POLITECHNIKA LUBELSKA
WYDZIAŁ INŻYNIERII ŚRODOWISKA
INSTYTUT INŻYNIERII ODNAWIALNYCH ŹRÓDEŁ ENERGII

INSTRUKCJE WYKONANIA ZADAŃ NA ZAJĘCIACH LABORATORYJNYCH

FIZYKA
CZ. 1

Anna Jaśkowska
Franciszek Jaśkowski

Politechnika Lubelska
Lublin 2014

Publikacja dystrybuowana bezpłatnie. Nakład 50 egzemplarzy.
Publikacja wydana w ramach projektu „Fotowolt – fizyka techniczna dla ekoinżyniera" współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
nr umowy UDA – POKL.04.01.02 – 00 –181/12 – 01.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

1. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła prostego 4
2. Wyznaczanie stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego 19
3. Wyznaczanie częstotliwości nadajnika fal ultradźwiękowych metodą fali stojącej 30
4. Wyznaczanie ogniskowej soczewki metodą Bessela 51
5. Wyznaczanie prędkości światła w cieczy 69
6. Wyznaczanie wartości ładunku elementarnego metodą Millikana 80
7. Wyznaczanie stosunku $\boldsymbol{e/m}$ elektronu 99

1. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła prostego

1.1. Zasada ćwiczenia

Dysponując metalową kulką o znanym promieniu zawieszoną na zwykłej nici krawieckiej lub cienkim druciku o znanej długości oraz mierząc okres drgań T tego układu można wyznaczyć **przyspieszenie ziemskie g** swobodnego ruchu ciał przy powierzchni ziemi w próżni.

1.2. Opis teoretyczny zagadnienia

1.2.1. Prawo powszechnego ciążenia, natężenie pola grawitacyjnego, przyspieszenie grawitacyjne, przyspieszenie ziemskie

W roku 1686 angielski fizyk Izaak Newton opublikował sformułowane przez siebie prawo powszechnego ciążenia (prawo grawitacji) określające siłę wzajemnego przyciągania między dwoma ciałami punktowymi (punktami materialnymi) o masach m_1 i m_2 znajdujących się w odległości r od siebie. Matematyczna postać prawa jest następująca:

$$F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \tag{1}$$

gdzie stała powszechnego ciążenia:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{s^2 kg} \cdot$$

Z tego prawa wynika, że dwa punktowe ciała o masie 1 kg każde znajdujące się w odległości 1 m od siebie przyciągają się wzajemnie siłą grawitacji o wartości równej

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N.$$

Siła grawitacji dla niewielkich mas jest mała i trudna do wykrycia. Siła grawitacji jest łatwo obserwowalna, gdy masa przynajmniej jednego z przyciągających się ciał jest wystarczająco duża. Ma to miejsce w przypadku Ziemi, której masa wynosi $M = 6 \times 10^{24}$kg.

Wzór (1) można stosować dla kul jednorodnych lub kul o symetrycznym rozkładzie gęstości względem środków. Ma to miejsce w przypadku Słońca, Ziemi oraz innych planet. Siłę grawitacji z jaką Ziemia o masie M przyciąga ciało punktowe (punkt materialny) o masie m znajdujące się w odległości r od środka Ziemi obliczamy ze wzoru:

$$F = G\,\frac{M \cdot m}{r^2}. \tag{2}$$

Oddziaływanie grawitacyjne między ciałami posiadającymi masę znajdującymi się w pewnej odległości od siebie, a więc również między Ziemią i ciałami znajdującymi się w jej otoczeniu, odbywa się poprzez pole zwane **polem grawitacyjnym.**

Wielkością fizyczną opisującą właściwości pola grawitacyjnego Ziemi jest **natężenie pola grawitacyjnego** zdefiniowane jako stosunek siły F_g grawitacji działającej na umieszczone w pewnym punkcie pola ciało do jego masy m

$$\gamma = \frac{F_g}{m}. \tag{3}$$

Natężenie pola grawitacyjnego Ziemi określa siłę wzywającą do ruchu jednostkę masy ciała. Jednostką natężenia pola grawitacji jest $1\,\frac{N}{kg}$.

Jeżeli podzielimy siłę grawitacji działającą na ciało poruszające się w polu grawitacyjnym Ziemi przez masę tego ciała, to zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, otrzymamy przyspieszenie z jakim porusza się ciało – zwane przyspieszeniem grawitacyjnym

$$a_g = \frac{F_g}{m} \tag{4}$$

w inercjalnym układzie odniesienia związanym nie z Ziemią, ale z gwiazdami stałymi. Porównując (3) i (4) widać, że przyspieszenie grawitacyjne ciała równe jest natężeniu pola grawitacyjnego. Oznacza to, że ciało uzyskuje takie przyspieszenie grawitacyjne jaka siła grawitacyjna wzywa do ruchu jednostkę masy tego ciała.

Ruch ciała względem Ziemi z przyspieszeniem grawitacyjnym odbywałby się (oczywiście w próżni) gdyby Ziemia nie wirowała względem własnej osi.

W układzie odniesienia związanym z wirująca Ziemią ruch ciała w próżni odbywa się pod wpływem **siły ciężkości** $\vec{P}$ będącej wypadkową dwóch sił: siły grawitacji $\vec{F}_g$ oraz odśrodkowej siły bezwładności $\vec{B}_o$ z przyspieszeniem zwanym przyspieszeniem ziemskim oznaczonym literą g.

Dla wektorów zachodzi związek:

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{\vec{F}_g + \vec{B}_o}{m}. \tag{5}$$

Przyspieszenie ziemskie różni się od przyspieszenia grawitacyjnego.

Przyspieszenie ziemskie wyznaczone na poziomie morza na równiku wynosi:

$$g_r = 9{,}7804\ \frac{m}{s^2} = 978{,}04 \frac{cm}{s^2},$$

natomiast na biegunie jest większe i wynosi:

$$g_b = 9{,}8322\ \frac{m}{s^2} = 983{,}22 \frac{cm}{s^2}.$$

Różnica wartości przyspieszenia ziemskiego na biegunie i na równiku wynosi:

$$g_b - g_r = 0{,}05\ \frac{m}{s^2} = 5 \frac{cm}{s^2}.$$

Występująca różnica spowodowana jest dwoma czynnikami: odśrodkową siłą bezwładności oraz spłaszczeniem Ziemi na biegunach. Na biegunach nie występuje odśrodkowa siła bezwładności. Na równiku odśrodkowa siła bezwładności powoduje zmniejszenie przyspieszenia ziemskiego o 3,4 $\frac{cm}{s^2}$. Pozostała różnica 1,6 $\frac{cm}{s^2}$ opisywanej różnicy wartości przyspieszenia ziemskiego jest wynikiem spłaszczenia Ziemi na biegunach. Ziemię można uważać za elipsoidę obrotową o promieniach $R_{biegun} = 6357$ km, $R_{równik} = 6378$ km.

Promień kuli o objętości elipsoidy obrotowej wynosi 6371 km.

1.2.2. Swobodny ruch ciała przy powierzchni Ziemi z pominięciem siły oporu powietrza

Rozpatrzmy kilka przypadków swobodnego ruchu ciała, czyli ruchu pod wpływem tylko siły ciężkości z pominięciem siły oporu powietrza.

Ponadto ograniczymy się do ruchu na niewielkich wysokościach od powierzchni Ziemi w stosunku do jej promienia, np. ruchu do wysokości kilkuset metrów. Wówczas przyspieszenie ruchu ciał możemy traktować jako stałe, ale zależne od szerokości geograficznej.

Przykładowo dla Warszawy:

$$g = 9{,}812\ \frac{m}{s^2} = 981{,}2\frac{cm}{s^2}.$$

W zależności od kąta między siłą ciężkości $\vec{F}_c$ i nadaną ciału początkową prędkością $\vec{v}_o$ oznaczonego przez α, ruch ciała nosi nazwę:

1.	$v_0 = 0$	swobodny spadek ciała
2.	$v_0 \neq 0\,;\alpha = 0$	rzut pionowy do dołu
3.	$v_0 \neq 0\,;\alpha = 180^0$	rzut pionowy do góry
4.	$v_0 \neq 0\,;\alpha = 90^0$	rzut poziomy
5.	$v_0 \neq 0\,;90^0 < \alpha < 180^0$	rzut ukośny ku górze

Ad 1. **Swobodny spadek ciała** – spadanie ciała z prędkością początkową równą zero.

Upuszczone ciało porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnie przyśpieszonym z prędkością początkową równą zeru z przyspieszeniem $9{,}812\ \frac{m}{s^2}$ to znaczy, że w każdej sekundzie prędkość ciała wzrasta o $9{,}812\ \frac{m}{s}$.

Ad 2. **Rzut pionowy do dołu**.

Ciało rzucone pionowo w dół z pewną prędkością v_0 porusza sie ruchem prostoliniowym jednostajnie przyśpieszonym z przyspieszeniem $9{,}812\ \frac{m}{s^2}$ to znaczy, że w każdej sekundzie prędkość wzrasta o $9{,}812\ \frac{m}{s}$.

Ad 3. **Rzut pionowy do góry**.

Ciało wyrzucone pionowo do góry z prędkością v_0 porusza sie ruchem prostoliniowym jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem o wartości $9{,}812\ \frac{m}{s^2}$ to znaczy, że w każdej sekundzie prędkość ciała maleje o $9{,}812\ \frac{m}{s}$, a po zatrzymaniu się ciało spada swobodnie i w każdej sekundzie prędkość wzrasta o $9{,}812\ \frac{m}{s}$.

Ad 4. **Rzut poziomy**.

Ciało wyrzucone poziomo z prędkością v_0 porusza się po łuku paraboli przesuwając się w bok ruchem jednostajnym z nadaną prędkością v_0, jednocześnie spada swobodnie z przyspieszeniem $9{,}812\ \frac{m}{s^2}$ co oznacza, że składowa pionowa prędkości wzrasta w każdej sekundzie o $9{,}812\ \frac{m}{s}$.

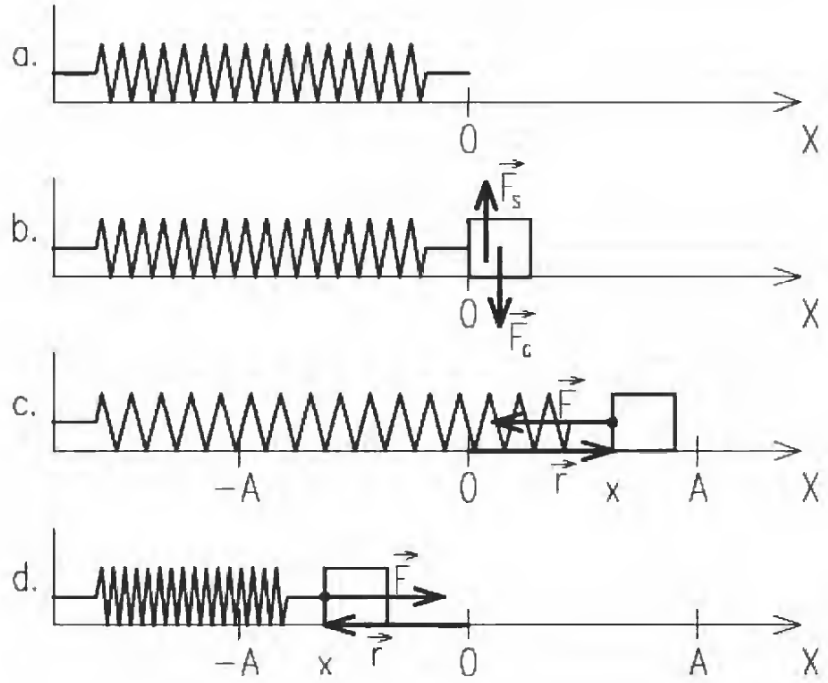
Ad 5. **Rzut ukośny ku górze**.

Ciało wyrzucone ukośnie ku górze porusza się początkowo po wznoszącym, a następnie opadającym w dół łuku paraboli. W kierunku poziomym cały czas porusza się ze stałą prędkością równą składowej poziomej prędkości początkowej. W kierunku pionowym początkowo ciało porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem o wartości $9{,}812\ \frac{m}{s^2}$ co oznacza, że w każdej sekundzie składowa pionowa prędkości maleje o $9{,}812\ \frac{m}{s}$. Po osiągnięciu najwyższego punktu toru ciało spada w kierunku pionowym w dół ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyspieszeniem $9{,}812\ \frac{m}{s^2}$ co oznacza, że w każdej sekundzie składowa pionowa jego prędkości wzrasta o $9{,}812\ \frac{m}{s}$.

Podsumowując można powiedzieć, że niezależnie od nadanej ciału prędkości początkowej ciało porusza się swobodnie ze stałym przyspieszeniem skierowanym do dołu o wartości $9{,}812\ \frac{m}{s^2}$ wskazującym na zmianę w jednostce czasu składowej pionowej prędkości.

1.2.3. Swobodny ruch harmoniczny

Wyobraźmy sobie, że na gładkim blacie stołu leży klocek o gładkich powierzchniach. Klocek doczepiony jest do końca swobodnie leżącej na blacie sprężyny, której drugi koniec przymocowany został do ściany (rys.1).



Rys. 1. Ruch klocka pod wpływem siły sprężystości odkształconej sprężyny

Siła ciężkości $\vec{F}_c$ klocka zrównoważona jest przez siłę $\vec{F}_s$ sprężystości podłoża, więc w dalszych rozważaniach ruchu klocka można ich nie uwzględniać. Wzdłuż sprężyny kierujemy oś współrzędnych OX z zerem w miejscu położenia swobodnego końca sprężyny, czyli w miejscu położenia równowagi klocka (nierozciągnięta sprężyna nie działa na klocek).

Odciągamy ręką klocek na pewną odległość A od położenia równowagi, a następnie uwalniamy klocek od działania ręki. Od tej chwili klocek porusza się ruchem drgającym (wykonuje drgania) wokół swojego położenia równowagi pod wpływem siły na przemian rozciągniętej oraz ściśniętej sprężyny. Siła sprężystości odkształconej sprężyny zmienia się wraz ze zmianą wychylenia klocka z położenia równowagi, zgodnie z zależnością:

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \tag{6}$$

gdzie $\vec{r}$ – wektor położenia klocka względem punktu 0.

Prędkość klocka w czasie tego ruchu zmienia w sposób ciągły swoją wartość oraz skokowo zwrot w miejscach maksymalnego wychylenia z położenia równowagi zwanego **amplitudą wychylenia** i oznaczonego symbolem A.

Opiszmy jakościowo ruch klocka po odjęciu od niego ręki.

Klocek w **pierwszym etapie ruchu,** pod wpływem siły sprężystości ze strony rozciągniętej sprężyny, porusza się ruchem przyśpieszonym w stronę położenia równowagi (maleje

współrzędna x położenia klocka) z coraz wolniej wzrastającą wartością prędkości, ponieważ maleje do zera siła sprężystości (maleje również wartość przyspieszenia, a więc maleje wzrost wartości prędkości w jednostce czasu).

Poruszający się w lewą stronę (przeciwnie do zwrotu osi OX) klocek w pewnej chwili mija położenie równowagi, w którym siła sprężystości wynosi zero. Klocek mijając to położenie z prędkością o największej wartości zwanej **amplitudą prędkości** oznaczonej symbolem v_o, naciska na sprężynę powodując jej odkształcenie (ściskanie). W ten sposób pojawia się siła sprężystości zwrócona (zgodnie ze zwrotem osi OX, czyli ku położeniu równowagi) przeciwnie do zwrotu prędkości klocka. Pod wpływem tej siły klocek porusza się ruchem opóźnionym.

Klocek w **drugim etapie ruchu** oddala się od położenia równowagi z coraz szybciej malejącą do zera prędkością pod wpływem wzrastającej siły sprężystości pochodzącej od coraz bardziej ściskanej sprężyny (rośnie również wartość przyspieszenia, czy jak kto woli opóźnienia, a więc rośnie zmniejszenie prędkości w jednostce czasu). W pewnej chwili klocek zatrzymuje się osiągając największe wychylenie z położenia równowagi, czyli **amplitudę wychylenia.**

W ten sposób klocek wykonał połowę drgania. Dalsza historia ruchu klocka rozpoczyna się jakby od początku tyle, że od maksymalnego wychylenia klocka z położenia równowagi przy ściśniętej sprężynie i odbywa się zgodnie ze zwrotem osi OX w stronę rosnących wartości współrzędnej położenia.

Klocek w **trzecim etapie ruchu** porusza się ruchem przyśpieszonym, mija położenie równowagi z największą prędkością by następnie w czwartym etapie ruchu, poruszając się ruchem opóźnionym, zatrzymać się w początkowym położeniu. Wtedy to kończy się jedno drganie klocka. Czas jednego drgania nazywamy **okresem ruchu drgającego** i oznaczamy literą T.

Oprócz pojęcia okresu drgań wprowadza się pojęcie **częstotliwości drgań** i oznacza literą f. **Częstotliwość drgań** określa liczbę drgań w jednostce czasu. Jednostką częstotliwości jest jeden herc. Częstotliwość równa jest jednemu hercowi, jeżeli w czasie jednej sekundy wykonane jest jedno drganie: $1\ herc = 1Hz = 1\frac{1}{s}$.

Częstotliwość drgań związana jest z okresem zależnością:

$$f = \frac{1}{T}. \tag{7}$$

Przejdźmy do ilościowego opisu klocka traktowanego jako punkt materialny.

Drgania klocka pod wpływem siły sprężystości proporcjonalnej do wychylenia z położenia równowagi noszą nazwę **drgań harmonicznych**, a ponadto w przypadku braku siły tarcia – **drgań swobodnych.**

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona dla swobodnych **drgań harmonicznych punktu materialnego** mamy równanie:

$$m\vec{a} = -k\vec{r}. \tag{8}$$

Dla współrzędnych wektorów zachodzi związek:

$$ma_x = -kr_x \tag{9}$$

lub

$$ma_x = -kx\,, \tag{10}$$

gdzie $x = r_x$.

Równanie (10) można zapisać w postaci:

$$a_x = -\frac{k}{m}x\,. \tag{11}$$

Dla podkreślenia faktu, że $\frac{k}{m} > 0$, ułamek ten oznaczamy przez kwadrat pewnej wielkości, czyli ω^2.

Mamy więc:

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \tag{12}$$

lub

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega\,. \tag{13}$$

Wielkość fizyczna oznaczona symbolem ω nosi nazwę **częstotliwości kołowej** lub **pulsacji** i określa liczbę drgań w 2π jednostkach czasu.

Równanie (11) przyjmuje postać:

$$a_x = -\omega^2 x \tag{14}$$

i oznacza, że przyspieszenie w swobodnym ruchu harmonicznym jest wprost proporcjonalne do wychylenia ciała z położenia równowagi i jest zwrócone do tego punktu równowagi.

Współrzędna przyspieszenia jest pochodną po czasie współrzędnej prędkości $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ oraz współrzędna prędkości jest pochodną po czasie współrzędnej położenia $v_x = \frac{dx}{dt}$, zatem:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}\,.$$

Równanie (14) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x\,. \tag{15}$$

Jest to równanie różniczkowe swobodnych drgań harmonicznych.

Powstaje pytanie, jaka funkcja opisująca zależność od czasu współrzędnej wychylenia drgającego punktu materialnego, spełnia równanie różniczkowe (15). Jest to funkcja okresowa, której druga pochodna po czasie równa jest ze znakiem minus samej funkcji pomnożonej przez $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Funkcją taką jest funkcja zmieniająca się jak funkcja sinus lub cosinus. Można odgadnąć, że funkcja ta ma postać:

$$x = A\,sin\,(\omega t + \varphi), \tag{16}$$

gdzie: A – amplituda wychylenia, $(\omega t + \varphi)$ – faza drgań, natomiast φ – faza początkowa.

Dla funkcji opisanej równaniem (16) zachodzi:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = A\,\omega \cdot \cos\,(\omega t + \varphi) \tag{17}$$

oraz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = a_x = -A\,\omega^2 \cdot \sin\,(\omega t + \varphi). \tag{18}$$

Funkcją, opisującą zależność współrzędnej wychylenia od czasu dla drgającego punktu materialnego jest również:

$$x = A\,cos\,(\omega t + \varphi), \tag{19}$$

dla której:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -A\,\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{20}$$

oraz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = a_x = -A\,\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi). \tag{21}$$

Okres drgań harmonicznych obliczamy uwzględniając równanie (16), jednocześnie pamiętając, że współrzędna wychylenia przyjmuje tę samą wartość po czasie zwanym okresem, a więc:

$$x(t) = x(t + T), \tag{22}$$

czyli, gdy argument funkcji sinus zmieni się o 2π. Mamy więc:

$$\omega[(t + T) + \varphi] - [\omega t + \varphi] = 2\pi, \tag{23}$$

skąd

$$\omega T = 2\pi, \tag{24}$$

a więc

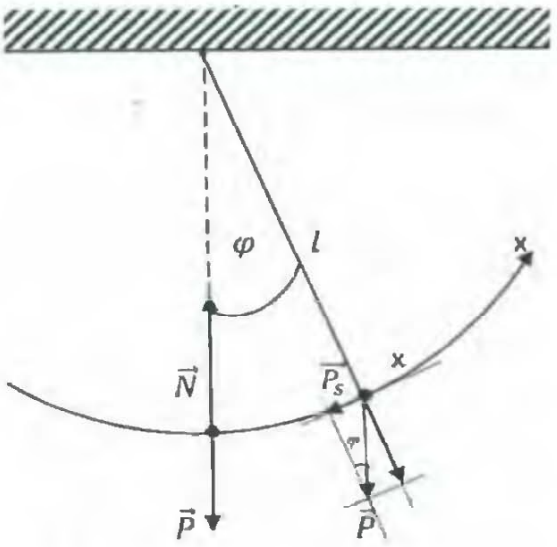
$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}. \tag{25}$$

Po uwzględnieniu zależności (13) wzór (25) na okres drgań przyjmuje postać:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{26}$$

1.2.4. Wyprowadzenie wzoru na okres drgań swobodnych wahadła prostego

Wychylona z położenia równowagi kulka zawieszona na nici porusza się po łuku okręgu pod wpływem siły ciężkości $\vec{P}$ oraz siły sprężystości $\vec{N}$ (inaczej mówiąc: wypadkowej dwóch sił) z przyspieszeniem $\vec{a}$.



Rys. 2. Rozkład siły ciężkości kulki na dwie składowe

Zgodnie z druga zasadą dynamiki Newtona mamy:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}. \tag{27}$$

Składowa przyspieszenia kulki styczna do toru $\overrightarrow{a_s}$ zależy od składowej stycznej siły ciężkości, a więc:

$$m\vec{a}_s = \overrightarrow{P_s}. \tag{28}$$

Dla współrzędnych wektorów mamy:

$$ma_{sx} = P_{sx}\,.$$

Z rysunku 2. widać, że

$$P_s = Psin\varphi = mgsin\varphi,$$

oraz

$$P_{sx} = -mgsin\varphi,$$

to

$$ma_{sx} = -mgsin\varphi,$$

czyli

$$a_{sx} = -gsin\varphi. \tag{29}$$

Dla małych kątów ($\varphi < 7^0$) można przyjąć, że:

$$sin\varphi = \varphi = \frac{x}{l}.$$

Wobec tego

$$a_{sx} = -\frac{g}{l}x, \tag{30}$$

czyli składowa styczna przyspieszenia kulki jest wprost proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi i skierowana ku temu położeniu.

Kulka porusza się więc ruchem harmonicznym dla którego zachodzi związek (14):

$$a_x = -\omega^2 x\,,$$

gdzie ω – częstość kołowa.

Mamy więc

$$\omega^2 = \frac{g}{l} . \tag{31}$$

Wiemy, że częstość kołowa związana jest z okresem drgań T zależnością (24)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

oraz

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} ,$$

więc

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} ,$$

stąd

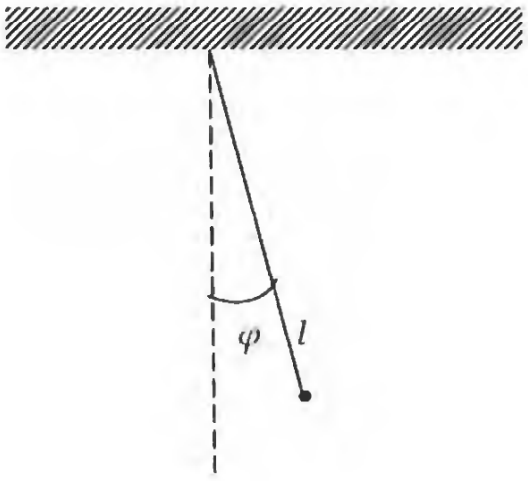
$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} ,$$

ostatecznie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} . \tag{32}$$

1.3. Opis zestawu doświadczalnego

Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny o masie m zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l. Praktyczną realizacją tego wyidealizowanego obiektu jest tzw. **wahadło proste** czyli może to być metalowa kulka zawieszona na zwykłej nici krawieckiej lub cienkim metalowym druciku.



Rys. 3.Wahadło proste

Gdy kąt wychylenia φ nici od pionu jest mały, to okres wahadła T zależy od jego długości l i przyspieszenia g (32) następująco:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Powyższy związek wykorzystujemy do wyznaczenia wartości przyspieszenia ziemskiego. Po przekształceniu powyższego związku otrzymujemy:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \tag{33}$$

W związku z tym, mając do dyspozycji niewielkich rozmiarów kulkę metalową z zaczepem, nitkę o długości około 1m, przymiar z podziałką milimetrową, suwmiarkę, stoper oraz statyw należy zaplanować sposób wyznaczenia a następnie wyznaczyć przyspieszenie ziemskie za pomocą wahadła prostego.

1.4. Wyniki pomiarów oraz niepewności pomiarów bezpośrednich (tzw. prostych)

Tabela 1. Wyniki pomiaru długości (przykładowe)

l_1 (cm)	l_1 (m)	D (mm)	$r = \frac{D}{2}$ (mm)	r (m)	l (m)
1	2	3	4	5	6
66,6	0,666	19,20	9,60	0,00960	0,67560

Oznaczenia:

l_1 – długość nitki od punktu zawieszenia do powierzchni kulki mierzona przymiarem z dokładnością 1 mm,

D – średnica kulki mierzona suwmiarką z dokładnością 0,02 mm,

r – promień kulki,

l – długość wahadła od punktu zawieszenia do środka kulki,

$$l = l_1 + r = l_1 + \frac{D}{2}.$$

Ocena niepewności pomiaru długości wahadła

Maksymalna bezwzględna niepewność wzorcowania przymiaru służącego do pomiaru długości wahadła oraz niepewność odczytu dokonanego przez eksperymentatora wynoszą odpowiednio:

$$\Delta_w(l) = \Delta_w(l_1) + \Delta_w(r) = 1\text{mm} + \frac{0{,}02\text{mm}}{2} = 1\text{mm} + 0{,}01\text{mm} = 1\text{mm}$$

(pominięto drugi człon liczbowy),

oraz $\Delta_E(l) = \Delta_E(l_1) + \Delta_E(r) = 2mm + \frac{0{,}02mm}{2} = 2mm + 0{,}01mm = 2mm$

(pominięto drugi człon liczbowy).

Bezwzględna standardowa niepewność (typu B) pomiaru długości wahadła z tytułu wzorcowania użytego przymiaru oraz z tytułu odczytu długości przez eksperymentatora wynoszą odpowiednio:

$$u_w(l) = \frac{\Delta_w(l)}{\sqrt{3}} = \frac{1mm}{\sqrt{3}},$$

oraz

$$u_E(l) = \frac{\Delta_E(l)}{\sqrt{3}} = \frac{2mm}{\sqrt{3}}.$$

Tabela 2. Wyniki pomiaru czasu oraz okresu (przykładowe)

Lp.	t_i (s)	n	$T_i = \frac{t_i}{n}$ (s)	$\bar{T}$ (s)	g $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
1	2	3	4	5	6
1	16,1		1,61		
2	16,1		1,61		
3	16,2		1,62		
4	16,5		1,65		
5	16,3		1,63		
6	16,2	10	1,62	1,62	10,16
7	16,1		1,61		
8	16,2		1,62		
9	16,1		1,61		
10	16,1		1,61		
11	16,3		1,63		
12	16,2		1,62		

Bezwzględna maksymalna oraz standardowa niepewność pomiaru okresu wahadła z tytułu wzorcowania stopera (niepewność typu B) wynoszą odpowiednio:

$$\Delta_w(t) = 0{,}1s,$$

$$\Delta_w(T) = \frac{0{,}1s}{10} = 0{,}01s,$$

$$u_w(T) = \frac{\Delta_w(T)}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}01s}{\sqrt{3}}.$$

Bezwzględna maksymalna oraz standardowa niepewność pomiaru okresu wahadła z tytułu odczytu na stoperze (niepewność typu B) wynoszą odpowiednio:

$$\Delta_E(t) = 0{,}1s,$$

$$\Delta_E(T) = \frac{0{,}1s}{10} = 0{,}01s,$$

$$u_E(T) = \frac{\Delta_E(T)}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}01s}{\sqrt{3}}.$$

1.5. Ocena złożonej niepewności standardowej pośredniego pomiaru przyspieszenia ziemskiego

Pomiary okresu oraz długości wahadła są pomiarami niezależnymi (każdą z tych **wielkości mierzymy w innym niezależnym doświadczeniu), więc złożoną niepewność** standardową pomiaru przyspieszenia ziemskiego obliczamy korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci wzoru:

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial T}u(T)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial l}u(l)\right]^2}, \tag{34}$$

gdzie:

$u(T)$ – standardowa niepewność pomiaru okresu wahadła,

$u(l)$ – standardowa niepewność pomiaru długości wahadła.

Ponieważ:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

to

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{T}} = 4\pi^2 \mathrm{l}\frac{\partial(\mathrm{T}^{-2})}{\partial \mathrm{T}} = 4\pi^2 \mathrm{l}(-2)\mathrm{T}^{-3} = -\frac{8\pi^2 \mathrm{l}}{\mathrm{T}^3}$$

oraz

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{\partial l}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Mamy więc:

$$\mathrm{u_c(g)} = \sqrt{\left[\frac{8\pi^2 \mathrm{l}}{\mathrm{T}^3}\mathrm{u(T)}\right]^2 + \left[\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\mathrm{u(l)}\right]^2}. \tag{35}$$

Dzieląc obie strony równości (35) przez przyspieszenie ziemskie otrzymamy wyrażenie na względną niepewność standardową pomiaru przyspieszenia ziemskiego:

$$\frac{u_c(g)}{g} = u_{c,r}(g),$$

czyli

$$\mathrm{u_{c,r}(g)} = \sqrt{\left[\frac{8\pi^2 \mathrm{l}}{\mathrm{T}^3}\right]^2 \frac{\mathrm{T}^4}{16\pi^4 \mathrm{l}^2}[\mathrm{u(T)}]^2 + \left[\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\right]^2 \frac{\mathrm{T}^4}{16\pi^4 \mathrm{l}^2}[\mathrm{u(l)}]^2}$$

oraz po uproszczeniach:

$$u_{c,r}(g) = \sqrt{\left[2\frac{u(T)}{T}\right]^2 + \left[\frac{u(l)}{l}\right]^2} \tag{36}$$

lub

$$\mathrm{u_{c,r}(g)} = \sqrt{[2\mathrm{u_r(T)}]^2 + [\mathrm{u_r(l)}]^2}, \tag{37}$$

gdzie:

$u_r(T) = \frac{u(T)}{T}$ – względna niepewność standardowa pomiaru okresu drgań wahadła prostego,

$u_r(l) = \frac{u(l)}{l}$ – względna niepewność standardowa pomiaru długości wahadła prostego.

Obliczanie całkowitej niepewności standardowej pomiaru okresu wahadła

W pomiarach występują oba typy niepewności(typ A – rozrzut wyników i typ B – niepewność wzorcowania i eksperymentatora), zatem prawo przenoszenia niepewności prowadzi do następującego wzoru na całkowitą niepewność standardową

$$u(T) = \sqrt{S_{\bar{T}}^2 + [u_w(T)]^2 + [u_E(T)]^2}\,. \tag{38}$$

Tabela 3. Obliczanie całkowitej niepewności standardowej pomiaru okresu wahadła prostego (przykład)

Lp.	T_i (s)	$\bar{T}$ (s)	$T_i - \bar{T}$ (s)	$(T_i - \bar{T})^2$ (s^2)	$\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2$ (s^2)	S_T (s)	$S_{\bar{T}}$ (s)	$u(T)$ (s)	$u_r(T) = \frac{u(T)}{\bar{T}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,61		-0,01	0,0001					
2	1,61		-0,01	0,0001					
3	1,62		0	0					
4	1,65		0,03	0,0009					
5	1,63		0,01	0,0001					
6	1,62		0	0					
7	1,61	1,62	-0,01	0,0001	0,0016	$\sqrt{0,000145} = 0,015652$	$\sqrt{0,00001208} = 0,003456$	0,0088	0,0054
8	1,62		0	0					
9	1,61		-0,01	0,0001					
10	1,61		-0,01	0,0001					
11	1,63		0,01	0,0001					
12	1,62		0	0					

S_T – odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru okresu wahadła prostego od średniej arytmetycznej (niepewność pomiarowa pojedynczego pomiaru okresu wahadła),

$$S_T = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2}. \tag{39}$$

$S_{\bar{T}}$ – odchylenie standardowe wyniku pomiaru okresu wahadła prostego (średniej arytmetycznej okresu wahadła prostego), a więc niepewność standardowa pomiaru okresu wahadła,

$$S_{\bar{T}} = \frac{S_T}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (T_i - \bar{T})^2}. \tag{40}$$

Całkowita niepewność standardowa pomiaru okresu wahadła $u(T)$ obliczona ze wzoru (38) wynosi:

$$u(T) = \sqrt{0{,}000012 + \left(\frac{0{,}01}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}01}{\sqrt{3}}\right)^2}\, s = \sqrt{0{,}000012 + \frac{0{,}0001}{3} + \frac{0{,}0001}{3}}\, s =$$

$$= \sqrt{0{,}000012 + 0{,}000033 + 0{,}000033}\, s = \sqrt{0{,}000078}\, s = \mathbf{0{,}0088s}\,.$$

Względna niepewność standardowa pomiaru okresu wahadła prostego wynosi:

$$u_r(T) = \frac{u(T)}{T} = \frac{0{,}0088\mathrm{s}}{1{,}62s} = \mathbf{0{,}0054}\,.$$

(za T wstawiono wartość $\bar{T}$)

Ocena niepewności standardowej (typ B) pomiaru długości wahadła

Przy pomiarze długości wahadła występują oba źródła niepewności typu B, mianowicie niepewność wzorcowania miernika długości: $\Delta_w(l); u_w(l)$ oraz niepewność eksperymentatora: $\Delta_E(l); u_E(l)$.

Całkowitą niepewność standardową pomiaru długości wahadła obliczamy ze wzoru:

$$u(l) = \sqrt{[u_w(l)]^2 + [u_E(l)]^2} = \sqrt{\frac{[\Delta_w(l)]^2}{3} + \frac{[\Delta_E(l)]^2}{3}}\,.$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy

$$u(l) = \sqrt{\frac{(1mm)^2}{3} + \frac{(2mm)^2}{3}} = \sqrt{0{,}3333 + 1{,}3333}\; mm = \sqrt{1{,}6666}\; mm = \mathbf{1{,}2909}\boldsymbol{mm}\,.$$

Względna niepewność standardowa pomiaru długości wahadła prostego wynosi:

$$u_r(l) = \frac{u(l)}{l} = \frac{1{,}2909mm}{675{,}60mm} = \mathbf{0{,}0018}\,.$$

Obliczanie złożonej niepewności standardowej pomiaru przyspieszenia ziemskiego

Złożoną względną niepewność standardową pomiaru przyspieszenia ziemskiego obliczamy według wzoru (37):

$$\mathrm{u_{c,r}(g)} = \sqrt{[2{\cdot}0{,}0054]^2 + [0{,}0018]^2} = \sqrt{[0{,}0108]^2 + [0{,}0018]^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}00011664 + 0{,}00000324} = \sqrt{0{,}00011988} = \mathbf{0{,}0109}\,.$$

Ostatecznie, złożona bezwzględna niepewność standardowa wynosi:

$$\mathrm{u_c(g)} = \bar{\mathrm{g}} \cdot \mathrm{u_{c,r}(g)} = 10{,}16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 0{,}0109 = 0{,}110744\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = \mathbf{0{,}11}\,\boldsymbol{\frac{m}{s^2}}\,.$$

1.6. Zapis wyniku pośredniego pomiaru przyspieszenia ziemskiego

1. Niepewność podajemy z dokładnością do dwóch cyfr znaczących, czyli
$$u_c(g) = 0{,}11\frac{m}{s^2}.$$
2. Wynik pomiarów zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego co niepewność, czyli
$$g = 10{,}16\frac{m}{s^2}$$
3. Zapisujemy wynik końcowy wraz z niepewnością i jednostką, czyli
$$g = 10{,}16\frac{m}{s^2}; \qquad u_c(g) = 0{,}11\frac{m}{s^2}$$
lub
$$g = 10{,}16(11)\frac{m}{s^2}.$$

Niepewność rozszerzona

$$U(g) = ku_c(g).$$

1. $k = 2$; $g = 10{,}16\frac{m}{s^2}$, $U(g) = 0{,}22\frac{m}{s^2}$,
$$g = (10{,}16 \pm 0{,}22)\frac{m}{s^2}.$$
2. $k = 3$; $g = 10{,}16\frac{m}{s^2}$, $U(g) = 0{,}33\frac{m}{s^2}$,
$$g = (10{,}16 \pm 0{,}33)\frac{m}{s^2}.$$

Porównujemy otrzymany wynik z wartością tablicową przyspieszenia ziemskiego w Lublinie (dla szerokości geograficznej 51,233) $\boldsymbol{g_L = 9{,}81\frac{m}{s^2}}$.

Wynik pomiaru nie jest zgodny z wartością tablicową nawet w granicach potrójnej niepewności standardowej.

Zagadnienia do kolokwium

1. Prawo powszechnego ciążenia. Pole grawitacyjne Ziemi. Natężenie pola grawitacyjnego, przyspieszenie grawitacyjne, przyspieszenie ziemskie.
2. Swobodny ruch ciała przy powierzchni Ziemi ze stałym przyspieszeniem ziemskim.
3. Jakościowy i ilościowy opis swobodnego ruchu harmonicznego punktu materialnego.
4. Drgania swobodne wahadła prostego, okres drgań.
5. Opis zestawu doświadczalnego oraz wykonania doświadczenia w celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego.
6. Ocena złożonej niepewności standardowej pośredniego pomiaru przyspieszenia ziemskiego na podstawie prawa przenoszenia niepewności nieskorelowanych pomiarów bezpośrednich.
7. Zapis wyniku pomiaru.

