

Politechnika Lubelska

Andrzej Wac-Włodarczyk

**ZBIÓR ZADAŃ
Z ELEKTROTECHNIKI TEORETYCZNEJ**

**Analiza stanów nieustalonych
w obwodach liniowych**

Lublin, 2003

OPINIODAWCA:
Prof. dr hab. inż. Marian SOIŃSKI

Wydano za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2003

ISBN 83-89246-71-6

Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
ul. Bernardyńska 13, 20-109 Lublin
E-mail: wydawn@rekt.pol.lublin.pl

Druk: Drukarnia „Pektor” Spółka z o.o.
20-341 Lublin, ul. Przesmyk 7
tel. 744-26-33, fax 744-28-42

PRZEDMOWA

Niniejszy „Zbiór zadań” obejmujący analizę stanów nieustalonych w obwodach liniowych o parametrach skupionych adresowany jest do studentów wydziałów elektrycznych wyższych szkół technicznych, przede wszystkim jako pomoc w ćwiczeniach rachunkowych przedmiotu „Elektrotechnika Teoretyczna”.

Zadania uporządkowano w hierarchii stopnia ich złożoności. W celu ułatwienia posługiwania się skryptem zamieszczono wzorcowe rozwiązania dla połowy prezentowanych przykładów. Drugą połowę stanowią zadania z podanymi odpowiedziami, przeznaczone do samodzielnego rozwiązania i sprawdzenia stopnia opanowania materiału przez Czytelnika. Odpowiednie pojęcia i twierdzenia wprowadzono sukcesywnie w trakcie rozwiązywania kolejnych zadań. W przyjętym układzie skryptu, poszczególne przykłady są ze sobą powiązane w tym sensie, że na ogół w każdym następnym zadaniu omawia się nowe zagadnienia teoretyczne, bazując na pojęciach wcześniej już poznanych.

Prezentowany materiał można podzielić na trzy zasadnicze części. Pierwsza dotyczy określania warunków początkowych i zastosowania metody klasycznej (bezpośrednie rozwiązywanie równań całkowo-różniczkowych) w analizie stanów nieustalonych przy wymuszeniach stałych i sinusoidalnych w postaci źródeł napięciowych i prądowych oraz elementach R , L , C z uwzględnieniem sprzężeń magnetycznych.

Druga część odnosi się przede wszystkim do zastosowania metody operatorowej z wykorzystaniem metod: oczkowej, potencjałów węzłowych i Thevenina do obliczania transformat. Wyznaczanie oryginałów transformat przeprowadzono z użyciem wzoru Heaviside’a dla różnych przypadków biegunów oraz metody residuów. Przedstawiono również zastosowanie metody wirującego wektora. W tej części zaprezentowano analizę stanów nieustalonych w trójfazowych obwodach niesymetrycznych a także przypadek wymuszeń wielookresowych z zastosowaniem całki superpozycyjnej Duhamela.

W ostatniej trzeciej części przedstawiono metodę zmiennych stanu z zastosowaniem różnych sposobów obliczania macierzy eAt – wzoru interpolacyjnego Sylwestera, metody przekształceń Laplace’a, rozwinięcia w szereg skończony (tw. Cayleya-Hamiltona) czy też metody wektorów własnych.

W skrypcie zaproponowano jedynie 26 przykładów, jednak wiele z nich można traktować jako kilka osobnych zadań w wyniku stosowania różnych wymuszeń (zad. 1, 10, 13, 18, 22, 26) jak też różnych metod rozwiązywania (zad. 10, 12, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26). Pozwala to na bardziej wnikliwą i wszechstronną analizę rozpatrywanych problemów. Podano wiele przykładów ilustrujących pewne zagadnienia praktyczne (zad. 4, 8, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 22), co stanowi ilustrację zastosowania teorii stanów nieustalonych, pomocą dla studentów pierwszych lat studiów.

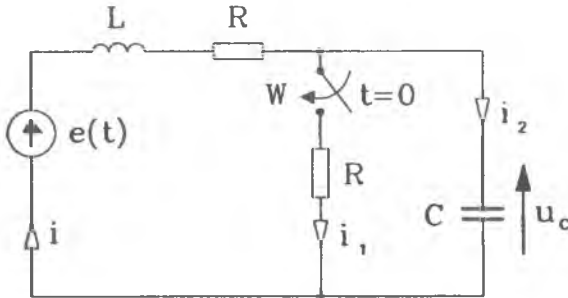
Autor pragnie wyrazić serdeczne podziękowania Panom, prof. dr hab. inż. Tadeuszowi Janowskiemu oraz dr inż. Bolesławowi Horyńskiemu za sugestie i propozycje, które przyczyniły się do powstania tego zbioru. Osobne podziękowanie chciałbym złożyć Panu prof. dr hab. inż. Marianowi Soińskiemu za wnikliwą recenzję skryptu.

II wydanie nie zawiera istotnych zmian i mam nadzieję, iż podobnie jak I wydanie będzie służyć studentom Wydziału Elektrycznego oraz osobom pragnącym pogłębić i usystematyzować wiadomości z elektrotechniki teoretycznej.

Andrzej Wac-Włodarczyk

Zad. 1

W układzie przedstawionym na rys. 1 w chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik „W”. Dla $t < 0$ w obwodzie panował stan ustalony.



Dane:

$$R=10 \, \Omega$$

$$L=31,85 \, \text{mH}$$

$$C=318,5 \, \mu\text{F}$$

Rys. 1.

Należy wyznaczyć:

- 1) prądy $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ dla $e(t) = E = 100 \, \text{V}$
- 2) prądy $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ dla $e(t) = 141 \sin 314t \, [\text{V}]$
- 3) $\frac{di(0^+)}{dt}$ dla $e(t) = E$
- 4) $\frac{di(0^+)}{dt}$ dla $e(t) = 141 \sin 314t \, [\text{V}]$

Rozwiązanie

1) Przy wymuszeniu stałym E

$$i(0^-) = i_2(0^-) = 0 \quad ; \quad i_1(0^-) = 0 \quad ; \quad u_C(0^-) = E$$

Z warunków ciągłości mamy

$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = E$$

$$i_1(0^+) = \frac{u_C(0^+)}{R} = \frac{E}{R} = 10 \text{ A}$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffa

$$i_2(0^+) = i(0^+) - i_1(0^+) = -\frac{E}{R} = -10 \text{ A}$$

2) W celu wyznaczenia warunków początkowych należy znaleźć przebiegi prądu i oraz napięcia u_C w stanie ustalonym dla $t < 0$. Stosujemy rachunek liczb zespolonych

$$\underline{I} = \underline{I}_2 = \frac{Ee^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{j\arctan \frac{X_L - X_C}{R}}} = 10 \text{ [A]}$$

W obwodzie zachodzi rezonans napięć $X_C = X_L = 10 \Omega$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \sin 314 t$$

Z warunków ciągłości

$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

$$\underline{U}_C = -jX_C \underline{I}_2 = -j100 \text{ V} = 100e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ V}$$

$$u_C = 100 \sqrt{2} \sin \left(314t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Podobnie

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 100 \sqrt{2} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 141 \text{ V}$$

$$i_1(0^+) = \frac{u_C(0^+)}{R} = -14,1 \text{ A}$$

$$i_2(0^+) = i(0^+) - i_1(0^+) = 14,1 \text{ A}$$

3) Równanie różniczkowe obwodu po komutacji

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C$$

$$e(0^+) = Ri(0^+) + L \frac{di(0^+)}{dt} + u_C(0^+)$$

Dla wymuszenia stałego (patrz pkt. 1) mamy

$$E = L \frac{di(0^+)}{dt} + E ; \quad \text{stąd} \quad \frac{di(0^+)}{dt} = 0$$

4) Podobnie dla wymuszenia sinusoidalnego

$$e(0^+) = R \cdot i(0^+) + L \frac{di(0^+)}{dt} + u_C(0^+)$$

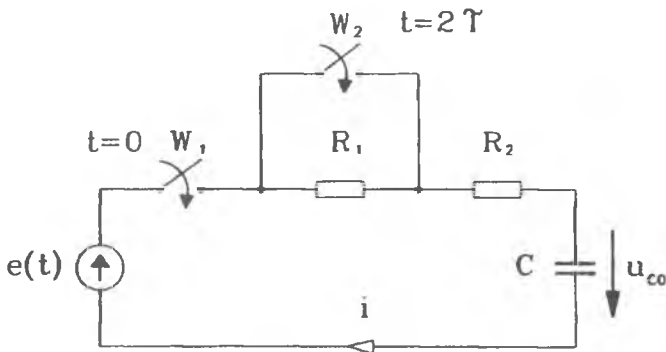
ale z pkt. 2 $i(0^+) = 0$ oraz $u_C(0^+) = -141 \text{ V}$

więc

$$0 = L \frac{di(0^+)}{dt} - 141 ; \quad \text{stąd} \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{141 \text{ V}}{31,85 \text{ mH}} = 4427 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Zad. 2.

W obwodzie przedstawionym na rys. 2 w chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik W_1 , a po czasie równym podwójnej stałej czasowej obwodu pierwotnego zamknięto wyłącznik W_2 .



Dane:

$$\begin{aligned} e(t) &= E = 10 \text{ V} \\ R_1 &= R_2 = 10 \Omega \\ C &= 100 \text{ mF} \\ U_{co} &= 2 \text{ V} \end{aligned}$$

Rys. 2.

Należy:

- 1) obliczyć napięcie na kondensatorze u_C
- 2) obliczyć prąd ładowania kondensatora i
- 3) narysować przebieg $u_C(t)$
- 4) narysować przebieg $i(t)$

Rozwiązanie

Równanie różniczkowe obwodu po zamknięciu wyłącznika W_1

$$E = (R_1 + R_2) \cdot i_1 + u_{C1}$$

Ponieważ, prąd i jest jednocześnie prądem ładowania kondensatora, więc

$$i_1 = C \frac{du_{C1}}{dt}$$

Stąd

$$E = (R_1 + R_2) C \frac{du_{C1}}{dt} + u_{C1}$$

Składowa przejściowa napięcia u_{Cp} jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$C(R_1 + R_2) \frac{du_{Cp1}}{dt} + u_{Cp1} = 0$$

stąd

$$u_{Cp1} = A_1 e^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

gdzie $\tau_1 = (R_1 + R_2) \cdot C = 2s$ jest stałą czasową obwodu pierwotnego.

Składowa ustalona napięcia u_{Cu1} po zamknięciu wyłącznika W_1 wynosi

$$u_{Cu1} = E$$

Stałą całkowania A_1 wyznaczamy z warunku początkowego

$$u_{Cp1}(0) = A_1$$

$$u_{C_1}(0) = u_{C_{w_1}}(0) + u_{C_{p_1}}(0)$$

$$u_{C_1}(0) = -U_{C_o}; \quad u_{C_{w_1}}(0) = E$$

stąd

$$A_1 = -U_{C_o} - E$$

tak więc dla czasu $0 \leq t \leq 2\tau_1$

$$u_{C_1} = u_{C_{w_1}} + u_{C_{p_1}} = E - (U_{C_o} + E) e^{-\frac{t}{\tau_1}} = (10 - 12 e^{-0,5t}) \text{ [V]}$$

zaś

$$i_1 = C \frac{du_{C_1}}{dt} = \frac{U_{C_o} + E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 0,6 e^{-0,5t} \text{ [A]}$$

Dla czasu $t = 2\tau_1$ napięcie na kondensatorze wynosi

$$u_{C_1}(2\tau_1) = E - (U_{C_o} + E) e^{-\frac{2\tau_1}{\tau_1}} = 10 - 12 e^{-2} = 8,38 \text{ [V]}$$

$$i_1(2\tau_1) = \frac{U_{C_o} + E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{2\tau_1}{\tau_1}} = \frac{2 + 10}{20} e^{-2} = 0,6 e^{-2} = 0,081 \text{ [A]}$$

Równanie obwodu po zamknięciu wyłącznika W_2

$$E = R_2 i_2 + u_{C_2} = CR_2 \frac{du_{C_2}}{dt} + u_{C_2}$$

dla składowej przejściowej

$$CR_2 \frac{du_{C_2p}}{dt} + u_{C_2p} = 0$$

stąd

$$u_{C_2p} = A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

gdzie $\tau_2 = CR_2 = 1s$

Składowa ustalona $u_{C_2u} = E$

Stałą całkowania A_2 wyznaczamy z warunku początkowego.

$$u_{C_2p}(0) = A_2$$

Zamknięcie wyłącznika W_2 dla obwodu jest momentem początkowym

$$u_{C_2}(0) = u_{C_1}(2\tau_1)$$

stąd

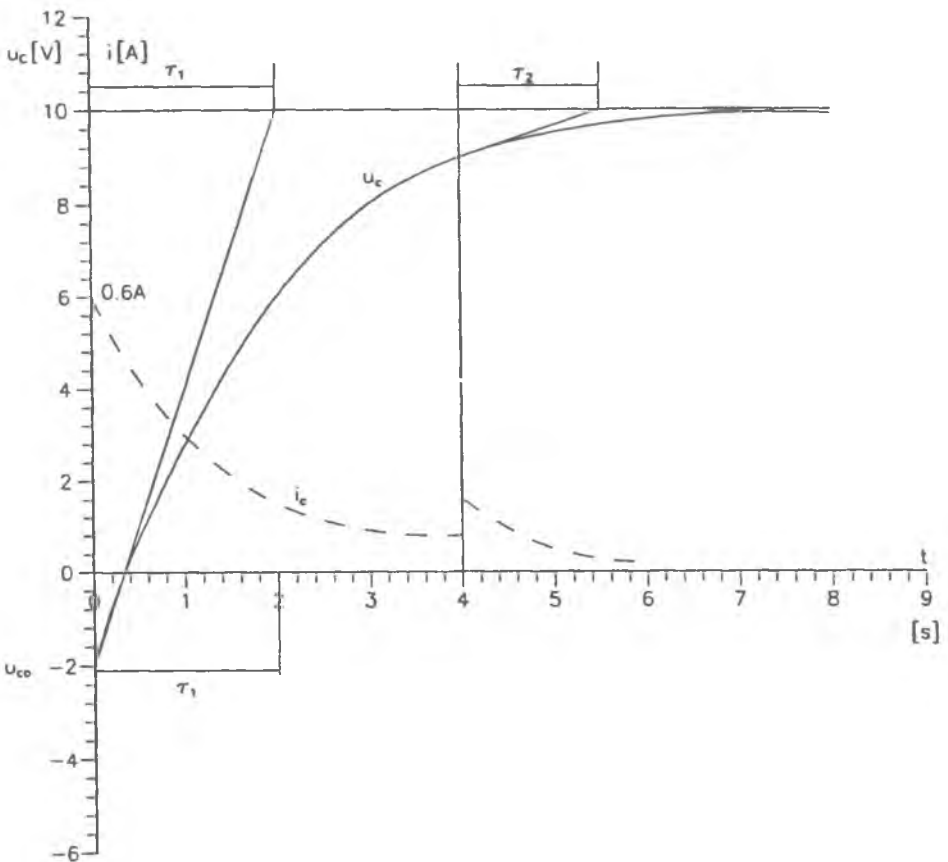
$$A_2 = u_{C_1}(2\tau_1) - E = 8,38 - 10 = -1,62 \text{ [V]}$$

wobec tego

$$u_{C_2} = u_{C_2u} + u_{C_2p} = E + [u_{C_1}(2\tau_1) - E] e^{-\frac{t}{\tau_2}} = (10 - 1,62e^{-t}) \text{ [V]}$$

$$i_2 = C \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{E - u_{C_1}(2\tau_1)}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 0,162 e^{-t} [\text{A}]$$

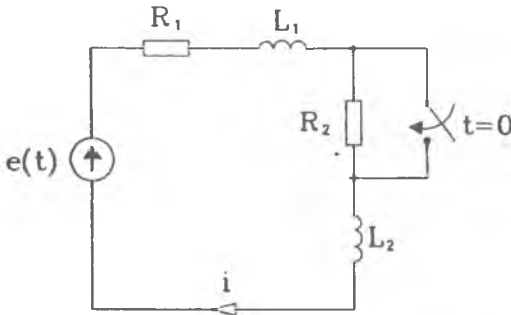
Porównując wartości prądów — widać, iż w momencie zamknięcia wyłącznika W_2 prąd wzrośnie skokowo dwukrotnie od wartości 81 mA do 162 mA.



Rys. 3.

Zad. 3.

W obwodzie którego schemat przedstawia rys. 4 zamknięto wyłącznik w chwili osiągnięcia przez prąd wartości maksymalnej (przy założeniu, że przy otwartym wyłączniku panował stan ustalony).



Dane:

$$e(t) = 20 \sin(1000t + \Psi) \text{ V}$$

$$R_1 = 6 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ } \Omega$$

$$L_1 = 2 \text{ mH}$$

$$L_2 = 8 \text{ mH}$$

Rys. 4.

Należy:

- 1) obliczyć warunek początkowy dla prądu w obwodzie
- 2) określić kąt fazowy obwodu φ oraz fazę początkową napięcia zasilającego Ψ
- 3) obliczyć przebieg prądu płynącego w obwodzie
- 4) obliczyć przebieg napięcia na indukcyjności L_1 i narysować ten przebieg dla kilku okresów napięcia zasilającego.

