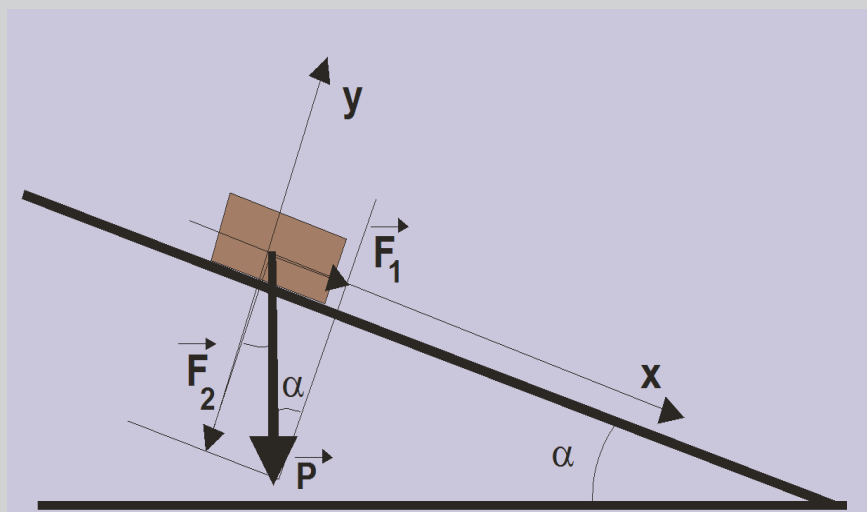




Jerzy Meldizon

Fizyka

Materiały pomocnicze



PODRECZNIKI

Fizyka

Materiały pomocnicze

Podręczniki – Politechnika Lubelska



Politechnika Lubelska
Wydział Inżynierii Środowiska
ul. Nadbystrzycka 40B
20-618 Lublin

Jerzy Meldizon

Fizyka

Materiały pomocnicze



Politechnika Lubelska
Lublin 2015

Recenzent:
prof. dr hab. Dariusz Mączka

Wydanie 3, poprawione i uzupełnione

Skład i redakcja: Foto Art Flash www.fotoartflash.pl

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

© Copyright by Politechnika Lubelska 2015

ISBN: 978-83-7947-153-9 właściwy

Wydawca: Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 38D, 20-618 Lublin
Realizacja: Biblioteka Politechniki Lubelskiej
Ośrodek ds. Wydawnictw i Biblioteki Cyfrowej
ul. Nadbystrzycka 36c, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59, email: wydawca@pollub.pl
www.biblioteka.pollub.pl
Druk: TOP Agencja Reklamowa Agnieszka Łuczak
www.agencjatorp.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl
Nakład: 100 egz.

SPIS TREŚCI

WSTĘP	6
I. Międzynarodowy układ jednostek miar SI, podstawowe wiadomości o wektorach	7
II. Kinematyka punktu materialnego	30
III. Dynamika punktu materialnego	63
IV. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej	96
V. Grawitacja	110
VI. Ruch harmoniczny i falowy, akustyka	126
VII. Ciecze i ciała stałe	153
VIII. Fizyka cząsteczkowa, termodynamika	167
IX. Elektrostatyka	201
X. Prąd elektryczny stały	228
XI. Elektromagnetyzm	249
XII. Optyka geometryczna	281
XIII. Optyka fizyczna, kwanty promieniowania	315
XIV. Fizyka jądrowa	346
XV. Odpowiedzi do zadań testowych	362
WAŻNIEJSZE STAŁE FIZYCZNE	383

WSTĘP

Skrypt przeznaczony jest dla pracujących zawodowo, uczestników Semestru zerowego oraz dla słuchaczy różnych kursów przygotowujących do egzaminu wstępnego z fizyki na wszystkie wydziały Politechniki Lubelskiej, więc ma na celu powtórzenie materiału z fizyki z zakresu szkoły średniej. Skrypt zawiera materiał omawiany przez autora przez wiele lat na różnych kursach przygotowawczych lub semestrach zerowych. Nie pretenduje, więc do jakiegoś systematycznego kursu fizyki z zakresu szkoły średniej, a tym bardziej do podręcznika z Fizyki. Służy więc do przypomnienia materiału z zakresu szkoły średniej. Uwzględniając specyficzne warunki ludzi pracujących zawodowo i jednocześnie pragnących zdobywać wiedzę, autor starał się wyjaśniać teorię lub rozwiązywanie zadań jak najbardziej szczegółowo, unikając przeskoków albo luk myślowych.

Pod względem tematycznym skrypt zawiera czternaście rozdziałów, z których każdy stanowi odrębny dział fizyki. W każdym rozdziale materiał ułożony jest na wzór podręczników francuskich serii „Schaum”, tzn. zawiera krótką teorię z kilkoma przykładami, pewną ilość zadań rozwiązanych i nieco więcej zadań do rozwiązania, zwanych uzupełniającymi, ale z odpowiedziami. Na końcu każdego rozdziału umieszczono też pewną liczbę testów w postaci prostych zadań lub pytań, do których odpowiedzi znajdują się na końcu skryptu. Zadania do niniejszego skryptu wzięte zostały głównie z egzaminów wstępnych, które zostały zaopatrzone znakiem (x) dla pracujących, oraz znakiem (xx) dla studiów dziennych. Zadania bez oznaczeń zostały wzięte z różnych innych zbiorów.

Niniejszy skrypt jest trzecim wydaniem poprawionym i uzupełnionym jako jedna całość, a nie jak w pierwszym wydaniu składającym się z dwóch części. Autor wyraża podziękowanie prof. dr hab. Edwardowi Śpiewli, jak również wdzięczność dziekanowi prof. dr hab. Klaudiuszowi Lenikowi za umożliwienie wydrukowania pierwszego i drugiego wydania skryptu, oraz wyraża podziękowanie Panu kustoszowi dyplomowanemu Jarosławowi Gajdzie oraz Pani mgr inż. Katarzynie Pełka-Smętek za pomoc w wydrukowaniu trzeciego, niniejszego wydania skryptu, zaś prof. dr hab. Annie Jaśkowskiej za owocne dyskusje nad niektórymi wielkościami i pojęciami fizycznymi występującymi w niniejszym skrypcie. Pracę tę autor poświęca pamięci Janusza Skierczyńskiego, pierwszego kierownika Katedry Fizyki Politechniki Lubelskiej.

I. MIĘDZYNARODOWY UKŁAD JEDNOSTEK MIAR SI. PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O WEKTORACH

1.1. Układ jednostek miar SI.

W fizyce występuje dużo różnych wielkości, które trzeba mierzyć. Dlatego też każda wielkość musi mieć swoją jednostkę. Bardzo często jednostki różnych wielkości fizycznych tworzy się z innych jednostek, jak np. jednostka siły – newton (N) – jest utworzona z jednostki masy – kilograma (kg), jednostki długości – metra (m), oraz z jednostki czasu – sekundy (s). Ale musi być kilka jednostek podstawowych takich, które nie są utworzone z innych jednostek lecz wprowadzone są umownie, tworząc układ jednostek miar. Układem jednostek miar, nazywamy więc zbiór kilku jednostek wybranych wielkości fizycznych, wprowadzonych umownie, które służą do tworzenia innych jednostek.

Obecnie obowiązującym Międzynarodowym Układem Jednostek Miar jest układ SI. (Système International d'Unités), zwany w skrócie układem SI, który został przyjęty w 1960 r. przez XI Generalną Konferencję Miar. Układ ten zawiera sześć podstawowych następujących jednostek:

1. Jednostkę długości – metr (m)
2. Jednostkę masy – kilogram (kg)
3. Jednostkę czasu – sekundę (s)
4. Jednostkę natężenia prądu – amper (A)
5. Jednostkę temperatury – kelwin (K)
6. Jednostkę natężenia źródła światła (światłości) – Kandelę (Cd)

Jednostkę ilości materii – mol (mol), jako jednostkę uzupełniającą, włączono do układu SI. Na XIV Generalnej Konferencji Miar w 1971 r. Do jednostek uzupełniających należy również jednostka kąta płaskiego – radian i jednostka kąta bryłowego – steradian.

Metr (m) – jednostka długości. Bierze swój początek z czasów rewolucji francuskiej (1789 r.). Wtedy to postanowiono utworzyć ścisłą jednostkę długości, którą wzięto z wymiarów Ziemi. Postanowiono mianowicie, że 1/40 milionowa część południka ziemskiego przechodzącego przez Paryż będzie taką jednostką długości i nazwano ją metrem. Sporządzono też wzorzec tej jednostki ze stopu irydu i platyny, który znajduje się w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem. Początkowo definiowano metr jako odstęp pomiędzy dwoma kreskami na tym wzorcu w temperaturze 0°C.

Na XI Generalnej Konferencji Miar i Wag w 1960 zdefiniowano metr w oparciu o fale świetlne: metr jest to pewna ilość długości fal pomarańczowego światła, wysyłanego przez świecący gaz krypton o liczbie masowej 86:

$$1 \text{ m} = 1\,650\,763,75 \lambda.$$

Powyższa liczba fal została dopasowana do poprzedniego wzorca metra.

Na XVII Generalnej Konferencji Miar i Wag w 1983 r. określono metr jako odległość, którą pokonuje światło w próżni w czasie $\frac{1}{299\,792\,458}$ s.

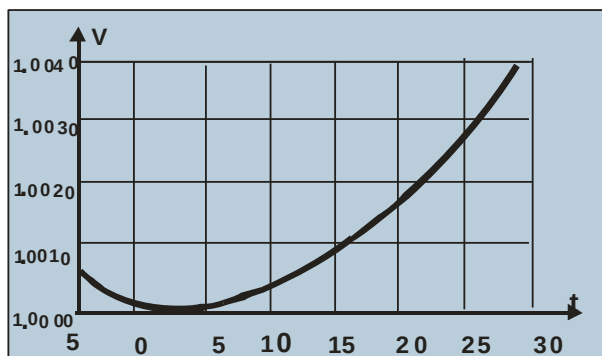
Podział metra na jednostki pochodne, mniejsze i większe oparty jest na ogólnym podziale dziesiętnym, w którym wprowadzone zostały następujące przedrostki:

decy (dc)	10^{-1}	deka (da)	10^1
centy (c)	10^{-2}	hekto (h)	10^2
mili (mm)	10^{-3}	kilo (k)	10^3
mikro (μ)	10^{-6}	mega (M)	10^6
nano (n)	10^{-9}	giga (G)	10^9
piko (p)	10^{-12}	tera (T)	10^{12}
femto (f)	10^{-15}		
atto (a)	10^{-18}		

Mamy np. 1 μm (mikrometr) = 10^{-6} m, 1 nm (nanometr) = 10^{-9} m.

Spotyka się jeszcze jednostkę długości spoza układu SI a mianowicie 1 Å (angstrom) = 10^{-10} m.

Kilogram (kg) – jednostka masy, jest to masa wzorca jednego kilograma, wykonanego ze stopu irydu i platyny, przechowywanego w międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem, w kształcie walca o średnicy 39 mm i wysokości też 39 mm. Wzorzec ten wykonany został jako równoważność masy 1 dm³ wody destylowanej w temperaturze 4°C i pod normalnym ciśnieniem. W temperaturze 4°C woda ma największą gęstość a, objętość najmniejszą, co jest pokazane na wykresie na **rys. 1.1**.



Rys.1.1. W temperaturze 4°C woda ma najmniejszą objętość

Sekunda (s) – jednostka czasu, określona została z ruchu Ziemi dookoła Słońca, jako pewna część roku zwrotnikowego z 1900 r. z godz. 0⁰⁰. Rok Zwrotnikowy, jest to odstęp czasu pomiędzy dwoma momentami równonocy wiosennej tj. od 21 marca jednego roku do 21 marca roku następnego.

Oparto też definicję sekundy na drganiach atomów, które emitują promieniowanie, przechodząc z jednego stanu energetycznego w drugi. Np. izotop cezu o liczbie masowej 133 drga z częstotścią 9162770 Hz. Sekunda więc jest to czas trwania 9152770 okresów drgań atomu izotopu cezu o liczbie masowej 133.

Amper (A) – jednostka natężenia prądu. Została określona z oddziaływania dwóch przewodów równoległych, po których płynie prąd elektryczny. Płynący prąd wytwarza pole magnetyczne, które obejmuje przewodnik znajdujący się w sąsiedztwie. Na każdy więc przewodnik działa siła elektrodynamiczna powodująca przyciąganie się przewodów, gdy prądy w obu przewodach mają te same zwroty, bądź odpychanie się, gdy zwroty prądów są przeciwnie. Ustalono więc, że **amper** będzie natężeniem takiego prądu, który płynąc przez dwa przewody równoległe, nieskończenie długie, umieszczone w próżni, oddalone od siebie o 1 m, spowoduje oddziaływanie pomiędzy tymi przewodami siłą:

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

na każdy metr bieżący przewodów.

Kelwin (K) – jest jednostką temperatury skali Kalwina, która została określona w ten sposób, że potrójnemu punktowi wody przyporządkowano liczbę 273,15. Punkt potrójny określa stan równowagi termodynamicznej pomiędzy trzema fazami danej substancji (stałej, ciekłej i gazowej). Dla wody stan taki jest osiągalny w temperaturze 0,01°C i ciśnieniu 611 Pa (4,58 mm Hg). Dlatego też temperaturze zera bezwzględnego w skali Kalwina odpowiada temperatura $t = -273,15^{\circ}\text{C}$ w skali Celsjusza. Zależność między skalą Celsjusza a Kalwina jest więc następująca:

$$T = 273,15 + t$$

Kandela (Cd) – jednostka natężenia światła lub światłości. Jest to światłość $1/60 \text{ cm}^2$ ciała doskonale czarnego promieniującego prostopadle do powierzchni, w temperaturze krzepnięcia platyny (2042 K) pod normalnym ciśnieniem. Modelem kandel i jednocześnie modelem ciała doskonale czarnego jest probówka z tlenku toru z wylotem o polu powierzchni równej $1/60 \text{ cm}^2$ zanurzona w ciekłej platynie. Wielkość otworka probówki została dobrana tak, żeby jego światłość była równa światłości dawnego modelu kandel, tzn. odpowiednio dobranego płomienia świecy.

Ciało doskonale czarne, to takie, które pochłania 100% energii padającej na nie. Wymieniona probówka jest właśnie modelem ciała doskonale czarnego, gdyż promień świetlny wpadający do jej wnętrza już z niej nie wyjdzie.

Mol – jednostka ilości (liczności) materii. Jest to ilość materii zawierająca liczbę cząsteczek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kg izotopu węgla C^{12} .

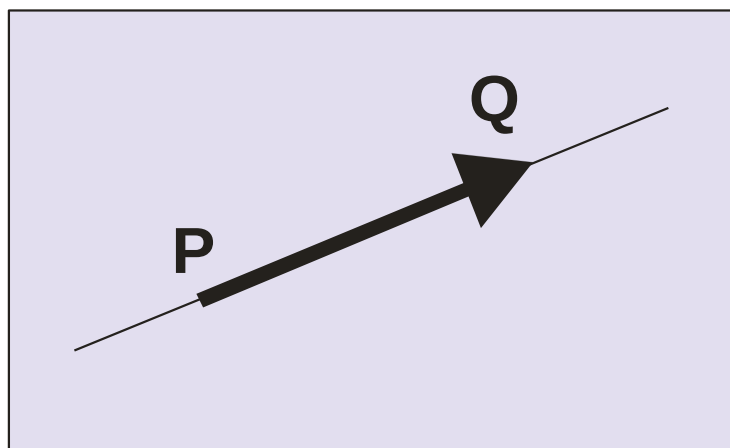
Radian – jest to kąt płaski o wierzchołku w środku okręgu, który wycina z tego okręgu łuk o długości równej jego promieniowi.

Steradian – jest to kąt bryłowy o wierzchołku w środku kuli, który wycina z powierzchni tej kuli pole równe kwadratowi jej promienia.

1.2. Wielkości skalarne i wektorowe

Istnieją wielkości fizyczne, które są jednoznacznie określone przez jedną liczbę. Nazywamy je wielkościami skalarnymi. Takimi wielkościami są np. masa, gęstość, droga, czas, temperatura, praca, potencjał. Natomiast wielkości fizyczne, które do pełnego określenia wymagają oprócz wartości liczbowej, określenia kierunku, zwrotu i punktu zaczepienia, nazywamy wielkościami wektorowymi. Takimi wielkościami są np.: prędkość, przyspieszenie, przemieszczenie, siła, pęd, moment pędu.

Każdą wielkość wektorową można przedstawić za pomocą odcinka skierowanego (wektora), którego długość odpowiada wartości liczbowej danej wielkości fizycznej. Prosta, na której leży wektor wyznacza kierunek tego wektora, a zwrot na tej prostej określa grot strzałki (**rys. 1.2**).

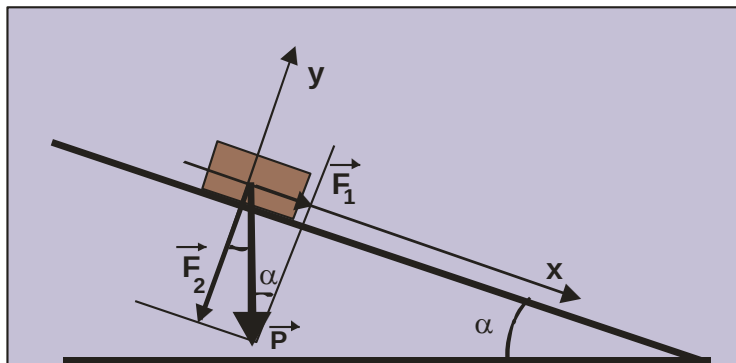


Rys. 1.2. Każdą wielkość wektorową można przedstawić za pomocą strzałki (wektora) $\overrightarrow{PQ}$.
P jest punktem zaczepienia (początkiem) wektora, Q jest jego końcem

Wektory oznaczamy dużymi lub małymi literami ze strzałką u góry ($\vec{F}$, $\vec{a}$). Czasami oznaczamy dwiema dużymi literami ze strzałką u góry, wówczas pierwsza litera oznacza punkt zaczepienia wektora (początek wektora), druga jego koniec np. $\overrightarrow{PQ}$. Spotyka się też oznaczanie wektorów grubym drukiem. Wartości liczbowe wektorów oznaczonych np. symbolami $\vec{F}$, $\vec{V}$, $\vec{a}$ zapisuje się odpowiednio $|\vec{F}|$, $|\vec{V}|$, $|\vec{a}|$ lub F , V , a . Trzeba pamiętać, że nie można utożsamiać wektora z jego wartością liczbową, która jest jedną z jego czterech cech i w związku z tym nie jest wszystko jedno, czy zapiszemy $\vec{F}$ czy F , ponieważ symbole te mają różne oznaczenia: pierwszy oznacza wektor, drugi tylko jego wartość liczbową.

1.3. Rozkładanie danego wektora na jego składowe

Bardzo często spotykamy się z zagadnieniem zastąpienia jednego wektora przez dwa lub trzy inne wektory. Mówimy wtedy o rozkładaniu wektora na jego składowe. Przykładowo, rozpatrzmy ciało o ciężarze $\vec{P}$ znajdujące się na równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α przy zaniedbaniu tarcia (**rys.1.3**).



Rys. 1.3. Wektory $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ są składowymi wektora $\vec{P}$

Ciężar tego ciała, który jest wektorem o kierunku pionowym, można rozłożyć na dwa wektory składowe – w kierunku równoległym do równi i w kierunku prostopadłym do niej. Zamiast siły ciężaru danego ciała działają teraz dwie inne siły: $\vec{F}_1$ – zsuwająca ciało z równi i $\vec{F}_2$ – przyciskająca to ciało do równi.

Aby rozłożyć dany wektor na dwa wektory składowe, wykonujemy następujące działania:

- rysujemy proste określające kierunki szukanych wektorów składowych, przechodzące przez punkt zaczepienia rozkładanego wektora,
- z końca wektora rozkładanego prowadzimy proste pomocnicze równoległe do tych kierunków,
- otrzymujemy wtedy równoległobok (prostokąt), którego boki są szukanymi wektorami składowymi.

Wartości liczbowe otrzymanych wektorów składowych wylicza się z powstałych trójkątów sił:

$$F_1 = P \cdot \sin \alpha, \quad F_2 = P \cdot \cos \alpha$$

Można też traktować otrzymane wartości liczbowe wektorów składowych jako rzuty wektora $\vec{P}$ na osie układu współrzędnych, ustawionych tak, że oś OX skierowana jest równoległe do równi a oś OY prostopadle (**rys. 1.3**). Rzut wektora na daną prostą lub na oś współrzędnych nie jest wektorem. Ażeby więc uczynić go wektorem, wprowadzamy wektory jednostkowe (wersory) skierowane wzdłuż osi

współrzędnych: w kierunku osi OX wektor jednostkowy $\vec{i}$, w kierunku osi OY wektor jednostkowy $\vec{j}$. Wektor jednostkowy to taki, którego wartość liczbowa równa się jedności i który posiada kierunek oraz zwrot danego wektora.

Uwzględniając powyższe, wektor $\vec{P}$ ma więc składowe: w kierunku osi Ox, $x\vec{i}$, w kierunku osi OY $y\vec{j}$, gdzie x, y , są rzutami wektora $\vec{P}$ na osie układu.

Można więc dany wektor w naszym przypadku wektor $\vec{P}$, zapisać za pomocą składowych:

$$\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (1.1)$$

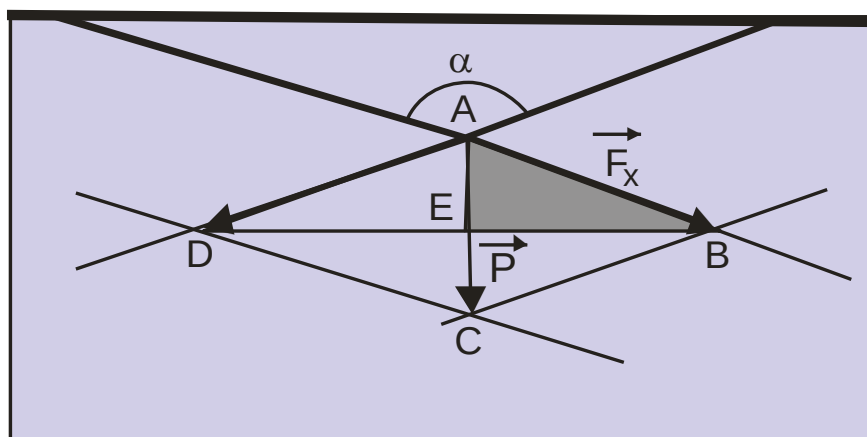
Jeżeli dany wektor, który mamy rozłożyć na składowe, znajduje się w przestrzennym układzie współrzędnych, tzn. w przestrzeni, a nie na płaszczyźnie, wtedy dochodzi jeszcze jedna składowa – w kierunku osi OZ. Wektor jednostkowy w kierunku osi OZ oznaczony jest przez wektor jednostkowy $\vec{k}$. W tym przypadku dany wektor $\vec{A}$ można zapisać:

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.2)$$

P r z y k ł a d 1.1.

Ciało o ciężarze $P = 100 \text{ N}$ zostało zawieszone na dwóch linkach o jednakowej długości tworzących ze sobą kąt $\alpha = 140^\circ$ obliczyć siły działające wzdłuż linek.

Wektor $\vec{P}$ rozkładamy na składowe (**rys.1.4.**). W tym celu kreślimy kierunki sił składowych, które w tym przypadku są zgodne z kierunkami linek. Gdy przez koniec wektora rozkładanego poprowadzimy proste równoległe do tych kierunków, to otrzymamy romb ABCD, którego boki AD i AB są wartościami liczbowymi składowych wektora $\vec{P}$, a więc i napięciami linek.



Rys. 1.4. Boki AB i AD rombu ABCD są składowymi wektora $\vec{P}$, a więc i szukanymi wartościami liczbowymi napięcia linek

Wartość liczbową wektora napięcia jednej linki wyliczymy z trójkąta prostokątnego EBA, w którym przyprostokątna AE jest równa połowie wartości liczbowej ciężaru $\vec{P}$.

Możemy więc napisać:

$$\frac{P}{2} = F_x \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Skąd

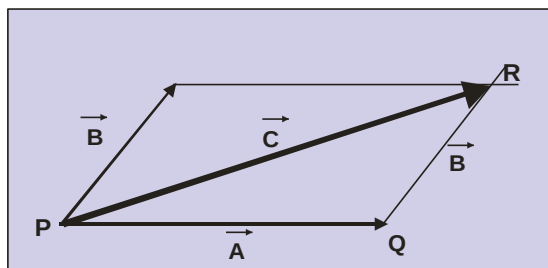
$$F_x = \frac{P}{2 \cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$F_x = 146 \text{ N}.$$

Napięcie linek jest większe od samego ciężaru!

1.4. Dodawanie i odejmowanie wektorów

Suma dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest równa przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych wektorach (**rys. 1.5.**) lub może być też utworzona przez przystawienie początku wektora $\vec{B}$ do końca wektora $\vec{A}$ (zachowując kierunek, zwrot i wartość bezwzględną). Suma wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ będzie to wektor łączący początek wektora $\vec{A}$ punkt (P) z końcem wektora $\vec{B}$ punkt (R).



Rys. 1.5. Przekątna PR utworzonego równoległoboku jest sumą wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$

Wyżej wymienioną metodę stosujemy, gdy mamy dodać do siebie kilka wektorów. Wtedy do końca wektora pierwszego przystawiamy początek drugiego, do końca drugiego początek następnego itd. Tworzymy w ten sposób wielobok sznurowy. Wektor zamykający utworzony z danych wektorów wielobok, którego początek pokrywa się z początkiem wektora pierwszego, jest szukaną sumą (wypadkową) kilku dodawanych wektorów.

Jeżeli zdarzy się, że koniec wektora ostatniego zejdzie się z początkiem wektora pierwszego, wtedy nie będzie miejsca na wypadkową (wypadkowa będzie równa zeru). Jest to szczególny przypadek układu sił, a mianowicie taki,

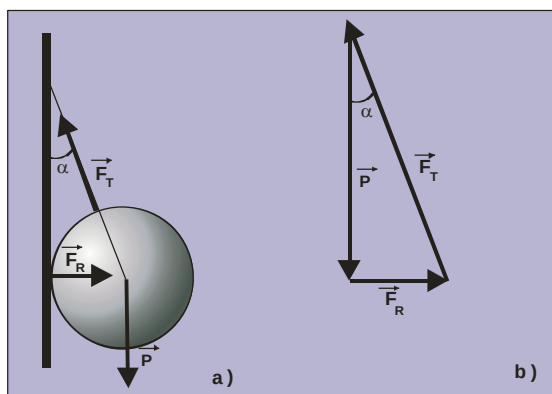
gdy siły się równoważą. W statyce nazywa się on pierwszym warunkiem równowagi i wypowiada następująco: siły się równoważą, gdy tworzą wielobok zamknięty lub gdy ich wypadkowa jest równa zero, co można zapisać:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (1.3)$$

Powyższy warunek wykorzystuje się do rozwiązywania niektórych zadań, co jest pokazane w następującym przykładzie.

Przykład 1.2

Kula o ciężarze $P = 10 \text{ N}$ została zawieszona na linie w ten sposób, że opiera się o ścianę, a linka tworzy ze ścianą kąt $\alpha = 30^\circ$ (rys. 1.6 a). Obliczyć napięcie linki, oraz siłę, z jaką ściana działa na kulę (reakcję ściany). Tarcie kuli o ścianę pomijamy.



Rys. 1.6. Wszystkie siły działające na kulę równoważą się, więc tworzą wielobok zamknięty. W tym przypadku trójkąt

Rozpatrujemy wszystkie siły działające na kulę. Jest ich trzy: ciężar $\vec{P}$, siła działająca ze strony linki $\vec{F}_T$, i reakcja ściany na kulę $\vec{F}_R$. Ponieważ kula znajduje się w spoczynku, to siły te się równoważą, a więc tworzą wielobok zamknięty (trójkąt) (rys. 1.6 b), z którego wyliczamy wartości liczbowe szukanych sił:

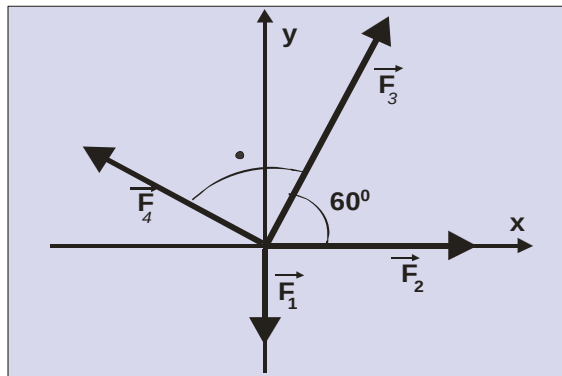
$$F_T = \frac{P}{\cos \alpha}, \quad F_T = 11,8 \text{ N.}$$

$$F_R = P \operatorname{tg} \alpha, \quad F_R = 5,8 \text{ N.}$$

W przypadku, gdy mamy dodać do siebie więcej niż dwa wektory, możemy stosować jeszcze inną metodę. Każdy wektor rozkładamy na składowe w kierunkach osi współrzędnych. Następnie dodajemy do siebie wszystkie składowe wzdłuż każdej osi. Szukaną sumę wektorów otrzymamy jako wektor wypadkowy z sumy składowych, co jest pokazane w następującym przykładzie.

Przykład 1.3

Znaleźć wypadkową (sumę) czterech następujących sił: $F_1 = 5 \text{ N}$, działającą w kierunku ujemnej osi OY, $F_2 = 10 \text{ N}$ o zwrocie zgodnym z kierunkiem osi OX, $F_3 = 14 \text{ N}$ działającej pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do osi OX i $F_4 = 10 \text{ N}$ skierowaną prostopadłe do kierunku siły F_3 , co jest pokazane na rys. 1.7.



Rys. 1.7. Układ czterech sił, dla których mamy znaleźć wypadkową

Dane wektory sił przedstawiamy za pomocą ich wektorów składowych w kierunku osi OX i OY:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -5 \vec{j} \\ \vec{F}_2 &= 10 \vec{i} \\ \vec{F}_3 &= 14 \cos 60^\circ \vec{i} + 14 \sin 60^\circ \vec{j} \\ \vec{F}_4 &= -10 \cos 30^\circ \vec{i} + 10 \sin 30^\circ \vec{j}.\end{aligned}$$

Po dodaniu wszystkich składowych w kierunku osi OX i wszystkich składowych w kierunku osi OY, otrzymamy szukaną wypadkową:

$$\vec{W} = 8,4\vec{i} + 12\vec{j}$$

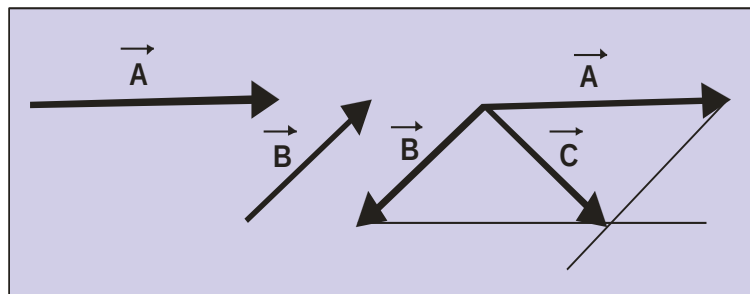
Wartość bezwzględna wypadkowej wyliczymy z twierdzenia Pitagorasa:

$$W = \sqrt{(8,4)^2 + (12)^2} \quad W = 14,7 \text{ N}.$$

Natomiast tangens kąta nachylenia wypadkowej wyliczymy ze stosunku składowej w kierunku osi OY do składowej w kierunku osi OX:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{12,1}{8,4} = 1,44 \quad \Theta = 55^\circ$$

Odejmowanie dwóch wektorów polega na dodaniu wektora odejmowanego ze zwrotem (znakiem) przeciwnym, tzn. żeby od wektora $\vec{A}$ odjąć wektor $\vec{B}$, należy do wektora $\vec{A}$ dodać wektor $-\vec{B}$. Różnica wektorów $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ jest przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{A}$ i $-\vec{B}$, co jest pokazane na **rys. 1.8**.



Rys. 1.8. Odjąć dany wektor $\vec{B}$ tzn. dodać go ze znakiem przeciwnym ($-\vec{B}$)

1.5. Mnożenie wektorów

Mnożenie (lub dzielenie) wektora $\vec{A}$ przez daną liczbę k polega na wymnożeniu wartości liczbowej wektora $\vec{A}$ przez tę liczbę. Otrzymuje się wtedy wektor k razy większy, lub k razy mniejszy w przypadku dzielenia, o tym samym zwrocie i kierunku. Przykładami takiego mnożenia i dzielenia wektorów przez liczbę są wielkości: pęd $\vec{P} = m \cdot \vec{V}$, siła $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, przyspieszenie $\vec{a} = \frac{\vec{V}}{t}$, gdzie litery m, t są liczbami.

W przypadku mnożenia wektora $\vec{A}$ przez wektor $\vec{B}$ mamy do czynienia z dwoma iloczynami: skalarnym i wektorowym. Iloczyn skalarny, którego zapis jest

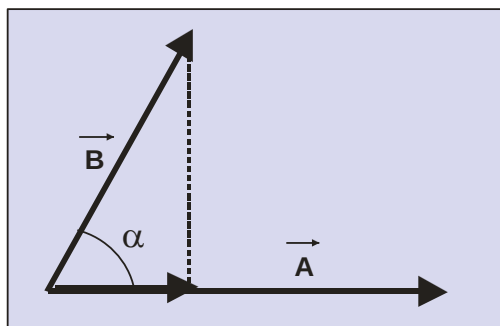
$$C = \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (1.4)$$

otrzymuje się przez wymnożenie wartości bezwzględnych wymnażanych wektorów przez cosinus kąta zawartego pomiędzy tymi wektorami:

$$C = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \alpha. \quad (1.5)$$

Z powyższego wymnażania otrzymuje się wielkość skalarną. Wyrażenie $|\vec{B}| \cos \alpha$ jest rzutem wektora $\vec{B}$ na wektor $\vec{A}$ co jest pokazane na **rys. 1.9**.

Rzut jest skalarem, pomnożony przez wartość bezwzględną wektora $\vec{A}$, pozostaje dalej skalarem.



Rys. 1.9. Wyrażenie $|\vec{B}| \cos \alpha$ jest rzutem wektora $\vec{B}$ na wektor $\vec{A}$

Jeżeli wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ przedstawimy za pomocą ich składowych w kierunkach osi OX, OY, OZ:

$$\vec{A} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

gdzie $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ są liczbami, to iloczyn skalarny tych wektorów przedstawi się wzorem:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (1.6)$$

Przykładem iloczynu skalarnego jest **praca**, gdyż jest ona równa iloczynowi wartości liczbowej siły przez wartość liczbową przesunięcia i przez cosinus kąta zawartego między tymi wektorami:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \alpha \quad (1.7)$$

Drugim przykładem iloczynu skalarnego jest strumień wektora natężenia pola elektrycznego:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.8)$$

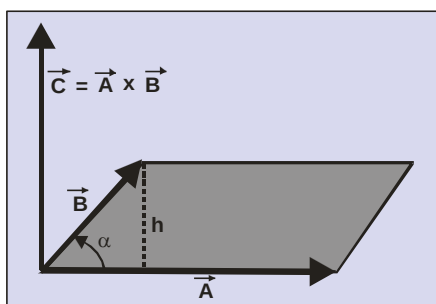
gdzie $d\vec{s}$ jest wektorem elementarnej powierzchni przez którą przenikają linie sił pola.

Iloczyn wektorowy, dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$, który zapisuje się jako $\vec{A} \wedge \vec{B}$ lub $\vec{A} \times \vec{B}$, jest wektorem, którego wartość bezwzględną otrzymuje się przez wymnożenie wartości tych wektorów i przez sinus kąta zawartego między nimi. Będzie więc wyrażać się wzorem:

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \alpha \quad (1.9)$$

Otrzymany wektor z iloczynu wektorowego dwóch wektorów leży na prostej prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez dane dwa wektory. Jego zwrot określony jest regułą prawej śruby, jest mianowicie taki, w którym przesuwa się prawa śruba obracana w kolejności mnożenia wektorów, a więc w naszym przypadku od wektora $\vec{A}$ do wektora $\vec{B}$. Zmiana kolejności mnożenia powoduje zmianę zwrotu wektora na przeciwny.

Wartość liczbową iloczynu wektorowego równa się polu równoległoboku zbudowanego na dwóch danych wektorach, gdyż wyrażenie $|\vec{B}| \sin \alpha$ jest wysokością równoległoboku, co jest pokazane na **rys. 1.10**.



Rys. 1.10. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny przechodzącej przez dwa dane wektory.

Przykładem iloczynu wektorowego jest **moment siły**. Jest to iloczyn wektorowy wektora wodzącego $\vec{r}$ punktu i sił działających $\vec{F}$, co widać na **Rys. 1.11**.

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (1.10)$$

Wartość liczbową momentu siły wyrazi się więc wzorem:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha$$

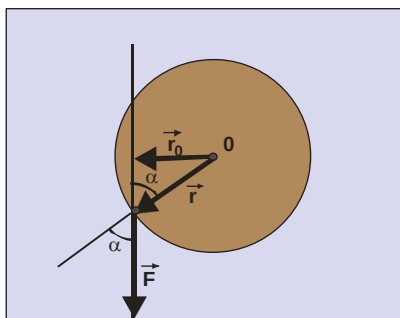
ale

$$|\vec{r}| \sin \alpha = r_0$$

gdzie r_0 nazywamy ramieniem siły. Jest to najkrótsza odległość punktu obrotu do prostej, na której leży wektor siły.

Wartość liczbową momentu siły równa się więc iloczynowi wartości liczbowej siły przez jej ramię:

$$M = F r_0 \quad (1.11)$$



Rys. 1.11. Momentem siły $\vec{F}$ jest iloczynem wektorowym wektora $\vec{r}$ i siły $\vec{F}$

Drugim przykładem iloczynu wektorowego jest siła elektrodynamiczna:

$$\vec{F} = i \vec{L} \wedge \vec{B}$$

gdzie wektor $\vec{B}$ jest indukcją magnetyczną i natężeniem prądu, L długością przewodnika, po którym płynie prąd i który jest umieszczony w polu magnetycznym.

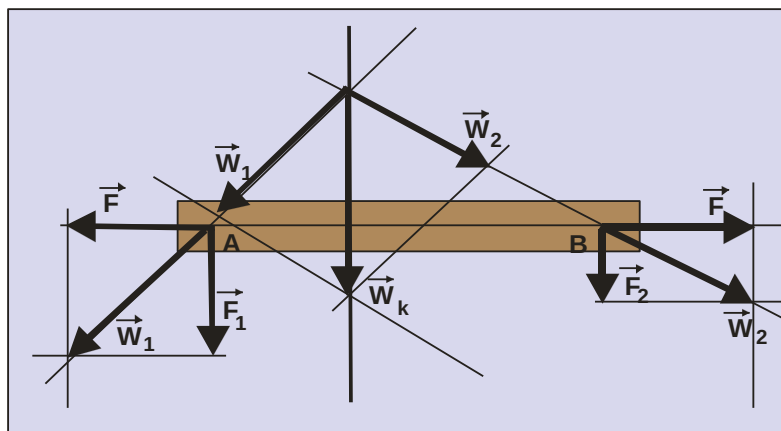
1.6. Siły równoległe

Bardzo często mamy do czynienia z przypadkiem, gdy dwie lub więcej sił działających na dane ciało są równoległe i trzeba je zastąpić jedną siłą, czyli znaleźć wypadkową tych sił.

Sposób otrzymania wypadkowej sił równoległych $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ o tym samym zwrocie jest przedstawiony na **rys. 1.12.**: do punktów A i B przykładamy dwie siły $\vec{F}$ jednakowe co do wartości liczbowych ale przeciwnie skierowane, które się wzajemnie równoważą, a które pozwolą znaleźć wypadkowe $\vec{W}_1$ i $\vec{W}_2$. Wypadkowa tych sił będzie szukaną wypadkową $\vec{W}_k$. Jest ona równa, co do wartości liczbowej, sumie sił danych i leży na prostej, równoległej do danych sił, względem której wartości liczbowe momentów obu sił są jednakowe.

Równość wartości liczbowych momentów sił zapobiega obrotowi ciała. Na tej podstawie określa się drugi warunek równowagi sił, zapobiegający obrotowi ciała, a mianowicie żeby ciało było w równowadze odnośnie jego obrotu, to suma momentów wszystkich sił działających na dane ciało powinna być równa zero. Możemy to zapisać w sposób następujący:

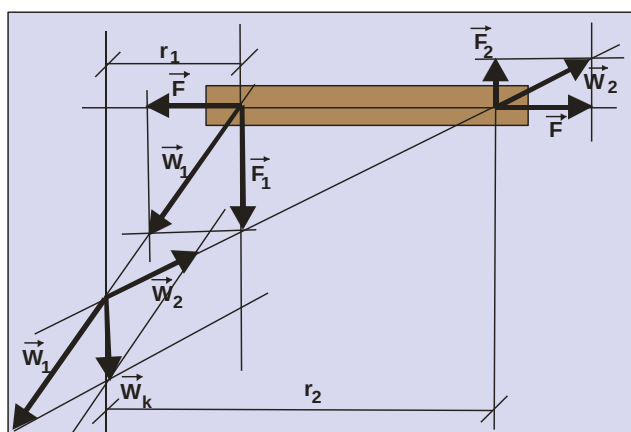
$$\sum \vec{M} = 0 \quad (1.12)$$



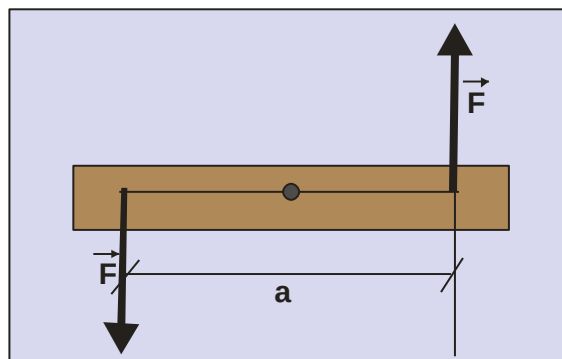
Rys. 1.12. Siła $\vec{W}_k$ jest wypadkową sił równoległych $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zgodnie skierowanych

Gdy mamy dwie siły równoległe, ale przeciwnie skierowane i nieleżące na jednej prostej, wtedy ich wypadkową znajdujemy podobnie jak poprzednio. Będzie ona równać się, co do wartości liczbowej, różnicy oby danych sił i będzie leżeć na prostej znajdującej się poza nimi, równoległe do danych sił, względem której wartości liczbowe momentów sił będą jednakowe (**rys. 1.13**). Warunek równowagi będzie taki sam jak dla sił zgodnie skierowanych.

Na uwagę zasługuje przypadek, gdy dwie siły równoległe i przeciwnie skierowane, nieleżące na jednej prostej, będą miały wartości liczbowe jednakowe. Takie dwie siły nie mają wypadkowej, tworzą tzw. **parę sił**. Parą sił nazywamy więc dwie siły równoległe, przeciwnie skierowane o wartościach liczbowych jednakowych i nieleżące na jednej prostej (**rys. 1.14**).



Rys. 1.13. Siła $\vec{W}_k$ jest wypadkową dwóch sił równoległych $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ przeciwnie skierowanych



Rys. 1.14. Dwie jednakowe siły co do wartości bezwzględnej, równoległe ale o zwrotach przeciwnych tworzą parę sił

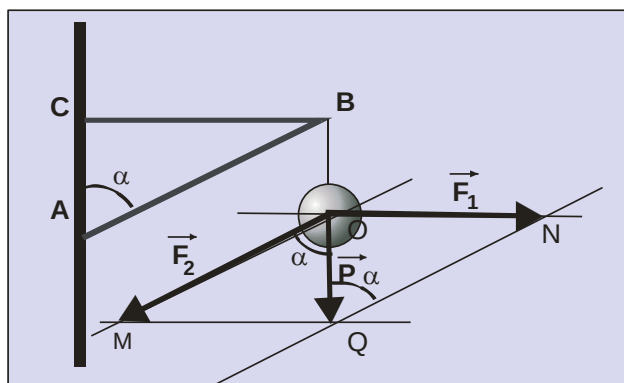
Moment pary sił jest równy iloczynowi jednej z sił przez odległość między tymi siłami. Jego wartość liczbową wyraża się wzorem:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot a \quad (1.13)$$

Moment pary sił jest wektorem, który leży na prostej prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez dwie dane siły. Jest to wektor swobodny, tzn. taki, który ma dowolny punkt przyłożenia.

Zadania rozwiązane

1.1. Kula o ciężarze $P = 30 \text{ N}$ została zawieszona na dwóch prętach, jak pokazuje **rys. 1.15**. Pręt AB tworzy ze ścianą kąt $\alpha = 60^\circ$. Obliczyć siły działające wzdłuż prętów.



Rys. 1.15. Szukane wartości liczbowe sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ są bokami ON i OM powstałego równoległoboku MQNO.