Literatura

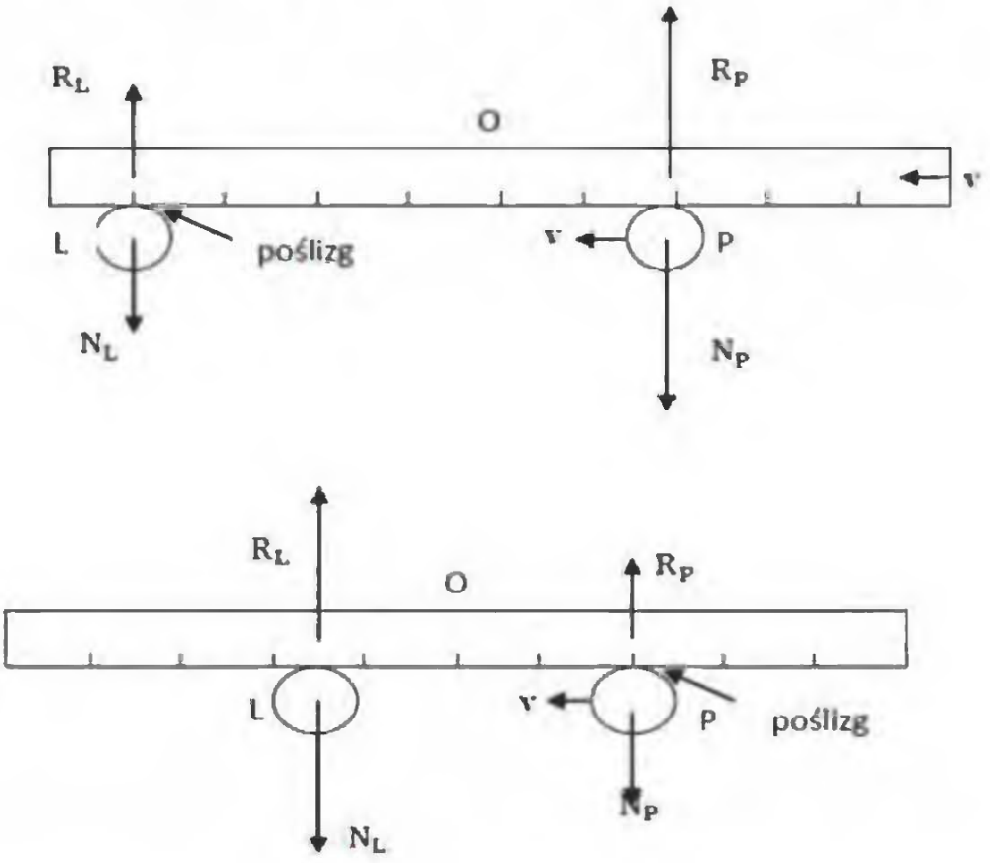
1. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki,* t. 2, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2011.
2. Zięba A., *Opracowanie danych pomiarowych*. Rozdział I. Dostępność .12. 2013r. Strona internetowa: http://www.ftj.agh.edu.pl/zdf/danepom.pdf
3. *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej* (ONP). *Nowe normy międzynarodowe.* [W]: Rozdział I. Opracowanie danych pomiarowych. Dostępność 29.11.2013r. Strona internetowa: www.pj.ifd.uni.wroc.pl/pliki/ONP.pdf

2. Wyznaczanie stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego

2.1. Zasada ćwiczenia

Idea pośredniego pomiaru stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego opiera się na następującym doświadczeniu.

Bierzemy długi pręt i kładziemy go na wskazujących palcach szeroko rozstawionych dłoni (rys. 4.). Zsuwając palce powoli do siebie (np. prawy do lewego) zauważamy, że pręt ślizga się na przemian po jednym (najpierw po lewym), to po drugim (później prawym) palcu.

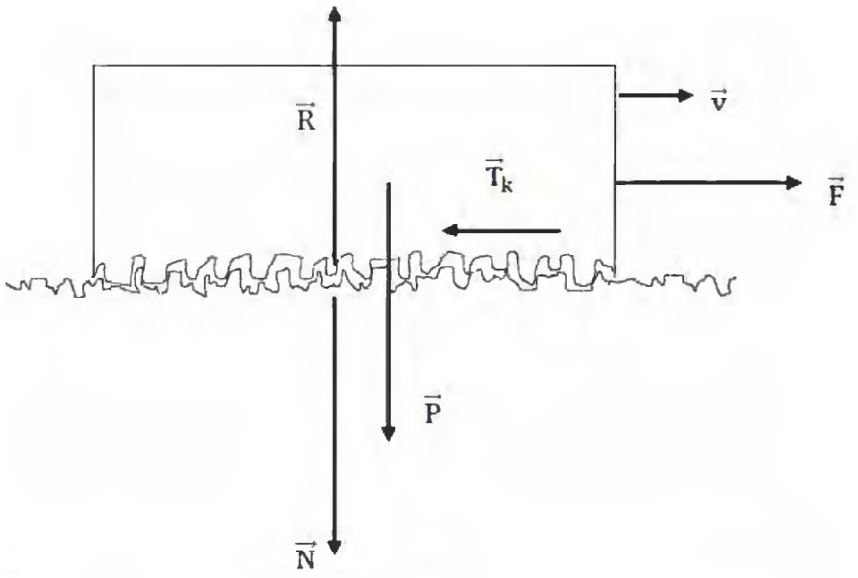


Rys. 4. Widok pręta leżącego na palcach wskazujących obu rąk (palce ustawiane prostopadle do pręta)

2.2. Opis teoretyczny

2.2.1. Tarcie kinematyczne, współczynnik tarcia kinematycznego

Wyobraźmy sobie, że po poziomym blacie spoczywającego w laboratorium stołu, ciągnięty jest po prostoliniowym torze drewniany klocek za pomocą siłomierza.



Rys. 5. Wektory sił oddziaływania ciał podczas ruchu klocka po blacie stołu z widocznymi chropowatościami stykających się powierzchni

Ruch prostoliniowy klocka odbywa się pod wpływem sił (rys. 5):

1) siły ciężkości P działającej pionowo do dołu,
2) siły sprężystości R działającej pionowo do góry ze strony odkształconego blatu stołu jako siły reakcji powierzchni blatu na siłę nacisku N klocka na blat ($\vec{R} = -\vec{N}$, czyli R=N zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona). Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona siły działające w kierunku pionowym na klocek równoważą sie, ponieważ w tym kierunku przyspieszenie klocka wynosi zero. Tak więc $\vec{P}+\vec{R}= 0$, czyli R=P. Z powyższych zależności między: N, R oraz P wynika, że N=P, czyli poruszający się klocek naciska na blat stołu siłą sprężystości równą sile ciężkości klocka, czyli sile z jaką klocek przyciągany jest przez Ziemię,
3) siły sprężystości F ze strony rozciągniętej sprężyny siłomierza,
4) siły tarcia kinematycznego T_k, ze strony chropowatej powierzchni blatu stołu na chropowatą dolną powierzchnię klocka.

Doświadczenia pokazują, że dla małych prędkości klocka siła tarcia kinematycznego nie zależy od wartości liczbowej prędkości, natomiast jest ona wprost proporcjonalna do łącznej siły ciężkości klocka z dodatkowymi ciałami położonymi na klocku, czyli do siły dociskającej klocek do podłoża. Oznacza to, że stosunek siły tarcia kinematycznego do siły dociskającej jest stały. Ten stały stosunek nazywamy współczynnikiem tarcia kinematycznego między materiałami z jakich wykonane zostały ciała i oznaczamy symbolem f_k.
Mamy więc:

$$\frac{T_k}{P} = \frac{T_k}{R} = \frac{T_k}{N} = \text{const} = f_k. \tag{41}$$

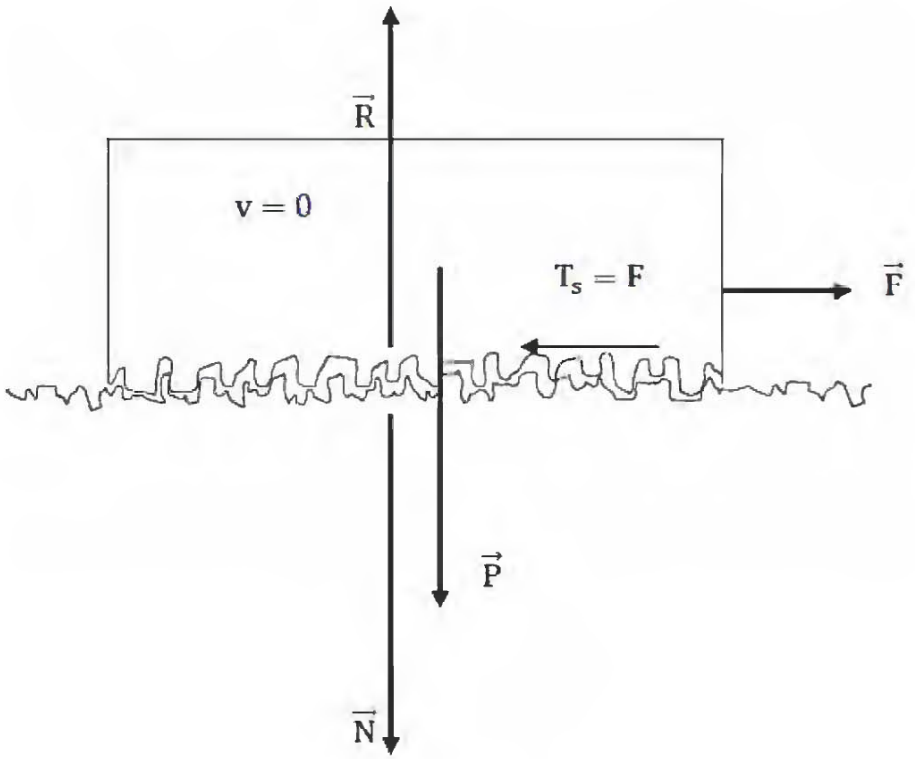
Siłę tarcia kinematycznego obliczamy ze wzoru:

$$T_k = f_k P = f_k R = f_k N. \tag{42}$$

2.2.2. Tarcie statyczne, współczynnik tarcia statycznego

Do klocka spoczywającego na poziomym blacie stołu stojącego w laboratorium przymocowany został jeden koniec sprężyny siłomierza. Pociągając ręką za obudowę siłomierza próbujemy wprawić klocek w ruch. Doświadczenie pokazuje, że mimo wzrastającej siły działającej na klocek ze strony coraz bardziej rozciągniętej sprężyny siłomierza, klocek ciągle pozo-

staje względem stołu w spoczynku. Fakt ten wyjaśniamy, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona, działaniem ze strony blatu stołu siły równoważącej siłę usiłującą wprawić klocek w ruch. Siłę tę nazywamy **siłą tarcia statycznego** (rys. 6).



Rys. 6. Wektory sił oddziaływania ciał podczas próby wprawienia leżącego na blacie stołu klocka w ruch

Nasuwa sie pytanie, czy siła tarcia statycznego może wzrastać do bardzo dużych wartości? Doświadczenie pokazuje, że przy pewnej wartości siły F (oznaczonej przez F_w) klocek zostaje wprawiony w ruch. Oznacza to, że siła tarcia statycznego, jako **siła reakcji** na siłę czynną usiłującą wprawić klocek w ruch osiągnęła wartość maksymalną $T_{s\,max}$.

Maksymalna siła tarcia statycznego jest wprost proporcjonalna do siły dociskającej klocek do podłoża. Oznacza to, że stosunek maksymalnej siły tarcia statycznego do siły dociskającej jest stały i nazywa się **współczynnikiem tarcia statycznego.** Mamy więc:

$$\frac{T_{s\,max}}{P} = \frac{T_{s\,max}}{R} = \frac{T_{s\,max}}{N} = \text{const} = f_s. \tag{43}$$

Współczynnik tarcia statycznego dla danej pary ciał wykonanych z odpowiednich materiałów jest większy od współczynnika tarcia kinematycznego.

Maksymalną siłę tarcia statycznego obliczamy ze wzoru:

$$T_{s\,max} = f_s P = f_s R = f_s N. \tag{44}$$

O sile tarcia statycznego można powiedzieć, że spełnia warunek:

$$T_s \leq T_{s\,max}\,. \tag{45}$$

2.2.3. Interpretacja wyników doświadczenia wstępnego

Gdyby nie było różnicy między statycznym i kinematycznym współczynnikiem tarcia, to przebieg doświadczenia z prętem położonym na palcach powinien być inny.

W pierwszej fazie (przy niesymetrycznym ustawieniu pręta) pręt powinien ślizgać się po palcu dalej położonym od środka ciężkości pręta (nacisk na ten palec jest mniejszy). W chwili osiągnięcia równej odległości naciski się zrównają i pręt powinien ślizgać się jednocześnie aż do momentu zejścia się palców tuż pod środkiem pręta.

Różnice współczynników tarcia statycznego i kinematycznego powodują, że w chwili gdy naciski pręta na palce zrównają się, aktualna siła tarcia kinematycznego jest mniejsza od maksymalnej siły tarcia statycznego między drugim palcem a prętem.

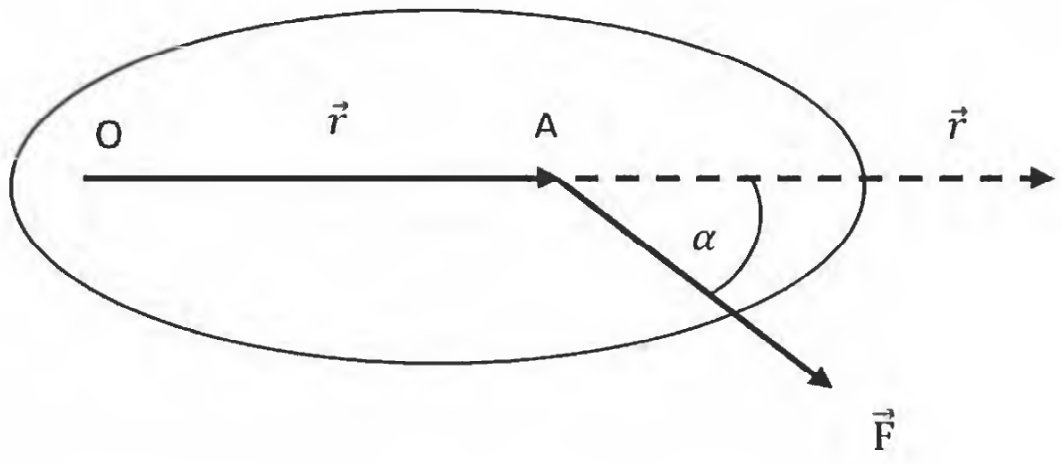
Zamiana rolami obu punktów podparcia nastąpi dopiero wtedy, gdy siła tarcia kinematycznego zrówna się z maksymalną siłą tarcia statycznego, a to wskutek różnicy tych współczynników jest możliwe, gdy nacisk na ślizgający się punkt podparcia będzie odpowiednio większy od nacisku na punkt nieruchomy. W tym momencie doświadczenie zaczyna się jakby od początku, znów w niesymetrycznej sytuacji, tyle że role punktów podparcia odwracają się.

2.2.4. Moment siły względem ustalonego punktu odniesienia

Moment $\vec{M}$, względem punktu odniesienia O, siły $\vec{F}$ działającej na bryłę w punkcie A (rys. 7.) jest wektorową wielkością fizyczną określoną jako iloczyn wektorowy:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{46}$$

gdzie $\vec{r}$ – jest wektorem położenia punktu przyłożenia siły $\vec{F}$ względem punktu O.

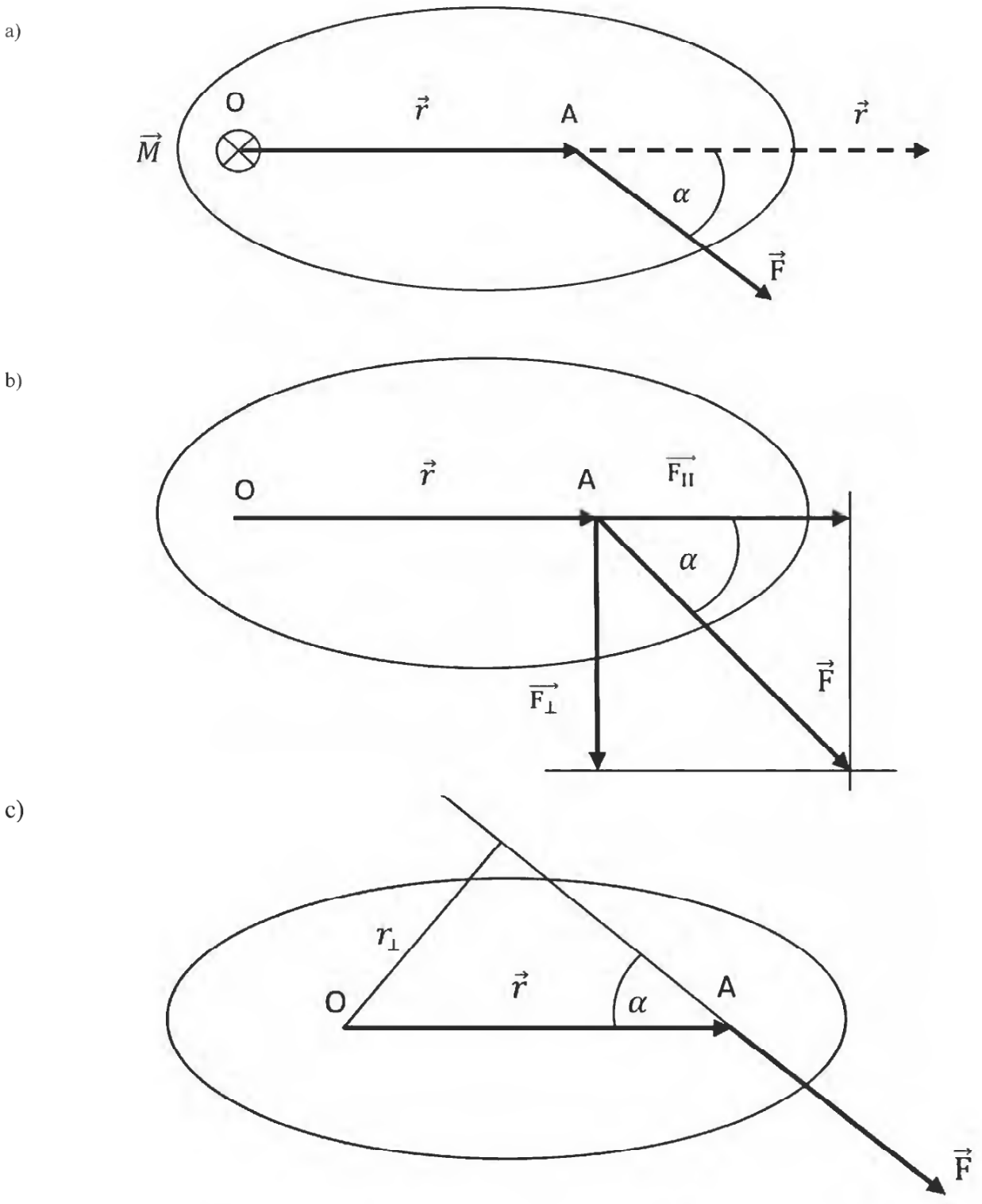


Rys. 7. Wektor położenia punktu przyłożenia siły względem punktu O

Moment siły jest wektorową wielkością fizyczną, której:

1. kierunek jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory: $\vec{r}$ oraz $\vec{F}$,
2. zwrot skierowany w stronę przesuwu śruby prawoskrętnej obracanej po mniejszym kącie od wektora $\vec{r}$ do wektora $\vec{F}$ (rysunek 8a),
3. wartość obliczamy ze wzoru (patrz rysunki – 8b i 8c):

$$M = r F \sin(\vec{r}, \vec{F}) \equiv r F \sin\alpha = r F_{\perp} = r_{\perp} F. \tag{47}$$



Rys. 8. Ilustracja do określenia cech wektora momentu siły: a) moment siły zwrócony za kartkę, b) rozkład $\vec{F}$ na składowe, c) ramię $r_{\perp}$ siły $\vec{F}$ względem punktu O

2.2.5. Warunki równowagi bryły sztywnej

Przez równowagę bryły sztywnej rozumie się jej stan spoczynku (równowaga statyczna) oraz stan ruchu jednostajnego: postępowego prostoliniowego lub obrotowego (równowaga dynamiczna).

Bryła sztywna pozostaje w równowadze, jeżeli siły działające na bryłę spełniają warunki:

1. suma wektorów sił wynosi zero (warunek konieczny),
2. suma momentów sił względem dowolnego punktu odniesienia wynosi zero (warunek wystarczający).

2.3. Opis zestawu doświadczalnego oraz uzasadnienie sposobu postępowania w celu wyznaczenia stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego prętów między sobą

Mając do dyspozycji trzy pręty drewniane o przekroju kołowym, stół o płaskim poziomym blacie oraz papier milimetrowy, który przyklejony do stołu może służyć również do pomiaru odległości, należy wyznaczyć stosunek współczynników tarcia kinematycznego i statycznego prętów między sobą.

Ustawienie prętów widziane od strony eksperymentatora pokazane jest na rysunku 9.

Pręt A przytrzymujemy ręką lub przyklejamy do blatu stołu taśmą klejącą. Pręt B przesuwamy w lewo razem z prętem C (pręt C unoszony jest przez pręt B). Gdy pręt B sunie wraz z prętem C, to między tymi prętami występuje tarcie statyczne, a odległość x (między prętem B i środkiem pręta C) pozostaje stała. Pręt B przesuwamy w lewo razem z prętem C tak długo, aż pręt C zatrzyma się, czyli wystąpi poślizg między prętami B i C (rys. 9d). W tym położeniu układu prętów mierzymy:

a) odległość pręta B od środka pręta C (odległość ta jest niezmienna w tej fazie doświadczenia, gdyż pręt B sunie wraz z prętem C – między tymi prętami działa cały czas siła tarcia statycznego).
b) odległość y pręta A od środka O pręta C dokładnie w położeniu, w którym pręt C zatrzymuje się względem pręta A.

W tym położeniu układu prętów maksymalna siła tarcia statycznego w punkcie skrzyżowania prętów B i C równoważy siłę tarcia kinematycznego w punkcie skrzyżowania prętów A i C,

a więc:

$$T_k = T_{s\,max}. \tag{48}$$

Zapisujemy warunek równości momentów sił dla pręta C:

$$R_A\, y = R_B\, x. \tag{49}$$

Równość sił tarcia w momencie zatrzymania się pręta C zapisujemy następująco:

$$f_k\, R_A = f_s\, R_B. \tag{50}$$

Z (50) mamy:

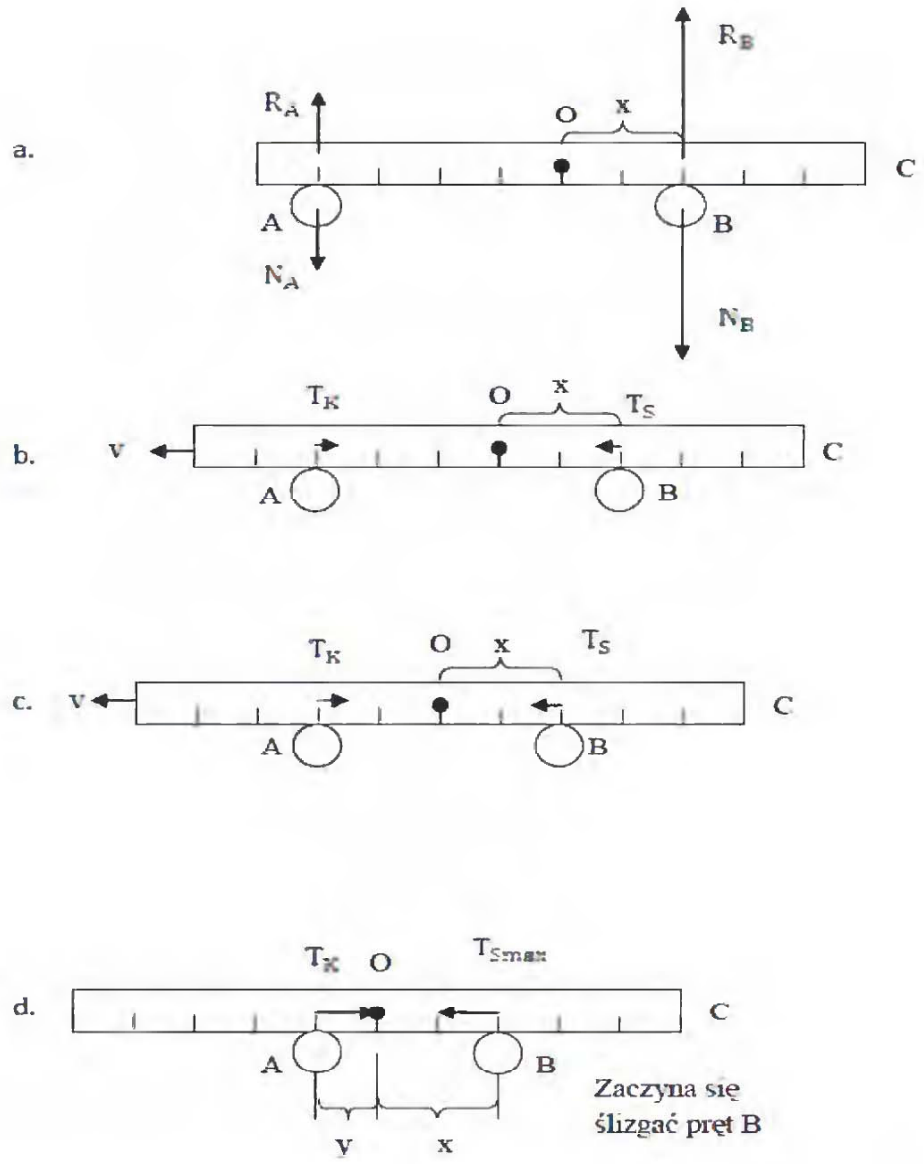
$$\frac{f_k}{f_s} = \frac{R_B}{R_A}, \tag{51}$$

natomiast z (49):

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{y}{x}. \tag{52}$$

Ostatecznie:

$$\frac{f_k}{f_s} = \frac{y}{x}. \tag{53}$$



Rys. 9. Układ trzech prętów ułożonych na blacie stołu: a)widok pręta C leżącego prostopadle na dwóch równoległych prętach A i B, b) i c) pręt C unoszony przez pręt B ślizga się po pręcie A, d) położenie pręta C w chwili jego zatrzymania się względem pręta A (pojawienie się poślizgu między prętami B i C)

2.4. Wykonanie doświadczenia, wyniki pomiarów

W celu wyznaczenia stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego należy dokonać bezpośredniego pomiaru długości dwóch odcinków x i y.

Długość odcinka x, czyli odległość pręta B od środka pręta C **mierzymy** już na początku pierwszej fazy doświadczenia, czyli jeszcze przed rozpoczęciem przesuwania pręta B wraz z prętem C, a więc, gdy pręty B oraz C spoczywały względem stołu.

Długość odcinka y, czyli odległość pręta A od środka pręta C **mierzymy** w drugiej fazie doświadczenia, czyli po zatrzymaniu się pręta C względem pręta A, a więc gdy pręt C spoczywa względem stołu.

Pomiary należy powtórzyć wiele razy rozpoczynając z nieco różnych położeń wyjściowych, obracając pręty oraz zamieniając je miejscami. Jest to konieczne z tego powodu, że dla powierzchni niezbyt gładkich (wtedy różnice między f_s i f_k są wyraźne) maksymalna wartość siły tarcia statycznego może zależeć od konkretnych punktów styku. Wyniki pomiarów zapisujemy w tabeli 4.

Tabela 4. Wyniki pomiarów

Lp.	y (cm)	x (cm)	$\frac{y}{x}$	$\frac{f_k}{f_s} \equiv A_i$	$(\frac{f_k}{f_s})_{śr} \equiv \overline{A}$
1	2	3	4	5	6
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

$$\overline{A} = \left[\frac{f_k}{f_s}\right]_{śr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y}{x}\right)_i$$

Po wpisaniu wyników do tabeli 4. będzie można zauważyć, że zmierzony w każdym przypadku stosunek współczynników tarcia jest wyraźnie inny. W takiej sytuacji niezbędna jest statystyczna ocena niepewności wyniku.

2.5. Analiza niepewności wyniku pomiaru stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego (Ocena niepewności typu A)

Wyznaczenie stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego jest pomiarem pośrednim i polega na pomiarze długości dwóch odcinków x i y.

Pomiary długości odcinków **x** oraz **y** są pomiarami bezpośrednimi za pomocą jednego zestawu doświadczalnego w jednym doświadczeniu, są więc pomiarami skorelowanymi. W takiej sytuacji ze względu na bardzo skomplikowane obliczenia złożonej niepewności standardowej wielkości wyznaczanej (mierzonej pośrednio o skorelowanych pomiarach wielkości mierzonych bezpośrednio) w pracowniach studenckich wygodniej będzie postępować następująco:

Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich K wielkości $x_{K,i}$ uzyskanych w i-tym pomiarze:
(uwaga! y_i – to nie jest to samo co „y" mierzone w tym doświadczeniu)

$$y_i = f(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \ldots x_{k,i}, \ldots x_{K,i}). \tag{54}$$

Seria wyników y_i, uzyskanych w n pomiarach, stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest:

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{55}$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_c(y) \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}\,. \tag{56}$$

Seria wyników pomiaru $A_i = \left(\frac{f_k}{f_s}\right)_i$, uzyskanych w n pomiarach stanowi próbę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmujemy, ze wynikiem pomiaru pośredniego jest

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_1, \tag{57}$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór

$$u_c(A) \equiv u_c\left(\frac{f_k}{f_s}\right) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A})^2}\,. \tag{58}$$

Tabela 5. Obliczanie niepewności wyników pomiaru

Lp.	$A_i - \bar{A}$	$(A_i - \bar{A})^2$	$\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A})^2$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A})^2}{n-1}$	S_A	$S_{\bar{A}} = \frac{S_A}{\sqrt{n}}$
1	2	3	4	5	6	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

S_A – odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego od wartości średniej wyraża się wzorem:

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A})^2}{n-1}} \tag{59}$$

$S_{\bar{A}} = \frac{S_A}{\sqrt{n}}$ – odchylenie standardowe wyniku pomiaru stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego (odchylenie średniej arytmetycznej od wartości najbardziej prawdopodobnej) wylicza się ze wzoru:

$$S_{\bar{A}} = \frac{S_A}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A})^2}{n(n-1)}} \tag{60}$$

W przypadku „ubogich" serii pomiarowych (n<11) niepewność standardową pomiarów bezpośrednich obliczamy ze wzoru

$$u(x) = t_n\sqrt{S_{\bar{x}}} = t_n\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \tag{61}$$

gdzie parametr t_n zależy zarówno od liczności serii pomiarowej (ściślej: tzw. liczby stopni swobody) jak również przyjętego tzw. poziomu ufności.

Wartość parametru t – Studenta dla poziomu ufności równego 0,683 wynosi:

n	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
t_n	*1,11*	*1,09*	*1,08*	*1,07*	*1,06*	*1,05*

Wykonano serię n=8 pomiarów. W takiej sytuacji przy obliczaniu standardowej niepewności pomiaru $\left(\frac{f_k}{f_s}\right)$ uwzględniamy wartość pomiaru t_8-Studenta, który dla poziomu ufności 0,683 wynosi $t_8 = 1{,}08$.

Niepewność standardowa pomiaru stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego po uwzględnieniu parametru t_8-Studenta wynosi:

$$u(A) = t_8\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{8}(A_i - \bar{A})^2} = 1.08 \cdot ___ = ___ = ___ \qquad (62)$$

Niepewność standardowa typu A określa przedział $[x + u(x)]$, w którym z prawdopodobieństwem 68% znajduje się wartość prawdziwa.

Uwaga!

Niepewność podajemy z dokładnością (zaokrąglamy) do dwóch cyfr znaczących.

Zaokrąglenie niepewności odbywa się zgodnie z zasadami zaokrągleń w matematyce: cyfry 0–4 zaokrągla się w dół (nie ulega zmianie cyfra poprzedzająca), natomiast cyfry 5–9 zaokrągla się w górę (cyfra poprzedzająca zwiększa sie o jeden).

Oprócz niepewności standardowej często podajemy niepewność rozszerzoną, którą oblicza się w sposób następujący:

$$U(x) = ku(x),$$

gdzie $k = 2,3$ nosi nazwę współczynnika rozszerzenia.

Dla niepewności typu A prawdopodobieństwo znalezienia wartości prawdziwej w przedziale $\bar{x} \mp U(x)$ wynosi 95,4% dla $k = 2$ oraz 99,7% dla $k = 3$.

Niepewność standardową oraz rozszerzoną można zapisać dwoma sposobami:

1) słownie,
2) przy pomocy symboli.

2.6. Zapis wyniku pomiaru stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego

Uwaga!

1. Wynik końcowy zapisujemy wraz z niepewnością.
2. Wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego co niepewność.
   a. Zapis wyniku pomiaru na poziomie ufności 68%
      - Zapis słowny.

        Stosunek współczynników tarcia kinematycznego i statycznego dla drewna o drewno jest równy ..... z niepewnością standardową .....

      - Zapis przy użyciu symboli.

$$A = \left(\frac{f_k}{f_s}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots, u(A)\ldots\ldots$$

      - Zapis skrócony.

$$A = \left(\frac{f_k}{f_s}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

   b. Zapis wyniku pomiaru na poziomie ufności 95%:

- Zapis słowny:

  Stosunek współczynników tarcia kinematycznego i statycznego dla drewna o drewno jest równy ..... z niepewnością rozszerzoną .....
- Zapis przy użyciu symboli:

$$A = \left[\frac{f_k}{f_s}\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots, U(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots (k = 2), n = 8$$

3. Zapis skrócony:

$$A = \left[\frac{f_k}{f_s}\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots (\ldots),$$

$$A = \left[\frac{f_k}{f_s}\right] = (\ldots\ldots\ldots\ldots \mp \ldots\ldots\ldots\ldots).$$

Zagadnienia do kolokwium

1. Siła oraz współczynnik tarcia kinematycznego i statycznego.
2. Zasady dynamiki ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej.
3. Opis zestawu doświadczalnego, wykonania doświadczenia oraz uzasadnienie sposobu postępowania w celu wyznaczenia stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego.
4. Ocena standardowej niepewności wyznaczania stosunku współczynników tarcia kinematycznego i statycznego w przypadku skorelowanych pomiarów wielkości mierzonych bezpośrednio oraz mało licznej serii pomiarowej.
5. Zapis wyniku pomiaru wraz z niepewnością.

Literatura

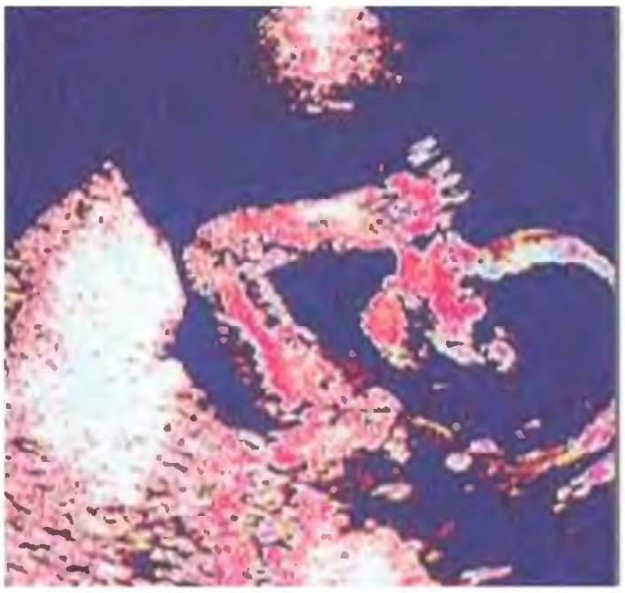
1. Halliday D., Resnick D., Walker D., *Podstawy fizyki*, t. 1, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2011, s. 118–124.
2. Kubiaczyk A., *Określenie niepewności pomiarów*. [W] Poradnik do Laboratorium Fizyki. Rozdział 1. Laboratorium Fizyki I. Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska. Dostępność 30.11.2013r. Strona internetowa: http://www.if.pw.edu.pl/

3. Wyznaczanie częstotliwości nadajnika fal ultradźwiękowych metodą fali stojącej

3.1. Cel ćwiczenia

Prawie wszystkie informacje o otaczającym nas świecie człowiek uzyskuje za pośrednictwem fal świetlnych i dźwiękowych, czyli dzięki zmysłom wzroku i słuchu. Nie chodzi tu tylko o odbiór informacji z obserwacji bezpośrednich dochodzących ze środowiska, ale również o odbiór informacji pośrednich przekazywanych przez naukę, medycynę, media itp.

W tym ćwiczeniu istnieje niepowtarzalna okazja poznać **fale ultradźwiękowe** (częstotliwość powyżej 20 kHz), które są poza zasięgiem naszych zmysłów, ale jak wiemy, pozwalają one „oglądać" miękkie tkanki ludzkiego ciała, czyli nasze wnętrze *in situ* dzięki słynnym i powszechnym już dziś badaniom USG, (tzw. ultrasonografii, która polega na wysyłaniu impulsów dźwiękowych i wychwyceniu echa odbitych od narządów i tkanek fal). Na rysunku 10 pokazano komputerowo przetworzony obraz USG dziecka w wieku prenatalnym, szukającego kciuka do ssania. Ten niewielki obrazek, który obiegł cały świat unaocznił i uświadomił ludzkości, że tzw. zarodek, embrion zwany dalej płodem ludzkim w łonie matki jest bardzo maleńkim człowiekiem i bez względu na swoje rozmiary już jest, żyje, rośnie, odczuwa.



Rys. 10. Zdjęcie USG dziecka w wieku prenatalnym [1]

Fale ultradźwiękowe nie różnią się ani charakterem ani własnościami fizycznymi od fal dźwiękowych odbieranych przez nasze ucho. Jedynie nasz zmysł słuchu nie jest czuły na częstotliwości, których przedział obejmuje fale nazywane przez nas ultradźwiękami.