Rozwiązanie

1) i 2) Wartość chwilowa prądu w obwodzie przed zamknięciem wyłącznika

$$i = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \Psi - \varphi)$$

gdzie

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2)^2} = \sqrt{16^2 + 10^2} = 18,87 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega(L_1 + L_2)}{R_1 + R_2} = \arctg \frac{10}{16} = 32^\circ$$

W celu uzyskania w chwili $t = 0$ maksimum prądu

$$i(0^-) = i(0^+) = i_{\max} = I_m = \frac{E_m}{Z} = \frac{20}{18,87} = 1,06 \text{ [A]}$$

musi być spełniony warunek

$$\sin(\Psi - \varphi) = 1$$

czyli

$$\Psi - \varphi = 90^\circ$$

stąd

$$\Psi = 90^\circ + \varphi = 122^\circ$$

3) Po zamknięciu wyłącznika równanie obwodu jest następujące

$$e(t) = R_1 i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

Składowa przejściowa obliczona z równania jednorodnego wynosi

$$i_p = Ae^{-\frac{R_1}{L_1 + L_2} t} = Ae^{-\frac{6 \cdot 10^3}{10} t} = Ae^{-600 t}$$

Składowa ustalona

$$i_u = I_{m1} \sin(\omega t + \Psi - \varphi_1)$$

gdzie

$$I_{m1} = \frac{E_m}{Z_1} \quad ; \quad Z_1 = \sqrt{R_1^2 + [\omega(L_1 + L_2)]^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11,66 \, [\Omega]$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega(L_1 + L_2)}{R_1} = \arctg 1,67 = 59^\circ$$

$$i_u = 1,72 \sin(1000t + 63^\circ)$$

Przebieg prądu w stanie niustalonym

$$i = i_u + i_p \quad ; \quad i(0) = I_m$$

stąd

$$\begin{aligned} A = i_p(0) &= i(0) - i_u(0) = I_m - I_{m1} \sin(\Psi - \varphi_1) = \\ &= 1,06 - 1,72 \sin 63^\circ = -0,47 \end{aligned}$$

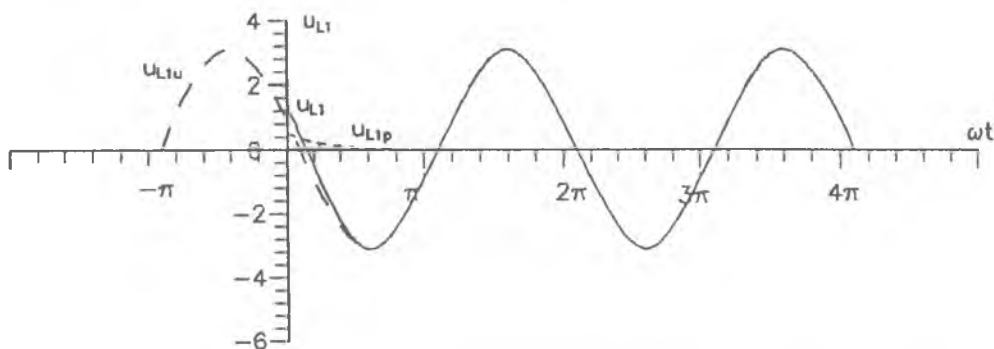
ostatecznie

$$i = [1,72 \sin(1000t + 63^\circ) - 0,47e^{-600t}] \, [A]$$

4) Napięcie na indukcyjności L_1

$$u_{L_1} = L_1 \frac{di}{dt} = 2 \cdot 10^{-3} [1720 \cos(1000t + 63^\circ) + 600 \cdot 0,47e^{-600t}] =$$

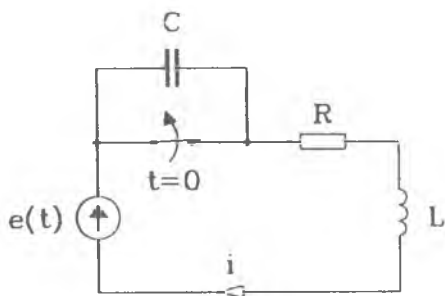
$$= [3,44 \sin(1000t + 153^\circ) + 0,564e^{-600t}] \quad [\text{V}]$$



Rys. 5.

Zad. 4.

W przedstawionym na rys. 6 obwodzie RL włączono równolegle do zacisków wyłącznika kondensator w celu ograniczenia przepięć przy otwieraniu wyłącznika. Dla $t < 0$ układ znajdował się w stanie ustalonym, w chwili $t = 0$ otwarto wyłącznik w.



Dane:

$$e(t) = E = 100 \text{ V}$$

$$R = 5 \, \Omega$$

$$L = 100 \text{ mH}$$

$$C = 0,1 \, \mu\text{F}$$

Rys. 6.

Należy wyznaczyć:

- 1) przebieg napięcia na wyłączniku u_w
- 2) szybkość narastania napięcia między zaciskami otwartego wyłącznika
- 3) największą wartość napięcia na wyłączniku,
oraz
- 4) naszkicować przebieg napięcia u_w
- 5) wyznaczyć wartość rezystancji R , jeżeli przebieg napięcia u_w ma mieć charakter aperiodyczny

Rozwiązanie

1) Po otwarciu wyłącznika, równanie obwodu przedstawia się następująco:

$$e = E = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + u_c$$

Prąd można wyrazić jako

$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

gdzie napięcie u_c jest jednocześnie szukany napięciem na wyłączniku
 $u_w = u_c$.

Stąd

$$E = RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c$$

Dla składowej przejściowej napięcia, mamy

$$\frac{d^2 u_{cp}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{cp}}{dt} + \frac{u_{cp}}{LC} = 0$$

Całka ogólna powyższego równania przyjmuje postać

$$u_{Cp} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

gdzie s_1, s_2 – są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -25 \pm j9999,97 \approx -25 \pm j10^4$$

Ponieważ pierwiastki s_1 i s_2 w rozpatrywanym przypadku są zespolone ($\Delta < 0$) przebiegi przejściowe u_{Cp} oraz i_p mają charakter oscylacyjny tłumiony. Stałe całkowania A_1, A_2 wyznaczamy z warunków początkowych

$$u_C(0^+) = u_{Cu}(0^+) + u_{Cp}(0^+)$$

$$u_{Cp}(0^+) = A_1 + A_2 \quad ; \quad u_{Cu}(0^+) = E$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

$$\text{czyli } 0 = E + A_1 + A_2$$

podobnie

$$i(0^+) = i_u(0^+) + i_p(0^+)$$

$$i_p = C \frac{du_{Cp}}{dt} = A_1 C s_1 e^{s_1 t} + A_2 C s_2 e^{s_2 t}$$

$$i_p(0) = C(A_1 s_1 + A_2 s_2) \quad ; \quad i_u(0^+) = 0$$

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$$

czyli

$$\frac{E}{R} = C(A_1 s_1 + A_2 s_2)$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 0 = 100 + A_1 + A_2 \\ 2 \cdot 10^8 = A_1(-25 + j10^4) + A_2(-25 - j10^4) \end{cases}$$

otrzymując

$$A_1 = \frac{2 \cdot 10^4 - j100}{j2} ; \quad A_2 = \frac{-2 \cdot 10^4 - j100}{j2}$$

stąd

$$u_{C_p} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} =$$

$$= e^{-25t} \left(2 \cdot 10^4 \frac{e^{j10^4 t} - e^{-j10^4 t}}{j2} - 100 \frac{e^{j10^4 t} + e^{-j10^4 t}}{2} \right) =$$

$$= (2 \cdot 10^4 \sin 10^4 t - 100 \cos 10^4 t) e^{-25t} =$$

$$= [2 \cdot 10^4 \sin 10^4 t + 100 \sin(10^4 t + 270^\circ)] e^{-25t} =$$

$$= 20000,2 \sin(10^4 t - 0,286^\circ) e^{-25t} \approx$$

$$\approx (2 \cdot 10^4 \sin 10^4 t) e^{-25t}$$

$$u_w = u_C = u_{Cu} + u_{Cp} = [100 + (2 \cdot 10^4 \sin 10^4 t) e^{-25t}] e^{-25t} \quad [\text{V}]$$

2) Ponieważ $i = C \frac{du_C}{dt}$ oraz tutaj $i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{R}$
więc

$$\frac{du_C(0^+)}{dt} = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{E}{RC} = 2 \cdot 10^8 \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{s}} \right]$$

3) Napięcie na wyłączniku u_w osiąga maksimum, gdy

$$\frac{du_C}{dt} = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} < 0$$

$$\frac{du_C}{dt} = e^{-25t} [50 \cdot 10^4 \sin 10^4 t + (2 \cdot 10^8 + 2,5 \cdot 10^3) \cos 10^4 t] =$$

$$= e^{-25t} \cdot 2,00003 \cdot 10^8 \sin(10^4 t + 89,86^\circ) = 0$$

stąd

$$10^4 t + 89,86^\circ = 180^\circ.$$

$$10^4 t = 90,14^\circ = 1,57$$

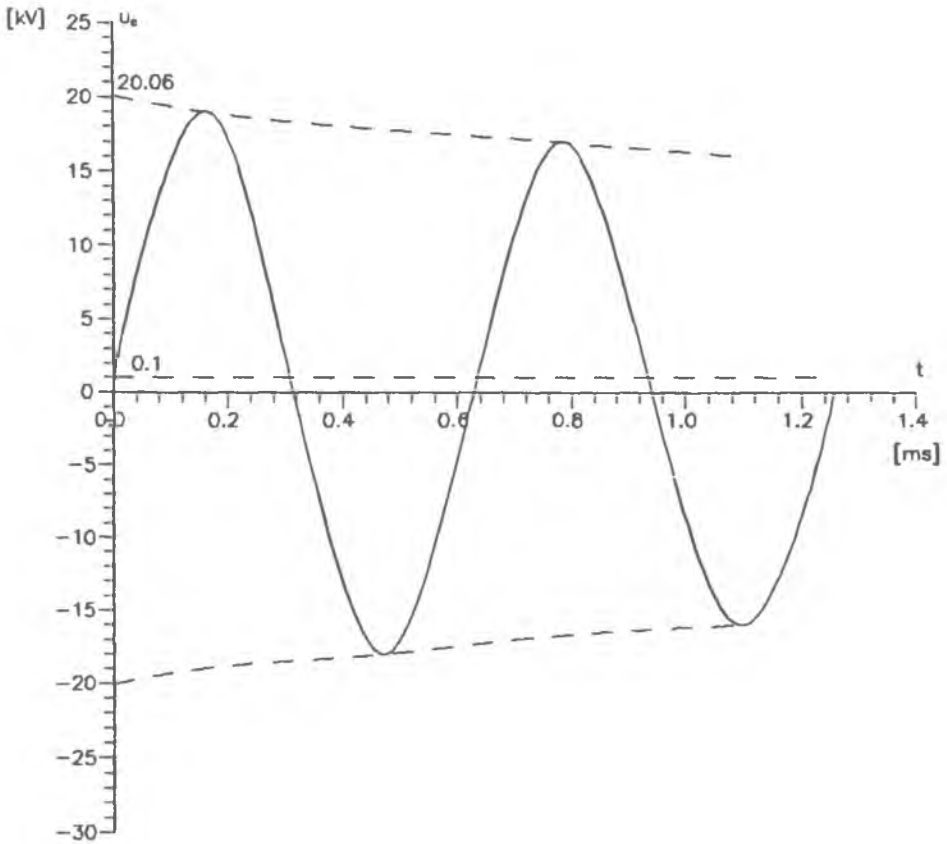
Pierwsze maksimum nastąpi dla $t = 1,57 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

$$u_{w_{\max}} = u_C(t = 1,57 \cdot 10^{-4} \text{ s}) = 100 + 2 \cdot 10^4 e^{-39,33 \cdot 10^{-4}} \approx 20021 \quad [\text{V}]$$

$$u_{w_{\max}} \approx 20 \text{ kV}$$

Następne extrema nie są interesujące, ponieważ składowa przejściowa napięcia jest tłumiona

4)



Rys. 7.

5) Dla przebiegu aperiodycznego granicznego $s_1 = s_2$ czyli

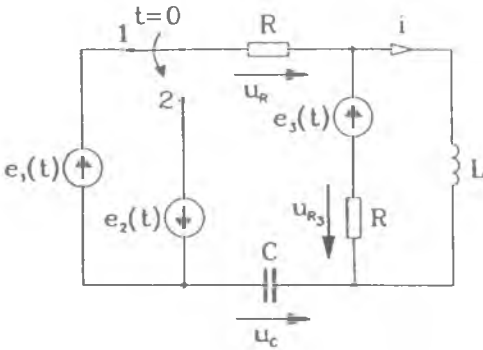
$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$$

stąd

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \sqrt{\frac{0,1 \cdot 10^{-6}}{0,1}} = 2 \cdot 10^3 = 2 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

Zad. 5.

W stanie ustalonym obwodu przedstawionego na rys. 8 przełącznik zostaje przestawiony z pozycji 1 w pozycję 2 w chwili $t = 0$.



Dane:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= 200\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{2}) \text{ V} \\ e_2(t) &= 342\sqrt{2}\sin(314t - \frac{5}{6}\pi) \text{ V} \\ e_3(t) &= E_3 = 50 \text{ V} \\ R &= R_3 = 10 \text{ } \Omega \\ L &= 31,85 \text{ mH} \\ C &= 318,5 \text{ } \mu\text{F} \end{aligned}$$

Rys. 8.

Należy wyznaczyć wartości:

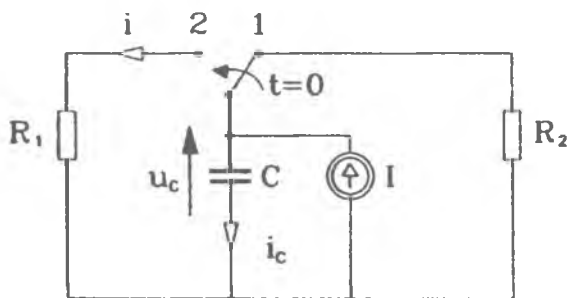
- 1) prądu $i(0^+)$
- 2) napięcia $u_C(0^+)$
- 3) sumy napięć $u_R(0^+) + u_{R3}(0^+)$

Odp.

$$i(0^+) = 5,39 \text{ A} ; u_C(0^+) = -19,14 \text{ V} ; u_R(0^+) + u_{R3}(0^+) = -280 \text{ V}.$$

Zad. 6.

W obwodzie przedstawionym na rys. 9 w chwili $t = 0$ dokonano przełączenia z pozycji 1 w 2. Przed przełączeniem w obwodzie panował stan ustalony.



Dane:

$$R_1 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 30 \, \Omega$$

$$I = 10 \, \text{A}$$

$$C = 100 \, \mu\text{F}$$

Rys. 9

Należy:

- 1) wyznaczyć przebieg $u_C(t)$
- 2) wyznaczyć przebieg $i_C(t)$
- 3) wyznaczyć przebieg $i(t)$
- 4) wyznaczyć przebiegi $u_C(t)$, $i_C(t)$ oraz $i(t)$ w przedziale $-\infty < t < \infty$

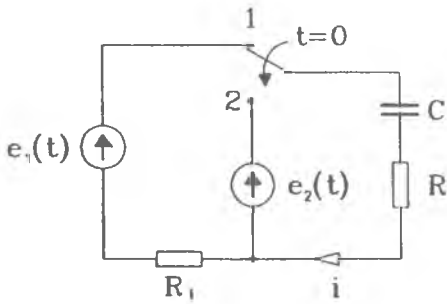
Odp. $u_C(t) = 100 (1 + 2e^{-1000t}) \, [\text{V}]$

$$i_C(t) = -20 e^{-1000t} \, [\text{A}]$$

$$i(t) = 10 (1 + 2e^{-1000t}) \, [\text{A}]$$

Zad. 7.

Do chwili $t = 0$ w obwodzie przedstawionym na rys. 10 panował stan ustalony. W momencie $t = 0$ przestawiono przełącznik z pozycji 1 w pozycję 2.



Dane:

$$e_1(t) = E = 5 \text{ V}$$

$$e_2(t) = 10 \cos(100t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$R = 10 \Omega$$

$$C = 5 \text{ mF}$$

Rys. 10.

Należy:

- 1) obliczyć napięcie na kondensatorze
- 2) obliczyć prąd płynący w obwodzie
- 3) narysować przebieg napięcia i prądu kondensatora w czasie od zera do 3-krotnej wartości stałej czasowej obwodu.

Odp. $u_C = [1,96 \sin(100t + 56,3^\circ) + 3,37e^{-20t}] \text{ V}$

$$i = [0,98 \cos(100t + 56,3^\circ) - 0,337 e^{-20t}] \text{ A}$$

Okres składowej przejściowej $T = 0,063 \text{ s}$.

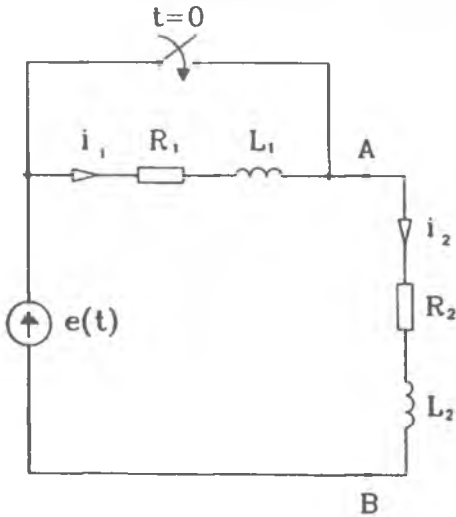
Stała czasowa $\tau = 0,05 \text{ s}$

Zad. 8.

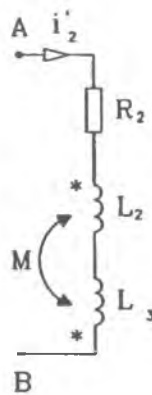
W obwodzie przedstawionym na rys. 11 istniał stan ustalony przy otwartym wyłączniku. W chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik.

Należy:

- 1) wyznaczyć przebiegi prądów i_1 oraz i_2 po zamknięciu wyłącznika
- 2) narysować przebiegi tych prądów
- 3) wyznaczyć jak zmieniają się przebiegi prądów i_1 oraz i_2 po włączeniu dodatkowej cewki o indukcyjności L_3 zgodnie z rys. 11b.



Rys. 11a.



Rys. 11b.

Dane:

$$e(t) = E = 160 \text{ V}$$

$$R_1 = 6 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ } \Omega$$

$$L_1 = 0,6 \text{ H}$$

$$L_2 = 0,5 \text{ H}$$

$$L_3 = 0,3 \text{ H}$$

$$M = 0,2 \text{ H}$$

Odp.

$$i_1 = 10e^{-10t} \text{ A} ; \quad i_1' = i_1$$

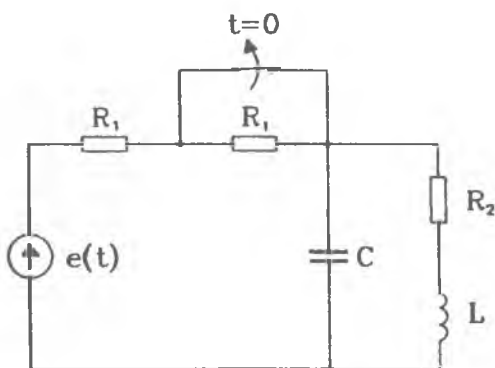
$$i_2 = (16 - 6e^{-20t}) \text{ A} ; \quad i_2' = (16 - 6e^{-25t}) \text{ A}$$

Zad. 9.

W obwodzie przedstawionym na rys. 12 w chwili $t = 0$ otwarto wyłącznik. Poprzednio obwód znajdował się w stanie ustalonym.

Należy:

- 1) narysować operatorowy schemat zastępczy obwodu dla $t > 0$
- 2) określić warunki początkowe obwodu
- 3) stosując metodę prądów oczkowych, ułożyć równania operatorowe opisując obwód
- 4) obliczyć transformatę i oryginał napięcia na indukcyjności
- 5) obliczyć transformatę i oryginał napięcia na kondensatorze. -



Dane:

$$e(t) = E = 2 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ } \Omega$$

$$C = 1 \text{ F}$$

$$L = 1 \text{ H}$$

Rys. 12.

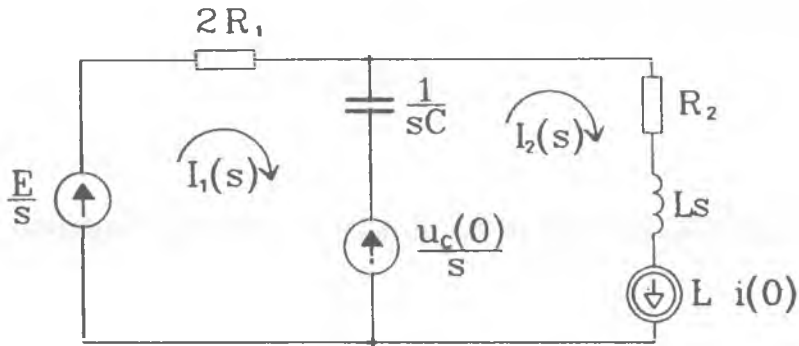
Rozwiązanie

1) Schemat operatorowy rozpatrywanego obwodu przedstawia rys. 13

2) Warunki początkowe obwodu wyznaczamy korzystając z zasady ciągłości prądu w cewce i napięcia na kondensatorze w chwili komutacji

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1 \text{ [A]}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = 1 \text{ [V]}.$$



Rys. 13.

