocy prawa Maxwella będzie jednak y_d oznaczać także ugięcie punktu C , jeżeli w punkcie D działa siła $= 1$. To samo możemy powiedzieć o każdym innym punkcie pasu $A D B$, a zatem linia $A' D' B'$ jest linią wpływową ugięcia punktu C .

Jeżeli więc siły P_1, P_2 i P_3 działają na belkę, to ugięcie w punkcie C będzie $y_c = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$.

§. 64. Linia wpływowa oddziaływania belki dwuprzęsłowej.

Jeśli mamy wyznaczyć oddziaływanie O_1 belki ciągłej dwuprzęsłowej na środkowej podporze B (rys. 75.), przypuszczamy,

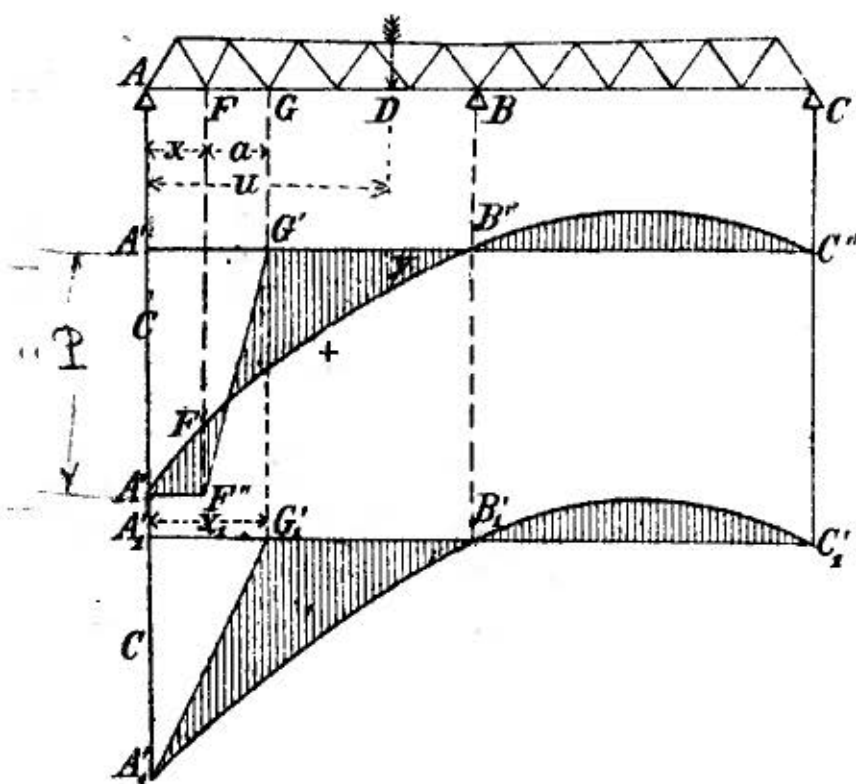


że belka jest podparta tylko w A i C , a w B działa na dół siła pionowa $=1$ i kreślimy dla niej wielobok ugięcia pasu dolnego $A'B'C'$. Na mocy poprzedniego paragrafu jest $A'B'C'$ zarazem linią wpływową ugięcia punktu B .

Przypuśćmy teraz, że na belkę ciągłą ABC działa w D siła P , to w B powstanie oddziaływanie nieznane nam jeszcze O_1 . Z linii wpływowej otrzymamy ugięcie punktu B , które dla belki ciągłej jest równe zero, więc $Py - O_1c = 0$, a zatem

$$O_1 = \frac{1}{c} Py. \quad (222)$$

rys. 76.



Ponieważ c jest ilością stałą, więc widzimy, że linia $A'B'C'$ jest zarazem linią wpływową oddziaływania O_1 , a $\frac{1}{c}$ jest mnożnikiem dla tej linii.

W podobny sposób przypuszczając, że belka podparta jest w B i C a obciążona siłą $=1$ w A , otrzymamy (rys. 76.) linią wpływową $A''B''C''$

dla oddziaływania O_0 , przyczem $O_0 = \frac{1}{c} Py$.

§. 65. Linie wpływowe sił poprzecznych i momentów.

Wyznamy teraz linie wpływowe siły poprzecznej w przedziale FG (rys. 76.).

Jeżeli $u < x$ $Q = O_0 - P$

„ $u > x + a$ $Q = O_0$.

Jeśli więc zrobimy $A''F'' // A'B'$, to różnica rzędnych linii $A''F''$ i $A''F'$ wyznacza Q . Dla $u > x + a$ jest linia wpływowa dla O_0 zarazem linią wpływową dla Q . W przedziale FG jest linia wpływowa prostą, więc $F''G'$.

Dla momentu statycznego jest znowu,

jeśli $u > x_1$, $M = O_0 x_1$,

„ $u < x_1$, $M = O_0 x_1 - P(x_1 - u)$.

Niech będzie $M' = \frac{M}{x_1}$, to dla $u > x_1$ $M' = O_0$,

„ $u < x_1$ $M' = O_0 - P \frac{x_1 - u}{x_1}$.

A więc dla $u > x_1$ linia wpływowa dla O_0 jest zarazem linią wpływową dla M' , a więc i dla M z mnożnikiem x_1 , dla długości AG mamy od rzędnej linii O_0 odciągnąć $y_1 = P \frac{x_1 - u}{x_1}$. Dla $u = 0$ jest $y_1 = P$, dla $u = x_1$ jest $y_1 = 0$, a więc powierzchnia kreskowana jest powierzchnią wpływową momentów.

Widzimy więc, że do wykreślenia linii wpływowych sił poprzecznych i momentów potrzebujemy jednego tylko wykresu ugiętej belki i kilku linii prostych.

W jaki sposób na podstawie linii wpływowych wyznaczamy największe siły poprzeczne i momenty i największe siły wewnętrzne, wiemy z tomu pierwszego.

VIII. Wpływ podpór.

§. 66. Ogólne uwagi.

Dotychczas przypuszczaliśmy, badając belkę analitycznie, że podpory znajdowały się w jednej linii, a właściwie, że belka jest tak podparta w kilku punktach, że przez to podparcie nie powstają żadne momenty, gdy ciężaru własnego nie uwzględnimy. Badając belkę ciągłą sposobem wykreślnym przypuszczaliśmy już jednak także nierówno wysokie podpory, to samo musimy teraz zrobić przy użyciu sposobu liczebnego zwłaszcza, że podpory czasami umyślnie umieszczamy w nierównej wysokości, czasem zaś wskutek osiadania się filarów niektórych nierówność ta powstaje pomimo naszej woli.

Pokrótkie wspomnimy też w tym rozdziale o wpływie na momenty łożysk szerokich albo podwójnych i przytwierdzenia belki stałej do filaru.

§. 67. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach.

Niechaj odstęp pionowy podpór od poziomej, przechodzącej przez pierwszą podporę będą $s_1, s_2, \dots, s_n$, przyczem oznaczamy je jako dodatnie dla podpór niżej leżących, to jeśli przypuścimy, że belka nie jest wcale obciążona, więc $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = 0$, otrzymamy dla m -tej podpory belki ciągłej, analogicznie jak w §. 5, na podstawie rów. 10)

$$\tau_m = - \frac{l_m}{6 \epsilon I} (M_{m-1} + 2 M_m) + \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m},$$

$$\tau_m = + \frac{l_{m+1}}{6 \epsilon I} (2 M_m + M_{m+1}) + \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}.$$

A stąd

$$M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} =$$

$$= 6 \epsilon I \left(\frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}} \right) \dots \dots \dots 223)$$

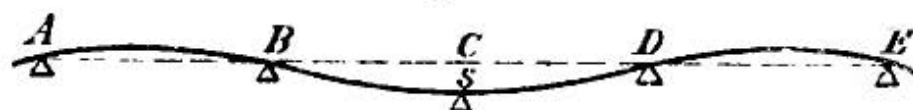
Wstawiając w tem równaniu za m wartości od 1 do $n-1$, otrzymamy $n-1$ równań momentów podporowych, z których możemy wyznaczyć $n-1$ niewiadomych momentów podporowych, wywołanych nierówną wysokością podpór.

Do tych momentów dodać należy momenty, wywołane obciążeniem, które wyznaczyliśmy w poprzednich rozdziałach. Widzimy stąd, że najniekorzystniejsze obciążenie i linie wpływowe sił poprzecznych i momentów dla obciążenia są niezależne od wysokości podpór, których wpływ zupełnie osobno obliczamy.

§. 68. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory.

Jeżeli jedna podpora się zniży o s (rys. 77.), to na tej podporze linia ugięcia jest ku dołowi wypukłą, a zatem powstaje

rys. 77.



tu moment dodatni.
Przez podwyższenie

podpory średniej powstaje przeciwnie moment ujemny.

Ponieważ obciążenie belki sprawia na średnich podporach moment ujemny, zatem przez podwyższenie podpory moment ten się powiększa, przez zniżenie powiększa.

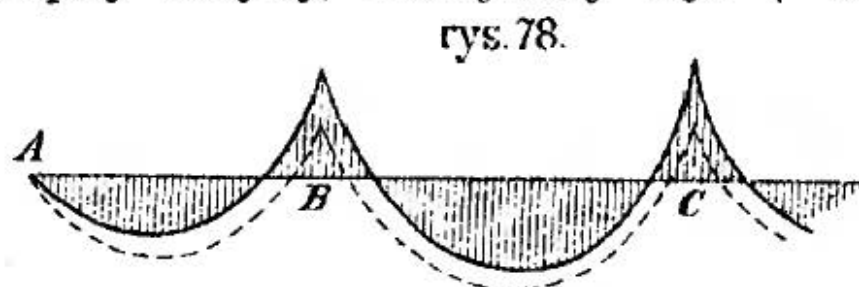
Momenty na sąsiednich podporach zmieniają znak i stają się coraz mniejsze, co możnaby udowodnić zupełnie w ten sam sposób, co dla obciążenia jednego przęsła w §. 8.

Udowodnione w § 9. twierdzenia co do sił poprzecznych i oddziaływań stosują się i tutaj.

§. 69. Najkorzystniejsza wysokość podpór.

Przez zmianę wysokości podpór zmieniają się momenty. Zachodzi więc teraz pytanie, w jakiej wysokości muszą leżeć podpory dla najmniejszej ilości materiału.

Jeżeli przekrój belki ciągłej jest stały, to obliczamy go według największego momentu. Bezwzględnie największe momenty są tu ujemne na podporach (rys. 78.). Jeżeli środkowe podpory zniżymy, zmniejszamy *najw* ($-M$), za to wzrasta



rys. 78.

najw ($+M$). Najkorzystniej byłoby więc zniżyć o tyle podpory średnie, aby *najw* ($-M$) było bez względu

na znak równe *najw* ($+M$).

Jeżeli przekrój belki ciągłej jest zmienny, wtedy o ilości materiału rozstrzyga powierzchnia momentów i sił poprzecznych. Tu musimy w każdym wypadku szukać, kiedy te powierzchnie będą najmniejsze. Wiele nie możemy jednak zaoszczędzić na materiale przez zmianę wysokości podpór, bo jeśli w jednym miejscu momenty maleją, to w drugim wzrastają tak, że wysokość podpór prawie nie wpływa na ilość materiału.

§. 70. Belka dwu- i trzyprzęsłowa.

Jeżeli średnia podpora belki dwuprzęsłowej zniży się o s , to z rów. 223) otrzymamy

$$2 M_1 (l_1 + l_2) = 6 \epsilon I \left(\frac{s}{l_1} + \frac{s}{l_2} \right), \text{ zatem}$$

$$M_1 = \frac{3 \epsilon I s}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = \frac{3 \epsilon I s}{l_1 l_2} \dots \dots \dots 224)$$

a dla $l_1 = l_2 = l$

$$M_1 = \frac{3 \epsilon I s}{l^2} \dots \dots \dots 225)$$

Rozumie się, że dla podwyższenia podpory średniej o s otrzymamy równie wielki moment ujemny.