Przez punkt zaczepienia wektora siły ciężaru $\vec{P}$ prowadzimy proste określające kierunki sił składowych, które są równoległe do prętów. Następnie, przez koniec wektora $\vec{P}$ prowadzimy równoległe do tych kierunków. Z otrzymanego równoległoboku MQNO wyliczamy wartości liczbowe szukanych sił $\vec{F}_1 = ON$ i $\vec{F}_2 = OM$.

$$F_1 = P \operatorname{tg} \alpha, \quad F_1 = 51,9 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{P}{\cos \alpha}, \quad F_2 = 60 \text{ N}.$$

1.2. Dane są dwie siły jednakowe co do wartości liczbowej, po $F = 10 \text{ N}$ każda, tworzące ze sobą kąt $\alpha = 60^\circ$ (rys. 1.16). Obliczyć wypadkową tych sił.

Metoda I

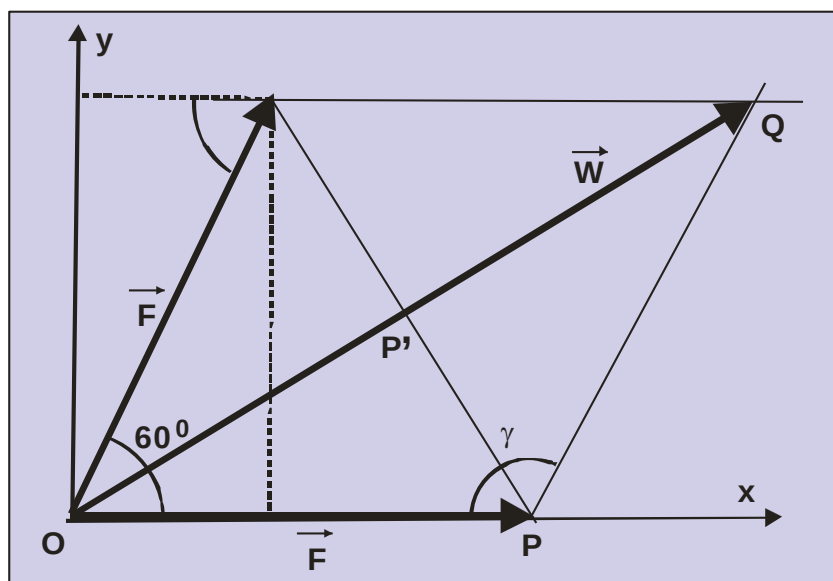
Korzystamy z tego, że równoległobok sił jest rombem, a więc wyliczamy z trójkąta prostokątnego OPP' połowę szukanej wypadkowej, a potem całą:

$$\frac{W}{2} = F \cos \frac{\alpha}{2}$$

skąd

$$W = 2 F \cos 30^\circ$$

$$W = F\sqrt{3}$$



Rys.1.16. Przekątna rombu OQ jest wartością liczbową szukanej siły wypadkowej dwóch jednakowych sił

Metoda II – Ogólna stosująca się do dwóch dowolnych sił, tworzących ze sobą kąt α .

Korzystamy z twierdzenia kosinusów:

$$W^2 = F^2 + F^2 - 2 F F \cos \gamma$$

gdzie kąt γ leży naprzeciwko szukanej wypadkowej. W naszym przypadku $\gamma = 120^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Mamy więc} \quad W^2 &= 2 F^2 - 2 F^2 \cos 120^\circ \\ \text{ale:} \quad \cos 120^\circ &= -\sin 30^\circ \\ \text{więc:} \quad W^2 &= 2 F^2 + 2 F^2 \cdot \frac{1}{2} \\ \text{lub} \quad W &= F\sqrt{3} \text{ N.} \end{aligned}$$

Metoda III (wektorowa)

Dane siły zapisujemy w postaci składowych na osiach OX i OY:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 10 \vec{i} \\ \vec{F}_2 &= 10 \cos 60^\circ \vec{i} + 10 \sin 60^\circ \vec{j} \end{aligned}$$

Wektor wypadkowy Otrzymamy przez dodanie wszystkich składowych na osi OX oraz na osi OY:

$$\vec{W} = 15 \vec{i} + 5\sqrt{3} \vec{j}$$

Wartość liczbowa siły wypadkowej będzie

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{225 + 75} \\ W &= 10\sqrt{3} \text{ N.} \end{aligned}$$

1.3. Znaleźć iloczyn skalarny dwóch wektorów

$$\vec{A} = 2 \vec{i} - \vec{j} \quad \vec{B} = 3 \vec{i} + 4 \vec{j}$$

oraz kąt zawarty pomiędzy tymi wektorami.

Zgodnie ze wzorem (1.6) możemy napisać:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 6 - 4 = 2.$$

Cosinus kąta między w/w wektorami znajdziemy korzystając ze wzoru (1.5)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \alpha$$

skąd:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}.$$

Mamy więc:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+16}},$$

$$\cos \alpha = 0,1785$$

$$\alpha = 79^{\circ} 20'$$

1.4 Walec o promieniu $R = 30$ cm i ciężarze $P = 1000$ N, należy wtoczyć na stopień o wysokości $h = 10$ cm, używając siły przyłożonej do osi walca i skierowanej poziomo (**rys. 1.17**). Obliczyć wartość liczbową tej siły.

Ażeby wtoczyć dany walec na stopień, należy obrócić go wokół punktu A. Będzie to możliwe, gdy moment siły działającej $\vec{F}$ względem punktu A przewyższy swoją wartością liczbową moment siły ciężaru $\vec{P}$ (też względem punktu A). Dla uproszczenia, wykonujemy obliczenia dla przypadku równości w/w momentów sił.

$$M_1 = F(R - h),$$

gdzie odcinek $(R - h)$ jest ramieniem siły $\vec{F}$.

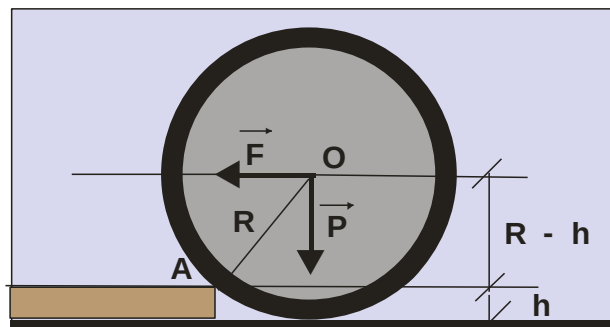
$$M_2 = P\sqrt{R^2 - (R - h)^2},$$

Odcinek $\sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{h(2R - h)}$ jest ramieniem siły ciężaru.

Z porównania obu momentów sił otrzymamy:

$$F = \frac{P\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$$

$$F = 1120 \text{ N}.$$



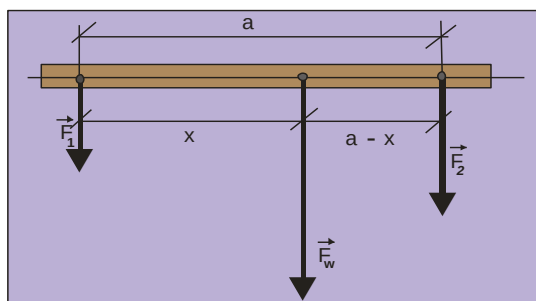
Rys. 1.17. Ażeby wtoczyć dany walec na stopień, należy obrócić go wokół punktu A

1.5. Znaleźć wypadkową oraz jej punkt przyłożenia, dwóch równoległych sił $F_1 = 100 \text{ N}$ i $F_2 = 150 \text{ N}$ zgodnie skierowanych, których punkty przyłożenia znajdują się w odległości $a = 80 \text{ cm}$ (**rys. 1.18**).

Wartość liczbową siły wypadkowej jest równa sumie danych sił:

$$F_w = F_1 + F_2$$

$$F_w = 250 \text{ N}.$$



Rys. 1.18. Wartości liczbowe momentów sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ względem punktu zaczepienia siły wypadkowej mają być sobie równe

Punkt przyłożenia siły wypadkowej znajdziemy porównując wartości liczbowe momentów danych sił względem punktu do którego przyłożona jest siła wypadkowa:

$$F_1 x = F_2 (a - x)$$

stąd:

$$x = a \frac{F_2}{F_1 + F_2}$$

$$x = 48 \text{ cm}.$$

1.6. Drabina opiera się jednym końcem o gładką ścianę a drugim o podłogę, gdzie występuje tarcie o współczynniku $k = 0,1$. Obliczyć największy kąt między drabiną a ścianą, przy którym drabina nie zsunie się po podłodze (**rys. 1.19**).

Suma wartości liczbowych momentów wszystkich sił działających na drabinę względem punktu A musi równać się zeru.

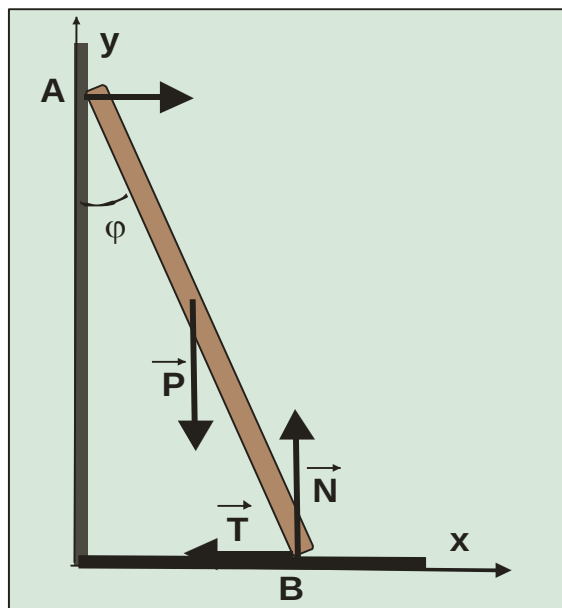
$$N L \sin \varphi - P \frac{L}{2} \sin \varphi - T L \cos \varphi = 0$$

gdzie L – jest długością drabiny, N – reakcją podłogi na drabinę. W tym przypadku równa się ona liczbowo ciężarowi drabiny (P), T jest siłą tarcia i wyraża się wzorem: $T = k N$.

Uwzględniając powyższe zależności, otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 k$$

$$\varphi = 11^\circ 20'.$$



Rys. 1.19. Siły działające na drabinę. Suma wartości liczbowych momentów sił względem punktu A ma być równa zero

Zadania uzupełniające

1.7. Siłę $F = 100 \text{ N}$ rozłożyć na dwie składowe, których stosunek wartości liczbowych równy jest $\frac{3}{4}$, i które tworzą ze sobą kąt prosty.

Odp. $F_1 = 60 \text{ N}$ $F_2 = 80 \text{ N}$.

1.8. Siłę $F = 100 \text{ N}$ rozłożyć na trzy składowe wzajemnie do siebie prostopadłe, pozostające w stosunku 1:2:3.

Odp. $F_x = \frac{F}{\sqrt{14}}$, $F_y = \frac{2F}{\sqrt{14}}$, $F_z = \frac{3F}{\sqrt{14}}$.

1.9. Siłę $F = 100 \text{ N}$ rozłożyć na dwie składowe, z których jedna jest dwa razy większa od drugiej, jeżeli kąt między tymi składowymi jest $\alpha = 60^\circ$.

Odp. $F_1 = \frac{F}{\sqrt{7}}$, $F_2 = \frac{2F}{\sqrt{7}}$.

1.10. (xx 1998) Młot do wbijania pali drewnianych w ziemię (baba) ważący $P = 5000 \text{ N}$ wisi na trzech belkach wbitych w ziemię i związanych u góry. Belki te są jednakowo nachylone do poziomu i tworzą parami kąt $\alpha = 60^\circ$. Obliczyć nacisk wywierany na każdą belkę.

Odp. $F_x = \frac{P}{\sqrt{6}}$.

1.11. Ciało o ciężarze P , w kształcie kwadratu zostało zawieszone na czterech linkach o jednakowej długości L każda i przyczepionych drugimi końcami do wierzchołków poziomego kwadratu o boku a . Obliczyć napięcie każdej linki.

$$\text{Odp. } F_x = \frac{P L}{2\sqrt{4L^2 - 2a^2}}.$$

1.12. Ciało o ciężarze $P = 10 \text{ N}$ zostało zawieszone na dwóch linkach, z których jedna tworzy z kierunkiem pionowym kąt $\alpha = 15^\circ$, a druga $\beta = 30^\circ$. Obliczyć napięcie każdej linki.

$$\begin{aligned} \text{Odp. } F_1 &= \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} & F_1 &= 7,1 \text{ N} \\ F_2 &= \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} & F_2 &= 3,7 \text{ N.} \end{aligned}$$

1.13. Obliczyć wypadkową dwóch sił $F_1 = 100 \text{ N}$, $F_2 = 70 \text{ N}$, które tworzą ze sobą kąt $\alpha = 60^\circ$.

$$\text{Odp. } F_w = 147,6 \text{ N.}$$

1.14. Obliczyć wypadkową trzech różnych sił: $F_1 = 3 \text{ N}$, $F_2 = 4 \text{ N}$, $F_3 = 10 \text{ N}$, które są wzajemnie do siebie prostopadłe.

$$\text{Odp. } F_w = 5\sqrt{5} \text{ N.}$$

1.15. Znaleźć wypadkową pięciu następujących sił: $F_1 = 10 \text{ N}$, skierowanej wzdłuż dodatniej osi OX , $F_2 = 5 \text{ N}$ działającej pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do osi OX , liczony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, $F_3 = 8 \text{ N}$ w kierunku dodatniej osi OY , $F_4 = 4 \text{ N}$ w kierunku ujemnej osi OX i $F_5 = 5 \text{ N}$ skierowanej wzdłuż ujemnej osi OY .

$$\text{Odp. } \vec{F}_w = 9,5 \vec{i} + 6,5 \vec{j} \quad F_w = 11,5 \text{ N.}$$

1.16. Udowodnić, że jeżeli dwa wektory przedstawimy za pomocą ich składowych w kierunku osi OX , OY , i OZ :

$$\vec{A} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{B} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

to ich iloczyn skalarny wyrazi się wzorem:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

1.17. Belka o masie $m = 10$ kg spoczywa swobodnie na dwóch podporach AB odległych od siebie o $L = 4$ m, w odległości $a = 1,5$ m od podpory A zawieszono ciało o masie $M = 20$ kg. Obliczyć reakcję obu podpór.

Odp. $R_A = 175$ N, $R_B = 125$ N.

1.18. Drabina o ciężarze $P = 60$ N opiera się swoim górnym końcem o gładką ścianę tworząc z nią kąt $\alpha = 30^\circ$ a dolnym końcem o gładką podłogę. W środku swojej długości przymocowana została do ściany za pomocą poziomego sznurka. Obliczyć napięcie tego sznurka.

Odp. $T = P \operatorname{tg} \alpha$, $T = 34,6$ N.

Zadania testowe

1.19. Co to jest układ jednostek miar?

1.20. Podać definicję ampera.

1.21. Które z niżej wymienionych wielkości są wielkościami skalarnymi, a które wektorami: ciśnienie, czas, droga, masa, objętość pęd, potencjał, praca, siła, strumień, prędkość.

1.22. Po równi pochyłej o długości $L = 2$ m i wysokości $h = 0,4$ m, należy wciągnąć ciało o ciężarze $Q = 4000$ N. Jaką siłą należy działać wzdłuż równi i jaki jest nacisk ciała na równię, jeżeli pominiemy tarcie ?

1.23. Na równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ należy utrzymać w spoczynku ciało o ciężarze $Q = 3000$ N. Obliczyć, jaką siłą skierowaną równoległą do podstawy równi, należy działać na dane ciało, jeżeli tarcie pominiemy.

1.24. Kula o ciężarze $Q = 10$ N znajduje się w korytku poziomym utworzonym przez dwie deski, tworzące ze sobą kąt prosty. Jedna z desek nachylona jest do poziomu pod kątem $\alpha = 60^\circ$. Obliczyć, jakimi siłami naciska kula na deski.

1.25. Siekiera w postaci klina o wymiarach bok $b = 12$ cm. Grzbiet $a = 3$ cm została wbita w pień drzewa siłą $F = 250$ N. Obliczyć siłę rozpierającą (prostopadłą do boków siekiery).

1.26. Rozłożyć siłę $F = 100$ N na trzy jednakowe (co do wartości bezwzględnej) siły wzajemnie do siebie prostopadłe.

1.27. Ile wynosi wypadkowa dwóch sił $F_1 = 4$ N i $F_2 = 3$ N, które tworzą ze sobą kąt prosty.

1.28. Ile wynosi wypadkowa dwóch jednakowych sił po $F = 10$ N każda, które tworzą ze sobą kąt $\alpha = 120^\circ$.

1.29. Obliczyć wypadkową trzech równych sił po $F = 10$ N każda leżących na jednej płaszczyźnie i tworzących ze sobą kąty $\alpha = 120^\circ$.

1.30. Ile wynosi wypadkowa trzech jednakowych co do wartości liczbowych sił, po $F = 10$ N każda, wzajemnie do siebie prostopadłych.

1.31. Obliczyć wartość bezwzględną wektora siły:

$$\vec{F} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j}$$

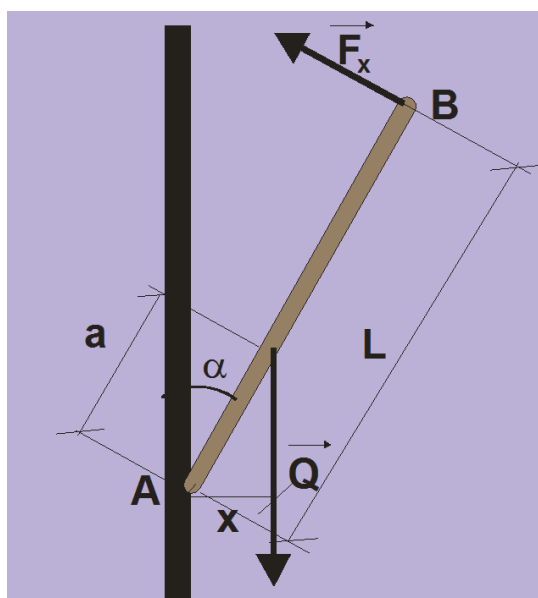
1.32. Znaleźć sumę i różnicę dwóch następujących wektorów:

$$\vec{A} = 5 \vec{i} - 3 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

$$\vec{B} = 2 \vec{i} + 2 \vec{j} - \vec{k}.$$

1.33. Skrzynia w kształcie sześcianu o dowolnej krawędzi i ciężarze $Q = 100 \text{ N}$ spoczywa na podłodze. Jaką siłą należy działać na górną krawędź tej skrzyni pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do jej ściany, ażeby przewrócić ją z jednego boku na drugi ?

1.34. Jaką siłą F_x należy działać na koniec drążka AB o długości $L = 1,5 \text{ m}$ prostopadle do niego, ażeby zrównoważyć ciało o ciężarze $Q = 180 \text{ N}$ zaczepione w odległości $a = 30 \text{ cm}$, licząc od punktu A, jeżeli drążek tworzy z kierunkiem pionowym kąt $\alpha = 30^\circ$ (rys. 20).



Rys. 1.20. Moment siły $\vec{F}_x$ ma zrównoważyć się z momentem siły ciężaru

1.35. Jaką część swojej długości może wystawać jednorodna belka znad tarasu, której ciężar wynosi $P = 100 \text{ N}$ i jeżeli do jej wystającego końca przyczepiono ciało o ciężarze $Q = 200 \text{ N}$.

1.36. Za pomocą dźwigni dwustronnej o długości $L = 2,1 \text{ m}$, należy podnieść ciało o ciężarze $Q = 5000 \text{ N}$. Odległość punktu podparcia do punktu przyłożenia siły ciężaru ciała wynosi $a = 10 \text{ cm}$. Jaką siłą wystarczy działać na drugi koniec dźwigni.

II. KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

2.1. Względność ruchu

Kinematyka jest to nauka zajmująca się badaniem ruchów samych w sobie, tzn. bez uwzględnienia sił, które wywołują dany ruch. Pierwszą podstawową cechą każdego ruchu jest jego względność. Nie ma ruchu absolutnego lub spoczynku absolutnego. Każdy ruch jest względny, oznacza to, że jest rozpatrywany względem innego ciała lub punktu, uważanego za układ odniesienia. W zależności od tego co weźmiemy za układ odniesienia, otrzymamy opis ruchu prosty lub skomplikowany. Np. gdy z jadącego pociągu opuszczimy swobodnie kamień, to jego ruch względem wagonu (dla obserwatora związanego z wagonem), będzie ruchem prostoliniowym ale dla obserwatora, dla którego układem odniesienia jest Ziemia, będzie ruch tego samego kamienia rzutem poziomym, a więc po paraboli, gdyż kamień będzie miał prędkość początkową poziomą, równą prędkości pociągu.

W rozważaniach teoretycznych, przyjmuje się jako układ odniesienia trzy wzajemnie do siebie prostopadłe proste, osie układu kartezjańskiego. Na płaszczyźnie tylko dwie.

2.2. Przesunięcie, droga, prędkość

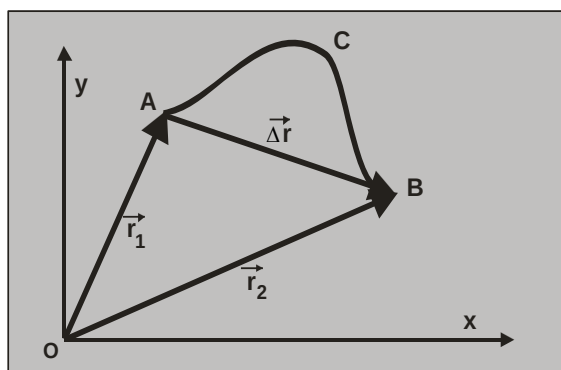
Z każdym ruchem związana jest wielkość wektorowa, zwana przesunięciem lub przesunięciem. Wielkość ta określa nam zmianę położenia punktu materialnego w linii prostej niezależnie od tego z jaką prędkością i po jakim torze rzeczywiście dany punkt się poruszał. Gdyby punkt wrócił do położenia początkowego to przesunięcie równałoby się zeru. Rzeczywisty tor po którym porusza się punkt materialny nazywa się drogą. Jest to wielkość skalarna. Wartość liczbowa przesunięcia równa się drodze tylko w tym przypadku, gdy ruch odbywa się po prostej i tylko w jedną stronę.

Rozróżniamy prędkość średnią przesunięcia jako stosunek tego przesunięcia do czasu w ciągu którego ono się dokonało. Jest to wielkość wektorowa, która wyraża się wzorem :

$$\vec{V}_{\text{sr}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

gdzie $\vec{\Delta r}$ jest różnicą wektorów za pomocą których określa się położenie danego punktu w przestrzeni lub na płaszczyźnie (**rys.2.1.**)

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.2)$$



Rys. 2.1. $\overrightarrow{AB}$ jest przemieszczeniem, ACB jest drogą

Natomiast średnia prędkość wzdłuż drogi, po której rzeczywiście dany punkt się porusza, jest stosunkiem rzeczywistej drogi do czasu, w ciągu którego droga ta została przebyta. Jest to wielkość skalarna i wyraża się wzorem:

$$V_{sr} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (2.3)$$

W zadaniach na prędkość średnią w tym rozdziale mamy do czynienia z prędkością średnią wzdłuż rzeczywiście przebytej drogi.

Gdy będziemy brali prędkości średnie w coraz to krótszych czasach, to przemieszczenia (lub drogi) będą się zmniejszać i dążyć do zera, ale stosunek tych wielkości będzie dążył do ściśle określonej liczby, różnej od zera, którą nazywamy granicą szeregu. W przypadku przemieszczenia (lub drogi) i czasu, będzie to prędkość chwilowa. Prędkością chwilową nazywamy, więc graniczną wartość szeregu prędkości średnich, gdy czas dąży do zera, co można zapisać w sposób następujący:

$$\vec{V}_{ch} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Również:

$$V_{ch} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Ponieważ w ten sam sposób definiuje się również pochodną funkcji, więc w/w prędkości chwilowe możemy określić jako pochodne przemieszczenia lub drogi po czasie.

$$\vec{V}_{ch} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.6)$$

$$V_{ch} = \frac{dS}{dS} \quad (2.7)$$

Przykład 2.1

Pierwszą połowę drogi samochód przejechał z prędkością $V_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a drugą z prędkością $V_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. obliczyć prędkość średnią na całej drodze. Z definicji prędkości średniej (wzór 2.3) mamy:

$$V_{\text{sr}} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

gdzie czas Δt jest równy sumie czasów t_1 i t_2 przebycia przez samochód obu połówek drogi a $\Delta s = s$. Wyliczamy je z danych prędkości:

$$t_1 = \frac{S}{2 V_1},$$

$$t_2 = \frac{S}{2 V_2}.$$

Po uwzględnieniu powyższych wzorów i po przekształceniach otrzymamy:

$$V_{\text{sr}} = \frac{2 V_1 V_2}{V_1 + V_2}$$

$$V_{\text{sr}} = 13.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.3. Prędkość względna

Rozpatrujemy dwa ciała poruszające się z prędkościami $\vec{V}_1$ i $\vec{V}_2$ względem Ziemi. Prędkość drugiego ciała względem pierwszego, zwana prędkością względną, wylicza się odejmując wektorowo od prędkości drugiego ciała, prędkość pierwszego. Możemy więc napisać następujący wzór:

$$\vec{V}_{2/1} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \quad (2.8)$$

Przykład 2.2

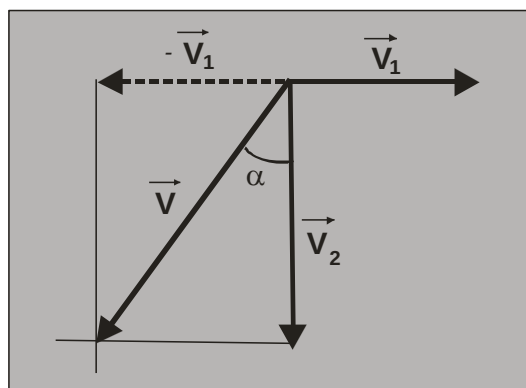
Człowiek porusza się ze stałą prędkością $V_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po drodze poziomej.

Obliczyć, pod jakim kątem do kierunku pionowego powinien trzymać parasolkę, ażeby krople deszczu spadające pionowo względem Ziemi z prędkością

$V_2 = 21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ padały na parasolkę równolegle do rączki parasolki.

Należy obliczyć prędkość kropeł deszczu względem człowieka. W tym celu od prędkości kropeł odejmujemy (wektorowo) prędkość człowieka (**rys. 2.2**). Odjąć dany wektor tzn. dodać go ze znakiem przeciwnym.

Z **rys. 2.2** wynika, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_1}{V_2}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 0,143$,
 $\alpha = 8^0 10'$.



Rys. 2.2. Od prędkości kropeł deszczu odejmujemy wektorowo prędkość człowieka $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$

2.4. Klasyfikacja ruchów

Każdy ruch, nawet najbardziej skomplikowany, można sprowadzić do dwóch ruchów: postępowego i obrotowego. Ruch postępowy jest wtedy, gdy dowolnie wybrany odcinek danego ciała przemieszcza się równolegle i jego długość się nie zmienia. Natomiast ruch obrotowy charakteryzuje się tym, że punkty danego ciała zakreślają okręgi współśrodkowe wokół osi, oprócz tych punktów, które znajdują się na niej.

Ze względu na kształt toru zakreślonego przez wybrany punkt danego ciała, ruch może być prostoliniowy lub krzywoliniowy.

Ze względu na wartość liczbową prędkości, mamy ruchy jednostajne lub niejednostajne. Gdy wartość prędkości jest stała, to ruch jest jednostajny, gdy się zmienia – to zmienny. Może być ruch, w którym prędkość zmienia się wprost proporcjonalnie do czasu (liniowo z czasem). Będzie to ruch jednostajnie zmienny – jednostajnie przyspieszony lub jednostajnie opóźniony. Gdy prędkość zmienia się w sposób dowolny, ruch będzie niejednostajnie zmienny. Najprostszy z ruchów jest ruch jednostajny prostoliniowy.

2.5. Ruch jednostajny po prostej (prostoliniowy)

Ruch jednostajny prostoliniowy jest to taki ruch, w którym wartość liczbową prędkości jest stała, a torem jest linia prosta. Oznacza to, że w równych, dowolnych odstępach czasu, drogi przebyte tym ruchem są jednakowe. Prędkość chwilowa jest równa w każdej chwili prędkości średniej oraz droga równa się wartości przemieszczenia. Ze wzoru (2.3) na wartość liczbową prędkości mamy:

$$\Delta S = V \Delta t,$$

gdzie $\Delta S = S - S_0$

S_0 jest drogą początkową

$$\Delta t = t - t_0,$$

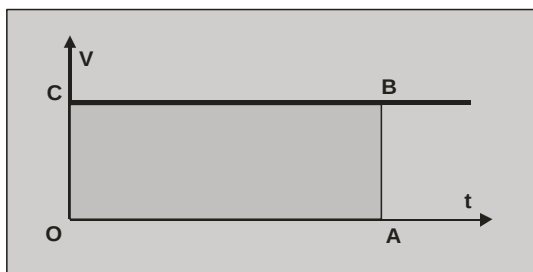
przyjmując $t_0 = 0$, możemy napisać:

$$S = S_0 + V t. \quad (2.9)$$

Dla drogi początkowej równej zero ($S_0 = 0$), otrzymamy podstawowy wzór na drogę przebytą ruchem jednostajnym prostoliniowym:

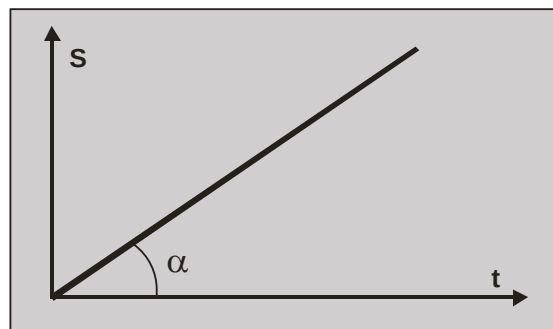
$$S = V t. \quad (2.10)$$

Każdy ruch można przedstawić za pomocą wykresu jako zależność prędkości od czasu, albo drogi od czasu. W pierwszym przypadku, wykres prędkości w ruchu jednostajnym prostoliniowym przedstawia się jako prosta równoległa do osi czasów (**rys. 2.3**). Droga przebyta w tym ruchu w danym czasie t , będzie równa polu prostokąta OABC pod wykresem. Jest to słuszne dla dowolnej prędkości, a nie tylko dla stałej.



Rys. 2.3. Zależność prędkości od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym.
Pole pod wykresem przedstawia drogę

W drugim przypadku (w układzie współrzędnych S, t), mamy wykres zależności drogi od czasu, który przedstawia się jako prosta nachylona do osi czasów pod kątem α , gdyż droga przebyta tym ruchem rośnie wprost proporcjonalnie do czasu (**rys. 2.4**). Tangens kąta nachylenia tej prostej równa się wartości liczbowej prędkości, z jaką dany ruch się odbywa.

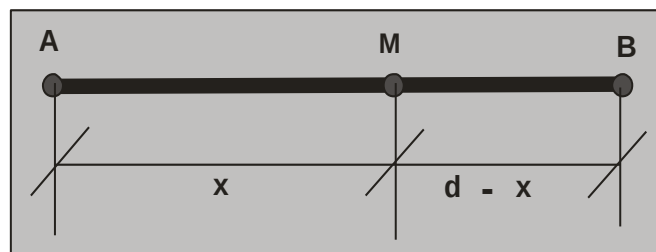


Rys. 2.4. Zależność przebytej drogi od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym

Przykład 2.3

Z dwóch miast A i B oddległych od siebie o $d = 80$ km wyjeżdżają jednocześnie dwa samochody naprzeciwko siebie. Jeden z prędkością $V_1 = 90$ km/h, a drugi z prędkością $V_2 = 70$ km/h, można obliczyć miejsce i czas spotkania tych samochodów metodą rachunkową i wykreślną.

a) Metoda rachunkowa: niech miejscem spotkania będzie punkt M (rys. 2.5).



Rys. 2.5. Punkt M jest miejscem spotkania dwóch samochodów jadących naprzeciwko siebie po upływie czasu t . Do tego miejsca, samochód jadący z prędkością V_1 przebędzie drogę

$$x = V_1 \cdot t.$$

Drugi samochód, jadący z prędkością V_2 przebędzie w tym samym czasie drogę

$$d - x = V_2 \cdot t.$$

Z otrzymanych dwóch równań wyliczamy miejsce i czas spotkania tzn. x i t . Z równania pierwszego wyznaczamy czas t i wstawiamy do równania drugiego, otrzymamy:

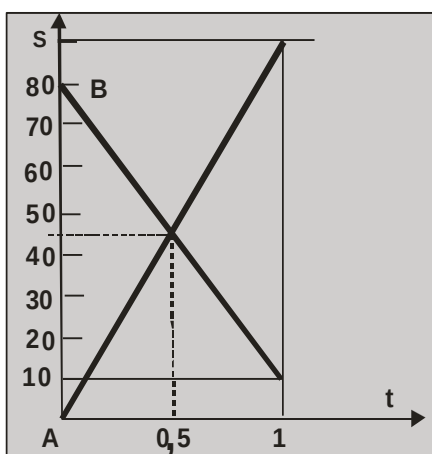
$$d - x = V_2 \frac{x}{V_1}$$

stąd:

$$x = 45 \text{ km}$$

$$t = 0,5 \text{ s.}$$

b) Metoda wykreślna: Na osi poziomej (osi czasów) obieramy skalę, np. 4 cm będzie odpowiadać jednej godzinie. Na osi pionowej (osi drogi) jeden cm. będzie odpowiadać 10 km. Na tej osi oznaczamy miejscowości A i B, co jest pokazane na rys. 2.6.



Rys. 2.6. Wykresy dróg dwóch samochodów jadących naprzeciwko siebie z odległości początkowej 80 km

Następnie, rysujemy wykres drogi przebytej przez pierwszy samochód z prędkością $V_1 = 90$ km/h wyruszający z miejscowości A i drugiego, wyjeżdżającego z miejscowości B, znajdującej się w odległości $d = 80$ km od miejscowości A z prędkością $V_2 = 70$ km/h.

Współrzędne punktu przecięcia się dwóch wykresów wyznaczają miejsce i czas spotkania się dwóch samochodów:

$$\begin{aligned} x &= 45 \text{ km.} \\ t &= 0,5 \text{ godz.} \end{aligned}$$

2.6. Ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony

Ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony jest to taki ruch po prostej, w którym przyspieszenie jest stałe, a wartość liczbową prędkości rośnie wprost proporcjonalnie do czasu.

Przyspieszeniem nazywamy stosunek przyrostu prędkości do czasu, w którym ten przyrost nastąpił, co wyraża się wzorem:

$$\vec{a} = \frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{t} \quad (2.11)$$

gdzie $\vec{V}_0$ jest prędkością początkową.

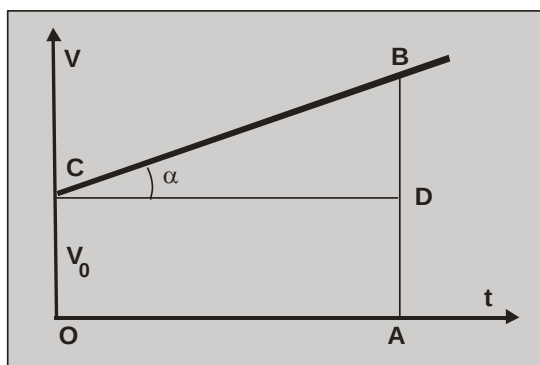
Ogólniej, przyspieszenie jest to pochodna prędkości po czasie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2.12)$$

Biorąc we wzorze (2.11) wartości liczbowe występujących wielkości, możemy wyliczyć wartość liczbową prędkości końcowej, jaką osiągnie ciało po upływie czasu t .

$$V = V_0 + a t \quad (2.13)$$

Prędkość ta przedstawia się na wykresie w układzie współrzędnych (V, t) jako prosta nachylona do osi czasów pod kątem α , przecinająca oś pionową w odległości V_0 od początku układu (**rys. 2.7**). Tangens kąta nachylenia tej prostej jest wartością liczbową przyspieszenia.



Rys. 2.7. Wykres prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym w zależności od czasu

Pole trapezu OABC odpowiada drodze przebytej przez ciało ruchem jednostajnie przyspieszonym w czasie $OA = t$. W celu wyprowadzenia wzoru na tę drogę należy wyliczyć pole w/w trapezu, jako sumę prostokąta OADC i pola trójkąta CDB:

$$S = V_0 t + \frac{(V - V_0) t}{2},$$

ale zgodnie ze wzorem (2.11) $V - V_0 = a t$, mamy więc:

$$S = V_0 t + \frac{a t^2}{2} \quad (2.14)$$

Powyższy wzór możemy też wyprowadzić korzystając z tego, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym prędkość średnia równa się średniej arytmetycznej prędkości początkowej i końcowej:

$$V_{Sr} = \frac{V_0 + V}{2},$$

Droga przebyta w tym ruchu w czasie t wyraża się wzorem:

$$S = \frac{(V_0 + V)}{2} t$$

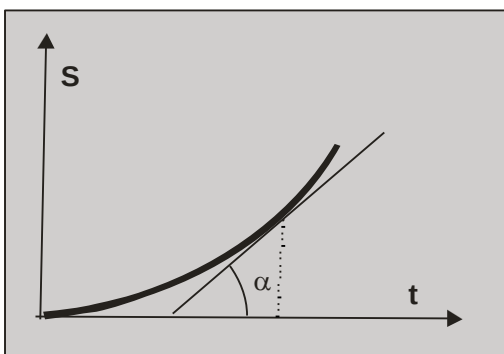
ale prędkość końcowa V wyrazi się wzorem (2.13): $V = V_0 + at$, ostatecznie, więc będziemy mieli:

$$S = V_0 t + \frac{a t^2}{2}.$$

Natomiast w układzie współrzędnych (S, t) , droga przebyta ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym przedstawi się jako parabola, gdyż czas występuje tutaj w kwadracie. Prędkość w tym układzie jest tangensem kąta nachylenia stycznej w punkcie krzywej odpowiadającym danej chwili na osi czasów (**rys. 2.8**)

Gdy będziemy mierzyć drogi przebyte ruchem jednostajnie przyspieszonym w równych kolejnych odstępach czasu, to okaże się, że wzrastają one jak wyrazy szeregu arytmetycznego a więc każdy odcinek przebytej drogi jest większy od poprzedniego o stałą wartość lub mają się do siebie jak szereg liczb nieparzystych pierwszych co można zapisać w sposób następujący:

$$S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 3 : 5 \quad (2.15)$$



Rys. 2.8. Wykres przedstawiający zależność drogi od czasu dla ruchu jednostajnie przyspieszonego

P r z y k ł a d 2.4

Kamień spada z pewnej wysokości (zakładamy, że ruch jest jednostajnie przyspieszony). W pierwszej sekundzie spadania przebył drogę $S_1 = 5$ m. Obliczyć, jaką drogę przebył on w czasie trzeciej sekundy spadania.

Korzystając ze wzoru (2.15) możemy napisać:

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{1}{5} \quad \text{skąd } S_3 = 25 \text{ m.}$$

2.7. Swobodny spadek ciał

Przykładem ruchu jednostajnie przyspieszonego jest swobodny spadek ciał (lekkich) w próżni lub ciężkich w powietrzu, dla których opór powietrza jest znikomo mały w stosunku do ciężaru ciała. W próżni ciała ciężkie i lekkie spadają jednakowo, ruchem jednostajnie przyspieszonym ze stałym przyspieszeniem zwanym przyspieszeniem ziemskim. Dla Polski wynosi ono:

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (2.16)$$

Możemy więc do swobodnego spadku ciał stosować wzory dla ruchu jednostajnie przyspieszonego:

Prędkość, jaką osiągnie ciało swobodnie spadające (bez prędkości początkowej) po upływie czasu t wyrazi się wzorem (wzór 2.13) :

$$V = g \cdot t \quad (2.17)$$

Natomiast droga, jaką ciało swobodnie spadające przebędzie po upływie czasu t bez prędkości początkowej, a więc wysokość z jakiej spada ciało będzie

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (2.18)$$

Prędkość końcowa, jaką osiągnie ciało w zależności od wysokości, z jakiej spada, określa się wzorem z równania 2.18 wyznaczamy czas t i podstawiamy go do wzoru 2.17):

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (2.19)$$

Przyspieszenie ziemskie możemy wyznaczyć kilkoma metodami, między innymi za pomocą wahadła matematycznego, mierząc jego długość i okres wahań oraz korzystając ze wzoru:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.20)$$

Ponieważ okres wahadła nie zależy od amplitudy (dla małych wychyleń), więc mierząc czas kilkudziesięciu wahań (np. stu) i dzieląc go przez ilość wahań, otrzymamy czas jednego pełnego wahanía czyli okres wahań wahadła, wyznaczony w ten sposób dość dokładnie.

Inną metodą pomiaru przyspieszenia ziemskiego jest wykorzystanie ruchu jednostajnie przyspieszonego ciała poruszającego się swobodnie po równi pochyłej. Przyspieszenie ciała zsuwającego się po równi pochyłej, gdy zaniedbujemy tarcie, wyrazi się wzorem:

$$a = g \sin \alpha \quad (2.21)$$

gdzie α jest kątem nachylenia równi (**rys.2.9**)

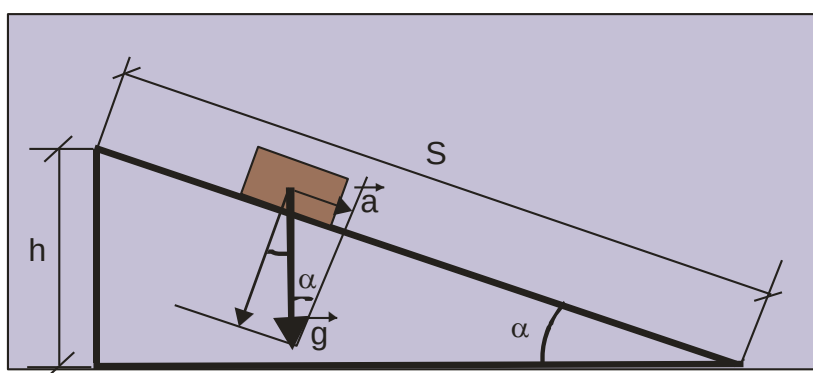
Korzystając ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym (2.14) i przyjmując $V_0 = 0$ oraz uwzględniając wzór (2.21) otrzymamy:

$$S = \frac{g (\sin \alpha) t^2}{2}$$

skąd wyliczymy przyspieszenie ziemskie g :

$$g = \frac{2 S}{t^2 \sin \alpha},$$

gdzie t jest czasem zsuwania się ciała po równi.



Rys. 2.9. Przyspieszenie, z jakim zsuwa się ciało po równi pochyłej przy zaniedbaniu tarcia wyraża się wzorem: $a = g \sin \alpha$

Jeżeli $\sin \alpha$ zastąpimy stosunkiem h/S (wysokości równi do jej długości), to wzór na przyspieszenie ziemskie przyjmie postać:

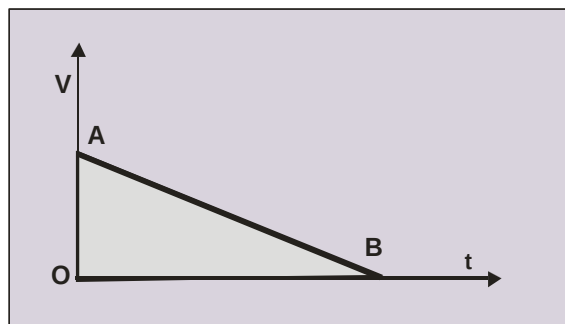
$$g = \frac{2 S^2}{h t^2} \quad (2.22)$$

Zwiększając dokładność pomiaru czasu t , polepszamy dokładność wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego g .

2.8. Ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony

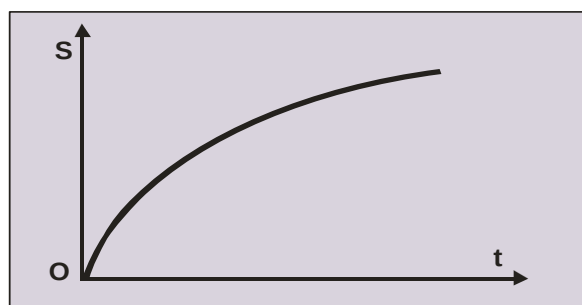
Ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony, jest to taki ruch po prostej, w którym prędkość maleje w równych kolejnych odstępach czasu o stałą wartość. Na wykresie w układzie (V, t) prędkość ta przedstawia się jako prosta opadająca (**rys. 2.10**).

Droga przebyta tym ruchem do chwili zatrzymania się danego ciała, będzie równa liczbowo polu pod wykresem, a więc w tym przypadku polu trójkąta OBA.



Rys. 2.10. Wykres prędkości w funkcji czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

Natomiast w układzie współrzędnych (S, t) droga przebyta tym samym ruchem jednostajnie opóźnionym, przedstawi się jako gałąź paraboli symetrycznej względem czasu (**rys. 2.11**).