3) Stosując metodę prądów oczkowych, dla obwodu przedstawionego na rys. 13 można zapisać:

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{s} - \frac{U_c(0)}{s} \\ \frac{U_c(0)}{s} + L i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{sC} & R_2 + sL + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

4) Po wstawieniu danych liczbowych

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{s} - \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1 + s + \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

Z pierwszego równania

$$I_1(s) = \frac{I_2(s) + 1}{2s + 1}$$

Po wstawieniu powyższego do drugiego z równań otrzymujemy

$$I_2(s) = \frac{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}{s \left(s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{3}{2} \right)}$$

Transformata napięcia na indukcyjności wynosi

$$U_L(s) = sL \cdot I_2(s) - L \cdot i(0) = \frac{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(s + \frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \frac{L(s)}{N(s)}$$

Wartość chwilową napięcia na indukcyjności wyznaczamy stosując podstawowy wzór Heaviside'a stanowiący tezę twierdzenia o rozkładzie przy biegunach jednokrotnych.

$$u_L(t) = \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{N'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{-\frac{1}{2}}{2s_1 + \frac{3}{2}} e^{s_1 t} - \frac{\frac{1}{2}}{2s_2 + \frac{3}{2}} e^{s_2 t} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{3}{2}} e^{\left(-\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{3}{2}} e^{\left(-\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)t} \right] =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{15}} e^{-\frac{3}{4}t} \frac{e^{j\frac{\sqrt{15}}{4}t} - e^{-j\frac{\sqrt{15}}{4}t}}{j2} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{15}} e^{-\frac{3}{4}t} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t =$$

$$= -0,716 e^{-0,75t} \sin 0,968 t.$$

5) Transformata napięcia na kondensatorze wynosi

$$U_C(s) = U_L(s) + R_2 \cdot I_2(s) = \frac{-\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}} + \frac{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}{s\left(s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}\right)} =$$

$$= \frac{s^2 + s + 1}{s\left(s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}\right)} = \frac{L(s)}{s M(s)}$$

W celu obliczenia oryginału powyższej transformaty stosujemy wzór Heaviside'a dostosowany do przypadku wyodrębnionego bieguna zeroowego

$$u_C(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{2}{3} + \frac{s_1^2 + s_1 + 1}{s_1 \left(2s_1 + \frac{3}{2}\right)} e^{s_1 t} +$$

$$+ \frac{s_2^2 + s_2 + 1}{s_2 \left(2s_2 + \frac{3}{2}\right)} e^{s_2 t} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{\left(-\frac{3}{4} + j \frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} + j \frac{\sqrt{15}}{4} + 1}{\left(-\frac{3}{4} + j \frac{\sqrt{15}}{4}\right) j \frac{\sqrt{15}}{2}} e^{\left(-\frac{3}{4} + j \frac{\sqrt{15}}{4}\right) t} +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4} + 1}{j\frac{\sqrt{15}}{2}\left(\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} e^{\left(-\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)t} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2e^{-\frac{3}{4}t}}{45} \left[\left(5 + j\sqrt{15}\right)e^{j\frac{\sqrt{15}}{4}t} + \left(5 - j\sqrt{15}\right)e^{-j\frac{\sqrt{15}}{4}t} \right] =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9}e^{-\frac{3}{4}t} \left(\cos \frac{\sqrt{15}}{4}t - \frac{\sqrt{15}}{5} \sin \frac{\sqrt{15}}{4}t \right) =$$

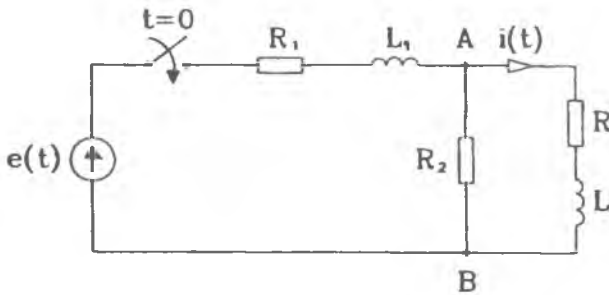
$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9}e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{10} \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{4}t - \arctg \frac{5}{\sqrt{15}} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{8\sqrt{10}}{45}e^{-\frac{3}{4}t} \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{4}t - 52,24^\circ \right) =$$

$$= 0,67 + 0,56e^{-0,75t} \sin (0,97t - 52,24^\circ) \text{ [V]}.$$

Zad. 10

Obwód przedstawiony na rys. 14 znajduje się w stanie ustalonym. W chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik.



Dane:

$$R_1 = R_2 = R = 10 \, \Omega$$

$$L_1 = L = 0,5 \, \text{H}$$

Rys. 14.

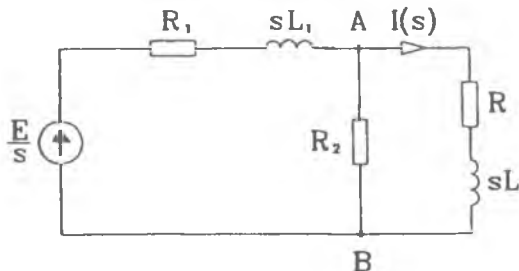
Należy obliczyć i wykreślić przebieg prądu $i(t)$ jeżeli napięcie źródłowe $e(t)$ wynosi:

1) $e(t) = E = 100 \, \text{V}$

2) $e(t) = 100\sqrt{2} \sin 20t \, \text{V}$

Rozwiązanie

1) Warunki początkowe są zerowe. Schemat operatorowy obwodu po zamknięciu wyłącznika przedstawia rys. 15.



Rys. 15.

Zadanie rozwiązujemy metodą Thevenina.

Napięcie zastępczego generatora w stanie jałowym gałęzi R, sL wynosi

$$U_{AB}(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R_1 + R_2 + sL_1} \cdot R_2 = \frac{E \cdot R}{s(2R + sL_1)}$$

Impedancja zastępczego generatora widziana z zacisków AB w stanie bezprądowym

$$Z_{AB}(s) = \frac{R_2 (R_1 + sL_1)}{R_1 + R_2 + sL_1} = \frac{R (R + sL)}{2R + sL}$$

Transformata szukanego prądu wynosi

$$I(s) = \frac{U_{AB}(s)}{Z_{AB}(s) + R + sL} = \frac{E \cdot R}{s(s^2L^2 + 4sRL + 3R^2)} =$$

$$= \frac{\frac{E \cdot R}{L^2}}{s \left(s + \frac{3R}{L} \right) \left(s + \frac{R}{L} \right)} = \frac{M(s)}{s M(s)}$$

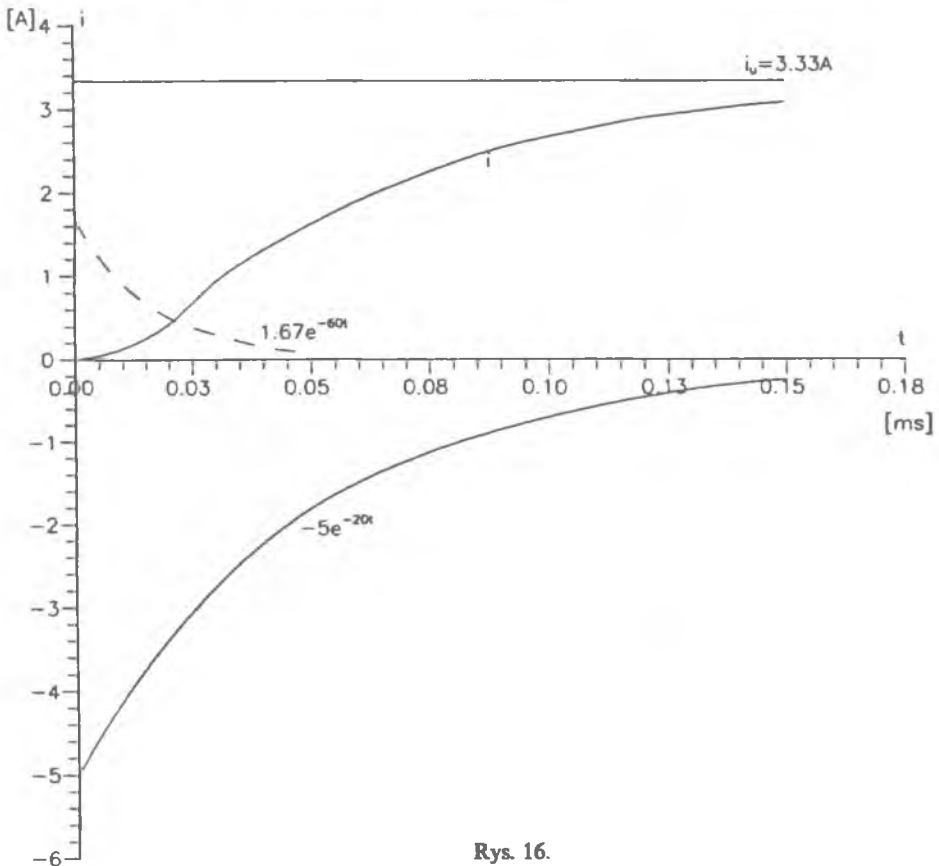
Przebieg prądu $i(t)$ wyznaczamy stosując wzór Heaviside'a przy wyodrębnionym pierwiastku zerowym

$$i(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t} =$$

$$= \frac{ERL^2}{3L^2R^2} + \frac{\frac{E \cdot R}{L^2}}{\frac{3R}{L} \left(\frac{6R}{L} - \frac{4R}{L} \right)} e^{-\frac{3R}{L}t} - \frac{\frac{E \cdot R}{L^2}}{\frac{R}{L} \left(-\frac{2R}{L} + \frac{4R}{L} \right)} e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= \frac{E}{3R} + \frac{E}{6R} e^{-\frac{3R}{L}t} - \frac{E}{2R} e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= 3,33 - 5e^{-20t} + 1,67e^{-60t} \quad [\text{A}]$$



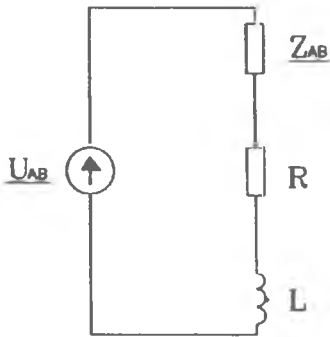
Rys. 16.

2) Zadanie rozwiążemy również metodą Thevenina, przekształcając wyjściowy schemat z rys. 14 do postaci przedstawionej na rys. 17. gdzie:

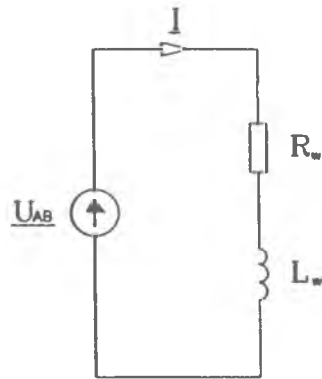
$$\underline{Z}_{AB} = \frac{(R_1 + j\omega L_1) R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L_1} = \frac{(10 + j10)10}{20 + j10} = 2(3 + j) = 6,32 e^{j18,43^\circ} [\Omega]$$

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{E} \cdot R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_1)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L_1}{R_1 + R_2}}} =$$

$$= \frac{100 \cdot 10}{\sqrt{400 + 100} e^{j \arctg 0,5}} = 44,72 e^{-j26,57^\circ} [\text{V}]$$



Rys. 17a



Rys. 17b.

$$R_w = \text{Re}(\underline{Z}_{AB}) + R = 16 [\Omega]$$

$$L_w = \frac{I_m (\underline{Z}_{AB})}{\omega} + L = \frac{2}{20} + 0,5 = 0,6 \quad [\text{H}]$$

Przebieg szukanego prądu $i(t)$ wyznaczymy dwukrotnie korzystając z metody wirującego wektora prądu (2a) oraz stosując łącznie metodę klasyczną i operatorową (2b).

2a) Równanie napięć między wartościami chwilowymi w obwodzie z rys. 17b.

$$U_{mAB} \sin(\omega t + \Psi) = 44,72\sqrt{2} \sin(20t - 26,57^\circ) = R_w i + L_w \frac{di}{dt}$$

zastępujemy przez równanie napięć między wektorami wirującymi

$$R_w \cdot i_w + L_w \frac{di_w}{dt} = U_{mAB} e^{j\Psi} \cdot e^{j\omega t} = 44,72\sqrt{2} e^{-j26,57^\circ} e^{j20t}$$

Odpowiada mu równanie między transformatami

$$(R_w + sL_w) I_w(s) - L_w i_w(0) = U_{mAB} e^{j\Psi} \cdot \frac{1}{s - j\omega}$$

Ponieważ, ustaliliśmy (rys. 14, pkt 1), iż warunki początkowe są zerowe, transformata szukanego prądu wynosi

$$I_w(s) = \frac{U_{mAB} \cdot e^{j\Psi}}{(s - j\omega)(sL_w + R_w)}$$

Stosując twierdzenie o rozkładzie dostosowane do obwodów o wymuszeniu sinusoidalnym, otrzymujemy wektor wirujący prądu w funkcji czasu

$$\begin{aligned}
 i_w(t) &= U_m e^{j\Psi} \cdot \frac{1}{Z(j\omega)} e^{j\omega t} + U_m e^{j\Psi} \sum_{k=1}^m \frac{e^{s_k t}}{(s_k - j\omega) Z'(s_k)} = \\
 &= \frac{44,72\sqrt{2} e^{-j26,57^\circ} e^{j20t}}{16 + j12} - \frac{44,72\sqrt{2} e^{-j26,57^\circ} e^{-\frac{16}{0,6} t}}{\left(\frac{16}{0,6} + j20\right) \cdot 0,6} = \\
 &= 3,16e^{j(20t-63,44^\circ)} - 3,16e^{-j63,44^\circ} e^{-26,67^\circ t}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$s_1 = -\frac{R_w}{L_w}; \quad Z(s_1) = s_1 L_w + R_w$$

$$Z'(s_1) = L_w; \quad Z(j\omega) = R_w + j\omega L_w$$

Część urojona powyższego wyrażenia daje wartość chwilową szukanego prądu:

$$\begin{aligned}
 i &= I_m i_w = 3,14 \sin(20t - 63,44^\circ) + (3,16 \sin 63,44^\circ) e^{-26,67^\circ t} = \\
 &= 3,16 \sin(20t - 63,44^\circ) + 2,83e^{-26,67^\circ t} \quad [\text{A}]
 \end{aligned}$$

2b) Stosując metodę superpozycji składowej ustalonej i składowej przejściowej. Składową ustaloną prądu wyznaczamy metodą klasyczną w obwodzie przedstawionym na rys. b, wykorzystując rachunek liczb zespolonych.

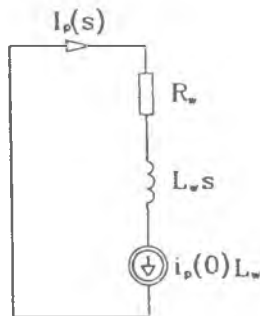
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{R_w^2 + (\omega L_w)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L_w}{R_w}}} =$$

$$= \frac{44,72 e^{-j26,57^\circ}}{20 e^{j36,87^\circ}} = 2,24 e^{-j63,44^\circ} \quad [A]$$

Składowa ustalona jest wartością chwilową obliczonego prądu:

$$i_w = 2,24\sqrt{2} \sin(20t - 63,44^\circ) = 3,16 \sin(20t - 63,44^\circ) \quad [A]$$

Składową przejściową prądu wyznaczamy metodą operatorową korzystając ze schematu operatorowego przedstawionego na rys. 18.



Rys. 18.

Transformata szukanego prądu

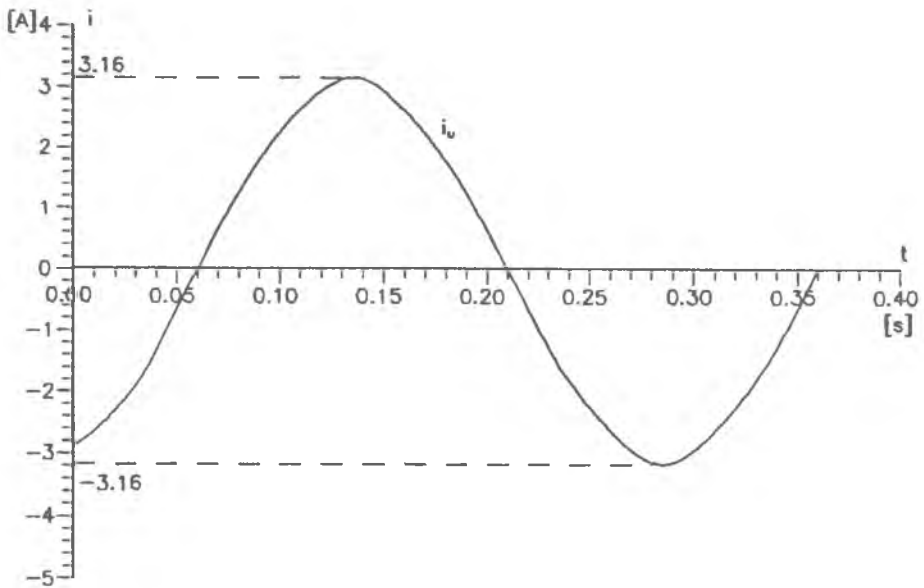
$$I_p(s) = \frac{i_p(0)L_W}{R_W + sL_W}$$

gdzie

$$i_p(0) = i(0) - i_u(0) = 0 - 3,16 \sin(-63,44^\circ) = 2,83 \quad [\text{A}]$$

stąd

$$I_p(s) = \frac{2,83 \cdot 0,6}{16 + 0,6s} = \frac{2,83}{s + 26,67}$$



Rys. 19a.