Ponieważ $M_1 = O_0 l_1$, więc

$$O_0 = \frac{M_1}{l_1} = \frac{3 \epsilon I s}{l_1^2 l_2}, \quad \dots \dots \dots 226)$$

a
$$O_1 = - (O_0 + O_2) = - \frac{3 \epsilon I s}{l_1^2 l^2} (l_1 + l_2) \quad \dots \dots \dots 227)$$

Dla $l_1 = l_2 = l$

$$O_0 = \frac{3 \epsilon I s}{l^3}, \quad O_1 = - \frac{6 \epsilon I s}{l^3} \quad \dots \dots \dots 228)$$

Jeśli obie średnie podpory belki trzyprzęsłowej zniżą się o s , a rozpiętości jej są $l_1 = 2l = l_3$, $l_2 = l$, to otrzymamy $M_1 = M_2$, do określenia którego wystarcza jedno równanie według 223)

$$2 M_1 (l_1 + l) + M_2 l = 6 \epsilon I \frac{s}{l_1}, \text{ a zatem}$$

$$M_1 = \frac{6 \epsilon I s}{(3 + 2s) 2 l^2}, \quad \dots \dots \dots 229)$$

a
$$O_0 = - O_1 = \frac{6 \epsilon I s}{(3 + 2s) 2 l^3} \quad \dots \dots \dots 230)$$

Rów. 225) i 229) możemy ogólnie wyrazić $M_w = a \cdot \frac{I s}{l^2}$, gdzie a oznacza pewien współczynnik. Moment średni, wywołany obciążeniem, da się przedstawić w kształcie $b \cdot q l^2$, siła wewnętrzna w pasie $\frac{b q l^2}{h}$, przekrój pasu $\frac{b q l^2}{h \tau}$, a moment bezwładności $I = \frac{A h^3}{4} = \frac{b q l^2 h}{4 \tau}$, zatem $M_w = a \cdot \frac{b q l^2 h s}{4 \tau l^2} = \frac{a b n q l s}{4 \tau} = c \cdot l s$, jeżeli przyjmiemy $h = l n$, przyczem c i n oznaczają pewne ilości stałe.

Jeżeli największy moment, wywołany obciążeniem, nazwiemy $M_c = b_1 q l^2$, to

$$\frac{M_w}{M_c} = \frac{c l s}{b_1 q l^2} = c_1 \frac{s}{l} \quad \dots \dots \dots 231)$$

Zatem stosunek momentu podporowego, wywołanego zmianą wysokości podpór do momentu, wywołanego obciążeniem, jest wprost proporcjonalny do różnicy wysokości s , a odwrotnie do rozpiętości.

Winkler oblicza, że jeśli s wyrazimy w mm , a l w m , to dla belki dwuprzęsłowej $c_1 = 0.25$, dla belki trzyprzęsłowej $c_1 = 0.11$, a więc jeśli $s = 10 mm$ będzie

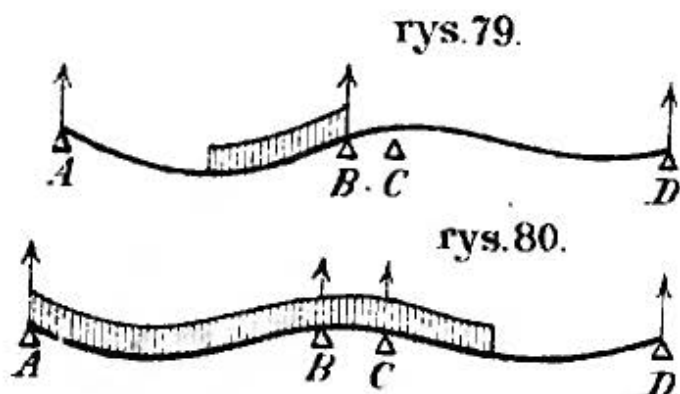
	dla $l =$	10	30	50	100	150 m
dla belki dwuprzęsłowej	$\frac{M_w}{M_c} =$	0.25	0.08	0.05	0.025	0.016
" " trzyprzęsłowej	$\frac{M_w}{M_c} =$	0.11	0.04	0.02	0.011	0.007.

Wpływ małej zmiany względnej wysokości podpór jest więc dla belki ciągłej bardzo znaczny przy małych rozpiętościach, mały przy wielkich.

§. 71. Podwójne łożyska.

Dawniej używano często dla belek ciągłych na jednej podporze dwu łożysk tak, że właściwie powstawały oprócz wielkich przęseł, także przęsła małe między dwoma łożyskami jednej podpory. Chociaż teraz nie używamy już nigdy dwu łożysk na jednej podporze, to także szerokie jedno łożysko działa podobnie jak dwa łożyska.

Mogą przytem zajść dwa wypadki. Jeżeli oddziaływanie w C (rys. 79.) wypada ujemne, a belka nie jest zakotwiona, to belka w tem miejscu się podnosi i przy obliczeniu przyjąć na-



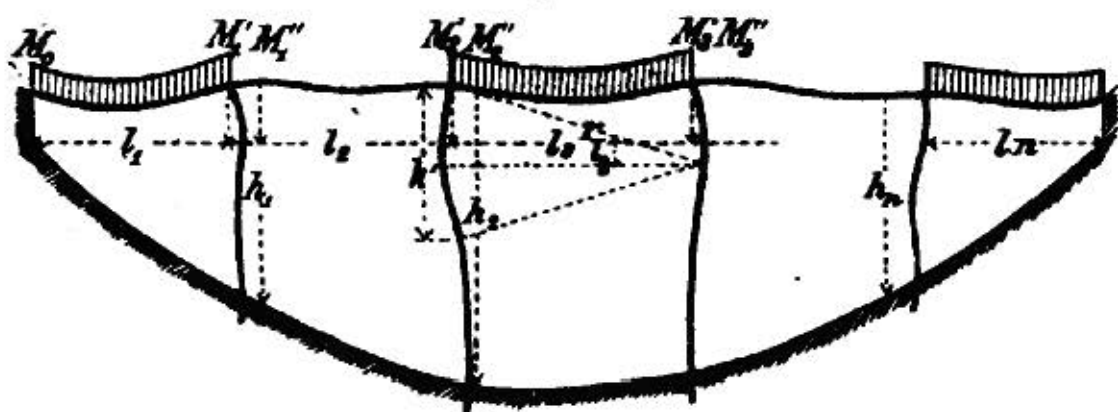
leży, że belka w C nie jest podpartą. Jeżeli oddziaływania w B i C są dodatnie (rys. 80.), to wtedy długość BC stanowi rzeczywiste przęsło, które przy obliczeniu należy uwzględnić.

Z powodu, że obecnie unikamy tak podwójnych, jak i szerokich łożysk, nie będziemy wchodzić w szczegóły obliczenia takich belek, które zresztą mało się różni od obliczenia belek o pojedynczych łożyskach, trzeba tylko dodatkowo badać, czy oddziaływania są ujemne, czy dodatnie.

§. 72. Wpływ przytwierdzenia belek do filarów.

Jeżeli belki są stale połączone z filarami, to filary muszą wziąć udział w ugięciu belek (rys. 81.), a więc pewna część momentu podporowego ΔM zostaje zużyta na ugięcie filaru. Jeżeli moment przy podporze po lewej stronie oznaczmy jedną, a po prawej dwiema kreskami, to

rys. 81.



$$\begin{aligned} M_1' - M_1'' &= \Delta M_1, \\ M_2' - M_2'' &= \Delta M_2 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Nazwijmy kąty nachylenia stycznej linii ugięcia na podporach $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, to na podstawie równ. 10) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 6 \varepsilon I \tau_1 &= -l_1 (2 M_1' - \mathfrak{R}_1'') \\ 6 \varepsilon I \tau_1 &= +l_2 (2 M_1'' + M_2' - \mathfrak{R}_2') \\ 6 \varepsilon I \tau_2 &= -l_2 (M_1'' + 2 M_2' - \mathfrak{R}_2'') \\ 6 \varepsilon I \tau_2 &= +l_3 (2 M_2'' + M_3' - \mathfrak{R}_3') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 232)$$

Z rysunku widzimy, że $\tau_1 = \frac{h'}{2r}$, a że $\varepsilon I = \Delta M_1 r$, jeżeli I_2 oznacza moment bezwładności filaru, a możemy przyjąć $h' = 0.7 h_2$, to

$$\tau_1 = \frac{0.7 h_2 \Delta M_2}{2 \varepsilon I_2} = \frac{0.35}{\varepsilon I_2} h_2 (M_2'' - M_2') \left| \dots \dots \dots 233) \right.$$

podobnie

$$\tau_1 = \frac{0.35}{\varepsilon I_1} h_1 (M_1'' - M_1') \left| \dots \dots \dots 233) \right.$$

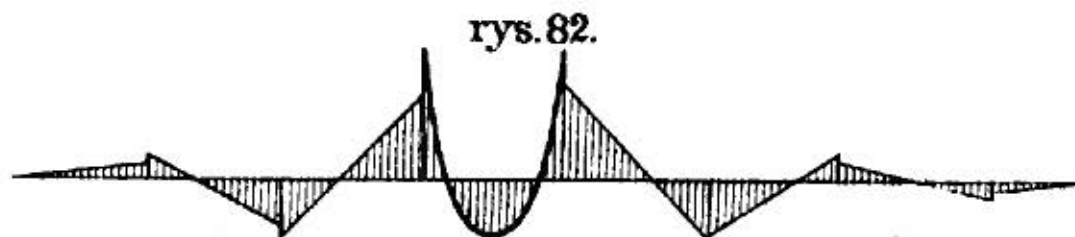
Z porównania równ. 232) i 233) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1'' - M_1') &= -l_1 (2 M_1' - \mathfrak{R}_1'') \\ 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1'' - M_1') &= +l_2 (2 M_1'' + M_2' - \mathfrak{R}_2') \\ 2.1 \frac{I}{I_2} h_2 (M_2'' - M_2') &= -l_2 (M_1'' + 2 M_2' - \mathfrak{R}_2'') \\ 2.1 \frac{I}{I_2} h_2 (M_2'' - M_2') &= +l_3 (2 M_2'' + M_3' - \mathfrak{R}_3') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 234)$$

Otrzymujemy w ten sposób $2(n-1)$ równań, które nam służą do wyznaczenia $2(n-1)$ niewiadomych.

Ponieważ równania 234) mają ten sam kształt, co równania momentów podporowych 21), więc też i wszystkie twierdzenia co do najniekorzystniejszego obciążenia, co do stosunków momentów podporowych pręseł nieobciążonych, co do zmiany znaku sił poprzecznych i oddziaływań są i tu ważne. Odstępy punktów stałych obliczyć można ze stosunku dwóch momentów podporowych.

Momenty po obu stronach każdej podpory mają ten sam znak (rys. 82.).



B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i nateżenia drugorzędne.

IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

§. 73. Pręty nadliczbowe.

Belki kratowe mogą być, jak wiadomo*), albo statycznie wyznaczalne, albo statycznie niewyznaczalne, albo też chwiejne. Belek kratowych prostych ostatniego rodzaju nie powinniśmy w praktyce używać, o statycznie wyznaczalnych jużśmy mówili, teraz mówić mamy o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych.

Jeżeli ilość węzłów nazwiemy m , ilość prętów n , to otrzymamy belkę kratową statycznie niewyznaczalną, jeśli $2m - 3 < n$. Chcąc z takiej belki kratowej utworzyć belkę statycznie wyznaczalną, musimy $n - 2m + 3$ prętów opuścić, a zatem te $k = n - 2m + 3$ pręty nazywamy nadliczbowymi (n. *überzählig*), inne pręty nazywamy potrzebnymi (n. *nothwendig*).

Opuściwszy pręty nadliczbowe, możemy dla danego obciążenia wyznaczyć w pozostałych prętach siły wewnętrzne S_i ,

*) por. Podręcznik statyki budowli str. 183.

$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$, poczem w miejsce prętów nadliczbowych przyczepiamy po kolei za każdy pręt dwie siły równe jedności i wprost przeciwnie, działające w kierunku tego pręta. Nazwijmy siły wewnętrzne, wywołane siłami $=1$ zamiast pierwszego pręta nadliczbowego, $u_1', u_2', u_3', \dots$, zamiast drugiego pręta $u_1'', u_2'', u_3'', \dots$, zamiast trzeciego $u_1''', u_2''', u_3''', \dots$, nareszcie nazwijmy $S_1, S_2, S_3, \dots$ rzeczywiste siły wewnętrzne prętów potrzebnych belki statycznie niewyznaczalnej, a S', S'', S''' prętów nadliczbowych, to

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathcal{E}_1 + u_1' S' + u_1'' S'' + u_1''' S''' + \dots \\ S_2 &= \mathcal{E}_2 + u_2' S' + u_2'' S'' + u_2''' S''' + \dots \\ S_3 &= \mathcal{E}_3 + u_3' S' + u_3'' S'' + u_3''' S''' + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots 1)$$

§. 74. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych.