Celem ćwiczenia jest zmierzenie długości fali dźwiękowej, mimo, że jej nie widać i nie słychać. Jeśli uruchomimy nadajnik fali ultradźwiękowej ustawiony prostopadle do ekranu i skierujemy wiązkę na ekran wykonany z płytki metalowej, nastąpi odbicie fal od ekranu, a następnie nałożenie się fali odbitej z padającą. Fale te rozchodzą się w tym samym kierunku, ale w przeciwne strony z tą samą częstością i amplitudą, więc dadzą obraz interferencyjny w postaci tzw. strzałek i węzłów, to znaczy miejsc, które charakteryzują się maksymalnymi drganiami cząsteczek ośrodka (strzałki) i minimalnymi (węzły). Za pomocą odbiornika zwanego także sondą, którą przesuwamy w pobliżu wiązki padającej, można takie miejsca precyzyjnie określić na pewnym niewielkim dystansie od ekranu (ze względu na pochłanianie ultradźwięków na dalekich dystansach).

W szczegółowym opisie przeprowadzenia ćwiczenia zawarto najważniejsze objaśnienia i wzory potrzebne do wykonania obliczeń. Przed przystąpieniem do eksperymentu należy zapoznać się z podstawowymi wiadomościami zawartymi w rozdziale 3.2 na temat rozchodzenia się fal w ośrodku sprężystym, zjawisk falowych, wielkości fizycznych charakteryzujących fale i ich wzajemnych powiązań. Należy pamiętać, że tzw. fala stojąca, która powstaje w eksperymencie na skutek nałożenia fali padającej i odbitej nie jest *sensu stricte* falą, bo nie przenosi energii w ośrodku. W rozdziale 3.2 podano również informacje na temat wykorzystania fal ultradźwiękowych przez zwierzęta oraz zastosowania ich na użytek człowieka, a także sposób ich wytwarzania i detekcji.

3.2. Wiadomości teoretyczne

3.2.1. Definicja fali mechanicznej

Fala mechaniczna to zachodzące w czasie i przestrzeni zaburzenie ośrodka sprężystego rozchodzące się ze stałą prędkością. Ośrodkiem sprężystym może być ciało stałe, ciekłe i gazowe. Podczas rozchodzenia się fali w takim ośrodku nie jest przenoszona masa (materia) ośrodka, a jedynie energia, jaką źródło fali przekazuje do ośrodka. Sam ośrodek jako całość nie przemieszcza się podczas rozchodzenia się fali.

3.2.2. Mechanizm powstawania i rozchodzenia się drgań w ośrodku sprężystym

Ciało drgające w ośrodku sprężystym (zwane źródłem fali) oddziałuje okresowo na przylegające do niego cząsteczki ośrodka wytrącając je ze stanu równowagi i zmuszając do wykonywania drgań wymuszonych. Ośrodek w pobliżu ciała drgającego (źródła) odkształca się i powstają w nim siły sprężystości. Siły te działają zarówno na cząsteczki przylegające do ciała, dążąc do przywrócenia ich do położenia równowagi, jak i na bardziej odległe cząsteczki (na odległość równą ok. 10 średnicom atomu, wyprowadzając je ze stanu równowagi. Te ostatnie oddziałują z następnymi cząsteczkami itd. Dzięki sprężystym własnościom ośrodka drgania te są przekazywane kolejno do coraz dalszych jego części i w ten sposób zaburzenie przechodzi przez cały ośrodek. Między cząsteczkami ośrodka istniejące siły przeciwdziałają odkształceniu. Między cząsteczkami gazów i cieczy działają siły wzajemnego przyciągania i odpychania. Dzięki temu gazy i ciecze zdolne są przeciwdziałać zmianie ich objętości, czyli mają **sprężystość objętościową**. Jednocześnie zmieniają swoją postać, to znaczy nie mają sprężystości w stosunku do odkształcenia przesunięcia, czyli nie mają tzw. **sprężystości postaci.** Ciała stałe charakteryzują się zarówno sprężystością objętości jak i postaci.

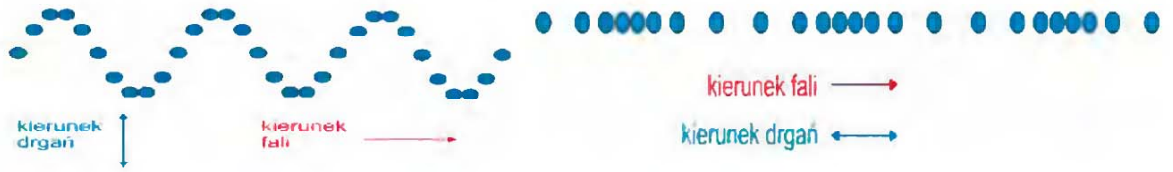
3.2.3. Fale słyszalne, infradźwięki i ultradźwięki

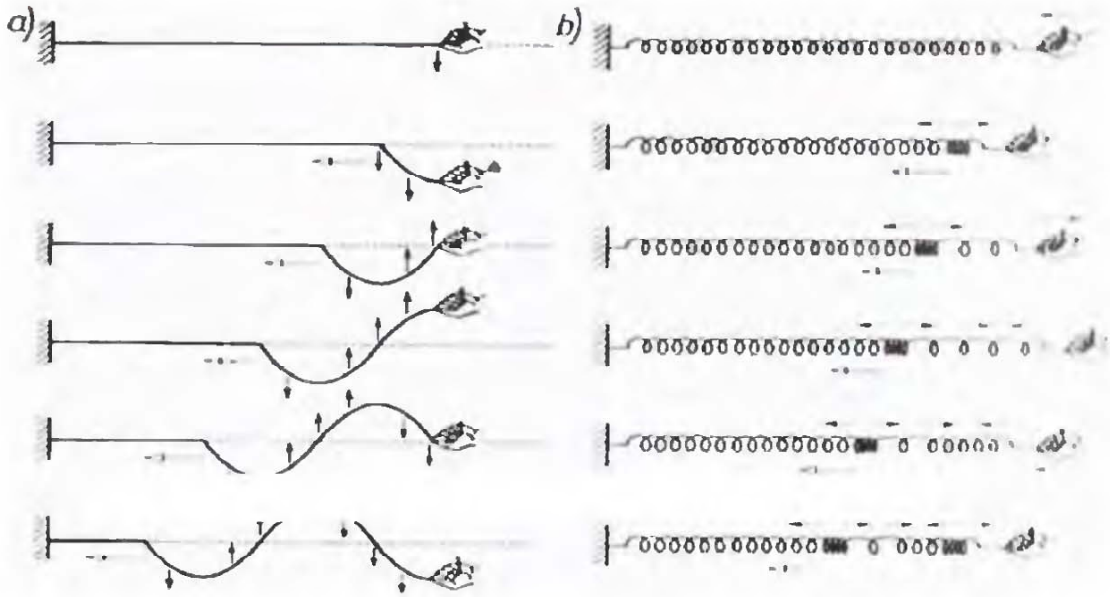
Jeżeli częstotliwość, czyli ilość drgań cząsteczek w jednostce czasu (np. w 1s) wynosi od 16 do 20000 Hz, to fale te oddziałując na organy słuchu człowieka wywołują wrażenia dźwiękowe (tzw. **dźwięki słyszalne**). Poniżej 16 drgań na 1s (16 Hz) – fale nazywamy **infradźwiękami**, powyżej 20000 Hz (20 kHz) – **ultradźwiękami**. Fale ultradźwiękowe o częstościach rzędu 10^9 Hz (10 GHz) i wyższych nazywamy hiperdźwiękami. Górna granica fal ultradźwiękowych odpowiada częstościom $10^{12} - 10^{13}$ Hz, przy których długości tych fal są porównywalne z odległościami międzycząsteczkowymi.

3.2.4. Podział fal

Fale sprężyste jak wspomniano wyżej, dzieli się na **słyszalne** (odbieralne) **i niesłyszalne** przez ludzkie ucho. Inny podział fal sprężystych to fale **poprzeczne i podłużne**. Jeżeli cząsteczki ośrodka drgają w płaszczyznach prostopadłych do kierunku rozchodzenia się fali, to

falę taką nazywa się **poprzeczną.** Fala sprężysta nazywana jest **podłużną**, jeżeli drgania cząsteczek ośrodka są równoległe do kierunku rozchodzenia się fali (rys. 11).

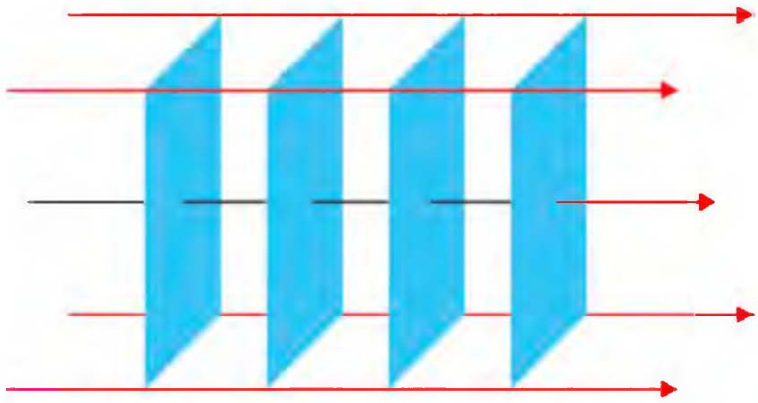




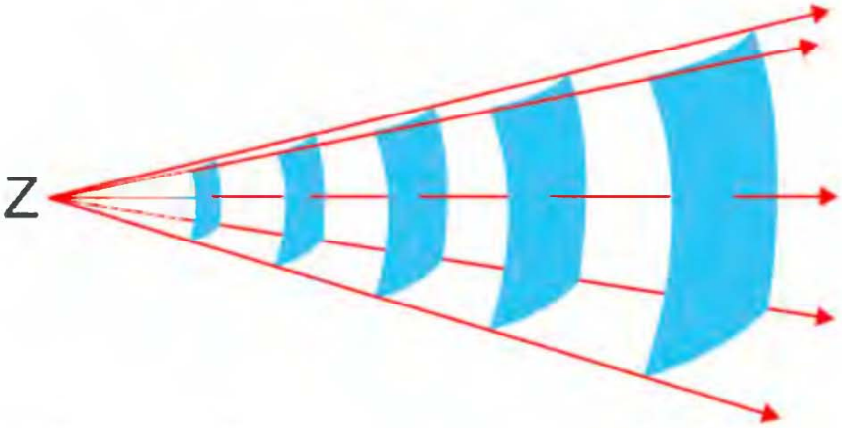
Rys. 11. Rodzaje fal: a) fala poprzeczna, b) fala podłużna: małe, czarne strzałki pokazują ruch cząstek ośrodka (sznura i sprężyny), strzałki z białym grotem wskazują kierunek rozchodzenia się fali

Z omówionego mechanizmu tworzenia się fal sprężystych wynika, że fale poprzeczne mogą powstawać tylko w takim ośrodku, który charakteryzuje się sprężystością postaci, to znaczy zdolnym do przeciwstawiania się odkształceniom przesunięcia. Zatem fale poprzeczne mogą rozchodzić się tylko w ciałach stałych (np. fale rozchodzące się wzdłuż strun instrumentów muzycznych). Wyjątek stanowi swobodna powierzchnia cieczy lub powierzchnia graniczna dwóch niemieszających się cieczy o różnych gęstościach. Cząsteczki cieczy przy powierzchni w tych przypadkach wykonują jednocześnie drgania podłużne i poprzeczne. Fale podłużne związane są z odkształceniem objętościowym ośrodka, dlatego mogą się one rozchodzić zarówno w ciałach stałych jak i w cieczach i gazach.

Ze względu na kształt powierzchni falowej (czyli zbiór punktów, dla których drgania wywołane np. falą dźwiękową, mają taką samą fazę drgań), fale dzielimy na: **płaskie, koliste i kuliste (sferyczne)**. W miarę oddalania się wzdłuż promienia fali, czyli linii prostopadłej do czoła fali wskazującej kierunek ruchu fali, zakrzywienia powierzchni falowych kolistej i kulistej maleją (rys. 13) i fale w dużej odległości od źródła możemy traktować jako fale płaskie.



Rys. 12. Powierzchnie falowe (płaszczyzny) i promienie fali płaskiej



Rys. 13. Fala kulista rozchodząca się ze źródła Z, wycinki powłok sferycznych przedstawiają powierzchnie falowe

Z tej konkluzji będziemy korzystać podczas przeprowadzania pomiarów dla określenia długości fali ultradźwiękowej w tym ćwiczeniu.

3.2.5. Równanie fali sinusoidalnej

Podstawowym zagadnieniem przy badaniu fal jest wyjaśnienie prawa zmiany w czasie i przestrzeni wielkości fizycznych jednoznacznie charakteryzujących ten albo inny rodzaj ruchu falowego. W przypadku fal sprężystych wielkością taką jest przesunięcie (S), małych co do objętości części ośrodka (cząsteczek ośrodka) względem ich położeń równowagi. Zależność S od współrzędnych przestrzennych i czasu nazywa się równaniem fali.

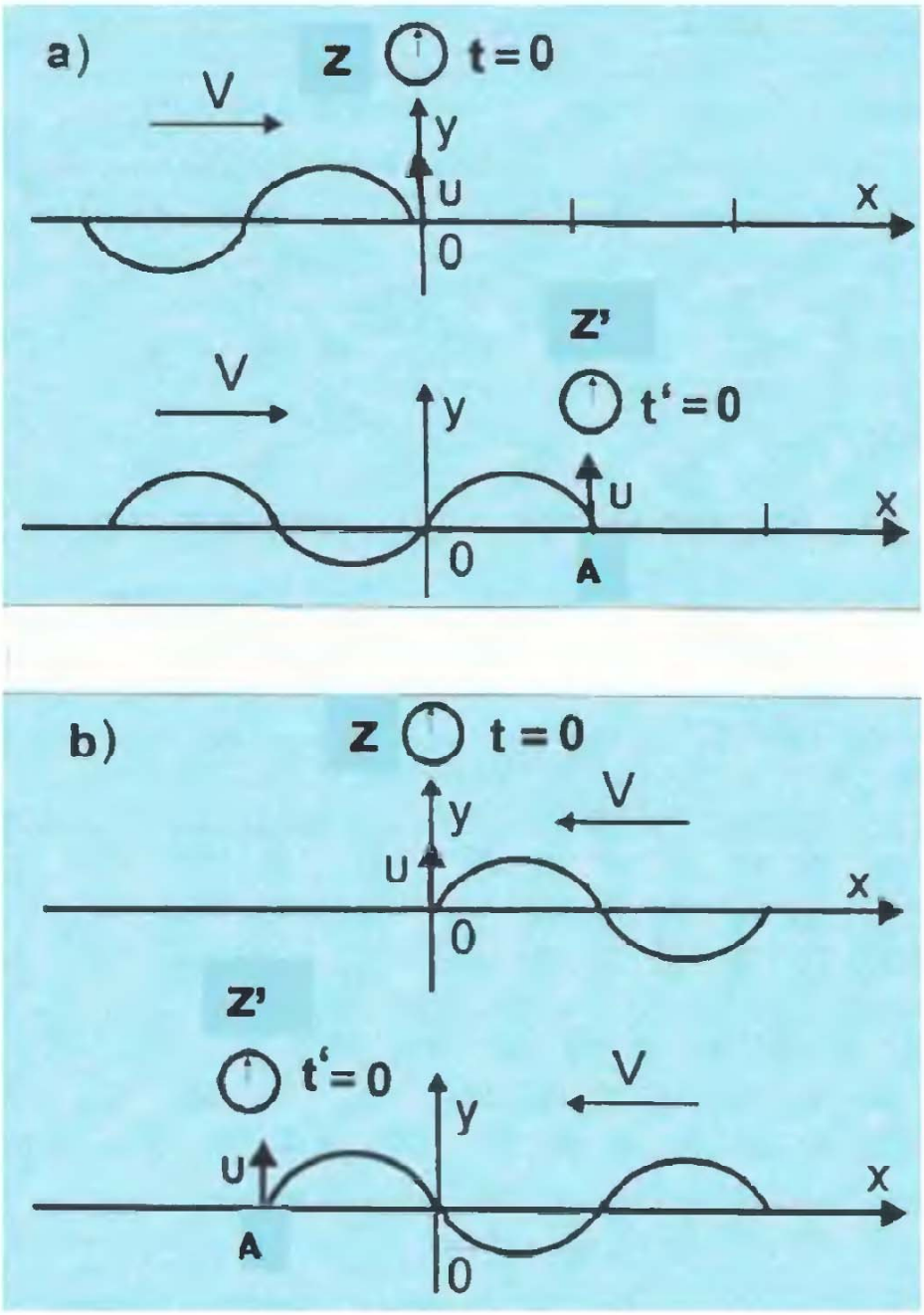
Dla najprostszej sinusoidalnej fali harmonicznej, zależność przemieszczenia S(x,t) od współrzędnej x i czasu t, przedstawia się albo za pomocą funkcji sinus albo cosinus:

$$S(x,t) = S_m \sin(kx - \omega t) \tag{63}$$

lub

$$S(x,t) = S_m \cos(kx - \omega t) \tag{64}$$

Weźmy przykładowo falę sinusoidalną poprzeczną rozchodzącą się wzdłuż sznura gumowego w prawo z prędkością **v** (rys. 14).



Rys. 14. Fale sinusoidalne rozchodzące się w wężu gumowym: a) w prawo, b) w lewo

Fala ta w chwili t=0 dociera do punktu 0. Drganie punktu 0 opisuje równanie:

$$S = S_m \sin\omega t, \tag{65}$$

Po upływie czasu τ, fala dociera do punktu A o współrzędnej x, gdzie cząsteczka ośrodka zaczyna drgać z prędkością początkową **u**. Czas t' mierzony przez zegar Z', który uruchamiamy w momencie, gdy do punktu A dociera fala, będzie odmierzał czas $t' = t - \tau$ w stosunku do czasu na zegarze Z, a drganie punktu A opisuje równanie:

$$S = S_m \sin\omega t', \tag{66}$$

Gdy za t' wstawimy $t' = t - \tau$, otrzymamy:

$$S = S_m \sin\omega(t - \tau), \tag{67}$$

Uwzględniając, że $\boldsymbol{\tau = \frac{x}{v}}$,

wzór (67) można zapisać jako:

$$\boldsymbol{S = S_m sin\omega(t - \frac{x}{v})}. \tag{68}$$

Dla fali biegnącej w lewo (rys. 14b), $\boldsymbol{\tau = -\frac{x}{v}}$, ponieważ $\boldsymbol{\tau > 0}$, natomiast $\boldsymbol{x < 0}$, więc wzór na wychylenie S ma postać:

$$S = S_m sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{69}$$

Biorąc pod uwagę, że $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wzory (68) i (69) są dane przez:

$$S = S_m sin2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right), \tag{70}$$

$$S = S_m sin2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{vT}\right). \tag{71}$$

Uwzględniając związek: $v \cdot T = \lambda$, otrzymujemy:

$$S = S_m sin2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \tag{72}$$

$$S = S_m sin2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right). \tag{73}$$

Wprowadzając $\omega = \frac{2\pi}{T}$ oraz liczbę falową $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ostatecznie równanie fali przyjmuje postać:

$$S = S_m \sin(\omega t - kx) \tag{74}$$

lub

$$S = S_m \sin(\omega t + kx). \tag{75}$$

Jak widać nieistotny jest kierunek drgań cząsteczek ośrodka względem kierunku biegnącej fali przy wyprowadzeniu równania fali. Zatem dla fali podłużnej (czyli dźwiękowej, a również i dla ultradźwięków) równania fali są tej samej postaci co podane wyżej wzory.

W zależności od fazy drgań w chwili rozpoczęcia obserwacji drgań (dla t=0, x=0), w literaturze można spotkać różną postać równania fali biegnącej w prawo lub w lewo. Do dalszych rozważań przyjmijmy wyjściowe równania fali podane w podręczniku [1]:

$$S = S_m\, cos(kx - \omega t) \qquad \text{w prawo} \tag{76}$$

$$S = S_m\, cos(kx + \omega t) \qquad \text{w lewo} \tag{77}$$

Gdy w powietrzu rozchodzi się fala dźwiękowa (podłużna), możemy mówić o lokalnym okresowym sprężaniu i rozprężaniu elementów powietrza o małej objętości, czyli o ciągu zagęszczeń cząsteczek ośrodka, a następnie ich rozrzedzeń, które powstają wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali. Wiąże się to ze zmianami ciśnienia Δp, które to zmiany nazywa się **ciśnieniem akustycznym**. W stosunku do istniejącego ciśnienia atmosferycznego rzędu 10^5 Pa, ciśnienie akustyczne wynosi zaledwie 20 Pa.

W miejscach gdzie następuje zgęszczenie cząsteczek gazu występuje wzrost ciśnienia gazu w stosunku do ciśnienia gazu niezaburzonego. I odwrotnie: w miejscu rozrzedzenia – ciśnienie gazu jest mniejsze od ciśnienia gazu niezaburzonego.

Wielkością określającą w jakim stopniu element ośrodka zmienia swoją objętość na skutek zmian wywieranego nań ciśnienia, jest **moduł sprężystości objętościowej, zwany modułem ściśliwości B** zdefiniowanym jako:

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}},$$

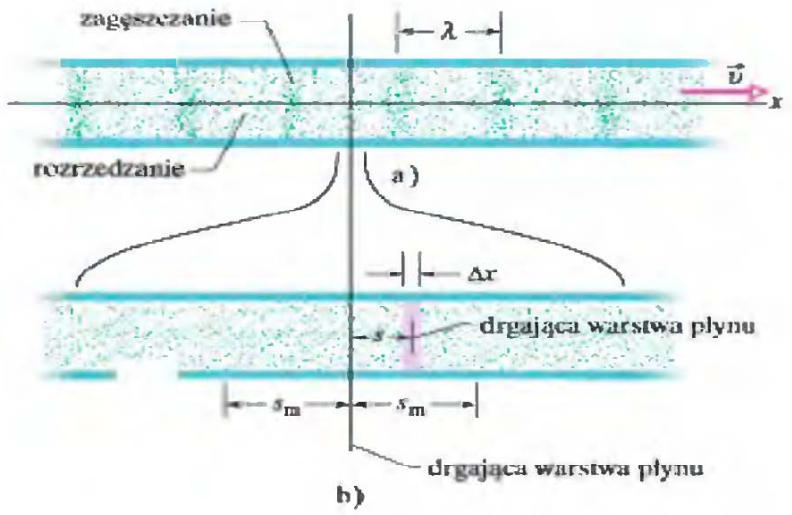
stąd:

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}.$$

Wielkość ΔV/V określa zmianę objętości przypadającą na jednostkę objętości wywołaną przez zmianę ciśnienia Δp. Przyrosty Δp i ΔV zawsze mają przeciwne znaki. Gdy wzrasta ciśnienie wywierane na pewien element (Δp dodatnie), jego objętość się zmniejsza (ΔV jest ujemne) i na odwrót.

Zanalizujemy przemieszczenia i zmiany ciśnienia związane z sinusoidalną falą dźwiękową biegnącą w powietrzu. Na rysunku 15a przedstawiono falę dźwiękową biegnącą w prawo wzdłuż długiej rury wypełnionej powietrzem. Taką falę możemy wytworzyć, poruszając tłokiem znajdującym się na lewym końcu rury tak aby drgał sinusoidalnie (nie narysowano). Przesunięcie tłoka w prawo powoduje ruch sąsiadującego z nim elementu powietrza i w konsekwencji zagęszczenie powietrza; a zatem i wzrost ciśnienia. Przesunięcie tłoka w lewo umożliwia powrót elementu powietrza w lewo i rozrzedzenie powietrza, a w konsekwencji spadek ciśnienia. W sytuacji gdy każdy element powietrza popycha kolejno następny sąsiadujący z nim element, drgania powietrza w prawo i w lewo oraz zmiany jego ciśnienia przemieszczają się wzdłuż rury jako fala dźwiękowa.

Weźmy warstewkę gazu niezaburzonego w rurze o ciśnieniu p_o, szerokości Δx i powierzchni przekroju P. Objętość tego elementu wynosi $V = P\Delta x$.



Rys. 15. a) Fala dźwiękowa biegnąca w długiej wypełnionej powietrzem rurze z prędkością **v** ma postać przemieszczającego się okresowego układu obszarów zagęszczenia i rozrzedzenia powietrza. Na rysunku przedstawiono falę w pewnym dowolnie wybranym momencie. b) Rozciągnięty poziomo widok krótkiego odcinka rury. Podczas ruchu fali warstwa płynu o grubości **Δx** drga harmonicznie w lewo i w prawo wokół swojego położenia równowagi. Na rysunku przedstawiono moment, gdy rozważana warstwa przemieszczona jest w prawo na odległość S (dalej zwaną ΔS) od położenia równowagi. Maksymalne przemieszczenie warstwy, zarówno w lewo, jak i w prawo, wynosi $\mathbf{S_m}$

Jeśli w czasie zgęszczenia lub rozrzedzenia, szerokość warstewki zmieni się o ΔS, to objętość zmieni się o $\Delta V = P\Delta S$. Temu procesowi towarzyszy zmiana ciśnienia warstewki o Δp:

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{P\Delta S}{P\Delta x}$$

Gdy szerokość warstewki branej pod uwagę dąży do 0, to:

$$\Delta p = -B\frac{dS}{dx}$$

S – ze wzoru (76) równa się:

$$S = S_m cos(kx - \omega t)$$

stąd:

$$\frac{dS}{dx} = -kS_m \sin(kx - \omega t)$$

oraz:

$$\Delta p = BkS_m \sin(kx - \omega t)\ .$$

Z tego wzoru widać, że zmiany ciśnienia mają charakter harmoniczny. Uwzględniając, że prędkość fali równa się:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\varrho_o}},$$

gdzie:

ϱ_o – gęstość gazu w temperaturze 273K,

B – współczynnik rozprężliwości objętościowej, który z przekształcenia tego wzoru wynosi:

$$B = \varrho_o v^2.$$

(Wyprowadzenie wzoru na prędkość fali w [1].

Zatem:

$$\Delta p = \varrho_o v^2 kS_m \cdot \sin(kx - \omega t).$$

Jeśli przez p_m oznaczymy maksimum zmian ciśnienia (tzw. amplituda ciśnienia), to otrzymamy:

$$p_m = \varrho_o v^2 kS_m$$

Wymiar p_m:

$$[p_m] = [\varrho_o v^2 kS_m] = \frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m^2}{s^2}\cdot\frac{1}{m}\cdot m = \frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot\frac{1}{m^2} = \frac{N}{m^2}\ .$$

Podłużna fala mechaniczna (akustyczna) w gazach może być traktowana jako fala przesunięć lub jako fala ciśnień. Przemieszczenia przesunięte są w fazie o $\frac{\pi}{2}$ w stosunku do ciśnienia.

Zgodnie z prawem Clapeyrona gęstość gazu wynosi:

$$\varrho = \frac{\mu p}{RT},$$

gdzie R oznacza stałą gazową, μ – masę cząsteczkową gazu, T – temperaturę w skali Kelwina, p – ciśnienie gazu.

Dla fali o odpowiednio dużej częstotliwości, np. fal słyszalnych i ultradźwięków zachodzą tak szybkie zgęszczenia i rozrzedzenia, że proces rozchodzenia się takich fal w gazie można traktować jako proces adiabatyczny opisany równaniem Poissona:

$$pV^{\varkappa} = \text{const}$$

gdzie: $\varkappa$ wyraża stosunek ciepła molowego pod stałym ciśnieniem do ciepła molowego w stałej objętości.

Różniczkując równanie Poissona po zmiennych p i V i wstawiając do wzoru na B, można pokazać, że $B = \varkappa p$. Wstawiając wzory na B i ϱ do równania na prędkość, otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{RT}{\mu}}.$$

Związek między **długością fali** λ, rozumianej jako **odległość między najbliższymi punktami ośrodka drgającymi w tej samej fazie**, **częstością fali f**, rozumianej jako **ilość zagęszczeń lub rozrzedzeń w danym punkcie przestrzeni zachodzących w jednostce czasu** oraz **prędkością v** jest następujący:

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f}.$$

3.2.6. Superpozycja fal

Jeśli dwa impulsy falowe biegną w sznurze gumowym naprzeciwko siebie o zgodnych wychyleniach, jak pokazano na rysunku 16a, to w momencie spotkania impulsy falowe nakładają się na siebie tworząc jeden impuls o wychyleniu równym sumie wychyleń jakie każdy z impulsów mógłby wytworzyć w nieobecności drugiego w tym miejscu (środkowa część rysunku 16a).

Jeśli jest wzajemne przenikanie się impulsów biegnących naprzeciwko, ale o wychyleniach przeciwnych, jak to ilustruje rys. 16b, to w momencie spotkania impulsy te nakładają się na siebie tworząc także jeden chwilowy impuls, ale o wychyleniu równym różnicy wychyleń jakie każdy z impulsów mógłby wytworzyć w nieobecności drugiego w miejscu spotkania (środkowa część rysunku 16b).

W obu sytuacjach impulsy po pewnym czasie rozchodzą się i biegną dalej tak, jak gdyby na swej drodze nie spotkały drugiego impulsu.

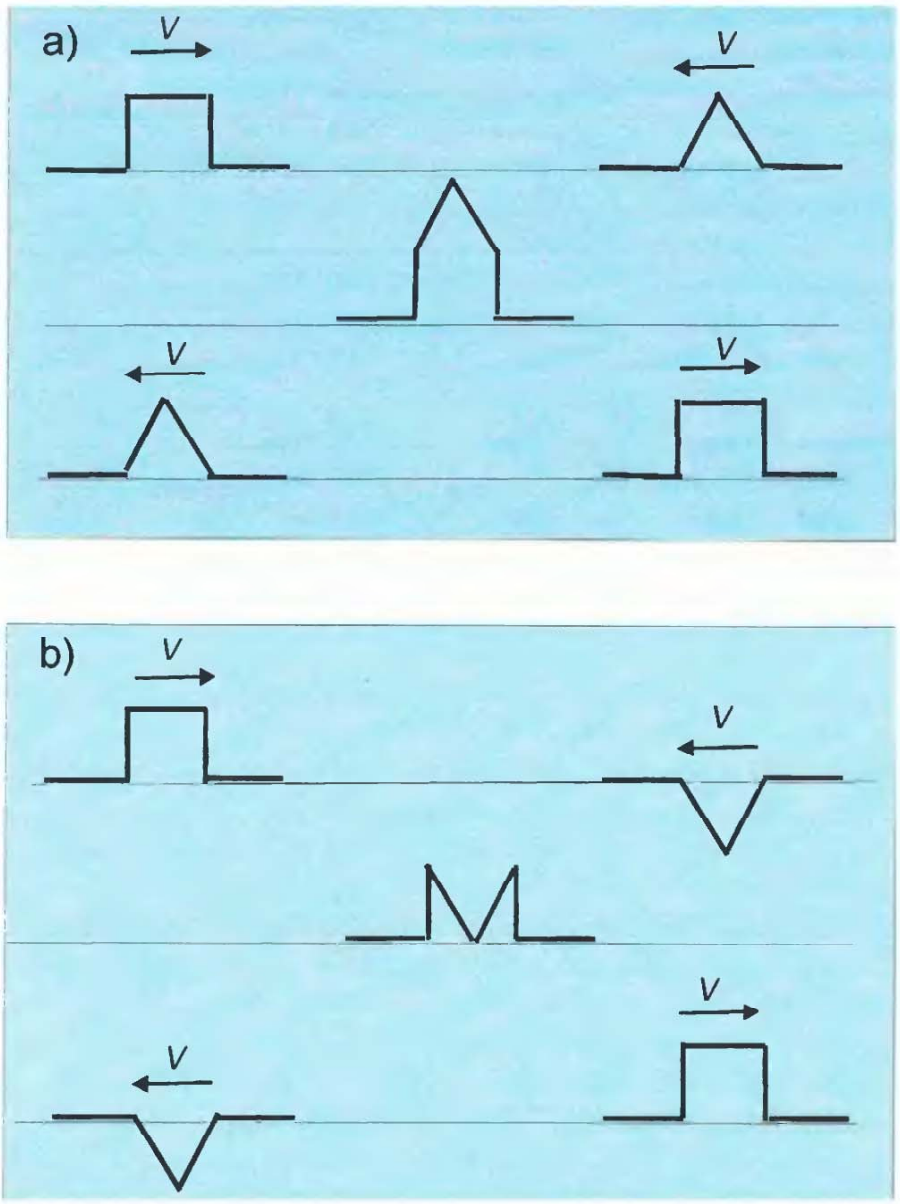
Prawo, które orzeka, że impulsy falowe rozchodzące się w jakimś środowisku mogą przebiegać jeden przez drugi nie przeszkadzając sobie wzajemnie, i że w miejscach spotkania – wychylenia spowodowane przez poszczególne impulsy dodają się wektorowo, nazywamy **zasadą superpozycji:**

$$\boldsymbol{s = s' + s''}.$$

Zasada ta dla fal sprężystych jest słuszna, jeżeli w procesie ruchu falowego ośrodek ulega odkształceniu zgodnie z prawem Hooke'a (w praktyce – dla małych wychyleń).

Fale sinusoidalne, rozchodzą się w ośrodku niezależnie jedna od drugiej, co oznacza, że przemieszczenie wypadkowe dowolnej cząsteczki ośrodka **s** będzie sumą wektorową przemieszczeń spowodowanych każdą falą oddzielnie **s'** i **s"**. Jak widać impulsy o zgodnych wychyleniach przechodząc przez siebie wzmacniają się, a impulsy o wychyleniach przeciwnych osłabiają się nawzajem lub znoszą się, ogólnie powiemy – interferują. Superpozycja to niezależność rozchodzenia się fal. W miejscu spotkania jest drganie, które nie jest ani jednym, ani drugim impulsem. Po opuszczeniu tego obszaru impulsy rozchodzą się jakby do spotkania nie doszło.

Fizyczne znaczenie zasady superpozycji polega na tym, że pozwala ona przedstawić złożony ruch falowy jako kombinację prostych fal. Francuski matematyk Jean Baptist Fourier (1768–1830) mając do dyspozycji proste fale harmoniczne wykazał, że można z nich utworzyć periodyczną falę o najbardziej ogólnej postaci.



Rys. 16. Superpozycja fal: a) impulsów falowych biegnących naprzeciwko siebie o zgodnych wychyleniach, b) o wychyleniach przeciwnych

3.2.7. Spójność fal

Gdy dwie fale nakładają się na siebie, można wyróżnić następujące przypadki:

- różnica faz $\Delta\varphi$ nakładających się fal nie zależy od czasu (czyli jest stała); **takie fale i ich źródła nazywa się spójnymi,**
- różnica faz $\Delta\varphi$ nakładających się fal zmienia się w czasie; **takie fale i ich źródła nazywa się niespójnymi.**

3.2.8. Interferencja fal

Gdy nakładają się **fale spójne**, amplituda drgań cząsteczek ośrodka w danym punkcie nie zależy od czasu, a jedynie od położenia tego punktu względem źródła fal. Wzajemne wzmocnienie fal w jednym punkcie ośrodka, a osłabienie w innym niezależnie od czasu nazywa się **interferencją fal.** Dla źródeł fal drgających w tej samej fazie, wzmocnienie w danym punkcie przestrzeni uzyskujemy wtedy, gdy różnica dróg równa się całkowitej wielokrotności długości fali, a wygaszenie gdy różnica dróg równa się nieparzystej wielokrotności połówki fali.

3.2.9. Fala stojąca – równanie fali

Rozpatrzmy interferencję dwóch ciągów fal o tych samych częstościach, prędkościach i amplitudach, ale biegnących w jednym kierunku w przeciwne strony. Taki przypadek można uzyskać przez nałożenie się fal biegnących w sznurze z falami odbitymi.

Dla fali biegnącej w prawo równanie fali dla wychyleń dane jest wzorem:

$$S' = S_m \sin(\omega t - kx),$$

w lewo:

$$S'' = S_m \sin(\omega t + kx).$$

Zatem dla fali wypadkowej otrzymamy:

$$S = S' + S''$$

po wstawieniu:

$$S = S_m \mathrm{si\,n}(\omega t - kx) + S_m \mathrm{si\,n}(\omega t + kx),$$

i uwzględnieniu, że:

$$sin\alpha + sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

Otrzymamy:

$$\boldsymbol{s = 2s_m \sin kx \cdot cos\,\omega t.}$$

Równanie to przedstawia rozkład wychyleń akustycznej fali stojącej. Fala ta nie przesuwa się w żadną stronę, nie ma przekazywania energii od cząstki do cząstki. Energia zmagazynowana jest w każdym punkcie sznura i przechodzi z energii kinetycznej w potencjalną odkształcenia.

Wyrażenie:

$$A_m = 2s_m \sin(kx)$$

stanowi amplitudę wychyleń fali stojącej, która zmienia się w zależności od x.

W sytuacji gdy:

$$\mathrm{A_m} = 2\,\mathrm{S_m}, \qquad \sin(kx) = 1,$$

mamy:

$$kx_s = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3}{2}\pi, \ \frac{5}{2}\pi \ldots,$$

czyli:

$$x_s = \frac{1}{4}\lambda, \ \ \frac{3}{4}\lambda, \ \frac{5}{4}\lambda$$

Te punkty nazywają się **strzałkami wychyleń i są odległe od siebie o** $\frac{1}{2}\lambda$.

W sytuacji gdy: $A_m = 0, \qquad \sin(kx) = 0,$

mamy:

$$kx_w = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots,$$

$$x_w = 0, \frac{1}{2}\lambda, \lambda, \frac{3}{2}\lambda$$

Te punkty nazywają się **węzłami wychyleń i są one odległe od siebie o** $\frac{1}{2}\lambda$.

Odległość między węzłami i sąsiednimi strzałkami wynosi $\frac{1}{4}\lambda$.

3.2.10. Wytwarzanie i zastosowanie ultradźwięków

Ultradźwięki są wytwarzane przez ***generatory mechaniczne, magnetostrykcyjne i piezoelektryczne.*** Przykładem generatora mechanicznego jest ***syrena***, w której drgania ultradźwiękowe powstają wskutek okresowego przerywania strumienia powietrza. Silny strumień powietrza przechodzi przez otwory w dwóch współosiowych tarczach, z których jedna jest nieruchoma, a druga obraca się z dużą prędkością. Za pomocą syreny można wytworzyć ultradźwięki o częstotliwościach do 200 kHz.

Generatory magnetostrykcyjne są oparte na zjawisku magnetostrykcji, polegającym na zmianie liniowych wymiarów ferromagnetyków w zależności od natężenia pola magnetycznego. Prostym generatorem tego typu jest pręt ferromagnetyczny użyty jako rdzeń solenoidu. Przy przepływie przez solenoid zmiennego prądu elektrycznego długość pręta zmienia się periodycznie odpowiednio do drgań pola magnetycznego solenoidu. Do budowy generatorów tego typu używa się najczęściej niklu, który wykazuje szczególnie duży efekt magnetostrykcji.