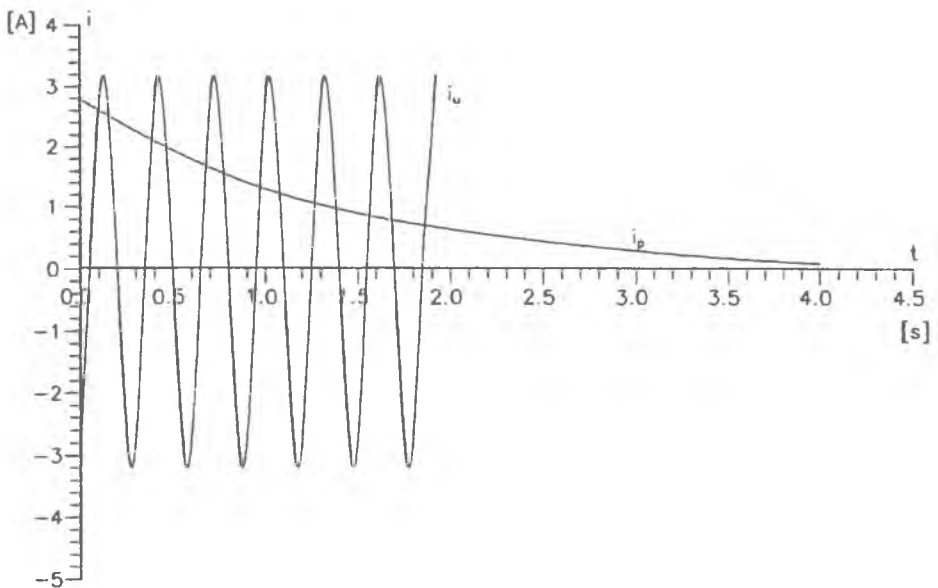
oryginał powyższej funkcji wynosi

$$i_p(t) = 2,83e^{-26,67t} \quad [\text{A}]$$

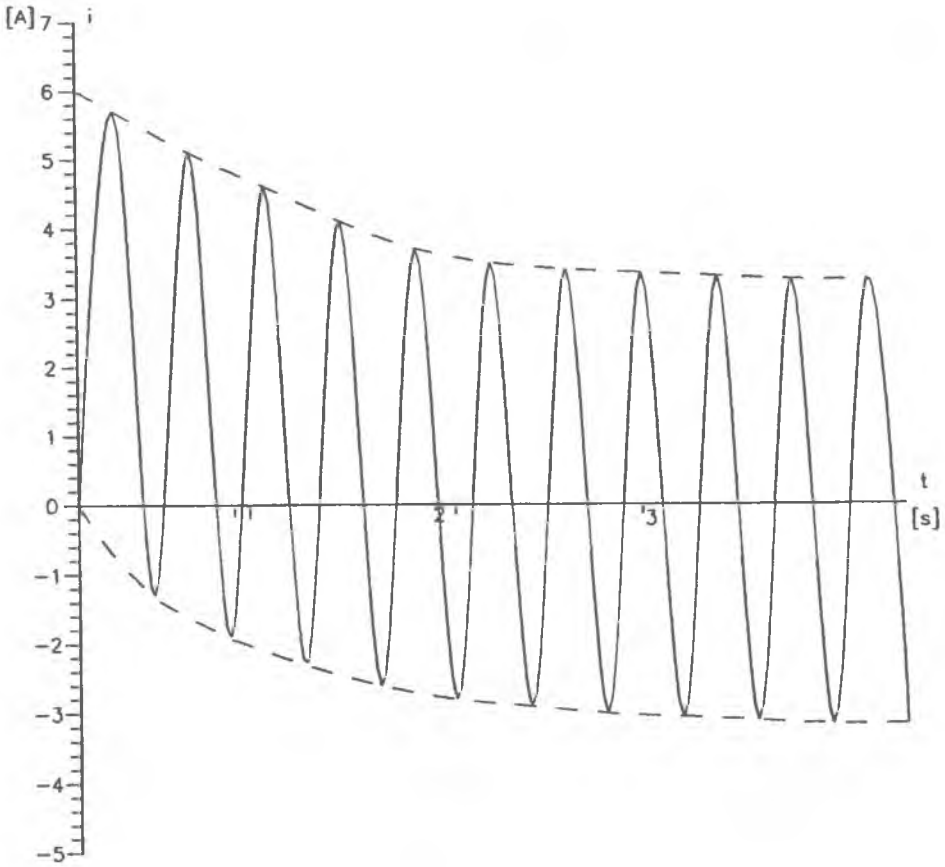
ostateczną wartość chwilową szukanego prądu

$$\begin{aligned} i(t) &= i_u + i_p = 3,16 \sin(20t - 63,44^\circ) + 2,83e^{-26,67t} = \\ &= 3,16 \sin(20t - 1,11) + 2,83e^{-0,47t} \quad [\text{A}] \end{aligned}$$

przedstawia rys. 19c.



Rys. 19b.



Rys. 19c.

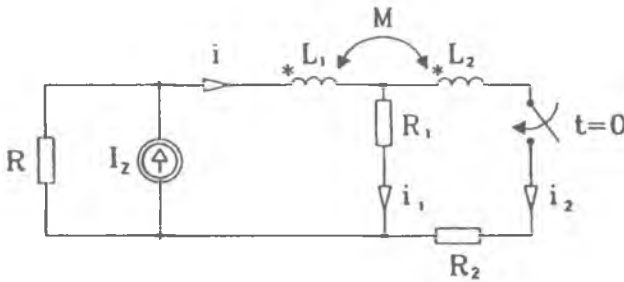
Zad. 11.

W układzie przedstawionym na rys. 20 zamknięto wyłącznik w chwili $t=0$. Dla $t < 0$ w obwodzie panował stan ustalony.

Należy:

- 1) określić warunki początkowe obwodu.
- 2) narysować operatorowy schemat zastępczy układu dla $t > 0$.

- 3) wyznaczyć transformaty prądów $I_1(s)$, $I_2(s)$.
 4) obliczyć przebiegi prądów $i(t)$, $i_1(t)$ oraz $i_2(t)$.



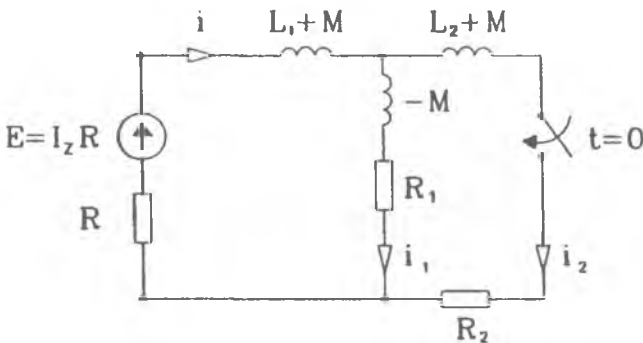
Dane:

$$\begin{aligned} I_2 &= 20 \text{ A} \\ R &= R_2 = 1 \text{ k}\Omega \\ R_1 &= 200 \Omega \\ L_1 &= L_2 = 0,6 \text{ H} \\ M &= 0,4 \text{ H} \end{aligned}$$

Rys. 20.

Rozwiązanie

1) Zadanie rozwiążemy zastępując źródło prądu równoważnym rzeczywistym źródłem napięcia oraz stosując metodę eliminacji sprzężeń. Schemat uwzględniający powyższe przedstawia rys. 21.



Rys. 21.

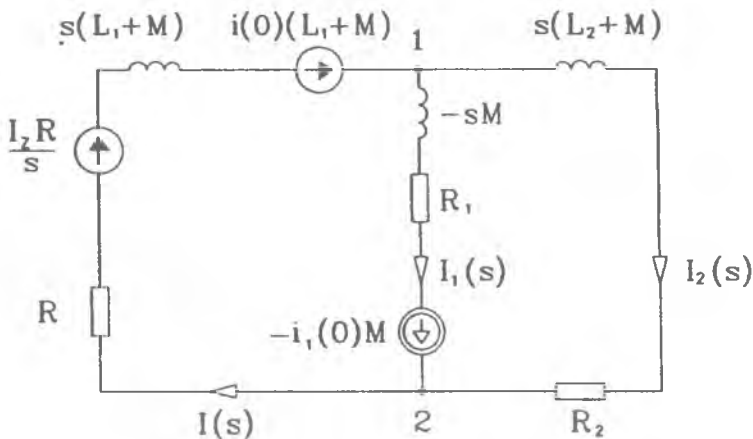
Warunki początkowe obwodu są następujące

$$i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$$

$$i(0^+) = i(0^-) = i_1(0^+) = i_1(0^-) = \frac{E}{R + R_1} = \frac{I \cdot R}{R + R_1} =$$

$$= \frac{20 \cdot 1000}{1200} = \frac{50}{3} = 16,67 \quad [\text{A}]$$

2) Operatorowy schemat zastępczy dla układu z rys. 21 uwzględniający warunki początkowe przedstawia rys. 22.



Rys. 22.

3) Transformaty prądów wyznaczmy metodą potencjałów węzłowych. Przyjmując potencjał punktu 2 jako zerowy $V_2(s) = 0$ mamy

$$V_1(s) \left[\frac{1}{R + s(L_1 + M)} + \frac{1}{R_1 - sM} + \frac{1}{R_2 + s(L_2 + M)} \right] =$$

$$= \frac{\frac{I_z \cdot R}{s} + i(0) \cdot (L_1 + M)}{R + s(L_1 + M)} + \frac{i_1(0) \cdot M}{R_1 - sM}$$

$$V_1(s) \left(\frac{1}{1000 + s} + \frac{1}{200 - 0,4s} + \frac{1}{1000 + s} \right) =$$

$$= \frac{\frac{20000}{s} + \frac{50}{3}}{1000 + s} + \frac{\frac{20}{3}}{200 - 0,4s}$$

$$V_1(s) = \frac{2 \cdot 10^7 + 10^4 s}{s (s + 7000)}$$

Transformaty prądów

$$I_2(s) = \frac{V_1(s)}{R_2 + s(L_2 + M)} = \frac{2 \cdot 10^7 + 10^4 s}{s (s + 1000) (s + 7000)}$$

$$V_1(s) - i_1(0) \cdot M = I_1(s) (R_1 - sM)$$

$$I_1(s) = \frac{V_1(s) - i_1(0) \cdot M}{R_1 - sM} = \frac{\frac{2 \cdot 10^7 + 10^4 s}{s (s + 7000)} - \frac{20}{3}}{200 - 0,4s} =$$

$$= \frac{-20s^2 - 11 \cdot 10^4 s + 6 \cdot 10^7}{1,2s (s + 7000) (500 - s)} =$$

$$= \frac{-(s - 500)(s + 6000)}{-1,2s (s + 7000) (s - 500)} = \frac{s + 6000}{1,2s(s + 7000)}.$$

4) Oryginały prądów $i_2(t)$ oraz $i_1(t)$ wyznaczymy ze wzoru Heaviside'a

$$i_2(t) =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^7}{7 \cdot 10^6} + \frac{2 \cdot 10^7 - 10^7}{-10^6 (-2 + 8)} e^{-1000t} + \frac{2 \cdot 10^7 - 7 \cdot 10^7}{-7 \cdot 10^6 (-14 + 8)} e^{-7000t} =$$

$$= 2,86 - 1,67e^{-1000t} - 1,19e^{-7000t} \quad [A]$$

$$i_1(t) = \frac{5 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^3} + \frac{-\frac{7000}{1,2} + 5000}{-7000} e^{-7000t} = 0,71 + 0,12e^{-7000t} \quad [A]$$

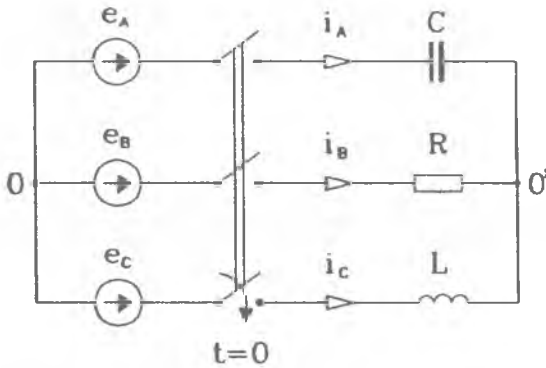
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 3,57 - 1,67e^{-1000t} - 1,07e^{-7000t} \quad [A]$$

Zad. 12.

Napięcie chwilowe fazy A idealnego generatora trójfazowego symetrycznego połączzonego w gwiazdę (rys. 23) określone jest wyrażeniem

$$e_A = 220\sqrt{2} \sin \left(314t - \frac{\pi}{6} \right) V. \quad \text{W chwili } t = 0 \text{ zamknięto}$$

równocześnie zestyki wyłącznika trójfazowego łączącego generator z odbiornikiem. Przed zamknięciem zestyków wyłącznika prądy w fazach odbiornika nie płynęły, zaś napięcie wstępne kondensatora było zerowe.



Dane:

$$C = 31,8 \text{ mF}$$

$$R = 1 \text{ } \Omega$$

$$L = 3,18 \text{ mH}$$

Rys. 23.

Należy:

- 1) wyznaczyć transformatę napięcia między punktami zerowymi odbiornika i generatora $U_{0'0}(s)$.
- 2) określić transformaty prądów fazowych $I_A(s)$, $I_B(s)$, $I_C(s)$.
- 3) obliczyć oryginał prądu $i_A(t)$ stosując twierdzenie o rozkładzie.
- 4) obliczyć przebieg prądu $i_A(t)$ posługując się metodą residuów.

Rozwiązanie

1) Zadanie rozwiążemy stosując metodę potencjałów węzłowych z zastosowaniem przekształcenia Laplace'a.

Transformata przebiegu

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Psi)$$

wynosi

$$F(s) = A \frac{\omega \cos\Psi + s \sin\Psi}{s^2 + \omega^2}$$

wobec tego transformaty napięć fazowych są następujące:

$$\begin{aligned} E_A(s) &= 220\sqrt{2} \frac{314 \cos \frac{\pi}{6} - s \sin \frac{\pi}{6}}{s^2 + 314^2} = \\ &= 110\sqrt{2} \frac{314\sqrt{3} - s}{s^2 + 314^2} = 110\sqrt{2} \frac{543,86 - s}{s^2 + 314^2} \end{aligned}$$

$$E_B(s) = 220\sqrt{2} \frac{314 \cos \frac{5\pi}{6} - s \sin \frac{5\pi}{6}}{s^2 + 314^2} = 110\sqrt{2} \frac{543,86 + s}{s^2 + 314^2}$$

$$E_C(s) = 220\sqrt{2} \frac{314 \cos \frac{\pi}{2} + s \sin \frac{\pi}{2}}{s^2 + 314^2} = 220\sqrt{2} \frac{s}{s^2 + 314^2}$$

Admitancje operatorowe faz odbiornika wynoszą odpowiednio:

$$Y_A(s) = \frac{1}{Z_A(s)} = sC = 31,8 \cdot 10^{-3}s$$

$$Y_B(s) = \frac{1}{Z_B(s)} = 1$$

$$Y_C(s) = \frac{1}{Z_C(s)} = \frac{1}{s \cdot L} = \frac{10^3}{3,18s} = \frac{314,47}{s}$$

Transformata napięcia między punktami zerowymi odbiornika i generatora wynosi:

$$\begin{aligned}
 U_{o.o}(s) &= \frac{E_A(s) Y_A(s) + E_B(s) Y_B(s) + E_C(s) Y_C(s)}{Y_A(s) + Y_B(s) + Y_C(s)} = \\
 &= 110\sqrt{2} \frac{\frac{543,86-s}{s^2+314^2} \cdot 31,8 \cdot 10^{-3}s - \frac{543,86+s}{s^2+314^2} + \frac{2s}{s^2+314^2} \cdot \frac{314,47}{s}}{31,8 \cdot 10^{-3}s + 1 + \frac{314,47}{s}} = \\
 &= 110\sqrt{2}s \frac{-31,8 \cdot 10^{-3}s^2 + 16,29s + 85,08}{(s^2 + 314^2)(31,8 \cdot 10^{-3}s^2 + s + 314,47)} = \\
 &= \frac{110\sqrt{2} s (-s^2 + 512,32s + 2675,77)}{(s^2 + 314^2)(s + 15,73 + j98,19)(s + 15,73 - j98,19)}
 \end{aligned}$$

2). Transformaty prądów fazowych.

$$\begin{aligned}
 I_A(s) &= \frac{E_A(s) - U_{o.o}(s)}{\frac{1}{sC}} = \\
 &= 110\sqrt{2} \cdot 31,8 \cdot 10^{-3}s \left[\frac{543,86 - s}{s^2 + 314^2} - \frac{s(-s^2 + 512,32s + 2675,77)}{(s^2 + 314^2)(s^2 + 31,45s + 9889)} \right] = \\
 &= \frac{22471,16s^2 + 26\,622\,245s}{(s + j314)(s - j314)(s + 15,73 + j98,19)(s + 15,73 - j98,19)} = \frac{L(s)}{N(s)}
 \end{aligned}$$

$$I_B(s) = \frac{E_B(s) - U_{o.o}(s)}{R} =$$

$$= 110\sqrt{2} \left[\frac{-543,86 - s}{s^2 + 314^2} - \frac{s(-s^2 + 512,32s + 2675,77)}{(s^2 + 314^2)(s^2 + 31,45s + 9889)} \right] =$$

$$= \frac{-169\,097,5 (s^2 + 27,29s + 4947,77)}{(s^2 + 314^2)(s^2 + 31,45s + 9889)}$$

$$I_C(s) = \frac{E_C(s) - U_{o.o}(s)}{sL} =$$

$$= \frac{110\sqrt{2}}{3,18 \cdot 10^{-3}s} \left[\frac{2s}{s^2 + 314^2} - \frac{s(-s^2 + 512,32s + 2675,77)}{(s^2 + 314^2)(s^2 + 31,45s + 9889)} \right] =$$

$$= \frac{146\,758 (s^2 - 149,81s + 5700,73)}{(s^2 + 314^2)(s^2 + 31,45s + 9889)}.$$

3) Przebieg prądu $i_A(t)$ wyznaczymy korzystając z podstawowego wzoru Heaviside'a dla biegunów jednokrotnych.

$$i_A(t) = \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{N'(s_k)} e^{s_k t}$$

Bieguny transformaty $I_A(s)$

$$s_{1,2} = \mp j 314$$

$$s_{3,4} = -15,73 \pm j 98,19$$

Pochodna mianownika transformaty $I_A(s)$ wynosi

$$\begin{aligned} N'(s) &= 2s (s^2 + 31,45s + 9889) + (2s + 31,45) (s^2 + 314^2) = \\ &= 4s^3 + 94,35s^2 + 216970s + 3100844,2 \end{aligned}$$

wobec tego

$$\begin{aligned} i_A(t) &= \frac{-22471,16 \cdot 314^2 - j26622245 \cdot 314}{j4 \cdot 314^3 - 94,35 \cdot 314^2 - j216970 \cdot 314 + 3100844,2} e^{-j314t} + \\ &+ \frac{-22471,16 + j84784,22}{-j1256 - 94,35 + j691 + 31,45} e^{j314t} + \\ &+ \frac{[22471,16(-15,73 - j98,19)^2 + 26622245(-15,73 - j98,19)] e^{(-15,73 - j98,19)t}}{4(-15,73 - j98,19)^3 + 94,35(-15,73 - j98,19)^2 + 216970(-15,73 - j98,19) + 3100844,2} + \\ &+ \frac{[22471,16(-9393,85 - j3089,06) + 26622245(-15,73 + j98,19)] e^{(-15,73 + j98,19)t}}{4(451080,05 - j873791,22) + 94,35(-9393,85 - j3089,06) + 216970(-15,73 + j98,19) + 3100844,2} = \\ &= \frac{-357,25 - j1347,92}{-1 + j8,98} e^{-j314t} + \frac{-357,25 + j1347,92}{-1 - j8,98} e^{j314t} + \\ &+ \frac{-1040,49 - j4203,58}{1 - j29,2} e^{(-15,73 - j98,19)t} + \frac{-1040,49 + j4203,58}{1 + j29,2} e^{(-15,73 + j98,19)t} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-11747,07 + j4556,03}{81,64} e^{-j314t} - \frac{11747,07 + j4556,03}{81,64} e^{j314t} +$$

$$+ \frac{121704,04 - j34585,89}{853,64} e^{(-15,73 - j98,19)t} + \frac{121704,04 + j34585,89}{853,64} e^{(-15,73 + j98,19)t} =$$

$$= -287,78 \cos 314t + 111,61 \sin 314t +$$

$$+ 286e^{-15,73t} \cos 98,19t - 81,5e^{-15,73t} \sin 98,19t =$$

$$= 287,78 \sin (314t + 270^\circ) + 111,61 \sin 314t +$$

$$+ e^{-15,73t} [286 \sin(98,19t + 90^\circ) + 81,5 \sin (98,19t + 180^\circ)] =$$

$$= \sqrt{287,78^2 + 111,61^2 + 2 \cdot 287,78 \cdot 111,61 \cos 270^\circ}$$

$$\sin \left(314t + \arctg \frac{287,78 \sin 270^\circ + 111,61 \sin 0^\circ}{287,78 \cos 270^\circ + 111,61 \cos 0^\circ} \right) +$$

$$+ e^{-15,73t} \sqrt{286^2 + 81,5^2 + 2 \cdot 286 \cdot 81,5 \cdot \cos 90^\circ}$$

$$\sin \left(98,19t + \arctg \frac{286 \sin 90^\circ + 81,5 \sin 180^\circ}{286 \cos 90^\circ + 81,5 \cos 180^\circ} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 308,67 \sin(314t - 68,8^\circ) + 297,4e^{-15,73t} \sin[98,19t + (180^\circ - 74^\circ)] = \\
 &= 308,67 \sin(314t - 68,8^\circ) + 297,4e^{-15,73t} \sin(98,19t + 106^\circ)
 \end{aligned}$$