Z powyższych równań widzimy, że moglibyśmy łatwo obliczyć $S_1, S_2, \dots$, gdybyśmy znali siły wewnętrzne prętów nadliczbowych S', S'', S''' . Siły te wyznaczymy na podstawie odkształceń. Nazwijmy odkształcenia prętów potrzebnych $ds_1, ds_2, ds_3, \dots$ a prętów nadliczbowych ds', ds'', ds''' , to na mocy prawa pracy (§. 61.), możemy napisać

$$\sum P dp - \sum S ds = 0, \dots \dots \dots 2)$$

a wstawiając wartość za S

$$\sum P dp - \sum \mathcal{E} ds - S' ds \sum u' - S'' ds \sum u'' - \dots = 0 \dots \dots 3)$$

Równanie to jest ważne ogólnie dla jakichkolwiek sił w równowadze zostających i dla jakichkolwiek przesunięć możliwych wskutek zmiany długości prętów. Załóżmy, że wszystkie P są równe zeru, $S'=1, S''=S'''=0$, to

$$ds \sum u' = 0, \text{ czyli}$$

$$u_1' ds_1 + u_2' ds_2 + u_3' ds_3 + \dots ds' = 0$$

Podobnie możemy napisać

$$u_1'' ds_1 + u_2'' ds_2 + u_3'' ds_3 + \dots ds'' = 0$$

$$u_1''' ds_1 + u_2''' ds_2 + u_3''' ds_3 + \dots ds''' = 0$$

$$\left. \begin{aligned} u_1' ds_1 + u_2' ds_2 + u_3' ds_3 + \dots ds' &= 0 \\ u_1'' ds_1 + u_2'' ds_2 + u_3'' ds_3 + \dots ds'' &= 0 \\ u_1''' ds_1 + u_2''' ds_2 + u_3''' ds_3 + \dots ds''' &= 0 \end{aligned} \right\} k \text{ równań } 4)$$

Jeżeli ciepłota prętów potrzebnych jest τ_0 , to dla tej ciepłoty są długości prętów, a zatem i położenie wszystkich węzłów oznaczone. Jeśli przy tej ciepłocie wstawimy pręty nadliczbowe tak, że przez to nie nastąpi zmiana kształtu belki, to przy każdej innej ciepłocie odstępów węzłów są inne i wstawienie prętów nadliczbowych wywołuje nateżenia.

Dla innej ciepłoty τ i dla obciążenia innego zmieniają się siły wewnętrzne, a zatem i długości prętów, przyczem możemy napisać ogólnie

$$ds = \alpha(\tau - \tau_0)s + \frac{Ss}{\epsilon A}, \quad \dots \dots \dots 5)$$

jeżeli α oznacza współczynnik rozszerzalności, s długość pręta, a A przekrój.

$$\text{Nazwijmy } \rho = \frac{s}{\epsilon A} \quad \dots \dots \dots 6)$$

$$\text{i} \quad U = \alpha(\tau - \tau_0)\epsilon A \quad \dots \dots \dots 7)$$

$$\text{to} \quad ds = \rho(U + S) \quad \dots \dots \dots 8)$$

Widzimy zatem, że wpływ zmiany ciepłoty możemy uwzględnić jako zmianę siły wewnętrznej, że podwyższenie ciepłoty o $(\tau - \tau_0)$ odpowiada ciągnieniu $\alpha(\tau - \tau_0)\epsilon$.

Przyjąć możemy dla żelaza $\alpha = 0.000012$ $\epsilon = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ dla stali $\alpha = 0.000011$, $\epsilon = 2150000 \text{ kg/cm}^2$, więc w przybliżeniu dla obydwóch $\epsilon\alpha = 24 \text{ kg/cm}^2$.

Równanie 4) możemy więc teraz napisać:

$$\left. \begin{aligned} u_1' \rho_1 (U_1 + S_1) + u_2' \rho_2 (U_2 + S_2) + \dots + \rho' (U' + S') &= 0 \\ u_1'' \rho_1 (U_1 + S_1) + u_2'' \rho_2 (U_2 + S_2) + \dots + \rho'' (U'' + S'') &= 0 \\ u_1''' \rho_1 (U_1 + S_1) + u_2''' \rho_2 (U_2 + S_2) + \dots + \rho''' (U''' + S''') &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k \text{ r} \\ \text{ównań} \end{array} \quad 9)$$

Jeżeli mamy dane przekroje prętów, względnie jeśli je po obliczeniu belki w sposób przybliżony przyjmujemy, jeśli znana nam jest ciepłota τ_0 , przy której belkę zestawiano i ciepłota w danej chwili τ , to możemy obliczyć dla każdego pręta ρ i U . Siły S są funkcjami sił znanych nam $\mathfrak{S}$, u i nieznanymi S' , S'' , S''' . Widzimy więc, że w rów. 9) mamy tylko k nieznanomych S' , S'' , S''' ..., dla których wyznaczenia mamy k równań. W ten sposób wyznaczmy siły zewnętrzne prętów nadliczbowych.

Jeśli ciepłota się nie zmieniła, czyli $\tau = \tau_0$, to $U = 0$, więc rów. 9) nieco się upraszczają i możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} u_1' \rho_1 S_1 + u_2' \rho_2 S_2 + u_3' \rho_3 S_3 + \dots + \rho' S' &= 0 \\ u_1'' \rho_1 S_1 + u_2'' \rho_2 S_2 + u_3'' \rho_3 S_3 + \dots + \rho'' S'' &= 0 \\ u_1''' \rho_1 S_1 + u_2''' \rho_2 S_2 + u_3''' \rho_3 S_3 + \dots + \rho''' S''' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots 10)$$

Jeżeli w rów. 9) i 10) wszystkie ilości ρ pomnożymy przez dowolną stałą liczbę, to przez to wartości S' , S'' , S''' się nie zmieniają. Widzimy więc, że aby otrzymać w rachunku liczby wygodniejsze, możemy wszystkie ρ przez stosowną liczbę stałą pomnożyć, co zupełnie na wynik rachunku nie wpływa.

Przypuśćmy teraz, że zamiast $A1$ działają na belkę 2 siły $=1$ w A i 1 wprost przeciwne. Siły, powstające wtedy we wszystkich prętach potrzebnych, znajdziemy również zapomocą planu sił (83c). Są to siły u , których wielkość i znak, jakoteż i wielkość sił $\mathfrak{S}$ zestawiliśmy w tabliczce. W tabliczce tej zestawiliśmy też długości prętów s , przekroje A i obliczyliśmy 100000ρ .

Ponieważ tu jest jeden pręt nadliczbowy, czyli $k=1$, więc otrzymamy z rów. 1)

$$S_1 = \mathfrak{S}_1 + u_1 S', \quad S_2 = \mathfrak{S}_2 + u_2 S', \quad . . . \quad 11)$$

itd. Zatem rów. 10) przedstawi się w następnym kształcie

$$u_{1\rho} (\mathfrak{S}_1 + u_1 S') + u_{2\rho} (\mathfrak{S}_2 + u_2 S') + \dots + \rho' S' = 0,$$

czyli
$$\sum u\rho \mathfrak{S} + (\sum u^2\rho + \rho') S' = 0,$$

zatem
$$S' = - \frac{\sum u\rho \mathfrak{S}}{\sum u^2\rho + \rho'} = 0 \quad . . . \quad 12)$$

Wstawwszy wartość otrzymamy

$$S' = - \frac{-44.55}{144.822 + 9.72} = 0.288t. \text{ Gdy tę wartość}$$

za S' wstawimy w 11) otrzymamy S_1 , S_2 itd., któreto wartości uwidoczniliśmy w ostatnim rzędzie tabliczki.

Z porównania rubryk $\mathfrak{S}$ i S widzimy, o ile się różnią wyniki dokładne od przybliżonych. Ze znaków sił u widzimy też, że gdyby siła $10t$ działała w 3, otrzymalibyśmy u , a zatem i uS' równe, lecz ze znakiem przeciwnym. Jeżeliby więc działały symetrycznie dwie równe siły w 1 i 3 to u i uS' byłyby równe zeru, a więc dla obciążenia jednostajnego zupełnego wyniki dokładnego obliczenia belki równoległej o kracie dwukrotnej nie różnią się wcale od wyników obliczenia przybliżonego. A że pasy obliczamy dla obciążenia całkowitego, więc obliczenie przybliżone będzie dla pasów zupełnie, dla krzyżulców w praktyce dostatecznie dokładnem.

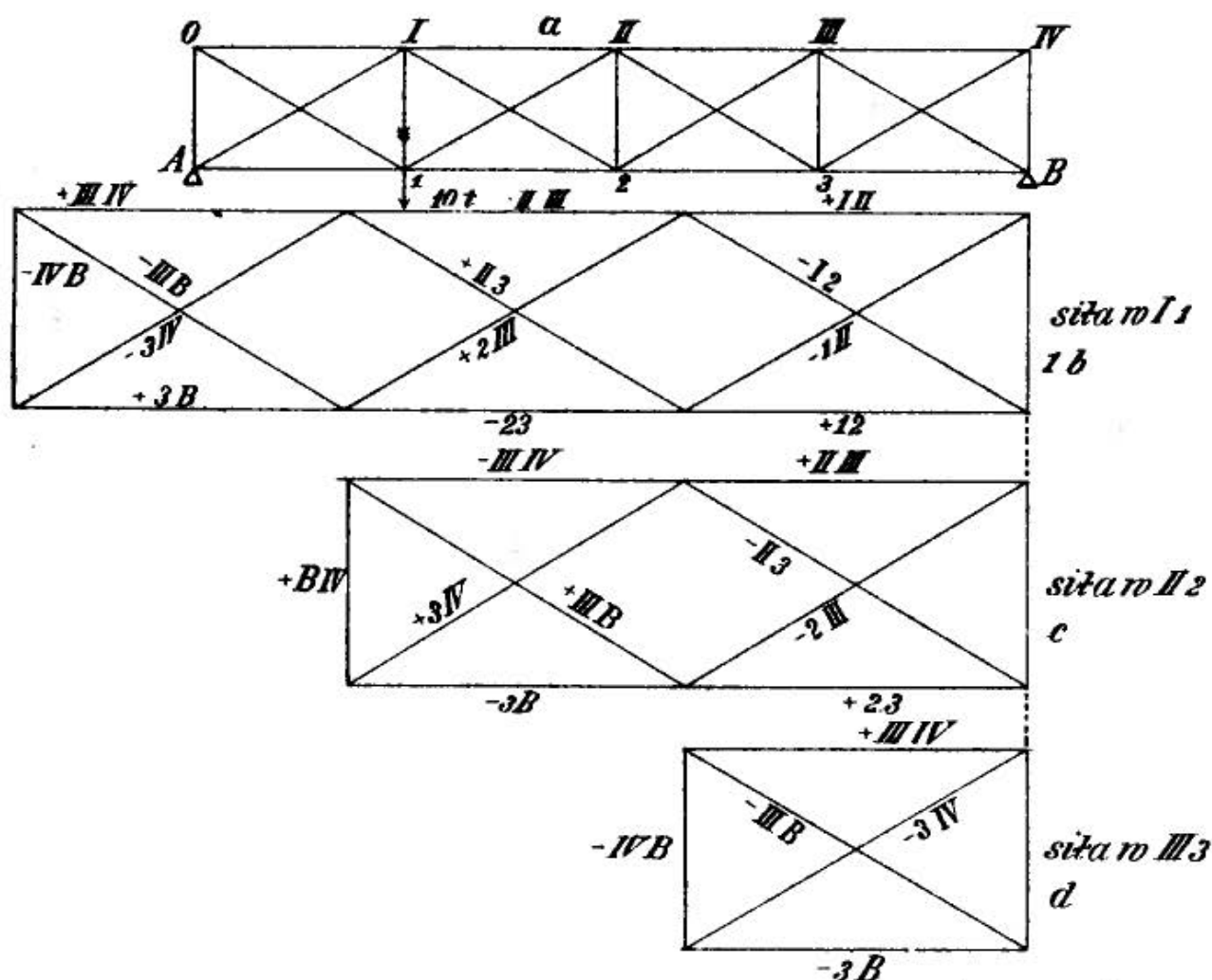
§. 75. Belka równoległa o kracie złożonej.