Ultradźwięki o największych częstotliwościach wytwarza się za pomocą generatorów piezoelektrycznych, w których wykorzystuje się **zjawisko piezoelektryczne,** polegające na wytwarzaniu napięcia elektrycznego przez kryształ poddany rozciąganiu albo ściskaniu lub odwrotnie, na zmianie wymiarów liniowych kryształu umieszczonego w polu elektrycznym. Zjawisko to wykazują kryształy jonowe, takie jak kwarc, turmalin i inne. W generatorze piezoelektrycznym źródłem ultradźwięku jest płytka wycięta np. z kryształu kwarcu, umieszczona między okładkami kondensatora. Przyłączenie do kondensatora źródła napięcia zmiennego powoduje wytworzenie zmiennego pola elektrycznego i powstanie drgań płytki kwarcowej.

Na przykład dla płytki o grubości L=0,05mm częstotliwość drgań własnych wynosi: $f = 5{,}7 \cdot 10^7 Hz$.

Do rejestracji i analizy ultradźwięków są stosowane **czujniki piezoelektryczne i magnetostrykcyjne.** Działanie ich jest odwrotne w stosunku do generatorów. **Czujnik piezoelektryczny stanowi płytka kwarcowa, która pod wpływem padającej fali ultradźwiękowej drga, wytwarzając przy tym napięcie elektryczne, którego wielkość jest zależna od amplitudy fali.** Czujnik magnetostrykcyjny stanowi pręt niklowy umieszczony wewnątrz uzwojenia cewki. Padająca fala powoduje drgania pręta, a w takt tych drgań zmienia się namagnesowanie pręta, co z kolei wytwarza zmienną SEM w uzwojeniu.

Dzięki małej długości fali ultradźwięki, podobnie jak światło, mogą być emitowane w postaci wąskich wiązek. Odbicie i załamanie ultradźwięków na powierzchni odgraniczającej dwa ośrodki przebiega zgodnie z prawami odbicia i załamania obowiązującymi w optyce. Do zmiany kierunku i do ogniskowania wiązek ultradźwięków stosuje się zwierciadła oraz soczewki akustyczne. Zwierciadła powinny w jak największym stopniu, prawie całkowicie,

odbijać ultradźwięki. Odbicie fali jest uzależnione od tzw. oporu akustycznego R, który jest definiowany wzorem:

$$R = \rho v,$$

gdzie ρ – gęstość ośrodka, v – prędkość fali w tym ośrodku.

W sytuacji prawie całkowitego odbicia fali od zwierciadła, jego opór akustyczny R_2 musi być dużo większy od oporu akustycznego ośrodka R_1, otaczającego zwierciadło ($R_2 \gg R_1$). Z kolei soczewka akustyczna powinna być prawie całkowicie przezroczysta dla fali, co zachodzi wtedy, gdy $R_2 \approx R_1$. Współczynnik załamania soczewki akustycznej określa się podobnie jak w optyce, jako stosunek prędkości fali w obu ośrodkach

$$n = \frac{v_1}{v_2}$$

Na zjawisku prostoliniowego rozchodzenia się ultradźwięków są oparte takie zastosowania techniczne, jak **lokacja ultradźwiękowa i defektoskopowa**. Zasada lokacji ultradźwiękowej jest następująca: generator ultradźwięków wysyła krótki impuls w określonym kierunku. Impuls ten odbijając się od napotkanej przeszkody daje echo, które jest rejestrowane przez czujnik. Znając czas upływający od wysłania impulsu do przybycia jego odbicia (echa) można wyznaczyć odległość przeszkody. Jeżeli przeszkoda porusza się z pewną prędkością względem ośrodka, to wystąpi zjawisko Dopplera, przejawiające się zmianą częstotliwości odbitego impulsu. Mierząc zmianę częstotliwości można wyznaczyć prędkość ruchu przeszkody. Urządzenie pracujące na zasadzie lokacji ultradźwiękowej jest zwane **echo-sondą** lub **sonarem** (przez analogię do nazwy „radar"). Stosuje się je do pomiarów głębokości morza, wykrywania łodzi podwodnych, ławic ryb, gór lodowych itp. Lokacja ultradźwięków w powietrzu jest praktycznie niemożliwa ze względu na silną absorpcję energii fali ultradźwiękowej w gazach.

Defektoskopia ultradźwiękowa polega na prześwietleniu bloku czy odlewu metalowego wiązką promieni ultradźwiękowych w celu wykrycia wewnętrznych wad w rodzaju pęknięć, pęcherzy itp. Ukryta wada metalu uwidacznia się bądź jako cień akustyczny (absorbent dźwięku), bądź powoduje odbicie impulsu, jak w metodzie lokacji ultradźwiękowej.

Z licznych zastosowań ultradźwięków wymienić należy też wytwarzanie emulsji trudno rozpuszczalnych substancji, np. tłuszczu w wodzie przy produkcji kremów kosmetycznych i lekarstw oraz AgCl i AgBr w żelatynie przy produkcji drobnoziarnistych emulsji fotograficznych. Wysoko spolimeryzowane cząsteczki chemiczne mogą ulegać rozpadowi pod wpływem fal ultradźwiękowych: np. krochmal rozpada się na dekstrynę. Znane jest także działanie koagulacyjne ultradźwięków: drobne cząstki zawiesin hydrozoli i aerozoli pod wpływem działania ultradźwięków mogą się kondensować w większe zespoły. Na tym efekcie opiera się wykorzystanie ultradźwięków do usuwania mgły, oczyszczania spalin z cząstek sadzy itp.

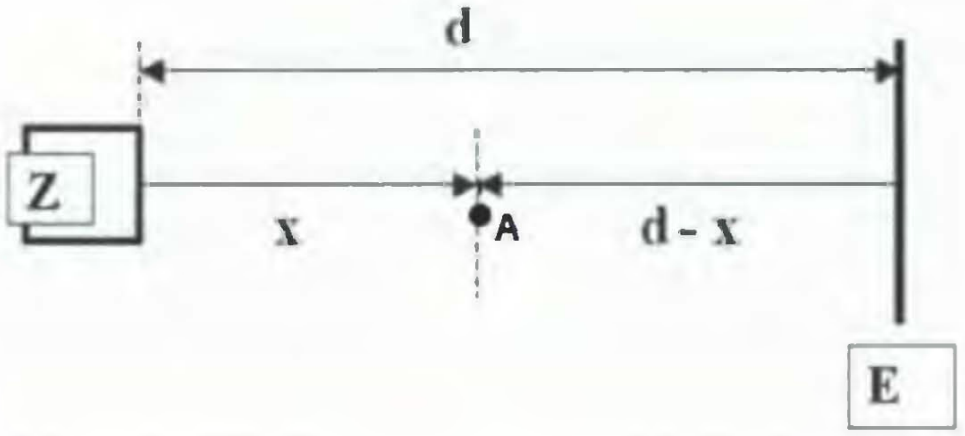
Wśród istot żywych arcymistrzami w wykorzystaniu ultradźwięków na swoje potrzeby jest nietoperz (*podkowiec*) i delfin. Nietoperz emitując falę o częstości 83 kHz, może zdobyć pożywienie, gdyż fala odbita przez np. ćmę jest odbierana przez ucho nietoperza będącego w ruchu. Nietoperz automatycznie przetwarza sygnały (uwzględniając efekt Dopplera) na informacje o prędkości ćmy względem niego samego i dzięki temu może ją dopaść. Jednak niektóre ćmy unikają złapania generując własne fale ultradźwiękowe i zakłócając w ten sposób system detekcyjny nietoperza.

W niczym nie ustępuje nietoperzowi delfin i wieloryb. Używają one ultradźwięków do echolokacji w podobny sposób jak to się odbywa w technice morskiej. Dzięki temu mogą namierzać ławice ryb lub plankton. Najdoskonalszy jednak zmysł echolokacji posiadają delfiny. Na ich głowach znajduje się rezonator pozwalający na generowanie precyzyjnie ukierunkowanego strumienia ultradźwięków. Jednocześnie ogromne mózgi delfinów są

w stanie przetworzyć uzyskane w ten sposób dane w trójwymiarowy model otoczenia. Badania nad tymi ssakami wykazały, że poprzez ultradźwięki postrzegają one swoje środowisko z taką precyzją jak my widzimy nasz świat oczami odbierającymi światło. Jednak delfiny są w stanie nie tylko dostrzec wszystko wokół siebie, ale również mogą zajrzeć do wnętrza innych istot. Ssaki te wykorzystują swoje zdolności podczas polowania. Mogą również odnaleźć ukryte pod piaskiem zwierzęta i zapolować na nie. Niektórzy biolodzy uważają, że delfiny wykorzystują silne ultradźwięki również do ogłuszania swoich ofiar.

3.3. Aparatura pomiarowa i uzasadnienie sposobu postępowania

Celem doświadczenia, jak pamiętamy z rozdziału 3.1, jest wyznaczenie częstotliwości źródła ultradźwięków metodą fali stojącej opisanej w punkcie 3.2.9. Spełnienie warunku równej częstotliwości nakładających się fal biegnących w przeciwne strony wzdłuż pewnego kierunku, uzyskuje się przez nałożenie fali biegnącej w pewną stronę z falą odbitą od przeszkody ustawionej prostopadle do obranego kierunku rozchodzenia się fali (rys. 17).



Rys. 17. Schemat zestawu pomiarowego: Z – źródło fali ultradźwiękowej biegnącej w prawo, E – ekran, od którego odbija się fala biegnąca w prawo, A – odbiornik. Na rysunku wybrano punkt A o współrzędnej x do dalszych rozważań. Opis w tekście

Wytworzona przez źródło fala akustyczna biegnąc w prawo pada na ustawiony w odległości **d** ekran E, odbija się od ekranu i biegnie w lewą stronę nakładając się z falą biegnącą w prawo. Równanie fali biegnącej w prawo w punkcie A oddalonym o **x** od źródła Z (rys. 17), wyrażone przez ciśnienie akustyczne może być określone wzorem:

$$p_1 = \Delta p = \rho_0 v^2 k S_m \cdot \sin(\omega t - kx),$$

lub:

$$p_1 = \Delta p = p_m \cdot \sin(\omega t - kx).$$

gdzie: p_m – oznacza amplitudę ciśnienia równą $\rho_0 v^2 k S_m$.

Podczas odbicia fali akustycznej od ekranu (fala odbita i padająca są falami spójnymi), **wychylenie zmienia fazę na przeciwną, natomiast ciśnienie nie zmienia fazy**.

Równanie fali ciśnienia biegnącej w lewą stronę w punkcie A przyjmuje postać:

$$p_2 = \Delta p = p_m \cdot \sin[\omega t - k(2d - x)],$$

Fala odbita przebyła drogę **d + (d – x)**, (rys. 17) ze źródła **Z** do wybranego punktu A(x), w którym spotyka się z kolejną falą padającą. W punkcie A zgodnie z zasadą superpozycji. ciśnienie fali wypadkowej wynosi:

$$p = p_1 + p_2 = p_m \cdot \sin(\omega t - kx) + p_m \cdot \sin[\omega t - k(2d - x)],$$

korzystając ze wzoru trygonometrycznego na sumę sinusów:

$$sin\alpha + sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

otrzymamy ostatecznie:

$$p = 2p_m \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot \cos 2\pi\left(\frac{d}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Otrzymaliśmy równanie ultradźwiękowej fali stojącej w warunkach naszego eksperymentu. Częstość fali stojącej równa się częstości fal interferujących, czyli fali biegnącej z nadajnika będącego źródłem ultradźwięków. Częstość fali rozchodzącej się ze źródła równa się częstości drgań źródła. W oparciu o to można wyznaczyć szukaną częstość nadajnika. Amplituda ciśnienia ultradźwiękowej fali stojącej wynosi:

$$A = 2p_m \cos 2\pi\left(\frac{d}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

i zależy od położeń współrzędnej $\boldsymbol{x}$. Amplituda osiąga wartości maksymalne $A = 2p_m$, zwane strzałkami fali stojącej dla położeń x_s spełniających warunek:

$$2\pi\left(\frac{d}{\lambda} - \frac{x_s}{\lambda}\right) = n\,\pi, \quad \text{gdzie } n = 0,1,2,3,\ldots$$

stąd:

$$x_s = d - n\frac{\lambda}{2}.$$

Natomiast gdy wartości amplitudy są minimalne: A = 0,

musi być spełniony warunek:

$$2\,\pi\left(\frac{d}{\lambda} - \frac{x_w}{\lambda}\right) = (2n + 1)\frac{\pi}{2},$$

stąd:

$$x_w = d - [n+1/2]\frac{\lambda}{2}$$

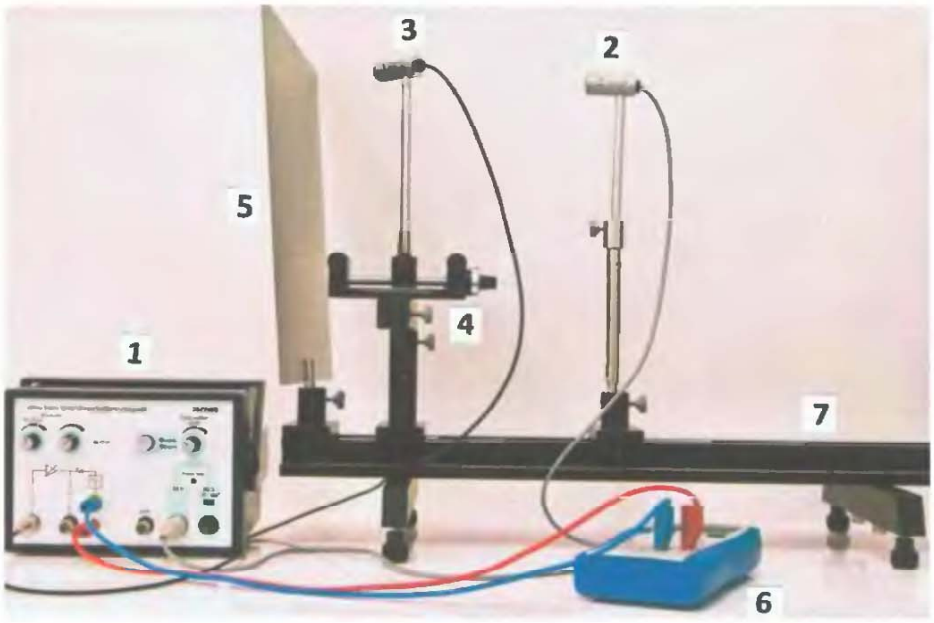
Tak więc strzałki i węzły ultradźwiękowej fali stojącej leżą naprzemiennie wzdłuż odcinka d w odległościach równych λ/4, a odległości pomiędzy kolejno występującymi węzłami lub strzałkami wynoszą λ/2. Na podstawie tych wyliczeń długość fali ultradźwiękowej równa się:

$$\lambda = 2\,(x_{2s} - x_{1s}) \quad \text{lub} \quad \lambda = 2\,(x_{2w} - x_{1w}).$$

I ostatecznie częstość ultradźwiękowej fali stojącej, a zatem i częstość nadajnika policzymy ze wzoru:

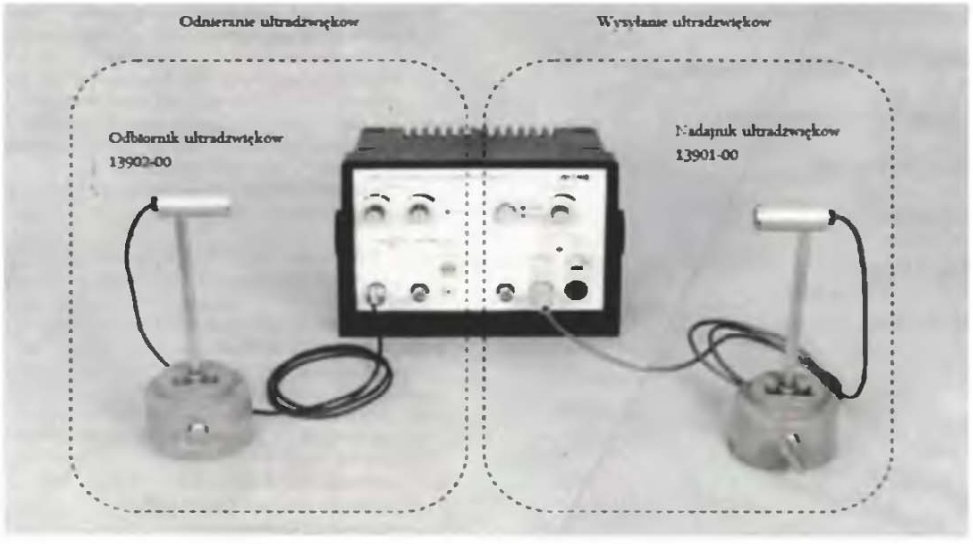
$$\boldsymbol{f = \frac{v}{\lambda}}$$

Na rysunku 18 pokazano aparaturę, która będzie użyta w doświadczeniu.



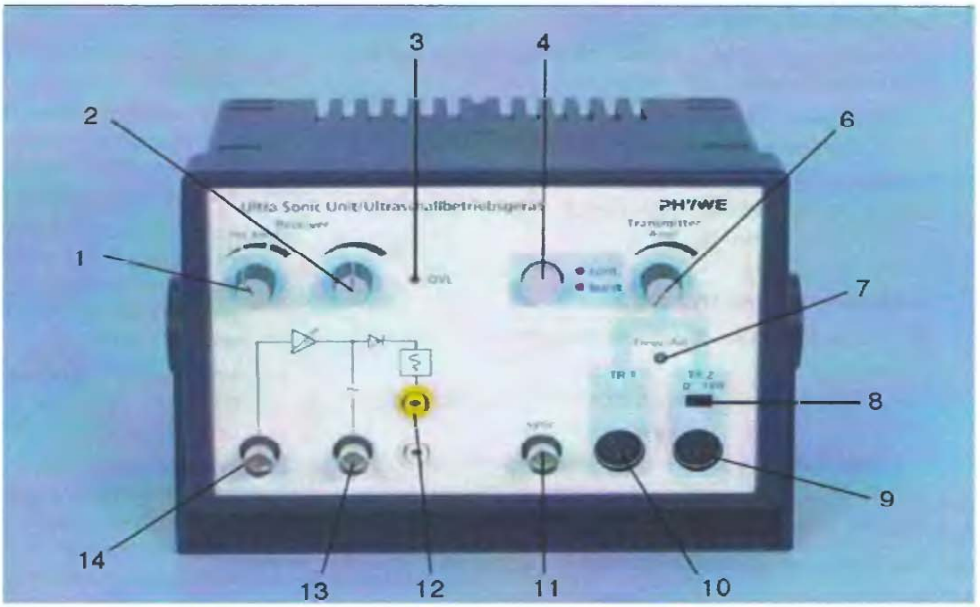
Rys. 18. Zestaw aparaturowy do badania ultradźwięków

Zestaw pomiarowy do badania ultradźwięków zawiera: **1** – zasilacz 5V, 15 W, którego funkcje pokazano na rys. 19 i 20, **2** – źródło ultradźwięków, czyli nadajnik fal ultradźwiękowych, **3** – rejestrator, czyli odbiornik ultradźwięków, **4** – śrubę mikrometryczną do precyzyjnego przesuwu odbiornika fal, **5** – ekran metalowy odbijający fale padające, **6** – multimetr cyfrowy do odczytu napięcia z odbiornika ultradźwięków, **7** – ławę metalową służącą do umocowania ekranu, nadajnika i odbiornika fal ultradźwiękowych z możliwością przesuwu tych elementów wzdłuż ławy. Rysunek 19 ilustruje podział frontalnej strony zasilacza, dla której pokazano części związane z działaniem: odbiornika ultradźwięków (lewa część zasilacza) oraz nadajnika (prawa strona zasilacza).



Rys. 19. Frontalna strona zasilacza w zestawie pomiarowym ultradźwięków

Na rysunku 20 przedstawiono elementy robocze i funkcyjne zasilacza



Rys. 20. Widok z przodu urządzenia zasilającego nadajnik i odbiornik fal ultradźwiękowych

3 ELEMENTY ROBOCZE I FUNKCYJNE

1 *Wzmocnienie sygnału ultradźwiękowego* (przedwzmacniacza) w trzech krokach.

2 *Możliwość ciągłych zmian wzmocnienia sygnału ultradźwiękowego.*

3 *Dioda świecąca (OVL)*
oznacza przesterowanie sygnału ultradźwiękowego

4 *Klawisz trybu pracy*
emisja ultradźwięków ciągła (**cont.**)
lub impulsowa (**burst**).

5 *Diody*
wskazują ustawiony tryb pracy.

6 *Regulacja amplitudy emitowanego sygnału.*

7 *Dostrojenie*
do korekcji częstotliwości emitowanego sygnału (Freq. Adj).

8 *Przełącznik zmiany fazy Nadajnika ultradźwięków 13901-00.*

9 *Gniazdo do Nadajnika ultradźwięków 13901-00.*

10 *Gniazdo do Nadajnika ultradźwięków 13901-00.*

11 *Monitorowane wyjście emitowanego sygnału.*

12 *Kalibrowane wyjście odbieranego sygnału.*

13 *Wyjście napięcia zmiennego sygnału odbieranego.*

14 *Wejście Odbiornika ultradźwięków 13902-00*

Możliwe są następujące ustawienia elementów roboczych i gniazd **Odbiornika ultradźwięków** po **lewej stronie płyty czołowej**:

14 *gniazdo BNC do podłączenia Odbiornika ultradźwięków 13902-00.*

1 *Przełącznik obrotowy do ustawienia wzmocnienia*
przedwzmacniacz (PRE Ampl.)
Możliwe są trzy położenia przełącznika zmieniające Wzmocnienie sygnału w stosunku ok. 1:2:3.

2 *Potencjometr do ustawiania wzmocnienia*
Potencjometr ten umożliwia ciągłą regulację wzmocnienia wynoszącego ok. 1:13,3. Możliwe łączne wzmocnienie przedwzmacniacza ze wzmacniaczem wynosi zatem 1: 40.

3 *Wyświetlacz przesterowania (OVL)*
Dioda LED świeci się, gdy wzmocniony sygnał jest przesterowany.

13 *Wyjście BNC napięcie przemiennego odebranego sygnału ultradźwiękowego*
Wyjście to umożliwia obserwacje odebranego sygnału ultradźwiękowego za pomocą oscyloskopu. Maksymalna amplituda sygnału sinusoidy wynosi 10 V_{pp}.

12 *4 mm gniazdo wyjściowe sygnału wyprostowanego*
Z gniazda można odczytać średnią arytmetyczną sygnału sinusoidalnego. Maksymalny poziom 3,18 V osiąga przy sygnale 10 V_{pp}:

$$U_{średnia\ arytmetyczna} = 3{,}18\,V$$

3.4. Wykonanie doświadczenia, wyniki pomiarów

1. Przed przystąpieniem do pomiarów należy sprawdzić prawidłowość podłączenia zestawu zgodnie z opisem i rysunkami 18–20 zamieszczonymi w podrozdziale 3.3.
2. Nadajnik i odbiornik ultradźwięków należy umieścić na tej samej wysokości, nadajnik w odległości około 25–30 cm od ekranu zamocowanego na ławie i zwrócony w stronę ekranu, a odbiornik w odległości około 5 cm od ekranu na specjalnym precyzyjnie przesuwnym stoliku wyposażonym w śrubę mikrometryczną. Odbiornik powinien być w odległości około 6 cm od osi nadajnik – ekran. Rejestrator należy ustawić pod kątem 45° do ekranu lub równolegle do ekranu (czyli prostopadle do osi ekranu).
3. Po sprawdzeniu czy nadajnik podłączony jest do diody TR1, na zasilaczu należy ustawić tryb ciągły „Con". Jeśli podczas pracy wzmacniacza zaświeci się diodka „OVL" (co świadczy o przesterowaniu), należy zmniejszyć albo amplitudę nadajnika albo wzmocnienie sygnału wejściowego (1 i 2 na rysunku 20 zamieszczonym w podpunkcie 3.3 opracowania).
4. Pomiarów natężenia ultradźwiękowej fali stojącej należy dokonywać na odcinku około kilku cm odczytując wskazania napięcia na cyfrowym mierniku multimetrowym przy przesuwie (zwiększając odległość od ekranu) odbiornika fal za pomocą śruby mikrometrycznej, przy czym stu działkom skali mikrometrycznej na śrubie odpowiada 0,5 mm.
5. Otrzymane wyniki pomiarów należy zamieścić w poniższej tabeli:

Tabela 6. Wyniki wskazań multimetra dla poszczególnych położeń odbiornika

L.p.	Położenie odbiornika [mm]	Wskazanie multimetru U_M [V]	L.p.	Położenie odbiornika [mm]	Wskazanie multimetru U_M [V]	L.p.	Położenie odbiornika [mm]	Wskazanie multimetru U_M [V]
1			44			87		
2			45			88		
3			46			89		
...			....			....		

6. Na podstawie sporządzonego wykresu uzyskanych napięć (które odzwierciedlają zmieniające się natężenia ciśnień fali stojącej) w funkcji odległości (d – x) od ekranu można obliczyć odległości pomiędzy kolejnymi strzałkami (węzłami) ultradźwiękowej fali stojącej.
7. Po uśrednieniu tych danych należy wyliczyć częstość fali ze wzoru:

$$f = \frac{v}{\lambda},$$

Prędkość fali ultradźwiękowej **v** w powietrzu w temperaturze **20°*C*** wynosi **343,4 m/s.**

Częstotliwość drgań nadajnika fal ultradźwiękowych równa się obliczonej częstotliwości drgań fali stojącej.

3.5. Analiza niepewności pomiarów

3.5.1. Ocena niepewności pośredniego pomiaru częstotliwości nadajnika ultradźwiękowego

Złożoną niepewność standardową pomiaru częstotliwości nadajnika ultradźwiękowego, czyli częstotliwości emitowanej przez nadajnik fali ultradźwiękowej $[f = \frac{v}{\lambda}]$, obliczamy korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich zgodnie ze wzorem:

$$\boldsymbol{u_c(f) = \sqrt{[\frac{\partial f}{\partial \lambda} u(\lambda)]^2} = \left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right| u(\lambda).} \tag{78}$$

Obliczając pochodną:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \mathrm{v}\frac{\partial(\lambda^{-1})}{\partial \lambda} = v\,(-1)\,\lambda^{-2} = -\frac{v}{\lambda^2},$$

Wzór 78 można zapisać jako:

$$u_c(f) = \frac{v}{\lambda^2}\, u(\lambda). \tag{79}$$

Całkowita niepewność standardowa $u(\lambda)$ wielokrotnego bezpośredniego pomiaru długości fali ultradźwiękowej związana jest z rozrzutem wyników (typ A obliczania niepewności standardowej) odczytu położenia sondy w strzałce oraz węźle fali stojącej i równa jest parametrowi $\boldsymbol{S_{\bar{\lambda}}}$ zwanemu odchyleniem standardowym wyniku pomiaru długości fali (średniej arytmetycznej długości fali), którą obliczamy ze wzoru:

$$u(\lambda) = S_{\bar{\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \bar{\lambda}\right)^2} \tag{80}$$

wykorzystując do obliczeń recepturę przedstawioną w tabeli 7.

Tabela 7. Niepewność standardowa pomiaru długości fali związana z rozrzutem wyników spowodowanym niedoskonałością zmysłów eksperymentatora wpływającą na ustawienie sondy w strzałce fali stojącej

Lp.	λ_i (mm)	$\bar{\lambda}$ (mm)	$\lambda_i - \bar{\lambda}$ (mm)	$(\lambda_i - \bar{\lambda})^2$ (mm^2)	$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \bar{\lambda})^2$ (mm^2)	S_λ (mm)	$S_{\bar{\lambda}}$ (mm)
1	2	3	4	5	6	7	8
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru długości fali od średniej arytmetycznej (niepewność pomiarowa pojedynczego pomiaru długości fali) – S_λ oblicza się według wzoru:

$$S_\lambda = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \bar{\lambda}\right)^2} \tag{81}$$

Wartość złożonej niepewności standardowej u_C (f) ostatecznie mamy ze wzoru 79.

3.5. Zapis wyniku pomiaru

1) Zapis wyniku wyznaczenia częstotliwości nadajnika fal na poziomie ufności 68,3% dla pokazanego przykładowo wyniku pomiarów (na liczbach przypadkowych):

   a) Zapis słowny:

   częstotliwość nadajnika np. mikrofalowego (**uwaga! – to nie ultradźwięki**) wynosi 10,23 GHz z niepewnością

   $$0{,}73\ GHz$$

   b) Zapis przy użyciu symboli:

   $$f = 10{,}23\ GHz; \qquad u(f) = 0{,}73\ GHz$$

   c) Zapis skrócony:

   $$f = 10{,}23\ (73)\ GHz$$

2) Zapis wyniku wyznaczenia częstotliwości nadajnika mikrofalowego na poziomie ufności 95,4%:

   a) Zapis słowny:

   częstotliwość nadajnika mikrofalowego wnosi 10,2 GHz z niepewnością

   $$1{,}5\ GHz$$

   b) Zapis przy użyciu symboli:

   $$f = 10{,}2\ GHz; \qquad U(f) = k * u(f) = 2 * u(f) = 1{,}5\ GHz$$

   c) Zapis skrócony:

   $$f = 10{,}2(1{,}5)\ GHz \ \text{ lub } \ (10{,}2 \pm 1{,}5)\ GHz$$

3) Zapis wyniku wyznaczenia częstotliwości nadajnika mikrofalowego na poziomie ufności 99,7%:

   a) Zapis słowny:

   częstotliwość nadajnika mikrofalowego wynosi 10,2 GHz z niepewnością

   $$2{,}2\ GHz$$

   b) Zapis przy użyciu symboli:

   $$f = 10{,}2\ GHz; \qquad U(f) = k * u(f) = 3 * u(f) = 2{,}2\ GHz$$

   c) Zapis skrócony:

   $$f = 10{,}2(2{,}2)\ GHz \ \text{ lub } \ (10{,}2 \pm 2{,}2)\ GHz$$

Zagadnienia do kolokwium

1. Mechanizm powstawania i rozchodzenia się drgań w ośrodku sprężystym – definicja fali mechanicznej.
2. Podział fal, wielkości charakteryzujące fale.
3. Równanie fali harmonicznej sinusoidalnej.
4. Fale akustyczne: słyszalne, infra- i ultradźwięki.
5. Ciśnienie akustyczne, moduł ściśliwości objętościowej.
6. Superpozycja fal, spójność, interferencja.
7. Fala stojąca, równanie fali stojącej.

Literatura

1. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, t.2, Warszawa, PWN, 2011.
2. Bobrowski Cz., *Fizyka, krótki kurs*. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2005.
3. Skorko M., *Fizyka, podręcznik dla studentów wyższych technicznych szkół zawodowych dla pracujących*, Warszawa, PWN, 1978.
4. Zięba A., *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP). Nowe normy międzynarodowe. Rozdział 1. Opracowanie danych pomiarowych.* Dostępność 29.11.2013r. Strona internetowa: www.pj.ifd.uni.wroc.pl/pliki/ONP.pdf
5. Kubiaczyk A., *Określenie niepewności pomiarów*. [W] Poradnik do Laboratorium fizyki., Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska. Dostępność 30.11.2013r. Strona internetowa: http://www.if.pw.edu.pl/

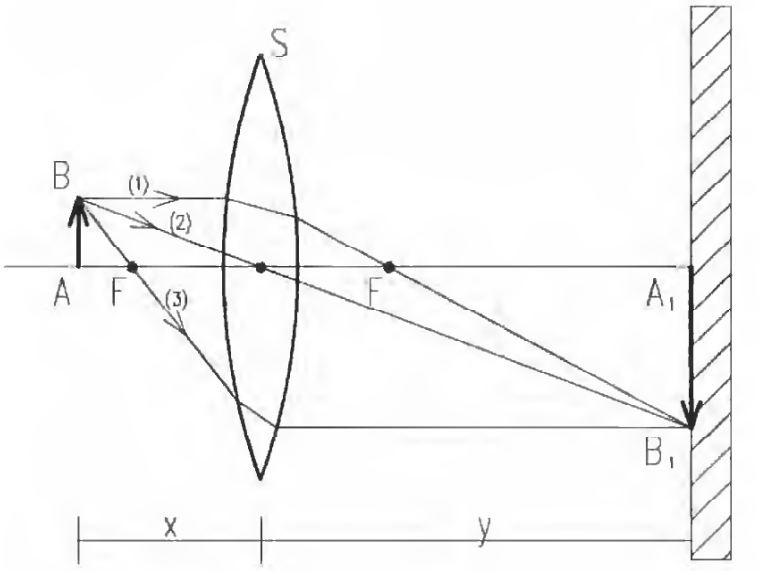
4. Wyznaczanie ogniskowej soczewki metodą Bessela

4.1. Cel i zasada doświadczenia

W celu wyznaczenia **ogniskowej f soczewki** na podstawie równania soczewki:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f} \tag{82}$$

należy zmierzyć **odległość x od przedmiotu do środka optycznego soczewki i odległość y od środka optycznego soczewki do ekranu** (rys. 21).



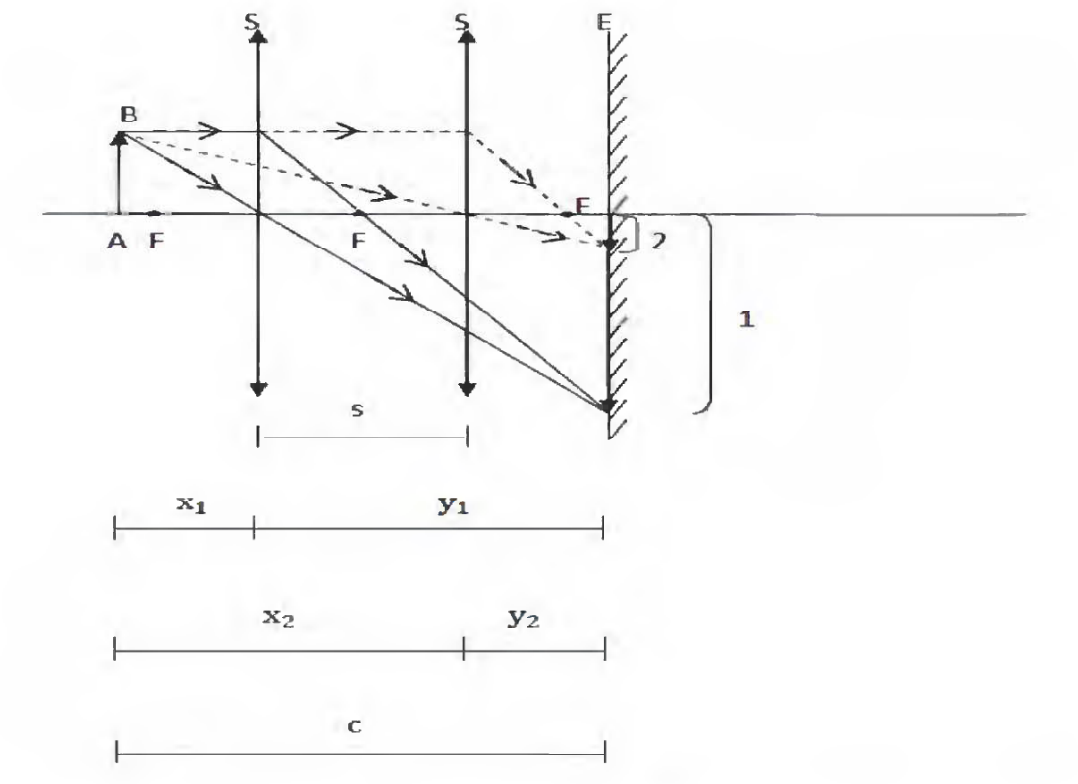
Rys. 21. Obraz rzeczywisty, odwrócony, większy od przedmiotu

Ze względu na trudność dokładnego określenia położenia środka optycznego soczewki, wyznaczenie jej ogniskowej przy stosowaniu powyższej metody obarczone jest **błędem systematycznym.** Błąd ten można wyeliminować wyznaczając wartość ogniskowej **metodą Bessela.** Okazuje się, że dla ustalonej odległości c **między przedmiotem** AB **i ekranem** E, jeśli tylko spełniona jest zależność $c > 4f$ istnieją dwa położenia soczewki (rys. 22), dla których na ekranie powstają dwa obrazy: większy od przedmiotu – (1) i mniejszy od przedmiotu – (2).

Oznaczmy odległość między tymi położeniami literą s, wtedy wzór na ogniskową przyjmuje postać:

$$f=\frac{c^2-s^2}{4c}. \tag{83}$$

Wzór (83) wykorzystujemy do wyznaczenia ogniskowej soczewki.

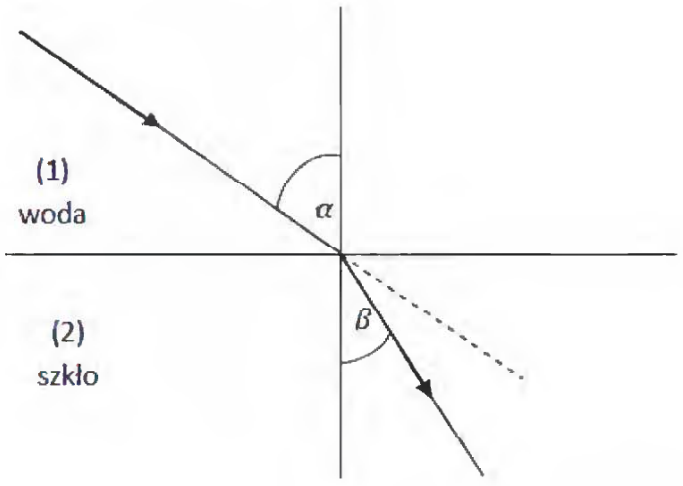


Rys. 22. Ilustracja dwóch położeń soczewki oraz odpowiadających im obrazów 1 i 2

4.2. Wiadomości teoretyczne

4.2.1. Zjawisko załamania światła

Niech na powierzchnię rozdzielającą dwa przezroczyste ośrodki na przykład: wodę – ośrodek 1, i szkło – ośrodek 2 pada równoległa wiązka światła. Prędkość światła w ośrodkach wynosi odpowiednio v_1 oraz v_2. **Promień świetlny** (wąska wiązka światła) z prostą prostopadłą do płaszczyzny padania czyli **prostopadłą padania** tworzy kąt α (α – **kąt padania światła**).