Rys. 2.11. Wykres drogi w funkcji czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

Wzory na prędkość i drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym różnią się od odpowiednich wzorów w ruchu jednostajnie przyspieszonym tylko znakiem przed drugim wyrazem, ponieważ przyspieszenie jest tutaj ujemne.

$$V = V_0 - a t \quad (2.23)$$

$$S = V_0 t - \frac{a t^2}{2} \quad (2.24)$$

Droga jaką przebyło ciało ruchem jednostajnie opóźnionym do chwili zatrzymania się, nazywa się drogą hamowania i wyznacza się ją ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym (wzór 2.24) wstawiając do tego wzoru za czas t wielkość wyznaczoną ze wzoru (2.23), przy prędkości końcowej równej zero. Uwzględniając powyższe otrzymamy:

$$S = \frac{V_0^2}{2 a} \quad (2.25)$$

2.9. Ruch krzywoliniowy

Ruch jest krzywoliniowy wtedy, gdy torem poruszającego się punktu jest linia krzywa, zwana trajektorią ruchu. W rozważaniach teoretycznych położenie w danej chwili na trajektorii, określa się za pomocą wektora łączącego początek układu z rozpatrywanym punktem na krzywej, zwanym wektorem wodzącym lub wektorem położenia o czym była mowa w p. 2.2 ($\vec{r}$) (rys. 2.12).

Na płaszczyźnie, wektor wodzący określa się przez dwie jego składowe na osiach OX i OY:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (2.26)$$

W każdym ruchu krzywoliniowym występują dwa przyspieszenia: styczne, wynikłe ze zmiany wartości bezwzględnej prędkości, o kierunku tym samym co i prędkość a więc o kierunku stycznej do trajektorii w rozpatrywanym jej punkcie i wyraża się wzorem:

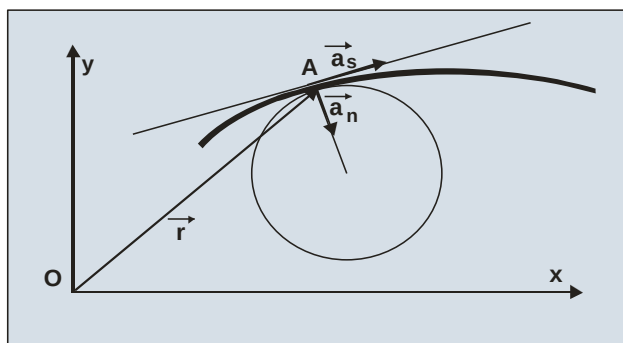
$$a_s = \frac{|\Delta V|}{t} \quad (2.27)$$

oraz przyspieszenie dośrodkowe, zwane też normalnym, wynikłe ze zmiany kierunku wektora prędkości. Skierowane jest ono do środka krzywizny, wzdłuż promienia krzywizny (a nie promienia wodzącego) i wyraża się wzorem:

$$a_n = \frac{V^2}{r} \quad (2.28)$$

Wartość liczbową przyspieszenia wypadkowego wyliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2} \quad (2.29)$$



Rys. 2.12. Położenie punktu A na trajektorii ruchu określa się za pomocą wektora (promienia) wodzącego

2.10. Ruch jednostajny po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu ma miejsce wtedy, gdy punkt zakreśla okrąg ze stałą prędkością co do wartości bezwzględnej, ale o zmieniającym się kierunku, pozostającym stale stycznym do okręgu. Przyjęto mierzyć, zamiast drogi jako przebytego łuku, kąt zakreślony przez promień okręgu, mierzony nie w stopniach lecz w radianach. Kąt ten nazywa się drogą kątową i wyraz się wzorem:

$$\alpha = \frac{S}{r} \quad (2.30)$$

Radian jest to kąt, którego łuk równa się promieniowi:

$$1 \text{ rad.} = 57^{\circ}18'$$

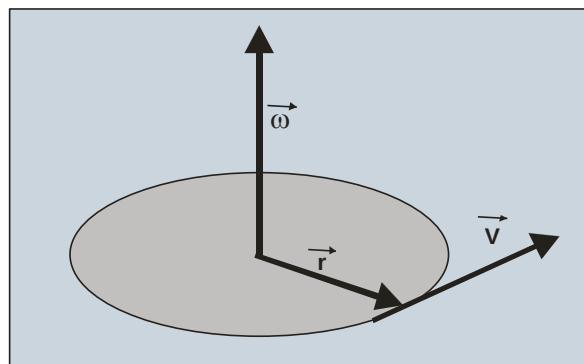
Kąt pełny, odpowiadający pełnemu obiegowi punktu po okręgu wyrażony w radianach, równa się 2π , gdyż:

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Prędkość kątową w ruchu jednostajnym po okręgu określa się jako stosunek drogi kątowej do czasu:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \quad (2.31)$$

Wymiarem prędkości kątowej jest 1/s. Prędkość kątową jest wielkością wektorową. Wektor ten leży na osi obrotu, wokół której porusza się punkt po okręgu, a jego zwrot określony jest regułą prawej śruby (**rys. 2.13**): zwrot, w którym porusza się prawa śruba obracana zgodnie z ruchem punktu po okręgu.



Rys. 2.13. Wektor prędkości kątowej leży na osi obrotu

Jeżeli drogą kątową jest kąt pełny (2π rad.), to czas odpowiadający temu kątowi jest okresem (T). Prędkość kątową wyrazi się wtedy wzorem:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.32)$$

Okres obiegu punktu po okręgu równy jest odwrotności częstości (n). Częstość, jest to ilość obiegów po okręgu w czasie jednej sekundy. Wzór (2.32) przyjmie wtedy postać:

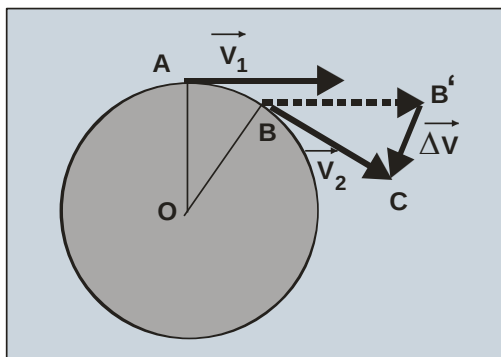
$$\omega = 2\pi n \quad (2.33)$$

W celu otrzymania związku pomiędzy prędkością kątową a liniową korzystamy ze wzoru (2.32), mnożąc licznik i mianownik przez promień okręgu (r):

$$\omega = \frac{2\pi r}{T r} = \frac{V}{r} \quad (2.34)$$

Pomimo, że ruch po okręgu jest ruchem jednostajnym, to występuje tutaj przyspieszenie, wynikłe ze zmiany kierunku wektora prędkości, które nazywa się przyspieszeniem dośrodkowym lub normalnym, wyrażone wzorem (2.28).

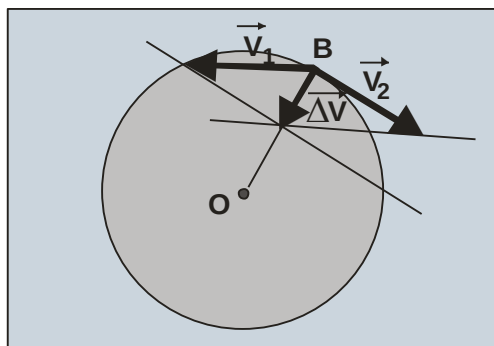
Wyprowadzenie tego wzoru jest następujące: wektor $\vec{V}_2$ różni się od wektora $\vec{V}_1$ kierunkiem, co jest pokazane na rys. 2.14.



Rys. 2.14. Wektor $\vec{\Delta V}$ jest różnicą wektorów $\vec{V}_2$ i $\vec{V}_1$

Im punkty A i B są bliżej siebie, tym wektor $\vec{\Delta V}$ ma kierunek zbliżony do kierunku do środka okręgu. W granicznym przypadku, wektor ten jest skierowany dokładnie do środka okręgu.

W celu otrzymania różnicy tych wektorów, należy do wektora $\vec{V}_2$ dodać wektor $-\vec{V}_1$ (rys. 2.15).



Rys. 2.15. Wektor $\overrightarrow{\Delta V}$ jest skierowany w przybliżeniu do środka okręgu.
W granicznym przypadku wektor ten jest skierowany do środka okręgu

Na **rys. 2.14.** wektor $\overrightarrow{\Delta V}$ stanowi podstawę trójkąta $C B'B$. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta BOA (biorąc przybliżenie, że łuk AB jest odcinkiem prostej). Możemy więc napisać:

$$\left| \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{V} \right| = \frac{AB}{r},$$

gdzie długość łuku $AB = V t$

Uwzględniając powyższe zależności i odpowiednio przekształcając (obie strony równania mnożymy przez V i dzielimy przez t), otrzymamy:

$$\left| \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{t} \right| = \frac{V^2}{r},$$

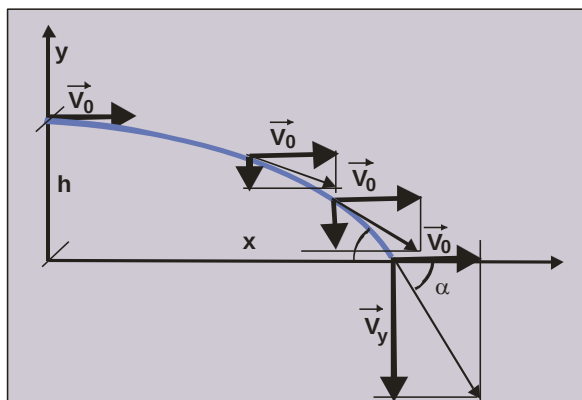
albo
$$a = \frac{V^2}{r} \quad (2.35)$$

2.11. Rzut poziomy

Rzut poziomy ma miejsce wtedy, gdy jakieś ciało rzucimy w kierunku poziomym z prędkością początkową, V_0 z pewnej wysokości h . Ciało to po zakreśleniu paraboli spadnie na Ziemię.

Rzut ten można rozłożyć na dwa ruchy jeden w kierunku poziomym odbywający się ze stałą prędkością równą prędkości początkowej V_0 , a drugi jednostajnie przyspieszony w kierunku pionowym jak przy swobodnym spadaniu ciała. W każdym punkcie toru można więc narysować dwie składowe prędkości: poziomą i pionową, co jest pokazane na **rys. 2.16.**

Gdy prędkość początkowa V_0 będzie większa, to ciało rzucone poziomo spadnie dalej, gdy mniejsza, to bliżej, ale czas spadania przy tych różnych prędkościach, a więc i przy różnych parabolach będzie taki sam i równy czasowi swobodnego spadania z wysokości h . Dzięki temu możemy łatwo wyprowadzić wzór na zasięg rzutu (x):



Rys. 2.16. Składowe prędkości w rzucie poziomym. Składowa pozioma V_0 ma zawsze wartość stałą

$$x = V_0 t,$$

gdzie t jest jednocześnie czasem swobodnego spadania z wysokości h , a więc wyliczamy go ze wzoru (2.18)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

mamy więc:

$$x = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2.36)$$

Przykład 2.5

Obliczyć, pod jakim kątem do poziomu uderzy o Ziemię kamień rzucony poziomo z prędkością $V_0 = 5 \text{ m/s}$ z wysokości $h = 10 \text{ m}$. Z **rys. 2.16.** widać, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_0},$$

gdzie V_y jest składową prędkości końcowej w kierunku pionowym, którą wyliczamy ze wzoru (2.19):

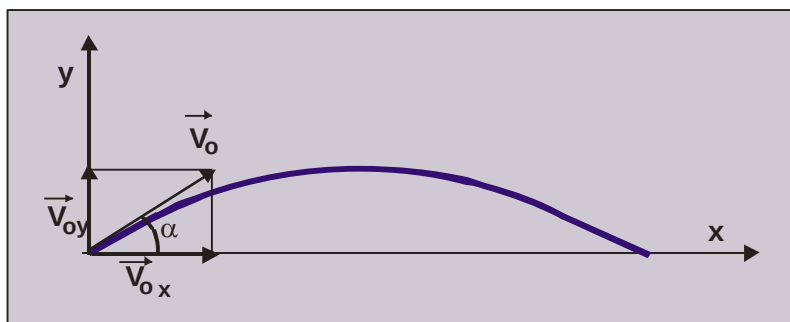
$$V_y = \sqrt{2gh}$$

mamy więc

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2gh}}{V_0} \quad \alpha = 70^\circ 30'$$

2.12. Rzut ukośny

Rzut ukośny będzie miał miejsce wtedy, gdy dane ciało rzucimy z prędkością początkową V_0 pod kątem α do poziomu. Ruch ten, jeśli zaniedbamy opór powietrza, będzie odbywać się po paraboli (rys. 2.17).



Rys. 2.17. Trajektoria ciała w rzucie ukośnym – parabola, gdy zaniedbamy opór powietrza

Można ten ruch rozłożyć na dwa ruchy: jednostajny w kierunku poziomym, odbywający się ze stałą prędkością równą składowej poziomej V_{0x} prędkości początkowej V_0 oraz na ruch w kierunku pionowym, jednostajnie opóźniony w górę a następnie jednostajnie przyspieszony w dół pionowym, jednostajnie opóźniony w górę a następnie jednostajnie przyspieszony w dół.

Zasięg rzutu wyliczymy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym prostoliniowym:

$$x = V_{0x} \cdot t,$$

Czas t wyznaczmy z ruchu jednostajnie opóźnionego, w którym prędkość końcowa równa się zeru:

$$V_{ky} = V_{0y} - g t' = 0$$

gdzie t' jest czasem wznoszenia się maksymalnie do góry.

Czas odpowiadający całemu zasięgowi jest dwa razy większy. Mamy więc:

$$x = V_{0x} \frac{2 V_{0y}}{g}.$$

Wyrażając składowe V_{0x} i V_{0y} za pomocą prędkości początkowej V_0 otrzymamy:

$$x = \frac{2 V_0 \cos \alpha V_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{albo ostatecznie} \quad x = \frac{V_0^2 \sin 2 \alpha}{g}. \quad (2.37)$$

Największy zasięg przy danej prędkości początkowej V_0 będzie dla kąta $\alpha = 45^\circ$ gdyż wtedy sinus będzie miał wartość największą. Maksymalne wzniesienie obliczymy jako drogę hamowania w rzucie pionowym do góry z prędkością początkową V_{0y} .

$$h = \frac{V_{0y}^2}{2g}$$

lub

$$h = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (2.38)$$

Zadania rozwiązane

2.1. (xx 1985) Łódź płynie rzeką z miejscowości A do B i z powrotem. Prędkość łodzi względem wody wynosi $V_1 = 3$ m/s a prędkość wody względem brzegów $V_2 = 1$ m/s. Obliczyć średnią prędkość łodzi względem brzegów.

Wychodzimy z definicji prędkości średniej, (wzór 2.3). Jest to stosunek przebytej całej drogi do czasu w ciągu którego została ona przebyta:

$$V_{\text{sr}} = \frac{2S}{t_1 + t_2},$$

gdzie t_1 t_2 są czasami przepływu łodzi z z prądem rzeki i pod prąd:

$$t_1 = \frac{S}{V_1 + V_2} \quad t_2 = \frac{S}{V_1 - V_2}.$$

Mamy więc

$$V_{\text{sr}} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1}$$

$$V_{\text{sr}} = \frac{8}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.2. Statek przepływa odległość między dwoma przystankami na rzece, z prądem rzeki w czasie $t_1 = 8$ godz. a pod prąd w czasie $t_2 = 12$ godz. Obliczyć w jakim czasie przebyłby tę odległość na wodzie stojącej oraz obliczyć czas przepływu tej samej odległości wody w rzece.

Oznaczając przez S odległość pomiędzy przystankami, przez V_s prędkość statku względem wody, V_r – prędkość wody w rzece, t_x – czas przepływu statku na wodzie stojącej, a przez t_y czas przepływu wody w rzece, możemy więc napisać:

$$S = (V_s + V_r) t_1$$

$$S = (V_s - V_r) t_2$$

$$S = V_s t_x$$

Trzy powyższe równania możemy zamienić na dwa:

$$\begin{aligned}V_s t_x &= (V_s + V_r) t_1 \\V_s t_x &= (V_s - V_r) t_2 .\end{aligned}$$

Po podzieleniu stronami obu równań przez V_s otrzymamy:

$$\begin{aligned}t_x &= t_1 + \frac{V_r}{V_s} t_1 \\t_x &= t_2 - \frac{V_r}{V_s} t_2 .\end{aligned}$$

Rugując z powyższych dwóch równań niewiadomą V_r/V_s otrzymamy szukany czas t_x :

$$t_x = \frac{2 t_1 t_2}{t_1 + t_2} \quad t_x = 9,6 \text{ h}.$$

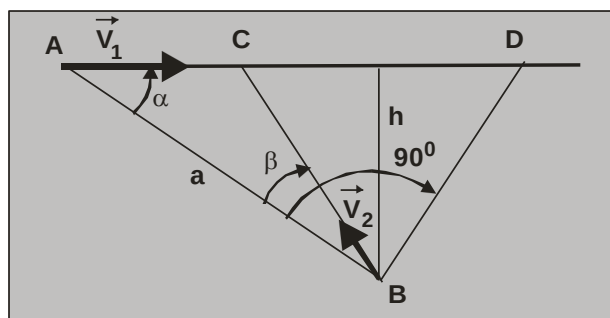
W celu obliczenia czasu przepływu wody (t_y) piszemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}S &= (V_s + V_r) t_1 \\S &= (V_s - V_r) t_2 \\S &= V_r t_y .\end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ równań za względu na t_y analogicznie jak poprzednio, otrzymamy:

$$t_y = \frac{2 t_1 t_2}{t_2 - t_1} \quad t_y = 48 \text{ h} .$$

2.3. Po prostoliniowej drodze jedzie samochód z prędkością $V_1 = 40 \text{ km/h}$. W odległości $h = 20 \text{ m}$ od szosy w punkcie B (**rys. 2.18**) stoi człowiek, którego odległość od samochodu BA wynosi $a = 200 \text{ m}$. Obliczyć, w którym kierunku, tzn. pod jakim kątem względem prostej AB powinien biec człowiek z prędkością $V_2 = 8 \text{ km/h}$, ażeby trafić na samochód oraz w którym kierunku ma biec z najmniejszą prędkością ażeby dogonić samochód?



Rys. 2.18. BC jest kierunkiem, w którym powinien biec człowiek, ażeby trafić na samochód, natomiast BD jest kierunkiem, w którym powinien biec człowiek z najmniejszą prędkością, żeby dogonić samochód

Do trójkąta ABC stosujemy twierdzenie sinusów:

$$\frac{V_1 t}{\sin \beta} = \frac{V_2 t}{\sin \alpha}$$

Uwzględniając, że $\sin \alpha = \frac{h}{a}$ wyliczymy szukany $\sin \beta$:

$$\sin \beta = \frac{h V_1}{a V_2} \quad (2.39)$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \quad \beta = 90^\circ$$

W celu znalezienia kierunku, w którym ma biec człowiek z najmniejszą prędkością ażeby dogonić samochód, należy z równania (2.39) wyznaczyć V_2 :

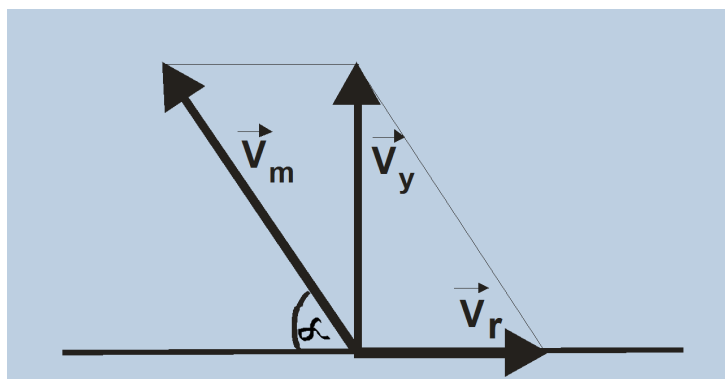
$$V_2 = \frac{h V_1}{a \sin \beta}$$

Prędkość V_2 będzie najmniejsza, gdy $\sin \beta$ przyjmie wartość największą tzn. jeden a więc kąt $\beta = 90^\circ$.

$$V_2 = \frac{h}{a} V_1 \quad V_2 = 4 \text{ km/h.}$$

2.24. Motorówka mogąca rozwijać prędkość $V_m = 30 \text{ km/h}$, ma przedostać się na drugą stronę rzeki o szerokości $d = 40 \text{ m}$ w kierunku prostopadłym do brzegów. Obliczyć czas potrzebny na ten przejazd oraz kąt pod którym motorówka powinna wyruszyć, jeżeli prędkość wody w rzece wynosi $V_r = 8 \text{ km/h}$.

Motorówka powinna skierować się tak, ażeby jej prędkość z prędkością wody w rzece dały prędkość wypadkową skierowaną prostopadle do brzegów, co jest pokazane na **rys. 2.19**.



Rys. 2.19. Motorówka musi wyruszyć pod kątem α względem brzegu takim, ażeby wypadkowa prędkość $\vec{V}_y$ była prostopadła do brzegów.

Szukany czas wyliczymy ze wzoru:

$$t_y = \frac{d}{V_y},$$

gdzie $\vec{V}_y$ jest prędkością wypadkową $\vec{V}_r$ i $\vec{V}_m$ i wyliczy się ją z twierdzenia Pitagorasa:

$$V_y = \sqrt{V_m^2 - V_r^2}.$$

Mamy więc:

$$t_y = \frac{d}{\sqrt{V_m^2 - V_r^2}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$t_y = \frac{40 \text{ m}}{8,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4,9 \text{ s}.$$

$$\cos \alpha = \frac{V_r}{V_m} \quad \alpha = 74^\circ 30'$$

2.5. Ciało spada w próżni bez prędkości początkowej. Po upływie czasu t_0 zaczyna spadać drugie ciało, też bez prędkości początkowej. Obliczyć, po upływie jakiego czasu, licząc od chwili rozpoczęcia spadania pierwszego ciała odległość między nimi wynosić będzie d .

Odległość pomiędzy spadającymi ciałami wyrazi się wzorem:

$$d = \frac{g(t_x + t_0)^2}{2} - \frac{g t_x^2}{2},$$

gdzie t_x jest czasem liczonym od momentu puszczenia drugiego ciała.

Rozwiązując powyższe równanie ze względu na t_x otrzymamy:

$$t_x = \frac{d}{g t_0} - \frac{t_0}{2}.$$

Czas mierzony od chwili rozpoczęcia spadania pierwszego ciała jest dłuższy o t_0 . Mamy więc:

$$t'_x = \frac{d}{g t_0} + \frac{t_0}{2}.$$

2.6. Kamień spadający swobodnie, przebył w ostatniej sekundzie spadania drogę S . Obliczyć, z jakiej wysokości zaczął spadać. Droga przebyta przez kamień w ostatniej sekundzie spadania wyrazi się wzorem:

$$S = V_0 t + \frac{g t^2}{2},$$

gdzie V_0 jest prędkością początkową na drodze S i jednocześnie prędkością końcową na drodze $h - S$, h jest szukaną wysokością.

Ze wzoru (2.19) mamy: $V_0 = \sqrt{2 g (h - S)}.$

Po podstawieniu do wzoru na drogę przebytą przez kamień w ostatniej sekundzie, otrzymamy:

$$S = \sqrt{2 g (h - S)} t + \frac{g t^2}{2}.$$

Przyjmując za $t = 1$ s, wyliczymy h :

$$h = \frac{(2S + g)^2}{8g}.$$

2.7. (xx 1984) Czas wjeżdżania windy na wieżę telewizyjną o wysokości $h = 322$ m wynosi $t = 60$ s. Pierwszą część drogi winda przebyła ze stałym przyspieszeniem do osiągnięcia prędkości $V = 7$ m/s. Drugą część drogi winda przebywa ruchem jednostajnym, a trzecią – ruchem jednostajnie opóźnionym. Obliczyć przyspieszenie, z jakim winda rusza z miejsca przyjmując, że jest ono co do wartości bezwzględnej równe opóźnieniu podczas hamowania.

Czas hamowania windy jest równy czasowi przyspieszenia, więc i droga hamowania windy równa się drodze przyspieszania. Możemy więc napisać:

$$t = 2t_1 + t_2, \quad h = 2S_1 + S_2,$$

gdzie t_1 jest czasem przyspieszania i hamowania windy, t_2 jest czasem w ciągu którego winda porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością V . Możemy więc napisać:

$$S_2 = V t_2, \quad S_1 = \frac{a t_1^2}{2}, \quad V = a t_1.$$

Powyższe pięć równań z pięcioma niewiadomymi dadzą się sprowadzić do dwóch równań z dwoma niewiadomymi.

$$t = 2 \frac{V}{a} + t_2, \quad h = 2 \frac{a}{2} \frac{V^2}{a^2} + V t_2.$$

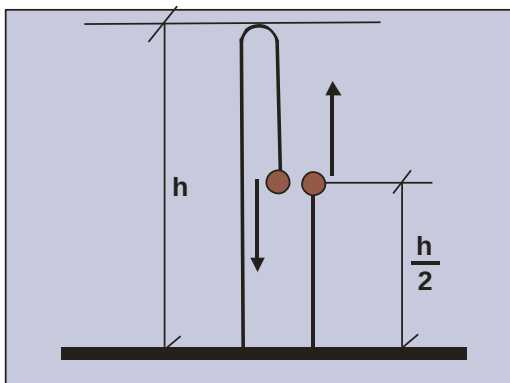
Rozwiązując powyższe równania ze względu na szukane przyspieszenie a , otrzymamy:

$$a = \frac{V^2}{V t - h}, \quad a = 0,5 \frac{m}{s^2}.$$

2.8. (xx 1976) Dwie jednakowe kulki wyrzucono do góry kolejno jedna za drugą z taką samą prędkością początkową $V_0 = 10 \text{ m/s}$. Obliczyć, o ile później musiała być wyrzucona druga kulka z taką samą prędkością początkową, jeżeli spotkały się w połowie wysokości maksymalnej. Przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Czas, w ciągu którego pierwsza kulka doleci do maksymalnego wzniesienia i spadnie do jego połowy ($t_1 + t_2$), równa się w odniesieniu do drugiej kulki sumie dwóch czasów: czasu szukanego (t_x) i czasu potrzebnego do przebycia drogi przez drugą kulkę do połowy maksymalnej wysokości (t_3) (**rys. 2.20**):

$$t_1 + t_2 = t_x + t_3 \quad (2.40)$$



Rys. 2.20. Kulki spotykają się połowie wysokości maksymalnej

Czas t_1 wyznaczmy ze wzoru na prędkość końcową w ruchu jednostajnie opóźnionym (2.23), porównując prędkość końcową do zera:

$$t_1 = \frac{V_0}{g}.$$

Czas t_2 wyliczymy ze swobodnego spadania kulki na drodze równej połowie wysokości maksymalnej ($h/2$)

$$\frac{h}{2} = \frac{g t_2^2}{2}$$

gdzie

$$h = \frac{V_0^2}{2g}$$

skąd

$$t_2 = \frac{V_0}{g\sqrt{2}}.$$

Czas t_3 wyliczymy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym (2.24):

$$\frac{h}{2} = V_0 t_3 - \frac{g t_3^2}{2}$$

Podstawiając za całą wysokość $h = \frac{V_0^2}{2g}$ i porządkując wyrazy ze względu na

t_3 otrzymamy następujące równanie:

$$2g^2 t_3^2 - 4g V_0 t_3 + V_0^2 = 0.$$

Rozwiązanie powyższego równania daje dwa pierwiastki:

$$t_3 = \frac{2 V_0 \pm V_0 \sqrt{2}}{2g}.$$

Podstawiając otrzymane wartości na t_1 , t_2 i t_3 do równania wyjściowego (2.40) otrzymamy:

$$\frac{V_0}{g} + \frac{V_0 \sqrt{2}}{2g} - \frac{2 V_0 \pm V_0 \sqrt{2}}{2g} = t_x.$$

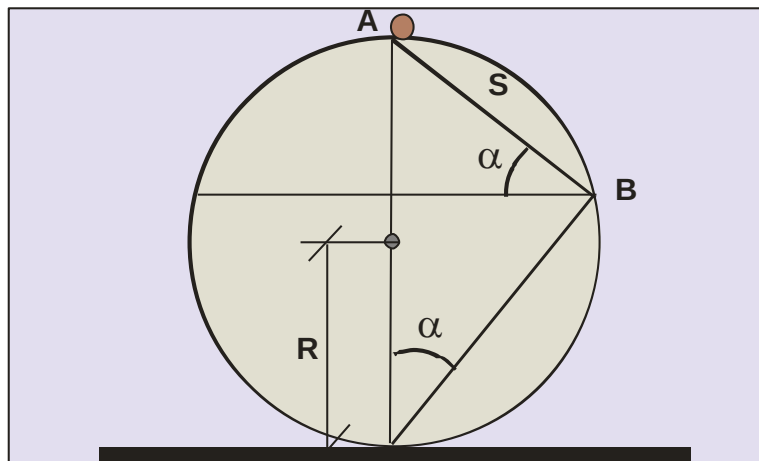
Po dodaniu wyrazów podobnych będziemy mieli dwa pierwiastki:

$$t_{x1} = 0$$

$$t_{x2} = \frac{V_0 \sqrt{2}}{g} \quad t_{x2} = 1,41 \text{ s.}$$

2.9. Wykazać, że ciało zsuwające się bez tarcia po jakiegokolwiek cięciwie pionowo ustawionego okręgu o promieniu R , z jego najwyższego punktu potrzebuje tego samego czasu.

Rozpatrywana cięciwa AB jest równią pochyłą nachyloną do poziomu pod kątem α . Należy więc wyznaczyć czas zsuwania się ciała po równi pochyłej (rys. 2.21).



Rys. 2.21. Cięciwa okręgu AB stanowi równię pochyłą

Droga przebyta po równi pochyłej bez prędkości początkowej wyraża się wzorem:

$$S = \frac{a t^2}{2},$$

ale długość równi S może być też określona w zależności od promienia okręgu R następująco:

$$S = 2 R \sin \alpha.$$

Przez porównanie w/w wzorów otrzymamy:

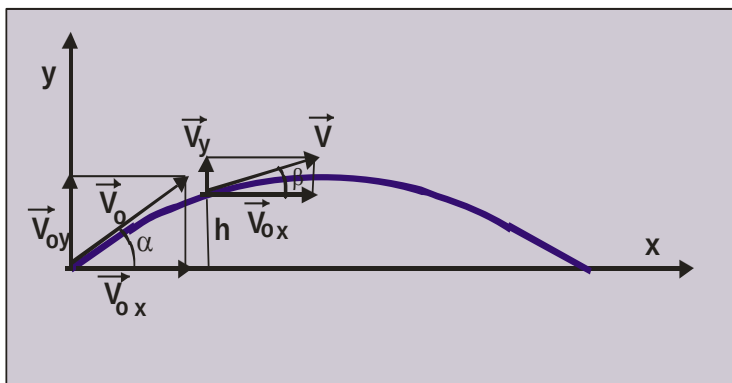
$$\frac{a t^2}{2} = 2 R \sin \alpha.$$

Uwzględniając, że a jest przyspieszeniem ciała na równi, które wyraża się wzorem $a = g \sin \alpha$, będziemy mieli:

$$t = 2 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Otrzymany czas nie zależy od kąta nachylenia równi, a więc dla każdej cięciwy jest taki sam.

2.10. Obliczyć na jakiej wysokości, wektor prędkości ciała wyrzuconego pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu z prędkością początkową $V_0 = 20$ m/s utworzy z kierunkiem poziomym kąt $\beta = 30^\circ$, nie uwzględniając oporu powietrza (**rys. 2.22**).



Rys. 2.22. Na wysokości h wektor prędkości tworzy z poziomem kąt β .

Szukaną wysokość znajdziemy ze wzoru: (2.24)

$$h = V_{0y}t - \frac{g t^2}{2}$$

Czas t wyznaczmy ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$V_y = V_{0y} - g t,$$

Skąd:

$$t = \frac{V_{0y} - V_y}{g}.$$

Po podstawieniu do równania na wysokość h oraz po przekształceniach otrzymamy:

$$h = \frac{V_{0y}^2}{2g} - \frac{V_y^2}{2g},$$

uwzględniając, że:

$$V_{0y} = V_0 \sin \alpha, \quad V_y = V_{0x} \operatorname{tg} \beta, \quad V_{0x} = V_0 \cos \alpha,$$

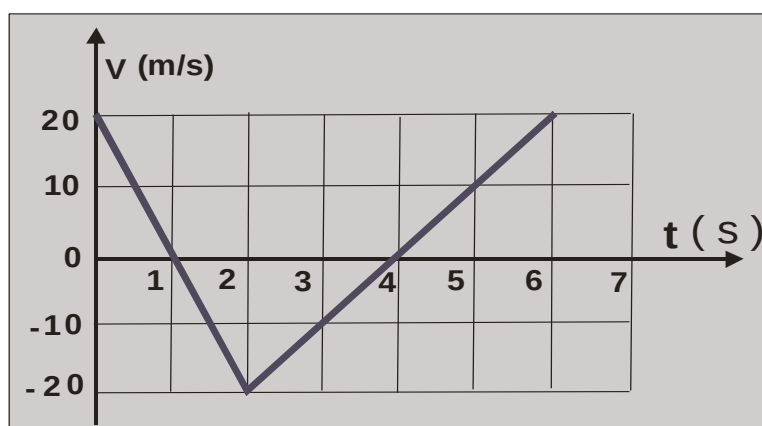
szukana wysokość wyrazi się wzorem:

$$h = \frac{V_0^2}{2g} \cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta).$$

$$h = 6,8 \text{ m.}$$

Zadania uzupełniające

2.11. Zależność prędkości, z jaką porusza się punkt materialny po prostej od czasu, przedstawiona jest na **rys. 2.23**. Obliczyć z tego wykresu średnią prędkość w przedziale czasu od 0 do 6 s.



Rys. 2.23. Wykres prędkości w zależności od czasu dla pewnego punktu materialnego.

Odp. $V_{\text{sr}} = 10 \text{ m/s}$.

2.12. Rowerzysta przebywa połowę swojej drogi z prędkością V_0 , w połowie pozostałego czasu przemieszcza się z prędkością V_1 , a resztę drogi przebywa z prędkością V_2 . Obliczyć, średnią prędkość rowerzysty.

Odp. $V_{\text{sr}} = \frac{2 V_0 (V_1 + V_2)}{2 V_0 + V_1 + V_2}$.

2.13. Motorówka może rozwijać prędkość $V_m = 9 \text{ m/s}$. Prędkość wody w rzece jest $V_r = 3 \text{ m/s}$. Obliczyć, ile razy czas przejazdu motorówki z miejscowości A do B w górę rzeki będzie dłuższy od czasu przepływu tej samej odległości przez motorówkę w dół rzeki.

Odp. $\frac{t_2}{t_1} = \frac{V_m + V_r}{V_m - V_r} \quad \frac{t_2}{t_1} = 2$.

2.14. Rowerzysta jadący na południe z prędkością $V_1 = 15 \text{ km/h}$ zauważa, że wiatr wieje dokładnie z zachodu. Zwiększając swoją prędkość do $V_2 = 25 \text{ km/h}$ zauważa, że wiatr wieje z południowego zachodu. Obliczyć wielkość i kierunek wiatru.

Odp. $V_w = 18 \text{ km/h}$ pod kątem $\alpha = 56^\circ 20'$ względem kierunku wschód-zachód z północnego zachodu.

2.15. Prędkość wody w rzece wynosi $V_r = 3 \text{ m/h}$. Jadący w dół rzeki statek z prędkością $V_s = 7 \text{ m/h}$ względem wody, gubi koło ratunkowe i płynie dalej. Po przebyciu drogi $S = 4,2 \text{ km}$ wraca po zagubione koło. Obliczyć, po upływie jakiego czasu statek dopłynie do zgubionego koła, licząc od momentu wpadnięcia jego do wody.

$$\text{Odp. } t = \frac{2S}{V_r + V_s} \quad t = 14 \text{ min.}$$

2.16. Ciało przebyło ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej w ciągu piątej sekundy ruchu, drogę $S = 40 \text{ m}$. Obliczyć, prędkość końcową tego ciała.

$$\text{Odp. } V_k = \frac{2St_5}{2t_4t + t^2} \quad V_k = 44,4 \text{ m/s.}$$

2.17. Z wysokości $h = 40 \text{ m}$ spada ciało A. Po upływie czasu $t_0 = 2 \text{ s}$ zaczęło spadać z tej samej wysokości ciało B. Obliczyć, na jakiej wysokości znajdowało się ciało B w momencie, gdy ciało A uderzyło o ziemię.

$$\text{Odp. } x = t_0 \sqrt{2gh} - \frac{gt_0^2}{2} \quad x = 36 \text{ m.}$$

2.18. Obliczyć kąt nachylenia dachu, przy którym czas ściekania kropli deszczu jest najkrótszy, pomijając tarcie.

$$\text{Odp. } \alpha = 45^\circ.$$

2.19. Balon unosi się pionowo do góry z przyspieszeniem $a = 1 \text{ m/s}^2$. Na wysokości $h = 450 \text{ m}$ wypada z niego przedmiot. Obliczyć z jaką prędkością końcową uderzy on o Ziemię.

$$\text{Odp. } V_k = \sqrt{2h(g+a)} \quad V_k = 99,5 \text{ m/s}$$

2.20. W celu wyznaczenia głębokości studni, rzucono do niej swobodnie kamień i zmierzono czas od momentu puszczenia kamienia do usłyszenia głosu uderzenia o wodę. Przyjmując w/w czas $t_0 = 3$ s, prędkość głosu w powietrzu $V = 340$ m/s, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s². Obliczyć również, jaki popełniamy błąd przy obliczaniu głębokości studni, gdy zaniedbamy czas przebycia głosu od lustra wody do ucha obserwatora.

$$\text{Odp. } x = \frac{V t_0 g + V^2 - V \sqrt{V^2 + 2 V t_0 g}}{g} \quad x = 47,8 \text{ m} \quad \text{bł.} = 8 \text{ \%}.$$

2.21. Samochód porusza się z prędkością $V_1 = 60$ km/h. Na drodze $S = 100$ m hamuje i dzięki temu zmniejsza swoją prędkość do $V_2 = 40$ km/h. Obliczyć opóźnienie i czas hamowania samochodu, jeżeli założymy, że ruch jest jednostajnie opóźniony.

$$\begin{aligned} \text{Odp. } a &= \frac{V_1^2 - V_2^2}{2 S} & a &= 0,8 \text{ m/s}^2 \\ t &= \frac{2 S}{V_1 + V_2} & t &= 7,6 \text{ s.} \end{aligned}$$

2.22. Obliczyć, po ilu sekundach, licząc od początku ruchu, wektor prędkości ciała rzuconego pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do poziomu z prędkością początkową $V_0 = 20$ m/s utworzy z kierunkiem poziomym kąt $\beta = 30^\circ$.

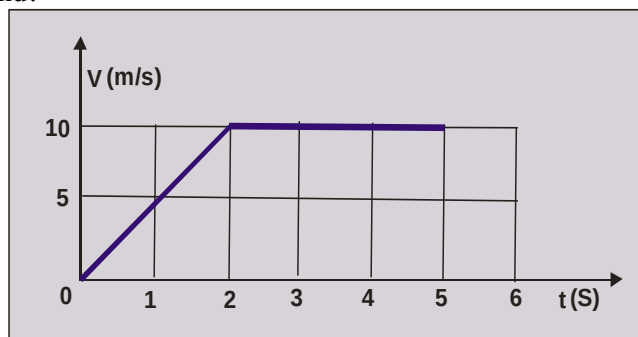
$$\text{Odp. } t = V_0 \frac{\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}{g} \quad t = 1,2 \text{ s.}$$

Zadania testowe

2.23. (xx 1998) Ciało rusza z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = 3 \text{ m/s}^2$ i porusza się tak przez 4 s. Jaka jest średnia prędkość w tym ruchu?

2.24. (xx 1984) Jaka jest średnia prędkość ciała spadającego swobodnie z wysokości h ?

2.25. Na rys. 2.24. Przedstawiono zależność prędkości od czasu dla pewnego ruchu prostoliniowego. Jaka jest prędkość średnia tego ruchu w czasie pierwszych 5 sekund?



Rys. 2.24. Wykres prędkości w zależności od czasu

2.26. (x 1991) Kłosek zsunął się bez tarcia po równi pochyłej o długości $L = 2 \text{ m}$ w czasie $t = 4 \text{ s}$ ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym. Ile wynosiła średnia prędkość klocka podczas jego ruchu?

2.27. (x 1990) Samolot leciał pod wiatr z prędkością $V_1 = 200 \text{ m/s}$, a w drodze powrotnej z prędkością $V_2 = 300 \text{ m/s}$. Jaka była średnia prędkość samolotu?

2.28. (x 1987) Podczas burzy widzimy błyskawicę a po czasie $t = 10 \text{ s}$ słyszymy grzmot. W jakiej odległości uderzył piorun, jeżeli prędkość dźwięku w powietrzu przyjmiemy $V = 340 \text{ m/s}$.

2.29. (xx 1998) Na samochodzie jadącym z prędkością $V = 60 \text{ km/h}$ znajdują się dwie równoległe względem siebie i względem ruchu samochodu tarcze, oddalone od siebie o $d = 0,8 \text{ m}$. Jaka jest prędkość kuli, która przebiła te tarcze prostopadłe, zostawiając ślady przesunięte względem siebie o $a = 8 \text{ cm}$.

2.30. Szybkość prądu wody w rzece wynosi $V_r = 3 \text{ m/s}$. Łódka wypływa prostopadłe do brzegu z prędkością $V_0 = 2 \text{ m/s}$ względem wody. O ile zostanie zniesiona od kierunku prostopadłego do brzegów na drugim brzegu, jeżeli szerokość rzeki wynosi $d = 40 \text{ m}$.

2.31. (xx 1998) Jaka jest prędkość względna jednego pociągu względem drugiego, jeżeli poruszają się one w przeciwnych kierunkach z prędkościami $V_1 = 120 \text{ km/h}$ i $V_2 = 80 \text{ km/h}$.

2.32. (xx 1998) Pociąg o długości $L = 60$ m, wyprzedza rowerzystę jadącego równolegle do torów z prędkością $V_r = 12$ km/h, w ciągu czasu $t = 6$ s. Jaka była prędkość pociągu?

2.33. Jaka była prędkość łodzi względem brzegów, jeżeli odbiła ona prostopadle do brzegu rzeki? Prędkość wody w rzece wynosiła $V_1 = 3$ m/s, a prędkość łodzi na wodzie stojącej $V_2 = 4$ m/s. Jaki kąt tworzył wektor prędkości łodzi z brzegiem rzeki?

2.34. (x 1989) Ze stacji wyruszyły jednocześnie dwa pociągi: pociąg x na północ z przyspieszeniem $a_x = 20$ m/s² oraz pociąg y na południe z przyspieszeniem $a_y = 30$ m/s². Ile będzie wynosić prędkość pociągu x względem pociągu y po czasie $t = 1$ min?

2.35. Łódź porusza się po wodzie stojącej z prędkością $V_0 = 5$ m/s. Z jaką prędkością będzie poruszać się względem brzegów rzeki płynąc pod prąd, jeżeli prędkość wody w rzece wynosi $V_r = 3$ m/s

2.36. (xx 1996) Po dwóch prostopadłych drogach oddalają się od siebie dwa samochody: jeden z nich porusza się z prędkością $V_1 = 30$ km/h, a drugi z prędkością $V_2 = 40$ km/h. Z jaką prędkością oddalają się od siebie?

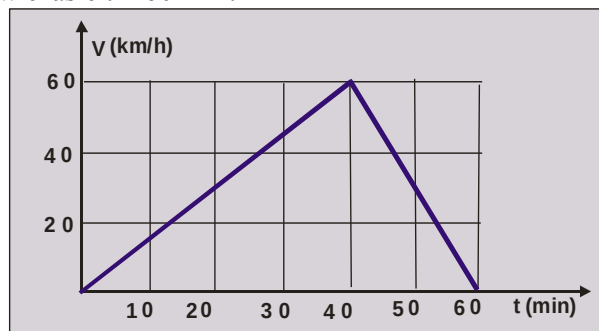
2.37. Z jakim przyspieszeniem zsuwało się ciało po równi pochyłej, jeżeli przebyło w czasie pierwszych 10 s drogę $S = 25$ cm bez prędkości początkowej przy założeniu, że ruch był jednostajnie przyspieszony i tarcie pominięto.

2.38. Z peletonu kolaży jadącego ze stałą prędkością $V_1 = 45$ km/h, w pewnej odległości od mety uciekł jeden kolaż z przyspieszeniem $a = 900$ km/h². Z jaką prędkością dojechał on do mety po minucie jazdy z tym przyspieszeniem?

2.39. Dwaj zawodnicy biegli razem, każdy z prędkością $V_1 = 7$ m/s. W odległości $d = 200$ m przed metą jeden z nich zwiększył prędkość do $V_2 = 8$ m/s. O ile wyprzedził on drugiego zawodnika na mecie?

2.40. Ciało poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym przebyło drogę $S = 2$ m w czasie pierwszej sekundy ruchu, jaką drogę przebędzie w czasie piątej sekundy?

2.41. Ruch punktu przedstawiony jest na wykresie na rys. 2.25. Jąką drogę przebył punkt w czasie $t = 60$ min?



Rys. 2.25. Wykres prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym i jednostajnie opóźnionym.

2.42. Z jakiej wysokości rzucono ciało pionowo w dół z pewną prędkością początkową, jeżeli przy uderzeniu o Ziemię prędkość była dwa razy większa od prędkości początkowej, a ciało spadło w czasie $t = 4$ s.

2.43. (x 1987) Podać wzór wyrażający zależność przyspieszenia od czasu dla ruchu, w którym droga zmienia się z czasem według równania:

$$S = A t^2 + B t$$

gdzie A, B są wielkościami stałymi.

2.44. (x 1990) Napisać wzór wyrażający zależność drogi przebytej przez ciało swobodnie spadające od czasu. Narysować wykres tej zależności.