Jako przykład wyznaczenia sił wewnętrznych w belce statycznie niewyznaczalnej wyższego rzędu wyznaczamy siły wewnętrzne dla tej samej belki, w której jednak urządzimy jeszcze słupy (rys. 84a).

Teraz belka będzie miała 4 pręty nadliczbowe: $A1$, i słupy $1I$, $2II$, $3III$.

Siły $\mathfrak{S}$ i u zostają te same, co w poprzednim paragrafie. Rys. 84b przedstawia plan sił, jeżeli zamiast $I1$ działają w I i 1

rys. 84.



siły równe jedności i wprost przeciwne, rys. 84c, jeśli w II i 2 działają siły równe jedności, a 84d, jeśli w III i 3 działają siły równe jedności. Siły wewnętrzne w pierwszym wypadku nazwijmy u' , w drugim u'' , w trzecim u''' . Wyniki zestawiliśmy w tabliczce.

Nazwa pręta	$\mathcal{E}$	u	u'	u''	u'''	s	A	1000000 ρ	$u\rho\mathcal{E}$
	t	t	t	t	t	m	cm^2	$\frac{cm}{kg}$	
A 0	- 7.5	-0.50	0	0	0	3.0	40	3.75	+ 14.06
0 I	-12.5	-0.87	0	0	0	5.0	30	8.33	+ 90.59
1 II	-12.5	+0.87	+1.61	0	0	5.0	70	3.57	- 38.82
II III	- 4.2	-0.87	-1.61	+1.61	0	5.0	70	3.57	+ 13.05
III IV	- 4.2	+0.87	+1.61	-1.61	+1.61	5.0	30	8.33	- 30.44
A 1	0	-0.87	0	0	0	5.0	30	8.33	0
1 2	+ 8.5	+0.87	+1.61	0	0	5.0	70	3.57	+ 26.40
2 3	+ 8.5	-0.87	-1.61	+1.61	0	5.0	70	3.57	- 26.40
3 B	+ 0	+0.87	+1.61	-1.61	+1.61	5.0	30	8.33	0
0 1	+14.9	+1.00	0	0	0	5.831	30	9.72	+144.83
1 2	0	-1.00	-1.90	0	0	5.831	15	19.44	0
II 3	- 4.8	+1.00	+1.90	-1.90	0	5.831	15	19.44	- 93.31

[illegible]

Nazwa preta	u^2p	$uu'p$	$uu''p$	$uu'''p$	$u'p$	$u'p\mathfrak{S}$	u'^2p
A 0	0.937	0	0	0	0	0	0
0 I	6.305	0	0	0	0	0	0
1 II	2.702	+ 5.001	0	0	+ 5.75	— 71.88	+ 9.26
II III	2.702	+ 5.001	— 5.001	0	— 5.75	+ 24.15	9.26
III IV	6.305	+ 11.668	— 11.668	+ 11.668	+ 13.49	— 49.00	21.71
A I	6.305	0	0	0	0	0	0
1 2	2.702	+ 5.001	0	0	+ 5.75	+ 48.88	9.26
2 3	2.702	+ 5.001	— 5.001	0	— 5.75	— 48.88	9.26
3 B	6.305	+ 11.668	— 11.618	+ 11.668	+ 13.49	0	21.71
0 1	9.72	0	0	0	0	0	0
I 2	19.44	+ 36.936	0	0	— 36.94	0	70.19
II 3	19.44	+ 36.936	— 36.936	0	+ 36.94	— 177.31	70.19
III B	9.72	+ 18.468	— 18.468	+ 18.468	— 18.47	0	35.10
1 II	19.44	+ 36.936	0	0	— 36.94	— 177.31	70.19
2 III	19.44	+ 36.936	— 36.936	0	+ 36.94	0	70.19
3 IV	9.72	+ 18.468	— 18.468	+ 18.468	— 18.47	— 88.65	35.10
IV B	0.937	— 1.875	+ 1.875	— 1.875	— 3.75	+ 9.38	3.75
A I	—	—	—	—	—	—	—
1 I	—	—	—	—	—	—	—
2 II	—	—	—	—	—	—	—
3 III	—	—	—	—	—	—	—
	144.82	226.15	— 142.27	+ 58.39		— 530.62	+ 435.17

[illegible]

Nazwa pręta	$u'u''\rho$	$u'u'''\rho$	$u''^2\rho$	$u''u'''\rho$	$u''\rho\mathfrak{S}$	$u'''\rho\mathfrak{S}$	$u''^2\rho$	S
1 2	0	0	0	0	0	0	0	+10·03
2 3	— 9·26	0	9·26	0	+ 48·88	0	0	+ 6·62
3 B	— 21·71	21·71	21·71	— 21·71	0	0	21·71	+ 1·40
0 1	0	0	0	0	0	0	0	+ 9·21
I 2	0	0	0	0	0	0	0	— 1·96
II 3	— 70·19	0	70·19	0	+177·31	0	0	— 2·42
III B	— 35·10	35·10	35·10	— 35·10	0	0	35·10	— 1·61
1 II	0	0	0	0	0	0	0	+ 2·841
2 III	— 70·19	0	70·19	0	0	0	0	+ 2·38
3 IV	— 35·10	35·10	35·10	— 35·10	+ 88·65	— 88·65	35·10	+ 3·19
IV B	— 3·75	3·75	3·75	— 3·75	— 9·38	+ 9·38	3·75	— 7·30
A I	—	—	—	—	—	—	—	— 5·69
1 I	—	—	—	—	—	—	—	+ 4·03
2 II	—	—	—	—	—	—	—	— 0·22
3 III	—	—	—	—	—	—	—	— 0·30
	—276·27	117·37	276·27	— 117·37	+330·31	—128·27	117·37	

Według rów. 2) mamy

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{S}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV} \\ S_2 &= \mathfrak{S}_2 + u_2 S' + u_2' S'' + u_2'' S''' + u_2''' S^{IV} \\ S_3 &= \mathfrak{S}_3 + u_3 S' + u_3' S'' + u_3'' S''' + u_3''' S^{IV} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots 13)$$

Gdy wstawimy wartości za S_i w rów. 10), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} u_1 \rho_1 (\mathfrak{S}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV}) + u_2 \rho_2 (\mathfrak{S}_2 + u_2 S' + u_2' S'' + \\ + u_2'' S''' + u_2''' S^{IV}) + \dots + \rho' S' = 0, \text{ czyli} \\ \Sigma u \rho \mathfrak{S} + (\Sigma u^2 \rho + \rho') S' + S'' \Sigma u u' \rho + S''' \Sigma u u'' \rho + S^{IV} \Sigma u u''' \rho = 0 \\ \Sigma u' \rho \mathfrak{S} + S' \Sigma u' u \rho + S'' (\Sigma u'^2 \rho + \rho'') + S''' \Sigma u' u' \rho + S^{IV} \Sigma u' u'' \rho = 0 \\ \Sigma u'' \rho \mathfrak{S} + S' \Sigma u'' u \rho + S'' \Sigma u'' u' \rho + S''' (\Sigma u''^2 \rho + \rho''') + \\ + S^{IV} \Sigma u'' u'' \rho = 0 \\ \Sigma u''' \rho \mathfrak{S} + S' \Sigma u''' u \rho + S'' \Sigma u''' u' \rho + S''' \Sigma u''' u'' \rho + S^{IV} (\Sigma u'''^2 \rho + \\ + \rho^{IV}) = 0 \end{aligned} \right\} 14)$$

Wstawiwszy wartości otrzymamy

$$\begin{aligned} -44\cdot55 + (144\cdot82 + 9\cdot72) S' + 226\cdot15 S'' - 142\cdot27 S''' + 58\cdot39 S^{IV} &= 0, \\ -530\cdot62 + 226\cdot15 S' + (435\cdot17 + 10) S'' - 276\cdot27 S''' + 117\cdot36 S^{IV} &= 0, \\ +330\cdot31 - 142\cdot27 S' - 276\cdot27 S'' + (276\cdot27 + 10) S''' - 117\cdot37 S^{IV} &= 0, \\ -128\cdot27 + 58\cdot39 S' + 117\cdot37 S'' - 117\cdot37 S''' + (117\cdot37 + 10) S^{IV} &= 0. \end{aligned}$$

A stąd po rozwiązaniu równań mamy

$$S' = -5\cdot694, \quad S'' = +4\cdot026, \quad S''' = -0\cdot220, \quad S^{IV} = -0\cdot296.$$

Na podstawie tych wartości i wartości u możemy nareście obliczyć według 13.) dokładne wartości sił wewnętrznych S , które znajdują się w ostatnim rzędku tabliczki.

Z porównania tych sił, ze siłami wewnętrznymi, któreśmy otrzymali w poprzednim paragrafie widzimy, że przez dodanie słupów zmieniliśmy zupełnie siły wewnętrzne i to nie tylko w krzyżulcach, ale i w pasach. A zatem obliczenie kraty złożonej o krzyżulcach tęgich przez nieuwzględnienie słupów i rozłożenie na dwa układy daje wyniki zupełnie niezgodne z rzeczywistością. Dodanie słupów wzmaga w niektórych prętach siły wewnętrzne. A że obliczenie dokładne jest nadzwyczaj żmudne, więc lepiej nie używać takiej kraty.

§. 76. Belka wieloboczna.

Sposób obliczenia belki wielobocznej statycznie niewyznaczalnej jest taki sam, jak belki równoległej; nie potrzebujemy się więc powtarzać. Wyniki jednak obliczenia są tu inne, niż w poprzednich paragrafach. Winkler oblicza jako przykład belkę paraboliczną zbieżną o kracie równoramiennej dwukrotnej i dwóch słupach*) i otrzymuje wprawdzie dla pasów wyniki dokładne mało co się różniące od przybliżonych, dla krzyżulców zaś zupełnie odmienne.

Jeżeli krata jest więcej, niż dwukrotną, to liczba prętów nadliczbowych jest większa, niż 1. Dla belki równoległej rozkładanie na pojedyncze układy jest dozwolone, gdyż błąd jest bardzo mały, dla belki wielobocznej daje sposób ten przybliżony tylko dla pasów dość dokładne wyniki, dla kraty zaś nie.

To samo stosuje się także do belek o kracie prostokątnej i podwójnych gibkich krzyżulcach. Belki takie równoległe możemy snadnie obliczać według sposobu przybliżonego.

§. 77. Belka Howe'a.

Belka Howe'a ma kratę złożoną ze sztucznem nateżeniem. W celu obliczenia jej dokładnego należy obliczyć ją naprzód bez względu na sztuczne nateżenie, a więc według §. 72, uwzględniając tę okoliczność, że drzewo ma inny współczynnik sprężystości, niż żelazo, a potem uwzględnić wpływ sztucznego nateżenia**).

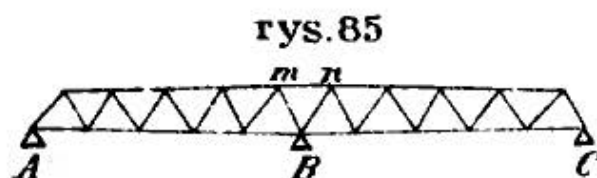
*) p. Winkler. Theorie der gegliederte Balkenträger, str. 252.

**) p. Podr. t. most. tom I. str. 90.

Wprawdzie obliczenie przybliżone kraty złożonej daje wyniki bardzo niedokładne, jednak z powodu, że natężenia styczne nie dadzą się dokładnie wyznaczyć, więc dokładniejsze wyznaczenie sił wewnętrznych już z tego powodu nie jest możliwe; w praktyce więc wystarcza wyznaczenie przybliżone.

§. 78. Belka ciągła.

Sposób ten wyznaczenia sił wewnętrznych da się zastosować także do belki wieloprzęsłowej. Jeżeli w belce dwuprzęsłowej (rys. 85.), opuszczimy pręt mn , to otrzymamy dwie belki statycznie wyznaczalne.