Rys. 23. Przejście światła z wody do szkła

Światło przechodzi do drugiego ośrodka zmieniając kierunek czyli załamuje się ku prostopadłej padania tworząc z prostopadłą padania kąt $\beta < \alpha$ (β – **kąt załamania światła).** Okazuje się, że promień padający, prostopadła padania oraz promień załamany leżą w jednej płaszczyźnie. Jeżeli zmienimy kąt padania, to zmieni się również kąt załamania, ale tak, że stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania światła jest dla danych dwóch ośrodków wielkością stałą. Wielkość tę nazywamy **współczynnikiem załamania światła ośrodka drugiego względem pierwszego** i oznaczamy symbolem n_{21} . Mamy więc:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}. \tag{84}$$

Okazuje się, że zachodzi związek:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{85}$$

czyli

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{86}$$

Często wprowadza sie pojęcie **bezwzględnego współczynnika załamania światła dla danego ośrodka** (oznaczonego literą n) jako współczynnika załamania względem próżni, w której prędkość światła oznaczamy symbolem c.

Oznaczając przez n_1 oraz n_2 odpowiednio bezwzględne współczynniki załamania dla ośrodka pierwszego oraz drugiego, łatwo wykazać, że zachodzi związek:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{87}$$

Jeżeli światło przechodzi z ośrodka o mniejszym współczynniku załamania do ośrodka o większym współczynniku załamania to mówimy, że przechodzi z ośrodka optycznie rzadszego do ośrodka optycznie gęstszego.

Bezwzględny współczynnik załamania światła dla powietrza jest niewiele większy od jedności, na przykład w temperaturze 20°C i przy ciśnieniu 760 mmHg wynosi on 1,0003, dlatego współczynnik załamania danego ośrodka względem powietrza jest praktycznie równy współczynnikowi bezwzględnemu.

Porównując wzory (86) i (87) otrzymujemy kolejne prawo załamania światła wyrażone wzorem:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \tag{88}$$

lub

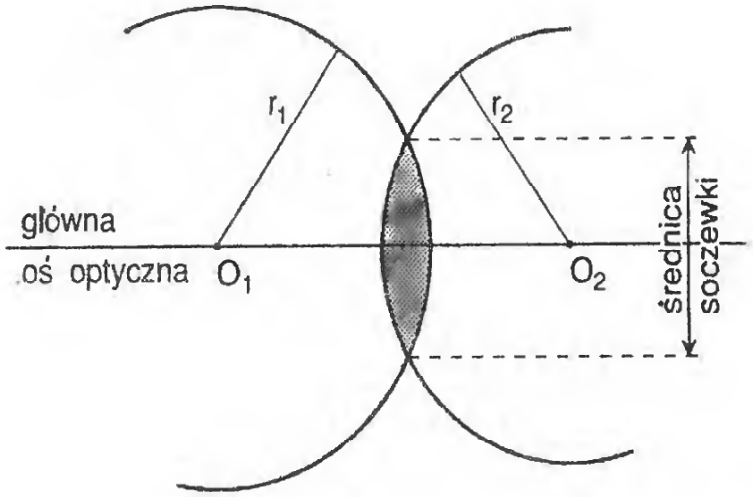
$$n_1 v_1 = n_2 v_2 . \tag{89}$$

Przedstawione prawa załamania światła noszą nazwę praw **Sneliusa**.

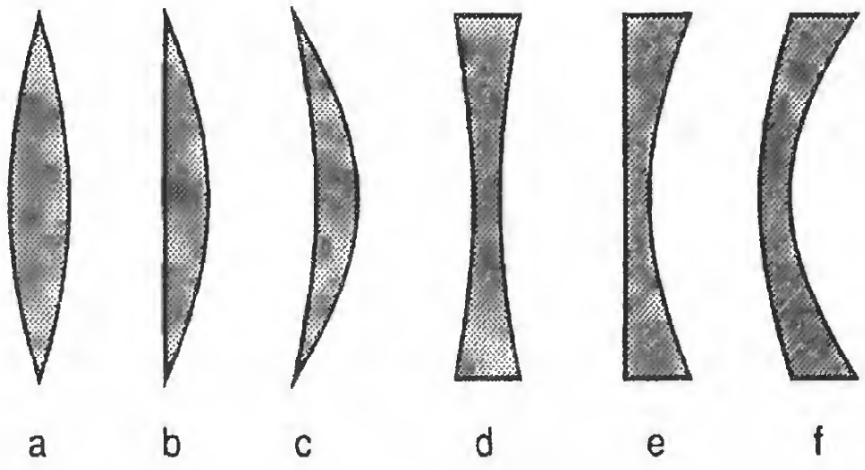
4.2.2. Soczewki cienkie

Soczewka sferyczna jest to bryła z przezroczystego materiału ograniczona z dwóch stron dwiema powierzchniami kulistymi o promieniach krzywizny r_1 oraz r_2 lub jedną kulistą o promieniu r_1 , a drugą płaską o promieniu $r_2 = \infty$.

Prostą przechodzącą przez środki powierzchni kulistych nazywamy główną osią optyczną soczewki (rys. 24). Soczewkę uważamy za cienką, jeżeli jej grubość jest mała w porównaniu z jej średnicą.



Rys. 24. Główna oś optyczna soczewki



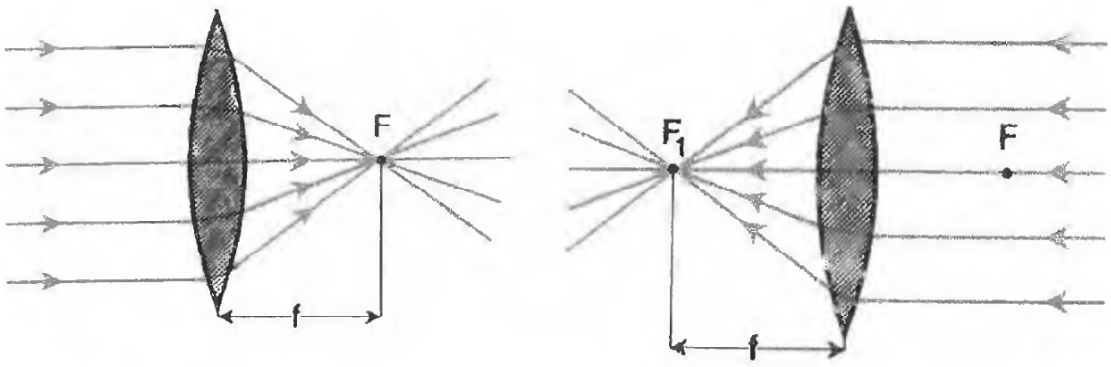
Rys. 25. Różne rodzaje soczewek

W zależności od tego, jak są położone powierzchnie ograniczające soczewkę, rozróżniamy sześć rodzajów soczewek (rys. 25):

a) dwuwypukłe,
b) płasko-wypukłe,
c) wklęsło-wypukłe,
d) dwuwklęsłe,
e) płasko-wklęsłe,
f) wypukło-wklęsłe.

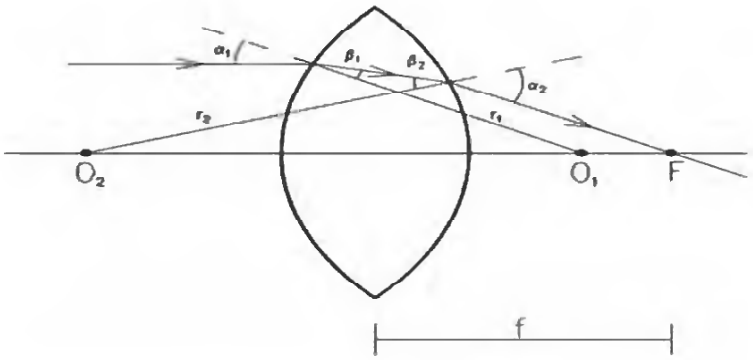
Rozróżniamy soczewki skupiające oraz rozpraszające.

Soczewką skupiającą nazywamy taką soczewkę, na którą padające promienie równoległe do głównej osi optycznej po załamaniu na powierzchniach soczewki skupiają się na głównej osi optycznej w jednym punkcie F zwanym dalej ogniskiem soczewki skupiającej. Odległość od środka optycznego soczewki do ogniska nazywamy ogniskową soczewki i oznaczamy literą f.



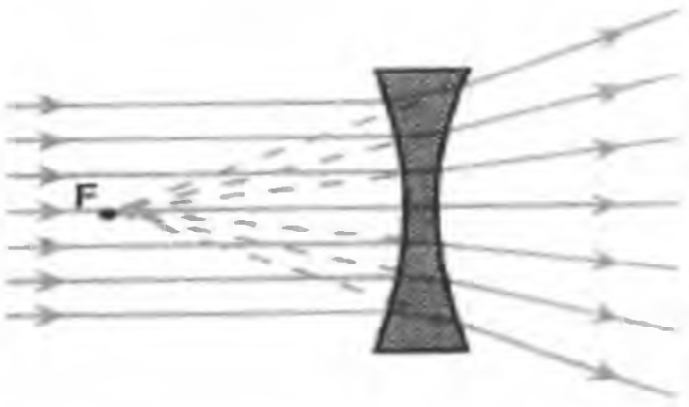
Rys. 26. Przejście, równoległej do głównej osi optycznej, wiązki światła przez soczewkę skupiającą

Środkiem optycznym soczewki nazywamy punkt na osi optycznej posiadający tę własność, że promienie świetlne przechodzące przez niego pod dowolnym kątem do osi głównej po przejściu przez soczewkę nie zmieniają kierunku, a jedynie ulegają niewielkiemu przesunięciu jak w cienkiej płytce równoległościennej (patrz ćwiczenie 5). Wiązka światła, padająca na soczewkę z drugiej strony równolegle do głównej osi zostaje również skupiona w jednym punkcie – ognisku. Soczewka posiada dwa ogniska, ale jedną ogniskową.

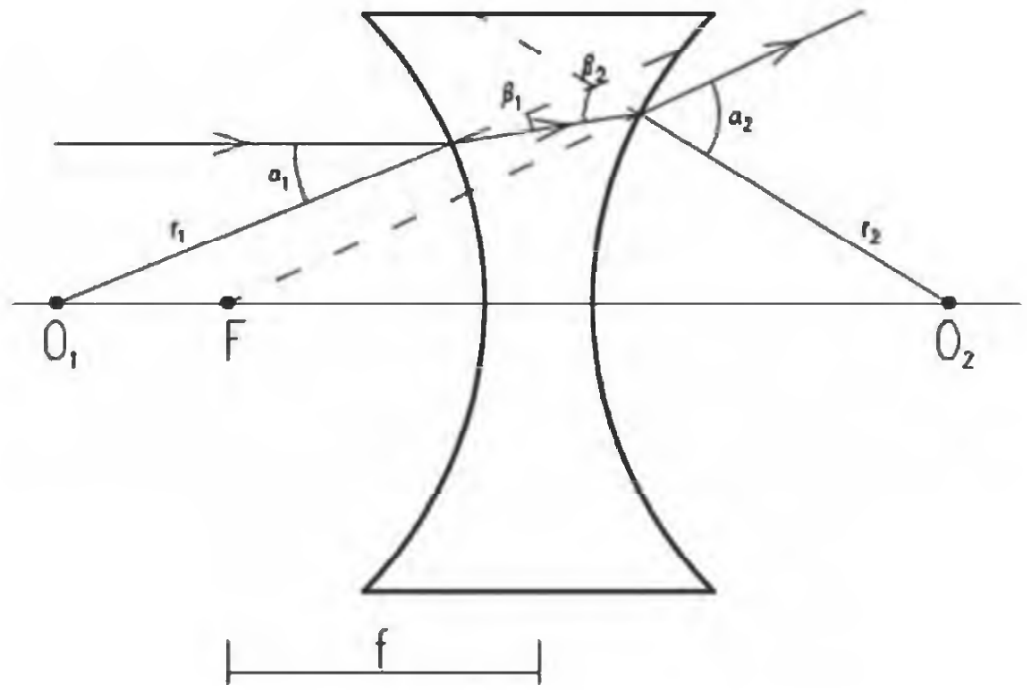


Rys. 27. Przejście przez umieszczoną w powietrzu szklaną soczewkę, grubszą w środku niż na brzegach promienia świetlnego padającego na soczewkę równolegle do głównej osi optycznej soczewki

Soczewką rozpraszającą nazywamy taką soczewkę, na którą padające promienie równolegle do głównej osi optycznej po załamaniu na powierzchniach soczewki nie przecinają się (rys. 28). Przecinają się jednak przedłużenia promieni załamanych. Punkt, w którym przecinają się przedłużenia tych promieni leży na głównej osi optycznej i nazywa się **ogniskiem pozornym soczewki rozpraszającej,** natomiast odległość mierzona od soczewki do ogniska jej ogniskową. Ogniskową soczewki rozpraszającej przyjęto uważać za ujemną, czyli $f < 0$.



Rys. 28. Przejście, równoległej do głównej osi optycznej wiązki światła przez soczewkę rozpraszającą



Rys. 29. Przejście przez umieszczoną w powietrzu szklaną soczewkę, cieńszą w środku niż na brzegach, promienia świetlnego padającego na soczewkę równolegle do głównej osi optycznej

Ogniskową soczewki skupiającej jak również soczewki rozpraszającej obliczamy ze wzoru zwanego **równaniem ogniskowej soczewki** (*wyprowadzenie wzoru można znaleźć w [3]*):

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{90}$$

gdzie: n_1 oraz n_2 – bezwzględne współczynniki załamania światła, odpowiednio: dla ośrodka, w którym umieszczona jest soczewka oraz dla materiału z jakiego wykonana została soczewka. Wtedy: $\frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, gdzie n_{21} – to względny współczynnik załamania światła materiału soczewki względem ośrodka.

Promień krzywizny powierzchni soczewki jest liczbą względną, tzn. dodatnią lub ujemną. Promień krzywizny powierzchni soczewki przyjmuje się za dodatni, jeśli środek krzywizny powierzchni soczewki znajduje się po przeciwnej stronie soczewki niż powierzchnia soczewki (rys. 27.), natomiast promień krzywizny powierzchni soczewki przyjmuje się za ujemny, jeśli środek krzywizny powierzchni soczewki znajduje się po tej samej stronie soczewki co powierzchnia soczewki (rys. 29). W związku z tym dla soczewki skupiającej mamy $f > 0$, natomiast dla rozpraszającej $f < 0$.

Na rysunku 30 pokazano schematyczne przedstawienie soczewki skupiającej oraz rozpraszającej.

Rys. 30. Symboliczne przedstawienie soczewki: a – skupiającej, b – rozpraszającej

Obrazy otrzymywane za pomocą soczewki.

Za pomocą soczewki można otrzymać obraz świecącego przedmiotu. Obrazem otrzymywanym za pomocą soczewki świecącego punktowego przedmiotu P nazywamy punkt P_1, w którym przecinają się wychodzące z przedmiotu promienie przechodzące przez soczewkę (obraz ten możemy otrzymać na ekranie – obraz rzeczywisty), bądź przedłużenia promieni po przejściu przez soczewkę (obrazu tego nie możemy otrzymać na ekranie – obraz pozorny).

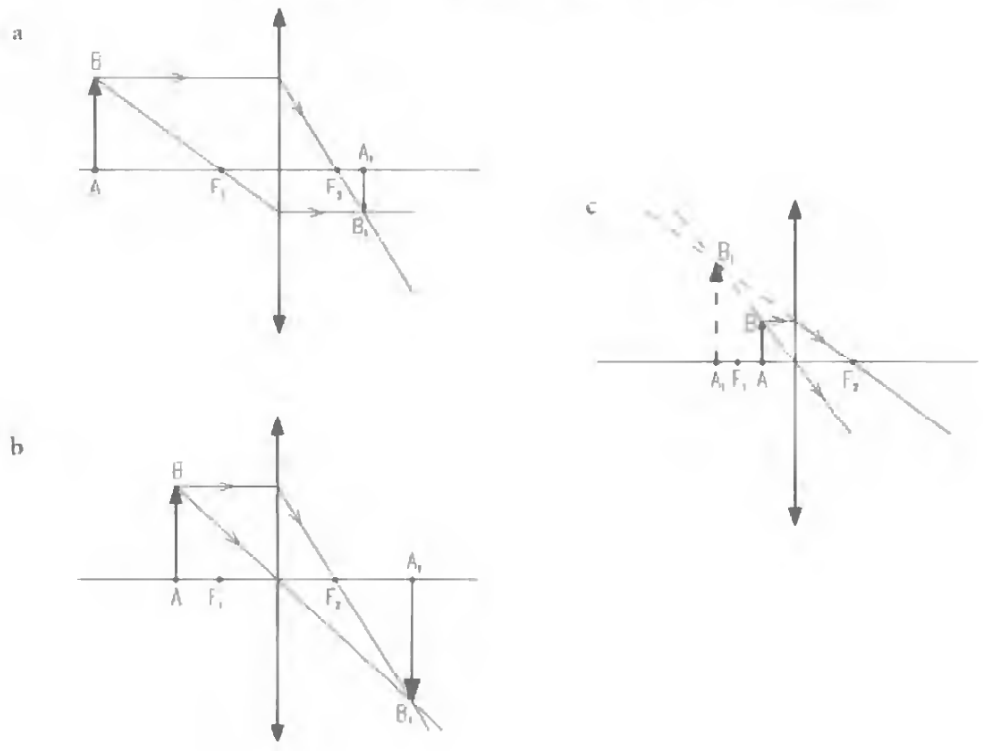
Obraz przedmiotu rozciągłego składa się z obrazów wszystkich jego punktów.

Położenie obrazu można znaleźć konstrukcyjnie. Znajdując konstrukcyjnie położenie obrazu pojedynczego punktu świecącego wykreślamy bieg dwóch promieni świetlnych:

- promień padający na soczewkę równolegle do jej głównej osi optycznej po załamaniu w soczewce skupiającej przechodzi przez ognisko, natomiast w soczewce rozpraszającej przez ognisko przechodzi przedłużenie promienia załamanego.
- promień świetlny biegnący w kierunku środka soczewki cienkiej (środka optycznego), przechodzi prze nią bez zmiany kierunku.

Ponadto dla soczewki skupiającej:

- promień (lub jego przedłużenie) przechodzący przez ognisko soczewki po załamaniu w soczewce skupiającej biegnie równolegle do głównej osi optycznej.



Rys. 31. Konstrukcja obrazu otrzymanego za pomocą soczewki skupiającej: a. obraz rzeczywisty, odwrócony, mniejszy od przedmiotu, b. obraz rzeczywisty, odwrócony, większy od przedmiotu, c. obraz pozorny, prosty, większy od przedmiotu

Na rysunku 31 przedstawiono konstrukcję obrazu otrzymanego za pomocą soczewki skupiającej dla trzech różnych odległości x, od przedmiotu do soczewki, mianowicie:

a. $x > 2f$, **b.** $f < x < 2f$, **c.** $x < f$.

Wraz ze zmianą x zmieniają się zarówno ilościowe jak również jakościowe cechy obrazu. Zależność odległości y (mierzonej od soczewki skupiającej do obrazu) od odległości x mie-

rzonej od przedmiotu od soczewki) przedstawiona została na rysunku 32 wykorzystując równanie soczewki cienkiej określone wzorem 91:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}, \tag{91}$$

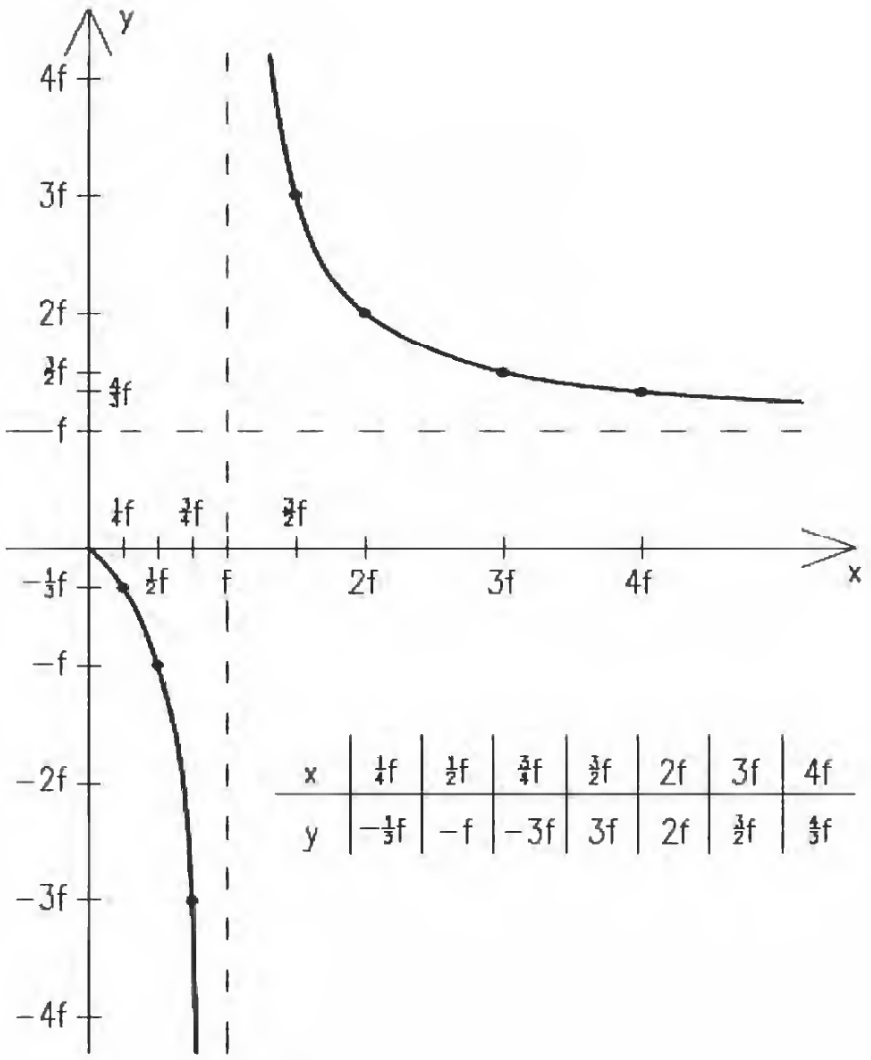
które po przekształceniu przyjmuje postać:

$$y=\frac{fx}{x-f}\ ,\ x\neq f \tag{92}$$

lub

$$y=\frac{f}{1-\frac{f}{x}}\ ,\ x\neq 0. \tag{93}$$

Warunek $x \neq f$ oznacza, że nie istnieje obraz przedmiotu umieszczonego w ognisku soczewki.



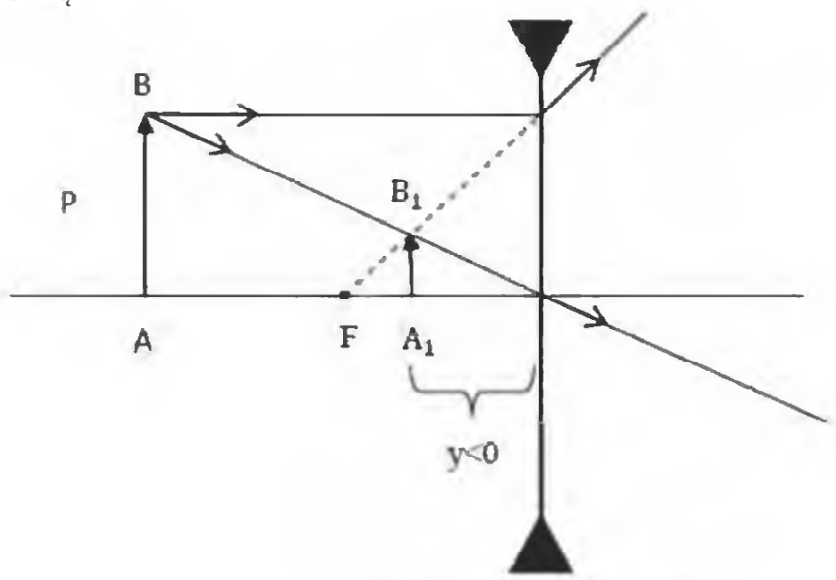
x	1/4f	1/2f	3/4f	3/2f	2f	3f	4f
y	-1/3f	-f	-3f	3f	2f	3/2f	4/3f

Rys. 32. Wykres, dla soczewki skupiającej, zależności odległości obrazu (y) od odległości przedmiotu (x)

W optyce geometrycznej stosowana jest umowa dotycząca traktowania pewnych wielkości fizycznych jako wielkości dodatnich lub ujemnych, mianowicie: daną wielkość uważa się za wielkość dodatnią, jeśli mierzy się ją idąc zgodnie z biegiem światła oraz za ujemną, jeśli mierzy się ją idąc przeciwnie niż biegnie światło.

W takiej sytuacji zrozumiałym staje się fakt, że dla przedmiotu znajdującego się między ogniskiem, a soczewką skupiającą $(x < f)$, odległość (y) obrazu pozornego od soczewki jest ujemna. Pomiaru odległości (y) należy dokonać idąc od soczewki do obrazu pozornego czyli przeciwnie do biegu światła na tym odcinku.

Na rysunku 33 przedstawiono konstrukcję obrazu otrzymanego za pomocą soczewki rozpraszającej. Okazuje się, że niezależnie od położenia przedmiotu, obraz powstaje między ogniskiem i soczewką.



Rys. 33. Konstrukcja obrazu w soczewce rozpraszającej. Obraz A_1 B_1 przedmiotu P jest pozorny, prosty, mniejszy od przedmiotu

Do opisu właściwości soczewki oprócz pojęcia ogniskowej używa się pojęcia **zdolności skupiającej soczewki.** Mówimy, że im bliżej soczewki leży jej ognisko, czyli im mniejsza jest ogniskowa, tym większa jest zdolność skupiająca **Z** soczewki. **Zdolność skupiająca soczewki jest równa odwrotności jej ogniskowej:**

$$Z = \frac{1}{f}. \tag{94}$$

Jeżeli ogniskowa jest wyrażona w metrach, to zdolność skupiająca wyraża się w dioptriach, przy czym:

$$1 \text{ dioptria}=1\text{D}= 1\frac{1}{m}.$$

Soczewka, której ogniskowa wynosi 1m ma zdolność skupiającą równą 1 dioptri. Soczewka o ogniskowej 25 cm ma zdolność skupiającą równą 4 dioptrie.

Zdolność skupiająca układu soczewek.

Na rysunku 34 przedstawiony został układ, ustawionych równolegle do siebie, dwóch soczewek dla których:

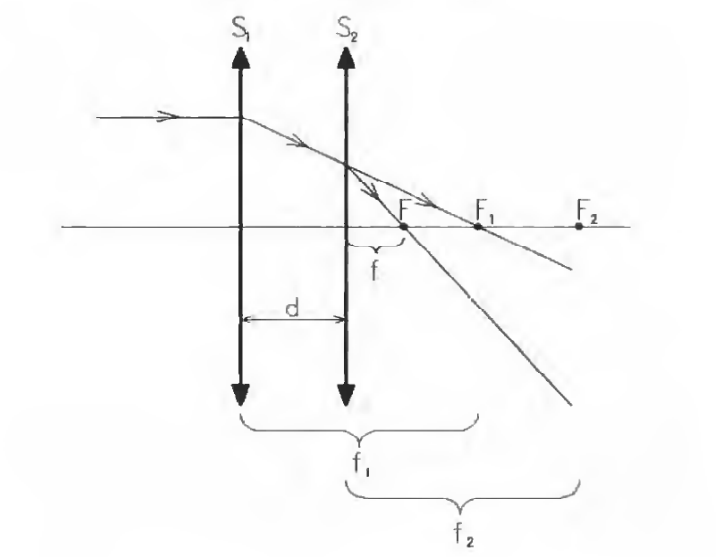
$\boldsymbol{F_1, f_1}$ – ognisko, ogniskowa soczewki S_1,
$\boldsymbol{F_2, f_2}$ – ognisko, ogniskowa soczewki S_2,

Soczewki oddalone są od siebie o $d < f_1$.

Niech na tak utworzony układ soczewek pada z bardzo oddalonego przedmiotu wiązka światła równoległa do głównej osi optycznej.

W sytuacji gdy na soczewkę S_1, w nieobecności soczewki S_2, pada równoległa wiązka światła, to dowolny promień po załamaniu w soczewce przechodzi przez ognisko F_1 stanowiące obraz nieskończenie odległego od soczewki przedmiotu.

Po umieszczeniu za soczewką S_1 soczewki S_2, wymieniony wyżej promień po przejściu przez dołączoną soczewkę ulegnie dodatkowemu załamaniu i przetnie główną oś optyczną w punkcie **F** stanowiącym ognisko układu soczewek o ogniskowej f.



Rys. 34. Przejście promienia świetlnego przez układ soczewek

Punkt F_1 dla soczewki S_2 jest pozornym przedmiotem, a punkt F rzeczywistym obrazem.

Odległość x mierzona od pozornego przedmiotu do soczewki S_2 jest ujemna i wynosi:

$$x = -(f_1 - d), \tag{95}$$

natomiast odległość y od soczewki S_2 do obrazu wynosi:

$$y = f. \tag{96}$$

Równanie soczewki S_2:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f_2} \tag{97}$$

przyjmuje postać:

$$-\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}\ , \tag{98}$$

skąd:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2}. \tag{99}$$

Dla blisko położonych soczewek cienkich $d = 0$, mamy:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \tag{100}$$

czyli:

$$z = z_1 + z_2. \tag{101}$$

Zdolność skupiająca stykających się ze sobą cienkich soczewek równa jest sumie zdolności skupiających poszczególnych soczewek.

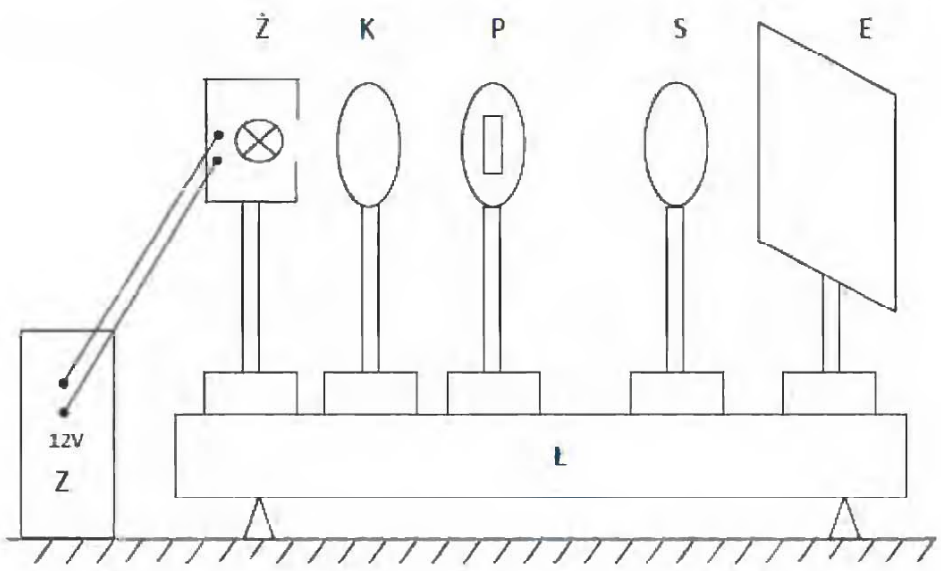
4.3. Opis zestawu doświadczalnego oraz uzasadnienie warunku uzyskania w jednym doświadczeniu dwóch ostrych obrazów danego przedmiotu

4.3.1. Opis zestawu doświadczalnego

W skład zestawu doświadczalnego wchodzi umieszczona na dwóch podstawach profilowana ława optyczna *(Ł)* o długości 1m z podziałką milimetrową. Rozmieszczenie elementów wyposażenia ławy optycznej przedstawiono na rysunku 35, gdzie:

- *(Ż)* – żarówka w obudowie jako źródło światła połączona przewodami do zasilacza stałego lub przemiennego napięcia 12 V,
- *(K)* – kondensor w uchwycie zawierający soczewkę formującą strumień świetlny w równoległą wiązkę światła,
- *(P)* – umieszczona w uchwycie diafragma czyli płytka ze szczeliną traktowana jako świecący przedmiot,
- *(S)* – umieszczona w uchwycie soczewka skupiająca lub skupiający układ soczewek składający się z pojedynczej soczewki rozpraszającej oraz skupiającej,
- *(E)* – biały bezodblaskowy ekran.

Uchwyty elementów zestawu umieszczone są w konikach przesuwanych wzdłuż ławy.



Rys. 35. Rozmieszczenie elementów na ławie optycznej

4.3.2. Uzasadnienie warunku uzyskania w jednym doświadczeniu dwóch ostrych obrazów danego przedmiotu – większego i mniejszego od przedmiotu przy dwóch położeniach soczewki skupiającej dla stałej odległości c od przedmiotu P do ekranu E.

Wykorzystując oznaczenia na rysunku 22. układamy układ dwóch równań.

$$x_2 - x_1 = s = x_2 - y_2 \quad \Rightarrow \quad x - y = s\,, \tag{102}$$

$$x + y = c. \tag{103}$$

Po dodaniu równań (103) i (102) stronami otrzymujemy:

$$2x = c + s \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{c+s}{2}, \tag{104}$$

Po odjęciu równań stronami [(102) i (103)] otrzymujemy:

$$2y = c - s \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{c-s}{2}. \tag{105}$$

Po podstawieniu otrzymanych wyrażeń na x oraz y do równania soczewki (91) otrzymujemy:

$$\frac{2}{c+s} + \frac{2}{c-s} = \frac{1}{f}. \tag{106}$$

W wyniku kilku kolejnych przekształceń otrzymujemy poszukiwane wyrażenie na ogniskową soczewki:

$$\frac{2(c-s)+2(c+s)}{(c+s)(c-s)} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{2c-2s+2c+2s}{c^2-s^2} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{4c}{c^2-s^2} = \frac{1}{f},$$

stąd wzór (83):

$$f = \frac{c^2-s^2}{4c}. \tag{107}$$

Przekształcamy ostatnią zależność do postaci:

$$c^2 - 4fc = s^2.$$

Ponieważ $s^2 > 0$, to również

$$c^2 - 4fc > 0$$

lub

$$c\,(c-4f) > 0. \tag{108}$$

Mamy więc poszukiwany warunek jaki musi spełniać odległość c ekranu E od przedmiotu (P) aby otrzymać na ekranie w jednym doświadczeniu dwa obrazy przy przesunięciu soczewki w stronę ekranu o wielkość s, czyli

$$c > 4f\,. \tag{109}$$

4.4. Wykonanie doświadczenia, wyniki pomiarów

1) Ekran należy ustawić w takiej odległości c od świecącego przedmiotu aby spełniona była dla użytej soczewki skupiającej nierówność $c > 4f$. W tym celu należy oszacować wartość ogniskowej f soczewki przez dokonanie pomiaru odległości od soczewki do świetlnej plamki wytworzonej na kartce białego papieru przez soczewkę skierowaną w stronę odległego źródła światła, np. oświetlającego laboratorium.
2) Żarówkę na ławie należy podłączyć do zasilacza napięcia stałego lub przemiennego 12V. Po wykonaniu tych wstępnych czynności przystępujemy do pomiaru odpowiednich wielkości fizycznych.

3) Ustalamy położenie ekranu oraz dokonujemy pomiaru odległości c między przedmiotem i ekranem jako różnicy odczytów na skali ławy położenia nacięć na koniku z ekranem (e) i koniku z przedmiotem (p).
4) Konika z soczewką przesuwamy od przedmiotu w stronę ekranu. Znajdujemy na ławie optycznej takie dwa położenia soczewki, którym odpowiadają wytworzone przez nią na ekranie wyraźne obrazy odpowiednio: większy i mniejszy od przedmiotu. Odczytujemy na skali ławy optycznej położenie nacięcia wykonanego na koniku z soczewką, odpowiadające wymienionym wcześniej położeniom soczewki. Poszukiwaną wartość przesunięcia soczewki (S) obliczamy jako różnicę dokonanych odczytów.

Wyniki pomiaru zapisujemy w tabeli 8. Pomiary powtarzamy dla różnych wartości c odległości między przedmiotem i ekranem.

Wyznaczenie ogniskowej soczewki rozpraszającej

W celu wyznaczenia ogniskowej soczewki rozpraszającej o ogniskowej $f_r < 0$ należy połączyć ją z soczewką skupiającą o takiej ogniskowej f_s aby układ soczewek był układem skupiającym o ogniskowej $f_u > 0$ i dawał na ekranie rzeczywiste obrazy przedmiotu.

Postępując podobnie jak przy wyznaczaniu ogniskowej soczewki skupiającej, wyznaczamy ogniskową skupiającego układu soczewek f_u, a następnie na podstawie związku (100) obliczamy ogniskową soczewki rozpraszającej f_r.

Dla zdolności skupiających soczewek zachodzi związek:

$$\frac{1}{f_u} = \frac{1}{f_s} + \frac{1}{f_r}\,, \tag{110}$$

wtedy:

$$\frac{1}{f_r} = \frac{1}{f_u} - \frac{1}{f_s}\,,$$

a po przekształceniach otrzymujemy:

$$f_r = \frac{f_s f_u}{f_s - f_u} \tag{111}$$

lub

$$f_r = \frac{f_s}{\frac{f_s}{f_u} - 1}\,. \tag{112}$$

Tabela 8. Wyniki pomiarów dla soczewki skupiającej

Lp.	p (cm)	e (cm)	$c = e - p$ (cm)	c^2 (cm^2)	$4c$ (cm)	x_1 (cm)	x_2 (cm)	$s = x_2 - x_1$ (cm)	s^2 (cm^2)	$c^2 - s^2$ (cm^2)	f (cm)	$\bar{f}$ (cm)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

4.5. Analiza wyników pomiaru ogniskowej soczewki

4.5.1. Ocena niepewności typu A]

Wyznaczenie ogniskowej soczewki metodą Bessela jest pomiarem pośrednim i polega na pomiarze długości dwóch odcinków: c – odległości między świecącym przedmiotem i ekranem oraz s – przesunięcia soczewki między takimi dwoma jej położeniami na ławie optycznej, dla których na ekranie powstają dwa rzeczywiste obrazy: większy i mniejszy od przedmiotu.

Pomiary długości odcinka c oraz s są pomiarami bezpośrednimi za pomocą jednego zestawu doświadczalnego w jednym doświadczeniu, są więc pomiarami skorelowanymi.