2.45. (xx 1998) Piłka została wyrzucona pionowo do góry i spadła po czasie $t = 4$ s. Na jaką maksymalną wysokość się wzniosła?

2.46. Piłka została wyrzucona pionowo do góry z prędkością początkową $V_0 = 12$ m/s. Na jakiej wysokości znalazła się po czasie $t_1 = 1$ s oraz po czasie $t_2 = 2$ s?

2.47. (xx 1998) Z jaką prędkością początkową należy wyrzucić pionowo do góry ciało, ażeby osiągnęło maksymalną wysokość $h = 45$ m?

2.48. Kamień rzucony swobodnie z mostu osiągnął powierzchnię wody po upływie czasu $t = 2,5$ s. Z jaką prędkością uderzył on o wodę oraz z jakiej wysokości został rzucony?

2.49. Ciało zostało rzucone poziomo z wysokości $h = 320$ m. Z prędkością początkową $V_0 = 100$ m/s. Jak długo spadało?

2.50. Ciało zostało rzucone w kierunku poziomym z prędkością początkową $V_0 = 12$ m/s. O ile obniży swój lot po upływie czasu $t_1 = 1$ s i po $t_2 = 2$ s?

2.51. Jaka była prędkość początkowa wyrzuconego w kierunku poziomym, ciała, jeżeli po czasie $t = 2$ s wzrosła $n = 4$ razy?

2.52. Z wysokości $h = 10$ m rzucono w kierunku poziomym ciało nadając mu prędkość początkową $V_0 = 20$ m/s. Jak daleko spadnie to ciało na Ziemię?

2.53. Pod jakim kątem do kierunku poziomego należy wyrzucić ciało, żeby zasięg rzutu był taki sam jak maksymalne wzniesienie?

2.54. (xx 1981) Piłka została wyrzucona z prędkością początkową $V_0 = 10$ m/s pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do kierunku poziomego. Po upływie jakiego czasu spadła na Ziemię?

2.55. (1990) Pod jakim kątem do kierunku poziomego należy wyrzucić ciało, przy danej prędkości początkowej, ażeby spadło jak najdalej od miejsca wyrzucenia? Odpowiedź uzasadnić wzorem.

2.56. (xx 1988) Pocisk wystrzelono z prędkością początkową $V_0 = 100$ m/s pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Jaką minimalną prędkość będzie miał w czasie lotu?

III. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

3.1. Wstęp, Trzecia zasada dynamiki, pojęcie masy i siły

Dynamika (zgodnie z Encyklopedią Fizyki PWN 1972 tom I s. 422) jest to dział mechaniki obejmujący badania ruchu ciał materialnych pod wpływem działających na nie sił. Opiera się ona na trzech zasadach podanych przez Newtona, zwanych zasadami dynamiki. Często omawia się je zaczynając od trzeciej zasady: mówi ona o tym, że w przypadku oddziaływania dwóch ciał na siebie stosunek przyspieszeń, jakich udzielają sobie te ciała jest wielkością stałą, co można zapisać następująco:

$$\frac{a_1}{a_2} = k. \quad (3.1)$$

Prawdziwość powyższego wzoru może być sprawdzona doświadczalnie. Gdy weźmiemy dwa inne ciała, to stosunek przyspieszeń będzie też stały, ale o innej wartości. Wielkość tego stosunku zależy od pewnej cechy ciała, którą nazywamy masą. Masą, więc nazywamy pewną cechę ciała, od której zależy czy ciało uzyskuje duże czy małe przyspieszenie.

Jeżeli jedno ciało będzie miało masę równą masie wzorcowej (1kg), to mierząc przyspieszenia, przy wzajemnym oddziaływaniu, możemy określić masę drugiego ciała. Przyspieszenia tych ciał będą wtedy odwrotnie proporcjonalne do ich mas, co można zapisać według wzoru dla wielkości odwrotnie proporcjonalnych w następujący sposób:

$$m_1 a_1 = -m_2 a_2. \quad (3.2)$$

Występuje tutaj znak minus, ponieważ przyspieszenia obu ciał a_1 i a_2 są przeciwnie skierowane. Iloczyn masy przez przyspieszenie nazywamy siłą:

$$F = m a \quad (3.3)$$

Mamy, więc:

$$F_1 = -F_2 \quad (3.4)$$

Oznacza to, że gdy na ciało A działa ciało B, to ciało A oddziałuje z taką samą siłą na ciało B, ale przeciwnie skierowaną. Jest to druga forma 3 zasady dynamiki.

3.2. Druga zasada dynamiki

Pojęcie siły w fizyce określamy zgodnie ze wzorem (3.3), jako iloczyn masy ciała przez jego przyspieszenie. Jednostką siły jest niuton. Jest to siła, która ciału o masie jednego kilograma nadaje przyspieszenie 1 m/s^2 . Równanie (3.3) możemy uogólnić na przypadek, gdy na dane ciało działa nie jedna, lecz kilka sił.

Możemy wtedy powiedzieć, że suma (wektorowa) wszystkich sił działających na dane ciało równa się iloczynowi masy tego ciała przez przyspieszenie, jakie ono uzyskuje:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (3.5)$$

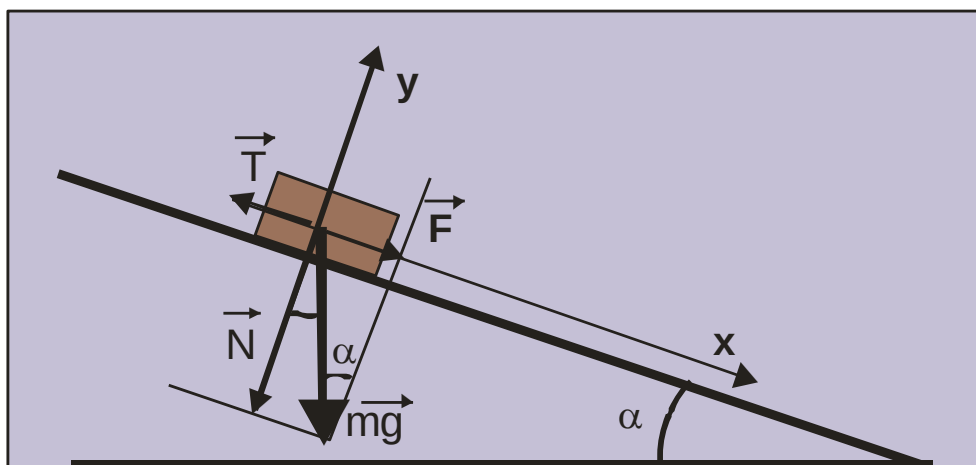
jest to podstawowe równanie dynamiki, służące do rozwiązywania licznych zadań i określające drugą zasadę dynamiki: jeżeli na ciało o masie m działa nie zrównoważona siła wypadkowa z kilku działających sił, to uzyskuje ono przyspieszenie wprost proporcjonalne do działającej siły wypadkowej, a odwrotnie proporcjonalne do masy tego ciała:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad (3.6)$$

Należy zwrócić uwagę na to, że przyspieszenie wywołuje siła nie zrównoważona, gdyż mogą działać olbrzymie siły i nie spowodować przyspieszenia, jeżeli są zrównoważone przez jakieś inne siły np. przez siły tarcia. Przyspieszenie uzyskuje ciało tylko wtedy, gdy działa na nie siła nie zrównoważona.

Przykład 3.1

Obliczyć przyspieszenie, jakie uzyskuje ciało o masie m zsuwające się po równi pochyłej o kącie nachylenia α , uwzględniając tarcie, tzn. gdy dany jest współczynnik tarcia k (rys. 3.1.).



Rys. 3.1. Na ciało znajdujące się na równi pochyłej działają wzdłuż równi dwie siły: siła $\vec{F}$ zsuwająca ciało z równi i siła tarcia $\vec{T}$ działająca przeciwnie do siły $\vec{F}$

Na w/w ciało działają wzdłuż równi dwie siły: Składowa ciężaru $\vec{F}$, określona jako iloczyn masy danego ciała przez składową przyspieszenia ziemskiego w kierunku równi, której wartość bezwzględna wyraża się wzorem:

$$F = m g \sin\alpha$$

oraz siła tarcia $\vec{T}$ skierowana przeciwnie do siły $\vec{F}$, ale też wzdłuż równi, której wartość liczbową określona jest jako iloczyn współczynnika tarcia (k) przez nacisk:

$$T = k N \quad (3.7)$$

gdzie N jest naciskiem ciała na równię, który jest zawsze prostopadły do przesunięcia a w naszym przypadku do równi, którego wartość liczbową wyraża się wzorem:

$$N = m g \cos\alpha \quad (3.8)$$

Mamy więc:

$$T = k m g \cos\alpha$$

Korzystając drugiej zasady dynamiki (wzór 3.5), możemy napisać:

$$m g \sin\alpha - k m g \cos\alpha = m a$$

skąd otrzymamy szukaną wartość liczbową przyspieszenia na równi pochyłej z uwzględnieniem współczynnika tarcia:

$$a = g(\sin\alpha - k \cos\alpha) \quad (3.9)$$

3.3. Pęd, zasada zachowania pędu

Równanie (3.3) dla przypadku jednej siły, możemy przekształcić wstawiając za przyspieszenie jego wartość określoną z kinematyki wzorem (2.11). Wtedy będziemy mieli:

$$\vec{F} = m \frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{t}$$

$$\text{lub} \quad \vec{F} t = m \vec{V} - m \vec{V}_0 \quad (3.10)$$

Iloczyn siły $\vec{F}$ przez czas jej działania t nazywa się pędem siły, natomiast iloczyn masy ciała m przez jej prędkość nazywa się **pędem masy**. Pęd jest wielkością wektorową i wyraża się wzorem:

$$\vec{p} = m \vec{V} \quad (3.11)$$

Istnieje zasada zachowania pędu, która mówi nam, że w układzie zamkniętym, na który nie działają siły zewnętrzne, suma pędów mas jest stała:

$$\sum \vec{p} = C \quad (3.12)$$

Z równania (3.10) możemy określić siłę F jako stosunek zmiany pędu masy danego ciała do czasu w ciągu którego zmiana ta nastąpiła

$$\vec{F} = \frac{\vec{\Delta p}}{\Delta t} \quad (3.13)$$

Powyższe równanie jak i równanie (3.10) służy do rozwiązywania wielu prostych zadań a mianowicie, gdy z czterech wielkości: masa, siła, prędkość, czas, trzy są dane wtedy łatwo znajdziemy wielkość czwartą, co jest pokazane w następującym przykładzie:

Przykład 3.2

Obliczyć masę ciała, jeżeli w czasie $t = 5$ s działania stałej siły $F = 100$ N uzyskało ono prędkość $V = 2$ m/s. Ponieważ prędkość początkowa $V_0 = 0$, więc równanie (3.10) przyjmie postać:

$$F t = m V$$

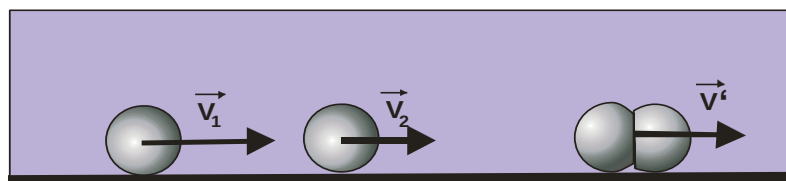
skąd

$$m = \frac{F t}{V}$$

$$m = 250 \text{ kg.}$$

Przykład 3.3

Kulka o masie m_1 i prędkości V_1 zderza się centralnie i niesprężysto (przy którym występują trwałe odkształcenie) z drugą kulką o masie m_2 poruszającą się w tym samym kierunku z prędkością V_2 przy czym $V_2 < V_1$. Obliczyć prędkość wspólną V' po zderzeniu (**rys. 3.2**).



Rys. 3.2. Po zderzeniu niesprężystym kulki poruszają się ze wspólną prędkością V'

Wychodzimy z zasady zachowania pędu mas: suma pędów przed zderzeniem równa się sumie pędów mas po zderzeniu:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V'$$

skąd

$$V' = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

Natomiast w przypadku zderzenia sprężystego korzystamy z zasady zachowania pędu i energii. Rozwiązanie układu dwóch równań (na pęd i na energię) daje wzory na prędkości obu ciał po zderzeniu sprężystym

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} U_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} U_2 \quad (3.14)$$

$$V_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} U_2 + \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} U_1 \quad (3.15)$$

gdzie m_1 m_2 są masami ciał zderzających się sprężysto, U_1 U_2 są to prędkości ciał o masach m_1 m_2 przed zderzeniem.

3.4. Pierwsza zasada dynamiki

Pierwsza zasada dynamiki jest ogólnym przypadkiem drugiej zasady, gdy przyspieszenie równa się zeru. Wtedy ciało jest w spoczynku, albo też może być w ruchu jednostajnym prostoliniowym. Można to wypowiedzieć następująco: jeżeli na ciało nie działają żadne siły, lub działające siły się równoważą, to będzie ono w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prosto-liniowym.

Zasada ta nazywa się też zasadą bezwładności, gdyż ciała wykazują tendencje do zachowania swego stanu, tzn. jeżeli ciało było w dowolnym ruchu i w pewnym momencie siły się zrównoważyły, lub przestały działać, to nie zatrzyma się ono dzięki swojej bezwładności, lecz pozostanie w ruchu jednostajnym prostoliniowym, natomiast jeśli było w spoczynku, to w tym spoczynku pozostanie.

3.5. Siła bezwładności

Siła bezwładności występuje tylko w układach poruszających się z przyspieszeniem tzn. w układach nieinercjalnych. Jest przeciwnie skierowana do przyspieszenia i określa się iloczynem masy ciała znajdującego się w tym układzie przez przyspieszenie układu. Wartość liczbowa tej siły wyraża się wzorem:

$$F_b = m a \quad (3.16)$$

Siła bezwładności występuje np. w ruszającym z miejsca lub hamującym samochodzie, w czasie ruszania lub zatrzymywania się windy, w ruchu gdzie zmienia się kierunek prędkości jak np. na zakrętach, a więc w ruchu po okręgu.

W tym ostatnim przypadku występuje przyspieszenie dośrodkowe, a więc siła bezwładności będzie skierowana od środka okręgu wzdłuż jego promienia. Nazywa się w tym przypadku siłą odśrodkową i określa się iloczynem masy ciała przez przyspieszenie dośrodkowe. Jej wartość liczbowa wyraża się wzorem:

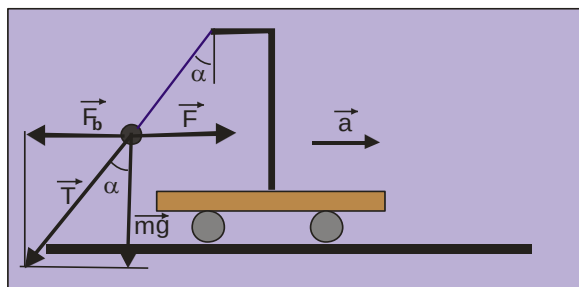
$$F_{od} = m \frac{V^2}{r} \quad (3.17)$$

Tak ocenia siłę bezwładności obserwator znajdujący się sam w układzie poruszającym się z przyspieszeniem, natomiast dla obserwatora niezwiązanego z ruchem przyspieszonym (stojącego na zewnątrz układu), siły bezwładności nie występują. Ruch po okręgu opisze on w ten sposób, że aby ciało poruszało się po okręgu, musi działać stale siła prostopadła do prędkości, z jaką ciało się już poruszało i zmusza je do ruchu po okręgu, gdyż inaczej poruszałoby się po prostej. Siła ta nazywa się siłą dośrodkową. Określa się ją wzorem identycznym ze wzorem (3.16), jako iloczyn masy ciała przez przyspieszenie dośrodkowe, tylko będzie różnić się znakiem, gdyż jest skierowane do środka okręgu. W każdym, więc ruchu po okręgu możemy doszukać się siły dośrodkowej: może to być siła przyciągania elektrostatycznego, siła grawitacji i inne.

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki, gdy na ciało zadziała siła, siła dośrodkowa, to będzie ono oddziaływać na drugie ciało, na więzy ruchu, siłą taką samą lecz przeciwnie skierowaną, siłą odśrodkową.

Przykład 3.4

Na wózku poruszającym się z przyspieszeniem a po torze poziomym zawieszono wahadło składające się z kulki o masie m zawieszanej na lince (rys. 3.3). Obliczyć kąt odchylenia linki od kierunku pionowego oraz napięcie linki.



Rys. 3.3. Na skutek działania siły bezwładności kulka odchyła się od kierunku pionowego.

Na skutek działania siły bezwładności (wózek porusza się z przyspieszeniem a), kulka odchyli się od kierunku pionowego, przeciwnie do kierunku przyspieszenia. Będzie się odchyłać dotąd, aż składowa pozioma ciężaru kulki $\vec{F}$ zrównoważy się z siłą bezwładności $\vec{F}_b$. Wartość liczbowa składowej poziomej ciężaru kulki wyrazi się wzorem:

$$F_b = m g \operatorname{tg} \alpha$$

Możemy więc napisać następujące równanie:

$$m a = m g \operatorname{tg} \alpha$$

skąd:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}.$$

Z trójkąta prostokątnego sił (**rys. 3.3**) wyliczamy napięcie nitki:

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

Przykład 3.5

Winda rusza w dół z przyspieszeniem $a = 5 \text{ m/s}^2$, w której znajduje się człowiek o ciężarze $P = 700 \text{ N}$. Obliczyć siłę z jaką naciska on na podłogę windy. Siła bezwładności występująca w czasie przyspieszenia windy, gdy ona rusza w dół, działa do góry i zmniejsza ciężar ciała o iloczyn jego masy przez przyspieszenie windy, a więc o siłę:

$$F_b = \frac{P}{g} a.$$

Nacisk człowieka na podłogę windy będzie więc wynosić:

$$N = P - \frac{P}{g} a$$

$$N = 350 \text{ N}.$$

Gdyby winda spadała swobodnie z przyspieszeniem ziemskim g wtedy na podłogę windy człowiek nie wywierałby żadnego nacisku, byłby w stanie nieważkości. Stan nieważkości jest wtedy, gdy ciężar ciała zostaje zrównoważony przez siłę bezwładności. Przeciążenie natomiast ma miejsce wtedy, gdy do ciężaru danego ciała dodaje się siła bezwładności.

3.6. Praca, moc, sprawność

Pracę określamy w fizyce jako iloczyn skalarny stałej siły $\vec{F}$, powodującej przesunięcie ciała, przez to przesunięcie:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} \quad (3.18)$$

Zgodnie z definicją iloczynu skalarnego możemy napisać:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \alpha \quad (3.19)$$

gdzie α jest kątem między wektorem stałej działającej siły, a kierunkiem przesunięcia.

We wzorach powyższych $\vec{F}$ oznacza siłę, z jaką my działamy na dane ciało, pokonując zawsze jakąś siłę oporu na danej drodze. Kierunek działającej siły jest zgodny z kierunkiem przesunięcia, wtedy kąt α jest równy zeru, a $\cos \alpha$ jest równy jedności. Praca wtedy jest dodatnia.

Jeżeli natomiast pracę wykonują same siły oporu, np. siła pola, siła sprężystości, to praca jest ujemna, ponieważ kąt $\alpha = 180^\circ$ ($\cos 180^\circ = -1$). Gaz np. rozprężając się, wykonuje pracę ujemną.

Jednostką pracy jest džul. Jest to praca wykonana siłą jednego niutona na drodze jednego metra.

Mocą natomiast nazywamy stosunek pracy do czasu, w ciągu którego dana praca została wykonana:

$$M = \frac{W}{t} \quad (3.20)$$

Jednostką mocy jest wat. Urządzenie ma moc jednego wata, jeżeli wykona pracę jednego dżula w czasie jednej sekundy.

Sprawnością danego urządzenia nazywamy stosunek pracy użytecznej do pracy włożonej:

$$\eta = \frac{W_{uz}}{W_w} \quad (3.21)$$

Praca użyteczna tzn. ta, którą wykonuje dane urządzenie, jest zawsze mniejsza od pracy dostarczonej (włożonej) z powodu pokonywania różnych tarć i oporów wewnątrz danego urządzenia.

P r z y k ł a d 3.6 (xx 1983)

Dźwig unosi w górę ciało o masie $m = 500 \text{ kg}$ ruchem jednostajnie przyspieszonym. Obliczyć moc z jaką pracuje silnik dźwigu, jeżeli straty energii wynoszą 10 % a podnoszenie ciała na wysokość $h = 10 \text{ m}$ trwa $t = 5 \text{ s}$. Można przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Praca tutaj jest wykonywana przeciwko sile ciężkości i sile bezwładności, co można zapisać następująco:

$$W = m g h + m a h$$

gdzie a jest przyspieszeniem z jakim ciało przesuwa się do góry, które wyrażamy wzorem:

$$a = \frac{2 h}{t^2}.$$

Mamy więc:

$$W = m g h + m \frac{2 h^2}{t^2}.$$

Moc użyteczna silnika wyrazi się wzorem:

$$M = \frac{m g h + m \frac{2 h^2}{t^2}}{t}$$

lub

$$M = \frac{m g h t^2 + 2 m h^2}{t^3}.$$

Szukana moc z jaką pracuje silnik wyliczymy z jego sprawności, określonej jako stosunek mocy użytecznej do mocy dostarczonej, uwzględniając to, że moc użyteczna jest o 10% mniejsza od mocy dostarczonej tzn. od mocy z jaką pracuje silnik:

$$\eta = \frac{m g h t^3 + 2 m h^2}{t^3 M_x},$$

skąd: $M_x = \frac{m g h t^3 + 2 m h^2}{\eta t^3}, \quad M_x = 12 \text{ kW},$

gdzie $\eta = \frac{9}{10}.$

3.7. Energia, zasada zachowania energii

Energią nazywamy zasób pracy, jaką ciało może wykonać, lub pracą potrzebną do doprowadzenia ciała do danego stanu. Są różne rodzaje energii: energia potencjalna (siły grawitacji, sprężystości), kinetyczna, cieplna, elektryczna jądrowa.

Energia potencjalna grawitacji jest to praca, jaką należy wykonać, aby podnieść ciało o danej masie m na wysokość h , a więc wykonać pracę przeciwko sile ciężkości. Wyraża się ona wzorem:

$$E_p = m g h \quad (3.22)$$

Praca przeciwko sile ciężkości nie zależy od drogi, po której jest wykonywana a tylko od różnicy wysokości końcowej i początkowej, co pokazuje następujący przykład. Pole, w którym praca nie zależy od drogi, nazywa się polem zachowawczym.

P r z y k ł a d 3.7.

Obliczyć pracę, jaką należy wykonać, ażeby wtoczyć beczkę o ciężarze $P = m g$ po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α , na wysokość h , jeżeli pominiemy tarcie.

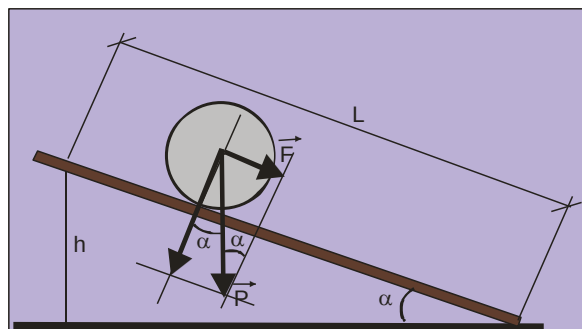
Wyliczymy tę pracę mnożąc siłę przeciwko, której praca jest wykonywana, tzn. składową ciężaru beczki w kierunku równi (**rys 3.4**)

$$F = P \sin \alpha$$

przez długość równi: $L = \frac{h}{\sin \alpha}.$

Mamy więc: $W = P h$

lub $W = m g h$



Rys. 3.4. Praca przeciwko sile $\vec{F}$, składowej ciężaru wzdłuż równi na drodze L równa się pracy przeciwko całemu ciężarowi $\vec{P}$ na drodze (wysokości) h

Jak widać, obliczona praca nie zależy od kąta nachylenia równi, a więc i nie zależy od drogi, po której jest wykonywana, lecz od wysokości na którą dane ciało zostało wniesione oraz od jego ciężaru. Praca taka nazywa się pracą zachowawczą a siłą siłą zachowawczą.

W oparciu o to, że praca przeciwko sile ciężkości nie zależy od drogi, po której jest wykonywana, działają maszyny proste, jak: równia pochyła, klin, śruba, dźwignia, kołowrót, wielobłoczek. Praca wykonana za pomocą tych maszyn jest taka sama jak wykonana bezpośrednio, bez maszyny prostej, ale mniejszą siłą na dłuższej drodze. Innym rodzajem energii jest energia, jaką posiada ciało będące w ruchu z prędkością V . Nazywa się ona energią kinetyczną. W celu wyprowadzenia wzoru na w/w energię wyliczamy pracę jak to jest pokazane w następującym przykładzie.

Przykład 3.8

Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać ażeby wprowadzić w ruch ciało o masie m znajdujące się w spoczynku na poziomej drodze, nadając mu prędkość V . Tarcie zaniedbujemy.

Praca tutaj jest wykonywana przeciwko sile bezwładności

$$W = F_b S$$

gdzie

$$F_b = m a$$

$$S = \frac{a t^2}{2}.$$

Mamy więc:

$$W = m \frac{a^2 t^2}{2}.$$

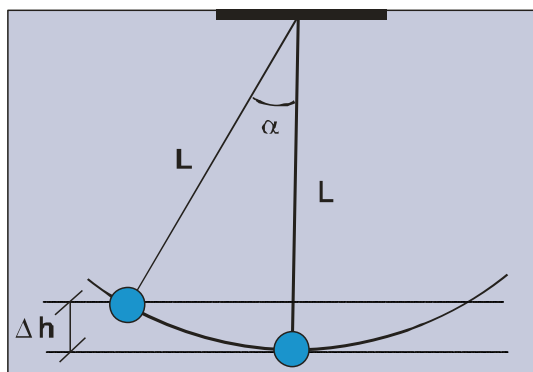
Uwzględniając, że $a t = V$, ostatecznie otrzymamy:

$$W = \frac{m V^2}{2}. \quad (3.23)$$

Wykonana praca, przy doprowadzeniu ciała ze stanu spoczynku w ruch z prędkością V , równa jest energii kinetycznej tego ciała. Wszystkie rodzaje energii mają tę właściwość, że nie mogą zniknąć bez śladu, ani powstać z niczego, lecz mogą zamieniać się z jednego rodzaju na inny, utrzymując w odosobnionym (zamkniętym) układzie stałą sumaryczną wartość. Mówi nam o tym zasada zachowania energii: W układzie zamkniętym (na który nie działają siły z zewnątrz), suma wszystkich rodzajów energii jest stała. Korzystając z tej zasady, rozwiązuje się liczne zadania, co jest pokazane w dwóch następnych przykładach, licznych zadaniach i testach.

Przykład 3.9 (x 1985)

Obliczyć prędkość kuli zawieszonej na cienkim druciku o długości L , tworzącej wahadło matematyczne, w jej najniższym położeniu, przy odchyleniu drucika od kierunku pionowego o kąt α (rys.3.5).



Rys. 3.5. Maksymalne wzniesienie kulki Δh wyliczymy, jako różnicę $L - L\cos\alpha$

Kulka, przechodząc ze swojego najwyższego położenia w najniższe, zamienia swoją energię potencjalną w kinetyczną. Jeżeli energia potencjalna zamienia się tylko na energię kinetyczną, tzn. nie ma zużycia energii na pokonanie tarć czy innych oporów, to w najniższym położeniu, nabyta energia kinetyczna przez kulkę będzie się równać energii potencjalnej w położeniu początkowym.

Zakładając takie idealne warunki możemy napisać:

$$\frac{m V^2}{2} = m g \Delta h ,$$

gdzie

$$\Delta h = L - L\cos\alpha .$$

Ostatecznie szukana prędkość będzie:

$$V = \sqrt{2 g L(1 - \cos\alpha)}$$

Przykład 3.10

W spoczywającą na poziomej powierzchni belkę o masie M , uderza lecąca poziomo z prędkością V kula karabinowa o masie m . Obliczyć, o jaki odcinek drogi przesunie się belka, jeżeli współczynnik tarcia jest k a przyspieszenie ziemskie g . Przyjąć, że kula utkwiała w belce.

Nie można tutaj przyjąć warunków idealnych, jak w poprzednim przykładzie, gdyż spora część energii kinetycznej kuli tracona jest na wbicie się kuli w belkę. W takim przypadku oprócz zasady zachowania energii, stosujemy zasadę zachowania pędu.

Bierzemy, więc energię kinetyczną belki w momencie uderzenia w nią kuli (przy sumie mas obu ciał) i porównujemy ją z pracą przeciwko sile tarcia przy przesunięciu się belki:

$$\frac{(m+M)V'^2}{2} = (m+M)g k S,$$

gdzie V' jest nieznaną wspólną prędkością belki i kuli.

W oparciu o zasadę zachowania pędu piszemy drugie równanie:

$$m V = (m+M) V'$$

Rozwiązując powyższy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi (V' i S) otrzymamy szukane przesunięcie belki S :

$$S = \frac{V^2 m^2}{2 g k (m+M)^2}$$

Zadania rozwiązane

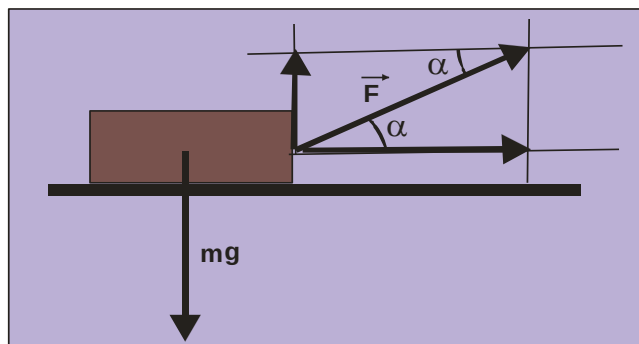
3.1. (x 1987) Ciało o masie m , leży na poziomej płaszczyźnie. Do niego przyłożono siłę F skierowaną pod kątem α do poziomu (**rys. 3.6**). Obliczyć przyspieszenie, z jakim będzie poruszać się to ciało po płaszczyźnie, jeżeli współczynnik tarcia o płaszczyznę wynosi k , zaś przyspieszenie ziemskie g .

Suma wszystkich sił działających na dane ciało w kierunku poziomym równa się iloczynowi masy tego ciała przez uzyskane przyspieszenie:

$$F \cos \alpha - (m g - F \sin \alpha) k = m a$$

Po podzieleniu obu stron równania przez m i po przekształceniu otrzymamy:

$$a = \frac{F}{m} (\cos \alpha + k \sin \alpha) - g k$$



Rys. 3.6. Na dane ciało działa siła $\vec{F}$, która rozkłada się na dwie składowe: pozioma i pionową

3.2. (xx 1980) Przy wciąganiu ciała o masie $m = 100 \text{ kg}$ ruchem jednostajnym po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ należy działać siłą $F = 600 \text{ N}$ równoległą do równi. Obliczyć, z jakim przyspieszeniem zsuwałoby się to ciało z równi. Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Suma wszystkich sił działających na zsuwające się ciało wzdłuż równi równa się iloczynowi masy tego ciała przez przyspieszenie:

$$m g \sin \alpha - T = m a$$

gdzie T jest siłą tarcia, która w przypadku wciągania ciała po równi pod górę równa się różnicy pomiędzy daną siłą $\vec{F}$, a składową ciężaru w kierunku równi:

$$T = F - m g \sin \alpha.$$

Mamy więc:
$$m g \sin \alpha - (F - m g \sin \alpha) = m a,$$

skąd:
$$a = 2 g \sin \alpha - \frac{F}{m}, \quad a = 4 \frac{m}{s^2}$$

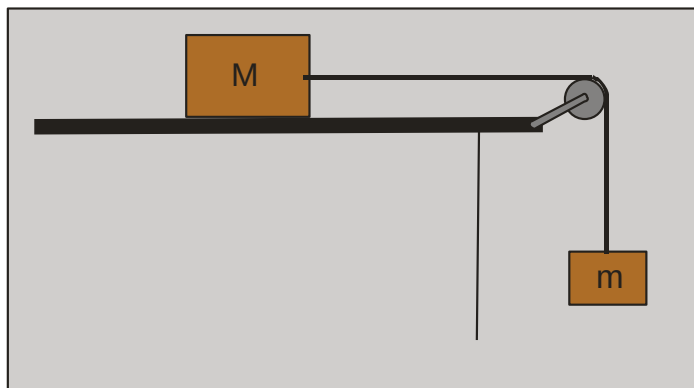
$$a = 4 \frac{m}{s^2}$$

3.3. Ciało o masie m zawieszone na lince ciągnie drugie ciało o masie M po gładkiej powierzchni poziomej (**rys. 3.7**). Obliczyć przyspieszenie, z jakim dwa ciała się poruszają, siłę napięcia linki i nacisk bloczka na jego oś. Masę bloczka i tarcie zaniedbujemy.

W oparciu o drugą zasadę dynamiki możemy napisać

$$m g - m a = M a$$

skąd:
$$a = g \frac{m}{m + M}$$



Rys. 3.7. Na ciało o masie M działa siła $F = m g - m a$

Napięcie linki równa się sile bezwładności ciała o masie M , a więc równa się iloczynowi masy tego ciała przez przyspieszenie

$$T = M g \frac{m}{m + M}$$

Nacisk bloczka na oś, jest równy sile wypadkowej dwóch sił napięcia linki względem siebie prostopadłych:

$$N = \sqrt{T^2 + T^2}$$

$$N = T\sqrt{2}.$$

3.4. (xx 1981) Na poziomej płaszczyźnie znajdują się dwa klocki połączone nicią. Masy klocków wynoszą odpowiednio $m_1 = 0,3 \text{ kg}$ $m_2 = 0,2 \text{ kg}$. Współczynnik tarcia o podłoże jest dla obu klocków jednakowy i wynosi $k = 0,1$. Na pierwszy klocek o masie m_1 działa pozioma siła $F = 5 \text{ N}$. Obliczyć, przyspieszenie układu oraz siłę, z jaką klocek o masie m_1 działa na drugi klocek. Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki możemy napisać:

$$F - (m_1 + m_2) g k = (m_1 + m_2) a$$

skąd:

$$a = \frac{F - (m_1 + m_2) g k}{m_1 + m_2}$$

$$a = 9 \text{ m/s}^2.$$

Siła, z jaką klocek o masie m_1 działa na drugi klocek o masie m_2 jest równa sile oporu tego drugiego klocka, tzn. sumie sił: bezwładności i tarcia:

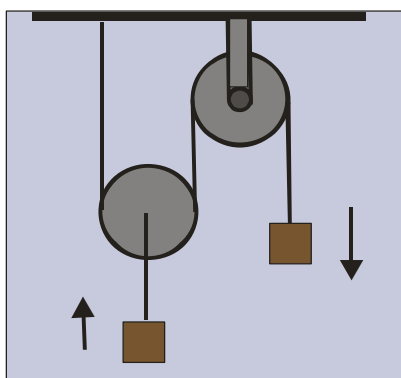
$$F_x = m_2 a + m_2 g k.$$

Wstawiając za a wartość przyspieszenia wyliczonego w pierwszej części zadania otrzymamy:

$$F_N = F \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$F_N = 2 \text{ N.}$$

3.5. (xx 1981) Na sznurze przewieszonym przez bloczki, jak pokazuje **rys. 3.8**, zawieszono dwa jednakowe ciężarki. Obliczyć przyspieszenie ciężarka wiszącego na końcu sznura. Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Ciężar bloczków, sznura oraz tarcie pomijamy.



Rys. 3.8. Układ dwóch bloczków i dwóch jednakowych ciężarków

Na poruszający się w dół ciężarek, zawieszony na końcu sznura, działa siła ze strony drugiego ciężarka równa sumie dwóch sił: połowy jego ciężaru i siły bezwładności, co można zapisać:

$$N = \frac{mg}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{a}{2},$$

gdzie $\frac{a}{2}$ jest przyspieszeniem ciężarka przyczepionego do bloczka.

Na ciężarek na końcu sznurka działa także jego ciężar, skierowany pionowo w dół, więc przeciwnie do sił pochodzących od drugiego ciężarka. Z drugiej zasady dynamiki wiemy, że suma wszystkich sił działających na dane ciało, równa się iloczynowi masy tego ciała przez jego przyspieszenie, co pozwala zapisać:

$$-\frac{mg}{2} - \frac{ma}{4} + mg = ma,$$

skąd:

$$a = \frac{2}{5} g.$$

3.6. Człowiek o masie $m_1 = 70$ kg trzymający w ręku kulę o masie $m_2 = 7$ kg, porusza się na łyżwach rozpędem z prędkością $V_1 = 3$ m/s. W pewnej chwili wyrzuca przed siebie w kierunku poziomym kulę z prędkością $V_2 = 10$ m/s względem siebie. Obliczyć prędkość człowieka po wyrzuceniu kuli.

Z zasady zachowania pędu wiemy, że: suma pędów mas przed wyrzuceniem kuli równa się sumie pędów mas po wyrzuceniu:

$$m_1 V_1 + m_2 V_1 = m_1 V_x + m_2 (V_x + V_2)$$

skąd:

$$V_x = \frac{V_1(m_1 + m_2) - m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

$$V_x = 2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3.7. (xx 1978) Pocisk lecący poziomo z prędkością V rozrywa się na dwie równe części na wysokości H . Jedna część porusza się pionowo w dół i spada na Ziemię po upływie czasu t od momentu wybuchu. Obliczyć wartość i kierunek prędkości drugiej części pocisku bezpośrednio po rozerwaniu (**rys. 3.9**).

Sposób pierwszy: z zasady zachowania pędu wiemy, że suma wektorowa pędów jest stała, tj. taka sama przed rozerwaniem się pocisku jak i po rozerwaniu:

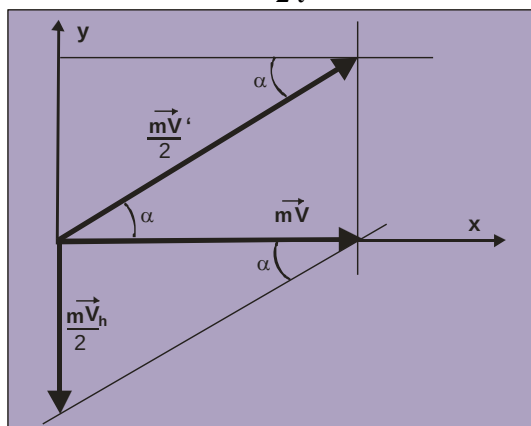
$$m \vec{V} = \frac{m}{2} \vec{V}_h + \frac{m}{2} \vec{V}',$$

gdzie $\vec{V}'$ jest szukaną prędkością drugiej części pocisku, $\vec{V}_h$ jest prędkością pierwszej części pocisku, którą wyliczamy ze wzoru:

$$H = V_h t + \frac{g t^2}{2}$$

skąd:

$$V_h = \frac{2H - g t^2}{2t}$$



Rys. 3.9. Składowe wektora pędu po jego rozerwaniu się.

Wartość liczbową pędu drugiej części pocisku wyrazi się wzorem:

$$\frac{m V'}{2} = \sqrt{\left(\frac{m V_h}{2}\right)^2 + (m V)^2}$$

i ostatecznie będziemy mieli:

$$V' = \sqrt{\left(\frac{2H - g t^2}{2t}\right)^2 + 4V^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2H - g t^2}{4Vt}.$$

Sposób drugi: rozpatrujemy rzuty wszystkich pędów na osie OX i OY:

$$(OX) \quad mV = \frac{m}{2} V' \cos \alpha \quad (OY) \quad \frac{m}{2} V_h = \frac{m}{2} V' \sin \alpha.$$

Rozwiązując powyższy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi: V' i $\sin \alpha$ otrzymamy:

$$V' = \sqrt{\left(\frac{2H - g t^2}{2t}\right)^2 + 4V^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2H - g t^2}{4Vt}.$$

3.8. Pozioma struga wody o poprzecznym przekroju $S = 4 \text{ cm}^2$ uderza z prędkością $V = 5 \text{ m/s}$ o ścianę i spływa po niej swobodnie w dół. Obliczyć siłę z jaką struga ta działa na ścianę, jeżeli dana jest gęstość wody $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

W oparciu o drugą zasadę dynamiki możemy napisać:

$$F t = m V - m V_2,$$

gdzie V_2 jest prędkością wody po zderzeniu się ze ścianą, która w naszym przypadku jest równa zero, m jest masą wody uderzającą o ścianę w czasie t , którą wyliczamy ze wzoru:

$$m = S V t \rho.$$

Szukana siła wyrazi się więc wzorem:

$$F = S \rho V^2$$

$$F = 1000 \text{ N}.$$

3.9. (xx 1977) Naczynie szklane w kształcie sześcianu napełnione do połowy wodą porusza się poziomo prostopadle do jednej ze ścian. Obliczyć, z jakim maksymalnym przyspieszeniem może poruszać się naczynie, ażeby woda nie wylała się jeszcze z niego. Odpowiedź uzasadnić.

Na cząsteczki cieczy w czasie ruchu działają dwie siły: siła ciężkości oraz pochodząca z przyspieszenia, siła bezwładności. Cząsteczki cieczy będą w równowadze, względem naczynia, gdy składowa ciężaru o kierunku poziomym F (rys. 3.10) wyrażająca się wzorem

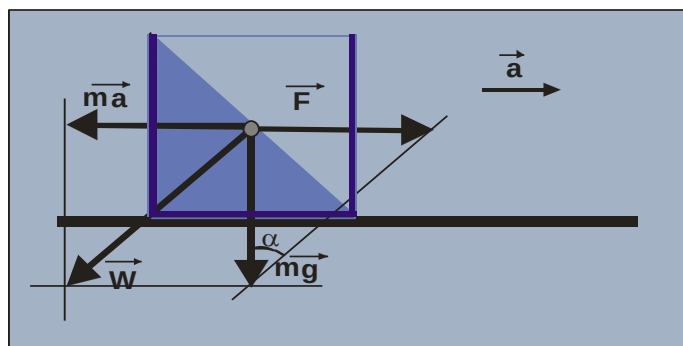
$$F = m g \operatorname{tg} \alpha$$

zrówna się z siłą bezwładności, lub gdy wypadkowa ciężaru i siły bezwładności będzie prostopadła do lustra wody. Wtedy możemy napisać następujące równanie:

$$m g \operatorname{tg} \alpha = m a ,$$

skąd:

$$a = g.$$



Rys. 3.10. Lustro wody ustawia się zawsze prostopadle do wypadkowej wszystkich sił działających na cząsteczki wody

3.10. Ciężarek o masie $m = 0,2 \text{ kg}$ tworzy wahadło. Obliczyć, przy jakim kącie odchylenia, licząc od kierunku pionowego, nitka wahadła się zerwie, jeżeli początkowy kąt odchylenia liczony tak samo wynosił $\alpha = 90^\circ$, a wytrzymałość nitki jest $F_0 = 4 \text{ N}$.

Suma sił działających na kulkę będzie: składowa ciężaru w kierunku nitki ($\vec{F}$) i siła bezwładności (odśrodkowa) ($\vec{F}_b$) mają się równać wytrzymałości nitki (rys. 3.10.). Dlatego też możemy napisać następujące równanie:

$$m g \cos \alpha + \frac{m V^2}{L} = F_0 ,$$

gdzie V jest prędkością kulki, której wartość liczbową jest taka sama jak przy swobodnym spadaniu z wysokości h :

$$V = \sqrt{2 g h} ,$$

ale:

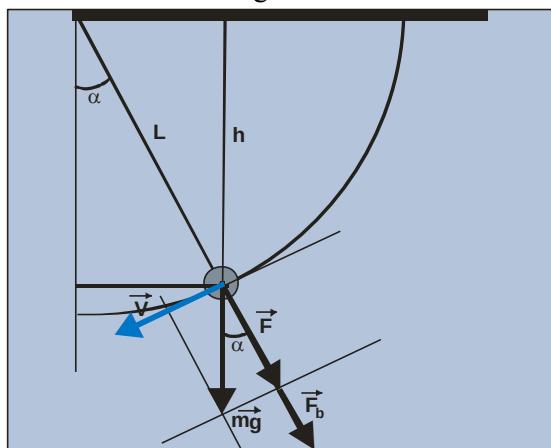
$$h = L \cos \alpha$$

Mamy więc:

$$m g \cos \alpha + m 2 g \cos \alpha = F_0 ,$$

skąd:

$$\cos \alpha = \frac{F_0}{3 m g} \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$



Rys. 3.11. Dwie siły: składowa ciężaru w kierunku nitki ($\vec{F}$) oraz siła bezwładności ($\vec{F}_b$) mają się równać wytrzymałości nitki

3.11. (x 1985) Wystrzelono pionowo do góry pocisk z działa. Obliczyć, na jaką wysokość się wzniesie mając następujące dane: długość lufy $L = 2,5$ m, czas przelotu przez lufę $t = 0,01$ s, przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s². Przyjąć, że pocisk poruszał się w lufie ruchem jednostajnie przyspieszonym. Pominąć opór powietrza.