Pręt mn jest więc tu prętem nadliczbowym. W belce trzyprzęsłowej mamy dwa takie pręty nadliczbowe, w czteroprzęsłowej trzy. Jeżeli przytem krata jest podwójna lub potrójna, liczba prętów nadliczbowych wzrasta. Dalsze obliczenie jest takie samo, jak w poprzednich paragrafach.

§. 79. Wpływ zmiany ciepłoty.

Jeżeli ciepłota τ_0 belki statycznie niewyznaczalnej się zmieni o $(\tau - \tau_0)$, to zamiast rów. 10) musimy użyć pierwotnych równań 9) i wprowadzić w rachunek ilości $U = \alpha (\tau - \tau_0) \epsilon A$ według rów. 7).

Jeżeli belka składa się z części drewnianych i żelaznych, musimy uwzględnić tę okoliczność, że α i ϵ są inne dla części drewnianych a inne dla żelaznych.

X. Natężenie drugorzędne.

§. 80. Określenie natężeń drugorzędnych.

Przy obliczeniu belek kratowych przypuszczaliśmy dotychczas zawsze, że pręty połączone są między sobą przegibnie, bez tarcia, a co za tem idzie, że siły zewnętrzne działają w osi prętów. Tymczasem przy mostach europejskich łączymy pojedyncze pręty zawsze nitami, wskutek czego kąty, jakie tworzą pręty belki kratowej przy ugięciu jej nie mogą się zmieniać, a więc w węzłach powstają momenty, zginające pręty, których osi nie są już teraz proste, lecz wyginają się w jednym kierunku lub

esowato. A nawet jeżeli połączenie prętów jest przegibne (w mostach amerykańskich), to występuje zawsze tarcie, w skutek czego siły wewnętrzne przyjmują położenie mniej lub więcej mimośrodowe.

Natężenia, wywołane siłami wewnętrznymi w przypuszczeniu połączenia przegibnego beztarciowego, nazywamy natężeniami pierwszorzędnymi (n. *Hauptspannung*, *primäre Spannung*), natężenia, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych, nazywamy natężeniami drugorzędnymi (n. *Secundärspannung*, fr. *effort secondaire*, cz. *sekunderne napjeti*).

Oprócz tych natężeń powstają jeszcze dodatkowe natężenia wskutek mimośrodowego połączenia prętów, wskutek nagłej zmiany przekroju, ugięcia poprzecznic itd. Niektórzy nazywają te natężenia także drugorzędnymi, my jednak dla odróżnienia od natężeń, powstałych z powodu stałych połączeń węzłowych będziemy je nazywać dodatkowymi. W tym rozdziale mówić będziemy tylko o natężeniach drugorzędnych i wyłożymy rzecz tę według Rittera*).

§. 81. Zasada obliczenia natężeń drugorzędnych.

Według Manderli*), który rozwiązał pierwszy trudne zadanie wyznaczenia natężeń drugorzędnych, postępujemy w następujący sposób:

Obliczamy najprzód siły wewnętrzne pierwszorzędne w przypuszczeniu połączeń beztarciowych przegibnych, z tych natężeń pierwszorzędne i zmianę kątów przy ugięciu, któreby powstały przy połączeniach przegibnych beztarciowych. Momenty, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych, uważamy jako nieznanne, które wyznaczamy w ten sposób, aby przez ugięcie prętów wskutek tych momentów, kąty te odzyskały pierwotną wielkość. Z momentów węzłowych wyznaczamy wreszcie w zwykły sposób natężenia drugorzędne.

Dla obliczenia natężeń drugorzędnych potrzeba według poprzedniego wyznaczenia natężeń pierwszorzędnych i znajomości przekrojów. A zatem musimy zawsze najprzód wyznaczyć w zwykły sposób siły wewnętrzne i obliczyć przekroje, dla których dopiero możemy obliczać natężenie drugorzędne.

*) Ritter W. *Anwendungen der graphischen Statik*. 1890.

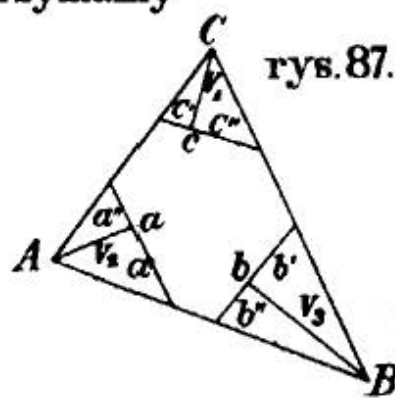
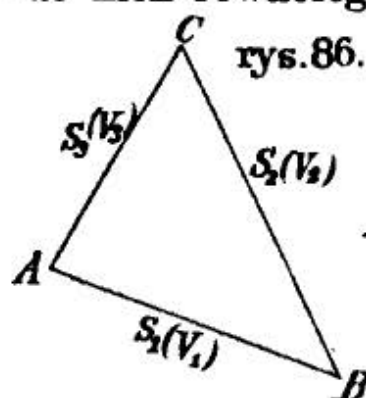
**) p. *Allgemeine Bauzeitung* 1880.

§. 82. Zmiana kątów w trójkącie.

Zmianę kątów trójkąta wskutek zmiany długości jego boków wyznaczyliśmy już w tomie I*). Nazwijmy zmianę kąta przy A (rys. 86.) δ_α , przy B δ_β , przy C δ_γ , v_1 , v_2 i v_3 natężenia prętów s_1 , s_2 i s_3 , to według rów. 90 (t. I, str. 159).

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \delta_\alpha &= (v_2 - v_1) \operatorname{dot} B + (v_2 - v_3) \operatorname{dot} C \\ \epsilon \delta_\beta &= (v_3 - v_1) \operatorname{dot} A + (v_3 - v_2) \operatorname{dot} C \\ \epsilon \delta_\gamma &= (v_1 - v_2) \operatorname{dot} B + (v_1 - v_3) \operatorname{dot} A \end{aligned} \right\} \dots 15)$$

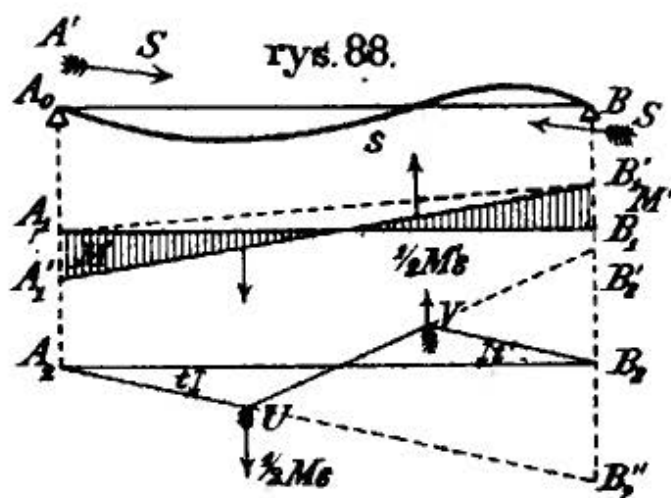
Równanie 15) da się wykreślić też przedstawić. Spuśćmy z A , B i C (rys. 87.) prostopadłe na przeciwległe boki i odejmijmy na nich natężenia v przeciwległych boków, poczem wykreślmy do nich równoległe, a otrzymamy



wiec

$$\left. \begin{aligned} v_2 \operatorname{dot} B &= a', \quad v_2 \operatorname{dot} C = a'', \quad v_1 \operatorname{dot} B = c'', \quad v_3 \operatorname{dot} C = b', \\ \epsilon \delta_\alpha &= a - b' - c'' \\ \epsilon \delta_\beta &= b - c' - a'' \\ \epsilon \delta_\gamma &= c - a' - b'' \end{aligned} \right\} \dots 16)$$

§. 83. Kąt odchylenia osi prętów.



Teraz będziemy się starali wyznaczyć styczne kątów odchylenia osi prętów w węzłach.

Powiedzieliśmy wyżej, że siła wewnętrzna S nie działa w osi pręta i wywołuje momenty węzłowe M i M' (rys. 88.), wskutek czego pręt się wygina. Nazwijmy styczne kątów nachylenia linii ugięcia

*) p. Podręcznik statyki budowli tom I, str. 158.

w A i B τ i τ' , to otrzymamy je, wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, jak dla belki ciągłej. Powierzchnię momentów dzielimy na dwa trójkąty, których powierzchnie $\frac{1}{2} Ms$ i $-\frac{1}{2} M's$ zaczepiają w pionowych trzecich części. A, U i $VB,$ są to styczne podporowe.

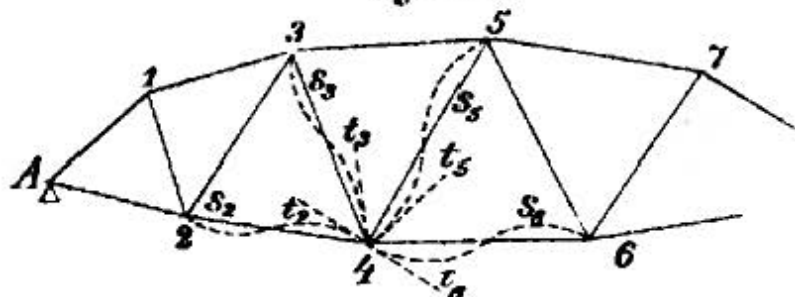
Z rysunku widzimy, że $B_1 B_2''$, pomnożone przez odległość biegunową ϵJ , jest moment statyczny siły $\frac{1}{2} Ms$, a więc

$$B_1 B_2'' = \frac{\frac{1}{2} Ms \cdot \frac{2}{3} s}{\epsilon J} = \frac{2 Ms^2}{6 \epsilon J}, \quad B_2 B_2' = \frac{M's^2}{6 \epsilon J},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{więc } B_1 B_2'' &= \frac{(2M - M') s^2}{6 \epsilon J}, \quad \text{stad } \tau = \frac{B_1 B_2''}{s} = \frac{(2M - M') s}{6 \epsilon J} \\ \text{a podobnie} \quad \tau' &= \frac{(2M' - M) s}{6 \epsilon J} \end{aligned} \right\} \quad 17)$$

§. 84. Równania momentów węzłowych.

Przypuśćmy, że rys. 89. przedstawia nam ugiętą belkę, przyczem wykreśliliśmy



pełno cięciwy prętów, a wykreskowaliśmy ugięte pręty, schodzące się w węźle 4. Kąt zawarty między ugiętymi prętami 24 i 34 jest taki

sam, jaki był przed ugięciem z powodu połączenia stałego nitami, kąt 342 jest o $\tau_2 - \tau_3$ większy od tego kąta, zatem $\delta_{2,3} = \tau_2 - \tau_3$, a ze względu na rów. 17)

$$\epsilon \delta_{2,3} = \frac{s_2 (2M_2 - M_1')}{6 J_2} - \frac{s_3 (2M_3 - M_4')}{6 J_3}, \quad \dots \quad 18)$$

przyczem M_2 i M_3 oznaczają momenty węzłowe przy danem węźle M_1' i M_4' w przeciwnym końcu prętów.

Podobne równania otrzymamy dla $\delta_{3,5}$ i $\delta_{5,6}$.