4) Przebieg prądu $i_A(t)$ możemy wyznaczyć korzystając z metody residuów

$$\begin{aligned}
 i_A(t) &= \text{res} \sum_{k=1}^m I_A(s) e^{st} = \lim_{s \rightarrow -j314} (s + j314) I_A(s) e^{st} + \lim_{s \rightarrow j314} (s - j314) I_A(s) e^{st} + \\
 &+ \lim_{s \rightarrow -15,73 - j98,19} (s + 15,73 + j98,19) I_A(s) e^{st} + \\
 &+ \lim_{s \rightarrow -15,73 + j98,19} (s + 15,73 - j98,19) I_A(s) e^{st} = \\
 &= 2\text{Re} \left[\lim_{s \rightarrow j314} (s - j314) I_A(s) e^{st} \right] + \\
 &+ 2\text{Re} \left[\lim_{s \rightarrow -15,73 + j98,19} (s + 15,73 - j98,19) I_A(s) e^{st} \right] = \\
 &= 2\text{Re} \left[\lim_{s \rightarrow j314} \frac{22471,16s^2 + 26622245s}{(s + j314)(s^2 + 31,45s + 9889)} e^{st} + \right. \\
 &\left. + \lim_{s \rightarrow -15,73 + j98,19} \frac{22471,16s^2 + 26622245s}{(s^2 + 314^2)(s + 15,73 + j98,19)} e^{st} \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{714,5 - j2695,84}{1 + j8,98} e^{j314t} + \frac{-2076,27 + 8388,11}{1 + j28,87} e^{(-15,73 + j98,19)t} \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[(-287,78 - j111,61) (\cos 314t + j \sin 314t) + \right.$$

$$\left. + e^{-15,73t} (286 + j81,5) (\cos 98,19t + j \sin 98,19t) \right] =$$

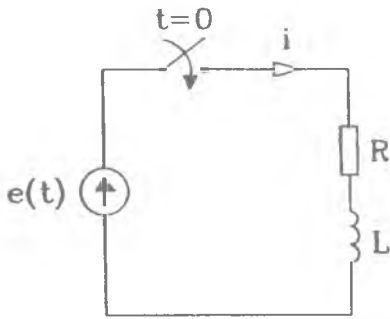
$$= -287,78 \cos 314t + 111,61 \sin 314t +$$

$$+ 286e^{-15,73t} \cos 98,19t - 81,5e^{-15,73t} \sin 98,19t =$$

$$= 308,67 \sin (314t - 68,8^\circ) + 297,4e^{-15,73t} \sin(98,19t + 106^\circ) .$$

Zad. 13.

W obwodzie, którego schemat przedstawia rys. 24 zamknięto wyłącznik w chwili $t = 0$.



Dane:

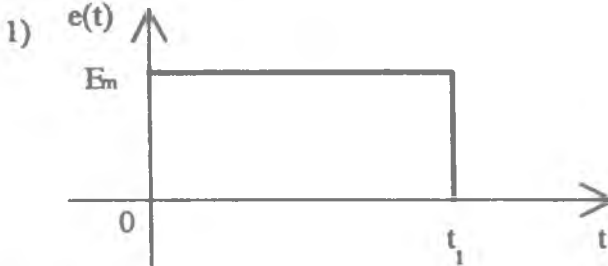
$$R=20 \, \Omega$$

$$L=400 \, \text{mH}$$

Rys. 24

Należy wyznaczyć przebieg prądu $i(t)$ dla $t \geq 0$ jeżeli przebieg napięcia zasilającego jest następujący:

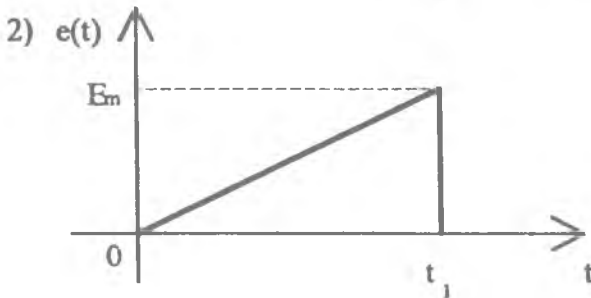
Rys. 25



$$E_m=80\text{V}$$

$$t_1=10\text{ms}$$

Rys. 26



$$E_m=80\text{V}$$

$$t_1=10\text{ms}$$

3)

$$e(t) = E_m e^{-\beta t}$$

$$E_m = 80\text{V}$$

$$\beta = 25\text{s}^{-1}$$

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy metodą całki superpozycyjnej Duhamela.

Admitancja operatorowa $Y(s)$ analizowanego obwodu oraz jej oryginał $y(t)$ wynoszą odpowiednio:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{sL + R} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

$$y(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L} t}$$

Odpowiedź jednostkową $i_e(t)$ obliczymy z zależności

$$i_e(t) = \int_0^t y(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L} t} \int_0^t e^{\frac{R}{L} \tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

$$i_e(t-\tau) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} e^{\frac{R}{L} \tau} \right)$$

1. Ponieważ przebieg napięcia wymuszającego jest złożony, w chwili t_1 występuje punkt nieciągłości funkcji $e(t)$ — wyróżnimy dwa przedziały, pierwszy od $\tau=0$ do $\tau = t_1$, oraz drugi dla $\tau > t_1$.

Dla przedziału $0 \leq \tau \leq t_1$ prąd wyznaczymy z zależności

$$i(t) = u(0^+) i_E(t) + \int_0^t i_E(t - \tau) u'(\tau) d\tau$$

gdzie

$$u(0^+) = e(0^+) = E_m$$

$$u'(\tau) = \left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=\tau} = 0$$

tak więc

$$i(t) = \frac{E_m}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = 4 (1 - e^{-50t}) \quad [A]$$

dla przedziału $t_1 \leq \tau < \infty$

Ponieważ prąd w dowolnej chwili jest wynikiem działania wszystkich wymuszeń występujących do tejże chwili, więc

$$i(t) = u(0^+) i_E(t) + \int_0^{t_1} i_E(t - \tau) u'_1(\tau) d\tau + (0 - \alpha) i_E(t - \tau) + \int_{t_1}^t i_E(t - \tau) u'_2(\tau) d\tau$$

gdzie

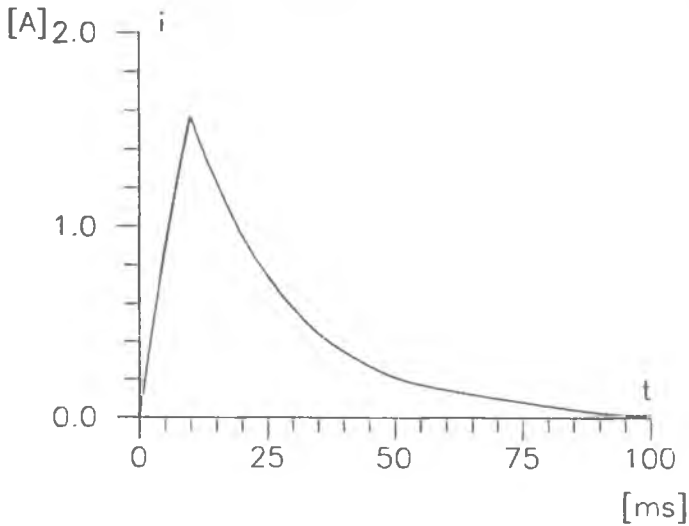
$$u_1(\tau) = E_m, \quad u'_1(\tau) = 0$$

$$u_2(\tau) = 0$$

stąd

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{E_m}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) - \frac{E_m}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} e^{\frac{R}{L}\tau} \right) = \\
 &= \frac{E_m}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \left(e^{\frac{R}{L}t_1} - 1 \right) = 4e^{-50t} (\sqrt{e} - 1) \quad [\text{A}]
 \end{aligned}$$

Przebieg szukanego prądu przedstawia rys. 27.



Rys. 27.

2. W przedziale $0 \leq \tau \leq t_1$

$$i(t) = u(0^+) i_g(t) + \int_0^t i_g(t - \tau) u'(\tau) d\tau$$

gdzie

$$u(0^+) = e(0^+) = 0$$

$$e(t) = \frac{E_m}{t_1} t$$

$$u'(\tau) = \left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=\tau} = \frac{E_m}{t_1}$$

więc

$$i(t) = \int_0^t \frac{E_m}{t_1 R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} e^{\frac{R}{L} \tau} \right] d\tau = \frac{E_m t}{R t_1} - \frac{E_m}{R t_1} \cdot \frac{L}{R} \left(e^{\frac{R}{L} t} - 1 \right) e^{-\frac{R}{L} t} =$$

$$= \frac{E_m}{R t_1} \left(t - \frac{L}{R} + \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \right) = 8 (50t + e^{-50t} - 1) \quad [\text{A}]$$

w przedziale $t_1 \leq \tau < \infty$

$$i(t) = u(0^+) i_E(t) + \int_0^{t_1} i_E(t-\tau) u'(\tau) d\tau + (0-\alpha) i_E(t-t_1) + \int_{t_1}^t i_E(t-\tau) u'_2(\tau) d\tau$$

gdzie

$$u_1(t) = e_1(t) = \frac{E_m}{t_1} t$$

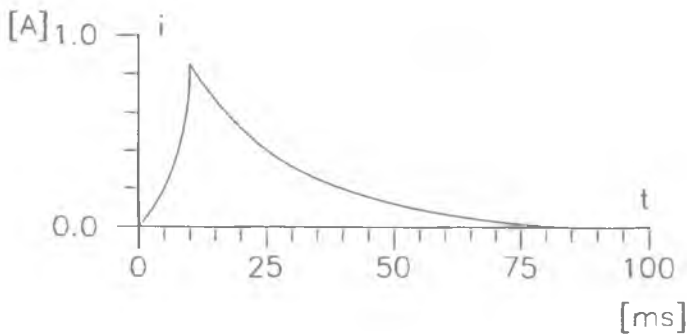
$$u'_1(\tau) = \frac{E_m}{t_1}$$

$$u_2(\tau) = 0$$

stąd

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^{t_1} \frac{E_m}{R t_1} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \right] d\tau - \frac{E_m}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)} \right] = \\ &= \frac{E_m}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \left(e^{\frac{R}{L}t_1} + \frac{L}{R t_1} - \frac{L}{R t_1} e^{\frac{R}{L}t_1} \right) = 4e^{-50t} (2 - \sqrt{e}) \quad [\text{A}] \end{aligned}$$

Przebieg prądu przedstawia rys. 28.



Rys. 28.

3.

$$i(t) = u(0^+) i_E(t) + \int_0^t i_E(t - \tau) u'(\tau) s \tau$$

gdzie

$$u(0^+) = e(0^+) = E_m$$

$$u'(\tau) = \left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=\tau} = -E_m \beta e^{-\beta t}$$

więc

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E_m}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) - \int_0^t \frac{E_m \beta e^{-\beta \tau}}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} (t-\tau)} \right] d\tau = \\ &= \frac{E_m}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} - \beta \int_0^t e^{-\beta \tau} d\tau + \beta e^{-\frac{R}{L} t} \int_0^t e^{\left(\frac{R}{L} - \beta \right) \tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{E_m}{R} \left[e^{-\beta t} - e^{-\frac{R}{L} t} + \beta e^{-\frac{R}{L} t} \frac{L}{R - \beta \cdot L} \left(e^{\frac{R}{L} t} e^{-\beta t} - 1 \right) \right] = \\ &= 8(e^{-25t} - e^{-50t}) \quad [\text{A}] \end{aligned}$$

Przebieg szukanego prądu ilustruje rys. 29.

Maksimum prądu występuje dla

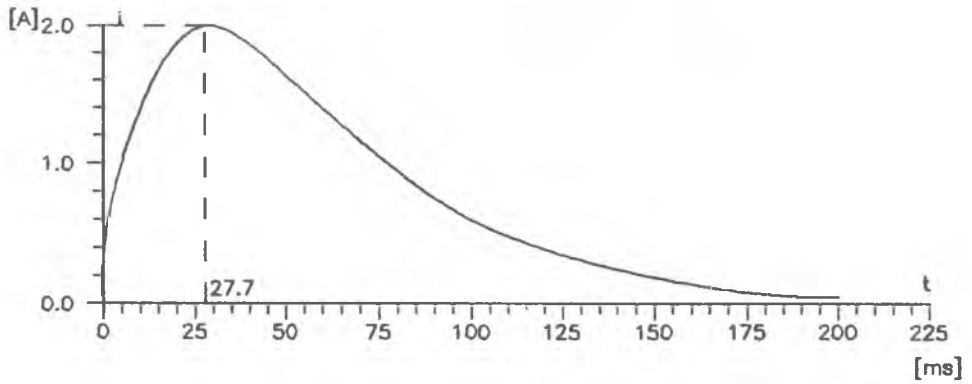
$$i'(t) = -200e^{-25t} + 400e^{-50t} = 0$$

czyli dla czasu

$$t = \frac{\ln 2}{25} = 27,7 \quad [\text{ms}]$$

i wynosi

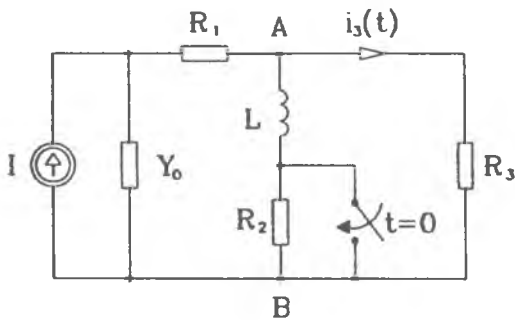
$$I_m = 2A$$



Rys. 29

Zad. 14.

W obwodzie podanym na rysunku 30 w chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik. Poprzednio układ znajdował się w stanie ustalonym.



Dane:

$$I=10 \text{ A}$$

$$Y_0=0,2 \text{ S}$$

$$R_1=5 \text{ } \Omega$$

$$R_2=8 \text{ } \Omega$$

$$R_3=10 \text{ } \Omega$$

$$L=1 \text{ H}$$

Rys. 30.

Stosując metodę operatorową należy:

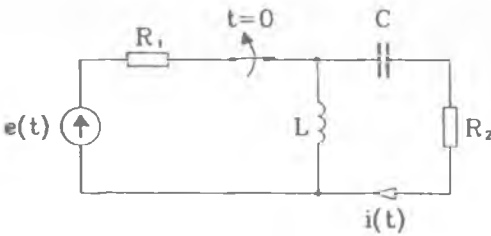
- 1) obliczyć warunek początkowy.
- 2) narysować schemat operatorowy obwodu.
- 3) korzystając z zasady Thevenina obliczyć transformatę prądu $I_3(s)$.
- 4) znaleźć oryginał tego prądu, $i_3(t)$.
- 5) wyznaczyć energię wydzieloną w elemencie R_3 w czasie 0-10s.

Odp.

$$i_2(0) = 1,92\text{A} ; \quad I_3(s) = \frac{1,54}{s + 5} ; \quad i_3(t) = 1,54e^{-5t}\text{A} ; \quad W = 1,98 \text{ J}$$

Zad. 15.

Obwód o schemacie podanym na rys. 31 przed otwarciem wyłącznika znajdował się w stanie ustalonym. W chwili $t = 0$ otwarto wyłącznik.



Dane:

$$e(t) = 116,6\sqrt{2} \sin(10t + 30^\circ 58') \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \ \Omega$$

$$R_2 = 10 \ \Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

$$C = 20 \text{ mF}$$

Rys. 31.

Należy:

- 1) znaleźć warunek początkowy dla prądu cewki $i_L(0)$.
- 2) obliczyć warunek początkowy dla napięcia na kondensatorze $u_C(0)$.
- 3) narysować schemat operatorowy obwodu dla $t > 0$.
- 4) wyznaczyć transformatę prądu płynącego przez R_2 .
- 5) obliczyć oryginał tego prądu $i(t)$.

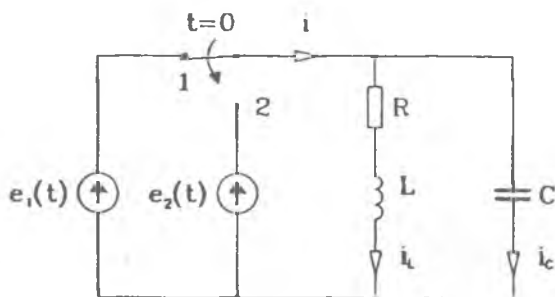
Odp.

$$i_L(0) = -11,31 \text{ A} ; \quad u_C(0) = -28,27 \text{ V} ; \quad I(s) = \frac{-11,31s - 28,27}{s^2 + 10s + 50} ;$$

$$i(t) = 12,64e^{-5t} \cos(5t - 153,43^\circ) \text{ A}$$

Zad. 16.

Dany jest układ o schemacie pokazanym na rys. 32. W chwili $t = 0$ przełącznik przestawiono z pozycji 1 w pozycję 2. Dla $t < 0$ w układzie panował stan ustalony.



Dane:

$$e_1(t) = E_1 = 4 \text{ V}$$

$$e_2(t) = e^{-t} \sin(2t) \text{ V}$$

$$R = 4 \text{ } \Omega$$

$$L = 0,5 \text{ H}$$

$$C = 100 \text{ mF}$$

Rys. 32.

Należy:

- 1) obliczyć warunki początkowe.
- 2) narysować schemat operatorowy obwodu.
- 3) wyznaczyć transformaty prądów $I(s)$, $I_L(s)$, $I_C(s)$.
- 4) obliczyć oryginał prądu płynącego przez cewkę stosując wzór Heaviside'a.
- 5) obliczyć przebieg tegoż samego prądu stosując metodę residuów.