Energia kinetyczna pocisku zamienia się na energię potencjalną:

$$\frac{m V^2}{2} = m g h,$$

gdzie h jest szukaną wysokością, V jest prędkością końcową pocisku u wylotu z lufy, którą wyznaczymy ze wzoru:

$$V = a t,$$

gdzie a jest przyspieszeniem pocisku w lufie, które wyliczymy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$a = \frac{2 L}{t^2}.$$

Uwzględniając powyższe otrzymamy:

$$h = \frac{2 L^2}{g t^2}, \quad h = 12500 \text{ m}.$$

3.12. (x 1986) Ciało rzucono pionowo do góry z prędkością początkową $V_0 = 10 \text{ m/s}$. Na pewnej wysokości jego energia kinetyczna równała się z jego energią potencjalną. Obliczyć tę wysokość, przyjmując przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Ubytek energii kinetycznej ciała wznoszącego się, równy jest energii potencjalnej uzyskanej przez to ciało:

$$\frac{m V_0^2}{2} - \frac{m V^2}{2} = m g h ,$$

gdzie V jest prędkością na wysokości h , którą wyliczymy z warunku, że na tej wysokości energia kinetyczna równa się energii potencjalnej:

$$\frac{m V^2}{2} = m g h .$$

Z powyższych dwóch równań otrzymamy szukana wysokość:

$$h = \frac{V_0^2}{4 g} ,$$

$$h = 2,5 \text{ m} .$$

3.13. Sanie zjeżdżają z góry i ślizgają się dalej po poziomej powierzchni lodowej. Obliczyć jak daleko odjadą po lodzie, jeżeli u podnóża góry osiągnęły prędkość $V = 10 \text{ m/s}$. Współczynnik tarcia między sankami a poziomą powierzchnią lodu wynosi $k = 0,03$. Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Energia kinetyczna nabyta przez sanki u podnóża góry zostaje zużyta na pracę przeciwko sile tarcia:

$$\frac{m V^2}{2} = m g k S$$

skąd: $S = \frac{V^2}{2 g k} . \quad S = 167 \text{ m} .$

3.14. (x 1987) Kulka drewniana o gęstości $\rho = 0,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ spada swobodnie z wysokości $h = 3 \text{ m}$ do wody. Obliczyć na jaką maksymalną głębokość się zanurzy, jeżeli gęstość wody wynosi $\rho_w = 10^3 \text{ kg/m}^3$, a wszystkie opory pomijamy.

Energia potencjalna kulki zamienia się na pracę przeciwko sile wyporu przez wodę:

$$m g (h + x) = F x ,$$

gdzie x jest szukany zanurzeniem kulki, F jest siłą wyporu, którą wyliczamy ze wzoru (z prawa Archimedesesa):

$$F = V \rho_w g ,$$

gdzie m jest masą kulki równą iloczynowi objętości kulki przez jej gęstość:

$$m = V\rho.$$

Uwzględniając powyższe, wyliczymy szukane zanurzenie kulki:

$$x = \frac{\rho h}{\rho_w - \rho} \quad x = 2 \text{ m.}$$

3.15. (xx 1979) Poziomo lecąca kula o masie $m = 0,01 \text{ kg}$ uderza w leżący na podłodze drewniany sześcian o masie $M = 0,2 \text{ kg}$ i przebija go. Obliczyć ilość wydzielonego ciepła podczas tego zderzenia, jeżeli prędkość kuli w chwili uderzenia wynosiła $V_1 = 800 \text{ m/s}$, a po wyjściu z sześcianu $V_2 = 300 \text{ m/s}$. Kula porusza się po prostej przechodzącej przez środek sześcianu a tarcie między sześcianem a podłogą pomijamy.

Ubytek energii kinetycznej kuli idzie na energię kinetyczną sześcianu i na wydzielone ciepło:

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_2^2}{2} = \frac{M V^2}{2} + Q.$$

Ponieważ mamy tutaj dwie niewiadome, więc należy napisać jeszcze jedno równanie. W tym celu korzystamy z zasady zachowania pędu:

$$M V_1 = M V + m V_2.$$

Wyznaczając prędkość V z równania drugiego i wstawiając ją do równania pierwszego, otrzymamy:

$$Q = \frac{m}{2} \left[V_1^2 - V_2^2 - \frac{m}{M} (V_1 - V_2)^2 \right]$$

$$Q = 2,9 \text{ kJ.}$$

3.16. (xx 1981) (xx 1986) Piłeczka pingpongowa o promieniu $R = 15 \text{ mm}$ i masie $m = 5 \text{ g}$ jest zanurzona w wodzie na głębokości $h_1 = 30 \text{ cm}$. Po uwolnieniu, wyskakuje ona na wysokość $h_2 = 10 \text{ cm}$ nad powierzchnią wody. Obliczyć ilość wydzielonego ciepła w tym procesie, na skutek tarcia piłeczki o wodę. Gęstość wody wynosi $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Przyspieszenie ziemskie przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$. Efekty powierzchniowe pominąć.

Piłeczka pingpongowa zanurzona do wody na głębokość h_1 posiada energię potencjalną siły wyporu równą iloczynowi tej siły przez głębokość zanurzenia:

$$E_p = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g h_1.$$

Energia ta zostaje zużyta na wyrzucenie piłeczki na wysokość $h_1 + h_2$ oraz na wydzielenie ciepła Q . Mamy więc równanie:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g h_1 = m g (h_1 + h_2) Q$$

$$\text{skąd: } Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g h_1 - m g (h_1 + h_2)$$

$$Q = 21,9 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

3.17. (xx 1985) Pocisk o masie m lecący poziomo przebija drewniany klocek o masie M zawieszony na cienkiej nierozciągliwej nici o długości L , na skutek czego nica z klockiem odchyliła się o kąt α a prędkość pocisku zmalała z V_1 do V_2 . Obliczyć jaką część energii kinetycznej pocisku zamieniła się na ciepło. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Równanie energii będzie miało postać :

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_2^2}{2} = Q + M g h ,$$

$$\text{gdzie } h = L - L \cos \alpha \quad \text{lub} \quad h = L(1 - \cos \alpha).$$

Część energii w postaci ciepła (Q) w stosunku do początkowej energii kinetycznej pocisku, wyrazi się wzorem:

$$\frac{Q}{\frac{m V_1^2}{2}} = \frac{\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_2^2}{2} - M g L(1 - \cos \alpha)}{\frac{m V_1^2}{2}}$$

$$\text{lub } \frac{Q}{\frac{m V_1^2}{2}} = 1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} - \frac{2 M g L}{m V_1^2} (1 - \cos \alpha)$$

3.18. (xx 1977) Na wózek o masie $M = 30 \text{ kg}$ poruszający się z prędkością $V = 2 \text{ m/s}$ po torze poziomym położono cegłę o masie $m=3\text{kg}$ znajdującą się uprzednio w spoczynku. Obliczyć przyrost energii wewnętrznej układu wózek-cegła pomijając energię rozproszoną do otoczenia.

Przyrost energii wewnętrznej układu wózek-cegła, równy jest ciepłu wydzielonemu w czasie przesunięcia cegły po wózku na skutek tarcia. Z zasady zachowania energii możemy napisać:

$$\frac{M V^2}{2} = \frac{(M + m) V_2^2}{2} + Q,$$

gdzie V_2 jest prędkością wózka po położeniu na niego cegły. Prędkość tę wyliczymy z zasady zachowania pędu:

$$M V = (M + m) V_2 .$$

Ostatecznie więc będziemy mieli

$$Q = \frac{M m V^2}{2(M + m)} \quad Q = 5,45 \text{ J}.$$

3.19. (xx 1986) Po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$ zsuwa się klocek o masie $M = 1 \text{ kg}$. bez tarcia. W chwili, gdy klocek miał prędkość $V = 6,3 \text{ m/s}$ uderzył w niego lecący równoległe do równi pocisk o masie $m = 0,1 \text{ kg}$ i utkwiał w nim. W wyniku zderzenia klocek przesunął się w górę wzdłuż równi i do chwili zatrzymania się przebył drogę $S = 0,9 \text{ m}$ od miejsca zderzenia. Obliczyć prędkość pocisku w chwili zderzenia. Przyspieszenie ziemskie przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$.

W oparciu o zasadę zachowania energii możemy napisać:

$$\frac{(m + M) V'^2}{2} = (m + M) g h$$

gdzie V' jest prędkością klocka razem z pociskiem $h = S \sin \alpha$.

Z zasady zachowania pędu otrzymamy drugie równanie:

$$M V_x - M V = (m + M) V'.$$

Wyznaczając prędkość V' z równania energii i wstawiając do równania pędów otrzymamy szukaną prędkość pocisku:

$$V_x = \frac{(m + M)}{m} \sqrt{2 g S \sin \alpha} + \frac{M}{m} V.$$

$$V_x = 96 \text{ m/s}.$$

3.20. (xx 1991) Na ciało o masie $m = 1 \text{ kg}$ poruszające się z prędkością $V_0 = 100 \text{ m/s}$, w pewnej chwili zaczęła działać siła $F = 10 \text{ N}$ skierowana pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do wektora prędkości. Czas działania tej siły wynosił $t = 10 \text{ s}$. Obliczyć drogę, na której działała ta siła, jaką wykonała pracę, energię kinetyczną po upływie czasu t , jeżeli ruch odbywał się bez tarcia.

Drogę przebytą przez ciało wyliczymy ze wzoru:

$$S = V_0 t + \frac{a t^2}{2},$$

gdzie

$$a = \frac{F \cos \alpha}{m}.$$

Mamy więc:

$$S = V_0 t + \frac{F (\cos \alpha) t^2}{2 m}. \quad (3.24)$$

$$S = 1250 \text{ m.}$$

Prace wyliczamy ze wzoru: $W = F S$.

Uwzględniając wzór (3.24) będziemy mieli:

$$W = F \left[V_0 + \frac{F(\cos \alpha)t^2}{2m} \right].$$

$$W = 6250 \text{ J.}$$

Energia kinetyczna ciała po czasie t wyrazi się wzorem:

$$E_k = \frac{m(V_0 + at)^2}{2}$$

lub

$$E_k = \frac{m}{2} \left[V_0 + \frac{F(\cos \alpha)t}{m} \right]^2.$$

$$E_k = 11250 \text{ J.}$$

Zadania uzupełniające

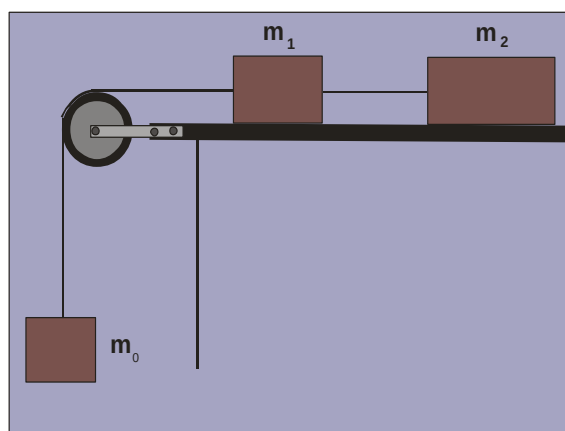
3.21. (x 1986) Ciało zaczyna zsuwać się z wierzchołka równi pochyłej długości L i wysokości h . Obliczyć prędkość ciała przy podstawie równi. Współczynnik tarcia wynosi k , a przyspieszenie ziemskie g .

$$\text{Odp. } V = \sqrt{2gL \left(\frac{h}{L} - k \sqrt{1 - \frac{h^2}{L^2}} \right)}$$

3.22. (xx 1988) Dwa ciała o masach $m_1 = 4 \text{ kg}$ i $m_2 = 1 \text{ kg}$ związane nierozciągliwą nicią przerzuconą przez bloczek, dzięki czemu ciała te mogą ślizgać się po powierzchniach dwóch równi pochyłych. Obliczyć przyspieszenie obu ciał, jeżeli kąty nachylenia obu równi wynoszą odpowiednio $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 30^\circ$, a współczynnik tarcia dla obu równi jest jednakowy i wynosi $k = 0,2$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$. Masę nici i krążka pomijamy.

$$\text{Odp. } a = g \frac{m_1(\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_2(\sin \beta + k \cos \beta)}{m_1 + m_2} \quad a = 4,8 \text{ m/s}^2.$$

3.23. Ciało o masie m_0 ciągnie dwa ciała o masach m_1 i m_2 (**rys. 3.12**). Obliczyć przyspieszenie układu trzech ciał oraz napięcie nici wiążącej ciała o masach m_1 i m_2 . Współczynnik tarcia między ciałami o masach m_1 i m_2 , a podłożem wynosi k . Przyspieszenie ziemskie g . Masę bloczka pomijamy.



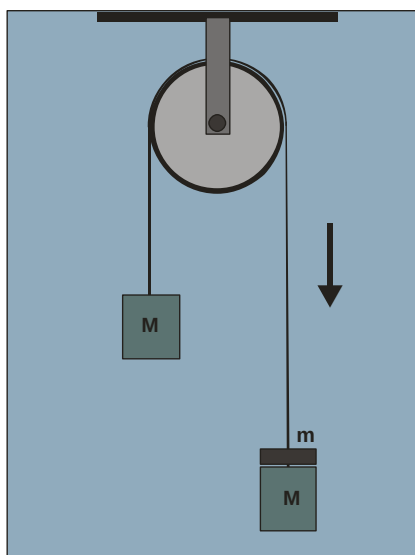
Rys. 3.12. Zawieszony na linie ciężarek o masie m_0 , ciągnie dwa ciała o masach m_1 i m_2 nadając im przyspieszenie

Odp.
$$a = g \frac{m_0 - k(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad N = g \frac{(1 + k)m_0 m_2}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

3.24. (xx 1986) Trzy klocki (A, B, C) o jednakowych masach połączone są nieważkimi nitkami i spoczywają na poziomej płaszczyźnie. Na klocek A zaczęła działać siła F nadająca układowi przyspieszenie. Obliczyć siłę naciągu nitki pomiędzy klockami A i B. Tarcie pomiędzy klockami a podłożem pomijamy.

Odp.
$$N = \frac{2}{3} F$$

3.25. Dwa ciężarki o jednakowych masach M są zawieszone na linie przerzuconej przez nieruchomy krążek. Na jeden z ciężarków położono ciało o masie m (**rys. 3.13**). Obliczyć przyspieszenie, z jakim poruszają się ciała, naprężenie linki, siłę nacisku na oś krążka oraz siłę nacisku ciężarka o masie m na ciężarek o masie M . Masę krążka i nitki pomijamy.



Rys. 3.13. Dodatkowy ciężarek o masie m powoduje ruch jednostajnie przyspieszony całego układu

Odp. $a = g \frac{m}{2M + m}, \quad F = \frac{2Mg(M+m)}{2M + m},$

$$N_{os} = \frac{4Mg(M+m)}{2M + m}, \quad N_m = \frac{2Mmg}{2M + m}.$$

3.26. Obliczyć, na jaką odległość przesunie się łódź stojąca na nieruchomej wodzie, jeżeli człowiek o masie $m = 60$ kg przejdzie z dziobu na rufę. Długość łodzi wynosi $L = 10$ m, a jej masa $M = 240$ kg

Odp. $x = L \frac{m}{m + M} \quad x = 2 \text{ m}.$

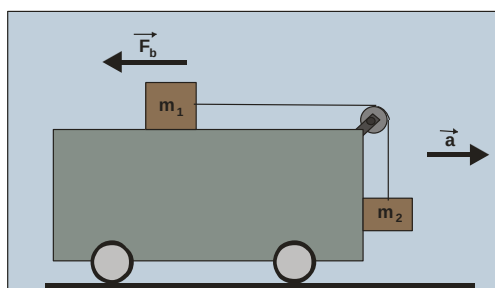
3.27. Dwie łódki poruszają się po stojącej wodzie ruchem jednostajnym z jednakowymi prędkościami $V_1 = 0,6$ m/s w przeciwnych kierunkach. Gdy znajdowały się obok siebie, z jednej do drugiej przerzucony został ładunek o masie $m = 60$ kg, na skutek czego druga łódka zmniejszyła swoją prędkość do $V_2 = 0,4$ m/s. Obliczyć masę drugiej łódki.

Odp. $M = \frac{m(V_1 + V_2)}{V_1 - V_2} \quad M = 300 \text{ kg}.$

3.28. Dwie kule o różnych masach, z których jedna ma masę $m_1 = 0,06 \text{ kg}$, lecą z jednakowymi prędkościami $V = 0,4 \text{ m/s}$ w kierunkach przeciwnych. Po zderzeniu niesprężystym mają prędkość wspólną wynoszącą $V_2 = 0,2 \text{ m/s}$. Obliczyć masę drugiej kuli.

$$\text{Odp. } m_2 = \frac{m_1 V - m_1 V_2}{V + V_2} \quad m_2 = 0,02 \text{ kg}$$

3.29. Na wózku spoczywa ciało o masie $m_1 = 2 \text{ kg}$ związane nitką z drugim ciałem o masie $m_2 = 1 \text{ kg}$ (**rys. 3.14**). Nitka przerzucona jest przez bleczek, którego masę pomijamy. Obliczyć, z jakim największym przyspieszeniem może poruszać się wózek ażeby obydwa ciała pozostawały w spoczynku względem wózka. Współczynnik tarcia obu ciał o wózek wynosi $k = 0,1$.



Rys. 3.14. Ciężarki na wózku poruszającym się ruchem przyspieszonym

$$\text{Odp. } a = g \frac{(m_2 + m_1 k)}{m_1 - m_2 k} \quad a = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2.$$

3.30. Obliczyć jaką pracę należy wykonać ażeby przesunąć ruchem jednostajnie przyspieszonym skrzynię o masie m pod górę po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem α , na drodze S , w czasie t , jeżeli współczynnik tarcia wynosi k .

$$\text{Odp. } W = m S \left[g (\sin \alpha + k \cos \alpha) + \frac{2 S}{t^2} \right].$$

3.31. Pociąg o masie m osiągnął prędkość V w czasie t . Obliczyć moc parowozu, jeżeli współczynnik tarcia wynosił k .

$$\text{Odp. } M = \frac{m V^2}{2 t} + \frac{m g k V}{2}.$$

3.32. Wagon został rozpędzony do prędkości $V_1 = 10 \text{ m/s}$ i dalej porusza się po torze poziomym, gdzie współczynnik tarcia ma wartość $k = 0,02$. Obliczyć, po jakim czasie na skutek hamowania zmniejszy swoją prędkość do wartości $V_2 = 4 \text{ m/s}$.

$$\text{Odp.} \quad t = \frac{V_1 - V_2}{g k} \quad t = 30 \text{ s.}$$

3.33. (xx 1990) Z równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α zsuwa się niewielki prostopadłościenny klocek z wysokości h . W końcu tego ruchu zderza się z przeszkodą prostopadłą do równi. Zakładając, że zderzenie to jest doskonale sprężyste, określić na jaką wysokość wzniesie się klocek po odbiciu, jeżeli współczynnik tarcia o równię wynosi k .

$$\text{Odp.} \quad h_x = h \frac{\sin \alpha - k \cos \alpha}{\sin \alpha + k \cos \alpha}.$$

3.34. Kulka o masie m lecąca poziomo uderza w powierzchnię klina o masie M w taki sposób, że odskakuje pionowo w górę na wysokość h . Obliczyć szybkość, jaką uzyskał klin w wyniku zderzenia, zakładając, że było ono doskonale sprężyste i tarcia klina o powierzchnię poziomą nie uwzględniamy.

$$\text{Odp.} \quad V = m \sqrt{\frac{2 g h}{M(M - m)}}.$$

3.35. (xx 1975) Kulkę o masie $m = 10 \text{ kg}$ wyrzucono pod pewnym kątem do poziomu. Kulka ta spadła na tym samym poziomie, z którego została wyrzucona po czasie $t = 4 \text{ s}$. Obliczyć zasięg rzutu kulki, jeżeli na jej wyrzucenie została wykonana praca $W = 2125 \text{ J}$. Przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$ oraz zaniedbać opór powietrza.

$$\text{Odp.} \quad d = t \sqrt{\frac{2 W}{m} - \frac{g^2 t^2}{4}} \quad d = 20 \text{ m.}$$

3.36. (xx 1982) Do wody o gęstości ρ_w wpada z wysokości H kulka o gęstości $\rho < \rho_w$. Obliczyć, na jaką głębokość się zanurzy oraz czas jej powrotu od miejsca największego zanurzenia do powierzchni wody. Pominąć lepkość i napięcie powierzchniowe wody, przyspieszenie ziemskie wynosi g .

$$\text{Odp.} \quad h = \frac{\rho H}{\rho_w - \rho}, \quad t = \frac{\rho}{\rho_w - \rho} \sqrt{\frac{2 H}{g}}.$$

3.37. Obliczyć, z jakiej wysokości powinien rozpocząć zsuwanie się bez prędkości początkowej klocek po równi pochyłej zakończonej pętlą w kształcie okręgu o promieniu r , aby przeleciał przez pętlę nie odrywając się od niej. Tarcie zaniedbujemy.

$$\text{Odp.} \quad h = \frac{5}{2} r.$$

3.38. (xx 1978) Na nieważkiej i nierozciągliwej linie o długości L zawieszono pistolet sprężynowy o masie m w pozycji poziomej. Obliczyć maksymalny kąt wychylenia linki po wystrzale, jeżeli kula o masie M przy wylocie z lufy miała prędkość V . Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

$$\text{Odp.} \quad \cos \alpha = 1 - \frac{m^2 V^2}{2 M^2 g L}.$$

3.39. (xx 1975) Dwa ciała o jednakowych masach $m = 4 \text{ kg}$, poruszają się po płaszczyźnie poziomej wzdłuż tej samej prostej i zderzają się doskonale niesprężysto. Prędkości ciał mają zwroty przeciwne oraz wartości $V_1 = 3 \text{ m/s}$ i $V_2 = 8 \text{ m/s}$, w chwili zderzenia. Obliczyć ilość wydzielonego ciepła podczas zderzenia oraz drogę jaką przebędą ciała od chwili zderzenia do zatrzymania się, jeżeli współczynnik tarcia ciał o podłoże wynosi $k = 0,1$. Przyspieszenie ziemskie można przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\begin{aligned} \text{Odp.} \quad Q &= \frac{m}{4} (V_1 + V_2)^2 & Q &= 121 \text{ J.} \\ S &= \frac{(V_2 - V_1)^2}{8 k g} & S &= 3,1 \text{ m.} \end{aligned}$$

3.40. (xx 1990) Pocisk lecący poziomo trafił w kulę zawieszoną na sztywnym pręcie o znikomej masie i utkwiał w niej. Masa pocisku wynosi m , masa kuli M , odległość od zawieszenia pręta do środka kuli jest L . Obliczyć jaka powinna być wartość prędkości pocisku, aby kula na skutek zderzenia z pociskiem podniosła się do najwyższego punktu łuku okręgu zatoczonego przez kulę (na wysokość $2L$)

$$\text{Odp.} \quad V_x = \frac{2(m+M)}{m} \sqrt{g L}.$$

Zadania testowe

3.41. (xx 1998) Na ciało o masie $m = 20$ kg działa siła $F_1 = 700$ N. Jakie przyspieszenie uzyska to ciało, jeżeli opory ruchu łącznie z tarcie wynoszą $F_2 = 400$ N?

3.42. (x 1986) Ciało o masie $m = 1$ kg spoczywa na poziomej płaszczyźnie. Jaką siłę należy przyłożyć do tego ciała w kierunku poziomym ażeby utrzymać je w ruchu jednostajnym prostoliniowym, jeżeli współczynnik tarcia wynosi $k = 0,1$, a przyspieszenie $g = 10$ m/s².

3.43. (xx 1999) Ciało o ciężarze $P = 30$ N spada w powietrzu pionowo w dół z przyspieszeniem $a = 8$ m/s². Jaka jest siła oporu powietrza, jeżeli przyjmujemy przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s².

3.44. (xx 1998) Jaką siłą działa skoczek o ciężarze $P = 700$ N na linki spadochronu spadającego ze stałą prędkością $V = 8$ m/s?

3.45. (x 1987) Ciało ześlizguje się po równi pochyłej ruchem jednostajnym. Ile wynosi współczynnik tarcia, jeżeli kąt nachylenia równi wynosi α ?

3.46. (xx 1981) Dysponując deską, klockiem i linijką, zaproponuj doświadczenie pozwalające wyznaczyć współczynnik tarcia klocka o deskę.

3.47. Ile wynosi współczynnik tarcia łyżew o lód, jeżeli rozpędzony łyżwiarz do prędkości $V_1 = 8$ m/s zmniejszył swoją prędkość, na skutek tarcia, do prędkości $V_2 = 6$ m/s na drodze $S = 30$ m?

3.48. (1991) Autobus o masie $m = 5 \cdot 10^3$ kg poruszający się z prędkością $V = 10$ m/s został zahamowany na drodze $S = 12,5$ m. Zakładając, że podczas hamowania jego ruch był jednostajnie opóźniony, wyznaczyć siłę hamowania.

3.49. Łańcuch zaczął zsuwać się przy 1/3 części jego długości zwisającej ze stołu. Jaki jest współczynnik tarcia łańcucha o stół?

3.50. Jaką najmniejszą siłą musimy dociskać klocek o masie $m = 0,5$ kg do ściany, ażeby się nie zsunął w dół, jeżeli współczynnik tarcia klocka o ścianę wynosi $k = 0,3$?

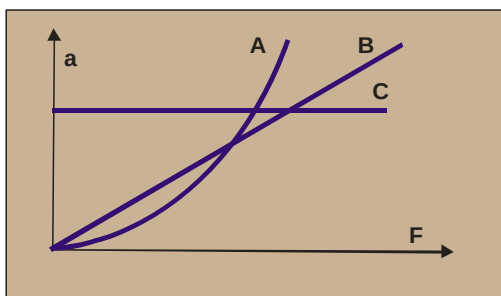
3.51. Na poruszające się z prędkością V ciało o masie m zaczęła działać siła F . Po jakim czasie prędkość ciała wzrośnie n razy?

3.52. (xx 1996) Na ciało o masie $m = 1$ kg, poruszające się z prędkością $V = 5$ m/s, działa siła hamująca. Jaka jest jej wielkość, jeżeli ruch ciała ustaje po czasie $t = 5$ s?

3.53. Jakie jest opóźnienie klocka, któremu nadano prędkość początkową V_0 w górę równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$, jeżeli współczynnik tarcia wynosi $k = 0,1$?

3.54. (xx 1991) Z równi pochyłej zaczynają zsuwać się kolejno bez tarcia dwa klocki o masach m i $2m$. Jakim ruchem poruszają się one względem siebie?

3.55. (x 1991) Który z wykresów na **rysunku 3.15.** przedstawia pewną zależność wartości przyspieszenia ciała od wartości siły działającej na to ciało?



Rys. 3.15. Który z wykresów przedstawia zależność $a = f(F)$?

3.56. (x 1988) Czy przyłożenie stałej siły niezrównoważonej do ciała o masie $M = \text{constant}$, zmieni jego pęd?

3.57. (x 1985) Pęd ciała w czasie ruchu nie ulega zmianie. Jakim ruchem porusza się to ciało ?

3.58. (x 1986, xx 1990) Pęd ciała wzrasta proporcjonalnie do czasu. Jakim ruchem porusza się to ciało?

3.59. (xx 1996) Chłopiec biegnący z prędkością V wskoczył do nieruchomej łódki i nadał jej prędkość równą $1/3$ prędkości V . Ile razy masa łódki jest większa od masy chłopca?

3.60. (xx 1998) Na stopień wagonu poruszającego się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $V_1 = 2 \text{ m/s}$, wskakuje człowiek o masie $m = 60 \text{ kg}$ w kierunku prostopadłym do ruchu wagonu. Jaka była prędkość wagonu po wskoczeniu człowieka, jeżeli masa wagonu wynosiła $M = 340 \text{ kg}$?

3.61. (x 1986) Pęd ciała o masie $m = 1 \text{ kg}$ i prędkości początkowej $V_0 = 10 \text{ m/s}$ uległ podwojeniu pod działaniem siły $F = 10 \text{ N}$. Ile wynosił czas działania siły na to ciało?

3.62. (xx 1981) (xx 1983) Jaką siłą można zatrzymać w ciągu czasu $t = 2 \text{ s}$ ciało o masie $m = 80 \text{ kg}$ poruszające się z prędkością $V = 40 \text{ m/s}$?

3.63. (xx 1986) Pocisk o masie m został wystrzelony z prędkością V_0 pod kątem α do poziomu. Ile wynosi jego pęd w najwyższym punkcie jego toru?

3.64. (x 1985) Jakiej zmianie uległ pęd kulki padającej prostopadle na powierzchnię pola o dużej masie i odbijającej się od niej doskonale sprężysto?

3.65. (xx 1996) Z monetą leżącą na gładkiej powierzchni, zderza się centralnie druga taka sama moneta, poruszająca się z prędkością V . Jakie będą prędkości monet po zderzeniu?

3.66. Piłka o masie $m = 0,5 \text{ kg}$ uderza o ścianę z prędkością $V = 5 \text{ m/s}$ i odbija się z tą samą prędkością. Z jaką średnią siłą działała na ścianę w/w piłka, jeżeli czas zderzenia wynosił $t = 0,1 \text{ s}$.

3.67. (xx 1982) Które zasady zachowawcze spełnione są podczas zderzenia a) sprężystego b) niesprężystego?

3.68. (xx 1998) Z jakim przyspieszeniem powinna poruszać się równia pochyła po płaszczyźnie poziomej, ażeby umieszczone na niej ciało nie poruszało się względem tej równi?

3.69. (x1986) Na podłodze windy leży skrzynka. Jak zmieni się ciśnienie wywierane przez tę skrzynkę na podłogę windy, gdy będzie się ona wznosić z przyspieszeniem $a = g/2$?

3.70. Jakie jest napięcie linki, za pomocą której podnosimy ciało o masie $m = 2 \text{ kg}$ z przyspieszeniem $a = 4 \text{ m/s}^2$.

3.71. (xx 1986) Człowiek stoi na wadze sprężynowej w windzie. Jak powinna poruszać się winda, ażeby wskazania wagi były dwa razy mniejsze niż w spoczynku?

3.72. (xx 1981) Winda spada z przyspieszeniem $a = g/3$. Co wskazuje znajdująca się w windzie waga sprężynowa na której spoczywa ciała o masie m ?

3.73. Sportowiec o masie $m = 60 \text{ kg}$ wspina się pionowo po linie z przyspieszeniem $a = 0,5 \text{ m/s}^2$. Jakie jest napięcie linki?

3.74. (x 1990) Podczas hamowania samochodu, pasażerowie przechylają się w kierunku jego ruchu. Jakie siły działają na pasażera w układzie związanym z Ziemią?

3.75. (xx 1998) Na autobus poruszający się na zakręcie z prędkością $V_1 = 10 \text{ m/s}$ działa siła odśrodkowa bezwładności $F = 1000 \text{ N}$. Jaka siła będzie działać na ten sam samochód, gdy zwiększy on prędkość na tym samym zakręcie do $V_2 = 20 \text{ m/s}$?

3.76. (xx 1984) Na brzegu obracającej się tarczy znajduje się klocek. Przy jakiej najmniejszej liczbie obrotów na sekundę klocek spadnie z tarczy? Dane: współczynnik tarcia k , średnica tarczy d , przyspieszenie ziemskie g .

3.77. (xx 1981) Jak zmienia się nacisk kół jadącego samochodu na wypukłym odcinku jezdni a jak na wklęsłym, w porównaniu z naciskiem na jezdni poziomej?

3.78. Z jaką prędkością powinien jechać samochód po wypukłym moście o promieniu krzywizny $r = 10 \text{ m}$, znalazł się w stanie nieważkości?

3.79. Ciężarówka o masie $m = 2,5 \text{ t}$ jedzie po moście wypukłym o promieniu krzywizny $r = 50 \text{ m}$ ze stałą prędkością $V = 54 \text{ km/h}$. Jaką siłą naciska na most przejeżdżając przez jego środek?

3.80. Z jaką maksymalną prędkością może jechać samochód na zakręcie o promieniu krzywizny $r = 10 \text{ m}$, ażeby nie wypadł z drogi, jeżeli współczynnik tarcia między kołami a szosą asfaltową wynosi $k = 0,64$?

3.81. (xx 1998) Naczynie z wodą zatacza okrąg w płaszczyźnie pionowej o promieniu $r = 0,2 \text{ m}$. Ile obrotów na sekundę powinno wykonać naczynie, ażeby woda nie wylała się?

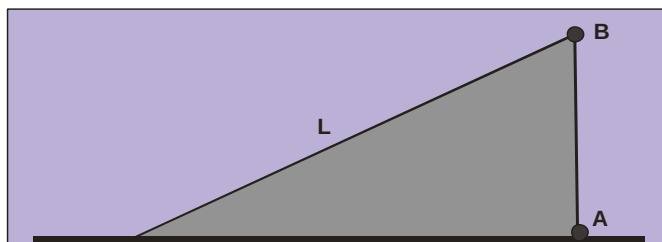
3.82. (xx 1981) Czy siła dośrodkowa może być przyczyną zmiany wartości prędkości ciała?

3.83. (xx 1998) Jaką pracę wykonamy, przesuając skrzynię o ciężarze $P = 500 \text{ N}$ na drodze poziomej $S = 10 \text{ m}$, jeżeli opory ruchu łącznie z tarciem stanowią 3% ciężaru skrzyni?

3.84. Jaką pracę wykonamy, przesuując skrzynię o ciężarze $P = 500 \text{ N}$ po drodze poziomej $S = 10 \text{ m}$, jeżeli współczynnik tarcia wynosi $k = 0,3$?

3.85. Ciało o masie $m = 10 \text{ kg}$ podniesiono na wysokość $h = 10 \text{ m}$ z przyspieszeniem $a = 2 \text{ m/s}^2$. Jaką wykonano pracę?

3.86. (1990) Jaką pracę należy wykonać, ażeby podnieść ciało z poziomu A na poziom B a) bezpośrednio, po drodze AB, b) pośrednio, używając gładkiej równi o długości L (rys. 3.16.)?



Rys. 3.16. Poziom B jest poziomem wyższym w stosunku do poziomu A

3.87. (xx 1981) Pęd ciała zwiększono trzykrotnie. Ile razy wzrosła energia kinetyczna tego ciała?

3.88. (xx 1985) Dwa ciała, których stosunek mas jest równy 3, mają jednakowe pędy ($m_1 > m_2$). Jaki jest stosunek ich energii kinetycznych?

3.89. Na jaką wysokość maksymalną wzniesie się ciało wyrzucone pionowo do góry z prędkością początkową V_0 ? Opór powietrza można pominąć.

3.90. (x 1988) Na jaką wysokość należy podnieść ciało o masie $m = 5 \text{ kg}$ ażeby zmienić jego energię potencjalną o 50 J ? Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

3.91. (xx 1987) Chłopiec o masie M stojąc na łyżwach na lodzie, wyrzucił przed siebie kamień o masie m , z prędkością V . Jaką wykonał pracę?

3.92. (xx 1981) Ciało spada swobodnie w próżni. Jaki kształt ma wykres przedstawiający zależność energii kinetycznej ciała od czasu spadania. Wykonać wykres i napisać tę zależność wzorem.

3.93. (xx 1985) Jaką pracę wykona człowiek o masie $m_1 = 70 \text{ kg}$, niosący paczkę o masie $m_2 = 10 \text{ kg}$, podczas wchodzenia na wysokość $h = 3 \text{ m}$? Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

3.94. (xx 1998) Jaka moc powinien mieć silnik samochodu, ażeby utrzymać na szosie poziomej stałą prędkość $V = 20 \text{ m/s}$, jeżeli jego masa wynosi $m = 600 \text{ kg}$, współczynnik tarcia $k = 0,02$, a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

IV. DYNAMIKA RUCHU OBROTOWEGO BRYŁY SZTYWNEJ

4.1. Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego

Zasady dynamiki słuszne są również w odniesieniu do ruchu obrotowego bryły sztywnej. W tym przypadku, w miejscu siły, występuje moment siły, a w miejscu masy – moment bezwładności. Pierwsza zasada dynamiki może, więc być wypowiedziana następująco: jeżeli na bryłę sztywną, która może obracać się wokół swobodnej osi (przechodzącej przez środek masy), działają siły, których momenty się równoważą lub nie występują, to bryła ta pozostanie w spoczynku lub będzie obracać się ze stałą prędkością kątową, tak co do wartości bezwzględnej, jak i co do kierunku. Przykładem może być stała prędkość kątowa obrotu Ziemi wokół jej osi.

4.2. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym, moment bezwładności

Jeżeli na bryłę sztywną, mogącą obracać się wokół swobodnej osi momenty sił działających nie równoważą się, to bryła ta będzie obracać się ze stałym przyspieszeniem kątowym wprost proporcjonalnym do wypadkowego momentu siły, a odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \quad (4.1)$$

Moment bezwładności (I) punktu materialnego o masie m poruszającego się po okręgu o promieniu r , jest iloczynem masy tego punktu przez kwadrat promienia, co można zapisać wzorem :

$$I = m r^2 \quad (4.2)$$

Podobnie określi się moment bezwładności obręczy lub rury, gdzie masa jest skupiona na obwodzie, a więc jest ściśle określona jej odległość od osi obrotu. Natomiast dla brył innych (krążek, tarcza, kula i inne), gdzie masa jest rozłożona w całym obszarze danego ciała, należy wziąć sumę iloczynów mas wszystkich elementów bryły przez ich kwadraty odległości od osi obrotu:

$$I = \sum m r^2. \quad (4.3)$$

Ażeby obliczyć moment bezwładności danej bryły, to masę elementu bryły zamieniamy na iloczyn gęstości przez element objętości, a sumę na całkę. W ten sposób otrzymano momenty bezwładności (względem osi przechodzącej przez środek masy) dla różnych brył jak np. dla krążka (lub walca pełnego):

$$I = \frac{1}{2} m r^2, \quad (4.4)$$

$$\text{dla kuli} \quad I = \frac{2}{5} m r^2. \quad (4.5)$$

gdzie m jest całkowitą masą bryły, r promieniem krążka lub kuli.

Bardzo często zachodzi potrzeba znać moment bezwładności danej bryły względem osi nie przechodzącej przez środek ciężkości. Wtedy stosujemy twierdzenie Steinera: mówiące nam, że moment bezwładności względem dowolnej osi, odległej od środka ciężkości o odcinek a , równa się momentowi bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości plus kwadrat odległości pomiędzy środkiem ciężkości a położeniem danej osi pomnożoną przez masę bryły (zachowując równoległość osi):

$$I' = I + m a^2 \quad (4.6)$$

4.3. Moment pędu i jego zasada zachowania

W równaniu (4.1) w miejsce przyspieszenia kąowego wstawiamy jego wartość z kinematyki:

$$\frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{M}{I}$$

$$\text{lub} \quad M t = I \omega - I \omega_0 \quad (4.7)$$

Występująca we wzorze (4.7) wielkość $I \omega$ nazywa się krętem lub momentem pędu i oznacza się literą L . Jest to wektor, leżący na osi obrotu, a jego zwrot określa się regułą prawej śruby.

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (4.8)$$

Równanie (4.7) mówi nam, że iloczyn momentu siły przez czas jego działania równa się przyrostowi momentu pędu. Z równania tego można wyliczyć jedną wielkość, gdy trzy pozostałe są dane.

P r z y k ł a d 4.1.

Koło zamachowe o promieniu $R = 10$ cm wykonuje $n = 20$ obr/s. Zatrzymuje się na skutek działających sił oporu $F = 500$ N, przyłożonych stycznie do obwodu koła, w ciągu czasu $t = 6,28$ s. Obliczyć moment bezwładności tego koła.

Prędkość końcowa wynosi zero, więc równanie (4.7) przyjmie postać:

$$M t = I \omega_0$$

$$\text{gdzie} \quad \omega_0 = 2 \pi n$$

$$M = F \cdot R.$$

Uwzględniając powyższe wyliczymy moment bezwładności:

$$I = \frac{F R t}{2 \pi n} \quad I = \frac{5}{2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Podobnie jak w ruchu prostoliniowym jest zasada zachowania pędu, tak też w ruchu obrotowym jest zasada zachowania momentu pędu, która mówi nam, że w układzie zamkniętym (takim, w którym nie występują momenty sił zewnętrznych), całkowity moment pędu jest stały:

$$I \omega = \text{constans} \quad (4.9)$$

Ponieważ moment bezwładności może się zmienić jak np. łyżwiarza wykonującego piruet na lodzie, przez oddalenie lub przybliżenie rąk i nóg względem osi obrotu, to może się zmienić przez to prędkość kątowna. Prędkość kątowna rośnie, gdy moment bezwładności maleje. Można, więc powiedzieć, że prędkość kątowna jest odwrotnie proporcjonalna do momentu bezwładności:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad (4.10)$$

Trzecia zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły, może być wypowiedziana następująco: jeżeli na bryłę obracającą się wokół swobodnej osi, z prędkością kątowną ω , zadziała moment siły, to bryła ta będzie oddziaływać takim samym momentem siły ale przeciwnie skierowanym.

Jeżeli np. człowiek siedzący na krześle obrotowym, trzymający koło rowerowe w płaszczyźnie poziomej, wprawi je w ruch obrotowy wokół osi pionowej, to sam zacznie obracać się w kierunku przeciwnym.

4.4. Energia kinetyczna bryły w ruchu obrotowym

Bryła sztywna będąca w ruchu obrotowym, posiada pewną energię kinetyczną, którą obliczamy biorąc sumę energii kinetycznych poszczególnych elementów bryły:

$$E_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

gdzie

$$V_1 = \omega r_1.$$

Mamy więc:

$$E_1 = \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2},$$

dla drugiego elementu:

$$E_2 = \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2},$$

dla n- tego:

$$E_n = \frac{m_n \omega^2 r_n^2}{2}.$$

Całkowita energia kinetyczna bryły będzie sumą poszczególnych energii:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2).$$

Prędkość kątowna ω jest jednakowa dla wszystkich elementów bryły, dlatego też została wyłączona przed nawias. Wielkość w nawiasie jest momentem bezwładności całej bryły. Mamy więc ostatecznie:

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Zadania rozwiązane

4.1. (x 1988) Na jednorodny walec o promieniu R i masie m_0 osadzonym na poziomej osi obrotu przechodzącej przez oś walca, nawinięto nieważką i nierozciągliwą nić, do końca której przyczepiono ciało o masie m . Obliczyć przyspieszenie, z jakim będzie poruszać się ciało, oraz siłę naciągu nici, jeżeli moment bezwładności walca wynosi $I = \frac{1}{2} m_0 R^2$ a przyspieszenie ziemskie g .

Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego bryły mamy:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

gdzie M jest momentem siły powodującym obrót walca, który wyrazi się wzorem:

$$M = (m g - m a) R,$$

gdzie ma jest siłą bezwładności, działającą na poruszający się w dół ciężarek z przyspieszeniem a .

Przyspieszenie kątowe ε wyrażamy przez przyspieszenie liniowe a , za pomocą wzoru:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Uwzględniając powyższe otrzymamy:

$$\frac{a}{R} = \frac{(m g - m a) R}{\frac{1}{2} m_0 R^2},$$

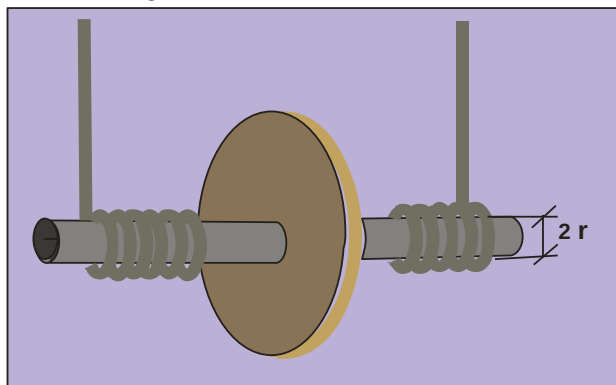
skąd wyliczymy szukane przyspieszenie:

$$a = g \frac{2 m}{2 m + m_0}.$$

Siła naciągu nici wyrazi się wzorem:

$$N = m g - m a.$$

4.2. (xx 1988) Koło osadzone na osi w kształcie walca o promieniu $r = 5 \text{ mm}$ podtrzymywane jest dwiema linkami umocowanymi jak pokazuje **rys. 4.1**. Oś obrotu koła jest pozioma. Linki stopniowo odwijają się a koło obniża się. Obliczyć siłę N napinającą każdą z linek, jeżeli masa koła wraz z osią wynosi $m = 1 \text{ kg}$ moment bezwładności $I = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.