Ponieważ wszystkie momenty węzłowe w węźle 4 muszą być w równowadze, więc

$$M_2 + M_3 + M_5 + M_6 = 0 \quad \dots \quad 19)$$

Otrzymamy więc dla węzła 4 cztery równania, które możemy także inaczej napisać, nazwawszy

$$\frac{s M}{6 J} = \mu. \quad \dots \quad 20)$$

Otrzymamy mianowicie dla węzła 4

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \delta_{2,3} &= (2\mu_2 - \mu'_2) - (2\mu_3 - \mu'_3) \\ \epsilon \delta_{3,5} &= (2\mu_3 - \mu'_3) - (2\mu_5 - \mu'_5) \\ \epsilon \delta_{5,6} &= (2\mu_5 - \mu'_5) - (2\mu_6 - \mu'_6) \end{aligned} \right\} \dots 21)$$

$$\frac{J_2}{s_2} \mu_2 + \frac{J_3}{s_3} \mu_3 + \frac{J_5}{s_5} \mu_5 + \frac{J_6}{s_6} \mu_6 = 0.$$

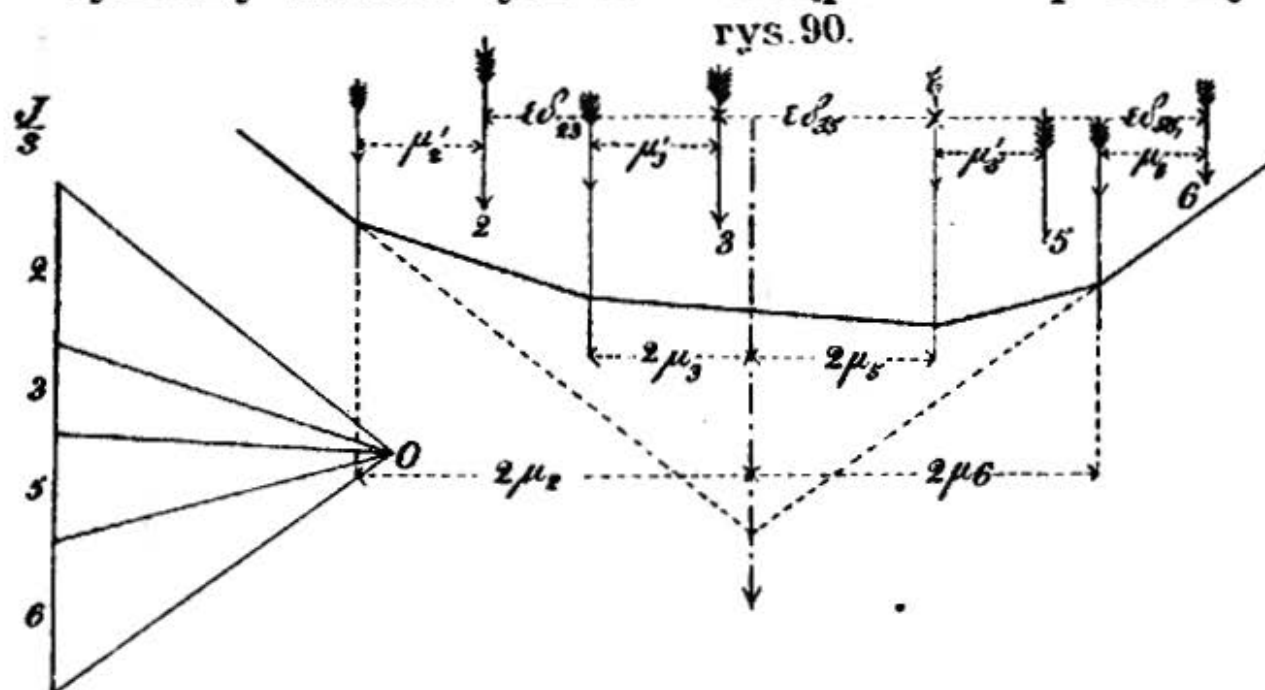
Podobne równania dadzą się ustawić dla każdego węzła, a otrzymamy ich tyle, ile jest momentów węzłowych; możemy je zatem obliczyć, rozwiązawszy równanie wedle μ .

§. 85. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych.

Rozwiązanie $2n$ równań byłoby rzeczą bardzo żmudną, prędkiej, chociaż próbowaniem, dojdziemy do celu drogą wykreślną, podaną przez Rittera.

Przypuśćmy, że znamy μ' dla węzła 4., a staramy się wyznaczyć μ .

Wykreślmy wielobok sił (rys. 90.), odcinając siły $\frac{J}{s}$, potem wykreślmy kierunki tych sił w odstępach $\epsilon \delta$ i przesunimy te



siły o μ' . Złożmy teraz te siły, a otrzymamy wypadkową 4. Odstępy przesuniętych sił od wypadkowej są równe 2μ .

Konstrukcja ta czyni zadość wszystkim rów. 21). Odstępy sił nieprzesuniętych od wypadkowej są $2\mu - \mu'$, a różnica tych odstępów równa się $\epsilon \delta$, przez co wypełniają się pierwsze trzy równania. Ostatnie rów. 21) orzeka, że suma momentów doty-

czących sił $\frac{J}{s}$ ze względu na wypadkową jest równą zeru co wedle konstrukcyi się sprawdza.

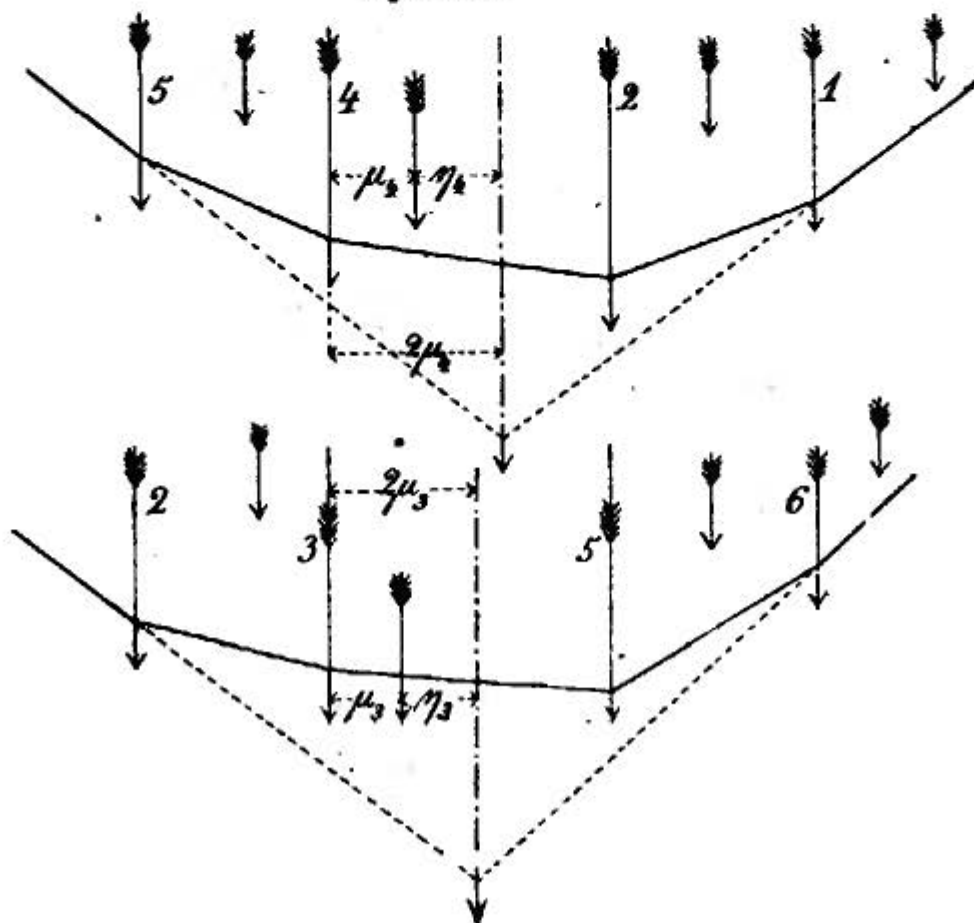
Zachodzi tylko ta okoliczność, że nie znamy wielkości μ' . Nie pozostaje nam nic innego, jak w pierwszym przybliżeniu przyjąć $\mu' = 0$. Otrzymamy przybliżone wartości μ , które dla sąsiednich węzłów dadzą nam μ' , możemy więc tam już dokładniej wyznaczyć μ , które znów są dla sąsiednich węzłów μ' . Na podstawie tych μ' obliczamy po raz drugi, a jeśli potrzeba i trzeci, μ tak długo, aż nie okażą się już więcej znaczniejsze różnice.

Przy tej konstrukcyi trzeba, rozumie się, uwzględniać znak $\epsilon \delta$ i μ' . Kreślimy więc w każdym węźle prety w porządku, jak wskazówką posuwa się na zegarze i odcinajmy dodatnie δ na prawo, na prawo od wypadkowej leżące μ uważajmy jako dodatnie, na lewo jako ujemne.

Na rys. 91. widzimy dwa wieloboki sznurowe dla węzła 3 i 4 (rys. 89.). Nazwijmy odstęp nieprzesuniętej siły od wypadkowej τ , to

$$2\mu_4 = \mu_4' + \tau_4 \text{ i } 2\mu_3 = \mu_3' + \tau_3.$$

rys. 91.



Ponieważ dalej $\mu_3 = \mu_3'$ i $\mu_2 = \mu_2'$, więc

$$\mu_3' = \frac{\eta_3 + 2\eta_4}{3}, \mu_2' = \frac{\eta_2 + 2\eta_3}{3} \dots \dots \dots 22)$$

Gdybyśmy znali położenie wypadkowych, tobyśmy mogli wprost obliczyć μ' , tymczasem ponieważ zwykle wypadkowe niewiele się przesuwają, więc na podstawie tych równań możemy w przybliżeniu wyznaczyć μ' . Podwajamy cyrklem η_4 , dodajemy do tego η_3 i dzielimy przez 3, o tę długość μ_3' przesuwamy siłę 3 na lewo.

Wyznaczywszy w ten sposób μ , możemy łatwo obliczyć natężenie v' . Mamy bowiem $v'I = Mc$, a że według 20)

$$M = \frac{6 I \mu}{s}, \text{ więc } v' = \frac{6 c}{s} \mu \dots \dots \dots 23)$$

Przykład. Jako przykład wyznaczmy natężenia drugorzędne mostu nad Pegnicą kolei Norymbergia — Neuhaus o rozpiętości 36 m (tabl. IV), dla którego Steiner wyznaczył te natężenia innym sposobem (liczebnym*). Pomost leży u góry, ciężar własny wynosi dla pasu dolnego 0.29 t/m, dla górnego 0.71 t/m, ciężar ruchomy 2.94 t/m jednej belki. Belka jest całkowicie obciążona. Siły wewnętrzne pierwszorzędne S , przekroje prętów A , momenty bezwładności I , odstęp włókna skrajnego od osi obojętnej e i długości prętów s podane są w poniższej tablicy.

Pręt	s	A	I	e	S	I_s	μ_2	μ_1	v_1	v_1'	v
	cm	cm ²	cm ⁴	cm	t	cm ³	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²
1 3	400	86	2040	13.6	35.3	5.1	-1270	-1400	254	286	-410
3 5	400	166	7110	18.0	93.0	17.75	-360	-690	104	186	-560
5 7	400	226	13000	20.0	134.8	32.5	-20	-400	6	120	-596
7 9	400	253	13000	20.0	159.7	32.5	+220	-460	66	138	-621
9 11	400	253	15100	20.0	168.0	37.75	+400	-400	120	120	-664
0 2	200	48	2140	13.8	15.0	10.7	-1200	-1470	497	609	+312
2 4	400	95	4270	13.8	66.4	10.67	-360	-860	75	178	+639
4 6	400	182	5960	16.0	116.7	14.90	-300	-650	72	156	+642
6 8	400	224	12260	20.0	149.3	30.65	-50	-690	15	207	+667
8 10	400	239	13000	20.0	165.9	32.5	+600	+500	180	150	+694
0 1	380	143	4410	12.6	70.9	11.61	+1120	+540	223	107	-496
2 3	429	136	6920	18.0	70.6	16.13	+740	+390	186	98	-527
4 5	429	117	5690	17.8	52.8	13.26	+730	+600	182	149	-451
6 7	429	89	3200	14.8	35.0	7.45	+760	+710	157	147	-393
8 9	429	55	1640	12.6	17.2	3.82	+340	+140	57	25	-313
1 2	429	96	12800	20.0	71.9	29.84	+60	+360	17	107	+749
3 4	429	77	6550	16.0	54.1	15.27	+310	+490	69	110	+703
5 6	429	56	3660	14.0	36.3	8.53	+800	+570	159	112	+648
7 8	429	40	740	9.6	18.5	1.73	+750	+280	107	38	+462
9 10	429	48	1130	11.1	0.66	2.63	+400	+30	62	5	+14

*) p. Handbuch der Ingenieurwissenschaften t. II. str. 362.