W takiej sytuacji ze względu na bardzo skomplikowane obliczenia złożonej niepewności standardowej wielkości wyznaczanej (mierzonej pośrednio o skorelowanych pomiarach wielkości mierzonych bezpośrednio) w pracowniach studenckich wygodniej jest postępować następująco:

Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich K wielkości $x_{K,i}$ uzyskanych w i-tym pomiarze:

$$y_i = f(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \ldots x_{k,i}, \ldots x_{K,i}).$$

Seria wyników y_i, uzyskanych w n pomiarach, stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_c(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} .$$

Seria wyników pomiaru f_i, uzyskanych w n pomiarach stanowi próbę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmujemy, że wynikiem pomiaru pośredniego jest

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i ,$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_c(f) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (f_i - \bar{f})^2} .$$

Tabela 9. Obliczanie niepewności wyników pomiaru

Lp.	$f_i - \bar{f}$ (cm)	$(f_i - \bar{f})^2$ (cm^2)	$\sum_{i=1}^{n}(f_i - \bar{f})^2$ (cm^2)	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i - \bar{f})^2}{n-1}$ (cm^2)	S_f (cm)	$u_c(f)$ (cm)
1	2	3	4	5	6	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						

S_f – odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru ogniskowej soczewki od wartości średniej wynosi:

$$S_f = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i - \bar{f})^2}{n-1}}$$

$S_{\bar{f}} = \frac{S_f}{\sqrt{n}}$ – odchylenie standardowe wyniku pomiaru ogniskowej soczewki (odchylenie średniej arytmetycznej od wartości prawdziwej (najbardziej prawdopodobnej) wynosi:

$$S_{\bar{f}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i - \bar{f})^2}{n(n-1)}}$$

$u_{c(f)} = S_{\bar{f}}$ – niepewność standardowa wyniku pomiaru ogniskowej.

4.5.2. Ocena niepewności typu B

Niepewność standardową szacuje się metodą typu B w przypadku, gdy wyniki pomiaru nie wykazują rozrzutu albo gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru. Oszacujemy niepewność standardową wyniku pomiaru ogniskowej soczewki metodą typu B, korzystając z wyniku__ __ __ pomiaru z tabeli 8.

W tym celu obliczamy różniczkę df ze wzoru (83), czyli

$$f = \frac{c^2 - s^2}{4c}.$$

Mamy więc:

$$df = \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial s} ds\,. \tag{113}$$

Obliczając:

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{2c \cdot 4c - 4(c^2 - s^2)}{16c^2} = \frac{8c^2 - 4c^2 + 4s^2}{16c^2} = \frac{4c^2 + 4s^2}{16c^2} = \frac{c^2 + s^2}{4c^2} \tag{114}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{4c}(-2s) = -\frac{s}{2c}\,, \tag{115}$$

otrzymujemy:

$$df = \frac{c^2 + s^2}{4c^2} dc + \left(-\frac{s}{2c}\right) ds\,. \tag{116}$$

Zastępując różniczki maksymalnymi niepewnościami pomiarowymi, dla maksymalnej niepewności pomiaru ogniskowej otrzymujemy:

$$|\Delta f|_{max} = \frac{c^2 + s^2}{4c^2} \Delta c + \frac{s}{2c} \Delta s, \tag{117}$$

lub

$$|\Delta f|_{max} = \frac{1 + \frac{s^2}{c^2}}{4} \Delta c + \frac{s}{2c} \Delta s\,. \tag{118}$$

Należy oszacować maksymalne niepewności pomiaru c oraz s.

Maksymalna niepewność pomiaru c jest sumą niepewności z tytułu cechowania przymiaru (1mm = 0,1 cm), odczytu położenia przedmiotu i ekranu (1mm + 1mm = 2mm = 0,2cm), czyli:

$$\Delta c = 0{,}1cm + 0{,}2cm = 0{,}3cm\,.$$

Maksymalna niepewność pomiaru s jest sumą niepewności z tytułu cechowania przymiaru (1mm=0,1cm), odczytu przez eksperymentatora przesunięcia soczewki (1mm+1mm=2mm=0,2cm) oraz niepewności eksperymentatora podczas ustawienia soczewki w celu uzyskania ostrego obrazu na ekranie (2mm + 2mm = 4mm = 0,4cm), czyli:

$$\Delta s = 0{,}1cm + 0{,}2cm + 0{,}4cm = 0{,}7cm.$$

Podstawiając wyniki pomiaru oraz niepewności do (118) otrzymujemy:

$$|\Delta f|_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,.$$

Niepewność standardowa wyniku pomiaru ogniskowej soczewki wynosi

$$u(f) = \frac{|\Delta f|_{max}}{\sqrt{3}} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} cm = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} cm = \ldots\ldots cm = \ldots\ldots cm.$$

Porównując wyniki niepewności uzyskane metodą typu B oraz metodą typu A widać, że

.....

.....

.....

4.6. Zapis wyniku pomiaru końcowego

1. Niepewność podajemy z dokładnością do dwóch cyfr znaczących, czyli:

$$u_c(f) = __\ __\ __\ __ \text{ cm.}$$

2. Wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego co niepewność czyli:

$$f = _____ \text{ cm.}$$

3. Zapisujemy wynik końcowy z niepewnością i jednostką, czyli:

$$f = _____ \text{ cm ;} \qquad u_c(f) = __\ __\ __\ __ \text{ cm.}$$

lub

$$f = _____(__) \text{ cm.}$$

Niepewność rozszerzona:

$$U(f) = ku(f)$$

1. k=2 $f = _____(__) \text{ cm ;}$ $U(f) = __\ __\ __\ __ \text{ cm,}$

$$f = (_____ \pm ____) \text{ cm,}$$

2. k=3 $f = _____(__) \text{ cm ;}$ $U(f) = __\ __\ __ \text{ cm.}$

$$f = (____ \pm ___) \text{ cm.}$$

Zagadnienia do kolokwium

1. Zjawisko załamania światła, prawa Sneliusa.
2. Soczewki cienkie skupiające i rozpraszające, obrazy otrzymywane za pomocą soczewki, równanie soczewki, zdolność skupiająca układu soczewek.
3. Opis zestawu doświadczalnego oraz sposobu wykonania doświadczenia w celu wyznaczenia ogniskowej soczewki skupiającej i rozpraszającej.
4. Ocena standardowej niepewności typu A wyznaczenia ogniskowej soczewki w przypadku skorelowanych pomiarów wielkości mierzonych bezpośrednio.
5. Ocena niepewności typu B dla jednego wyniku wyznaczenia ogniskowej soczewki.
6. Zapis wyniku pomiaru wraz z niepewnością.

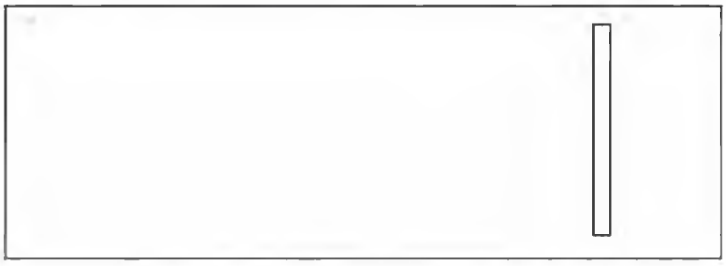
Literatura

1. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, t. 4, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2009.
2. Bobrowski Cz., *Fizyka, krótki kurs*. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2005.
3. Skorko M., *Fizyka, podręcznik dla studentów wyższych technicznych szkół zawodowych dla pracujących*, Warszawa, PWN, 1973.
4. Kubiaczyk A., *Określenie niepewności pomiarów*. [W]: Poradnik do Laboratorium Fizyki Rozdział 1., Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska. Dostępność 30.11.2013r. Strona internetowa: http://www.if.pw.edu.pl/
5. Szydłowski H., *Wydział Fizyki*, Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarów. Postępy Fizyki. t. 51, Zeszyt 2, 2000. Dostępność 4.12.2013r. Strona internetowa: http://www.prz.edu.pl/fizyka/pl/pobieralnia/lab_stud/miedzynarodowe_normy_oceny_niepewnosci_pomiaru.pdf)

5. Wyznaczanie prędkości światła w cieczy

5.1. Zasada ćwiczenia

Na cienkościenną szklankę naklejamy pasek papieru białego (przebitkowego) z wyciętą wąską szczeliną (rys. 36). Wysokość paska odpowiada wysokości szklanki. Długość paska odpowiada obwodowi szklanki plus 1 cm. Szczelina winna mieć położenie pionowe.



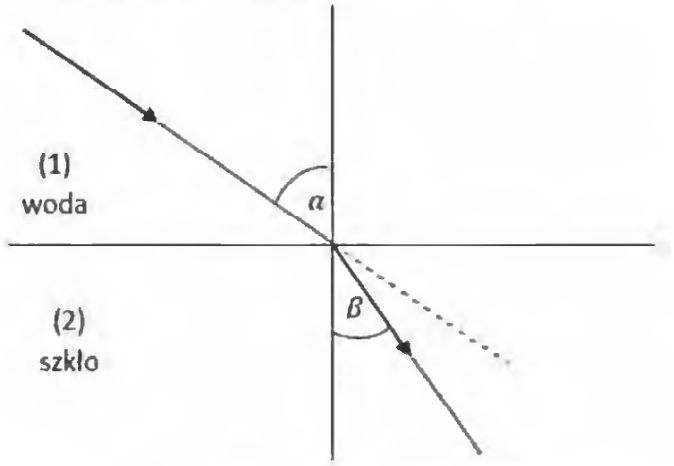
Rys. 36. Pasek papieru z wyciętą szczeliną

Do szklanki nalewamy do połowy wody. Jako źródła światła możemy użyć płomienia świecy. Ustawiamy początkowo szklankę tak, aby źródło światła, szczelina i środek szklanki leżały na jednej prostej. Następnie obracamy szklankę o pewien kąt. Z położenia obrazów szczeliny można wyznaczyć prędkość światła w wodzie, jeżeli znamy prędkość światła w powietrzu (próżni).

5.2. Wiadomości teoretyczne

5.2.1. Zjawisko załamania światła

Niech na powierzchnię rozdzielającą dwa przezroczyste ośrodki (rys. 37) na przykład: wodę – ośrodek 1 i szkło – ośrodek 2, pada równoległa wiązka światła. Prędkość światła w ośrodkach wynosi odpowiednio v_1 oraz v_2. **Promień świetlny** (wąska wiązka światła) z prostą prostopadłą do płaszczyzny padania czyli **prostopadłą padania** tworzy kąt α (α – kąt padania światła). Promień świetlny przechodząc do drugiego ośrodka zmienia kierunek, czyli załamuje się ku prostopadłej padania tworząc z prostopadłą padania kąt $\beta < \alpha$ (β – **kąt załamania światła).** Okazuje się, że promień padający, prostopadła padania oraz promień załamany leżą w jednej płaszczyźnie. Jeżeli zmienimy kąt padania światła, to zmienia się również kąt załamania ale tak, że stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania światła jest dla danych dwóch ośrodków wielkością stałą.



Rys. 37. Przejście światła z wody do szkła

Wielkość tę nazywamy współczynnikiem załamania światła ośrodka drugiego względem pierwszego i oznaczamy symbolem n_{21}.

Mamy więc:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}. \tag{119}$$

Okazuje się, że zachodzi związek:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{120}$$

czyli

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{121}$$

Często wprowadza się pojęcie **bezwzględnego współczynnika załamania światła dla danego ośrodka** jako współczynnika załamania danego ośrodka względem próżni i oznacza literę n.

Oznaczając przez n_1 oraz n_2 bezwzględne współczynniki załamania odpowiednio dla ośrodka pierwszego oraz drugiego, łatwo wykazać, że zachodzi związek:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{122}$$

W sytuacji, gdy światło przechodzi z ośrodka o mniejszym współczynniku załamania do ośrodka o większym współczynniku załamania to mówimy, że przechodzi z ośrodka optycznie rzadszego do ośrodka optycznie gęstszego.

Bezwzględny współczynnik załamania światla dla powietrza jest niewiele większy od jedności, na przykład w temperaturze 20°C i przy ciśnieniu 760 mm Hg wynosi on 1,0003, dlatego współczynnik załamania danego ośrodka względem powietrza jest praktycznie równy współczynnikowi bezwzględnemu.

Porównując wzory (121) i (122) otrzymujemy kolejne prawo załamania światła wyrażone wzorem:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \tag{123}$$

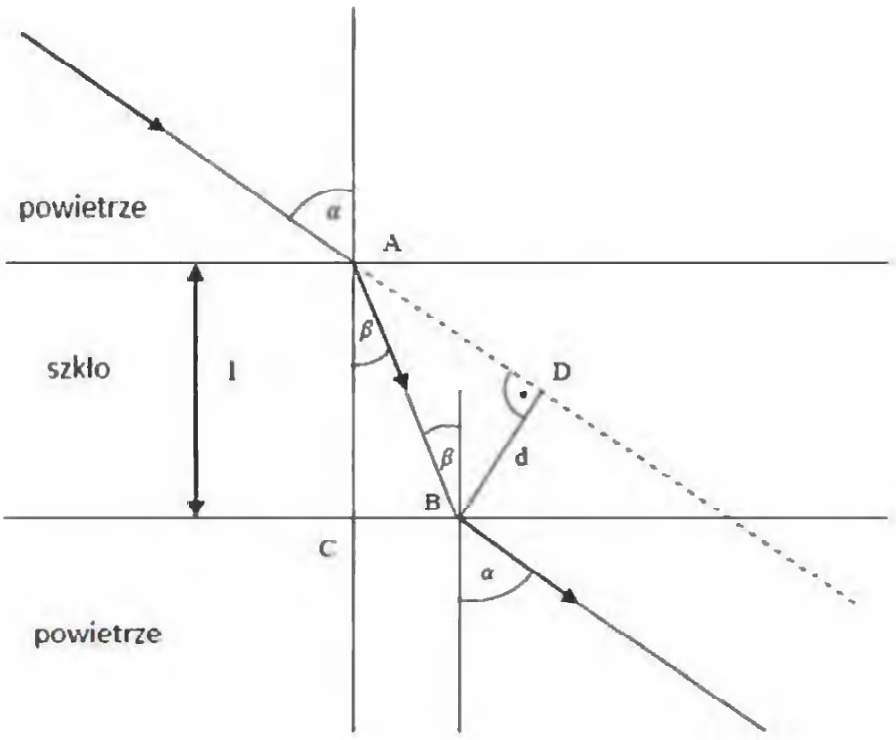
lub

$$n_1 v_1 = n_2 v_2. \tag{124}$$

Przedstawione prawa załamania światła noszą nazwę praw **Sneliusa**.

5.2.2. Przejście światła z powietrza przez szklaną płytkę równoległościenną do powietrza

Promień światła biegnąc w powietrzu pada na szklaną płytkę równoległościenną o grubości l pod katem α i załamuje się na pierwszej płaszczyźnie rozgraniczającej ośrodki pod kątem β (rys. 38).



Rys. 38. Przejście światła przez szklaną płytkę równoległościenną

Promień biegnie w szkle, a następnie pada na drugą płaszczyznę również pod kątem β przechodząc do powietrza po załamaniu się od prostopadłej padania pod kątem α.

W wyniku dwukrotnego załamania promień ulega równoległemu przesunięciu o:

$$d = AB \cdot \sin(\alpha - \beta). \tag{125}$$

Z trójkąta prostokątnego ABC mamy:

$$AB = \frac{l}{cos\beta}. \tag{126}$$

Wzór (125) po uwzględnieniu wzoru (126) przyjmuje postać:

$$d = \frac{l}{cos\beta} \cdot \sin(\alpha - \beta). \tag{127}$$

Wykorzystując wzór na sinus różnicy kątów:

$$\sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta, \tag{128}$$

wzór (127) przyjmuje postać:

$$d = \frac{l}{cos\beta}[sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta]. \tag{129}$$

Wzór (129) po przekształceniu otrzymuje postać:

$$d = l\left[sin\alpha - \frac{cos\alpha \cdot sin\beta}{cos\beta}\right] \tag{130}$$

lub

$$d = l\left[sin\alpha - \frac{cos\alpha \cdot sin\beta}{\sqrt{1-sin^2\beta}}\right]. \tag{131}$$

Wykorzystujemy prawo załamania światła:

$$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = n \tag{132}$$

w celu wyeliminowania sin β *ze wzoru* (131) i otrzymamy:

$$d = l\left[sin\alpha - \frac{cos\alpha \cdot sin\alpha}{n\sqrt{1-\frac{sin^2\alpha}{n^2}}}\right]. \tag{133}$$

Ostatecznie wzór na równoległe przesunięcie promienia światła w wyniku przejścia przez płytkę przyjmuje postać:

$$d = l \cdot sin\alpha\left[1 - \frac{cos\alpha}{\sqrt{n^2-sin^2\alpha}}\right]. \tag{134}$$

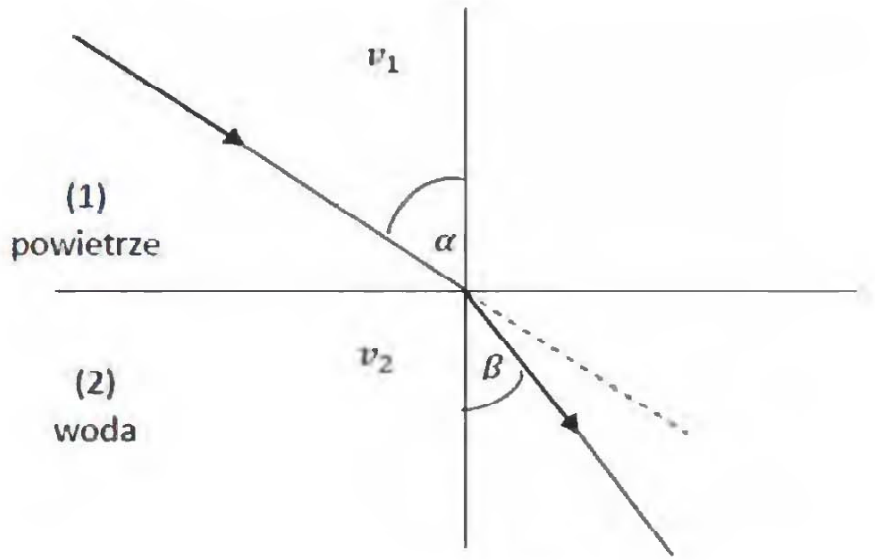
W sytuacji, gdy płytka jest cienka, czyli $l = 0$, to promień świetlny przechodzi przez płytkę bez przesunięcia.

5.2.3. Przejście światła z powietrza do wody oddzielonych szklaną płytką równoległościenną

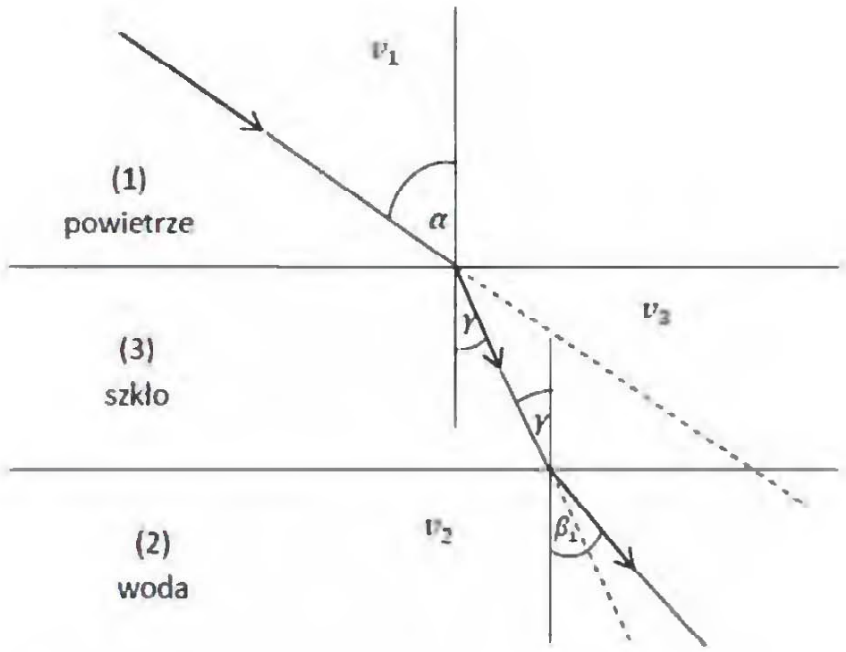
Określmy współczynnik załamania wody względem powietrza w dwóch sytuacjach, mianowicie gdy:

a) Światło przechodzi bezpośrednio z powietrza do wody (rys. 39)

b) Światło przechodzi z powietrza do wody poprzez szklaną płytkę równoległościenną (rys. 40)



Rys. 39. Światło przechodzi bezpośrednio z powietrza do wody



Rys. 40. Światło przechodzi z powietrza do wody poprzez szklaną płytkę równoległościenną

Współczynnik załamania światła dla wody względem powietrza (rys. 39) wynosi:

$$n_{21} = \frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{135}$$

Współczynnik załamania światła dla szkła względem powietrza (rys. 40) wynosi:

$$n_{31} = \frac{sin\alpha}{sin\gamma} = \frac{v_1}{v_3}. \tag{136}$$

Współczynnik załamania wody względem szkła (rys. 40) wynosi:

$$n_{23} = \frac{sin\gamma}{sin\beta_1} = \frac{v_3}{v_2}. \tag{137}$$

Ze wzoru (136) obliczamy:

$$v_1 = v_3 \frac{sin\alpha,}{sin\gamma}, \tag{138}$$

natomiast ze wzoru (137) obliczamy:

$$v_2 = v_3 \frac{sin\beta_1}{sin\gamma}. \tag{139}$$

Dzieląc (138) przez (139) otrzymujemy:

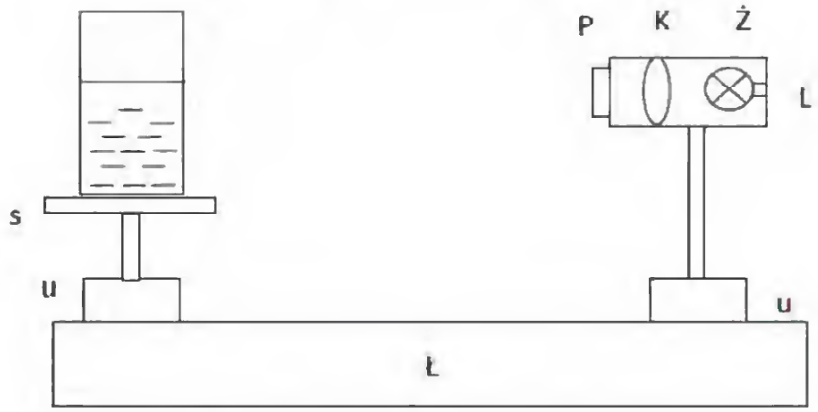
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{sin\alpha}{sin\beta_1}. \tag{140}$$

Porównując (140) z (135) widać, że $sin\beta_1 = sin\beta$, wobec tego $\beta_1 = \beta$.

Oznacza to, że zmiana kierunku biegu promienia świetlnego w wyniku dwukrotnego załamania przy przejściu światła z powietrza przez szklaną płytkę równoległościenną do wody jest taka sama jak podczas bezpośredniego przejścia światła z powietrza do wody. Wystąpi jednak przesunięcie promienia zależne od grubości płytki.

5.3. Opis zestawu doświadczalnego oraz uzasadnienie sposobu postępowania w celu wyznaczenia prędkości światła

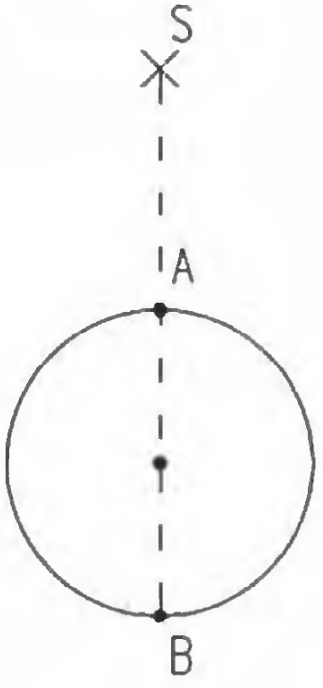
Na ławie optycznej ***(Ł)*** umieszczamy w odpowiednim uchwycie ***(u)*** stolik ***(S)***, na którym stawiamy, opisaną w punkcie 5.1 oklejoną paskiem papieru z pionową szczeliną, szklankę napełnioną do połowy wysokości cieczą, np. wodą (rys. 41).



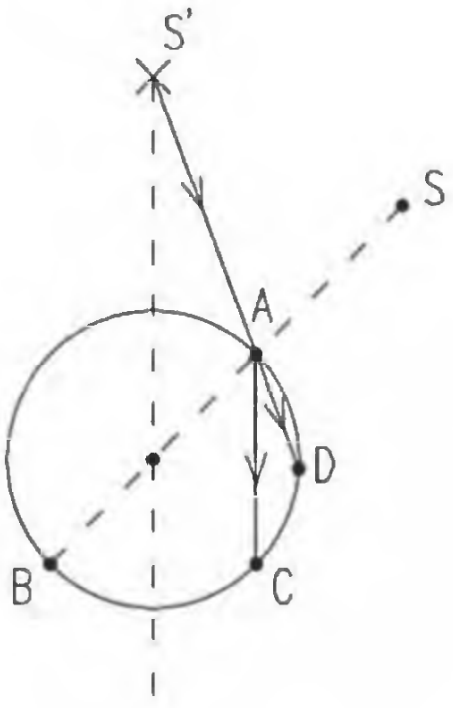
Rys. 41. Rozmieszczenie elementów na ławie optycznej

W odległości około 40 cm od szklanki umieszczamy lampkę świetlną ***L*** zawierającą żarówkę ***(ż)***, soczewkę kolimującą ***(K)*** strumień świetlny w równoległą wiązkę oraz płytkę ***(P)*** ze szczeliną.

W sytuacji, gdy ustawimy szklankę tak, aby źródło światła ***S***, szczelina ***A*** na pasku papieru i środek szklanki leżały na jednej prostej, to otrzymujemy po drugiej stronie szklanki jeden obraz ***B*** szczeliny A (rys. 42). W tym położeniu źródła wiązka światła nie ulega załamaniu w wodzie, gdyż kąt padania na szklankę jest równy zeru ($\alpha = 0$). Położenie obrazu ***B*** szczeliny zaznaczamy ołówkiem na pasku papieru, którym oklejona jest szklanka.



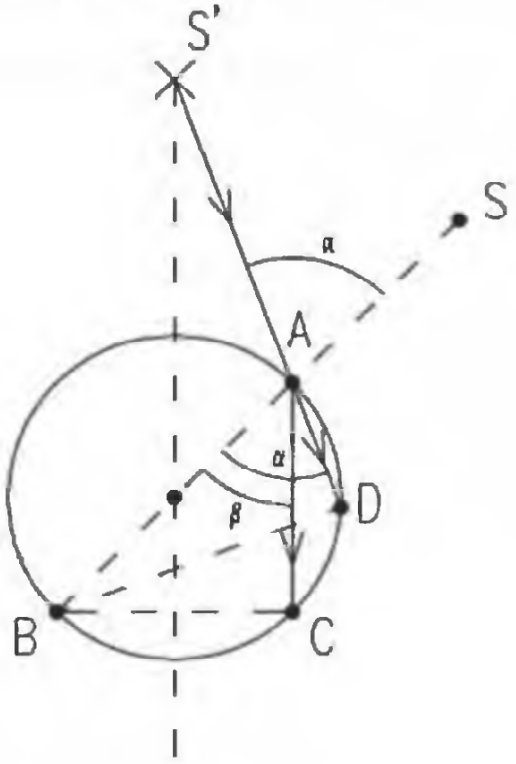
Rys. 42. Pierwsze położenie szklanki



Rys. 43. Drugie położenie szklanki

Obracamy szklankę o pewien kąt (rys. 43). Ponieważ grubość szklanki jest mała w stosunku do promienia wewnętrznego oraz zewnętrznego, czyli $r_1 \approx r_2 = r$, to opis przejścia światła z powietrza przez ściankę szklanki do wody sprowadza się do opisu bezpośredniego przejścia światła z powietrza do wody ograniczonej powierzchnią boczną walca. Po wspomnianym wyżej obrocie szklanki o pewien kąt obraz szczeliny rozdwoi się, to jest zobaczymy dwa ślady świetlne, gdyż obecnie część wiązki świetlnej biegnie ze źródła przez górną część szklanki czyli przez powietrze, a część załamuje się w wodzie. Zaznaczamy położenie śladów podobnie jak poprzednio.

W pierwszym położeniu szklanki wiązka światła biegnie w kierunku SAB, w drugim zaś część wiązki biegnie w kierunku S′AD, a część w kierunku S′AC. Kreślimy kąt padania w powietrzu S′AS (SB jest normalną w punkcie A) i kąt załamania w wodzie BAC (rys. 44).



Rys. 44. . Drugie położenie szklanki; kąt padania światła α oraz kąt załamania światła β

Współczynnik załamania wody względem powietrza wynosi:

$$n = \frac{sin\alpha}{sin\beta}. \tag{141}$$

Z trójkąta prostokątnego BAD, wpisanego w okrąg i opartego na średnicy, mamy:

$$sin\alpha = \frac{BD}{2r}. \tag{142}$$

Podobnie z trójkąta prostokątnego BAC otrzymujemy:

$$sin\beta = \frac{BC}{2r}. \tag{143}$$

Podstawiając do wzoru (141) wyrażenia (142) i (143) otrzymujemy:

$$n = \frac{BD}{BC}. \tag{144}$$

Wykorzystujemy związek współczynnika załamania wody względem powietrza z prędkością światła w powietrzu (próżni) c oraz w wodzie v:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{145}$$

Po przyrównaniu prawych stron związków (144) oraz (145) otrzymujemy:

$$\frac{c}{v} = \frac{BD}{BC} \tag{146}$$

stąd

$$v = c\frac{BC}{BD}. \tag{147}$$

Oznaczamy dla prostoty długość cięciwy BC literą $\boldsymbol{w}$, natomiast długość cięciwy BD literą $\boldsymbol{p}$.

Mamy wtedy:

$$v = c\frac{w}{p}. \tag{148}$$

Wyznaczanie prędkości światła w wodzie sprowadza się do bezpośredniego pomiaru długości dwóch cięciw w i p oraz znajomości prędkości światła w powietrzu (próżni). Prędkość światła w próżni przyjmujemy jako

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

5.4. Wykonanie doświadczenia, tabela wyników pomiarów

W celu wyznaczenia prędkości światła w wodzie, za pomocą prostej metody przedstawionej w punkcie pierwszym opracowania, należy w jednym doświadczeniu dokonać bezpośredniego pomiaru długości dwóch cięciw BC oraz BD, czyli w oraz p. Wykonujemy je za pomocą szczęk zewnętrznych suwmiarki z dokładnością do 0,1 mm.

Pomiary należy powtórzyć dla różnych wartości kątów padania światła po obrocie szklanki z wodą o pewien kąt. Wyniki pomiarów, których jest n, wpisujemy do tabeli 10.

Tabela 10. Wyniki pomiarów

Lp.	$BC = w$ (mm)	$BD = p$ (mm)	$\frac{w}{p}$	$v = c \cdot \frac{w}{p}$ $\left(\frac{km}{s}\right)$	$\bar{v} = \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w}{p}\right)_i$ $\left(\frac{km}{s}\right)$
1	2	3	4	5	6
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

5.5. Analiza wyników pomiaru prędkości światła w wodzie

Pomiar prędkości światła w wodzie jest pomiarem pośrednim i polega na bezpośrednim pomiarze dwóch cięciw za pomocą zewnętrznych szczęk suwmiarki z dokładnością do 0,1mm. Pomiary obu cięciw wykonywane są w jednym doświadczeniu, a więc są pomiarami skorelowanymi.

W takiej sytuacji ze względu na bardzo skomplikowane obliczenia złożonej niepewności standardowej wielkości wyznaczanej (mierzonej pośrednio przy skorelowanych pomiarach wielkości mierzonych bezpośrednio), w pracowniach studenckich wygodniej jest postępować następująco [5, s. 96] oraz [4, s. 6]:

Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich K wielkości $x_{K,i}$ uzyskanych w i- tym pomiarze

$$y_i = f(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \ldots x_{k,i}, \ldots x_{K,i}).$$

Seria wyników y_i, uzyskanych w n pomiarach, stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_c(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}.$$

Seria wyników pomiaru $v_i = c\left(\frac{w}{p}\right)_i$, uzyskanych w n pomiarach stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmujemy, że wynikiem pomiaru pośredniego jest:

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_c(v) \equiv u_c\left(c\frac{w}{p}\right) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (v_i - \bar{v})^2}.$$

Tabela 11. Analiza wyników pomiaru prędkości światła w wodzie

Lp.	$v_i - \bar{v}$ $\left(\frac{km}{s}\right)$	$(v_i - \bar{v})^2$ $\left(\frac{km^2}{s^2}\right)$	$\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2$ $\left(\frac{km^2}{s^2}\right)$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2}{n-1}$ $\left(\frac{km^2}{s^2}\right)$	S_v $\left(\frac{km}{s}\right)$	$S_{\bar{v}}$ $\left(\frac{km}{s}\right)$
1	2	3	4	5	6	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

S_v – odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru prędkości rozchodzenia światła w wodzie od wartości średniej

$$S_v = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2},$$

$S_{\bar{v}} = \frac{S_v}{\sqrt{n}}$ – odchylenie standardowe wyniku pomiaru prędkości rozchodzenia światła w wodzie (odchylenie średniej arytmetycznej od prędkości najbardziej prawdopodobnej)

$$S_{\bar{v}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2}\,.$$

W przypadku „ubogich" serii pomiarowych (n<11) niepewność standardową pomiarów bezpośrednich obliczamy ze wzoru

$$u(x) = t_n\sqrt{S_{\bar{x}}^2} = t_n\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

Parametr t_n zależy zarówno od liczności serii pomiarowej (ściślej: tzw. liczby stopni swobody) jak również przyjętego tzw. poziomu ufności.

Wartość parametru t-Studenta dla poziomu ufności równego 0,683 wynosi:

n	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
t_n	*1,11*	*1,09*	*1,08*	*1,07*	*1,06*	*1,05*

Wykonano serię n=9 pomiarów. W takiej sytuacji przy obliczaniu standardowej niepewności pomiaru prędkości światła w wodzie uwzględniamy wartość pomiaru t_9-Studenta, który dla poziomu ufności 0,683 wynosi $t_9 = 1{,}07$.

Niepewność standardowa pomiaru prędkości światła w wodzie po uwzględnieniu parametru t_9-Studenta wynosi

$$u(v) = t_9 \cdot S_{\bar{v}} = 1.07 \cdot ____ \frac{km}{s} = ____ \frac{km}{s} = ____ \frac{km}{s}.$$

5.6. Zapis wyniku pomiaru prędkości światła w wodzie

Zapisujemy wynik pomiaru prędkości światła w wodzie:

1. Zapis słowny:

   Prędkość światła w wodzie jest równa _ _ _ _ _ _ _ $\frac{km}{s}$ z niepewnością _ _ _ _ $\frac{km}{s}$

2. Zapis przy użyciu symboli:

$$v = _____\ \frac{km}{s}; \qquad u(v) = ____\ \frac{km}{s}.$$

3. Zapis skrócony:

$$v = _____(____)\frac{km}{s}.$$

Zagadnienia do kolokwium

1. Zjawisko załamania światła, prawa Sneliusa.
2. Przejście światła przez szklaną płytkę równoległościenną:
   - z powietrza przez szkło do powietrza
   - z powietrza przez szkło do wody.
3. Opis zestawu doświadczalnego oraz uzasadnienie sposobu postępowania w celu wyznaczenia prędkości światła w cieczy.
4. Ocena standardowej niepewności pośredniego pomiaru prędkości światła w cieczy w przypadku skorelowanych pomiarów wielkości mierzonych bezpośrednio oraz mało licznej serii pomiarowej.
5. Zapis wyniku pomiaru wraz z niepewnością.

Literatura

1. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, t.4, Warszawa, PWN, 2009.
2. Bobrowski Cz., *Fizyka, krótki kurs*. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2005.
3. Skorko M., Fizyka, podręcznik dla studentów wyższych technicznych szkół zawodowych dla pracujących, Warszawa, PWN, 1973.
4. *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP). Nowe normy międzynarodowe.* Dostępność: 9.12.2013r. Strona internetowa: www.pj.ifd.uni.wroc.pl/pliki/ONP.pdf
5. Szydłowski H., *Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarów. Postępy Fizyki*, tom 51, zeszyt 2, 2000.

6. Wyznaczanie wartości ładunku elementarnego metodą Millikana

6.1. Cel ćwiczenia

Doświadczenie z wyznaczeniem ładunku elementarnego jest próbą powtórzenia eksperymentu, za który jego autor dostał nagrodę Nobla! Robert Andrews Millikan, on właśnie był tym noblistą, był młodzieńcem, który nie zdradzał zainteresowania naukami ścisłymi. W szkole średniej uznał nawet naukę fizyki za stratę czasu, chociaż podjął się prowadzenia kursu przygotowawczego z fizyki dla kolegów. Od tego momentu zaczęła się jego przygoda z fizyką, która zaowocowała aż tak wielkim wyróżnieniem. Millikan wykazał ziarnistość ładunku i wyznaczył najmniejszą jego wartość. Teraz Ty, możesz przez 3 godziny trwania laboratorium zabawić się w „detektywa" i znaleźć wartość najmniejszego ładunku elektrycznego, który jak zapewne wiesz, wynosi bardzo mało, bo tylko:

$$\mathbf{e=1{,}6\cdot 10^{-19}\ C,\ tzn.\ e = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 16\ C.}$$

Wartość ta wydaje się tak mała, że nasuwa się pytanie, czy jest w ogóle możliwe jej wyznaczenie. Idea doświadczenia polegała na wytworzeniu za pomocą precyzyjnego rozpylacza mikroskopijnych kropelek oliwy, które na skutek tarcia o powietrze i ścianki dyszy rozpylacza, ładowały się ładunkiem elektrycznym. Spadały one swobodnie przez otwór w górnej płytce poziomego kondensatora pod wpływem siły ciężkości, ale w trakcie ich ruchu działała także siła oporu powietrza (zgodnie ze wzorem Stokes'a), oraz siła wyporu. W sytuacji gdy zostanie przyłożone odpowiednie napięcie elektryczne na płytki kondensatora, możemy spowodować, że kropelka będzie się ostatecznie poruszać ruchem jednostajnym prostoliniowym. Między okładkami naładowanego kondensatora istnieje jednorodne pole elektryczne, w którym na umieszczony ładunek działa stała siła równa co do wartości: $F = q \cdot E$. Obserwacje i pomiary trzeba wykonać zarówno dla kropelek poruszających się w dół, jak i do góry, co uzyskuje się przez zmianę zwrotu natężenia pola elektrycznego w kondensatorze, czyli znaku napięcia elektrycznego na płytkach kondensatora. Szybkość poruszania się kropel wyznacza się mierząc drogę oraz czas przebycia ustalonej drogi obserwowanej pośrednio na tle skali okularu (np. 30 działek). Obliczając z odpowiednich wzorów ładunek na poszczególnych kropelkach, można zauważyć, że są one wielokrotnością pewnej stałej liczby równej wartości ładunku **e**, oczywiście w granicach niepewności pomiarowych, które po obliczeniach ładunku trzeba będzie oszacować. Naelektryzowane kropelki oliwy mogą mieć ładunek równy pojedynczemu ładunkowi elementarnemu e lub jego wielokrotności, czyli ładunek jest wielkością skwantowaną, jak to wykazał Millikan w swoim noblowskim eksperymencie.