Odp.

$$i_L(0) = 1 \text{ A} ; \quad u_C(0) = 4 \text{ V}$$

$$I_L(s) = \frac{s^2 + 2s + 9}{(s+8)(s^2+2s+5)} ; \quad I_C(s) = - \frac{0,4s^2+0,6s+2}{s^2+2s+5} ;$$

$$I(s) = - \frac{0,4s^3 + 2,8s^2 + 4,8s + 7}{(s+8)(s^2+2s+5)} ;$$

$$i_L(t) = [10,89e^{-8t} + 0,28e^{-0,5t}\sin(2t + 24,78^\circ)] \text{ A}$$

Zad. 17.

W chwili $t = 0$ zamknięto równocześnie zestyki wyłącznika trójfazowego łączącego idealny trójfazowy generator symetryczny z odbiornikiem (rys. 33). Warunki początkowe są zerowe.

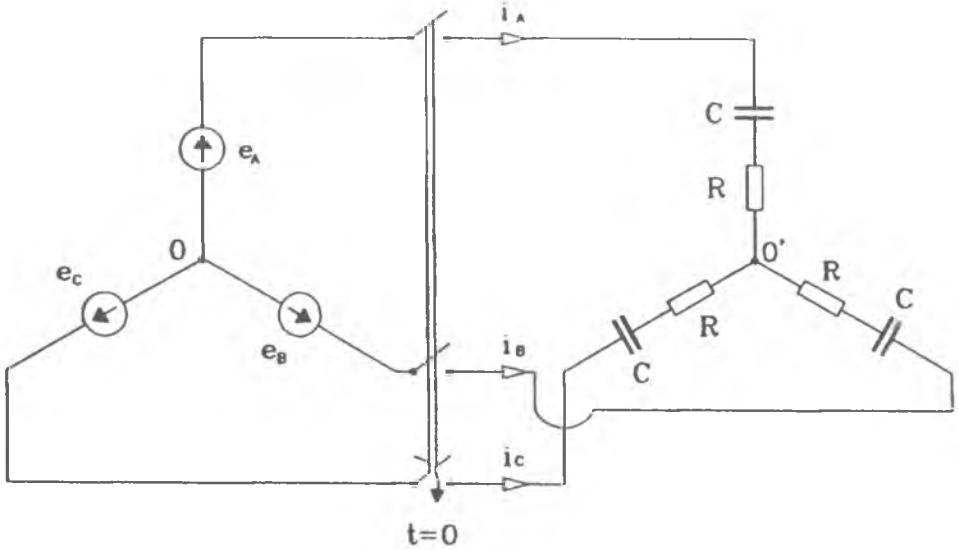
Należy:

- 1) wyznaczyć transformaty prądów przewodowych $I_A(s)$, $I_B(s)$, $I_C(s)$.
- 2) obliczyć przebiegi prądów i_A , i_B oraz i_C .
- 3) określić transformaty napięć na kondensatorach.
- 4) obliczyć przebiegi napięć na kondensatorach.

Odp.

$$I_A(s) = \frac{220s}{s^2 + 314^2} ; \quad I_B(s) = \frac{25283,28s - 300,52s^2}{(s^2 + 314^2)(s + 314)} ;$$

$$I_C(s) = \frac{80,52s^2 - 94363,28s}{(s^2 + 314^2)(s + 314)}$$



Rys. 33.

Dane:

$$e_A(t) = 220\sqrt{2}\sin(314t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$R = 1 \text{ } \Omega$$

$$C = 3,18 \text{ mF}$$

$$i_A = (220 \cos 314t) \text{ A} ; i_B = [190,5e^{-314t} + 220 \cos(314t - 120^\circ)] \text{ A}$$

$$i_C = [190,5e^{-314t} + 220 \cos(314t + 120^\circ)] \text{ A}$$

$$U_{CA}(s) = \frac{69182}{s^2 + 314^2} ; U_{CB}(s) = \frac{314(25283,28 - 300,52s)}{(s^2 + 314^2)(s + 314)} ;$$

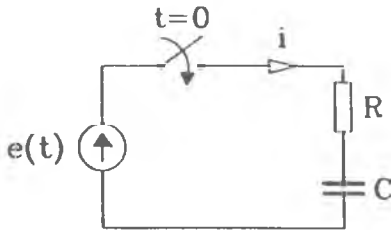
$$U_{CC}(s) = \frac{314(80,52s - 94363,28)}{(s^2 + 314^2)(s + 314)} ; u_{CA}(t) = (220 \sin 314t) \text{ V} ;$$

$$u_{CB}(t) = [190,5e^{-314t} + 220 \cos(314t - 210^\circ)] \text{ V}$$

$$u_{CC}(t) = [-190,5e^{-314t} + 220 \cos(314t + 30^\circ)] \text{ V}$$

Zad. 18

W szeregowym obwodzie R, C (rys. 34) zamknięto wyłącznik w chwili $t=0$.



Dane:

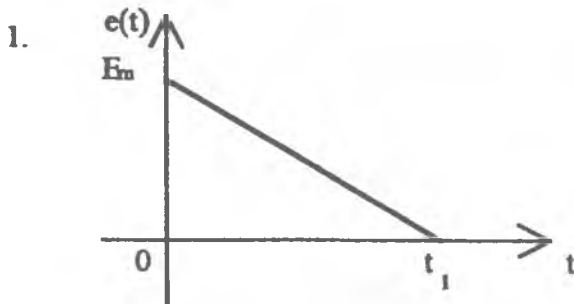
$$E_m = 80 \text{ V}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

Rys. 34.

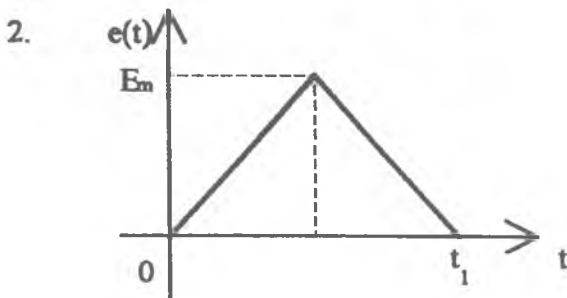
Należy wyznaczyć i narysować przebieg napięcia $u_C(t)$ oraz prądu $i(t)$ jeżeli przebieg napięcia zasilającego jest następujący:



$$E_m = 80 \text{ V}$$

a) $t_1 = 10 \text{ ms}$ b) $t_1 = 1 \text{ ms}$

Rys. 35

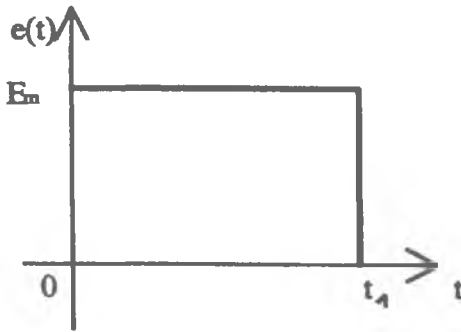


$$E_m = 80 \text{ V}$$

a) $t_1 = 10 \text{ ms}$ b) $t_1 = 1 \text{ ms}$

Rys. 36

3.



$$E_m = 80 \text{ V}$$

$$\text{a) } t_1 = 10 \text{ ms}$$

$$\text{b) } t_1 = 1 \text{ ms}$$

Rys. 37

Odp.

$$1. \text{ Dla } 0 \leq t \leq t_1$$

$$\text{a) } i = 8(9e^{-1000t} - 1) \text{ mA ; } \quad \text{b) } i = -80 \text{ mA ;}$$

$$\text{dla } t \geq t_1$$

$$\text{a) } i = 8(9 - e^{-10}) e^{-1000t} \text{ mA} \quad \text{b) } i = -80 e^{-(1000t+1)} \text{ mA}$$

$$2. \text{ Dla } 0 \leq t \leq t_{1/2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } u_C &= 16(1000t + e^{-1000t} - 1) \text{ V ; } \quad \text{b) } u_C = \\ &= 160(1000t - e^{-1000t} - 1) \text{ V} \end{aligned}$$

$$\text{dla } \frac{t_1}{2} \leq t \leq t_1$$

$$\text{a) } u_C = (161 - 16 \cdot 10^3 t + 2e^{-2000t+5}) \text{ V ,}$$

$$b) u_C = (161 - 16 \cdot 10^4 t + 2e^{-2000t+0,5}) \text{ V},$$

$$\text{dla } t \geq t_1$$

$$a) u_C = 16e^{-1000t}(1 + 3e^5 + e^{10}) \text{ V}$$

$$b) u_C = 160e^{-1000t}(1 - 1,5e^{0,5} + e^{10}) \text{ V}$$

$$3. \text{ Dla } 0 \leq t \leq t_1$$

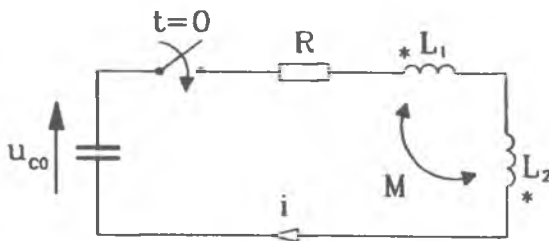
$$a) u_C = 80(1 - e^{-1000t}) \text{ V}, \quad b) u_C = 80(1 - e^{-1000t}) \text{ V}$$

$$\text{dla } t \geq t_1$$

$$a) u_C = 80e^{-1000t}(e^{10} - 1) \text{ V}, \quad b) u_C = 80e^{-1000t}(e - 1) \text{ V}$$

Zad. 19.

W obwodzie o schemacie podanym na rysunku 38 przed zamknięciem wyłącznika ($t < 0$) panował stan ustalony – napięcie na kondensatorze było równe $u_{C0} = 10 \text{ V}$.



Dane:

$$R = 4 \ \Omega$$

$$L_1 = M = 1 \text{ H}$$

$$L_2 = 2 \text{ H}$$

$$C = 1 \text{ F}$$

Rys. 38.

Przyjmując, że $i = x_1$ zaś $u_C = x_2$ należy:

- 1) wyznaczyć równanie stanu układu.
- 2) określić wartości własne macierzy A .
- 3) obliczyć macierz e^{At} układu.
- 4) określić wektor stanu układu X .
- 5) obliczyć energię wydzieloną w elemencie rezystancyjnym R w czasie od 0 do ∞ .

Rozwiązanie

1. Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa można napisać

$$Ri + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

oraz

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

stąd

$$\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L_1 + L_2 - 2M} i - \frac{u_C}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

Ponieważ wprowadzamy oznaczenia $i = x_1$ oraz $u_C = x_2$, równanie stanu przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L_1 + L_2 - 2M} & \frac{-1}{L_1 + L_2 - 2M} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Macierz obwodu A wynosi:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L_1 + L_2 - 2M} & \frac{-1}{L_1 + L_2 - 2M} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne

$$\det [\lambda \mathbf{1} - A] = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

Rozwiązaniem równania charakterystycznego są wartości własne macierzy A :

$$\lambda_1 = -2 - \sqrt{3}; \quad \lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$$

3. Funkcję macierzy e^{At} wyznaczymy na podstawie wzoru interpolacyjnego Sylwestera, który w przypadku funkcji wykładniczej dla dwóch wartości własnych macierzy λ_1 i λ_2 przyjmuje postać:

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} \frac{\lambda_2 \mathbf{1} - A}{\lambda_2 - \lambda_1} + e^{\lambda_2 t} \frac{\lambda_1 \mathbf{1} - A}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$e^{At} = e^{(-2-\sqrt{3})t} \frac{\begin{bmatrix} -2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2+\sqrt{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{2\sqrt{3}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{(-2+\sqrt{3})t} \frac{\begin{bmatrix} -2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{-2\sqrt{3}} = \\
 & = \frac{e^{(-2-\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2+\sqrt{3} \end{bmatrix} - \\
 & - \frac{e^{(-2+\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2-\sqrt{3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4. Wektor stanu układu

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \text{więc}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \frac{e^{(-2-\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} - \\
 & - \frac{e^{(-2+\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2-\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{(-2-\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -10 \\ 20-10\sqrt{3} \end{bmatrix} - \frac{e^{(-2+\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -10 \\ 20+10\sqrt{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-10}{2\sqrt{3}} e^{-2t} e^{-\sqrt{3}t} + \frac{10}{2\sqrt{3}} e^{-2t} e^{\sqrt{3}t} \\ \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-2t} e^{-\sqrt{3}t} - 5e^{-2t} e^{-\sqrt{3}t} - \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-2t} e^{\sqrt{3}t} - 5e^{-2t} e^{\sqrt{3}t} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-2t} \frac{e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}}{2} \\ -\frac{20}{\sqrt{3}} e^{-2t} \frac{e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}}{2} - 10e^{-2t} \frac{e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t}}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-2t} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{3} t \\ \frac{-20}{\sqrt{3}} e^{-2t} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{3} t - 10e^{-2t} \operatorname{ch} \sqrt{3} t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Energię wydzieloną na rezystancji w czasie od 0 do ∞ określimy na podstawie zależności

$$W = \int_0^{\infty} i^2 R \, dt = \int_0^{\infty} \frac{100}{3} e^{-4t} (e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t})^2 \, dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{100}{3} \left[\int_0^{\infty} e^{-4t} (e^{2\sqrt{3}t} - 2 + e^{-2\sqrt{3}t}) dt \right] = \\
 &= \frac{100}{3} \left[\int_0^{\infty} e^{(-4+2\sqrt{3})t} dt - \int_0^{\infty} 2e^{-4t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-4-2\sqrt{3})t} dt \right] = \\
 &= \frac{100}{3} \left[\frac{e^{(-4+2\sqrt{3})t}}{-4+2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} e^{-4t} + \frac{e^{(-4-2\sqrt{3})t}}{-4-2\sqrt{3}} \right]_0^{\infty} = \\
 &= \frac{100}{3} \left(\frac{1}{4-2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4+2\sqrt{3}} \right) = \frac{100}{6} \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 50 \text{ [J]}
 \end{aligned}$$

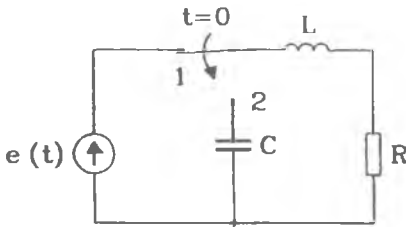
Energia zgromadzona w chwili $t = 0$ w polu elektrycznym kondensatora wynosi

$$W = \frac{1}{2} C u_{Co}^2 = 50 \text{ J}$$

co potwierdza zasadę zachowania energii.

Zad. 20.

W układzie przedstawionym na rysunku 39 w chwili $t = 0$ zmieniono położenie przełącznika z pozycji 1 w pozycję 2. W czasie $t < 0$ w obwodzie panował stan ustalony.



Dane:

$$e(t) = E = 2 \text{ kV}$$

$$R = 100 \text{ } \Omega$$

$$L = 500 \text{ mH}$$

$$C = 200 \text{ } \mu\text{F}$$

Rys. 39

Należy wyznaczyć przebieg prądu po przełączeniu przełącznika oraz szybkość zmian tego prądu w chwili $t = 0$, a także przebiegi napięć u_C , u_L , u_R . Rozwiązanie należy przeprowadzić stosując metody:

- 1) klasyczną,
- 2) operatorową
- 3) zmiennych stanu.

Rozwiązanie

Metoda klasyczna

1. Równanie napięciowe w obwodzie po komutacji

$$0 = u_C + u_L + u_R = u_C + L \frac{di}{dt} + Ri = u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt}$$

Całka ogólna powyższego równania przy dwóch różnych pierwiastkach charakterystycznych s_1 i s_2 przybiera postać

$$u_{Cp} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

są równe

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \beta$$

Stałe całkowania A_1, A_2 wyznaczymy z warunków początkowych.

Składowa ustalona napięcia u_{cu} w rozpatrywanym przypadku jest równa zeru ponieważ w obwodzie występuje element dyssypatywny R .

$$u_c(0^+) = u_{cu}(0^+) + u_{cp}(0^+)$$

$$u_{cp}(0^+) = A_1 + A_2$$

$$u_{cu}(0^+) = 0$$

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0 \quad \text{czyli} \quad A_1 + A_2 = 0; \quad A_1 = -A_2$$

podobnie

$$i(0^+) = i_u(0^+) + i_p(0^+)$$

$$i_p = C \frac{du_{cp}}{dt} = C (A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t})$$

$$i_p(0^+) = C(A_1 s_1 + A_2 s_2)$$

$$i_u(0^+) = 0$$

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$$

$$\text{czyli} \quad \frac{E}{R} = C(A_1 s_1 + A_2 s_2)$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} A_1 = -A_2 \\ \frac{E}{R} = A_1 C s_1 + A_2 C s_2 \end{cases}$$

stąd

$$A_1 = \frac{E}{RC(s_1 - s_2)}; \quad A_2 = \frac{E}{RC(s_2 - s_1)}$$

zatem

$$u_c = u_{cp} = \frac{E(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})}{RC(s_1 - s_2)} = \frac{E e^{-\alpha t}}{2RC\beta} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = \frac{E}{RC} \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{2R\beta} \left[\beta (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) e^{-\alpha t} - \alpha (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) e^{-\alpha t} \right] =$$

$$= \frac{E}{R\beta} e^{-\alpha t} (\beta \operatorname{ch} \beta t - \alpha \operatorname{sh} \beta t)$$

Ponieważ w rozpatrywanym obwodzie pierwiastki równania charakterystycznego są sobie równe

$$s_1 = s_2 = \alpha = \frac{R}{2L} = 100; \quad \beta = 0$$

więc analizowany jest przypadek aperiodyczny krytyczny, czyli

$$\begin{aligned} i &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{E}{R\beta} e^{-\alpha t} (\beta \operatorname{ch} \beta t - \alpha \operatorname{sh} \beta t) = \\ &= \frac{E}{R} e^{-\alpha t} \left(\lim_{\beta \rightarrow 0} \operatorname{ch} \beta t - \lim_{\beta \rightarrow 0} \alpha t \frac{\operatorname{sh} \beta t}{\beta t} \right) = \frac{E}{R} e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) \end{aligned}$$

ponieważ z twierdzenia de l'Hospitala wiadomo, że

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \beta t}{\beta t} = 1$$

ostatecznie

$$i = \frac{E}{R} e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) = 20e^{-100t} (1 - 100t) \quad [\text{A}]$$

Szybkość zmian prądu w chwili $t = 0$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 2000e^{-100t} (100t - 2) \Big|_{t=0} = -4000 \quad [\text{A/s}]$$

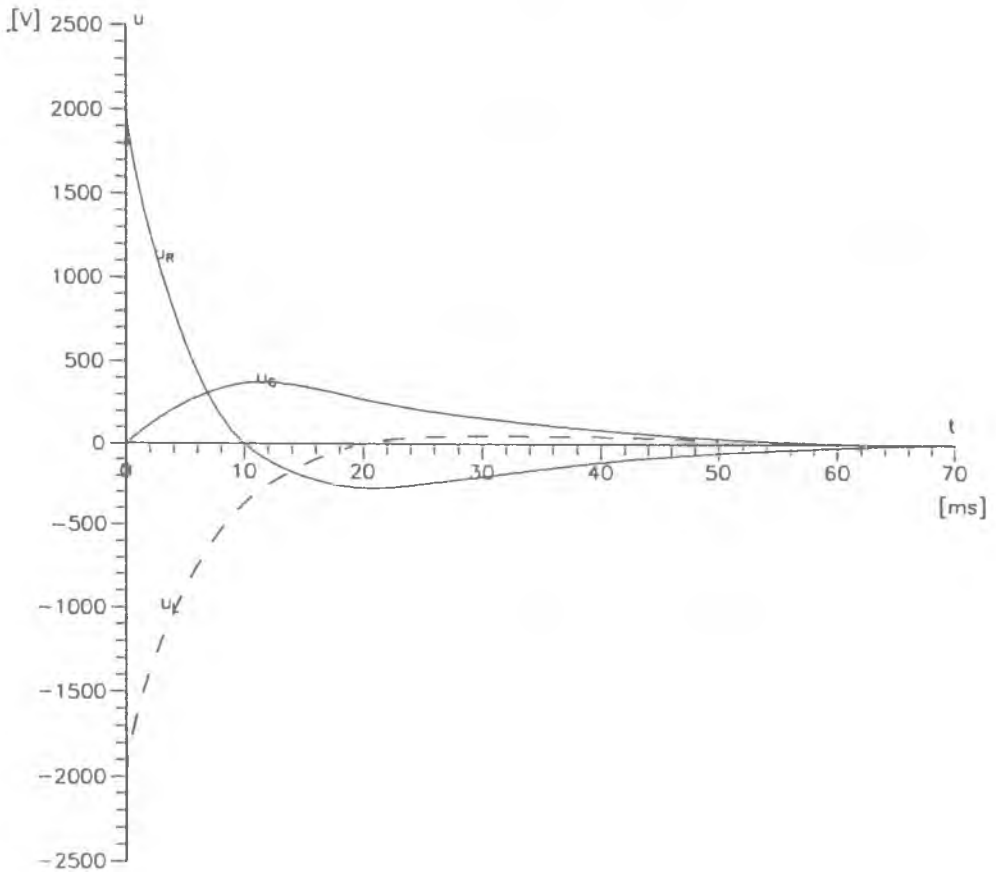
Przebiegi napięć

$$u_R = Ri = 2000e^{-100t} (1 - 100t) \quad [\text{V}]$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 1000e^{-100t} (100t - 2) \quad [\text{V}]$$

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{10^6}{200} (20 \int e^{-100t} dt - 2000 \int t e^{-100t} dt) = \\ &= 10^5 t e^{-100t} \quad [\text{V}] \end{aligned}$$

Przebiegi napięć przedstawia rys. 40.