Najprzód wyznaczyliśmy natężenia pierwszorzędne i dotyczne kątów i oznaczyli je na rys. 1. Na podstawie rów. 14) obliczyliśmy potem zmianę kątów $\epsilon\delta$ i z uwzględnieniem znaku oznaczyliśmy wartości te w rys. 2., poczem przystępujemy do wyznaczenia μ i μ' według §. 82 (rys. 3. do 13). W każdym z tych rysunków wykreśliśmy dla danego węzła wielobok sił n. p. w rys. 4. dla węzła 4 siły $\frac{I}{8}$ dla prętów 13, 12, 10 zawsze w porządku tym, w jakim natrafiamy pręty, posuwając się, jak wskazówka na zegarze.

Dalej kreślimy kierunki tych sił w odstępach $\epsilon\delta$ w podziałce $\frac{1 \text{ mm}}{100 \text{ kg/cm}^2}$, licząc dodatnie $\epsilon\delta$ na prawo, ujemne na lewo; kierunki te wyciągnąć należy od razu tuszem. Siły te składamy teraz zapomocą wieloboku sznurowego i otrzymujemy tymczasowe położenie wypadkowej. Teraz przesuwamy kierunki o μ' , które nam jednak jeszcze nie jest znane, przyjmujemy więc μ w przybliżeniu, korzystając z rów. 22), μ i μ' , leżące na prawo od wypadkowej, uważamy jako dodatnie, na lewo jako ujemne i przesuwamy odpowiednio kierunki sił w pierwszym wypadku na lewo, w drugim na prawo. Dla przesuniętych sił kreślimy znów wielobok sznurowy i otrzymujemy poprawiony kierunek wypadkowej. Teraz sprawdzamy, czy dla jednego pręta μ otrzymane z jednego rysunku równa się μ' w drugim, n. p. czy odstęp wypadkowej 1 w rys. 4. (węzeł 1) od siły 3, więc $2\mu_3$ równa się podwójnemu odstępowi wypadkowej 3 (rys. 6.) i poprawiamy rysunki te dopóty, aż tę zgodność osiągniemy, wtedy odczytujemy μ z rysunków według podziałki $\epsilon\delta$ (tu $\frac{1 \text{ mm}}{100 \text{ kg/cm}^2}$). Wpisaliśmy wartości te w tabliczkę w rubrykach μ i μ' . Na podstawie rów. 23. obliczamy stąd wreszcie v_1 i v_1' , natężenia drugorzędne na obu końcach pręta.

§. 85. Wpływ mimośrodkowego utwierdzenia prętów.

Jeśli niektóre pręty są mimośrodkowo utwierdzone, to powstają wskutek tego dodatkowe natężenia, a oprócz tego zmieniają się natężenia drugorzędne.

Nazwijmy odstęp osi pręta od węzła c , dodatnie lub ujemne wedle tego, czy wskutek tego koniec pręta zgina się na prawo lub lewo, to odnośne momenty są $M=Sc$ i $M'=Sc'$, a według 17)

$$\tau_c = \frac{(2M - M')s}{6\epsilon I} = \frac{(2c - c')Ss}{6\epsilon I} \dots\dots\dots 24) -$$

Kąty zmieniają się więc nie tylko wskutek odkształcenia prętów, ale i mimośrodkowego utwierdzenia. Konstrukcja wskazana w poprzednim paragrafie cała małego się zmienia, mianowicie każde poprzednie δ powiększa się o τ_c , każde następne pomniejsza się o tę ilość, a więc w rys. 88. i 89., posuwamy kierunki sił o τ_c na prawo. Zresztą konstrukcja się nie zmienia. W ten sposób otrzymujemy natężenia drugorzędne,

oprócz tego obliczamy wprost natężenia, powstałe wskutek mimośrodkowego utwierdzenia; mają one zwykle znak przeciwny tak, że natężenia te po części się znoszą.

§. 86. Wpływ przekroju prętów.

Aby zbadać wpływ przekroju prętów na natężenie drugorzędne, pomyślmy, że momenty bezwładności I wszystkich prętów stały się n razy większe, a przekrój ich A i odstęp skrajnej warstwy od osi pozostał niezmienny, to przez to μ się nie zmniejsza, natężenia drugorzędne pozostaną te same. Przypuśćmy teraz, że także wszystkie A stały się n razy większe, e pozostały te same, wtedy natężenia stały się n razy mniejsze, a więc i δ i μ n razy mniejsze, zatem natężenia zmniejszyły się n razy. Jeżeli zaś A nie zmienimy, lecz e stanie n razy większem, to natężenia n razy wzrosną.

Z powyższego widzimy, że natężenia drugorzędne są w prostym stosunku proporcjonalne do szerokości prętów i natężeń pierwszorzędnych, a w odwrotnym do przekroju prętów. A zatem chcąc uniknąć wielkich natężeń drugorzędnych, należy robić pręty tak wąskie, jak na to pozwala dokładne połączenie nitami i wzgląd na wyboczenie prętów ciśnionych.

Ponieważ w mostach dla małych rozpiętości szerokości prętów są w stosunku do ich długości największe, więc też przy takich mostach powstają największe natężenia drugorzędne.

§. 87. Wpływ obciążenia.

Jeżeli na belkę działa ciężar ruchomy, to powstaje pytanie, dla jakiego obciążenia powstają największe natężenia drugorzędne. Najprędzej wyznaczyć je możemy zapomocą linii wpływowych. Wprawdzie tu metoda linii wpływowych nie da się ściśle zastosować, bo tu zmiany ramion momentów wskutek odkształceń sprężystych nie są w stosunku do wymiaru prętów nadzwyczaj małe, ale i cała powyższa teoria jest tylko przybliżoną, możemy więc równem prawem używać linii wpływowych. W tym celu należałoby badać wpływ ciężaru $P=1$, zaczepionego w pojedynczych węzłach; badanie takie byłoby jednak za żmudne. Winkler doszedł przytem do wyniku, że w ogóle można przyjąć, że natężenia drugorzędne są największe dla tego samego obciążenia, co pierwszorzędne.

§. 88. Wpływ ustroju belki.

Winkler badał natężenia drugorzędne dla rozmaitych belek kratowych; my tu podamy tylko wyniki, do jakich on doszedł.

W belce kratowej równoległej o kracie prostokątnej powstają natężenia drugorzędne wynoszące w pasach 10 do 24%, w kracie równoramiennej 5—14% pierwszorzędnych. Natężenia drugorzędne w kracie są również w pierwszym przypadku większe, niż w drugim.

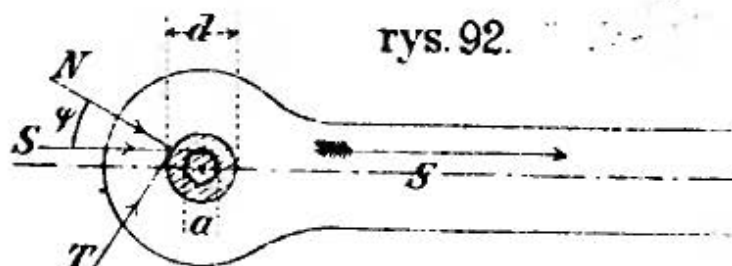
Jeśli belki kratowe o kracie wielokrotnej obciążymy tak, że tylko jeden układ jest obciążony, powstają bardzo znaczne natężenia drugorzędne w pasach. Winkler otrzymał w pewnym wypadku natężenia drugorzędne, sięgające do 88% pierwszorzędnych, średnio 45%. Przy obciążeniu wszystkich węzłów otrzymał on tylko natężenia wynoszące 12%.

Jeżeli przytem krzyżulce są połączone, natężenia drugorzędne wzrastają jeszcze bardziej. Winkler otrzymał w pasach natężenia drugorzędne, wynoszące 27 do 113%, przeciętnie 65%, w krzyżulcach przeciętnie 51%.

Na średniej podporze belek ciągłych powstają znaczne natężenia drugorzędne w pasie zwłaszcza dolnym, natężenia te mogą być dwa razy większe, niż w innych częściach belki.

§. 89. Połączenia przegibne.

Jeżeli pręty belki kratowej połączone są przegibnie, to jednak obrót pręta około sworznia nastąpi dopiero wtedy, gdy moment M_r , wywołany tarciem, mniejszy jest, niż moment węzłowy M , obliczony poprzednim sposobem. Siła S (rys. 92.)



rys. 92.

rozkłada się na $N = S \times \cos \varphi$ i $T = S \sin \varphi = N \tan \varphi$, przyczem φ jest kątem tarcia, więc $\tan \varphi = f$. Jeżeli wykreślimy promieniem a koło, to dopóki kierunek siły S przecina

koło, nie może ruch nastąpić, a zatem największy mimośród możliwy jest $a = \frac{d}{2} \tan \varphi$ 24)

Mimowśród ten największy możemy odrazu obliczyć.

Wyznaczenie więc natężeń drugorzędnych pozostaje takie samo, jak wprzód, tylko baczyć musimy, że *najw* $M_r = S_a$.

Z powyższego wynika, że aby natężenia były jak najmniejsze, powinny być jak najcieńsze sworznie, o ile tylko wytrzymałość materiału na to pozwala. Tam więc, gdzie natężenia drugorzędne są wielkie, dadzą się urządzeniem połączeń przegibnych zmniejszyć natężenia drugorzędne, ale tylko do pewnej granicy, zależnej od wielkości średnicy sworznia. Na każdy sposób widzimy, że nawet przy użyciu połączeń przegibnych nie dadzą się natężenia drugorzędne zupełnie usunąć.



DODATEK.

Literatura.

Podajemy tu w porządku chronologicznym spis podręczników i niektórych ważniejszych artykułów i nowszych dzieł, odnoszących się do części teorii mostów, zawartej w niniejszym tomie.

1. Ogólne dzieła.

Rebhann: *Theorie der Holz- und Eisenconstructionen*. Wiedeń 1856.

Mollinos i Pronnier: *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques*. Paryż 1857.

Laissle i Schübler: *Der Bau der Brückenträger*. Stuttgart 1857. 4 wyd. 1870.

Bresse: *Cours de la mécanique appliquée*. II. część. Paryż 1862.

Scheffler: *Über Gitter und Bogenträger*. Brunszwik 1862.

Culmann: *Die graphische Statik*. Zurych 1866. 2 wyd. 1875.

Winkler: *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*. Praga 1867.

Collignon: *Cours de la mécanique appliquée aux constructions*. Paryż 1869.

Ott: *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*. Praga 1870, 4 wyd. 1885.

Ritter W. *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken*. Zurych 1871, 2 wyd. 1883.

Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1872. 2. wyd. 1878—1891.

Weyrauch: *Allgemeine Theorie der continuirlichen und einfachen Träger*. Lipsk 1873.

Levy: *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paryż 1874. 2. wyd.

Winkler: *Vorträge über Brückenbau I. Heft Aeussere Kräfte gerader Träger*. 1875. 3. wyd. 1886.

Ritter: *Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik*. Hannower 1876.

Jay du Bois: *The elements of graphical statics and their application to framed structures*. Nowy York 1875. 2. wyd. 1877.

- kler: *Vorträge über Brückenbau. II. H. Innere Kräfte. gerader Träger.* 2. wyd. 1881.
- Eddy: *Researches in graphical statics.* Nowy York 1878., tłum. niem. 1880.
- Castigliano: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications.* Turyn 1879.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses.* Nowy York 1880.
- Chalmers: *Graphical determination of forces in engineering structures.* Londyn 1881.
- Schäffer i Sonne: *Handbuch der Ingenieurwissenschaft II. B. Der Brückenbau.* Lipsk 1882. 2. wyd. 1886—1890.
- Stelzel: *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger.* Gradziec 1882.
- Weyrauch: *Theorie elastischer Körper.* Lipsk 1884.
- Résal: *Ponts métalliques.* Paryż 1885—1889.
- Müller Breslau: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre.* Lipsk 1886.
- Müller Breslau: *Graphische Statik der Bauconstructionen* Berlin 1879., 2. wyd. 1887—1891.
- Planat: *Pratique de la mécanique appliquée.* Paryż 1887.
- Leber: *Die neue Brückenverordnung des österr. Handelsministeriums.* Wiedeń 1886.
- Koechlin: *Applications de la statique graphique.* Paryż 1889.
- Ritter W.: *Anwendungen der graphischen Statik II. Th. Das Fachwerk.* Zurych 1890.