6.2. Wiadomości teoretyczne

6.2.1. Pojęcie ładunku elektrycznego

Ładunek elektryczny obok pojęcia masy, jedną z właściwością cząstek elementarnych np. elektronu czy pozytonu. Ładunek elektryczny ciała naelektryzowanego to ładunek tworzących je cząstek elementarnych. Oddziaływanie ciał naelektryzowanych spoczywających w pewnym układzie odniesienia odbywa się poprzez pole elektryczne zwane polem elektrostatycznym.

Istnieją dwa rodzaje ładunku elektrycznego, które historycznie zostały nazwane ładunkiem dodatnim (ładunek protonu) oraz ujemnym (ładunek elektronu).

Ładunki elektryczne ciał są skwantowane. Oznacza to, że ładunek każdego obiektu jest zawsze całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego ***e***, czyli $q = ne$, przy czym: $n = +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots$ oraz $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$C.

Kwarki maja ładunek ułamkowy równy: -1/3 lub +2/3 ładunku elementarnego, a antycząstki posiadają ładunek o znaku przeciwnym. Kwarki nigdy jednak nie występują osobno, lecz zawsze tworzą układy złożone, których łączny ładunek jest sumą ładunków kwarków składowych, w ten sposób cząstki mają ładunek całkowity.

Masa i ładunek elektryczny, jak wspomniano wcześniej są właściwościami cząstek. Często używa się skrótowego pojęcia *ładunek elektryczny* dla ciała obdarzonego ładunkiem elektrycznym. Uporządkowany ruch ładunków elektrycznych nazywany jest prądem elektrycznym.

1C [kulomb] jest jednostką ładunku, który przepływa przez poprzeczny przekrój przewodnika w czasie 1s, gdy przez przewodnik płynie prąd o natężeniu 1A [ampera]. Jest to bardzo duża wartość ładunku, skoro zgodnie z prawem Coulomba ładunek ten działa na drugi o tej samej wartości 1C, siłą $F=10^9$ N z odległości 1m w próżni.

1C jest równy około $6{,}24 \cdot 10^{18}$ ładunków elementarnych

Wyróżniamy: ładunek punktowy i rozciągły.

Ładunek punktowy to wyidealizowany model: ciało o nieskończenie małych rozmiarach zawierające ładunek elektryczny. W rzeczywistości ciała naładowane są rozciągłe, ale model ten jest użyteczny i dobrze opisuje oddziaływanie naładowanych ciał, gdy odległość między naładowanymi ciałami jest znacznie większa od rozmiarów tych ciał, lub ładunki mają symetrię sferyczną.

Jednorodnie naladowane sfery oddziałują tak, jakby cały ich ładunek był skupiony w geometrycznym środku sfery. Wewnątrz takiego ładunku sferycznego pole elektryczne zanika (natężenie pola elektrycznego jest równe zeru).

6.2.2. Zasada zachowania ładunku

„Ładunek nie ginie i nie powstaje z niczego, jest przekazywany z jednego ciała do drugiego, tak, jak np. podczas pocierania pręta szklanego o sukno. Stwierdził to już Benjamin Franklin w XVIII wieku. Hipoteza, że **„całkowita suma ładunków w układzie zamkniętym jest stała"**, została potwierdzona licznymi eksperymentami i zasadę zachowania ładunku (elektrycznego) potwierdza także fizyka współczesna w rozpadach promieniotwórczych, czy np. w procesie anihilacji elektronu i pozytonu:

$$e^- + e^+ = \gamma + \gamma$$

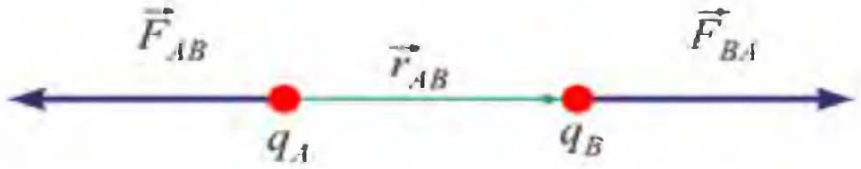
Oznacza to w praktyce, że zmiana ładunku elektrycznego układu musi być rezultatem wymiany ładunku z otoczeniem. Elektryzowanie ciał polega na rozdzieleniu istniejących już ładunków. Jeżeli zaś w jakimś procesie fizycznym powstaje ładunek, zawsze towarzyszy mu wytworzenie ładunku o przeciwnym znaku, takiego samego co do wartości bezwzględnej.

Z zasady zachowania ładunku wynika, że całkowity ładunek obecny we wszechświecie jest stały, ale nie daje ona odpowiedzi na pytanie, jaka jest wartość tego ładunku. Nie zaobserwowano jednak żadnych zjawisk, które mogłyby świadczyć o tym, że jest różny od zera.

Mierzalna wartość ładunku jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Oznacza to, że ruch cząstki nie ma wpływu na wartość jej ładunku. Jest to **relatywistyczna niezmienniczość ładunku.**

6.2.3. Pole elektrostatyczne

Koncepcję pola elektrycznego wprowadził Michael Faraday (w połowie XIX wieku) jako pojęcie służące do opisu oddziaływania na odległość ładunków elektrycznych.



Rys. 45. Prawo Coulomba: siła $\vec{F}_{BA}$ jest siłą działającą na ładunek B ze strony ładunku A oraz siła $\vec{F}_{AB}$ to siła działająca na ładunek A ze strony ładunku B

Z **prawa Coulomba** wiadomo, że siła oddziaływania elektrostatycznego co do wartości jest wprost proporcjonalna do iloczynu ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi:

$$F = k\frac{q_A \cdot q_B}{r^2},$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności i w próżni wynosi $8{,}9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2.

Faraday wprowadził pojęcie pola właśnie z uwagi na trudność wyobrażenia sobie oddziaływania ładunków na odległość. Pole przenosi w przestrzeni oddziaływanie ładunku na ładunek. Definiuje się więc **pole elektrostatyczne jako właściwość przestrzeni polegającą na tym, że jeśli w tej przestrzeni umieścimy ładunek elektryczny i działa na ten ładunek siła elektryczna, to w obszarze tym istnieje pole elektrostatyczne.**

Pole elektrostatyczne jest obrazowane przez **linie pola**, są to linie, **do których styczne w każdym punkcie mają kierunek zgodny z kierunkiem sił elektrostatycznych. Zwrot linii pola jest zgodny ze zwrotem sił elektrostatycznych działających na ładunki próbne, czyli na ładunki dodatnie, tak małe, że swym istnieniem po wprowadzeniu do pola nie zakłócają pola wytworzonego przez ładunki źródłowe, czyli ładunek ten nie może zmieniać rozkładu ładunków w otaczającej go przestrzeni.**

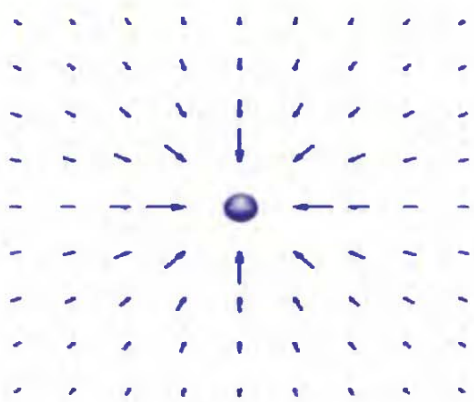
6.2.4. Właściwości pola elektrostatycznego

Wyróżnia się trzy podstawowe właściwości pola elektrostatycznego:

- **Zasada superpozycji,** która mówi, że w ośrodkach jednorodnych i anizotropowych natężenie pochodzące od kilku pól elektrycznych jest wektorową sumą natężeń, jakie wytwarza każde z tych pól oddzielnie.
- **Zachowawczość pola elektrostatycznego**
  - Pole elektrostatyczne jest zachowawcze, gdy praca wykonana przy przesunięciu ładunku w tym polu na drodze zamkniętej jest równa zeru.
  - Wynikiem zachowawczości pola elektrycznego jest jego potencjalność, czyli istnienie energii potencjalnej i potencjału oraz bezwirowość. Obie te cechy są matematycznie równoważne z zachowawczością.
- **Źródłowość pola elektrycznego,** które mówi, że pole elektryczne wytworzone przez ładunki elektryczne jest polem źródłowym, linie tego pola rozpoczynają się i kończą na ładunkach. Matematycznym wyrazem źródłowości pola elektrycznego jest prawo Gaussa.

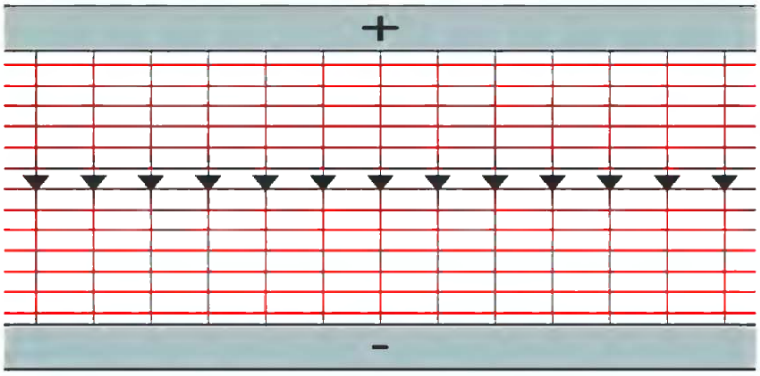
Szczególne konfiguracje pola elektrostatycznego

Przykładem pola elektrostatycznego centralnego jest pole wytworzone przez spoczywający ładunek punktowy (rys. 46).



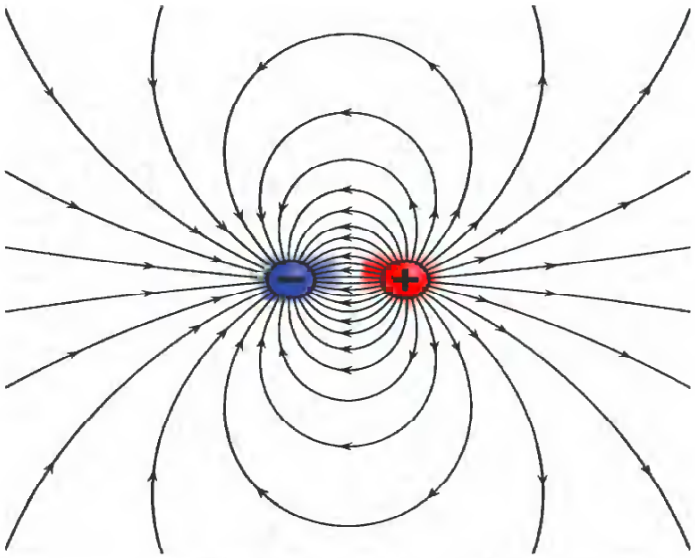
Rys. 46. Pole elektrostatyczne centralne wytworzone przez ładunek punktowy ujemny
[dla ładunku dodatniego – zwrot przeciwny]

Przykładem pola elektrostatycznego jednorodnego jest pole wytworzone przez ładunki na płytkach naładowanego kondensatora płaskiego (rys.47). Linie pola wychodzą od ładunku dodatniego, a kończą się na ładunkach ujemnych. Powierzchnie prostopadłe do tych linii są to powierzchnie równego potencjału, zwane ekwipotencjalnymi.



Rys. 47. Pole elektrostatyczne jednorodne wewnątrz kondensatora

Przykładem pola, w którym następuje superpozycja pól pochodzących od dwóch ładunków punktowych jest pole pochodzące od dipola elektrycznego (rys.48).



Rys. 48. Pole elektrostatyczne pochodzące od dipola

6.2.5. Wielkości charakteryzujące pole elektrostatyczne

- **Natężenie pola elektrycznego**

Natężenie pola elektrostatycznego jest podstawową wielkością opisującą pole elektryczne. Jest to wielkość wektorowa $\vec{E}$, zdefiniowana w danym punkcie pola jako stosunek siły $\vec{F}$ wywieranej przez pole na ładunek próbny q, umieszczony w danym punkcie pola, do wartości tego ładunku q:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Dla pola centralnego można za wartość F podstawić siłę z prawa Coulomba:

$$F = k\frac{q_A \cdot q_B}{r^2}$$

i otrzymamy:

$$E = k\frac{q_A}{r^2},$$

gdzie q_A jest ładunkiem źródłowym, wytwarzającym dane pole elektrostatyczne centralne. Wzór ten nie jest prawdziwy w polu elektrostatycznym jednorodnym.

Ładunek q, za pomocą którego określa się pole, musi być na tyle mały, by nie zmieniać rozkładu ładunków w otaczającej go przestrzeni.

- **Potencjał pola elektrycznego**

Inną wielkością opisującą pole elektrostatyczne jest potencjał pola elektrostatycznego. Potencjał jest wielkością skalarną **V**, zdefiniowaną w każdym punkcie pola elektrycznego jako stosunek energii potencjalnej elektrostatycznej E_p ładunku próbnego q umieszczonego w tym punkcie do wartości tego ładunku q:

$$V = \frac{E_p}{q}$$

Jednostką potencjału pola elektrostatycznego jest 1V. Pole elektrostatyczne ma potencjał w danym punkcie równy 1V, gdy jednostkowy ładunek tam umieszczony (1C), ma energię potencjalną elektrostatyczną równą 1J.

- **Związek między natężeniem pola elektrostatycznego, a potencjałem**

Można pokazać związek pomiędzy wielkościami fizycznymi opisującymi dane pole elektrostatyczne, czyli między wektorową wielkością natężenia pola elektrostatycznego, a skalarną, jakim jest potencjałem.

Związek ten wyraża się wzorem:

$$\vec{E} = -grad\, V, \tag{149}$$

gdzie: *grad V* (czytaj gradient potencjału) równa się:

$$grad\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}, \tag{150}$$

natomiast wektor natężenia pola wyrażony w zależności od współrzędnych przedstawia się następująco:

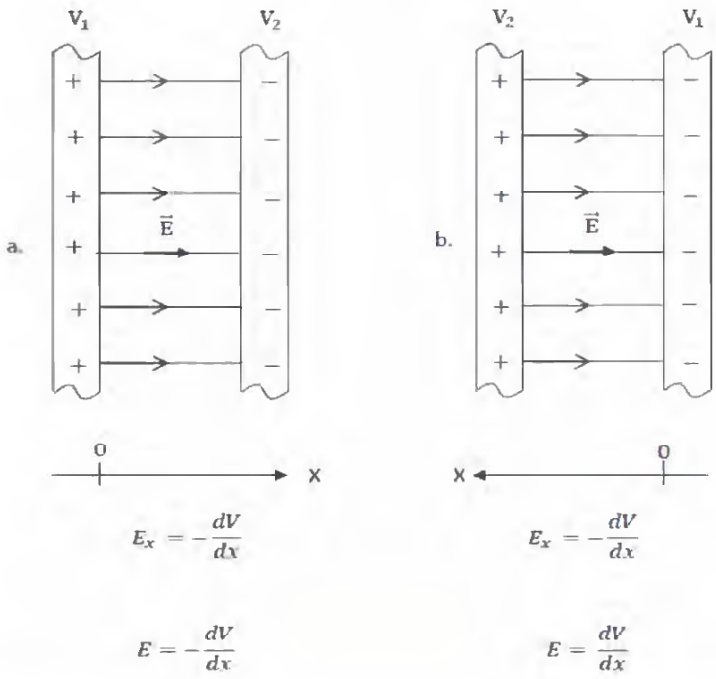
$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \tag{151}$$

gdzie E_x, E_y, E_z są współrzędnymi wektora $\vec{E}$ wzdłuż osi x, y, z odpowiednio.

Porównując z równania (150) i (151) składowe obu wektorów widać, że współrzędne wektora $\vec{E}$ są równe minus pochodnym potencjału elektrycznego po współrzędnych x, y, z.

W szczególnym przypadku jednorodnego pola elektrycznego między okładkami naładowanego kondensatora (rys. 49) można napisać, że współrzędna natężenia pola elektrostatycznego mimo usytuowania przeciwnie osi, dla obu przypadków a) i b) wynosi:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$



$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad E_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$E = -\frac{dV}{dx} \qquad E = \frac{dV}{dx}$$

Rys. 49. Ilustracja obrazująca związek między natężeniem pola elektrostatycznego, a różnicą potencjałów

Wartość natężenia pola elektrostatycznego równa jest zmianie potencjału przypadającej na jednostkę odległości między dwoma punktami leżącymi na linii pola, mianowicie ubytkowi potencjału, jeśli idziemy w stronę malejącego potencjału, czyli zgodnie ze zwrotem linii pola oraz przyrostowi potencjału, jeśli idziemy w stronę wzrastającego potencjału, czyli przeciwnie do zwrotu linii pola elektrostatycznego.

- **Energia pola elektrycznego**

W polu elektrycznym zgromadzona jest energia. Jest ona równa pracy potrzebnej do utworzenia układu ładunków wytwarzających dane pole elektryczne, można więc stwierdzić, że energia potencjalna układu ładunków jest równoważna energii w wytworzonym przez nie polu elektrycznym.

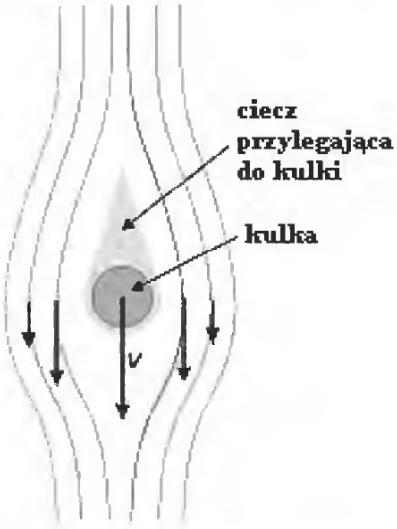
6.2.6 Ruch cząstki w ośrodku lepkim

Podczas ruchu ciał w ośrodkach lepkich, wskutek oddziaływań międzycząsteczkowych, ciało unosi warstwę cieczy przylegającą do niego, ta natomiast wprawia w ruch następne warstwy cieczy (rys. 50). Występuje w ośrodku gradient prędkości prostopadły do kierunku ruchu ciała. Zjawisko to jest czynnikiem hamującym i określane jest jako tarcie wewnętrzne, bądź **lepkość.**

Jeśli prędkość kulki jest wystarczająco mała (przepływ jest laminarny) możemy użyć równania Stokes'a do obliczenia siły tarcia wewnętrznego, czyli siły oporu działającej na kulkę. Wartość tej siły wynosi:

$$F_{St} = 6\pi\eta r v \tag{152}$$

gdzie: r – promień kulki, v – prędkość kulki, η – współczynnik lepkości.



Rys. 50. Kulka spadająca wewnątrz cieczy z prędkością v pod wpływem siły wypadkowej grawitacji, siły oporu ośrodka i siły wyporu

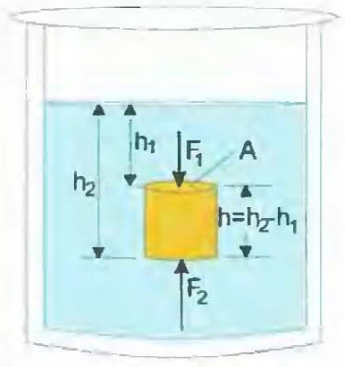
6.2.7. Siła wyporu działająca na ciało w cieczy i gazie

Na opadająca kulkę oprócz siły oporu ośrodka działają też inne siły – siła ciężkości o wartości:

$$F_G = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_m g$$

gdzie ϱ_m to gęstość materiału kulki,

Siła wyporu ośrodka, związana jest ze wzrostem ciśnienia hydrostatycznego wraz z głębokością. Tak więc ciśnienie wywierane na dolną powierzchnię obiektu zanurzonego w płynie jest większe niż ciśnienie wywierane na górną powierzchnię obiektu (rys. 51).



Rys. 51. Siły parcia F_1 i F_2 dadzą wypadkową siłę wyporu skierowaną do góry F_B

Rozważaną sytuację przedstawiono dla walca o wysokości h i powierzchni podstawy A, zanurzonego całkowicie w płynie o gęstości ρ_p . Płyn wywiera ciśnienie $p_1 = \rho_p g h_1$ na powierzchnię górną walca. Siła parcia działająca na górną podstawę walca jest równa:

$$F_1 = p_1 A = \rho_p g h_1 A$$

i jest skierowana w dół.

Podobnie płyn działa siłą parcia skierowaną w górę na dolną podstawę walca, równą:

$$F_2 = p_2 A = \rho_p g h_2 A .$$

Wypadkowa siła działająca na zanurzony walec, jest to siła wyporu F_B, działająca w górę i równa co do wartości ciężarowi wypartej cieczy (prawo Archimedesa), opisana równaniem:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 \tag{153}$$

jej wartość:

$$F_B = \rho_p g A(h_2 - h_1) = \rho_p g A h = \rho_p g V$$

Jeśli weźmiemy metalową kulkę zanurzoną w cieczy, siła wyporu jest następująca:

$$F_B = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g \tag{154}$$

Początkowo, gdy kulka metalowa wpada przez lejek do cieczy jej prędkość rośnie. Gdy rośnie prędkość, rośnie także siła oporu (152), aż do momentu, gdy siły zrównoważą się i od tej pory kulka porusza się ruchem jednostajnym.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_B + \vec{F}_{St} = 0, \tag{155}$$

to znaczy, że:

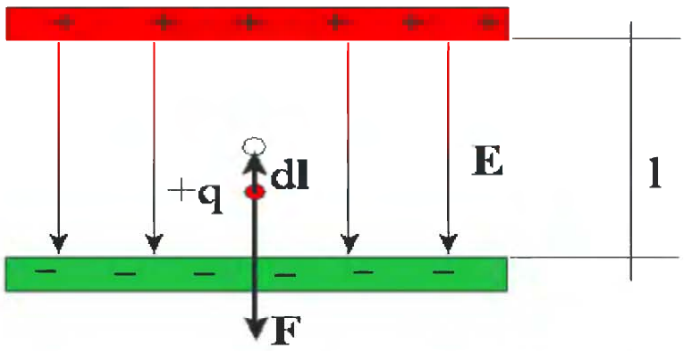
$$F_G = F_B + F_{St} \tag{156}$$

Korzystając z powyższych wzorów można wyliczyć np. współczynnik lepkości cieczy:

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_m - \rho_p)}{9v}$$

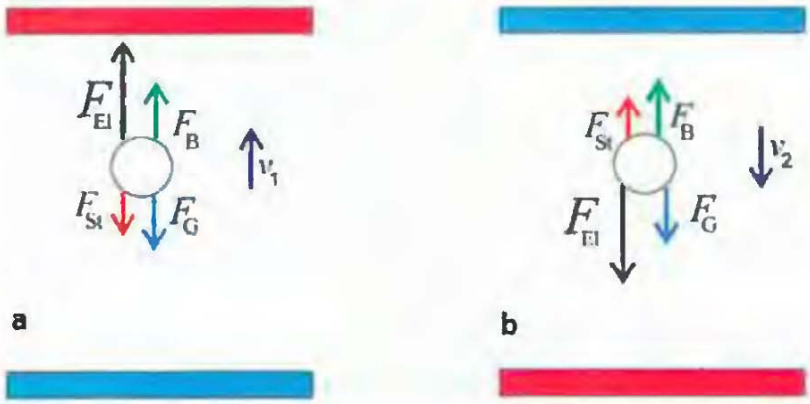
6.2.8. Ruch cząstki naładowanej w polu elektrostatycznym

W polu elektrostatycznym naładowanego kondensatora może znaleźć się cząstka naładowana, może być tam w chwili początkowej nieruchoma lub może wpadać w pole z prędkością $\vec{v}$ zgodnie z liniami pola, przeciwnie do nich, prostopadle do nich lub pod dowolnym kątem. W każdym z wymienionych przypadków na naładowaną cząstkę działa siła ze strony pola, której wartość wynosi F_{El}=q·E, ruch zaś zależy od znaku ładunku i kąta, jaki tworzy prędkość cząstki z wektorem natężenia pola elektrostatycznego. W przypadku gdy cząstka naładowana dodatnio porusza się zgodnie z liniami pola, ruch będzie ruchem prostoliniowym, jednostajnie przyśpieszonym (opóźnionym gdy jest ujemnie naładowana) zaś gdy porusza się przeciwnie do zwrotu linii pola – ruch będzie ruchem prostoliniowym, jednostajnie opóźnionym (przyśpieszonym gdy cząstka jest ujemnie naładowana). Na rysunku 52 zademonstrowano jedną z opisanych sytuacji.



Rys. 52. Cząstka naładowana dodatnio porusza się do góry ruchem prostoliniowym jednostajnie opóźnionym, ponieważ siła F=q·E działa przeciwnie do prędkości cząstki, zgodnie z liniami pola. Przebyta droga wynosi dl

W tym ćwiczeniu, będziemy mieli do czynienia ze wszystkimi omówionymi siłami, tj. siłą oddziaływania elektrycznego, siłą oporu ośrodka, siłą wyporu oraz siłą grawitacji.



Rys. 53. Rozkład sił działających na kropelkę oleju w polu naładowanego kondensatora: a) podczas ruchu kropli do góry, b) w dół. Oznaczenia: F_G – ciężar kropli, F_B – siła wyporu, F_{St} – siła oporu, F_{El} – siła oddziaływania elektrycznego w polu jednorodnym kondensatora

6.3. Aparatura pomiarowa i uzasadnienie sposobu postępowania

Zasilacz prądu stałego ładuje kondensator Millikana do pewnego napięcia. Polaryzację napięcia można zmieniać za pomocą przełącznika. W polu elektrycznym kondensatora przy zmianie jego polaryzacji, obserwuje się ruch wznoszący i opadający naładowanej kropelki oleju. Mierząc czas poruszania się kropelki oleju i drogę jaką przebywa można wyznaczyć jej prędkość.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- prędkość opadania kropli w polu elektrycznym υ_d,
- prędkość wznoszenia kropli w polu elektrycznym υ_g,
- napięcie na okładkach kondensatora U
- ładunek kropelki oleju $Q = n \cdot e$
- promień kropelki r,
- odległość między płytkami kondensatora $d = 2{,}5$ mm,
- gęstość oleju silikonowego $\rho_o = 1{,}075 \cdot 10^3$ kg/m^3,
- gęstość powietrza $\rho_p = 1{,}293$ kg/m^3,
- lepkość powietrza $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ kg/(m· s),
- przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81$ m/s^2.

Na kropelkę o promieniu r i ładunku elektrycznym Q, poruszającą się pionowo pomiędzy płytkami naładowanego kondensatora płaskiego, działają cztery siły: ciężar kropli, siła wyporu, siła oporu ośrodka (siła Stokesa) oraz siła elektrostatyczna. Gdy kropelka oleju porusza się ruchem jednostajnym, oznacza to, że działające na nią **siły równoważą się**. Korzystając z przyjętych powyżej oznaczeń i rysunku 53 oraz wzbogaconego o wzór na siłę elektryczną $F_{El} = QE = QU/d$ równania (155), warunki równowagi sił działających na kropelkę można sformułować następująco:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_o g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_p g = 6\pi\eta v_d r - \frac{QU}{d} \tag{157}$$

przy ruchu kropli pionowo w dół,

oraz

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_0 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_p g = \frac{QU}{d} - 6\pi\eta v_g r \tag{158}$$

podczas ruchu kropli pionowo do góry.

Równania (157) i (158) zawierają cztery niewiadome: promień kropli r, jej ładunek Q oraz prędkości poruszania się, υ_d i υ_g. Prędkości opadania kropli, υ_d i wznoszenia się, υ_g, wyznacza się w oparciu o wzór v=s/t w ruchu jednostajnym. Z zależności (157) i (158) można znaleźć pozostałe niewiadome. Ładunek kropelki Q wyrazi się wzorem:

$$Q = C_1 \frac{v_d + v_g}{U}\sqrt{v_d - v_g} \tag{159}$$

gdzie:

$$C_1 = \frac{9}{2}\pi d\sqrt{\frac{\eta^3}{g(\varrho_0 - \varrho_p)}} \tag{160}$$

skąd, po podstawieniu danych liczbowych, mamy:

$$C_1 = 2{,}672 \cdot 10^{-11}\ kg \cdot m\left(\frac{m}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{161}$$

Natomiast promień kropli r jest równy:

$$r = C_2\sqrt{v_d - v_g}\,, \tag{162}$$

gdzie:

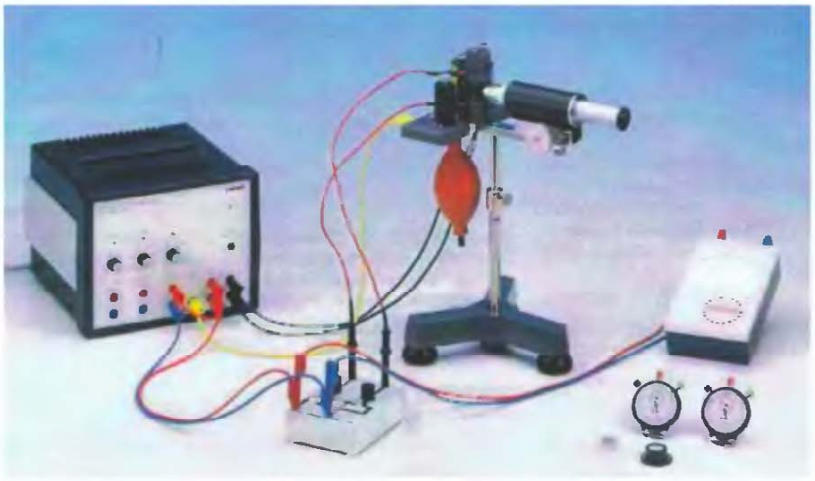
$$C_2 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta}{g(\varrho_0 - \varrho_p)}}, \tag{163}$$

$$C_2 = 6.231 \cdot 10^{-5}\ (ms)^{\frac{1}{2}}. \tag{164}$$

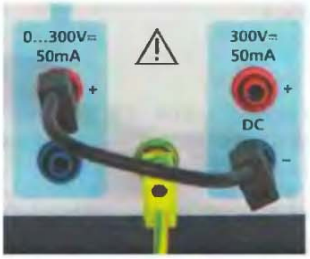
Aparat Millikana jest przeznaczony do wyznaczenia ładunku elementarnego e. Do cylindrycznej komory, której ścianki górna i dolna tworzą kondensator płaski, wprowadzane są za pomocą rozpylacza kropelki oleju. Ładują się one przez tarcie o ścianki dyszy rozpylacza oraz o powietrze. Mikroskop, zamocowany z boku komory, pozwala obserwować ruch tych kropelek i mierzyć ich przemieszczenia. Mierząc czasy ruchu, określamy prędkości wznoszenia się i opadania kropelek w polu elektrycznym kondensatora, co pozwala wyznaczyć wielkość zgromadzonego na nich ładunku elektrycznego.

Widok zestawu pomiarowego pokazano na rysunkach 54–56. Zestaw ten składa się z następujących elementów: zasilacz (DC, 300–600V), aparat Millikana, którego szczegóły opisane są na rysunku 56, dwubiegunowy przełącznik napięcia oraz woltomierz uniwersalny o zakresie 0-600 V, DC. Rysunek 55 pokazuje podłączenie kabli dla rozszerzenia napięcia do 600V.

Z zasilacza wysokiego napięcia podawane jest napięcie na okładki kondensatora w zakresie 300–500V oraz napięcie żarzenia na lampkę halogenową (6.3V, AC). Dwubiegunowy przełącznik napięcia umożliwia zmianę polaryzacji na okładkach kondensatora.

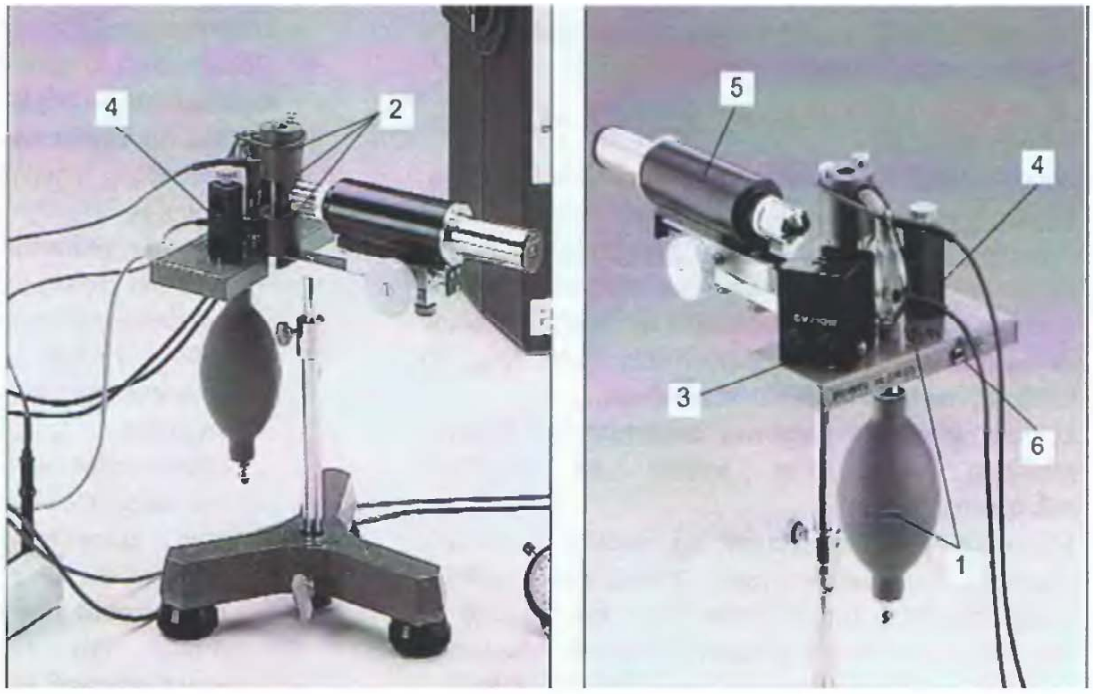


Rys. 54. Zestaw pomiarowy do wyznaczenia ładunku elementarnego metodą Millikana



Rys. 55. Podłączenie napięcia na zasilaczu z możliwością regulacji (300V-600V)

a) b)



Rys. 56. Aparat Millikana a) widok z przodu, b) widok z tyłu

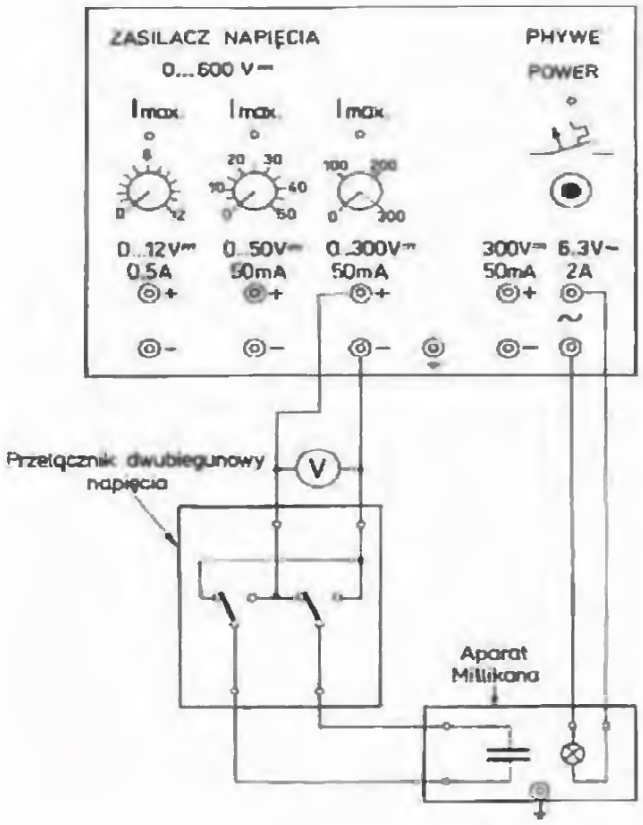
Aparat Millikana pokazany na rysunkach 56a i 56b zawiera:

1 - atomizer oleju, który składa się z precyzyjnej dyszy rozpylającej oraz z gumowej gruszki,
2 - kondensator Millikana zbudowany z komory wstępnej i podstawy. Komora ma z boku otwór na rozpylacz oleju. Elektroda główna ma w środku mały otwór do wprowadzania kropelek oleju do wnętrza komory.
3 - urządzenie oświetlające wnętrze kondensatora (składa się z: zasilacza, lampki halogenowej i przewodu światłowodowego z pleksi),
4 - uchwyt dla źródła promieniowania (niewykorzystywany w ćwiczeniu),
5 - mikroskop do obserwacji kropel i pomiaru długości dróg przebywanych przez nie w polu elektrycznym. Okular mikroskopu posiada skalę, którą należy wycechować za pomocą specjalnej płytki ze skalą mikrometryczną,
6 - gniazdko uziemiające płytę podstawy.

Odległość pomiędzy okładkami kondensatora d = **2,50 mm**, maksymalne napięcie przykładane do jego okładek nie powinno przekraczać 500 V DC.

Za pomocą niewielkiej płytki szklanej (o wymiarach 18 mm × 18 mm) można, w miarę potrzeby, dodatkowo osłonić okienko komory kondensatora dla wyeliminowania wewnątrz niej zawirowań powietrza.