Rys. 4.1. Koło spadające z przyspieszeniem a

Napężenie obu nici wyrazi się wzorem:

$$N = m g - m a,$$

gdzie m jest masą koła, a a przyspieszeniem liniowym koła, które wyliczymy ze wzoru:

$$a = \varepsilon r,$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym koła, które wyliczymy z drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego:

$$\varepsilon = \frac{M}{I},$$

gdzie M jest momentem siły względem osi obrotu, napinającej linkę:

$$M = N r.$$

Mamy więc:

$$a = \frac{N r^2}{I}.$$

Uwzględniając powyższe zależności otrzymamy:

$$N = \frac{m g}{1 + \frac{m r^2}{I}}.$$

Natomiast szukane naprężenie jednej linki będzie:

$$N_1 = \frac{m g}{2 \left(1 + \frac{m r^2}{I} \right)}.$$

4.3. (xx 1978) Z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ do poziomu, stacza się bez poślizgu jednorodny walec o masie $m = 0,3\text{kg}$. Obliczyć wartość działającej w tym ruchu siły tarcia. Moment bezwładności walca względem osi geometrycznej wyraża się wzorem: $I = \frac{1}{2} m R^2$, przyspieszenie ziemskie

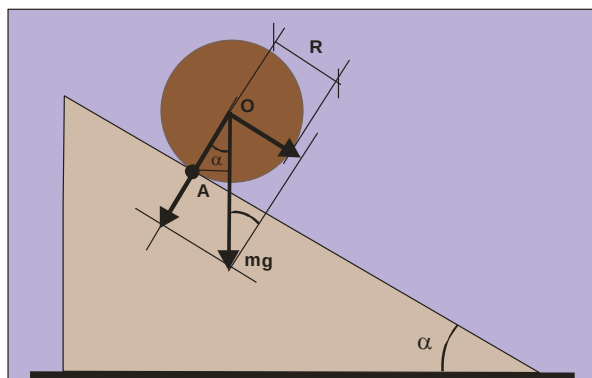
$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego mamy:

$$mg \sin \alpha - T = m a.$$

W celu obliczenia przyspieszenia liniowego a , korzystamy z tego, że toczenie się walca po równi pochyłej jest spowodowane działaniem momentu siły ciężkości względem punktu styczności walca z równią. Moment ten wyraża się wzorem: (**rys. 4.2**)

$$M = m g R \sin \alpha.$$



Rys. 4.2. Toczenie się walca po równi pochyłej jest spowodowane działaniem momentu siły ciężkości względem punktu A

Ale z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego, ten sam moment siły wyrazi się wzorem:

$$M = \varepsilon I_A,$$

gdzie ε – jest przyspieszeniem kątowym ruchu obrotowego walca względem osi obrotu, I_A jest momentem bezwładności walca względem punktu styczności walca z równią.

Korzystając z zasady Steinera otrzymamy:

$$I_A = I_0 + m R^2$$

Mamy więc: $\varepsilon (I_0 + m R^2) = m g R \sin \alpha$.

Uwzględniając, że $\varepsilon = \frac{a}{R}$ wyznaczmy przyspieszenie a :

$$a = \frac{m g R^2 \sin \alpha}{I_0 + m R^2}.$$

Biorąc pod uwagę, że $I_0 = \frac{1}{2} m R^2$, wyznaczmy szukaną siłę tarcia:

$$T = \frac{1}{3} m g \sin \alpha, \quad T = 0,5 \text{ N}.$$

4.4. (xx 1975) Z jednakowej wysokości staczają się bez poślizgu po równi pochyłej dwa walce: jeden pełny a drugi wydrążony (np. rura grubościenna), o tym samym promieniu i masie. Obliczyć ich stosunek prędkości końcowych, jeżeli moment bezwładności względem osi podłużnej walca pełnego jest dwa razy mniejszy niż walca wydrążonego.

Energia potencjalna walca staczającego się, przechodzi w energię kinetyczną ruchu postępowego i obrotowego. Można więc napisać dwa równania dla obu walców:

$$m g h = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2,$$

$$m g h = \frac{1}{2} m V_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2.$$

gdzie $\omega_1 \omega_2$ są prędkościami kątowymi walców przy końcu ruchu. Należy je wyrazić w funkcji prędkości liniowych:

$$\omega_1 = \frac{V_1}{r}, \quad \omega_2 = \frac{V_2}{r}.$$

Uwzględniając, że $I_1 = \frac{1}{2} I_2$

oraz, że $I_2 = m r^2$ i po podzieleniu stronami równań wyjściowych otrzymamy:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

4.5. (xx 1979) Na cienkościennej obręcz o masie $M = 9,3 \text{ kg}$ nawinięto nić, której koniec przymocowano do sufitu windy. Podczas ruchu windy do góry z przyspieszeniem $a = g/3$ obręcz odwija się z nawiniętej na nią nici. Obliczyć przyspieszenie osi obręczy względem windy, oraz siłę napinającą nić. Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Sposób I. Obliczamy przyspieszenie, z jakim opada oś obręczy w przypadku, gdy winda jest w spoczynku, korzystając z zasady zachowania energii: energia potencjalna obręczy równa się sumie energii kinetycznej ruchu prostoliniowego i energii kinetycznej ruchu obrotowego:

$$m g h = \frac{m V^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2},$$

gdzie $h = \frac{a t^2}{2}$ $I = m r^2$ $\omega = \frac{V}{t}$.

Mamy więc: $g \frac{a t^2}{2} = \frac{V^2}{2} + \frac{V^2}{2}$.

Uwzględniając, że $V = a t$, otrzymamy:

$$a = \frac{g}{2}.$$

Jeżeli winda porusza się do góry, to do przyspieszenia ziemskiego w ostatnim wzorze należy dodać przyspieszenie windy:

$$a_x = \frac{g + \frac{g}{3}}{2} \quad \text{lub} \quad a_x = \frac{2}{3} g.$$

Napięcie nici wyliczymy ze wzoru:

$$T = m a_x \quad \text{lub} \quad T = \frac{2}{3} m g.$$

Sposób II. Wychodzimy z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego bryły:

$$\varepsilon = \frac{M}{I},$$

gdzie M jest momentem siły, który w naszym przypadku wyrazi się wzorem:

$$M = (m g + m a) r,$$

I jest momentem bezwładności względem punktu styczności obręczy z nicią:

$$I = m r^2 + m r^2.$$

Uwzględniając powyższe zależności oraz to, że $\varepsilon = \frac{a_x}{r}$ i $a = \frac{g}{3}$,

otrzymamy:
$$a_x = \frac{g + \frac{g}{3}}{2} \quad \text{lub} \quad a_x = \frac{2}{3} g.$$

4.6. (xx 1979) Nieważka i nierozciągliwa nić o długości L_0 jest zamocowana jednym końcem na stałe. Do drugiego jej końca doczepiono małe ciało o masie m . Ciało to porusza się bez tarcia po poziomej płaszczyźnie z prędkością V_0 , zataczając okrąg o promieniu L_0 . Obliczyć pracę jaką należy wykonać ażeby skrócić długość nici o ΔL , ściągnając ją ku środkowi okręgu.

Szukana praca równa się różnicy energii kinetycznych:

$$W = \frac{m V^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2},$$

gdzie V – jest prędkością ciała po skróceniu nici.

W celu jej wyznaczeniu układamy drugie równanie w oparciu o zasadę zachowania momentu pędu:

$$m V_0 L_0 = m V (L_0 - \Delta L),$$

skąd:
$$V = \frac{V_0 L_0}{L_0 - \Delta L}.$$

Po podstawieniu tej wartości do równania wyjściowego, otrzymamy szukaną pracę:

$$W = \frac{m V_0^2 (2 L_0 \Delta L - \Delta L^2)}{2 (L_0 - \Delta L)^2}.$$

4.7. (xx 1978) Cienki jednorodny, pionowo ustawiony słup o wysokości $L = 4,8$ m znajduje się na poziomej płaszczyźnie. Po podpiłowaniu go u podstawy pada na ziemię. Obliczyć prędkość końca słupa w momencie uderzenia o podłoże zakładając, że dolny jego koniec pozostaje nieruchomy. Przyspieszenie ziemskie można przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$. Moment bezwładności słupa względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego podstawę wyrazi się wzorem:

$$I = \frac{1}{3} m L^2.$$

Energia potencjalna środka ciężkości słupa będzie się równać energii kinetycznej ruchu obrotowego słupa wokół podstawy w momencie uderzenia o poziomą płaszczyznę:

$$m g \frac{L}{2} = \frac{I \omega^2}{2},$$

gdzie $I = \frac{1}{3} m L^2, \quad \omega = \frac{V}{L}.$

Mamy więc: $m g L = \frac{1}{3} m L^2 \frac{V^2}{L^2},$

skąd: $V = \sqrt{3 g L} \quad V = 12 \text{ m/s}.$

4.8. (x 1989) Obliczyć, jaką pracę należy wykonać ażeby jednorodną kulę o masie $m = 100 \text{ kg}$ wprowadzić w toczenie się po płaskiej powierzchni z prędkością $V = 2 \text{ m/s}$. Moment bezwładności kuli wynosi $I = \frac{2}{5} m R^2$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$. Szukana praca równa się sumie nabytych energii: kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego.

$$W = \frac{m V^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}.$$

Uwzględniając, że $I = \frac{2}{5} m R^2$ oraz, że $\omega = \frac{V}{R},$

otrzymamy: $W = \frac{7}{10} m V^2 \quad W = 280 \text{ J}.$

4.9. Obręcz o masie m i promieniu R stacza się bez poślizgu z równi pochyłej o długości S i kącie nachylenia α . Obliczyć moment bezwładności obręczy względem jej środka, jeżeli prędkość końcowa na drodze S wynosi V .

Energia potencjalna obręczy zamienia się na energię kinetyczną ruchu postępowego i obrotowego:

$$m g h = \frac{m V^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2},$$

gdzie $h = S \sin \alpha, \quad \omega = \frac{V}{R}.$

Uwzględniając powyższe zależności, wyliczymy szukany moment bezwładności obręczy:

$$I_0 = \frac{m R^2}{V^2} (2 g S \sin \alpha - V^2).$$

Z a d a n i a u z u p e ł n i a j a c e

4.10. (xx 1976) Walec o promieniu R osadzono na poziomej osi. Następnie, nawinięto na niego cienką nierozciągliwą nić i do jej końca umocowano odważnik o masie m . W ciągu czasu t od chwili rozpoczęcia ruchu odważnik przebył drogę S . Obliczyć moment bezwładności walca oraz siłę napinającą nić. Występujące opory można pominąć, przyspieszenie ziemskie przyjąć g .

$$\text{Odp.} \quad I = m R^2 \left(\frac{g t^2}{2 S} - 1 \right), \quad T = m g - m \frac{2 S}{t^2}.$$

4.11. (xx 1980) Przez błądzek o masie $m_1 = 200$ g osadzonym na poziomej osi obrotu przerzucono nić, na końcach której zaczepiono ciężarki o masach $m_2 = 100$ g każdy. Po doczepieniu z jednej strony dodatkowego ciężarka o masie $m_3 = 50$ g, ciężarki poruszały się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Obliczyć przyspieszenie układu oraz siły napinające nitki, jeżeli moment bezwładności błądzka jest $I = \frac{1}{2} m r^2$ a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp.} \quad a = \frac{2 m_3 g}{4 m_2 + 2 m_3 + m_1} \quad a = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$T_1 = g \frac{m_2 (4 m_3 + 4 m_2 + m_1)}{4 m_2 + 2 m_3 + m_1} \quad T_1 = 1,14 \text{ N},$$

$$T_2 = g \frac{(m_2 + m_3)(4 m_2 + m_1)}{4 m_2 + 2 m_3 + m_1} \quad T_2 = 1,3 \text{ N}.$$

4.12. (xx 1980) Z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ stacza się bez poślizgu cienkościenna obręcz o promieniu $R = 0,2$ m. Obliczyć przyspieszenie kątowe obręczy, przyjmując przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Odp. $\varepsilon = \frac{g \sin \alpha}{2 R} \quad \varepsilon = 12,5 \frac{1}{s^2}.$

4.13. Obręcz stacza się bez poślizgu po równi pochyłej, przy sile tarcia odpowiednio dużej. Jeśli natomiast tarcie nie występuje, to obręcz ześlizguje się swobodnie, a nie toczy. Obliczyć stosunek prędkości końcowych przy ześlizgiwaniu się obręczy do prędkości końcowej przy jej toczeniu się.

Odp. $\frac{V_s}{V_t} = \sqrt{2}.$

4.14. (xx 1977) Koło o promieniu R i momencie bezwładności I obraca się z częstością n . Do obwodu koła przyciśnięto klocek hamulcowy siłą F skierowaną wzdłuż promienia, na skutek czego zatrzymało się ono po upływie czasu t . Obliczyć współczynnik tarcia pomiędzy klockiem a kołem.

Odp. $k = \frac{2 \pi n I}{F R t}.$

4.15. (xx 1982) Z wierzchołka równi pochyłej o wysokości $h = 0,6$ m zjeżdża wózek, którego masa bez kół wynosi $m_1 = 1$ kg, a cztery koła mają postać walców o masie $m_2 = 0,5$ kg każde. Moment bezwładności walca względem osi geometrycznej wynosi $I = \frac{1}{2} m_2 r^2$. Obliczyć prędkość wózka u podstawy równi, jeżeli prędkość początkowa jest równa zero a przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Odp. $V = \sqrt{\frac{2(m_1 + 4 m_2) g h}{m_1 + 6 m_2}} \quad V = 3 \text{ m/s}.$

4.16. Po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ stacza się bez poślizgu kula. Obliczyć prędkość liniową środka kuli po upływie czasu $t = 2$ s, jeżeli prędkość początkowa równała się zero, a moment bezwładności kuli wyraża się wzorem: $I = \frac{2}{5} m r^2$. Przyspieszenie ziemskie przyjmując $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Odp. $V = \frac{5}{7} g t \sin \alpha \quad V = \frac{50}{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.17. Po równi pochyłej, pod górę, wtaczają się z tą samą prędkością początkową V obręcz i pełny krążek. Obliczyć, która z tych brył wtoczy się wyżej.

Odp. Wyżej wtoczy się obręcz
$$h_{\text{obr}} = \frac{V^2}{g}, \quad h_{\text{kr}} = \frac{3}{4} \frac{V^2}{g}.$$

4.18. Obliczyć czas spadania szpulki z rozwijającą się nicią, której koniec trzymamy nieruchomo w ręku na wysokości h nad podłogą. Szpulka ma postać walca o momencie bezwładności $I = \frac{1}{2} m r^2$. Przyspieszenie ziemskie g .

Odp.
$$t = \sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

4.19. (xx 1989) Kulka staczająca się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$, uderza w płaszczyznę poziomą i odbija się na wysokość $H = 12,5$ cm. Zaniedbując tarcie kinetyczne i zakładając, że zderzenie jest doskonale sprężyste, znaleźć drogę L , jaką przebyła kulka wzdłuż równi pochyłej. Moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez środek masy $I = \frac{2}{5} m r^2$. Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Odp.
$$L = 1,4 \frac{H}{\sin^3 \alpha} \quad L = 1,4 \text{ m}.$$

4.20. Kula o promieniu r stacza się bez poślizgu po równi pochyłej zakończonej pętlą o promieniu R . obliczyć, z jakiej wysokości powinna staczać się, ażeby przeszła przez pętlę nie odrywając się od niej.

Odp.
$$h = 2,7 (R - r)$$

Zadania testowe

4.21. (x 1987) Ciało obracające się ruchem jednostajnym wykonuje dwa obroty w czasie $t = 6,28$ s. Jaka będzie prędkość kątowa tego ciała?

4.22. (x 1990) Napisać wzorem oraz podać treść drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego bryły.

4.23. (xx 1987) Bryła sztywna wiruje wokół osi przechodzącej przez jej środek masy. Moment pędu i moment bezwładności bryły względem osi przechodzącej przez środek masy wynoszą odpowiednio L i I . Jaki będzie okres obrotu tej bryły?

4.24. (xx 1998) Dany jest kwadrat o boku $a = 0,1$ m, w wierzchołkach którego znajdują się kule o masach $m = 1$ kg każda. Jaki będzie moment bezwładności względem osi a) jako przekątnej kwadratu, b) jako jednego z boków? Uwzględniamy tylko masy kul.

4.25. Moment bezwładności kuli o masie m i promieniu R , względem osi przechodzącej przez jej środek $I = \frac{2}{5} m R^2$. Jaki będzie moment bezwładności tej kuli względem osi stycznej do powierzchni kuli?

4.26. Obręcz o masie m i promieniu R obraca się swobodnie wokół osi przechodzącej przez jej środek z częstością n . Jaki jest potrzebny moment siły przyłożonej stycznie do obręczy ażeby zatrzymać ją w czasie t ?

4.27. Obręcz o masie m toczy się rozpędem po drodze poziomej z prędkością V . Jaką siłą można ją zatrzymać na drodze S ?

4.28. Koło zamachowe o promieniu $R = 0,314$ m i masie (skupionej na obwodzie) $m = 10$ kg zostało zatrzymane w czasie $t = 2$ s siłą $F = 20$ N, przyłożoną stycznie do obwodu. Ile wykonało obrotów na sekundę?

4.29. Moc silnika napędzającego koło zamachowe wynosi $P = 200$ W. Moment bezwładności tego koła $I = 0,2$ kg m^2 . Po upływie jakiego czasu koło to uzyska prędkość kątową $\omega = 30$ 1/s?

4.30. (x 1985) Energia wirującego ciała wzrosła trzykrotnie. Jakiej zmianie uległa liczba obrotów w jednostce czasu tego ciała?

4.31. (xx 1986) Kula o promieniu R i momencie bezwładności I toczy się z prędkością V . Ile wynosi energia kinetyczna ruchu obrotowego tej kuli?

4.32. (xx 1981) Ile razy wzrośnie energia kinetyczna wirującej bryły, jeżeli jej okres obrotu zmaleje dwukrotnie?

4.33. (xx 1982) Ile razy wzrośnie energia kinetyczna wirującej bryły, jeżeli częstość obrotów wzrośnie dwukrotnie?

4.34. (xx 1998) Jaką pracę należy wykonać ażeby koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 6$ kg m^2 rozpędzić tak, aby wykonywało $n = 240$ obr/min?

V. GRAWITACJA

5.1. Prawo powszechnego ciążenia

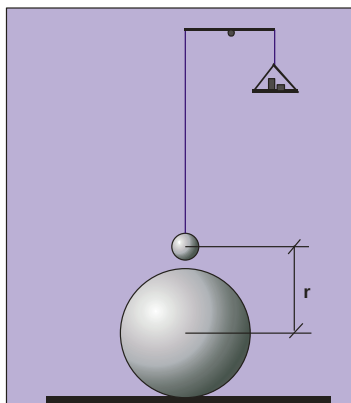
Prawo powszechnego ciążenia zostało odkryte przez Newtona, podczas rozważania sił działających między księżycem a Ziemią. Zostało ono uogólnione na jakiegokolwiek dwa ciała i nazwane prawem powszechnego ciążenia: dwa ciała o masach m_1 i m_2 przyciągają się wzajemnie siłą, której wartość bezwzględna jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ich środkami:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (5.1)$$

Powyższy wzór jest słuszny tylko dla punktów materialnych lub ciał w kształcie kul, dla których można przyjąć, że masy są skupione w ich środkach.

G jest stałą grawitacji. Jest to siła, z jaką przyciągają się wzajemnie dwa ciała o masie po jednym kg, każde z odległości jednego m. Stała grawitacji została zmierzona po raz pierwszy w 1881 r. przez Jollego w sposób następujący. Zawiesił on na długiej linie, przyczepionej do jednej szalki wagi, kulkę o znanej masie. Po zrównoważeniu jej ciężaru, złożył dużą kulę ołowianą o średnicy jednego metra tuż pod kulą pierwszą (**rys.5.1**). Równowaga została zachwiana na skutek wzajemnego przyciągania się kul. Ciężar dołożonych odważników do uzyskania ponownej równowagi stanowił siłę oddziaływania grawitacyjnego. Znając masę kul i odległość pomiędzy ich środkami, można było korzystając ze wzoru (5.1) wyliczyć stałą grawitacji G :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \quad (5.2)$$



Rys. 5.1. Po podstawieniu dużej kuli pod kulkę małą nastąpiło zakłócenie równowagi. Ciężar dołożonych odważników do uzyskania ponownej równowagi jest równy sile przyciągania pomiędzy kulami

5.2. Ciężar ciała

Ponieważ stała grawitacji jest bardzo mała, dlatego nie obserwujemy przyciągania się ciał nas otaczających. Ale gdy masa jakiegoś ciała będzie bardzo duża, jak np. masa Ziemi, to wtedy przyciąganie między Ziemią a danym ciałem będzie zauważalne. Będzie to ciężar danego ciała. Ciężarem, więc danego ciała nazywamy siłą, z jaką Ziemia przyciąga dane ciało. Ale w rzeczywistości jest to siła wzajemnego przyciągania się pomiędzy danym ciałem a Ziemią. Ponieważ jednak masa Ziemi jest bardzo duża w porównaniu z masą ciała, więc Ziemia oczywiście pozostaje nieruchoma, a dane ciało będzie "spadać" na Ziemię.

Ciężar ciała wyrazi się więc wzorem (5.1):

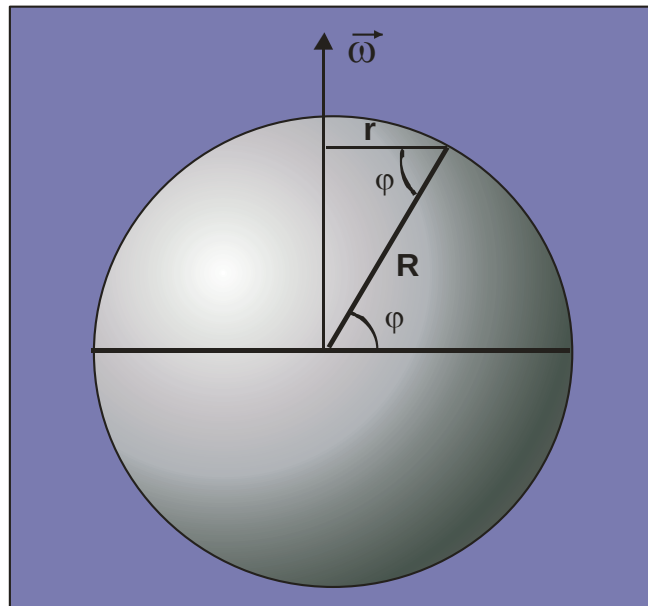
$$F = G \frac{M m}{r^2} \quad (5.3)$$

gdzie M – jest masą Ziemi

m – jest masą danego ciała,

r – odległością danego ciała od środka Ziemi.

Widać, że ciężar ciała maleje w miarę oddalania się od Ziemi i w odległości nieskończenie dużej staje się równy zero tzn, że dane ciało nie będzie przyciągane przez Ziemię, natomiast jego masa przez to się nie zmieni – pozostanie stałą.



Rys. 5.2. Ciężar danego ciała równy jest sile przyciągania ziemskiego, minus siła bezwładności – odśrodkowa, na danej szerokości geograficznej.

Ciężar ciała zmienia się też z szerokością geograficzną. Maleje, gdy zbliżamy się do równika, ponieważ na skutek ruchu obrotowego Ziemi działa na dane ciało siła bezwładności – odśrodkowa, zmniejszająca jego ciężar.

Ciężar ciała na danej szerokości geograficznej wyrazi się, więc wzorem:

$$F = G \frac{m M}{R^2} - m \omega^2 r \quad (5.4)$$

gdzie R – jest promieniem Ziemi,

ω – jest prędkością kątową ruchu obrotowego Ziemi,

r – odległością ciała od osi obrotu Ziemi, która wyraża się wzorem (**rys.5.2**):

$$r = R \cos \varphi$$

φ – jest szerokością geograficzną.

Niezależnie od ruchu obrotowego Ziemi, na biegunie ciężar ciała jest nieco większy z powodu niewielkiego „spłaszczenia” Ziemi.

P r z y k ł a d 5.1 (xx 1975)

Na równiku pewnej planety ciało waży o 1/10 mniej niż na biegunie. Gęstość planety ρ , a stała grawitacji G . Obliczyć okres obrotu tej planety dookoła własnej osi, zakładając, że planeta jest jednorodną kulą.

Ciężar ciała na równiku można wyliczyć wzorem (5.4):

$$F_r = G \frac{M m}{R^2} - m \omega^2 R .$$

Na równiku dane ciało waży mniej o 1/10 niż na biegunie. Warunek ten zapisujemy w postaci następującego równania:

$$G \frac{M m}{R^2} - m \omega^2 R = G \frac{M m}{R^2} - \frac{1}{10} G \frac{M m}{R^2} \quad \text{lub} \quad \omega^2 R = \frac{1}{10} G \frac{M}{R^2} .$$

Wyrażając masę planety w zależności od jej gęstości:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho ,$$

oraz uwzględniając, że $\omega = \frac{2\pi}{T}$, obliczymy szukany okres obrotu planety:

$$T = \sqrt{\frac{30 \pi}{G \rho}} .$$

5.3. Sztuczne księżyce

Ażeby jakiekolwiek ciało o dowolnej masie poruszało się po okręgu wokół Ziemi, to siła dośrodkowa potrzebna do tego ruchu powinna równać się sile przyciągania danego ciała przez Ziemię, co można zapisać w postaci następującego równania:

$$G \frac{M m}{(R + h)^2} = \frac{m V^2}{R + h},$$

gdzie h – jest wysokością nad Ziemią na której ma krążyć sztuczny księżyc.

Z powyższego równania możemy wyliczyć prędkość jaką trzeba nadać ciału, aby krążyło wokół Ziemi na wysokości h :

$$V = \sqrt{\frac{G M}{R + h}} \quad (5.5)$$

Prędkość tę nazywa się pierwszą prędkością kosmiczną i największa jej wartość (dla $h = 0$) wynosi $V = 7,9$ km/s. Ze wzoru (5.5) wynika, że im dalej od Ziemi ma krążyć sztuczny księżyc, tym może mieć mniejszą prędkość, np. nasz naturalny Księżyc ma prędkość $V_k = 1,03$ km/s, ale wymaga to większej energii żeby wynieść dane ciało na większą odległość od Ziemi.

Sztuczny księżyc umieszcza się na żądanej orbicie za pomocą rakiety, która startuje pionowo do góry i na określonej wysokości pewna część tej rakiety doznaje impulsu w kierunku prostopadłym do ruchu rakiety. Część ta będąca stopniem rakiety jest sztucznym Księżycem.

Aby ruch Księżycza odbywał się stale, bez użycia paliwa, nie mogą działać żadne siły oporu, jak np. oporu powietrza, co ma miejsce dopiero poza atmosferą ziemską, tzn. na wysokości wyższej od 1000 km.

Sztuczny księżyc nazywa się też czasami satelitą lub sputnikiem. Pierwszy sputnik został umieszczony na orbicie okołoziemskiej, przez Związek Radziecki dn. 4.IV.1957 r. Posiadał on okres obiegu $T = 96$ min. Masę $m = 83$ kg, był w kształcie kuli o średnicy $d = 58$ cm i krążył na wysokości $h = 900$ km. Spadł na Ziemię dnia 14.IV.1958 r.

Satelity mogą stanowić stacje kosmiczne, stacje przekaźnikowe audycji telewizyjnych, mogą też służyć do celów wojskowych.

5.4. Pole grawitacyjne

Każde ciało o masie M wytwarza wokół siebie pole grawitacyjne, tzn. obszar w którym można zauważyć siłę działającą na ciało próbne o masie m . Pole grawitacyjne jak każde inne pole określone jest przez dwie wielkości: natężenie pola i potencjał.

Natężeniem pola w danym jego punkcie, nazywamy stosunek siły działającej na ciało próbne o masie m do masy tego ciała.:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (5.6)$$

W celu określenia natężenia pola grawitacyjnego wytworzonego przez ciało punktowe lub kuliste w zależności od masy tego ciała, które wytwarza pole, a nie od masy ciała próbnego i siły działającej na nie, należy w miejsce siły $\vec{F}$ wstawić siłę oddziaływania pomiędzy ciałem wytwarzającym pole, a ciałem próbnym (wzór 5.1). Otrzymamy wtedy drugi wzór na natężenie pola grawitacyjnego, którego wartość liczbową jest:

$$\vec{\gamma} = G \frac{M}{r^2} \quad (5.7)$$

gdzie M – jest masą ciała wytwarzającego pole,
 r – odległością danego punktu pola od środka ciała o masie M .

Wzór (5.7) określa tylko wartość bezwzględną natężenia pola, gdyż jest ono wielkością wektorową. W zapisie wektorowym wzór (5.7) przyjmie postać:

$$\vec{\gamma} = G \frac{M}{r^2} \vec{U} \quad (5.8)$$

gdzie $\vec{U}$ – jest wektorem jednostkowym o kierunku i zwrocie zgodnym z wektorem natężenia pola.

Kierunek natężenia pola grawitacyjnego Ziemi jest do środka kuli ziemskiej. Jest ono równe przyspieszeniu ziemskiemu, co wynika ze wzoru (5.6).

P r z y k ł a d 5.2.

Obliczyć, na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi, przyspieszenie ziemskie jest n razy mniejsze niż na powierzchni, jeżeli jest dany promień Ziemi R .

Wychodząc stąd, że przyspieszenie ziemskie jest równe natężeniu pola grawitacyjnego, możemy napisać:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

oraz

$$\frac{g}{n} = G \frac{M}{(R+x)^2}$$

gdzie x – jest szukaną wysokością nad powierzchnią Ziemi.

Po podzieleniu stronami powyższych równań otrzymamy:

$$x = R(\sqrt{n} - 1).$$

5.5. Potencjał grawitacyjny

Potencjałem grawitacyjnym w danym punkcie pola, nazywamy stosunek pracy potrzebnej do przeniesienia ciała próbnego o masie m z nieskończoności do danego punktu pola, do wartości masy tego ciała:

$$V = \frac{W}{m} \quad (5.9)$$

W celu wyznaczenia potencjału w danym punkcie pola w zależności od masy ciała wytwarzającego pole, należy tę pracę wyliczyć. W tym celu obliczamy na razie pracę potrzebną na przesunięcie ciała próbnego o masie m od punktu B, odległego od środka Ziemi o r_2 do punktu A, odległego od środka Ziemi o odległość r_1 (**rys. 5.3**).

Ponieważ siła F jest siłą zmienną na odcinku BA, więc należy wziąć jej wartość średnią (najdogodniej średnią geometryczną) z punktu B do A:

$$F = \sqrt{F_A \cdot F_B} \quad \text{lub} \quad F = \sqrt{G \frac{M m}{r_1^2} G \frac{M m}{r_2^2}},$$
$$F = G \frac{M m}{r_1 r_2}. \quad (5.10)$$

Szukana praca wyrazi się wzorem: (od drugiej wielkości odejmujemy pierwszą, idąc od B do A)

$$W = F(r_1 - r_2).$$

Uwzględniając równanie (5.10) otrzymamy:

$$W = G \frac{M m}{r_1 r_2} (r_1 - r_2).$$

Ostatecznie będziemy mieli:

$$W = G M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (5.11)$$

Powyższy wzór można też otrzymać inną metodą, obliczając pracę elementarną na drodze dr , bardzo krótkiej, na której można przyjąć, że siła będzie stała (**rys. 5.3**):

$$dW = F dr,$$

gdzie F – jest siłą działającą pomiędzy Ziemią a ciałem próbnym o masie m w odległości r od środka Ziemi i wyraża się wzorem (5.1). Mamy więc:

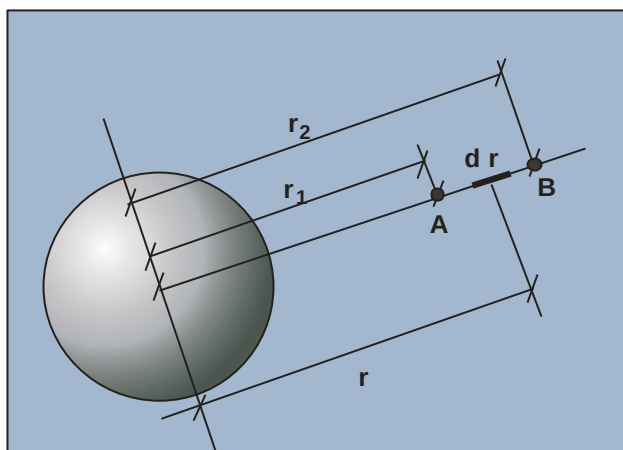
$$W = G \frac{M m}{r^2} dr$$

Pracę na całym odcinku BA otrzymamy, wyliczając całkę:

$$W = G M m \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2}.$$

Po podstawieniu granic całkowania, otrzymujemy:

$$W = G M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$



Rys. 5.3. Siła przyciągania ziemskiego jest siłą zmieniającą się (rosnącą) na odcinku BA

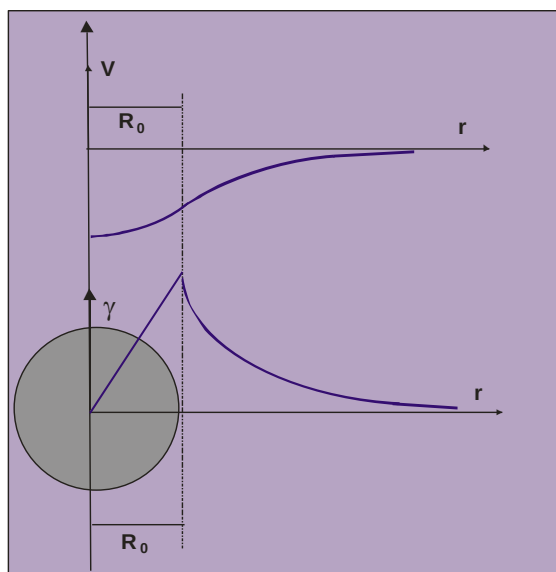
Natomiast pracę wykonaną przy przeniesieniu ciała próbnego o masie m z nieskończoności do danego punktu pola, otrzymamy kładąc za r_2 nieskończoność. Wtedy będziemy mieli:

$$W = -G \frac{M m}{r_1}$$

i wzór na potencjał przyjmie postać:

$$V = -G \frac{M}{r} \quad (5.12)$$

Zależność potencjału grawitacyjnego i natężenia pola Ziemi, od odległości od środka kuli ziemskiej przedstawiono na **rys. 5.4.**



Rys. 5.4. Wykresy zależności potencjału i natężenia pola grawitacyjnego w funkcji odległości od środka Ziemi

Przykład 5.3

Obliczyć, z jaką prędkością należy wyrzucić ciało z powierzchni Ziemi (prędkość ucieczki lub druga prędkość kosmiczna), żeby wyszło do nieskończoności (poza obszar przyciągania ziemskiego), jeżeli dany jest promień Ziemi R , przyspieszenie ziemskie g , i stała grawitacji G .

Ażeby dane ciało wyszło poza obszar przyciągania ziemskiego, to jego energia kinetyczna w momencie wyrzucenia powinna być równa pracy przeciwko sile przyciągania grawitacyjnego Ziemi. Porównujemy pracę określoną wzorem (5.11) z energią kinetyczną (zmieniamy znaki, bo pracę wykonuje nie pole, ale siła zewnętrzna).

$$\frac{m V^2}{2} = M m G \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Kładąc za r_2 nieskończoność, wyliczymy szukaną prędkość:

$$V = \sqrt{\frac{2 G M}{R}} \quad (5.13)$$

$$V = 11,3 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zadania rozwiązane

5.1. (xx 1986) Na biegunie pewnej planety ciało waży n razy więcej niż na równiku. Prędkość kątowna ruchu obrotowego planety dookoła własnej osi jest ω a stała grawitacji G . Obliczyć gęstość planety, przyjmując, że jest ona jednorodną kulą.

Uwzględniając fakt, że na biegunie planety ciało waży więcej niż na równiku, możemy napisać następujące równanie:

$$G \frac{M m}{r^2} = n \left(G \frac{M m}{r^2} - m \omega^2 r \right),$$

gdzie M jest masą planety, którą wyrażamy za pomocą gęstości:

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

Uwzględniając powyższe, możemy wyliczyć gęstość planety:

$$\rho = \frac{3 \omega^2 n}{4 \pi G (n - 1)}.$$

5.2. (xx 1978) Czas trwania doby na jednorodnej, kulistej planecie o gęstości ρ i promieniu R wynosi T . Obliczyć, na jakiej wysokości nad biegunem tej planety ciężar danego ciała będzie taki sam jak na równiku. Stała grawitacji G .

Ciężar ciała nad biegunem na wysokości x nad powierzchnią danej planety wyrazi się następującym wzorem:

$$F_b = G \frac{M m}{(R + x)^2}$$

Natomiast ciężar ciała na równiku będzie:

$$F_r = G \frac{M m}{R^2} - m \omega^2 R.$$

Uwzględniając, że $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ oraz, że $\omega = \frac{2 \pi}{T}$ i porównując ciężar ciała nad biegunem na wysokości x z ciężarem na równiku danej planety, możemy wyliczyć szukaną wysokość:

$$x = R \left[\sqrt{\frac{G \rho T^2}{G \rho T^2 - 3 \pi}} - 1 \right].$$

5.3. (xx 1996) Obliczyć ile razy powinna być większa częstota obrotu Ziemi dookoła swojej osi, ażeby ciała na równiku nie ważyły, jeżeli promień Ziemi jest $R = 6400$ km, przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s², okres obrotu Ziemi $T = 8,6 \cdot 10^4$ s.

Ażeby ciało nic nie ważyło, to siła przyciągania ziemskiego musi zrównać się z siłą bezwładności – odśrodkowej:

$$G \frac{M m}{R^2} = m \omega^2 R. \quad (5.14)$$

gdzie M jest masą Ziemi, którą wyznaczamy przez porównanie ciężaru ciała z siłą przyciągania grawitacyjnego:

$$mg = G \frac{M m}{R^2},$$

skąd:
$$M = g \frac{R^2}{G}.$$

Wstawiając powyższą wartość na masę Ziemi do równania (5.14) oraz uwzględniając, że

$$\omega = 2 \pi n_x$$

wyliczymy szukaną częstość obrotów Ziemi (n_x):

Rzeczywista częstość obrotów Ziemi wyrazi się wzorem

$$n_0 = \frac{1}{T}$$

Mamy więc
$$\frac{n_x}{n_0} = \frac{T}{2 \pi} \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \frac{n_x}{n_0} = 17$$

5.4. (x 1985) Okres wahań pewnego wahadła wynosi T . Obliczyć, ile wynosiłby okres wahań tego wahadła na planecie o promieniu 4 razy mniejszym od promienia Ziemi. Przyjąć, że Ziemia i planeta są jednorodnymi kulami o tej samej gęstości.

Okres wahań wahadła na Ziemi i na planecie wyrazi się odpowiednio:

$$T_z = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g_z}}. \quad T_p = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g_p}}.$$

Po podzieleniu powyższych wzorów stronami będziemy mieli;

$$T_p = T_z \sqrt{\frac{g_z}{g_p}}.$$

Uwzględniając, że:
$$g_z = G \frac{M_z}{R_z^2} \quad i \quad g_p = G \frac{M_p}{R_p^2},$$

oraz
$$M_z = \frac{4}{3} \pi R_z^3 \rho \quad \text{ i } \quad M_p = \frac{4}{3} \pi R_p^3 \rho ,$$

otrzymamy:
$$T_p = T_z \sqrt{\frac{R_z}{R_p}} \quad T_p = 2 T_z .$$

5.5. (xx 1980) Kosmonauta po zbliżeniu się do pewnej planety, nadaje swojemu statkowi prędkość poziomą $V = 11$ km/s. Prędkość ta zapewnia lot statku po orbicie kołowej na wysokości $h = 300$ km od powierzchni tej planety. Obliczyć przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety, jeżeli jej promień wynosi $R = 8800$ km.

Statek kosmiczny będzie krążył z zadaną prędkością wokół planety, jeżeli siła przyciągania grawitacyjnego będzie się równać sile dośrodkowej:

$$G \frac{M m}{(R + h)^2} = \frac{m V^2}{R + h} .$$

Obie strony równania dzielimy przez R^2 :

$$G \frac{M m}{(R + h)^2 R^2} = \frac{m V^2}{(R + h) R^2} .$$

Uwzględniając, że $G \frac{M}{R^2} = g$ (natężenie pola grawitacyjnego), otrzymamy:

$$g = V^2 \frac{R + h}{R^2}$$

$$g = 14,2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

5.6. (xx 1984) Satelita Ziemi o masie m zmienił orbitę kołową o promieniu R_1 na orbitę o promieniu R_2 też kołową taką, że $R_2 > R_1$. Obliczyć zmianę energii mechanicznej tego satelity, jeżeli promień Ziemi wynosi R_0 a przyspieszenie na powierzchni Ziemi g .

Zmiana energii mechanicznej równa jest różnicy całkowitej energii satelity na orbicie R_1 i R_2 . Energia całkowita natomiast równa się sumie energii kinetycznej i potencjalnej na danej orbicie:

$$E_c = \frac{m V^2}{2} + m \left(- \frac{G M}{R} \right) ,$$

gdzie $-\frac{G M}{R}$ jest potencjałem grawitacyjnym w odległości R od środka Ziemi

Prędkość V wyznaczamy stąd, że siła dośrodkowa działająca na satelitę równa się sile przyciągania grawitacyjnego:

$$\frac{m V^2}{R} = G \frac{M m}{R^2},$$

Mamy więc:

$$E_c = \frac{m}{2} G \frac{M}{R} - \frac{m G M}{R}$$

lub

$$E_c = -\frac{m G M}{2 R}. \quad (5.16)$$

Zmiana energii mechanicznej będzie więc

$$\Delta E = -\frac{m G M}{2 R_2} - \left(-\frac{m G M}{2 R_1} \right).$$

Uwzględniając, że $g = \frac{G M}{R_0^2}$ będziemy mieli:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m g R_0^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

5.7. (x 1986) Obliczyć, pracę jaką należy wykonać, aby ciało o masie $m = 100 \text{ kg}$ przenieść z powierzchni Ziemi na wysokość równą promieniowi Ziemi $R_0 = 6400 \text{ km}$. Przyjąć przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi $g = 10 \text{ m/s}^2$. Szukaną pracę wyliczymy ze wzoru:

$$W = G M m \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Przyjmując:

$$\frac{G M}{R_0^2} = g \quad \text{oraz} \quad R_2 = 2 R_0$$

otrzymamy:

$$W = \frac{1}{2} g m R_0.$$

$$W = 3,2 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

5.8. (1979) Obliczyć prędkość ucieczki (drugą prędkość kosmiczną) z planety, której powierzchnia jest $n = 100$ razy większa od powierzchni Ziemi. Zakładamy, że planeta i Ziemia są jednorodnymi kulami o tej samej gęstości. Prędkość ucieczki z powierzchni Ziemi wynosi $V_z = 11,3 \text{ km/s}$.

Piszemy dwa równania, dla danej planety i dla Ziemi, biorąc pod uwagę, że energia kinetyczna ciała wyrzuconego ma się równać pracy przeciwko sile przyciągania grawitacyjnego:

$$\frac{m V_p^2}{2} = G M_p m \frac{1}{R_p} \quad \frac{m V_z^2}{2} = G M_z m \frac{1}{R_z}.$$

Wyrażając masę planety i Ziemi w funkcji gęstości i dzieląc stronami obydwie równania, otrzymamy:

$$\frac{V_p^2}{V_z^2} = \frac{\pi R_p^2}{\pi R_z^2} \quad \text{lub} \quad \frac{V_p^2}{V_z^2} = n.$$

Szukana prędkość ucieczki z danej planety będzie:

$$V_p = V_z \sqrt{n} \quad V_p = 113 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Z a d a n i a u z u p e ł n i a j ą c

5.9. (xx 1982) Na równiku pewnej planety będącej jednorodną kulą, ciała ważą dwa razy mniej niż na biegunie. Gęstość planety wynosi $\rho = 3,14 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Obliczyć okres obrotu tej planety wokół jej osi, jeżeli stała grawitacji jest $G = 6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

$$\text{Odp.} \quad T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}} \quad T = 10^4 \text{ s.}$$

5.10. Na szerokości geograficznej $\phi = 60^\circ$ pewnej planety w kształcie kuli ciała ważą $n = 1,5$ razy mniej niż na biegunie. Gęstość planety wynosi $\rho = 4,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Obliczyć okres obrotu tej planety wokół osi, jeżeli stała grawitacji wynosi $G = 6,66 \cdot 10^{-11} \text{ Nm/kg}^2$

$$\text{Odp.} \quad T = \sqrt{\frac{3\pi n \cos\phi}{G\rho(n-1)}} \quad T = 0,7 \cdot 10^4 \text{ s.}$$

5.11. Obliczyć stosunek ciężaru ciała na biegunie, do ciężaru tego samego ciała na równiku, planety w kształcie kuli o gęstości ρ i okresie T . Stała grawitacji G .

$$\text{Odp.} \quad S = \frac{G T^2 \rho}{G T^2 \rho - 3\pi}.$$

5.12. Obliczyć okres obiegu satelity Ziemi, jeżeli porusza się on po okręgu o promieniu równym dwóm promieniom ziemskim. Przyjąć $R = 6400 \text{ km}$, a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Odp. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ $T = 3 \text{ godz. } 54 \text{ min.}$

5.13. (xx 1980) Okres drgań wahadła matematycznego na powierzchni Ziemi wynosi $T_0 = 3 \text{ s}$. Obliczyć, jaki będzie okres drgań tego wahadła umieszczonego na wysokości $h = \frac{2}{3}R$ nad powierzchnią ziemi.

Odp. $T = T_0 \frac{R+h}{R}$ $T = 5 \text{ s}$

5.14. W jakiej odległości od środka Ziemi pojazd kosmiczny będzie jednakowo przyciągany przez Ziemię jak i przez Księżyc? Przyjąć, że masa Księżyca jest 81 razy mniejsza od masy Ziemi, a odległość między ich środkami wynosi $d = 60 R$ (promieni ziemi).

Odp. $x = \frac{9}{10}d$ $x = 54 R$.

5.15. (xx 1987) Z powierzchni Ziemi wyrzucono ciało pionowo do góry z prędkością początkową V_0 . Obliczyć, na jaką wysokość wzniesie się to ciało oraz przy jakiej najmniejszej wartości prędkości początkowej ciało opuści strefę przyciągania ziemskiego (jaka będzie druga prędkość kosmiczna)? Jeżeli dany jest promień Ziemi R_0 i przyspieszenie ziemskie g .