2. Belka ciągła.

- Clapeyron: *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement exposés.* Comptes rendus. 1857.
- Winkler: *Beiträge zur Theorie der continuirlichen Brückenträger.* Civilingenieur 1862.
- Schmidt: *Über die Bestimmung der äusseren auf ein Brückensystem wirkenden Kräfte.* Allg. Bauz. 1866.
- Lippich: *Theorie des continuirlichen Trägers konstanten Querschnittes.* Allg. Bauz. 1871.
- Šolin: *Geometrische Theorie der continuirlichen Träger.* Mittheil. d. Arch. u. Ing. Ver. in Böhmen. 1873., 1874.

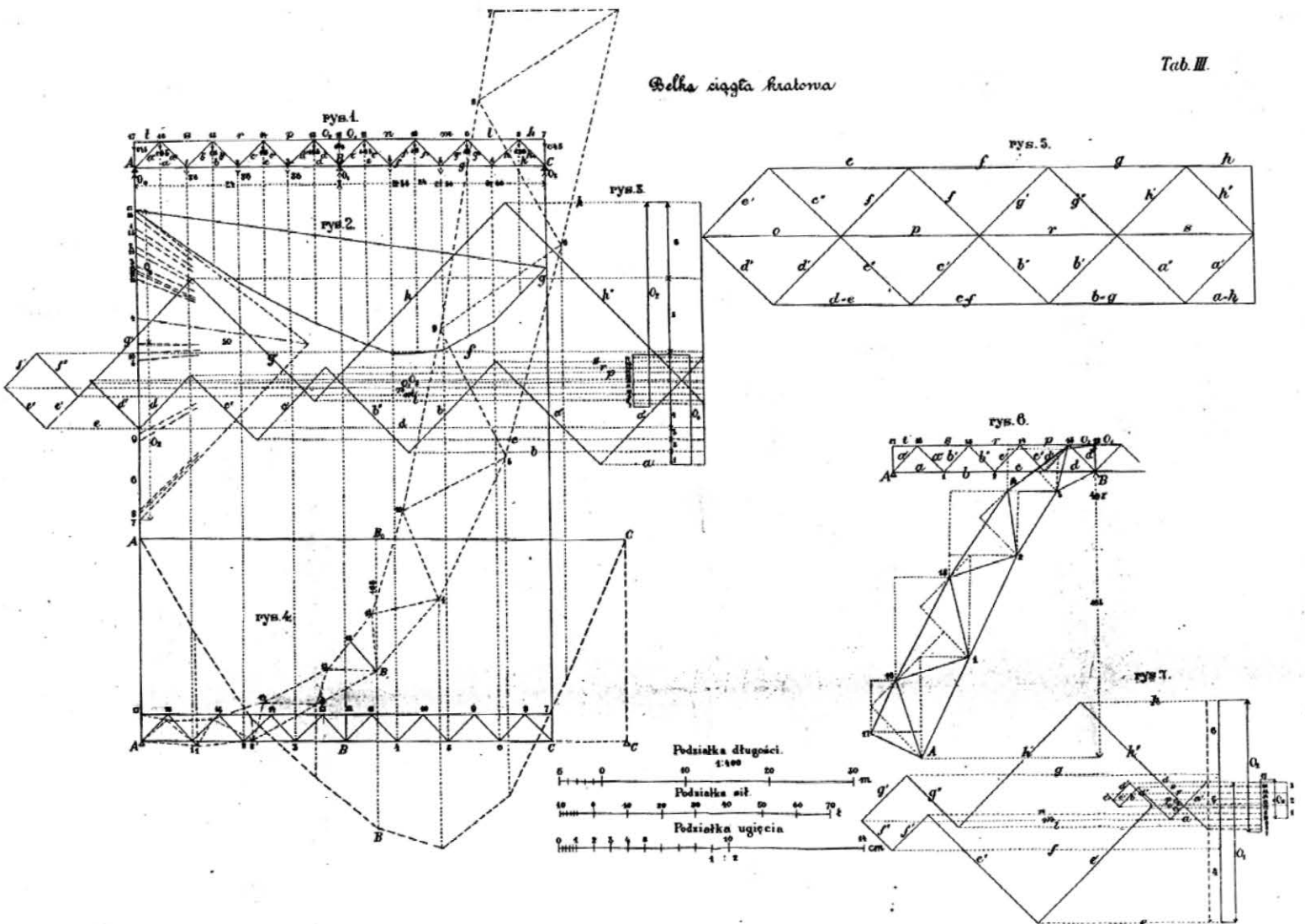
- Greene: *Graphical method for the analysis of bridge truss
tended to continuous girders and draw spans.* Nowy York 1870
- Meriman: *On the theory and calculation of continuous bridges.*
Nowy Jork 1876.
- Schäffer: *Belastungsgesetze für den geraden stabförmigen Körper*
Zeit. f. Bauw. 1876.
- Kleitz: *Note sur les calculs de stabilité des poutres continues,*
ayantes des moments d'inertie variables. An. d. pouts et chaus.
1876., 1877.
- Hulewicz: *Obliczenie wytrzymałości belek wieloprzęsłowych.*
Pam. tow. nauk ścisłych. Paryż 1876., to samo po franc.
Ann. d. pon. et cha. 1882.
- Krohn: *Berechnung kontinuierlicher Fachwerksträger auf Grund der*
Deformationen der einzelnen Fachwerkstäbe. Civilingenieur 1880.
- Landsberg: *Beitrag zur graphischen Berechnung kontinuierlicher*
Träger. Centr. der Bauver. 1881.
- Rytiß: *Der kontinuierliche Balken. Allg. Bauzeit.* 1882.
- Müller Breslau: *Influenzlinien für den kontinuierlichen Träger*
auf drei Stützen. Wochenb. f. Arch. u. Ing. 1883.
- Thullie: *Graphische Bestimmung der im kontinuierlichen Gitter-*
träger mit 2 Feldern wirkenden Kräfte auf Grund der Durch-
biegung. (Woch. der Arch. u. Ing. 1884. i po polsku Przegl.
Techn. 1887).
- Šolin: *Zur Theorie des kontinuierlichen Trägers veränderlichen*
Querschnittes. Civilingenieur 1885.
- Šolin: *Theorie zevnitřních sil trámu přímých. Praga* 1885.
- Steiner: *Über den Einfluss einer Erwärmung der Gurte auf*
den kontinuierlichen Träger 1887, 1888.
- Müller-Peterwitz: *Einflusslinien für kontinuierliche Träger*
Deutsche Bauz. 1888.
- Thullie: *Bestimmung der Einflusslinien für die inneren Kräfte*
des kontinuierlichen Trägers mit drei Stützpunkten. Woch
österr. Ing. u. Arch. 1891.

3. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

- Fränkel: *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte*
elastischer Systeme Z. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann
1882.

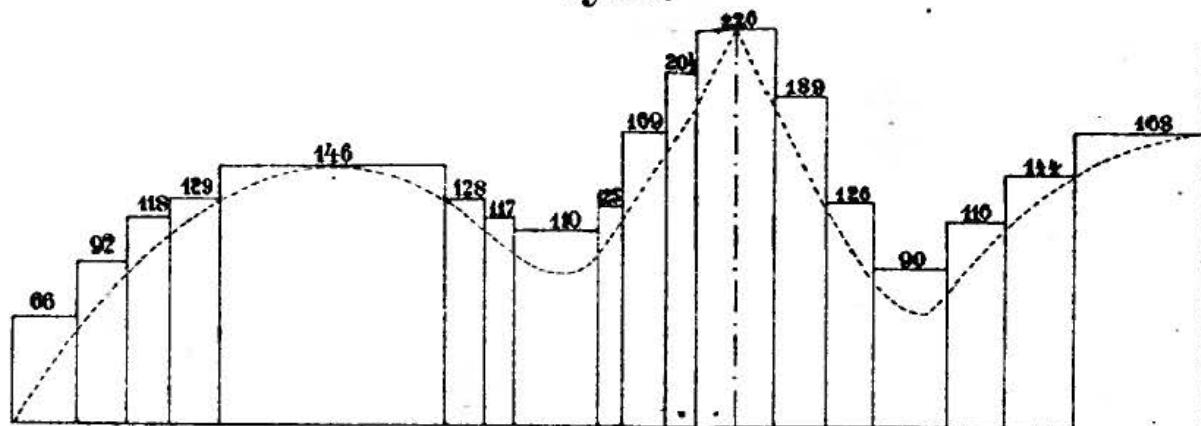
Belka cięta kratowa

Tab. III.

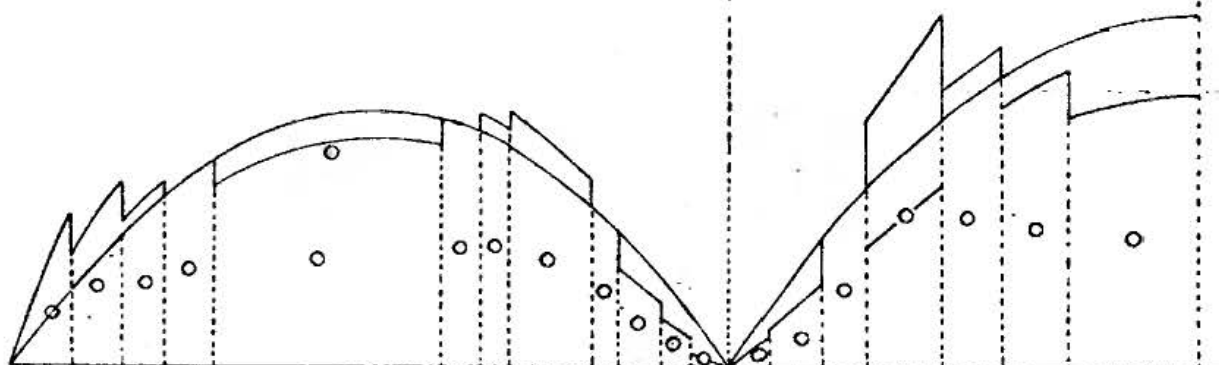


Belka cięgła o przekroju zmiennym.

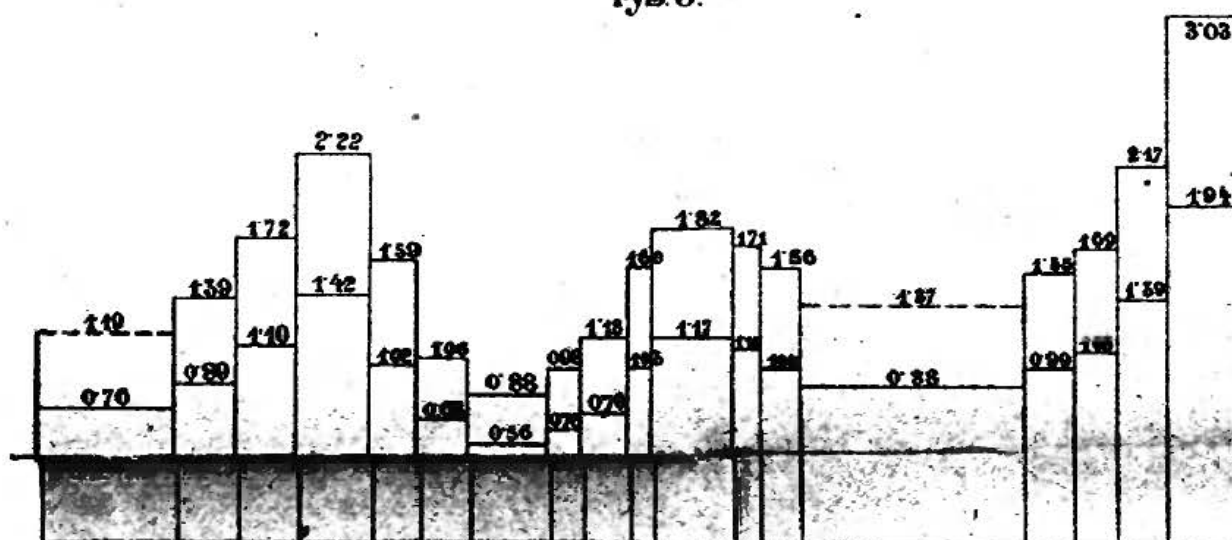
rys. 1.



rys. 2.



rys. 3.



1 mm
2 cm

1:333

1 mm
5 cm²