Schemat szczegółowy połączeń elementów aparatury pomiarowej przedstawia rys. 57:



Rys. 57. Schemat połączeń elementów aparatury pomiarowej bez regulacji napięcia (300V). Połączenie pokazane na rysunku 55 pozwala rozszerzyć napięcie do 600V

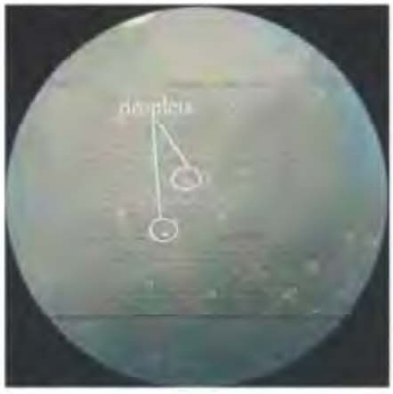
6.4. Wykonanie ćwiczenia, wyniki pomiarów

6.4.1. Czynności wstępne

- Za pomocą śrub regulacyjnych znajdujących się w podstawie statywu wypoziomować aparat Millikana.
- Zacisk uziemienia znajdujący się w podstawie aparatu połączyć z zaciskiem uziemienia w zasilaczu.
- Zaciski lampy oświetleniowej znajdującej się na aparacie Millikana połączyć z wyjściem 6,3 V AC zasilacza.
- Do komory kondensatora wprowadzać kropelki oleju przez kilkakrotne naciśnięcie gumowej gruszki umieszczonej u dołu aparatu Millikana.
- Podczas obserwacji należy regulować położenie mikroskopu śrubą mikrometryczną tak, żeby pojawiające się kropelki oleju były ostro widoczne w centrum pola obserwacji.
- Jeżeli obserwowane kropelki nie opadają jednostajnie i ich ruch jest wyraźnie turbulentny, wtedy okienko obserwacyjne należy dodatkowo uszczelnić za pomocą szklanej pokrywki (18 mm × 18 mm) posmarowanej po brzegach olejem.
- Jeżeli krople oleju stale dryfują do którejś ścianki bocznej kamery, względnie do przodu albo do tyłu pola widzenia w mikroskopie, wtedy należy wypoziomować aparat Millikana za pomocą śrub regulacyjnych znajdujących się w podstawie statywu, na którym zamocowany jest aparat.

6.4.2. Przebieg pomiarów

- Posługując się płytką ze skalą mikrometryczną (1mm podzielony jest na 100 części), wykonać kalibrację skali okularu mikroskopu.
- Sprawdzić układ połączeń elektrycznych zgodnie z rys. 54 i 57.
- Wyjście zasilacza 300 V można połączyć z wyjściem 0...300 V, aby uzyskać możliwość zmian napięcia na kondensatorze w granicach 300 ÷ 600 V DC (rys. 55).
- **Włączanie i wyłączanie zasilacza – za pomocą wyłącznika umieszczonego na jego tylnej ściance.**
- Napięcie na okładkach kondensatora ustawić na początku na wartość 300 V.
- Do kamery Millikana wprowadzić kropelki oleju za pomocą rozpylacza. Na rysunku 58 przedstawiono widok kropelek, które powinny być zaobserwowane w postaci białych, małych kółeczek w mikroskopie.



Rys. 58. Kropelki oleju widoczne pod mikroskopem po rozpyleniu oliwy do wnętrza kondensatora

- Wybrać jedną kroplę, która jest naelektryzowana (tzn. reaguje na zmiany kierunku pola elektrycznego). Korzystając z przełącznika napięcia wymusić kilkakrotne opadanie i wznoszenie się wybranej kropli pomiędzy dwiema określonymi działkami na skali okularu mikroskopu (np. pomiędzy 10 i 20 kreską podziałki). W razie potrzeby należy regulować ostrość obrazu w mikroskopie.
- Rejestrować na przemian kilka razy czasy wznoszenia i opadania obserwowanej kropli, a następnie oddzielnie je zsumować. Sumy powinny być większe niż 5 sekund w każdym z przypadków.
- W trakcie pomiarów – po wybraniu kropli – należy przestrzegać następujących wskazówek:
- Prędkości poruszania się kropli oleju w górę i w dół powinny być dobrane tak, żeby pozostawały w stosunku około 1: 2.
- Krople muszą poruszać się dość szybko, a ich ruch powinien być w miarę prostoliniowy. Jeśli warunki te nie są spełnione, wówczas należy zwiększyć napięcie na kondensatorze.

Uwaga! Należy wykonać pomiary w co najmniej kilku seriach po 30 kropelek w każdej, przy ustalonym napięciu w zakresie 300 ÷ 500 V.

Uzyskane wyniki i obliczenia zestawiamy w tabeli pomiarowej 12.

6.4.3. Wyniki pomiarów

Przykładowe pomiary dla różnych kropli pokazane są w tabeli 12. Na wzór tej tabeli trzeba sporządzić własną z przeprowadzonych pomiarów.

Tabela 12. Wyniki pomiarów czasów opadania i wznoszenia naładowanych kropli oleju i wyniki obliczeń prędkości opadania i wznoszenia kropel dla różnych kropel. Obliczenie ładunku kropel.

Lp.	U (V)	t_1 (s)	S_1 (mm)	v_1 [10^{-4}] (m/s)	t_2 (s)	S_2 (mm)	v_2 [10^{-4}] (m/s)	$v_1 - v_2$ [10^{-4}] (m/s)	Q [10^{-19}] (C)	k	**e [10^{-19}] (C)**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	300	9,6	4,45	4,64	13,5	4,45	3,30	1,34	8,54	5	**1,71**
2	300	7,0	2,67	3,81	11,2	3,56	3,18	0,63	5,19	3	**1,73**
3	300	5,8	2,67	4,60	7,1	1,78	2,51	2,10	9,57	6	**1,60**
4	300	7,4	2,67	3,61	8,8	1,78	2,02	1,59	6,59	4	**1,65**
5	300	6,9	2,67	3,87	8,2	2,67	3,26	0,61	5,19	3	**1,73**
6	300	5,6	2,67	4,77	8,0	1,78	2,23	2,54	10,4	6	**1,73**
7	400	6,9	2,67	3,87	9,8	2,67	2,72	1,15	4.92	3	**1,64**
8	400	6,4	2,67	4,17	8,3	2,67	3,22	0,96	5,04	3	**1,68**
9	400	5,0	2,67	5,34	5,0	1,78	3,56	1,78	8,28	5	**1,66**
10	400	7,0	3,56	5,09	7,9	3,56	4,51	0,58	5,09	3	**1,70**
11	400	6,0	1,78	2,97	8,5	1,78	2,09	0,87	3,30	2	**1.65**
12	400	5,5	2,67	4,85	7,4	2.67	3,61	1,25	6,59	4	**1,65**
13	400	4,7	1,78	3,79	7,8	1,78	2,28	1,51	5,19	3	**1,73**
14	400	5,2	3,56	6,85	10,6	5,34	5,04	1,81	11,1	7	**1,59**
15	400	6.5	1,78	2,74	9,7	1,78	1,84	0,90	3,03	2	**1,52**
16	500	6,4	3,56	5,56	7,2	3,56	4,94	0,62	4,61	3	**1,54**
17	500	5,5	2,67	4,85	9,8	3,56	3,63	1,22	5,23	3	**1,74**
18	500	5,2	1,78	3,42	5,7	1,78	3,12	0,30	2,00	1	**2,00**
19	500	6,4	3,56	5,56	8,9	3,56	4,00	1,58	6,67	4	**1,67**
20	500	5,2	3,56	6,85	5,9	2,67	4,53	2,32	9,67	6	**1,61**

Na podstawie tabeli 12 sporządzamy tabelę 13, w której w kolumnie 2 umieszczamy ładunki elektryczne kropel w kolejności wzrastania ich wartości. Następnie obliczamy różnice

pomiędzy kolejno po sobie następującymi ładunkami kropel $(Q_{i+1} - Q_i)$ i wyniki zamieszczamy w kolumnie trzeciej.

Tabela 13. Obliczenie ładunku elementarnego

Lp.	$Q_i (10^{-19}$ C)	$[Q_{i+1} - Q_i] (10^{-19}$ C)	k	$\frac{Q_i}{k} = e_i (10^{-19}$ C)	$\bar{e}_i (10^{-19}$ C)	$\bar{e}$ $(10^{-19}$ C)
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	2,00		1	2,00	2,00	
2	3,03	**1,03**	2	1,52	1,59	
3	3,30	0,27		1,65		
4	4,61	**1,31**	3	1,54	1,69	
5	4,92	0,31		1,64		
6	5,04	0,13		1,68		
7	5.09	0,05		1,70		
8	5,19	0,10		1,73		
9	5,19	0,00		1,73		1,7
10	5,19	0,00		1,73		
11	5,23	0,04		1,74		
12	6,59	**1,36**	4	1,65	1,66	
13	6,59	0,00		1,65		
14	6,67	0,08		1,67		
15	8,28	**1,61**	5	1,66	1.69	
16	8,54	0,26		1,71		
17	9,57	**1,03**	6	1,60	1.66	
18	9,67	0,10		1,61		
19	10,4	0,37		1,73		
20	11,1	**0,7**	7	1,59	1,59	

Można zauważyć, że istnieją grupy naładowanych kropel w obrębie których różnice wartości między kolejnymi ładunkami są niezbyt duże w porównaniu z wartościami ładunku elektrycznego kropel. Zauważoną prawidłowość można zinterpretować w następujący sposób: niewielkie różnice wartości ładunków kropel można uznać (upatrywać) jako konsekwencję (wynik) popełnionych błędów przy pośrednim pomiarze, czyli wyznaczaniu tego samego ładunku zgromadzonego na różnych kroplach tej samej grupy, natomiast znacznie większe różnice ładunku kropel są wskaźnikiem (konsekwencją) istotnej różnicy wartości ładunku między kroplami sąsiednich grup kropel.

Wnioski z wyników pomiaru ładunku elektrycznego kropel staną się oczywiste, jeśli postawi się hipotezę (jak to uczynił Millikan), że istnieje najmniejsza porcja ładunku elektrycznego (ładunek elementarny e), natomiast ładunki zgromadzone na dowolnej naelektryzowanej kropli są wielokrotnością ładunku elementarnego, czyli $Q=k \cdot e$, gdzie $k=1,2,3,\ldots\ldots$.

W kolumnie 5 zamieszczono średnie wartości ładunku elementarnego przypadającego na jedna kroplę dla kolejnych grup kropel. Kolumna 4 zawiera krotność ładunku elementarnego dla poszczególnych grup naładowanych kropel. Wreszcie w kolumnie 6 zamieszczono średnie wartości ładunku elementarnego obliczone dla każdej grupy kropel, a w kolumnie 7 wynik pomiaru ładunku elementarnego, czyli średnia wszystkich wyników pomiaru.

6.5. Analiza niepewności wyniku pomiaru ładunku elementarnego e

Wyznaczenie ładunku elementarnego jest pomiarem pośrednim i polega na pomiarze pięciu wielkości fizycznych: napięcia elektrycznego między okładkami kondensatora U, dwóch dróg przebytych przez kroplę podczas opadania i wznoszenia się w polu elektrycznym kondensatora oraz czasów trwania tych ruchów. Pomiary te są pomiarami bezpośrednimi uzyskiwanymi za pomocą jednego zestawu doświadczalnego w jednym doświadczeniu, są więc pomiarami skorelowanymi. W takiej sytuacji ze względu na bardzo skomplikowane obliczenia złożonej niepewności standardowej wielkości wyznaczanej (mierzonej pośrednio o skorelowanych pomiarach wielkości mierzonych bezpośrednio) w pracowniach studenckich wygodniej będzie postępować następująco:

Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich K wielkości $x_{K,i}$ uzyskanych w i-tym pomiarze:

$$y_i = \mathrm{f}(x_{1,i}\,,\, x_{2,i}\,,\, x_{3,i}\,,\ldots\, x_{k,i}\,,\ldots\, x_{K,i}\,). \tag{165}$$

Seria wyników y_i, uzyskanych w n pomiarach, stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest:

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i\,, \tag{166}$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_{c(y)} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}_i\right)^2}\,. \tag{167}$$

Seria wyników pomiaru ładunku elementarnego e, uzyskanych w n pomiarach stanowi próbę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich.

Przyjmujemy, że wynikiem pomiaru pośredniego jest

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i\,, \tag{168}$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_c(\mathrm{e}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (e_i - \bar{e})^2}\,. \tag{169}$$

Tabela 14. Obliczanie niepewności wyników pomiaru

Lp.	$e_i - \bar{e}$	$(e_i - \bar{e})^2$	$\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2}{n-1}$	S_e	$S_{\bar{e}} = \frac{S_e}{\sqrt{n}}$
1	2	3	4	5	6	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

S_e – odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru:

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2}{n-1}} \tag{170}$$

$S_{\bar{e}} = \frac{S_e}{\sqrt{n}}$ – odchylenie standardowe wyniku pomiaru (odchylenie średniej arytmetycznej od wartości najbardziej prawdopodobnej) wylicza się ze wzoru:

$$S_{\bar{e}} = \frac{S_e}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2}{n(n-1)}} \tag{171}$$

W przypadku „ubogich" serii pomiarowych (n<11) niepewność standardową pomiarów bezpośrednich obliczamy ze wzoru:

$$u(x) = t_n\sqrt{S_{\bar{x}}} = t_n\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \tag{172}$$

gdzie parametr t_n zależy zarówno od liczności serii pomiarowej (ściślej: tzw. liczby stopni swobody) jak również przyjętego tzw. poziomu ufności.

Wartość parametru t-Studenta dla poziomu ufności równego 0,683 wynosi:

n	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
t_n	*1,11*	*1,09*	*1,08*	*1,07*	*1,06*	*1,05*

Jeśli przykładowo wziąć III serię pomiarów z tabeli 13, tzn. pomiary od liczby porządkowej 4 do 11, to mamy serię n=8 pomiarów. W takiej sytuacji przy obliczaniu standardowej niepewności pomiaru **e** uwzględniamy wartość pomiaru t_8-Studenta, który dla poziomu ufności 0,683 wynosi $t_8 = 1{,}08$.

Niepewność standardowa pomiaru ładunku elementarnego e, po uwzględnieniu parametru t_8-Studenta wynosi:

$$u(e) = t_8\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{8}(e_i - \bar{e})^2} = 1.08 \cdot ___ = ___ = ___ \tag{173}$$

Niepewność standardowa typu A określa przedział $[x \mp u(x)]$, w którym z prawdopodobieństwem 68% znajduje się wartość prawdziwa.

Uwaga!

Niepewność podajemy z dokładnością (zaokrąglamy) do dwóch cyfr znaczących.

Zaokrąglenie niepewności odbywa się zgodnie z zasadami zaokrągleń w matematyce: cyfry 0 – 4 zaokrągla się w dół (nie ulega zmianie cyfra poprzedzająca), natomiast cyfry 5 – 9 zaokrągla się w górę (cyfra poprzedzająca zwiększa się o jeden).

Oprócz niepewności standardowej często podajemy niepewność rozszerzoną, którą oblicza się w sposób następujący:

$$U(x) = k \cdot u(x),$$

gdzie $k = 2$ *lub* $k = 3$ nosi nazwę współczynnika rozszerzenia.

Dla niepewności typu A prawdopodobieństwo znalezienia wartości prawdziwej w przedziale $\bar{x} \mp U(x)$ wynosi: 95,4% dla k=2 oraz 99,7% dla k=3.

Niepewność standardową u(x) oraz rozszerzoną U(x) można zapisać dwoma sposobami:

a) słownie,
b) przy pomocy symboli.

6.6. Zapis wyniku pomiaru ładunku elementarnego e

1. Wynik końcowy zapisujemy wraz z niepewnością.
2. Wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego co niepewność.
   a) Zapis wyniku pomiaru na poziomie ufności 68%

   - Zapis słowny:

   Wartość ładunku elementarnego e wyznaczony metodą Millikana jest równy ..... z niepewnością .....

   - Zapis przy użyciu symboli:

   $$e = \cdots \mathrm{C}, \qquad u(e) = \cdots \ \mathrm{C}\ .$$

   - Zapis skrócony:

   $$\mathrm{e} = \cdots \mathrm{C} \mp \cdots \mathrm{C}\ .$$

   b) Zapis wyniku pomiaru na poziomie ufności 95%:

   - Zapis słowny:

   Wartość ładunku elementarnego e wyznaczony metodą Millikana jest równy ..... z niepewnością rozszerzoną .....

   - Zapis przy użyciu symboli:

   $$\mathrm{e} = \cdots \mathrm{C}, \quad U(e) = \cdots \mathrm{C} \ \ (k = 2),\ n = 8$$

   - Zapis skrócony:

   $$\mathrm{e} = \cdots \mathrm{C} \ \ (\ldots . \mathrm{C}.),$$
   $$e = \cdots \mathrm{C} \mp \cdots \mathrm{C}\ .$$

Zagadnienia do kolokwium

1. Pojęcie ładunku elementarnego
2. Zasada zachowania ładunku
3. Pojęcie pola elektrostatycznego i jego właściwości: superpozycja pól, zachowawczość pola, źródłowość pola elektrostatycznego
4. Pole elektrostatyczne centralne i jednorodne; siła działająca pomiędzy ładunkami punktowymi – prawo Coulomba
5. Wielkości charakteryzujące pole elektrostatyczne: natężenie pola, potencjał, związek między nimi
6. Ruch ciała w ośrodku lepkim
7. Siła wyporu działająca na ciało zanurzone w płynie (w gazie i w cieczy) – prawo Archimedesa
8. Ruch ciała naelektryzowanego w polu elektrycznym jednorodnym
9. Ruch kropel oleju w aparaturze Millikana

Literatura

1. Jaworski B., Dietlaf A., *Kurs fizyki*, t.1 i 2 Warszawa, PWN, 1884
2. *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki dla zaawansowanych*, red. F. Kaczmarek, Warszawa, PIW, 1982.
3. Szczeniowski Sz., *Fizyka doświadczalna*, cz.3, PWN, Warszawa, 1972.
4. Frisz S., Timoriewa A., *Kurs fizyki*, Tom II, Warszawa, PWN, 1959
5. Zięba A., *Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej (ONP). Nowe normy międzynarodowe. Rozdział 1.*[W]: *Opracowanie danych pomiarowych.* Dostępność 29.11.2013r. Strona internetowa: www.pj.ifd.uni.wroc.pl/pliki/ONP.pdf
6. Kubiaczyk A., *Określenie niepewności pomiarów* [W]: *Poradnik do Laboratorium fizyki.* Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska. Dostępność 30.11.2013r. Strona internetowa: http://www.if.pw.edu.pl/

7. Wyznaczanie stosunku $\frac{e}{m}$ elektronu

7.1. Zasada ćwiczenia

W sytuacji, gdy elektrony przyśpieszone w polu elektrostatycznym wpadają w jednorodne pole magnetyczne prostopadle do ich ruchu, to doświadczalnie można wyznaczyć ładunek właściwy $\frac{e}{m}$ elektronu na podstawie wartości przyśpieszającego napięcia, indukcji pola magnetycznego i promienia orbity elektronu.

7.2 Wiadomości teoretyczne

7.2.1. Ruch elektronu w polu magnetycznym

Elektron o masie m i ładunku e przyspieszany od szybkości początkowej równej zeru, przez pole elektrostatyczne między dwoma punktami o napięciu elektrycznym U, uzyskuje energię kinetyczną zgodnie z zasadą zachowania energii, kosztem elektrycznej energii potencjalnej:

$$\frac{mv^2}{2} = eU, \tag{174}$$

gdzie v jest uzyskaną szybkością elektronu.

W sytuacji, gdy elektron porusza się z prędkością $\vec{v}$ w polu magnetycznym o indukcji magnetycznej $\vec{B}$, to ze strony tego pola doznaje on działania siły Lorentza określonej wzorem:

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}). \tag{175}$$

Pod wpływem tej siły elektron w jednorodnym polu magnetycznym porusza sie po spiralnym torze wzdłuż pola magnetycznego. Jeżeli wektory $\vec{v}$ i $\vec{B}$, są prostopadłe, to torem ruchu jest okrąg leżący w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku linii pola magnetycznego. W takiej sytuacji pod wpływem siły Lorentza o wartości:

$$F = evB \tag{176}$$

elektron porusza się – oczywiście względem inercjalnego układu odniesienia związanego z laboratorium – z przyspieszeniem dośrodkowym określonym przez drugą zasadę dynamiki Newtona wzorem:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{evB}{m}. \tag{177}$$

Z ostatniej równości otrzymujemy:

$$v = \frac{eBr}{m}. \tag{178}$$

Po podstawieniu wyrażenia (178) na szybkość elektronu do (174) i po pewnych przekształceniach otrzymujemy wzór określający stosunek ładunku elektronu do jego masy, czyli tzw. ładunek właściwy elektronu:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2B^2} \tag{179}$$

7.2.2. Pole magnetyczne układu cewek Helmholtza

W doświadczeniu pole magnetyczne jest wytwarzane przez dwie identyczne krótkie cewki z prądem elektrycznym, ustawione prostopadle do osi przechodzącej przez ich środki. Korzystając z prawa Biota-Savarta-Laplace'a można obliczyć indukcję pola magnetycznego wytworzonego przez cewki na ich osi:

$$B_z = \frac{\mu_0\, n\, I\, R^2}{2}\left\{\left[R^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} + \left[R^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\right\}. \qquad (180)$$

W podanym wzorze $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{Tm}{A}$ jest przenikalnością magnetyczną próżni, n –oznacza ilość zwojów cewki, I – natężenie prądu płynącego przez cewki, R – promień cewek, a – ich odległość. Odległość z jest mierzona od punktu leżącego pośrodku cewek, w odległości $\frac{a}{2}$ od płaszczyzny każdej cewki.

Można udowodnić, że pole magnetyczne w otoczeniu punktu $z = 0$ jest najbardziej jednorodne w przypadku, gdy $a = R$ (tzw. Konfiguracja Helmholtza). Ostatni wzór upraszcza się do postaci:

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\mu_0 nI}{R}. \qquad (181)$$

7.2.3. Określenie stosunku $\frac{e}{m}$ dla elektronu na podstawie znajomości współczynnika kierunkowego prostej przedstawiającej funkcyjną zależność U(I)

Powróćmy do wzoru (179). Wynika z niego, że zmieniając – zwiększając lub zmniejszając – napięcie przyspieszające w celu zachowania stałej wartości promienia r okręgu, po którym poruszają się elektrony, należy zmienić odpowiednio – zwiększyć lub zmniejszyć – wartość indukcji magnetycznej jednorodnego pola magnetycznego, a zatem wartość natężenia prądu elektrycznego I w obwodzie z prądem wytwarzającym to pole (181).

Przekształcamy wzór (179) do postaci:

$$U = \frac{e}{m} r^2 \frac{B^2}{2}, \qquad (182)$$

a następnie po uwzględnieniu (181)

$$U = \frac{e}{m} r^2 \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\mu_0 \frac{n}{R}\right)\right]^2 \cdot I^2 \qquad (183)$$

lub

$$U = \frac{e}{m} r^2 C \cdot I^2 \qquad (184)$$

gdzie stała C wynosi:

$$C = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\mu_0 \frac{n}{R}\right)\right]^2.$$

Wykonując odpowiednie doświadczenie mające na celu zbadanie zależności między napięciem elektrycznym U przyspieszającym elektrony oraz natężeniem prądu I w cewkach Helmholtza przy ustalonym promieniu r okręgu elektronu, a następnie do zbioru punktów doświadczalnych (U,I) dopasowując analitycznie metodą najmniejszych kwadratów prostą

zależności *U(I)*, określimy, na podstawie znajomości parametrów prostej, wartość stosunku $\frac{e}{m}$ elektronów.

Metoda najmniejszych kwadratów, o której wspomniano wyżej jest analityczną metodą dopasowania prostej do zbioru punktów doświadczalnych. Polega ona na takim doborze parametrów prostej y(x) aby suma kwadratów różnic wartości doświadczalnych y_i i obliczonych $(ax_i + b)$ była jak najmniejsza.

Wartość stałej C we wzorze (184) dla wartości:

$$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}, \quad \text{n} = 150, \quad \text{R} = 0{,}2\text{m},$$

wynosi $C = 2{,}40 \cdot 10^{-7} \frac{V^2 s^2}{A^2 m^4}$, natomiast $r^2 C$ dla r = 0,03m wynosi:

$$r^2 C = 2{,}16 \cdot 10^{-10} \left[\frac{V^2 s^2}{A^2 m^2}\right].$$

Wzór (184) przyjmuje postać:

$$U = \frac{e}{m} \cdot 2{,}16 \cdot 10^{-10} \frac{V^2 s^2}{A^2 m^2} \cdot I^2 \tag{185}$$

i przedstawia równanie prostej:

$$y = ax + b, \tag{186}$$

gdzie:

$$y = U,$$
$$a = \frac{e}{m},$$
$$x = 2{,}16 \cdot 10^{-10} \frac{V^2 s^2}{A^2 m^2} I^2, \tag{187}$$
$$b = 0.$$

Niewiadomą $a = \frac{e}{m}$ w równaniu (186) jako współczynnik kierunkowy prostej obliczamy ze wzoru:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2}, \tag{188}$$

gdzie:

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{189}$$

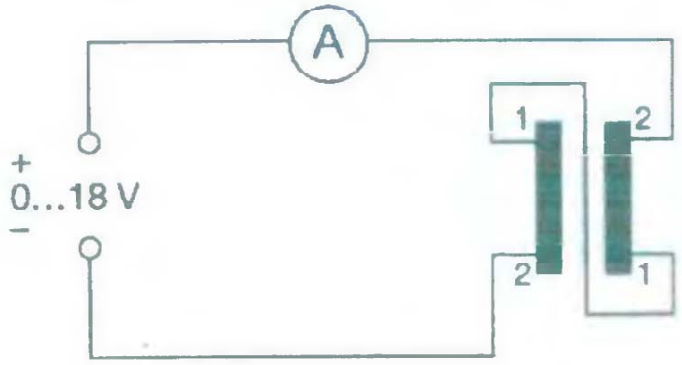
$$\tilde{y}_i = y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{190}$$

są wartościami funkcji pomocniczych określonych dla każdego punktu pomiarowego.

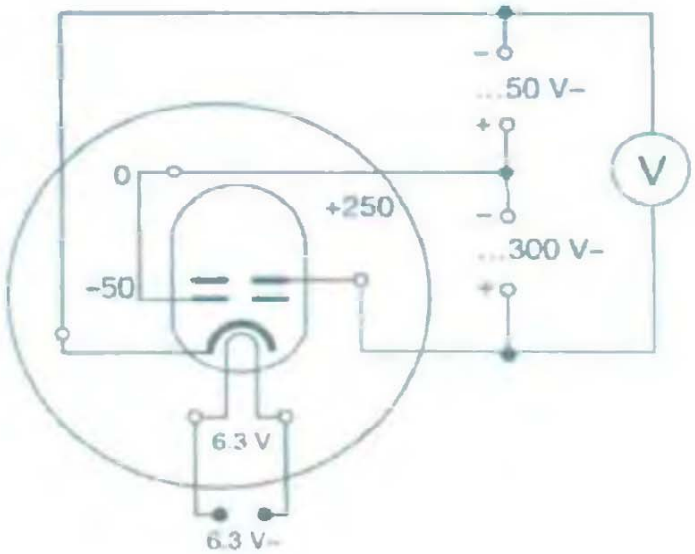
7.3. Aparatura pomiarowa

Zdjęcie używanej w doświadczeniu aparatury pomiarowej jest pokazane na rys. 59. Schematy połączenia cewek Helmholtza i lampy z działem elektronowym pokazują rys. 60 i rys. 61.

Rys. 59. Zdjęcie aparatury do wyznaczania ładunku właściwego $\frac{e}{m}$ elektronu: 1 – lampa z działem elektronowym, 2 – cewki Helmholtza, 3 – mierniki uniwersalne, 4 – zasilacz lampy, 5 – zasilacz cewek Helmholtza



Rys. 60. Schemat zasilania cewek Helmholtza



Rys. 61. Schemat obwodów zasilających lampę elektronową zwaną działkiem elektronowym

Lampa wypełniona jest gazem szlachetnym argonem pod małym ciśnieniem (około 0,3 Pa). Gaz ten odgrywa zasadniczą rolę w doświadczeniu, ponieważ elektrony zderzając się z cząstkami gazu powodują ich jonizację. Podczas rekombinacji jonów argonu zachodzą zjawiska luminescencji i możliwa staje sie obserwacja toru ruchu elektronów.

Elektrony wyrzucane są w obszar lampy za pomocą działka elektronowego (rys. 61), które przyspiesza je do energii kinetycznej równej $E_k=eU$.

Lampa umocowana jest między dwoma współosiowymi uzwojeniami z drutu miedziowego zwanymi cewkami Helmholtza. Płynący przez cewki prąd elektryczny powoduje powstanie wewnątrz lampy pola magnetycznego o wektorze indukcji $\vec{B}$ skierowanym prostopadle do osi lampy. Cewki Helmholtza mają duże rozmiary by zapewnić otrzymanie jednorodnego pola magnetycznego wewnątrz lampy.

Lampa może być obracana wokół własnej osi co umożliwia zmianę kierunku prędkości elektronów względem kierunku pola magnetycznego. W pewnej pozycji ruch elektronów będzie odbywać się po okręgu.

Wewnątrz lampy znajduje sie również pokryta farbą fluoryzującą metalowa drabinka pozwalająca na dokładny pomiar średnicy toru ruchu elektronów.

Dla zapewnienia jednakowego natężenia prądu i jego właściwego kierunku w cewkach Helmholtza należy je łączyć szeregowo, przy czym jeden z przewodu powinien łączyć gniazdka 1-1 lub 2-2 cewek. Maksymalne dopuszczalne natężenia prądu ***I*** płynącego przez cewki wynosi ***5A***.

W doświadczeniu zmienia się wartość natężenia prądu *I*, wartość napięcia *U* przyspieszającego elektrony w działku elektronowym i ewentualnie koryguje wartość napięcia ogniskującego wiązki elektronów.

W zestawie występują dwa zasilacze:

a) zasilacz cewek wytwarzających pole magnetyczne. Do regulacji prądu służą dwa pokrętła znajdujące się na przedniej płycie. Prawe pokrętło służy do regulacji napięcia podawanego na cewki, natomiast lewe do regulacji natężenia prądu płynącego przez cewki

b) zasilacz układu żarzenia oraz napięć anodowego i katodowego.

Wszystkie napięcia konieczne do prawidłowego działania działka elektronowego połączone są przy wykorzystaniu wielowtykowego złącza znajdującego się na tylnej ścianie lampy (widocznej przez lewy otwór w lewej ścianie obudowy).

7.4. Wykonanie doświadczenia, wyniki pomiaru

1) Zapoznanie się z doświadczalnym układem pomiarowym na rys. 59.
2) Przygotowanie zestawu doświadczalnego do pomiarów.
   - Sprawdzić czy cewki Helmholtza są podłączone zgodnie ze schematem na rys. 60.
   - Sprawdzić czy połączenia obwodów zasilających lampę elektronową są zgodnie ze schematem na rys. 61.
   - Upewnić się, że pokrętła napięć zasilających „-50V" i 250V są w pozycji „0".
   - Włączyć zasilacz wielofunkcyjny i ustawić wartość napięć na „-50V i 250V" odpowiednio na siatce i anodzie.
   - Po pojawieniu się wyraźnie widocznej niebiesko zabarwionej wiązki elektronów (następuje to po kilku minutach) włączyć zasilacz prądowy cewek Helmholtza.
   - W sytuacji, gdy wiązka elektronów porusza się po spirali, a nie po okręgu, ustawić lampę we właściwej pozycji przekręcając delikatnie jej uchwyty w zamocowaniach.

3) Wykonać pomiary wartości napięcia anodowego U oraz natężenia prądu I w cewkach Helmholtza niezbędnych do obliczenia stosunku $\frac{e}{m}$. W tym celu zmieniamy napięcie U w zakresie od 100V do 300V co 20V.

4) Dla każdej wartości napięcia należy dobrać i zapisać w tabeli 15. wartość natężenia prądu w cewkach Helmholtza, przy których wiązka elektronów pada na obrany jeden z czterech szczebli drabinki wewnątrz lampy. Promienie torów ruchu elektronów wyznaczone przez kolejne szczebelki wynoszą odpowiednio r = 0,02m; 0,03m; 0,04m; 0,05m (Δr=0,01m).

Tabela 15. Wartość natężenia prądu I i różnych napięć U dla ustalonej wartości promienia toru elektronu, np. $r_i = 0{,}03$m

$\mathbf{U(V)}$	$\mathbf{I(A)}$	$\boldsymbol{I^2(A^2)}$	$\boldsymbol{2,16 \cdot 10^{-10} \cdot I^2 \left(\frac{V^2 s^2}{m^2}\right)}$
1	2	3	4
100			
120			
140			
160			
180			
200			
220			
240			
260			
280			
300			

W celu uzyskania poszukiwanej wartości stosunku $\frac{e}{m}$ dla elektronu należy wyznaczyć, dla prostej określonej równaniem (186), wartość współczynnika kierunkowego $\boldsymbol{a}$ ze wzoru (188).

W tym celu należy skorzystać z pośrednich rezultatów obliczeń zamieszczonych w sporządzonej tabeli 16.

Otrzymujemy więc:

$$\frac{e}{m} = \text{——————} = \text{——————}.$$

7.5. Analiza niepewności wyniku pomiaru stosunku $\frac{e}{m}$ metodą typu A

Metoda najmniejszych kwadratów pozwala nie tylko poprowadzić najlepiej dopasowaną prostą do zbioru n punktów doświadczalnych poprzez określenie współczynnika kierunkowego prostej, ale również obliczyć jego niepewność standardową.

$$u(a) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i^2}{\sum_{i-1}^{n} \tilde{x}_i^2}} \tag{191}$$

gdzie:

$$\tilde{d}_i = y_i - a\tilde{x}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{192}$$

Tabela 16. Współrzędne punktów eksperymentalnych i pośrednie rezultaty obliczeń $y_i = ax_i + b$

Lp.	x_i $\left(\frac{V^2 s^2}{m^2}\right)$	y_i $[V]$	$\tilde{x}_i$ $\left(\frac{V^2 s^2}{m^2}\right)$	$\tilde{y}_i$ (V)	$\tilde{x}_i \tilde{y}_i$ $\left(\frac{V^3 s^2}{m^2}\right)$	$\tilde{x}_i^2$ $\left(\frac{V^4 s^4}{m^4}\right)$	$a\tilde{x}_i$ (V)	$\tilde{d}_i$ (V)	$\widetilde{d^2}_i$ (V^2)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
suma	$\sum x_i =$ $=$	$\sum y_i =$ $=$			$\sum \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 =$	$\sum \tilde{x}_i^2 =$			$\sum \tilde{d}_i^2 =$
	$\frac{1}{n}\sum x_i =$ $=$	$\frac{1}{n}\sum y_i =$ $=$							

Korzystając z pośrednich rezultatów obliczeń zamieszczonych również w sporządzonej tabeli 16, otrzymujemy wartość niepewności standardowej pomiaru stosunku $\frac{e}{m}$, czyli:

$$u\left(\frac{e}{m}\right) = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot \text{————}} = \text{.....} \quad .$$

Niepewność standardowa typu A określa przedział $[x + u(x)]$, w którym z prawdopodobieństwem 68% znajduje się wartość prawdziwa.

Uwaga!

Niepewność podajemy z dokładnością (zaokrąglamy) do dwóch cyfr znaczących.

Zaokrąglenie niepewności odbywa się zgodnie z zasadami zaokrągleń w matematyce: cyfry 0 – 4 zaokrągla się w dół (nie ulega zmianie cyfra poprzedzająca), natomiast cyfry 5 – 9 zaokrągla się w górę (cyfra poprzedzająca zwiększa się o jeden).

Oprócz niepewności standardowej często podajemy niepewność rozszerzoną, którą oblicza się w sposób następujący:

$$U(x) = ku(x),$$

gdzie $k = 2\ lub\ 3$ nosi nazwę współczynnika rozszerzenia.

Dla niepewności typu A prawdopodobieństwo znalezienia wartości prawdziwej w przedziale $\bar{x} \mp U(x)$ wynosi 95% dla $k = 2$ oraz 99,7% dla $k = 3$.

Niepewność standardową oraz rozszerzoną można zapisać dwoma sposobami:

- słownie,
- przy pomocy symboli.

7.6. Zapis wyniku pomiaru stosunku $\frac{e}{m}$ dla elektronu

Uwaga!

1. Wynik końcowy zapisujemy wraz z niepewnością i jednostką w układzie SI.
2. Wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego co niepewność.

Zapis wyniku pomiaru:.....

Zagadnienia do kolokwium

1. Pojęcie pola elektrostatycznego i magnetycznego oraz wielkości fizyczne opisujące właściwości pól.
2. Określenie indukcji pola magnetycznego przewodników z prądem elektrycznym – prawo Biota-Savarta-Laplace'a.
3. Wyprowadzenie wzoru określającego indukcję pola magnetycznego przewodnika kołowego z prądem elektrycznym na jego osi.
4. Ruch cząstek naładowanych ładunkiem elektrycznym w polu elektrostatycznym i magnetycznym – siła elektrostatyczna, energia elektrostatyczna ładunku, siła Lorentza, tory ruchu cząstki naładowanej w polu magnetycznym.

5. Opis zestawu doświadczalnego oraz wykonania serii pomiarów:
   - **napięcia** U przyśpieszającego elektrony w działku elektronowym do odpowiedniej prędkości v, z jaką wpadają elektrony w obszar jednorodnego pola magnetycznego i odpowiadającego jemu:
   - **natężenia** prądu I w obwodzie cewek wytwarzających pole magnetyczne o odpowiedniej wartości indukcji magnetycznej B, w celu uzyskania toru elektronu (okręgu) o stałym promieniu r.
6. Analityczne dopasowanie, metodą najmniejszych kwadratów, prostej do zbioru punktów doświadczalnych: U – napięcia przyśpieszającego elektrony oraz I^2 – kwadratu natężenia prądu elektrycznego w obwodzie cewek wytwarzających pole magnetyczne o pewnej indukcji B, przy zachowaniu stałego promienia r okręgu – po którym poruszają się elektrony – w celu określenia współczynnika kierunkowego tejże prostej.
7. Określenie stosunku $\frac{e}{m}$ elektronu na podstawie znajomości współczynnika kierunkowego prostej przedstawiającej funkcyjną zależność U (I^2) dla jego ruchu po ustalonym okręgu o stałym promieniu w jednorodnym polu magnetycznym.
8. Określenie niepewności standardowej typu A pomiaru stosunku $\frac{e}{m}$ elektronu.
9. Zapis wyniku pomiaru stosunku $\frac{e}{m}$ elektronu.

Literatura

1. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, t. 3, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2009.
2. Bobrowski Cz., *Fizyka, krótki kurs*, Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2005.
3. Kubiaczyk A., *Określenie niepewności pomiarów*. [W]: Poradnik do Laboratorium Fizyki. Rozdział 1. Laboratorium Fizyki I, Wydział Fizyki Politechnika Warszawska. Dostępność 30.11.2013r. Strona internetowa: http://www.if.pw.edu.pl/