Odp. $h = \frac{R_0 V_0^2}{2gR_0 - V_0^2}$ $V = \sqrt{2gR_0}$.

5.16. Pewna planeta opisuje okrąg dookoła Słońca z prędkością $V = 35 \text{ km/s}$. Obliczyć okres obiegu tej planety, jeżeli dana jest masa Słońca $M = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ i stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$.

Odp. $T = \frac{2\pi GM}{V^2}$ $T = 223 \text{ dni.}$

5.17. Obliczyć promień R orbity kołowej, na której należy umieścić satelitę, ażeby nie zmieniał on swojego położenia względem Ziemi (satelita stacjonarny). Przyjąć $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, promień Ziemi $R_0 = 6370 \text{ km}$.

$$\text{Odp.} \quad R = \sqrt[3]{\frac{g R_0^2}{\omega^2}} \quad R = 42400 \text{ km.}$$

5.18. Obliczyć prędkość ucieczki z Marsa oraz wartość natężenia pola grawitacyjnego na powierzchni tej planety, jeżeli średnica Marsa wynosi $D = 6700 \text{ km}$, stosunek masy Marsa do masy Ziemi jest $k = 0,11$ promień Ziemi $R_z = 6400 \text{ km}$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp.} \quad V = 2 \sqrt{\frac{g R_z^2 0,11}{D}} \quad V = 5,12 \text{ m/s} \quad g_m = g \frac{0,11 R_z^2}{D^2/4} \quad g_m = 4 \text{ m/s}^2.$$

5.19. Mała planeta w kształcie kuli ma promień $R = 10 \text{ km}$ i średnią gęstość $\rho = 5000 \text{ kg/m}^3$. Obliczyć prędkość ucieczki z tej planety oraz jaki byłby ciężar człowieka na tej planecie, jeżeli na Ziemi waży on $P = 800 \text{ N}$? Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp.} \quad V = 2 R \sqrt{\frac{2}{3} \pi \rho G} \quad V = 0,017 \text{ km/s.} \quad P_p = P \frac{4 \pi G R \rho}{3 g} \quad P_p = 1,1 \text{ N.}$$

5.20. Obliczyć drugą prędkość kosmiczną z powierzchni Księżyca, jeżeli jego masa jest $M = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, a promień $R = 1700 \text{ km}$. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$.

$$\text{Odp.} \quad V = \sqrt{\frac{2 G M}{R}} \quad V = 2,4 \text{ km/s.}$$

Zadania testowe

5.21. Jaki jest sens fizyczny stałej grawitacji?

5.22. Z jaką, siłą przyciągają się wzajemnie dwa okrętu, każdy o masie $M = 50\,000 \text{ ton}$ z odległości $r = 100 \text{ m}$? Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$.

5.23. (xx 1998) Ziemia dokonuje pełnego obiegu dookoła Słońca w czasie $T = 365,26$ doby. Średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi $d = 150\,000\,000 \text{ km}$, promień Ziemi $R = 6370 \text{ km}$, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Jaki jest stosunek masy Słońca do masy Ziemi?

5.24. (xx 1980) Ile wynosi wartość przyspieszenia grawitacyjnego w środku kuli ziemskiej?

5.25. (xx 1985) Przyspieszenie ziemskie na powierzchni Ziemi wynosi g . Jakie będzie przyspieszenie grawitacyjne na planecie o takiej samej masie co Ziemia ale o dwukrotnym promieniu?

5.26. (x 1985) Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi ciężar ciała jest dwa razy mniejszy niż na powierzchni?

5.27. Wyrazić masę Ziemi w zależności od przyspieszenia ziemskiego g , promienia Ziemi R i stałej grawitacji G .

5.28. Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Marsa wynosi $g_m = 0,4 g$ (przyspieszenia ziemskiego). Jaki byłby ciężar człowieka na powierzchni Marsa, którego ciężar na Ziemi wynosi $P = 900 \text{ N}$?

5.29. Jakie jest przyspieszenie grawitacyjne na Marsie, jeżeli promień Marsa jest równy $0,5$ promienia Ziemi a jego masa stanowi $0,1$ masy Ziemi?

5.30. Jakie jest natężenie pola grawitacyjnego ziemskiego w punkcie, w którym na ciało o masie $m = 5 \text{ kg}$ działa siła grawitacji $F = 0,5 \text{ N}$? Jaki jest wymiar otrzymanego natężenia?

5.31. (xx 1996) W jakiej odległości od środka Ziemi natężenie pola grawitacyjnego ma największą wartość?

5.32. (xx 1996) Jakie powinno być natężenie pola grawitacyjnego w którym wahadło matematyczne o długości $2 L$ drgałoby z częstością równą częstości drgań wahadła o długości L na powierzchni Ziemi?

5.33. (xx1980) Na tej samej wysokości krążą dwa sputniki wokół Ziemi o różnych masach. Co można powiedzieć o ich prędkościach?

5.34. (xx1998) Jakie jest przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu jeżeli jego masa jest $n = 81$ razy mniejsza od masy Ziemi? Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g_z = 10 \text{ m/s}^2$, promień Ziemi $R_z = 6400 \text{ km}$, a promień Księżyca $R_k = 1700 \text{ km}$.

5.35. Statek kosmiczny wznoszący się pionowo w górę ruchem jednostajnie przyspieszonym osiągnął wysokość $h = 3000 \text{ m}$ w czasie $t = 10 \text{ s}$. Jakie było przeciążenie kosmonauty w tym statku, w stosunku do przyspieszenia ziemskiego g ?

5.36. Jaki jest moment pędu satelity o masie m krążącego po kręgu o promieniu r ? Dana jest masa Ziemi M i stała grawitacji G

5.37. Jak długo musiałyby trwać doba ziemska, aby ciała znajdujące się na równiku były w stanie nieważkości?

5.38. (xx 1996) Jaki jest stosunek energii kinetycznej satelity znajdującym się na orbicie kołowej, do bezwzględnej wartości jego energii potencjalnej?

5.39. Jaki jest okres obiegu satelity krążącego po orbicie kołowej na wysokości h nad powierzchnią Ziemi, jeżeli dany jest promień Ziemi R ?

5.40. Znaleźć masę Ziemi, jeżeli wiadomo, że sztuczny Księżyc obiega Ziemię na wysokości $h = 1000 \text{ km}$ w czasie $T = 106 \text{ min.}$?

5.41. (xx 1986) Ile razy większa niż obecnie byłaby druga prędkość kosmiczna Ziemi, gdyby jej gęstość była 4 razy większa, a promień zostałby ten sam?

5.42. (xx 1982) Dana jest planeta, będąca jednorodną kulą o promieniu R . Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni tej planety wynosi g . Ile wynosi potencjał grawitacyjny na powierzchni tej planety?

VI. RUCH HARMONICZNY I FALOWY, AKUSTYKA

6.1. Określenie ruchu harmonicznego

Najprostszym z wielu ruchów drgających jest ruch harmoniczny. Jest to taki ruch, w którym występująca siła sprężystości jest wprost proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie skierowana, co wyraża się wzorem:

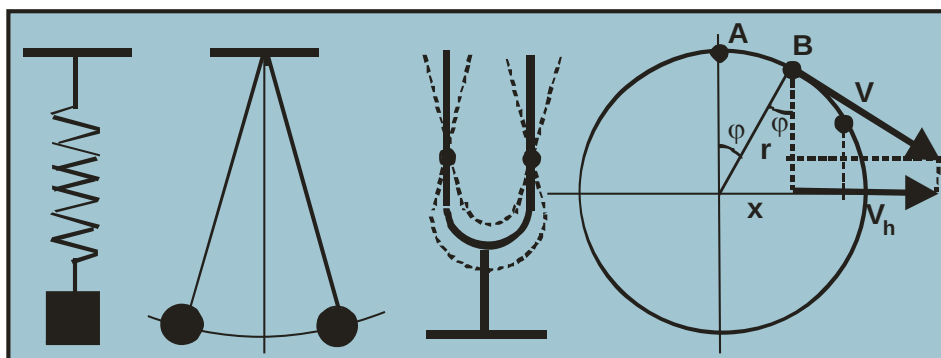
$$\vec{F} = -k \times \vec{i},$$

(6.1)

gdzie k – Jest współczynnikiem proporcjonalności (sprężystości), równym sile powstałej przy jednostkowym wychyleniu od położenia równowagi,

$\vec{i}$ – jest wektorem jednostkowym w kierunku osi OX .

Ruchem harmonicznym porusza się ciężarek zawieszony na sprężynie i wytrącony z położenia równowagi, kulka wahadła przy niewielkich wychyleniach, końce dźwięczącego kamertonu, jak również rzut punktu poruszającego się po okręgu ruchem jednostajnym, na średnicę tego okręgu (**rys. 6.1**). Struna natomiast wykonuje drgania złożone, które nie są drganiami harmonicznymi.



Rys. 6.1. Przykłady ruchu harmonicznego

6.2. Okresy drgań niektórych ciał w ruchu harmonicznym

Wzór na okres drgań ciężarka zawieszonoego na sprężynie i wytrąconego z położenia równowagi wyprowadza się w sposób następujący: przy rozciąganiu sprężyny powstaje siła sprężystości, zwana siłą kierującą, która powoduje ruch harmoniczny, a przedstawiona jest wzorem (6.1). Wartość bezwzględna tej siły porównujemy z wartością bezwzględną siły w ruchu harmonicznym, wyrażającą się iloczynem masy ciała przez wartość przyspieszenia w tym ruchu.

Przyśpieszenie w ruchu harmonicznym zdefiniowane będzie w punkcie **6.3**. Jego wartość liczbową wyraża się wzorem:

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} x ,$$

gdzie T – jest okresem drgań,

x – wychyleniem z położenia równowagi.

Wartość liczbową siły w ruchu harmonicznym może, więc być przedstawiona wzorem następującym:

$$F = -m \frac{4\pi^2}{T^2} x \quad (6.2)$$

Z porównania prawych stron wzorów (6.1) i (6.2) otrzymamy równanie, z którego wyliczymy szukany okres drgań:

$$-k x = -m \frac{4\pi^2}{T^2} x ,$$

skąd

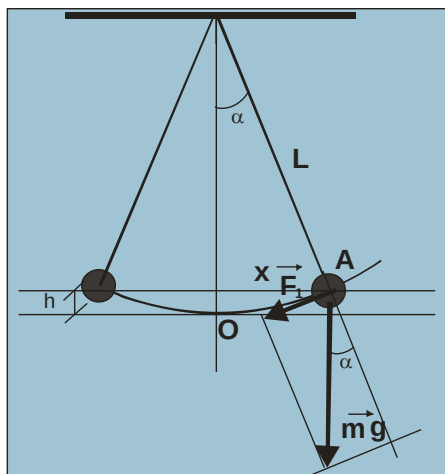
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (6.3)$$

Powyższa metoda wyznaczania okresu drgań, pozwala rozwiązać wiele zadań z ruchu harmonicznego.

Podobnie wyprowadza się wzór na okres drgań wahadła matematycznego. Siłą kierującą w tym przypadku jest składowa ciężaru kulki wahadła w kierunku jej ruchu ($\vec{F}_1$). Wartość liczbową tej składowej (**rys.6.2**) wyraża się wzorem:

$$F_1 = m g \sin\alpha .$$

$\sin\alpha$ zastępujemy stosunkiem x/L , gdyż dla małych kątów wychyleń α , możemy przyjąć uproszczenie, że łuk AO jest równy wychyleniu x .



Rys. 6.2. Składowa siły ciężaru kulki $\vec{F}_1$ jest siłą kierującą w ruchu harmonicznym wahadła

Mamy więc:

$$F_1 = -m g \frac{x}{L}.$$

Siłę tę porównujemy z wartością liczbową siły w ruchu harmonicznym (6.2):

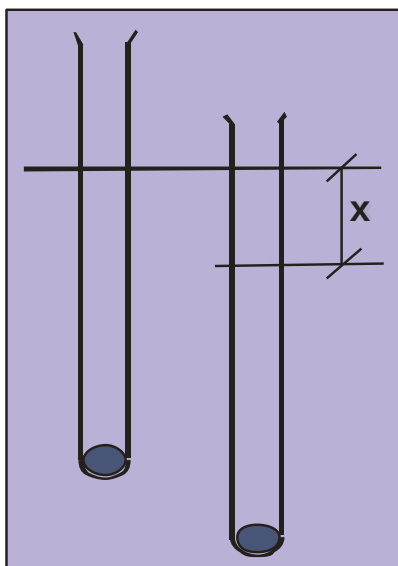
$$-m g \frac{x}{L} = -m \frac{4\pi^2}{T^2} x$$

skąd:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

P r z y k ł a d 6.1. (xx 1977)

Probówka o masie m_1 i polu przekroju S zawiera nieco rtęci o masie m_2 i pływa w wodzie w pozycji pionowej. Po wciśnięciu ją nieco głębiej i puszczeniu swobodnie, probówka wykonuje drgania pionowe (**rys. 6.3**). Obliczyć, częstość drgań, jeżeli gęstość wody wynosi ρ , a wszelkie opory pomijamy.



Rys. 6.3. Na probówkę zanurzoną na głębokość x w stosunku do położenia równowagi, działa siła wyporu jako siła kierująca

Siłą kierującą będzie tutaj siła wyporu działająca na probówkę przy dodatkowym zanurzeniu na głębokość x , której wartość bezwzględną wyliczymy z prawa Archimedesesa.

$$F = -V \rho g,$$

gdzie V – jest objętością części probówki z racji dodatkowego zanurzenia

$$V = S x,$$

ρ – jest gęstością wody.

Mamy więc:

$$F = -S \rho g x.$$

Porównując powyższą wartość siły, która jest siłą kierującą, z wartością liczbową siły wyrażonej wzorem (6.2), będziemy mieli:

$$-S \rho g x = -m \frac{4 \pi^2}{T^2} x,$$

gdzie m – jest sumą mas probówki i rtęci: $m = m_1 + m_2$.

Równanie sił przyjmie teraz postać:

$$-S \rho g x = -(m_1 + m_2) \frac{4 \pi^2}{T^2} x,$$

skąd wyliczymy szukaną wartość okresu a potem częstotliwości:

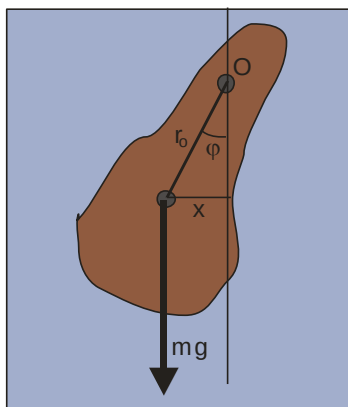
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{S\rho g}}.$$

Szukana częstotliwość drgań próbówki jest odwrotnością okresu:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{S\rho g}{m_1 + m_2}}.$$

Ostatni przykład na **rys. 6.1** może posłużyć za drugą definicję ruchu harmonicznego i pozwala otrzymać podstawowe wzory na wychylenie, prędkość i przyspieszenie w tym ruchu, przez rzutowanie odpowiednich wielkości z ruchu jednostajnego po okręgu na średnicę tego okręgu lub na prostą. Ruchem harmonicznym, nazywamy więc ruch rzutu punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na średnicę tego okręgu. Na **rys. 6.1** widać, że punkt poruszający się po okręgu ruchem jednostajnym przebywa w jednakowych odstępach czasu jednakowe drogi, ale rzut tego punktu na średnicę okręgu przebywa drogi różne.

Ruchem harmonicznym porusza się też wahadło fizyczne. Jest to dowolna bryła sztywna zawieszona powyżej środka ciężkości (**rys. 6.4**). Wzór na okres wahań przy niewielkich wychyleniach z położenia równowagi wyprowadza się w sposób następujący:



Rys. 6.4 Ruch harmoniczny wahadła fizycznego odbywa się na skutek działania momentu siły ciężkości

W miejscu siły kierującej jest moment kierujący (moment siły ciężaru), który wyraża się wzorem:

$$M = -m g r_0 \sin \varphi$$

Dla małych kątów $\sin \varphi$ można zastąpić samym kątem φ . Mamy, więc:

$$M = -m g r_0 \varphi, \quad (6.4)$$

ale z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej moment siły wyraża się wzorem:

$$M = \varepsilon I$$

gdzie ε – jest przyspieszeniem kątowym, które można przedstawić za pomocą przyspieszenia liniowego w sposób następujący:

$$\varepsilon = \frac{a_h}{r_0}$$

lub

$$\varepsilon = \frac{-\frac{4\pi^2}{T^2} r_0 \varphi}{r_0}$$

gdzie I – jest momentem bezwładności wahadła względem punktu zaczepienia,
 r_0 – jest odległością punktu zaczepienia wahadła do środka ciężkości.

Przez porównanie momentów sił otrzymamy:

$$-m g r_0 \varphi = \frac{-\frac{4\pi^2}{T^2} r_0 \varphi}{r_0} I,$$

stąd:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g r_0}} \quad (6.5)$$

6.3. Wychylenie, prędkość, przyspieszenie, energia w ruchu harmonicznym

Wychylenie w ruchu harmonicznym jest rzutem łuku AB, przebytego ruchem jednostajnym po okręgu, na jego średnicę (**rys. 6.1**):

$$x = r \sin \varphi$$

gdzie r – jest promieniem okręgu i jednocześnie największym wychyleniem z położenia równowagi, nazywa się amplitudą drgań,

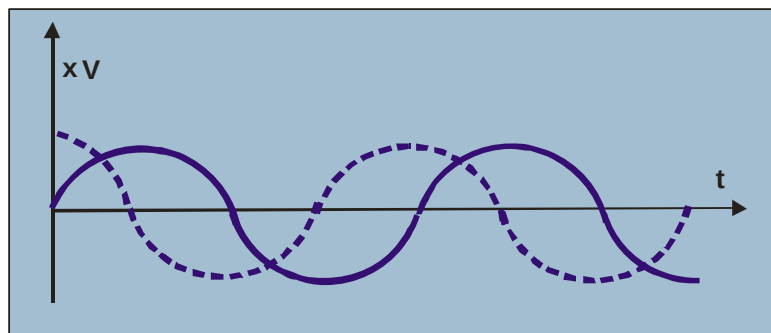
φ – jest kątem zakreślonym przez promień okręgu od położenia początkowego, nazywa się fazą w ruchu harmonicznym i wyraża się w funkcji czasu:

$$\varphi = \omega t,$$

gdzie ω – jest prędkością kątową ruchu jednostajnego po okręgu. Mamy więc:

$$x = r \sin \omega t \quad (6.6)$$

Wykresem wychylenia (drogą) w ruchu harmonicznym jest sinusoida, linia ciągła na **rys. 6.5**.



Rys. 6.5. Wykresy wychyleń (linia ciągła) i prędkości (linia przerywana) w ruchu harmonicznym

Okresem drgań w ruchu harmonicznym nazywamy czas jednego pełnego drgania, odpowiadający jednemu pełnemu obiegowi punktu po okręgu. Jest on odwrotnie proporcjonalny do częstości drgań (ilości drgań w czasie jednej sekundy), której jednostką jest jeden herc (Hz):

$$T = \frac{1}{n} \quad (6.7)$$

Wartość liczbowa prędkości w ruchu harmonicznym otrzymamy rzutując wektor prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu na jego średnicę (**rys. 6.1**).

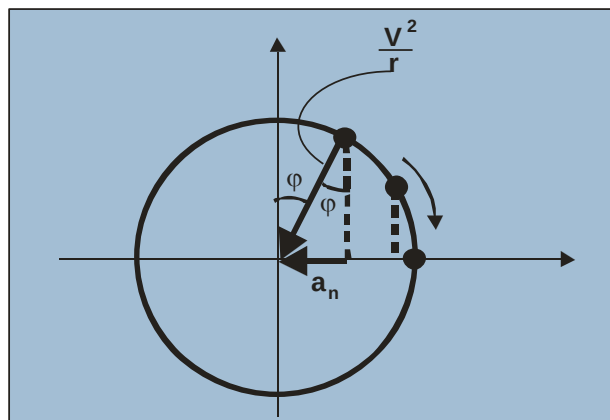
$$V_h = V \cos \varphi$$

lub

$$V_h = \omega r \cos \varphi \quad (6.8)$$

Wykresem prędkości jest kosinusoida (**rys. 6.5**). Krzywa przerywa. Widać, że gdy wychylenie jest równe zero, to prędkość przyjmuje największą wartość, a wychylenie jest największe w tych momentach, kiedy prędkość równa się zero.

Wartość liczbową przyspieszenia w ruchu harmonicznym otrzymamy rzutując wektor przyspieszenia dośrodkowego w ruchu jednostajnym po okręgu na średnicę tego okręgu (**rys. 6.6**).



Rys.6.6. Rzutując wektor przyspieszenia dośrodkowego na średnicę okręgu, otrzymamy wartość liczbową przyspieszenia w ruchu harmonicznym

$$a_n = -\frac{V^2}{r} \sin \varphi$$

lub

$$a_n = -\frac{\omega^2}{r} r^2 \sin \varphi.$$

Uwzględniając, że $r \sin \varphi = x$ (wzór 6.6) otrzymamy:

$$a_h = -\omega^2 x \quad (6.9)$$

albo

$$a_h = -\frac{4\pi^2}{T^2} x. \quad (6.10)$$

Jak widać z otrzymanego wzoru, przyspieszenie w ruchu harmonicznym nie jest stałe, lecz zmienia się z odległością od położenia równowagi: jest wprost proporcjonalne do wychylenia i przeciwnie skierowane, analogicznie do siły sprężystości.

Przykład 6.2

Punkt drgający ruchem harmonicznym ma dla fazy $\phi = 60^\circ$ prędkość $V = 0,2$ m/s, amplitudę $r = 0,1$ m. Obliczyć okres drgań tego ruchu.

Wychodzimy ze wzoru na prędkość w ruchu harmonicznym:

$$V_h = \omega r \cos \varphi,$$

gdzie

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Mamy, więc ostatecznie:

$$T = \frac{2 \pi r \cos \varphi}{V}$$

$$T = 1,57 \text{ s.}$$

Prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym możemy też otrzymać, obliczając pochodną drogi po czasie pierwszą dla prędkości, drugą dla przyspieszenia.

Energia w ruchu harmonicznym jest sumą energii potencjalnej i kinetycznej. Wyraża się wzorem:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (6.11)$$

gdzie A – jest amplitudą drgań.

Przykład 6.3 (xx 1980)

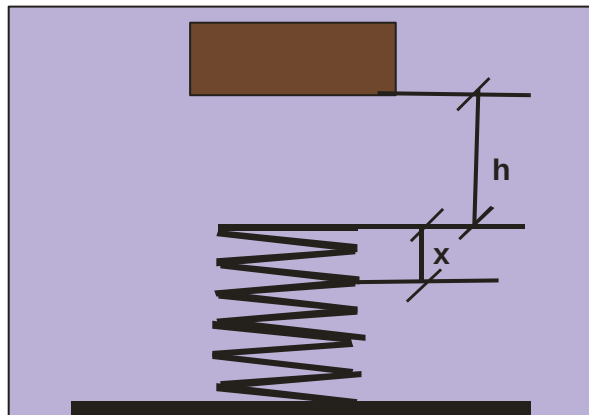
Klocek o masie $m = 2 \text{ kg}$ spada swobodnie z wysokości $h = 0,4 \text{ m}$ na sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 2000 \text{ N/m}$ (**rys. 6.7**). W wyniku tego, sprężyna zostaje ściśnięta. Obliczyć maksymalne skrócenie sprężyny, przyjmując $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Energia potencjalna ciężarka zamienia się na energię sprężystości zgniatanej sprężyny.

$$m g (h + x) = \frac{1}{2} k x^2$$

Po uporządkowaniu jako równania kwadratowego i po jego rozwiązaniu otrzymamy:

$$x = \frac{m g}{k} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 k h}{m g}} \right]$$



Rys. 6.7. Ciężarek swobodnie spadający z wysokości h przesunie się jeszcze o odcinek x równy zgniaceniu sprężyny

6.4. Zjawisko rezonansu

Zjawisko rezonansu polega na pobudzaniu do drgań ciała lub układu ciał, za pomocą słabych impulsów, przychodzących z zewnątrz, jeśli tylko częstość tych impulsów równa się częstości drgań własnych układu. Jeśli np. zawiesimy na poziomym sznurku trzy wahadła, dwa o jednakowej długości a trzecie krótsze i pobudzimy do drgań jedno z dwóch wahadeł o jednakowej długości, to zacznie drgać to wahadło, które ma ten sam okres wahań, a więc taką samą długość.

Podobnie zostaje pobudzony do drgań kamerton, gdy dochodzą do niego fale głosowe wysyłane przez inny kamerton, ale o tej samej częstości drgań.

6.5. Określenie ruchu falowego

W ruchu falowym nie mamy do czynienia z ruchem określonego ciała czy punktu, lecz z rozchodzeniem się energii poprzez ośrodek sprężysty, jako rozchodzenie się odkształceń ośrodka. Ruch falowy może odbywać się w postaci fali poprzecznej lub podłużnej.

Z falą poprzeczną mamy do czynienia, gdy cząsteczki ośrodka drgają w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Gdy np. na gładką powierzchnię wody upadnie kamień, to z tego miejsca rozchodzić się będzie fala poprzeczna w postaci okręgów. Cząsteczki wody wytrącone z położenia równowagi pobudzają do drgań sąsiednie, te następne itd. Przez ośrodek przenosi się fala poprzeczna, gdyż pobudzone do drgań cząsteczki wody drgają prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali. Falę poprzeczną możemy też uzyskać na rozciągniętym węźu kauczukowym, potrącając go w kierunku prostopadłym do niego.

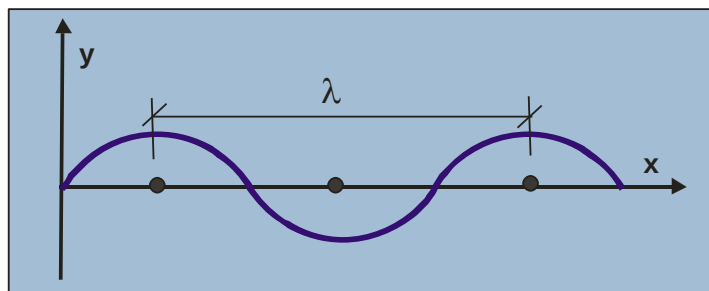
Fala podłużna będzie wtedy, gdy cząsteczki ośrodka będą pobudzane do drgań w kierunku tym samym, co kierunek rozchodzenia się fali. Przykładem jej może być fala głosowa jak również rozchodzenie się odkształceń na sprężynie. Każde ogniwo sprężyny, do którego dojdzie fala, zostaje wytrącone z położenia równowagi w kierunku ruchu fali i pobudza do drgań następne ogniwo, te jeszcze następne itd.

Fala, tak poprzeczna jak i podłużna, przedstawia się na wykresie jako sinusoida. Przy czym na osi OX jest odłożona odległość od źródła fali a na osi OY wychylenie z położenia równowagi (**rys. 6.8**). Wykres ten przedstawia położenie cząsteczek danego ośrodka w pewnej chwili, jest więc jakby „fotografią” położenia cząsteczek w określonym momencie (**rys. 6.8**).

Odstęp pomiędzy dwoma punktami o tej samej fazie drgań, nazywa się długością fali i wyraża się wzorem:

$$\lambda = V T \quad (6.12)$$

gdzie V – jest prędkością rozchodzenia się fali,
 T – okresem drgań.



Rys. 6.8. Wykres ruchu falowego. Jest to wychylenie cząsteczek ośrodka z położenia równowagi w danej chwili

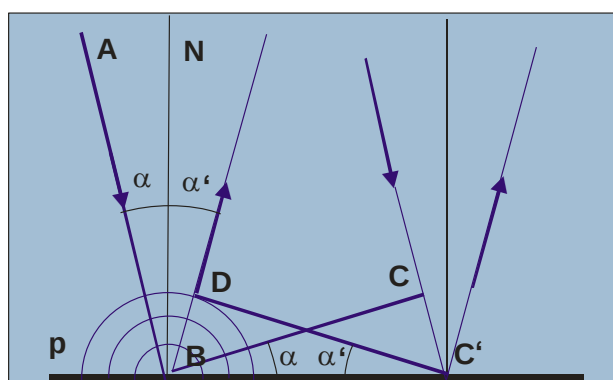
Ze względu na kształt czoła fali rozróżniamy fale płaskie, koliste i kuliste. Wychylenie cząsteczki ośrodka sprężystego z położenia równowagi w zależności od odległości od źródła fali płaskiej (x) i od czasu (t) wyraża się następującym wzorem:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (6.13)$$

gdzie A – jest amplitudą drgań cząsteczek ośrodka.

6.6. Odbicie, załamanie i ugięcie fali

Fale wszystkich rodzajów ulegają odbiciu, załamaniu, ugięciu i interferencji. W przypadku, gdy fala ulega odbiciu, to kąt odbicia równy jest kątowi padania. Kąt padania określa się, jako kąt pomiędzy promieniem padającym, a prostopadłą do powierzchni odbijającej. Kąt odbicia jest to kąt pomiędzy promieniem odbitym a tą samą prostopadłą (**rys. 6.9**). Promień padający lub odbity jest to kierunek fali padającej lub odbitej.

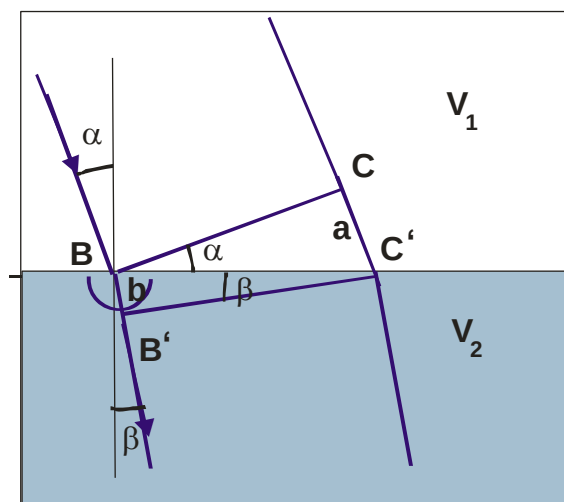


Rys. 6.9. Konstrukcja fali padającej i odbitej

Fala płaska, której czoło jest BC ulega odbiciu od przeszkody p, najpierw swoim jednym brzegiem w punkcie B, a potem drugim brzegiem w punkcie C'. W tym samym czasie, kiedy drugi brzeg fali przejdzie odcinek CC', pierwszy brzeg odbija się w postaci fali kolistej od punktu B, i przebędzie odcinek BD równy odcinkowi CC'. Kąt padania ABN równy jest kątowi CBC'. Kąt odbicia NBD równy jest kątowi BC'D.

Ażeby wykazać, że kąt odbicia α' (BC'D) równa się kątowi padania α (CBC'), wystarczy wykazać, że trójkąty BCC' i BC'D są sobie równe. A to wynika stąd, że bok BC' jest bokiem wspólnym dla obu trójkątów, odcinki BD i CC' są jednakowe, gdyż przebyte są przez tę samą falę w tym samym czasie i w tym samym ośrodku, a kąty BDC' i BCC' są kątami prostymi.

W przypadku, gdy fala przechodzi z jednego ośrodka do drugiego, to zmienia kierunek biegu, co nazywamy załamaniem fali (**rys.6.10**). Jest to spowodowane tym, że w drugim ośrodku fala rozchodzi się z inną prędkością.



Rys. 6.10. Fala przechodząc z jednego ośrodka do drugiego zmienia kierunek biegu

Fala płaska, której czoło jest odcinkiem BC, dochodzi do granicy drugiego ośrodka, najpierw jednym brzegiem w punkcie B a potem drugim w punkcie C'. W tym samym czasie, kiedy drugi brzeg fali dojdzie do granicy ośrodka przebiegając drogę $CC' = a$, to pierwszy brzeg tej samej fali przebędzie drogę $BB' = b$ w ośrodku drugim z prędkością $V_2 < V_1$. Z rysunku widać, że:

$$\sin \alpha = \frac{a}{BC'}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{BC'}$$

Po podzieleniu stronami powyższych dwóch równań i po uwzględnieniu, że $a = V_1 t$ oraz, że $b = V_2 t$, otrzymamy:

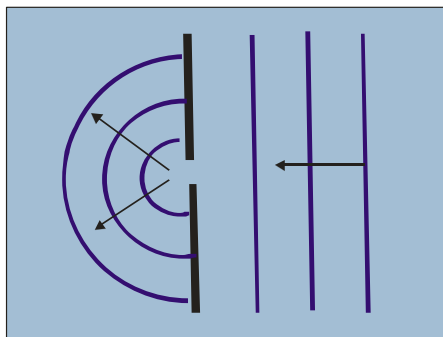
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} \quad (6.14)$$

lub

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad (6.15)$$

Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania równa się stosunkowi prędkości w ośrodku pierwszym do prędkości fali w ośrodku drugim, jest wielkością stałą dla danych dwóch ośrodków i nazywa się współczynnikiem załamania fali ośrodka drugiego względem pierwszego.

Zjawisko ugięcia fali polega na tym, że gdy fala płaska dochodzi do przeszkody lub otworka tego samego rzędu co długość fali, to zamienia się na falę kolistą (**rys. 6.11**). Otworek jest źródłem nowej fali kolistej zgodnie z zasadą Huygensa, która mówi, że każdy punkt ośrodka, do którego dochodzi fala, staje się źródłem nowej fali cząstkowej. Obwiednia wielu fal cząstkowych stanowi czoło fali obserwowanej.

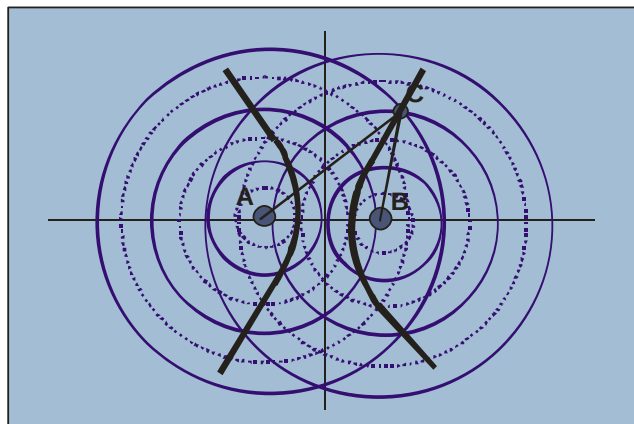


Rys. 6.11. Otworek, do którego dochodzi fala płaska staje się źródłem nowej fali kolistej, co jest jednoznaczne z ugięciem fali

6.7. Interferencja fal

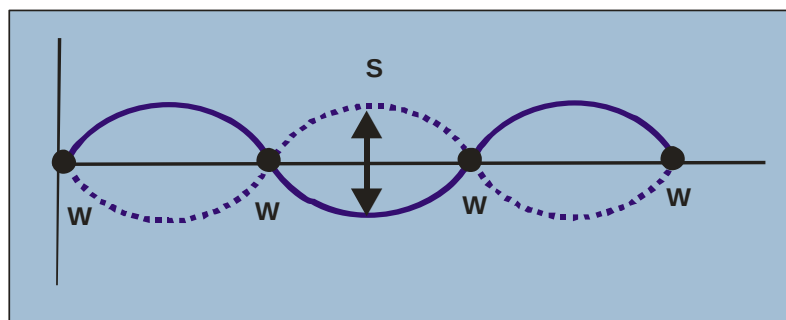
Zjawiska interferencji fal polega na wzmacnianiu lub wygaszaniu się fal spotykających się ze sobą. Spotykające się ze sobą fale nakładają się na siebie, co nazywamy superpozycją fal. Nakładające się na siebie fale będą się wzmacniać, gdy spotkają się w fazach zgodnych, a wygaszać, gdy spotkają się w fazach przeciwnych. Interferencję fal można przedstawić graficznie co jest pokazane na (**rys. 6.12**). W punktach A i B znajdują się źródła fal, emitujące fale koliste. Linie ciągłe oznaczają grzbiety fal, przerywane – doliny. Widać, że w pewnych miejscach przecinają się linie ciągłe z ciągłymi, a w innych miejscach, przerywane z przerywanymi. Będą to miejsca wzmacnień. W innych punktach przecinają się linie ciągłe z przerywanymi, będą to miejsca wygaszeń fal.

Widać też z rysunku, że fale spotykają się w fazach zgodnych, gdy różnica przebytych dróg, licząc od źródeł fal, równa jest całkowitej ilości długości fal, np. w punkcie C różnica ta równa się jednej długości fali ($CA - CB = \lambda$). Gdy warunek ten nie jest spełniony, wtedy następuje całkowite lub częściowe wygaszenie się fal.



Rys 6.12. Punkty przecięcia się linii ciągłych ze sobą lub przerywanych ze sobą wyznaczają miejsca wzmocnień fal a ciągle z przerywanymi miejsca wygaszeń

Przykładem interferencji fal jest powstawanie fali stojącej, która powstaje wtedy, gdy interferują ze sobą dwie jednakowe fale biegnące w kierunkach przeciwnych. Uzyskuje się to najłatwiej przez interferencję fali padającej z falą odbitą. W wyniku interferencji takich fal, w pewnych miejscach drgania cząsteczek ośrodka się redukują, są to węzły fali stojącej, a w innych się wzmacniają, są to strzałki. Widać to na **rys. 6.13**



Rys. 6.13. Fala stojąca. W – węzły, cząsteczki ośrodka nie drgają. S – strzałki, cząsteczki ośrodka drgają maksymalnie

6.8. Źródła dźwięku

Wrażenia głosu doznajemy wtedy, gdy do naszego ucha dotrze fala głosowa i wprowadzi w drgania błonę bębenkową naszego ucha. Fala głosowa jest falą podłużną, która bierze swój początek w źródle dźwięku. Każde źródło dźwięku charakteryzuje się tym, że wykonuje drgania, bardziej lub mniej złożone udzielają się cząsteczkom ośrodka, w którym dane źródło się znajduje i poprzez ten ośrodek rozprzestrzeniają się w postaci fali podłużnej. Wynika stąd, że fala głosowa nie będzie się rozchodzić w próżni lub nawet w powietrzu rozrzedzonym, gdyż będzie brakować cząsteczek, które by przekazywały drgania. Przeciwnie do fal elektromagnetycznych, które w próżni rozchodzą się swobodnie.

Rozróżniamy następujące źródła dźwięku: drgające pręty, słupy powietrza, płyty oraz struny.

6.9. Cechy dźwięku

Każdy dźwięk posiada trzy cechy: wysokość, głośność, i barwę. Są to cechy subiektywne doznawane przez nasz zmysł słuchu. Każda z nich spowodowana jest pewną wielkością fizyczną.

Wysokość dźwięku zależy od częstości drgań a mianowicie, im częstość drgań jest większa tym doznajemy wrażenia dźwięku wyższego. Występuje pewien zakres słyszalności: od około 17 Hz do około 20000 Hz. Drgania poniżej dolnej granicy nazywają się infradźwiękami. Odbierane są jako poszczególne impulsy. Dopiero gdy będzie ich więcej, zleją się w jedno ciągłe wrażenie dźwięku, tym wyższego im będzie większa częstość drgań. Drgania powyżej 20000 Hz nie są odbierane przez ucho ludzkie, nazywają się ultradźwiękami.

Z wysokością dźwięku wiąże się zjawisko Dopplera, polegające na tym, że gdy źródło dźwięku przybliża się do obserwatora, to doznaje on wrażenia głosu wyższego, a gdy się oddala, to niższego, co przedstawia się za pomocą wzoru:

$$v = v_0 \frac{V}{V \pm U} \quad (6.16)$$

gdzie v_0 – jest częstością drgań źródła, gdy jest ono w spoczynku,

V – prędkością głosu

U – prędkością źródła dźwięku względem obserwatora.

Bierzemy znak minus, gdy źródło dźwięku przybliża się do obserwatora, znak plus gdy się oddala od obserwatora.

Jeżeli obserwator zmienia położenie względem źródła, to stosujemy wzór następujący:

$$f = f_0 \frac{V \pm U}{V} \quad (6.17)$$

gdzie f_0 – jest częstością drgań źródła dźwięku, gdy obserwator jest w spoczynku.

Wrażenie głośności dźwięku zależne jest od ilości energii dochodzącej do naszego ucha za pośrednictwem fali głosowej. Ponieważ energia fali zależna jest od amplitudy, więc wrażenie głośności zależy też od amplitudy drgań błony bębenkowej ucha. Energię niesioną przez falę określa się za pomocą natężenia fali. Natężeniem fali natomiast nazywamy stosunek ilości energii przenikającej przez daną powierzchnię do wielkości tej powierzchni i do czasu, w ciągu którego energia ta przenika przez daną powierzchnię, co wyraża się wzorem:

$$I = \frac{E}{S t} \quad (6.18)$$

Ponieważ stosunek energii do czasu jest mocą, więc natężenie fali głosowej określi się jako stosunek mocy do powierzchni i mierzy się w watach na m²:

$$I = \frac{M}{S} \quad (6.19)$$

Tutaj też występuje pewien zakres słyszalności, gdyż w przypadku bardzo dużej energii dochodzącej do naszego ucha może ono ulec uszkodzeniu. Natomiast najniższa wartość natężenia fali głosowej powodująca już wrażenie głosu nazywa się progiem słyszalności i wynosi:

$$I_0 = 10^{-12} \text{ wat/m}^2$$

Natomiast, największe natężenie fali głosowej powodujące już wrażenie bólu, zwane górną granicą słyszalności wynosi

$$I_m = 10 \text{ wat/m}^2.$$

Powyższy zakres słyszalności jest słuszny dla częstości około 1000 Hz, gdyż dla tej częstości ucho nasze jest najbardziej czułe. Dla częstości większych lub mniejszych czułość ucha jest mniejsza. Rozpiętość zakresu słyszalności jest bardzo duża, gdyż wynosi 10¹³ rozpiętości skali. Dlatego też wprowadzono skalę logarytmiczną oraz nową wielkość – intensywność dźwięku albo poziom natężenia głosu. Intensywnością dźwięku nazywamy log. dziesiętny ze stosunku natężenia danego dźwięku do natężenia progowego:

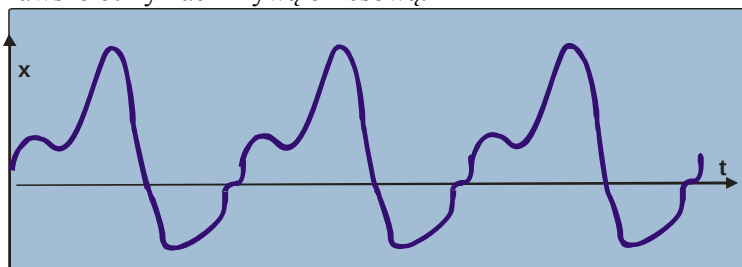
$$i = \log \frac{I}{I_0} \quad (6.20)$$

Jednostką intensywności jest jeden bel. Intensywność danego dźwięku jest równa jednemu belowi, jeżeli, natężenie tego dźwięku jest 10 razy większe od natężenia progowego.

Intensywność dźwięku wyrażona w decybelach jest głośnością, a jednostką jest jeden fon. Głośność dźwięku jest równa jednemu fonowi, gdy intensywność tego dźwięku będzie się równać jednemu decybelowi. Np. zwykła rozmowa ma około 40 dB. Hałaśliwa ulica około 90 dB. Każdy dźwięk ma swoją charakterystyczną barwę, którą wyjaśniamy w oparciu o analizę fali głosowej: każdy dźwięk składa się z szeregu elementów prostych zwanych tonami, jednego

podstawowego i kilku ubocznych, zwanych tonami harmonicznymi. Od ilości i amplitud tonów harmonicznych zależy barwa dźwięku.

Każdy dźwięk może być też przedstawiony na wykresie, jako krzywa okresowa, tzn. ten sam kształt części krzywej powtarza się w czasie każdego okresu (**rys. 6.14**). Od kształtu tego wykresu zależy barwa dźwięku. Każda krzywa okresowa może być też rozłożona na szereg sinusoid. Sinusoida odpowiada składnikowi prostemu dźwięku – czyli tonowi. Również z kilku sinusoid możemy zawsze otrzymać krzywą okresową.



Rys. 6.14. Od kształtu wykresu danego dźwięku zależy jego barwa

6.10. Prędkość dźwięku

Prędkość fali dźwiękowej zależy od ośrodka, w którym się ona rozchodzi i wyraża się wzorem:

$$V = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (6.21)$$

gdzie σ – jest współczynnikiem sprężystości ośrodka,
 ρ – jego gęstością.

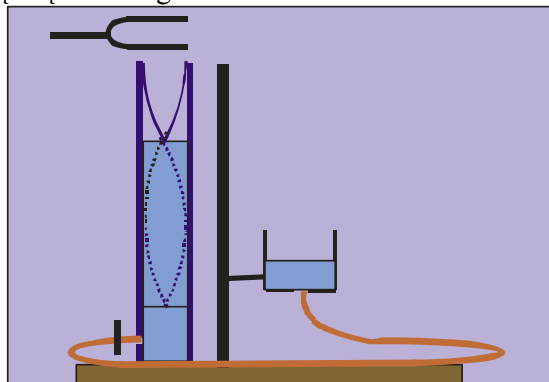
Np. prędkość dźwięku w metalach wynosi od 3000 do 5000 m/s, w wodzie około 1400 m/s. Prędkość fali dźwiękowej w gazach np. w powietrzu zależy nieco od temperatury i wyraża się następującym wzorem:

$$V = V_0 \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \quad (6.22)$$

gdzie V_0 – jest prędkością dźwięku w powietrzu w temperaturze 0°C , ($V_0 = 331,7 \text{ m/s}$)
 t , – jest temperaturą w skali Celsjusza.