Rys. 40.

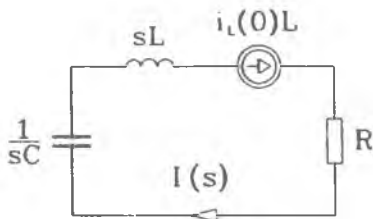
2. Metoda operatorowa

Warunki początkowe

$$u_C(0) = 0$$

$$i_L(0) = \frac{E}{R} = \frac{2000}{100} = 20 \quad [\text{A}]$$

Schemat operatorowy



Rys. 41.

Transformata prądu wynosi

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{i_L(0)L}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{i_L(0)Ls}{s^2L + sR + \frac{1}{C}} = \\ &= \frac{20s}{s^2 + 200s + 10000} = \frac{20s}{(s + 100)^2} \end{aligned}$$

$$s_{1,2} = -100$$

Transformatę odwrotną prądu $I(s)$ wyznaczamy korzystając z metody residuów dla biegunów wielokrotnych powtarzających się n razy.

$$\begin{aligned}i(t) &= \operatorname{res}_{s=s_k} [I(s)e^{st}] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \left\{ \frac{d^{(n-1)}}{ds^{(n-1)}} \left[(s-s_k)^n I(s)e^{st} \right] \right\} = \\&= \lim_{s \rightarrow -100} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s+100)^2 \frac{20s}{(s+100)^2} e^{st} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow -100} \frac{d}{ds} (20se^{st}) = \\&= 20e^{-100t} (1 - 100t) \quad [\text{A}]\end{aligned}$$

3. Metoda zmiennych stanu

Przyjmując jako zmienne stanu $x_1 = i$ oraz $x_2 = u_C$ można zapisać

$$Rx_1 + L \frac{dx_1}{dt} + u_2 = 0$$

oraz

$$x_1 = C \frac{dx_2}{dt}$$

stąd

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Macierz obwodu A wynosi

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 & -2 \\ 5000 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne

$$\det [\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda + 200 & 2 \\ -5000 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 200\lambda + 10000 = (\lambda + 100)^2 = 0$$

Wartość własna macierzy A jest dwukrotna $\lambda_{1,2} = -100$.

Funkcja macierzy kwadratowej A stopnia n może być przedstawiona jako suma szeregu skończonego w postaci

$$f(A) = e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t)A + \dots + \alpha_{n-1}(t) A^{n-1}$$

W rozpatrywanym przypadku ($n=2$) mamy

$$e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t)A$$

W celu wyznaczenia współczynników $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ korzystamy z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, zgodnie z którym funkcja macierzy $f(A)$ musi być spełniona przez wartości własne λ_1 , λ_2 tzn. wobec

$$f(A) = e^{At}$$

są spełnione równania

$$f(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1$$

$$f(\lambda_2) = e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2$$

Ponieważ w analizowanym obwodzie macierz A ma dwukrotną wartość własną $\lambda_1 = \lambda_2$, więc w celu obliczenia współczynników α_0 i α_1 należy napisać dodatkowe równanie uzyskane w wyniku obustronnego zróżniczkowania wyrażenia

$$f(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t}$$

czyli

$$\frac{de^{\lambda_1 t}}{dt} = te^{\lambda_1 t} = \alpha_1(t)$$

stąd

$$\alpha_0(t) = e^{\lambda_1 t} - \alpha_1(t)\lambda_1 = e^{\lambda_1 t} (1 - \lambda_1 t)$$

otrzymujemy

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} (1 - \lambda_1 t) \mathbf{1} + te^{\lambda_1 t} \mathbf{A} =$$

$$= e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 t & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_1 t \end{bmatrix} + e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} t & -\frac{t}{L} \\ \frac{t}{C} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 - \left(\lambda_1 + \frac{R}{L} \right) t & -\frac{t}{L} \\ \frac{t}{C} & 1 - \lambda_1 t \end{bmatrix}$$

Wektor stanu rozpatrywanego obwodu

$$\mathbf{x}(t) = e^{A t} \mathbf{x}_o$$

gdzie

$$\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

więc

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 - \left(\lambda_1 + \frac{R}{L} \right) t & -\frac{t}{L} \\ \frac{t}{C} & 1 - \lambda_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{R} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} \frac{E}{R} \left[1 - \left(\lambda_1 + \frac{R}{L} \right) t \right] \\ \frac{Et}{RC} \end{bmatrix}$$

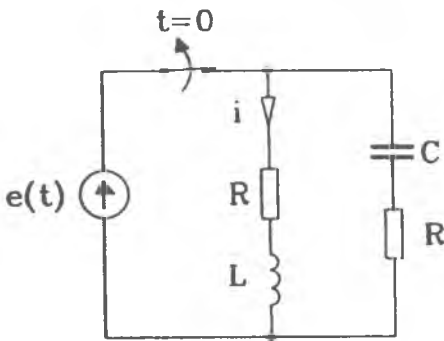
czyli

$$i = x_1 = \frac{E}{R} e^{\lambda_1 t} \left[1 - \left(\lambda_1 + \frac{R}{L} \right) t \right] = 20e^{-100t} (1 - 100t) \quad [\text{A}]$$

$$u_C = x_2 = \frac{E}{RC} t e^{\lambda_1 t} = 10^5 t e^{-100t} \quad [\text{V}]$$

Zad. 21.

W obwodzie, którego schemat przedstawia rys. 42 panował stan ustalony. W chwili $t = 0$ otwarto wyłącznik.



Dane:

$$e(t) = E = 100 \text{ V}$$

$$R = 100 \text{ } \Omega$$

$$L = 100 \text{ mH}$$

$$C = 2 \text{ } \mu\text{F}$$

Rys. 42.

Należy:

1) ułożyć równanie stanu układu.

Wyznaczyć macierz e^{At} obwodu stosując:

2) wzór interpolacyjny Sylwestera.

Określić charakter przebiegów szukanych wielkości.

3) metodą przekształcenia Laplace'a

- 4) metodą rozwinięcia w szereg skończony
- 5) metodą wektorów własnych
- 6) obliczyć wektor stanu układu X.

Rozwiązanie

1. Jako zmienne stanu wybieramy prąd w cewce oraz napięcie na kondensatorze. Równania wiążące te zmienne mają postać:

$$(R + R)i + L \frac{di}{dt} + u_c = 0$$

$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

Oznaczając zmienne stanu $x_1 = i$, $x_2 = u_c$ otrzymujemy

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{2R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C} x_1$$

lub w zapisie macierzowym

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Macierz obwodu A wynosi

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 10^3 & -10 \\ 5 \cdot 10^5 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie funkcji macierzy e^{At}

2. Metoda wykorzystująca twierdzenie Sylwestera.

Równanie charakterystyczne macierzy A

$$\det [\lambda I + A] = \begin{vmatrix} \lambda + 2000 & 10 \\ -5 \cdot 10^5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 \cdot 10^3 \lambda + 5 \cdot 10^6 = 0$$

Ponieważ wyróżnik równania charakterystycznego $\Delta = -16 \cdot 10^6$ jest mniejszy od zera — przebieg szukanych wielkości (i , u_C) ma charakter oscylacyjny ($\Delta < 0$), tłumiony ($R \neq 0$). Wartości własne macierzy A wynoszą

$$\lambda_1 = -10^3 (1 + j2); \quad \lambda_2 = -10^3 (1 - j2)$$

Stosując wzór Sylwestera mamy

$$e^{At} = \frac{e^{-10^3(1+j2)t}}{j4 \cdot 10^3} \begin{bmatrix} 10^3 + j2 \cdot 10^3 & 10 \\ -5 \cdot 10^5 & -10^3 + j2 \cdot 10^3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-10^3(1-j2)t}}{j4 \cdot 10^3} \begin{bmatrix} 10^3 - j2 \cdot 10^3 & 10 \\ -5 \cdot 10^5 & -10^3 + j2 \cdot 10^3 \end{bmatrix} = \\
 &= e^{-10^3 t} \begin{bmatrix} \frac{e^{-j2000t} - e^{j2000t}}{j4} + \frac{e^{j2000t} + e^{-j2000t}}{2} & \frac{e^{-j2000t} - e^{j2000t}}{j400} \\ \frac{-125e^{-j2000t} + 125e^{j2000t}}{j} & \frac{e^{j2000t} - e^{-j2000t}}{j4} + \frac{e^{j2000t} + e^{-j2000t}}{2} \end{bmatrix} = \\
 &= e^{-1000t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2000t + \cos 2000t & -\frac{1}{200} \sin 2000t \\ 250 \sin 2000t & \frac{1}{2} \sin 2000t + \cos 2000t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Metoda przekształcenia Laplace'a
 Macierz e^{At} wyznaczymy z zależności

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A]^{-1} \}$$

Obliczamy macierz charakterystyczną

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + 2000 & 10 \\ -5 \cdot 10^5 & s \end{bmatrix}$$

W celu obliczenia macierzy odwrotnej tej macierzy wyznaczamy macierz dołączoną.

$$\begin{bmatrix} s & -10 \\ 5 \cdot 10^5 & s + 2000 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy charakterystycznej

$$\det [sI - A] = s^2 + 2 \cdot 10^3 s + 5 \cdot 10^6 = (s + 1000 + j2000)(s + 1000 - j2000)$$

Wartości własne

$$s_1 = -10^3(1 + j2)$$

$$s_2 = -10^3(1 - j2)$$

Macierz odwrotna

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot 10^3 s + 5 \cdot 10^6} \begin{bmatrix} s & -10 \\ 5 \cdot 10^5 & s + 2 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia e^{At} należy dokonać odwrotnego przekształcenia Laplace'a każdego elementu otrzymanej macierzy. Stosując wzór Heaviside'a mamy

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= \begin{bmatrix} \frac{-10^3(1+j2)e^{-10^3(1+j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1+j2) + 2 \cdot 10^3} + \frac{-10^3(1-j2)e^{-10^3(1-j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1-j2) + 2 \cdot 10^3} & \frac{-10e^{-10^3(1+j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1+j2) + 2 \cdot 10^3} + \frac{-10e^{-10^3(1-j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1-j2) + 2 \cdot 10^3} \\ \frac{5 \cdot 10^4 e^{-10^3(1+j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1+j2) + 2 \cdot 10^3} + \frac{5 \cdot 10^4 e^{-10^3(1-j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1-j2) + 2 \cdot 10^3} & \frac{10^3(1-j2)e^{-10^3(1+j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1+j2) + 2 \cdot 10^3} + \frac{10^3(1+j2)e^{-10^3(1-j2)t}}{-2 \cdot 10^3(1-j2) + 2 \cdot 10^3} \end{bmatrix} = \\
 &= e^{-1000t} \begin{bmatrix} \frac{(1+j2)e^{-2000t} + (-1+j2)e^{j2000t}}{j4} & \frac{e^{-j2000t} - e^{j2000t}}{j400} \\ \frac{-500e^{-j2000t} + 500e^{j2000t}}{j4} & \frac{(-1+j2)e^{-j2000t} + (1+j2)e^{j2000t}}{j4} \end{bmatrix} = \\
 &= e^{-1000t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2000t + \cos 2000t & -\frac{1}{200} \sin 2000t \\ 250 \sin 2000t & \frac{1}{2} \sin 2000t + \cos 2000t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4. Metoda rozwinięcia w szereg skończony.

Funkcja rozpatrywanej macierzy kwadratowej A stopnia 2 może być przedstawiona jako suma szeregu

$$f(A) = e^{At} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 A$$

Korzystając z twierdzenia Cayleya — Hamiltona mamy

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1$$

$$e^{\lambda_2 t} = \alpha_o + \alpha_1 \lambda_2$$

Wartości własne λ_1, λ_2 wyznaczone z równania charakterystycznego (pkt. 2) wynoszą

$$\lambda_1 = -10^3(1 + j2)$$

$$\lambda_2 = -10^3(1 - j2)$$

Z układu równań

$$e^{-10^3(1+j2)t} = \alpha_o - 10^3(1 + j2)\alpha_1$$

$$e^{-10^3(1-j2)t} = \alpha_o - 10^3(1 - j2)\alpha_1$$

mamy

$$\alpha_1 = \frac{e^{j2 \cdot 10^3 t} - e^{-j2 \cdot 10^3 t}}{j4 \cdot 10^3} e^{-10^3 t} = \frac{e^{-10^3 t}}{2 \cdot 10^3} \sin 2 \cdot 10^3 t$$

$$\alpha_o = e^{-10^3 t} \left(e^{j2 \cdot 10^3 t} + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 10^3 t - j \sin 2 \cdot 10^3 t \right) =$$

$$= e^{-10^3 t} \left(\cos 2 \cdot 10^3 t + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 10^3 t \right)$$

stąd

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= e^{-10^3 t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 10^3 t + \cos 2 \cdot 10^3 t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 10^3 t + \cos 2 \cdot 10^3 t \end{bmatrix} + \\
 &+ e^{-10^3 t} \begin{bmatrix} -\sin 2 \cdot 10^3 t & -\frac{\sin 2 \cdot 10^3 t}{200} \\ 250 \sin 2 \cdot 10^3 t & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= e^{-1000t} \begin{bmatrix} \cos 2000t - \frac{1}{2} \sin 2000t & -\frac{1}{200} \sin 2000t \\ 250 \sin 2000t & \cos 2000t + \frac{1}{2} \sin 2000t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5. Metoda wektorów własnych.

Macierz e^{At} wyznaczymy z zależności

$$e^{At} = W e^{Dt} W^{-1}$$

gdzie macierz e^{Dt} w rozpatrywanym przypadku dla wartości własnych $\lambda_1 = -10^3(1+j2)$ i $\lambda_2 = -10^3(1-j2)$ (pkt.2) wynosi

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Wektory własne $\mathbf{w}_i$ macierzy $\mathbf{A}$ wyznaczymy z równania macierzowego

$$[\lambda_i \mathbf{1} - \mathbf{A}] \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

$$[\lambda_1 \mathbf{1} - \mathbf{A}] \mathbf{w}_1 =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -10^3(1+j2) & 0 \\ 0 & -10^3(1+j2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \cdot 10^3 & -10 \\ 5 \cdot 10^5 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10^3(1-j2) & 10 \\ -5 \cdot 10^5 & -10^3(1+j2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

stąd

$$10^3(1-j2)w_{11} + 10w_{21} = 0$$

$$-5 \cdot 10^5 w_{11} - 10^3(1+j2)w_{21} = 0$$

Po przekształceniu pierwszego równania otrzymujemy $w_{21} = (-100 + j200)w_{11}$ z drugiego zaś $w_{21} = (-100 + j200)w_{11}$. Ponieważ równania są równoważne sobie możemy przyjąć dowolną wartość różną od zera np. dla $w_{11} = 1$ wtedy $w_{21} = -100 + j200$. Wektor własny

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -100 + j200 \end{bmatrix}$$

Podobnie, z równania macierzowego

$$[\lambda_2 \mathbf{1} - \mathbf{A}] \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 10^3(1+j2) & 10 \\ -5 \cdot 10^5 & -10^3(1-j2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy dwa równania równoważne

$$w_{22} = (-100 - j200)w_{12}$$

przyjmując $w_{12} = 1$ mamy

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -100 - j200 \end{bmatrix}$$

Macierz wektorów własnych $\mathbf{W}$ (macierz modalna) ma postać

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -100 + j200 & -100 - j200 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia macierzy odwrotnej $\mathbf{W}^{-1}$ wyznaczamy

macierz dopełnień algebraicznych $\begin{bmatrix} -100 - j200 & 100 - j200 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

macierz dołączoną $\begin{bmatrix} -100 - j200 & -1 \\ 100 - j200 & 1 \end{bmatrix}$

oraz wyznacznik $\det W = -j400$

stąd

$$W^{-1} = \frac{1}{-j400} \begin{bmatrix} -100-j200 & -1 \\ 100-j200 & 1 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie

$e^{At} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -100(1-j2) & -100(1+j2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-10^3(1+j2)t} & 0 \\ 0 & e^{-10^3(1-j2)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100(1+j2) & -1 \\ 100(1-j2) & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{-j400} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-10^3(1+j2)t} & e^{-10^3(1-j2)t} \\ -100(1-j2)e^{-10^3(1+j2)t} & -100(1+j2)e^{-10^3(1-j2)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100(1+j2) & -1 \\ 100(1-j2) & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{-j400} =$$

$$= \frac{e^{-1000t}}{-j400} \begin{bmatrix} 100(-e^{-j2 \cdot 10^3 t} - j2e^{-j2 \cdot 10^3 t} + e^{j2 \cdot 10^3 t} - j2e^{j2 \cdot 10^3 t}) - e^{-j2 \cdot 10^3 t} + e^{j2 \cdot 10^3 t} & \\ 5 \cdot 10^4 (e^{-j2 \cdot 10^3 t} - e^{j2 \cdot 10^3 t}) & 100(e^{-j2 \cdot 10^3 t} - j2e^{-j2 \cdot 10^3 t} - e^{j2 \cdot 10^3 t} - j2e^{j2 \cdot 10^3 t}) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-1000t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 200t + \cos 2000t & -\frac{1}{200} \sin 2000t \\ 250 \sin 2000t & \frac{1}{2} \sin 2000t + \cos 2000t \end{bmatrix}$$

6. Wektor stanu układu wyznaczmy z równania

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}_0$$

Wartości początkowe w rozpatrywanym obwodzie są następujące

$$x_1(0) = i(0) = \frac{E}{R} = 1$$

$$x_2(0) = u_c(0) = -E = -100$$

Wektor stanu początkowego

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -100 \end{bmatrix}$$

Wektor stanu układu będący rozwiązaniem równania wyjściowego w rozpatrywanym obwodzie jest równy

$$\mathbf{X} = e^{-1000t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2000t + \cos 2000t & -\frac{1}{200} \sin 2000t \\ 250 \sin 2000t & \frac{1}{2} \sin 2000t + \cos 2000t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -100 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-1000t} \begin{bmatrix} \cos 2000t \\ 200 \sin 2000t - 100 \cos 2000t \end{bmatrix} =$$

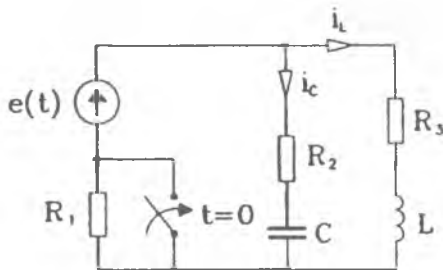
$$= e^{-1000t} \begin{bmatrix} \cos 2000t \\ 223,61 \sin(2000t - 26,57^\circ) \end{bmatrix}$$

$$i = e^{-1000t} \cos 2000t \quad [\text{A}]$$

$$u_C = 223,61 e^{-1000t} \sin(2000t - 26,57^\circ) \quad [\text{V}]$$

Zad. 22.

W obwodzie, którego schemat przedstawia rys. 43 przed zamknięciem wyłącznika w chwili $t = 0$, panował stan ustalony.



Dane:

a) $e(t) = E = 100 \text{ V}$

$R_1 = 2,5 \ \Omega$

$R_2 = 20 \ \Omega$

$R_3 = 10 \ \Omega$

$L = 500 \text{ mH}$

$C = 1 \text{ mF}$

b) $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t - 30^\circ) \text{ V}$

Rys. 43.

Należy:

a) 1. Ułożyć równanie stanu obwodu

2. Obliczyć przebieg prądu w cewce i_L oraz przebieg napięcia na kondensatorze u_C stosując ogólne rozwiązanie równania stanu obwodu

3. Obliczyć przebieg i_L oraz u_C korzystając z metody superpozycji stanu ustalonego i przejściowego
- b) 4. Wyznaczyć przebieg i_L oraz u_C w przypadku, gdy napięcie źródłowe jest równe $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t - 30^\circ)$ V

Rozwiązanie

1. Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa mamy

$$E = C \frac{du_C}{dt} R_2 + u_C$$

$$E = R_3 i_L + L \frac{di}{dt}$$

Oznaczając zmienne stanu $x_1 = u_C$ oraz $x_2 = i_L$ stosując proste przekształcenia, równania powyższe zapisujemy w postaci macierzowej.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{R_2 C} \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix}$$

Oznaczając

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_2 C} \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 200 \end{bmatrix}$$

równanie stanu obwodu można zapisać jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}$$

2. W przypadku ogólnym rozwiązaniem powyższego równania macierzowego jest równanie o postaci

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{F} d\tau$$

Warunki początkowe zmiennych stanu

$$x_1(0) = u_C(0^+) = u_C(0^-) = \frac{ER_3}{R_1 + R_3} = 80 \quad [\text{V}]$$

$$x_2(0) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_3} = 8 \quad [\text{A}]$$

Wektor stanu początkowego przyjmuje postać

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Całka z macierzy wynosi

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{A(t-\tau)} F \, d\tau &= e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \, d\tau F = \\ &= -e^{At} A^{-1} [e^{-A\tau} - 1] F = [e^{At} - 1] A^{-1} F\end{aligned}$$

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku macierz

$$A = \begin{bmatrix} -50 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$$

jest macierzą diagonalną, więc

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-50t} & 0 \\ 0 & e^{-20t} \end{bmatrix}$$

Wyznamy macierz odwrotną A^{-1}

macierz dołączona $\begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} -50 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} = 1000$$

więc

$$A^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{1}] \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-50t} & 0 \\ 0 & e^{-20t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 8 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} e^{-50t} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-20t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 200 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 80e^{-50t} \\ 8e^{-20t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-50t} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-20t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 - 200e^{-50t} \\ 10 - 2e^{-20t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$u_C = (100 - 20e^{-50t}) \text{ V}$$

$$i_L = (10 - 2e^{-20t}) \text{ A}$$

3. Różniczkowe równanie macierzowe $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}$ wprowadzone w punkcie 1 jest równaniem niejednorodnym pierwszego rzędu. Rozwiązanie tego równania przedstawimy jako sumę algebraiczną składowej ustalonej i składowej przejściowej. Składowe ustalone zmiennych stanu wyznaczymy z warunków fizycznych układu

$$x_{1u} = u_{Cu} = E = 100\text{V}; \quad x_{2u} = i_{Lu} = \frac{E}{R_3} = 10\text{A}$$

Składowe przejściowe zmiennych stanu obliczymy z całki ogólnej równania jednorodnego

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{o}{x}_{1p} \\ \overset{o}{x}_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix} = A \cdot x_p$$

$$x_p = e^{At} \cdot x_p(0)$$

Warunki początkowe dla składowych przejściowych zmiennych stanu

$$x_{1p}(0) = x_1(0) - x_{1u}(0) = 80 - 100 = -20 \text{ [V]}$$

$$x_{2p}(0) = x_2(0) - x_{2u}(0) = 8 - 10 = -2 \text{ [A]}$$

Dla diagonalnej macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -50 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$$

macierz

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-50t} & 0 \\ 0 & e^{-20t} \end{bmatrix}$$

Tak więc wektor składowych przejściowych zmiennych stanu wynosi

$$\begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_{1p}(0) \\ x_{2p}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-50t} & 0 \\ 0 & e^{-20t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20e^{-50t} \\ -2e^{-20t} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie

$$u_C = x_1 = x_{1u} + x_{1p} = (100 - 20e^{-50t}) \text{ V}$$

$$i_L = x_2 = x_{2u} + x_{2p} = (10 - 2e^{-20t}) \text{ A}$$

4. Zadanie rozwiążemy stosując metodę superpozycji stanu ustalonego i przejściowego.

Wartość prądu w cewce oraz napięcia na kondensatorze w stanie ustalonym przed komutacją obliczymy rozwiązując układ równań

$$\underline{R_1} (\underline{I_L} + \underline{I_C}) + (\underline{R_2} - jX_C) \underline{I_C} = \underline{E}$$

$$(\underline{R_3} + jX_L) \underline{I_L} - (\underline{R_2} - jX_C) \underline{I_C} = 0$$

$$\underline{U_C} = -jX_C \underline{I_C}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych i wykonaniu obliczeń otrzymujemy

$$\underline{I_L} = 1,77e^{-j108,79^\circ} \qquad i_L = 2,5 \sin(100t - 108,79^\circ) \text{ A}$$

$$\underline{I_C} = 4,04e^{-j3,53^\circ}$$

$$\underline{U_C} = 40,4e^{-j93,53^\circ} \qquad u_C = 57,13 \sin(100t - 93,53^\circ) \text{ V}$$

W chwili $t = 0$

$$i_L(0) = 2,5 \sin(-108,79^\circ) = -2,37 \text{ [A]}$$

$$u_C(0) = 57,13 \sin(-93,53^\circ) = -57,02 \text{ [V]}$$

W stanie ustalonym po komutacji obwód opisany jest równaniami:

$$(R_2 - jX_C) \underline{I_{Cu}} = \underline{E}$$

$$(R_3 + jX_L) \underline{I_{Lu}} - (R_2 - jX_C) \underline{I_{Cu}} = 0$$

$$\underline{U_{Cu}} = -jX_C \underline{I_{Cu}}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych i wykonaniu obliczeń otrzymujemy

$$\underline{I_{Lu}} = 1,96e^{-j108,69^\circ} \quad i_{Lu} = 2,77 \sin(100t - 108,79^\circ) \text{ A}$$

$$\underline{I_{Cu}} = 4,47e^{-j3,43^\circ} \quad i_{Cu}(0) = 2,77 \sin(-108,79^\circ) = -2,62 \text{ A}$$

$$\underline{U_{Cu}} = 44,7e^{-j93,43^\circ} \quad u_{Cu} = 63,22 \sin(100t - 93,43^\circ) \text{ V}$$

$$u_{Cu}(0) = 63,22 \sin(-93,43^\circ) = -63,11 \text{ V}$$

W celu obliczenia składowych przejściowych i_L oraz u_C zastosujemy metodę zmiennych stanu. Korzystając z obliczeń przeprowadzonych w poprzednich punktach mamy:

$$\mathbf{x}_p = e^{At} \mathbf{x}_p(0) = e^{At} \begin{bmatrix} u_C(0) & -u_{Cu}(0) \\ i_L(0) & -i_{Lu}(0) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{At} \begin{bmatrix} -57,02 & + 63,11 \\ -2,37 & + 2,63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-50t} & 0 \\ 0 & e^{-20t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,09 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,09e^{-50t} \\ 0,25e^{-20t} \end{bmatrix}$$

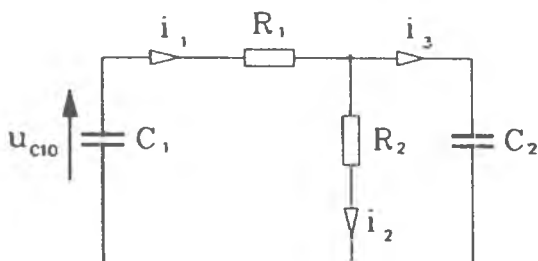
Dokonując superpozycji odpowiednich składowych ustalonych i przejściowych otrzymujemy

$$u_C = u_{C_u} + u_{C_p} = [63,22 \sin(100t - 93,43^\circ) + 6,09e^{-50t}] \text{ V}$$

$$i_L = i_{L_u} + i_{L_p} = [2,77 \sin(100t - 108,79^\circ) + 0,25e^{-20t}] \text{ A}$$

Zad. 23.

W obwodzie o schemacie podanym na rys. 44 przed zamknięciem wyłącznika ($t < 0$) panował stan ustalony – napięcia na kondensatorach były równe $u_{C10} = 10 \text{ V}$; $u_{C20} = 0$



Dane:

$$R_1 = R_2 = 1 \ \Omega$$

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$$

Rys. 44.

Przyjmując, że $u_{C1} = x_1$ oraz $u_{C2} = x_2$ należy:

1) ułożyć równanie stanu układu

2) wyznaczyć macierz e^{At} układu stosując wzór Sylwestera

- 3) wyznaczyć macierz e^{At} układu korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona
- 4) obliczyć wektor stanu układu X .

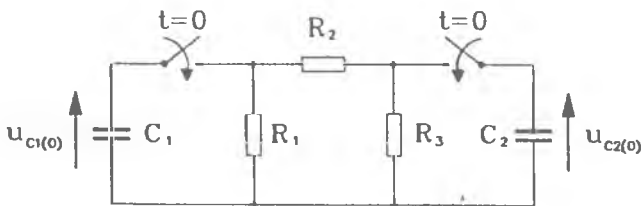
Odp.

$$X = 2\sqrt{5} e^{-1.5t} \begin{bmatrix} -\operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} t - \sqrt{5} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{5}}{2} t \\ 2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} t \end{bmatrix} = 4,47 e^{-1.5t} \begin{bmatrix} -\operatorname{sh} 1,12t - 2,24 \operatorname{ch} 1,12t \\ 2 \operatorname{sh} 1,12t \end{bmatrix}$$

Zad. 24.

Przed zamknięciem wyłączników w obwodzie, którego schemat przedstawia rys. 45, napięcia na kondensatorach wynosiły odpowiednio $u_{C1}(0) = 50 \text{ V}$, $u_{C2} = 20 \text{ V}$. W chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik.

Należy wyznaczyć przebiegi napięć na wszystkich elementach obwodu oraz przebiegi prądów w każdej z gałęzi obwodu.



Dane:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_3 = 100 \, \Omega \\ R_2 &= 200 \, \Omega \\ C_1 &= C_2 = 100 \, \mu\text{F} \end{aligned}$$

Rys. 45.

Rozwiązanie należy przeprowadzić stosując:

- 1) metodę klasyczną,
- 2) metodę operatorową,
- 3) metodę zmiennych stanu.

Odp.

$$u_{c_1} = (-15e^{-200t} - 35e^{-100t}) \text{ V} \quad i_{c_2} = (-0,3e^{-200t} + 0,35e^{-100t}) \text{ A}$$

$$u_{c_2} = (15e^{-200t} - 35e^{-100t}) \text{ V} \quad i_1 = (0,15e^{-200t} + 0,35e^{-100t}) \text{ A}$$

$$u_2 = -30e^{-200t} \text{ V} \quad i_2 = -0,15e^{-200t} \text{ A}$$

$$i_{c_1} = (0,3e^{-200t} + 0,35e^{-100t}) \text{ A} \quad i_3 = (-0,15e^{-200t} + 0,35e^{-100t}) \text{ A}$$

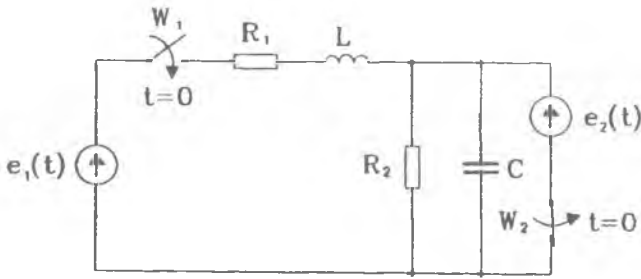
Uwaga — odpowiedzi mogą się różnić znakami, na skutek przyjęcia innych zwrotów szukanych wielkości.

Zad. 25.

W obwodzie, którego schemat przedstawia rys. 46 panował stan ustalony. W chwili $t = 0$ jednocześnie zamknięto wyłącznik w_1 i otwarto wyłącznik w_2 .

Przyjmując $i_L = x_1$ oraz $u_C = x_2$ należy:

1. Ułożyć równania stanu obwodu.
2. Wyznaczyć macierz e^{At} układu stosując jedną z niżej wymienionych metod
 - a) metodę przekształcenia Laplace'a,
 - b) metodę wektorów własnych.
 - c) wzór interpolacyjny Sylwestera.
 - c) metodę rozwinięcia w szereg skończony.
3. Obliczyć wektor stanu obwodu X .



Dane:

$$e_1(t) = E_1 = 200 \text{ V}$$

$$e_2(t) = E_2 = 100 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 1 \text{ } \Omega$$

$$L = 100 \text{ mH}$$

$$C = 100 \text{ mF}$$

Rys. 46.

Odp.

$$e^{At} =$$

$$= e^{-15t} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin 5\sqrt{3} t + \cos 5\sqrt{3} t & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 5\sqrt{3} t \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 5\sqrt{3} t & -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin 5\sqrt{3} t + \cos 5\sqrt{3} t \end{bmatrix}$$

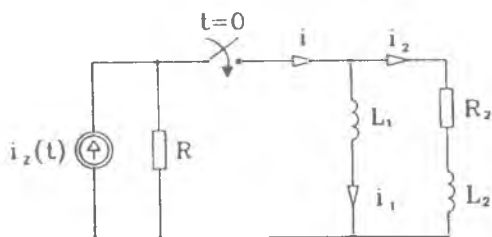
$$i_L = \frac{200}{3} (1 - e^{-15t} \cos 5\sqrt{3} t) \text{ A} = 66,67(1 - e^{-15t} \cos 8,66t) \text{ A}$$

$$u_C = \frac{200}{3} [1 + e^{-15t} \sin(5\sqrt{3} t + 30^\circ)] \text{ V} =$$

$$= 66,67 [1 + e^{-15t} \sin(8,66t + 30^\circ)] \text{ V}$$

Zad. 26.

Przed zamknięciem wyłącznika prądy w obwodzie, którego schemat jest przedstawiony na rysunku 47 nie płynęły. W chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik.



Dane:

$$R=1 \, \Omega$$

$$R_2=2 \, \Omega$$

$$L_1=0,5 \, \text{H}$$

$$L_2=1 \, \text{H}$$

$$\text{a) } i_z(t)=I_2=3 \, \text{A}$$

$$\text{b) } i_z(t)=30\sqrt{2}\sin(50t-60^\circ) \, \text{A}$$

Rys. 47.

Należy:

- a) 1. Ułożyć równanie stanu obwodu.
2. Wyznaczyć przebiegi prądów i , i_1 oraz i_2 stosując ogólne rozwiązanie równania stanu obwodu
3. Obliczyć przebiegi i , i_1 , i_2 korzystając z metody superpozycji stanu ustalonego i przejściowego.
- b) 4. Wyznaczyć przebiegi prądów i , i_1 , i_2 w przypadku gdy prąd źródłowy jest równy $i_z(t) = 30\sqrt{2}\sin(50t - 60^\circ) \, \text{A}$

Odp.

$$\text{a) } i_1 = (3 - 2e^{-t} - e^{-4t}) \, \text{A}$$

$$i_2 = (e^{-t} - e^{-4t}) \, \text{A}$$

$$i = (3 - e^{-t} - 2e^{-4t}) \, \text{A}$$

b)

$$i_1 = [1,7 \sin(50t - 146,58^\circ) + 0,61e^{-4t} + 0,33e^{-t}] \, \text{A}$$

$$i_2 = [0,83 \sin(50t - 147,38^\circ) + 0,61e^{-4t} - 0,16e^{-t}] \, \text{A}$$

$$i = [2,53 \sin(50t - 146,84^\circ) + 1,22e^{-4t} + 0,17e^{-t}] \text{ A}$$

Literatura

- [1] Bołkowski S. „*Elektrotechnika teoretyczna*”, t. 1, Wyd. II Warszawa WNT 1982.
- [2] Cholewicki T. „*Elektrotechnika teoretyczna*”, t. 2, Wyd. II Warszawa WNT 1972
- [3] Ciechanowicz P., Dziedzic J. „*Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej*”, Wyd. II Warszawa PWN 1969
- [4] Gierczak E., Suchański J. „*Zbiór zadań ze elektrotechniki teoretycznej*”, cz. II, Wyd. I Kielce 1979
- [5] Hildebrandt A., Sołtysik H., Zieliński A. „*Teoria obwodów w zadaniach*”, Wyd. II, Warszawa WNT 1977
- [6] Mikołajuk K., Trzaska Z. „*Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej*”, Wyd. II, Warszawa PWN 1976
- [7] Praca zbiorowa — „*Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej*”, Wyd. I Warszawa WNT 1985