Prędkość dźwięku w powietrzu możemy wyznaczyć za pomocą metody zwanej metodą rezonansu: W rurze ustawionej pionowo może zwiększać się wysokość słupa powietrza dzięki opadaniu poziomu wody, która wypływa przez wąż kauczukowy do zbiornika ustawionego obok. U wylotu rury trzymamy dźwięczący kamerton o znanej częstotliwości drgań (**rys. 6.15**). Przy określonej wysokości słupa powietrza, kamerton zaczyna głośniej dźwięczyć. Wtedy jest on

w rezonansie z drgającym słupem odwietrza. A więc częstość drgań powietrza w rurze równa się częstości drgań kamertonu.



Rys. 6.15. Gdy kamerton jest w rezonansie ze słupem powietrza w rurze to na powierzchni wody jest węzeł wytworzonej fali stojącej a u wylotu rury strzałka

Wytworzona w słupie powietrza fala stojąca ma na powierzchni wody węzeł, a u wylotu rury strzałkę. Pozwala to wyliczyć całą długość fali a następnie, korzystając ze wzoru (6.12) i uwzględniając, że

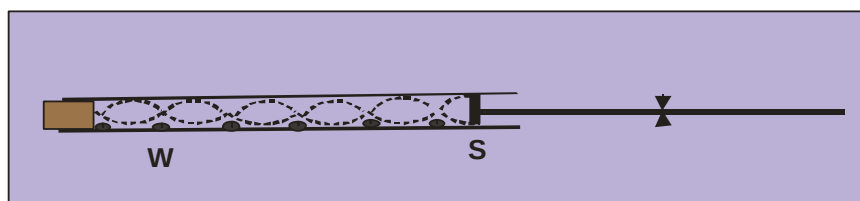
$$T = \frac{1}{\nu}$$

możemy wyliczyć prędkość głosu w powietrzu ze wzoru:

$$V = \lambda \nu$$

Możemy też znaleźć położenie poziomu wody o połowę długości fali niżej, gdzie znajduje się drugi węzeł i określić stąd też długość fali co widać na **rys. 6.15**.

Natomiast prędkość głosu w ciałach stałych, w postaci prętów, możemy wyznaczyć metodą Kundta: rura szklana o długości około 1 m zawierająca lekki proszek korkowy, rozsypany na całej długości, jest ustawiona poziomo. Z jednej strony jest zatkana korkiem a z drugiej, zamknięta krążkiem przymocowanym do pręta, w którym chcemy znaleźć prędkość fali dźwiękowej (**rys. 6.16**).



Rys. 6.16. Opilki korkowe pozwalają wyznaczyć położenie węzłów i strzałek

Pręt jest przymocowany w środku, a na końcach jest swobodny. Wprawiamy go w drgania przez potarcie suknem. Przy odpowiedniej długości słupa powietrza

powstaje fala stojąca. Wtedy drgania pręta są w rezonansie z drganiami powietrza znajdującego się w rurze, a więc i częstotliwości drgań są jednakowe.

Mamy więc:

$$v = \frac{V}{\lambda},$$

gdzie V – jest prędkością fali głosowej w powietrzu w danej temperaturze,
 λ – długością fali w powietrzu, którą znajdujemy z położenia węzłów i strzałek. Proszek korkowy skupia się w węzłach.

Z taką samą częstotliwością drga pręt, co możemy zapisać:

$$v = \frac{V_x}{\lambda'},$$

gdzie V_x – jest prędkością fali dźwiękowej w pręcie,
 λ' – długością fali w tym pręcie, która jest równa dwóm długościom pręta, gdyż na swobodnych jego końcach są strzałki a w środku węzeł
 Częstość drgań w pręcie wyrazi się więc wzorem:

$$v = \frac{V_x}{2L},$$

Porównując częstotliwości drgań w powietrzu i w pręcie, otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy prędkość dźwięku:

$$V_x = V \frac{2L}{\lambda}.$$

Zadania rozwiązane

6.1. (xx 1977) Okres drgań ciężarka zawieszonego na sprężynie wynosi $T_1 = 2$ s. Po doczepieniu dodatkowego ciężarka okres drgań wzrósł do $T_2 = 2,1$ s. Obliczyć statyczny przyrost długości sprężyny wywołany doczepieniem dodatkowego ciężarka, przyjmując przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$. Niech dodatkowy ciężarek ma masę m . Sprężyna wydłuży się pod wpływem tego ciężarka o x , co możemy zapisać:

$$mg = -kx.$$

Współczynnik sprężystości k wyliczymy z danych okresów:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

Po podniesieniu do kwadratu obu stron powyższych równań i po odjęciu stronami otrzymamy:

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k},$$

skąd wyliczymy współczynnik sprężystości k a tym samym i szukaną wielkość x :

$$x = g \frac{(T_2^2 - T_1^2)}{4\pi^2} \quad x = 0,104 \text{ m}.$$

Pomijamy znak minus, gdyż chodzi nam o wartość bezwzględną przyrostu długości sprężyny.

6.2. W rurce zgiętej w kształcie litery U, znajduje się nieco rtęci o długości L . Obliczyć okres drgań tej rtęci, gdy zostanie ona wytrącona z położenia równowagi.

Siłą kierującą w tym przypadku jest ciężar słupka rtęci o wysokości $2x$, gdzie x jest amplitudą drgań i polu przekroju S (**rys. 6.17**). Ciężar ten jest równy sile wyrażonej wzorem (6.2). Możemy więc napisać:

$$-S \cdot 2x \cdot \rho \cdot g = -m \frac{4\pi^2}{T^2} x.$$

Z powyższego równania wyznaczymy szukany okres drgań:

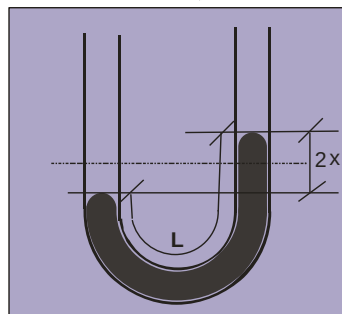
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}.$$

Należy jeszcze wyrazić masę całej rtęci w zależności od L :

$$m = SL\rho,$$

więc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$



Rys. 6.17. Ruch drgający rtęci, wytrąconej z położenia równowagi jest spowodowany ciężarem słupka rtęci o wysokości $2x$

6.3.c Wahadło matematyczne zostało zawieszone u sufitu wagonu poruszającego się po torze poziomym z przyspieszeniem a . Obliczyć okres drgań tego wahadła, przyjmując przyspieszenie ziemskie g oraz długość wahadła L .

Gdy oprócz siły ciężkości na kulkę wahadła działa jakaś inna siła np. siła bezwładności, to we wzorze na okres wahadła w miejsce przyspieszenia ziemskiego g , należy wstawić przyspieszenie wypadkowe z przyspieszenia ziemskiego i z przyspieszenia wynikającego z dodatkowej siły.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}}$$

gdzie g' – jest przyspieszeniem wypadkowym z dwóch przyspieszeń: g i a , skierowanych względem siebie pod kątem prostym. Wartość liczbową tego przyspieszenia wyliczymy ze wzoru:

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2}.$$

Szukany okres drgań wahadła będzie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

6.4. (x 1987) W kabinie windy wisi wahadło. Gdy kabina porusza się ze stałym przyspieszeniem skierowanym do Ziemi, okres drgań wahadła wynosi $T_1 = 1$ s, gdy zaś porusza się ze stałą prędkością, to okres wahań jest $T_2 = 0,3$ s. Obliczyć, przyspieszenie kabiny. Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 9,8$ m/s².

Gdy winda porusza się ze stałą prędkością, to nie występuje siła bezwładności i okres wahadła wyrazi się wzorem, jak w spoczynku:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Jeżeli natomiast winda porusza się z przyspieszeniem w kierunku do dołu, to pojawi się siła bezwładności zmniejszająca ciężar kulki. W tym przypadku od przyspieszenia ziemskiego należy odjąć przyspieszenie windy:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - a}}.$$

Podnosząc do kwadratu i dzieląc stronami powyższe dwa równania, wyznaczmy przyspieszenie windy:

$$a = g \left[1 - \frac{T_2^2}{T_1^2} \right]$$

$$a = 8,92 \text{ m/s}^2$$

6.5. (x 1990) Obliczyć częstość drgań harmoniczných nie tłumionych punktu materialnego o masie $m = 0,002 \text{ kg}$, jeżeli amplituda wynosi $A = 0,1 \text{ m}$, zaś całkowita energia drgającego punktu materialnego wynosi $E = 1 \text{ J}$.

Szukaną częstość otrzymamy ze wzoru (6.3), biorąc odwrotność okresu

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

współczynnik k wyliczymy z danej całkowitej energii w ruchu harmonicznym ze wzoru (6.11).

$$k = \frac{2E}{A^2},$$

skąd:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{mA^2}}, \quad \nu = 50 \text{ Hz}$$

6.6. (xx 1975) Pozioma platforma drga ruchem harmonicznym w kierunku pionowym, przy czym amplituda drgań wynosi $A = 10 \text{ cm}$. Obliczyć najkrótszy dopuszczalny okres drgań, jeżeli przedmioty spoczywające na tej platformie mają przez cały czas pozostać z nią w kontakcie. Przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$. Przedmiot znajdujący się na drgającej platformie, oderwie się od niej, gdy siła bezwładności będzie większa od ciężaru przedmiotu. W granicznym przypadku możemy napisać równość.

$$ma = mg,$$

gdzie a – jest przyśpieszeniem jakie posiada platforma zbliżając się do najwyższego położenia, które równe jest przyśpieszeniu w ruchu harmonicznym:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} A.$$

Mamy więc:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} A.$$

Z otrzymanego równania wyliczymy szukany okres drgań:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{g}}.$$

6.7. (xx 1976) Ciało wykonuje drgania harmoniczne o okresie drgań $T = 1 \text{ s}$, i amplitudzie $A = 0,1 \text{ m}$. Obliczyć czas, w którym ciało przebywa drogę od wychylenia $x = 0$ – $0,5 A$ Obliczyć także prędkość ciała w punkcie $x = 0,5 A$ (amplitudy). Wychodzimy ze wzoru na wychylenie z położenia równowagi w ruchu :

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Podstawiając za $x = 0,5 A$ otrzymamy:

$$0,5 = \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Uwzględniając, że sinus ma wartość 0,5 dla kąta $\varphi = \pi/6$, możemy napisać:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} t,$$

skąd:

$$t = \frac{T}{12}$$

$$t = \frac{1}{12} s$$

W celu obliczenia prędkości korzystamy ze wzoru:

$$V = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Uwzględniając, że $\cos \frac{2\pi}{T} t = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{2\pi}{T} t}$ oraz, że $t = T/12$, otrzymamy:

$$V = A \frac{\pi}{T} \sqrt{3}.$$

6.8. Punkt drgający o amplitudzie A i okresie T ma w pewnej chwili prędkość V . Obliczyć przyspieszenie tego punktu w tej samej chwili.

Szukane przyspieszenie wyrazi się wzorem:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} x,$$

gdzie

$$x = A \sin \omega t,$$

lub

$$x = A \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}.$$

Wyrażając $\cos \omega t$ za pomocą prędkości z równania (6.8), oraz uwzględniając, że $r = A$ otrzymamy:

$$x = A \sqrt{1 - \frac{V^2}{\omega^2 A^2}},$$

a szukane przyspieszenie przedstawi się wzorem:

$$a = \frac{2\pi}{T^2} \sqrt{4\pi^2 A^2 - V^2 T^2}.$$

Zadania uzupełniające

6.9. Areometr o ciężarze P pływa w cieczy. Gdy zanurzy się go nieco głębiej i puści swobodnie, to zacznie on drgać w kierunku pionowym z okresem drgań T . Obliczyć gęstość cieczy, jeżeli promień rurki aerometru jest r a przyspieszenie ziemskie g .

$$\text{Odp.} \quad \rho = \frac{4 \pi P}{g^2 r^2 T^2}.$$

6.10. W naczyniach połączonych o różnych przekrojach poprzecznych S_1 i S_2 znajduje się rtęć o masie m . Obliczyć okres drgań rtęci, gdy zostanie ona wytrącona z położenia równowagi, jeżeli gęstość rtęci jest ρ a przyspieszenie ziemskie g .

$$\text{Odp.} \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{m \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right)}{4 g \rho S_1}}$$

6.11. Wahadło matematyczne o długości L zostało zawieszone na wózku staczącym się swobodnie po równi pochyłej o kącie nachylenia α . Obliczyć okres drgań tego wahadła, przyjmując przyspieszenie ziemskie g .

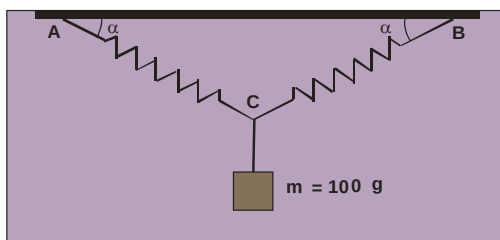
$$\text{Odp.} \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g \cos \alpha}}.$$

6.12. Punkt materialny został wrzucony do fikcyjnego kanału przechodzącego przez środek Ziemi na drugą stronę. Będzie on wykonywał drgania wokół środka Ziemi. Obliczyć okres tych drgań, jeżeli przyjmiemy, że promień Ziemi wynosi $R_0 = 6400$ km, a przyspieszenie ziemskie $g_0 = 10$ m/s².

$$\text{Odp.} \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{R_0}{g_0}}, \quad T = 80,4 \text{ min.}$$

6.13. Ciężarek o masie $m = 100$ g został zaczepiony do dwóch jednakowych sprężyn o znikomej masie i współczynniku sprężystości $k = 5$ N/m każda. Gdy sprężyny były w równowadze, tworzyły kąt $\alpha = 30^\circ$ z kierunkiem horyzontalnym i miały długość $L = 1$ m każda (**rys. 6.18**). Następnie, pociągnięto ciężarek w dół na odległość $d = 2$ cm i puszczono swobodnie. Obliczyć okres powstałych drgań.

$$\text{Odp.} \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{m(L + d \sin \alpha)}{k(d + L \sin \alpha) 2 \sin \alpha}} \quad T = 3,9 \text{ s}$$



Rys. 6.18. W początkowym położeniu (równowagi) sprężyny tworzą kąt $\alpha = 30^\circ$ z kierunkiem poziomym

6.14. (xx 1981) Dane ciało znajduje się na powierzchni poziomej, która porusza się poziomo ruchem harmonicznym z częstotliwością $\nu = 2$ Hz. Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a powierzchnią wynosi $f = 0,5$. Obliczyć, jaki warunek powinna spełniać amplituda tego ruchu, ażeby ciało nie ślizgało się po danej powierzchni. Przyjąć $g = 9,8$ m/s².

Odp. $A \leq \frac{f g}{4 \pi^2 \nu^2}$ $A \leq 0,031$ m.

6.15. Resor obciążający pewną siłą ciężaru ugina się o $x = 5$ cm. Obliczyć okres drgań własnych tego resoru, zakładając, że siła sprężystości resorów jest wprost proporcjonalna do strzałki ugięcia, a przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10$ m/s².

Odp. $T = 2 \pi \sqrt{\frac{x}{g}}$, $T = 0,45$ s.

6.16. Resor wagonu ugina się o $s = 0,016$ m pod ciężarem $P = 5000$ N. Obliczyć, przy jakiej prędkości pociągu może pojawić się rezonans drgań, na skutek wstrząsów na złączach szyn, jeżeli długość szyn jest $L = 12,56$ m a masa wagonu $M = 20000$ kg. Wagon ma 4 resory.

Odp. $V = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P}{M s}}$ $V = 57$ km/h.

6.17. (xx 1988) Wiaderko z wodą zawieszone na sprężynie wykonuje pionowe drgania harmoniczne o amplitudzie $A = 10$ cm i okresie $T = 2$ s. Obliczyć największą i najmniejszą wartość ciśnienia na dno, jeżeli wysokość słupa wody w wiaderku jest równa $h = 10$ cm. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s², ciśnienie atmosferyczne $p_0 = 0.1$ MPa, gęstość wody $\rho = 10^3$ kg/m³.

Odp. $p_{\max} = p_0 + \rho g h + \rho h \frac{4 \pi^2}{T^2} A$ $p_{\max} = 101,1$ kPa

$p_{\min} = p_0 + \rho g h - \rho h \frac{4 \pi^2}{T^2} A$ $p_{\min} = 100,9$ kPa.

6.18. Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 200 \text{ N/m}$ ściśnięto na odcinek $x = 7,5 \text{ cm}$, a następnie położono na niej kulę ważącą $P = 5 \text{ N}$ i puszczo swobodnie, na skutek czego kula wyleciała go góry. Obliczyć prędkość początkową kuli. Przyśpieszenie ziemskie przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp.} \quad V = x \sqrt{\frac{k g}{P}} \quad V = 1,5 \text{ m/s}$$

Z a d a n i a t e s t o w e

6.19. (x 1988) Na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości k zawieszono ciało o masie m . Jak zmieni się okres drgań sprężyny, jeżeli masę zwiększy się cztery razy?

6.20. (xx 1998) Do sprężyny przymocowano ciało o masie $m = 1 \text{ kg}$. Jaki jest okres drgań, jeżeli pod wpływem siły $F = 10 \text{ N}$, sprężyna wydłuża się o $x = 10 \text{ cm}$?

6.21. Kulka miedziana o gęstości ρ_m zawieszona na sprężynie wykonuje drgania o okresie T_1 . Ile razy zmieni się okres drgań, jeżeli zamiast kulki miedzianej zawiesimy żelazną o tym samym promieniu i gęstości ρ_z ?

6.22. (xx 1998) Jaki jest okres drgań fundamentu maszyny, jeżeli jego ciężar razem z maszyną wynosi $P = 1800 \cdot 10^3 \text{ N}$ a współczynnik sprężystości $k = 45 \cdot 10^7 \text{ N/m}$?

6.23. Ciało o masie $M = 2 \text{ kg}$ wisi na sprężynie i wykonuje drgania. Po doczepieniu dodatkowego ciężarka o masie $m = 300 \text{ g}$ sprężyna rozciąga się o $x = 2 \text{ cm}$. Jaki jest okres drgań bez dodatkowego ciężarka?

6.24. Jaki będzie okres drgań ciężarka o masie m umieszczonego pomiędzy dwiema poziomymi sprężynami o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 (jedna sprężyna będzie ściskana a druga rozciągana).

6.25. Zegar wahadłowy został umieszczony w windzie poruszającej się ruchem jednostajnym. Czy zmieni się jego wskazanie? Co będzie pokazywał, gdy winda będzie spadać swobodnie z przyśpieszeniem g ?

6.26. Przyjmując, że ruch tłoka w cylindrze jest ruchem harmonicznym, a jego skok wynosi $h = 10 \text{ cm}$. Obliczyć maksymalną prędkość, gdy silnik wykonuje $n = 3000 \text{ obr/min}$?

6.27. (xx1991) Czy w ruchu harmonicznym wraz ze wzrostem prędkości ciała rośnie wartość przyśpieszenia?

6.28. (xx 1996) Maksymalne wychylenie oraz maksymalna prędkość punktu drgającego ruchem harmonicznym wynoszą odpowiednio 5 cm i 10 cm/s . Jakie jest maksymalne przyśpieszenie w tym ruchu?

6.29. (xx 1996) Znaleźć okres drgań harmonicznym punktu materialnego, jeżeli amplituda tych drgań wynosi A zaś maksymalna prędkość $V_{\max}$.

6.30. (xx 1996) Jak zmienia się przyśpieszenie ciała poruszającego się ruchem harmonicznym, gdy prędkość jego rośnie od $V_1 = 0$ do $V_2 = A \omega$, gdzie A jest amplitudą drgań, ω jest częstością kołową.

6.31. (xx 1987) Jaką pracę należy wykonać, żeby ścisnąć sprężynę o $x = 10$ cm, jeżeli wiadomo, że na skutek zawieszenia na jej końcu ciężarka o masie $m = 50$ g wydłużyła się ona o $x_0 = 5$ cm? Sprężynę uważamy za nieważką a przyspieszenie ziemskie przyjmujemy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

6.32. (xx 1987) Amplituda ciała poruszającego się ruchem harmonicznym wynosi $A = 10$ cm. Ile razy energia potencjalna tego ciała w miejscu odległym o $x = 5$ cm od położenia równowagi, jest mniejsza od energii całkowitej?

6.33. (xx 1986) Ile razy zmieni się energia całkowita ciała poruszającego się ruchem harmonicznym, jeżeli zarówno okres jak i amplituda wzrosną dwa razy?

6.34. Jaki jest okres drgań krążka o promieniu R , tworzącego wahadło fizyczne, jeżeli punkt zaczepienia znajduje się na obwodzie krążka?

6.35. (xx 1998) Fala o częstotliwości $n = 450$ Hz rozchodzi się z prędkością $V = 360$ m/s. Ile wynosi różnica faz dwóch punktów odległych od siebie o $L = 20$ cm?

6.36. (xx 1985) Długość fali dźwiękowej w powietrzu wynosi $\lambda = 0,34$ m. Jaka jest częstość drgań tej fali, jeżeli prędkość dźwięku w powietrzu wynosi $V = 340$ m/s?

6.37. (xx 1984) Odległość pomiędzy sąsiednimi grzbietami fali na jeziorze wynosi $L = 9$ m. Z jaką prędkością rozchodzą się fale, jeżeli uderzają o brzeg $n = 6$ razy na minutę?

6.38. Źródło dźwięku oddalone od obserwatora o $L = 100$ m emituje fale głosowe jednocześnie przez powietrze i przez wodę. Jaka jest prędkość fal głosowych w wodzie, jeżeli obserwator usłyszał głos przez wodę o $\Delta t = 0,23$ s, wcześniej niż przez powietrze? Prędkość głosu w powietrzu wynosi $V_g = 340$ m/s.

6.39. (xx 1998) W powietrzu rozchodzi się dźwięk z częstością $n = 680$ Hz. W jakiej najmniejszej odległości znajdują się dwa punkty wykonujące drgania o przeciwnych fazach? Prędkość dźwięku w powietrzu równa jest $V_g = 340$ m/s.

6.40. Jaka jest głębokość morza, jeżeli sygnał w postaci fali ultradźwiękowej wrócił do punktu emisji po upływie czasu $t = 0,2$ s? Prędkość rozchodzenia się fal ultradźwiękowych w morzu wynosi $V = 1500$ m/s.

6.41. Źródło dźwięku, gdy jest w spoczynku, emituje fale dźwiękowe o częstotliwości $n = 450$ Hz. Jaką wysokość głosu usłyszy obserwator, od którego źródło to będzie się oddalać z prędkością $U = 108 \text{ km/h}$? Prędkość głosu w powietrzu przyjmujemy $V_g = 340$ m/s

6.42. Natężenie dźwięku wynosi 1 W/m^2 . Ilu dB odpowiada to natężenie?

6.43. Jakie jest natężenie fali dźwiękowej wyrażonej w W/m^2 hałasu o 70 dB przejeżdżającej ciężarówki?

6.44. Ile razy dźwięk o 50 dB ma większe natężenie od dźwięku o 20 dB?

VII. CIECZE I CIAŁA STAŁE

7.1. Hydrostatyka, ciśnienie i jednostki

Nauka o cieczy będącej w spoczynku nazywa się hydrostatyką. Podstawową wielkością w tej nauce jest ciśnienie, które definiujemy ogólnie, jako stosunek siły działającej na daną powierzchnię, prostopadle do niej, do wielkości pola tej powierzchni:

$$p = \frac{F}{S} \quad (7.1)$$

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest jeden paskal (Pa): jest to ciśnienie wywarne siłą jednego niutona na powierzchnię 1 m^2 .

Inną jednostką ciśnienia, spoza układu SI, jest atmosfera fizyczna: jest to ciśnienie wywierane przez powietrze atmosferyczne na poziomie morza.

$$1 \text{ at} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (7.2)$$

lub $1 \text{ at} = 1013 \text{ hP}$ (hektopaskali).

7.2. Ciśnienie hydrostatyczne

Ciśnienie, jakie wywiera ciecz na dno naczynia, na jego ścianki lub na przedmioty zanurzone w tej cieczy, nazywa się ciśnieniem hydrostatycznym. Ciśnienie to nie zależy od wielkości powierzchni, na którą działa ciecz, lecz tylko od głębokości zanurzenia, a więc od wysokości słupa cieczy i od jej gęstości, co wyraża się następującym wzorem:

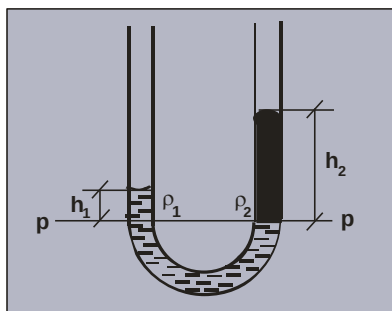
$$p = \rho g h \quad (7.3)$$

Jeżeli uwzględnimy ciśnienie atmosferyczne działające z zewnątrz na powierzchnię cieczy p_0 to całkowite ciśnienie wyrazi się wzorem:

$$p = p_0 + \rho g h$$

W nauce o cieczy będącej w spoczynku, słuszne jest prawo Pascala, mówiące nam, że ciśnienie wywarne z zewnątrz na ciecz, jak i wynikłe z ciężaru cieczy, przenosi się we wszystkich kierunkach z jednakową wielkością i na danej głębokości w różnych punktach ma tę samą wartość. Np. hamulce hydrauliczne w samochodach działają na tej zasadzie, że wywarne z zewnątrz na ciecz hamulcową ciśnienie, przenosi się przez nią we wszystkich kierunkach z jednakową wielkością na wszystkie koła.

Na zasadzie równości ciśnień hydrostatycznych na danej głębokości działają naczynia połączone i prasa hydrauliczna. W naczyniach połączonych w kształcie litery U poziom jest jednakowy w obu ramionach, gdy jest tylko jedna ciecz. Jeżeli natomiast do jednego ramienia nalejemy cieczy innej, niemieszającej się z pierwszą, to wtedy poziomy będą różne (**rys. 7.1**).



Rys. 7.1. Wysokości słupów cieczy są odwrotnie proporcjonalne do ich gęstości

Uwzględniając, że na poziomie p – p ciśnienia są jednakowe, gdyż ciecz jest w spoczynku, możemy napisać:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

lub

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (7.4)$$

Wysokość słupa cieczy jest więc odwrotnie proporcjonalna do jej gęstości. Pozwala to wyznaczyć gęstość jednej cieczy, gdy znana jest gęstość drugiej.

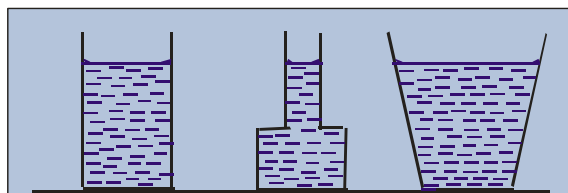
Na podobnej zasadzie działa prasa hydrauliczna. Jest to naczynie połączone, w którym jedno ramię posiada przekrój bardzo mały (s) a drugie bardzo duży (S). Stad, że ciśnienia w obu ramionach mają być równe, możemy napisać:

$$\frac{f}{s} = \frac{F}{S} \quad \text{lub} \quad F = f \frac{S}{s}.$$

Siła F uzyskana w ramieniu o dużym przekroju, jest tyle razy większa od siły z jaką my działamy (f) w części naczynia o przekroju małym, ile razy powierzchnia S jest większa od powierzchni s.

7.3. Paradoks hydrostatyczny

Dane są trzy naczynia o różnych kształtach ale o jednakowych powierzchniach dna, do których nalewamy tej samej cieczy do jednakowej wysokości (**rys. 7.2.**)



Rys. 7.2. Parcie na dno naczynia nie zależy od jego kształtu, przy tych samych powierzchniach dna i tych samych wysokościach słupa cieczy

Ciśnienie na każde dno będzie jednakowe, gdyż zależy tylko od rodzaju cieczy i od jej wysokości, które są w każdym naczyniu takie same. Ale parcie, czyli całkowita siła działająca na każde dno, wyliczone ze wzoru (7.1), będzie też jednakowe, gdyż wyraża iloczyn pola powierzchni przez ciśnienie, chociaż w tych naczyniach ciężary cieczy, określone przez objętości, są różne, i to nazywamy paradoksem hydrostatycznym.

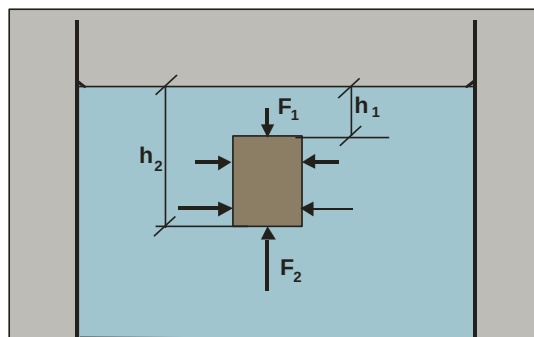
Przykład 7.1. (xx 1982)

Naczynie w kształcie stożka jest całkowicie napełnione cieczą i ustawione wierzchołkiem do góry. Ile wynosi parcie na dno tego naczynia, jeżeli wiadomo, że masa cieczy jest m a przyspieszenie ziemskie g . Parcie na dno naczynia nie zależy od jego kształtu i równa się ciężarowi cieczy w objętości walca o podstawie dna danego naczynia. Wynosi, więc $f = 3mg$

7.4. Prawo Archimidesa

Rozpatrujemy prostopadłościan zanurzony całkowicie w cieczy (**rys. 7.3**). Parcia na boczne ścianki tego prostopadłościanu znoszą się wzajemnie, gdyż są jednakowe i przeciwnie skierowane. Natomiast parcia na dolną i górną podstawę prostopadłościanu są różne i ich różnica daje siłę wyporu działającą na ciało zanurzone w cieczy i skierowaną do góry:

$$F = F_2 - F_1$$



Rys. 7.3. Na ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu skierowana do góry, jako siła wypadkowa dwóch sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, której wartość bezwzględna równa jest różnicy tych sił $(F_2 - F_1)$.

ale zgodnie ze wzorem (7.1) możemy napisać:

$$F_2 = p_2 S$$

$$F_1 = p_1 S,$$

gdzie S – jest powierzchnią dolną i górną prostopadłościanu,
 p_2 – ciśnienie hydrostatyczne na głębokości h_2 ,

p_1 – ciśnienie na głębokości h_1 .

Wyrażając powyższe ciśnienie za pomocą wzoru (7.3) będziemy mieli:

$$F_2 = \rho g h_2 S$$

$$F_1 = \rho g h_1 S .$$

Siła wypadkowa, działająca na ciało zanurzone w cieczy wyrazi się wzorem:

$$F = \rho g S(h_2 - h_1)$$

lub
$$F = \rho g V , \quad (7.5)$$

gdzie V – jest objętością ciała zanurzonego.

Często iloczyn ρg zastępuje się ciężarem właściwym (γ), wtedy wzór (7.5) przyjmie postać:

$$F = \gamma V \quad (7.6)$$

Wzór (7.5) lub (7.6) stanowi prawo Archimedes, które może być wypowiedziane następująco:

Na ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu, skierowana do góry, równa ciężarowi cieczy w objętości ciała zanurzonego lub ciężarowi wypartej cieczy.

Prawo Archimedes, stosuje się również i do gazów. Balony wznoszą się w powietrzu, gdy wybór, równy ciężarowi otaczającego powietrza w objętości balonu, jest większy od jego całkowitego ciężaru. Prawo Archimedes może być wykorzystane do wyznaczania ciężaru właściwego cieczy. Należy w tym celu zważyć dowolne ciało, zwane nurkiem, w powietrzu (P_1) następnie w cieczy, której ciężar właściwy mamy wyznaczyć (P_c) oraz w wodzie (P_w). Korzystając ze wzoru (7.6) możemy napisać:

$$\gamma = \frac{F}{V} ,$$

gdzie F – jest siłą wyporu działającą na ciało zanurzone w cieczy, która jest równa różnicy pomiędzy ciężarem nurka w powietrzu i w badanej cieczy:

$$F = P_1 - P_c$$

gdzie V – jest objętością, którą wyznacza się z różnicy ciężaru nurka w wodzie i w powietrzu. Ile cm^3 wody (liczbowo) zostanie wypartej przez dane ciało, taka będzie jego objętość:

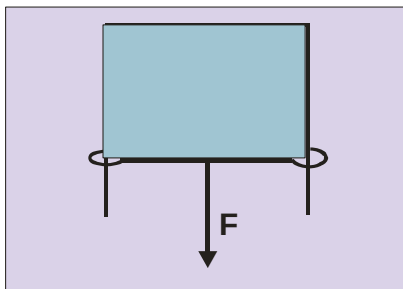
$$V = p_1 - P_w .$$

Mamy więc:

$$\gamma = \frac{P_1 - P_c}{P_1 - P_w} .$$

7.5. Napięcie powierzchniowe

Na powierzchni każdej cieczy znajduje się błonka powierzchniowa, która ma własność kurczenia się. Siła kurczenia się błonki powierzchniowej jest napięciem powierzchniowym. W celu ilościowego ujęcia zjawiska napięcia powierzchniowego rozpatrujemy ramkę drucianą, której jeden bok jest ruchomy (rys.7.4).



Rys. 7.4. Ażeby poprzeczkę utrzymać w miejscu, należy przyłożyć do niej siłę F przeciwną do napięcia powierzchniowego

Po zanurzeniu ramki do roztworu mydlin, tworzy się cienka warstwa cieczy pokryta z obu stron błoną, która kurcząc się przesuwa poprzeczkę. Napięciem powierzchniowym nazywamy stosunek siły działającej na ruchomy bok ramki do jego długości:

$$T = \frac{F}{2L} \quad (7.7)$$

Tworzenie się błonki powierzchniowej na powierzchni każdej cieczy wyjaśniamy w oparciu o siły międzycząsteczkowe: na cząsteczkę znajdującą się wewnątrz cieczy działają siły ze strony innych cząsteczek, jednakowe we wszystkich kierunkach. Dlatego też wypadkowa ich jest równa zero i cząsteczka pozostaje w spoczynku. Natomiast na cząsteczkę znajdującą się na samej powierzchni działają siły ze strony cząsteczek cieczy większe niż ze strony powietrza znajdującego się nad cieczą. Dlatego też siła wypadkowa będzie skierowana do wnętrza cieczy, powodując zagęszczenie cząsteczek, co stanowi błonkę powierzchniową.

Napięcie powierzchniowe można wyznaczyć korzystając ze zjawiska włoskowatości, tj. zjawiska wznoszenia się cieczy w cienkich rurkach zwanych włoskowatymi. W tym celu rurkę szklaną o średnicy ok. jednego mm, wstawiamy do badanej cieczy i mierzymy wysokość, do której wzniesie się ciecz w tej rurce. Gdy rurka ma wewnętrzną średnicę mniejszą od wysokości menisku, wtedy błonka powierzchniowa kurcząc się przyjmuje powierzchnię kulistą podnosząc jednocześnie daną ciecz, dotąd aż jej ciężar zrównoważy się z napięciem powierzchniowym na obwodzie rurki.

Możemy napisać następującą równość:

$$\pi r^2 h \rho g = 2 \pi r T,$$

skąd:
$$T = \frac{1}{2} r \rho g h.$$
 (7.8)

Promień wewnętrzny rurki r mierzymy za pomocą mikroskopu.

7.6. Prawo Hooke'a

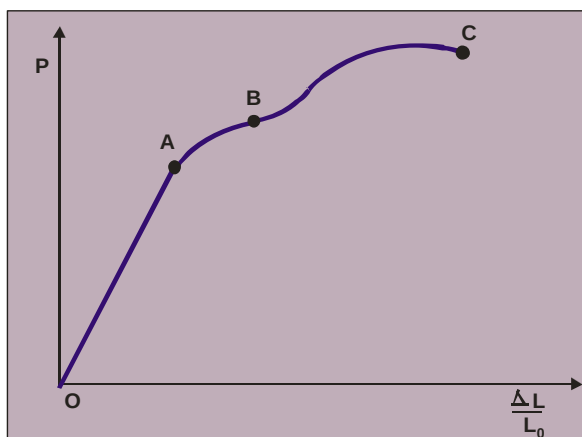
Jedną z wielu właściwości ciała stałego jest jego sprężystość, tzn. właściwość powrotu do postaci pierwotnej po usunięciu sił odkształcających. Właściwość tę ujmuje ilościowo prawo Hooke'a mówiące nam, że przy odkształceniach różnego rodzaju (przy ściskaniu, skręcaniu, zginaniu itp.) powstałe naprężenia są wprost proporcjonalne do względnego odkształcenia, co dla odkształceń przy rozciąganiu, można zapisać:

$$p = E \frac{\Delta L}{L_0},$$

gdzie p – jest naprężeniem powstałym w przedmiocie rozciągany,

$\frac{\Delta L}{L_0}$ – względne odkształcenie,

E – współczynnik sprężystości, który w przypadku rozciągania nazywa się modułem Younga



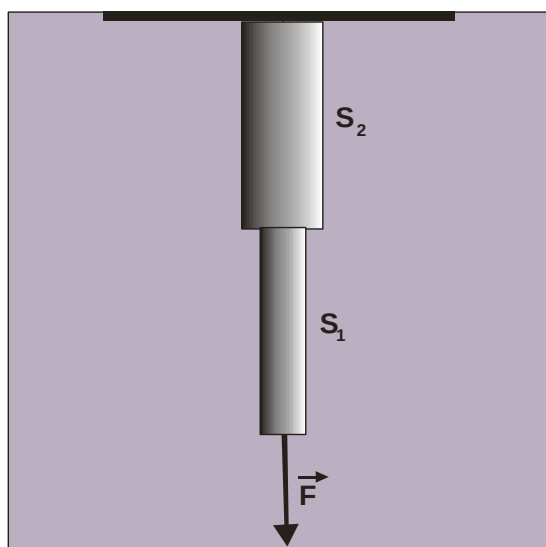
Rys. 7.5. Prawo Hooke'a stosuje się tylko do części OA wykresu

Prawo Hooke'a przedstawione jest na wykresie na **Rys. 7.5**. Stosuje się ono do części prostoliniowej wykresu OA, tzn. do zakresu proporcjonalności pomiędzy powstałym naprężeniem a względnym odkształceniem.

Po przekroczeniu granicy proporcjonalności (punkt A), ciało nie wraca już do postaci pierwotnej. Takie odkształcenie nazywa się plastycznym. Granice plastyczności przedstawia punkt B. Granicę wytrzymałości natomiast przedstawia punkt C. Po przekroczeniu tej granicy następuje zerwanie materiału.

P r z y k ł a d 7.2. (xx 1981)

Dwa pręty stalowe o jednakowych długościach początkowych są rozciągane siłą $\vec{F}$ (**rys. 7.6**). Wydłużenie jednego pręta jest dwa razy większe niż drugiego. Wyznaczyć stosunek przekrojów poprzecznych tych prętów zakładając, że odkształcenie jest idealnie sprężyste, a wpływ ciężarów prętów można pominąć.



Rys. 7.6. Dwa pręty stalowe o jednakowych długościach początkowych rozciągane są siłą $\vec{F}$

Zgodnie prawem Hooke'a możemy napisać:

$$\frac{F}{S_1} = E \frac{\Delta L}{L_0} \quad \frac{F}{S_2} = E \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Po podzieleniu stronami powyższych równań, otrzymamy:

$$\frac{S_2}{S_1} = 2.$$

7.7. Rozszerzalność termiczna ciał

Jeżeli jeden wymiar ciała stałego jest duży w porównaniu z dwoma pozostałymi wymiarami (belki, pręty, druty) to przy ogrzewaniu praktycznie biorąc wydłuża się dane ciało tylko w jednym wymiarze. Mówimy wtedy o rozszerzalności liniowej. W celu porównania zdolności rozszerzania się różnych materiałów, wprowadzono współczynnik rozszerzalności liniowej, jako stosunek względnego przyrostu długości do przyrostu temperatury:

$$\lambda = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta t} \quad (7.10)$$

co odpowiada względnemu przyrostowi długości przypadającemu na jeden stopień przyrostu temperatury.

Współczynnik rozszerzalności objętościowej, określa się jako stosunek względnego przyrostu objętości do przyrostu temperatury:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t} \quad (7.11)$$

Wymiar powyższych współczynników jest $1/K$.

Zależność pomiędzy tymi współczynnikami jest następująca:

$$\alpha = 3 \lambda \quad (7.12)$$

Zadania rozwiązane

7.1. (xx 1978) Otwarte naczynie cylindryczne o polu podstawy $S = 0,01 \text{ m}^2$ zawierające $m = 2 \text{ kg}$ wody stoi na podłodze windy, która porusza się do góry ruchem jednostajnie przyspieszonym. W ciągu czasu $t = 4 \text{ s}$ od chwili rozpoczęcia ruchu, winda wzniosła się na wysokość $h = 4 \text{ m}$. Obliczyć ciśnienie wywierane na dno naczynia, jeżeli ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Szukane ciśnienie na dno naczynia będzie sumą ciśnień: atmosferycznego, wynikającego z ciężaru cieczy, oraz z siły bezwładności. Możemy napisać, że:

$$p = p_0 + \frac{m g}{S} + \frac{m a}{S},$$

gdzie a – jest przyspieszeniem z jakim winda się wznosi, które wyliczymy ze wzoru:

$$h = \frac{a t^2}{2}.$$

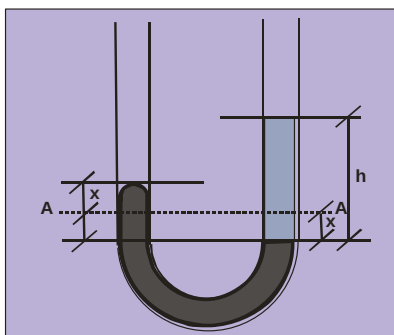
Mamy, więc ostatecznie:
$$p = p_0 + \frac{m g}{S} + \frac{2 m h}{S t^2}.$$

7.2. W naczyniu połączonym w kształcie litery U znajduje się nieco rtęci. Obliczyć na jaką wysokość względem pierwotnego poziomu podniesie się rtęć w jednym ramieniu, jeżeli do drugiego ramienia nalejemy wody do wysokości $h = 13,6 \text{ cm}$ (**rys. 7.7**). Gęstość wody $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ a gęstość rtęci wynosi $\rho_r = 13600 \text{ kg/m}^3$. O ile poziom rtęci obniży się w jednym ramieniu (x) o tyle samo wzniesie się w ramieniu drugim, możemy więc napisać:

$$\rho_r 2x = \rho_w h$$

stąd:

$$x = \frac{\rho_w h}{2\rho_r} \quad x = \frac{1}{2} \text{ cm}$$



Rys. 7.7. O ile poziom rtęci obniży się w jednym ramieniu o tyle samo wzniesie się w drugim, względem pierwotnego poziomu A – A

7.3. (xx 1976) Ciało o masie m i gęstości ρ znajduje się w wodzie o gęstości ρ_w na głębokości h jest podnoszone za pomocą liny ruchem jednostajnie przyspieszonym. Obliczyć najkrótszy czas wyciągania ciała z wody, jeżeli maksymalna siła przy której lina nie zrywa się wynosi $F_{\max}$. Ciężar liny i siły oporu można pominąć. Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Najkrótszy czas wyciągania ciała z wody wyznaczamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}},$$

gdzie a – jest przyspieszeniem ciała z jakim jest ono wyciągane z wody.

Wyliczamy go z warunku, że wytrzymałość liny musi być równa (lub nieco większa) od sumy wszystkich sił działających na wyciągane ciało, co pozwala napisać następujące równanie:

$$F_{\max} = mg - V\rho_w g + ma,$$

gdzie V – jest objętością danego ciała, którą wyrażamy przez jego masę i gęstość:

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Mamy, więc:

$$F_{\max} = m g - \frac{m}{\rho} \rho_w g + m a .$$

Z powyższego równania wyznaczamy przyspieszenie a i tym samym szukany czas t :

$$t = \sqrt{\frac{2 h m \rho}{F_{\max} \rho - m g (\rho - \rho_w)}} .$$

7.4.(x 1989) Ciało spada bez prędkości początkowej w wodzie o gęstości ρ_w . W czasie t ciało przebyło drogę h . Obliczyć gęstość ciała ρ pomijając siłę tarcia wewnętrznego.

Przyspieszenie, z jakim spada ciało w wodzie wyrazi się wzorem:

$$a = \frac{m g - \rho_w g V}{m} ,$$

gdzie V – jest objętością ciała,

m – jego masą, którą określamy za pomocą objętości i gęstości tego ciała:

$$m = V \rho .$$

Uwzględniając powyższe zależności oraz to, że przyspieszenie można wyrazić za pomocą danej drogi (h) i czasu (t) będziemy mieli:

$$\frac{2 h}{t^2} = \frac{V \rho g - V \rho_w g}{V \rho} ,$$

skąd wyznaczamy szukaną gęstość ciała:

$$\rho = \rho_w \frac{g}{\left(g - \frac{2 h}{t^2}\right)} .$$

7.5. (xx 1981) W cieczy o gęstości ρ pływa kula wydrążona współśrodkowo o zewnętrznym promieniu R , wykonana z materiału gęstości ρ_1 . Kula ta zanurzona jest do połowy. Obliczyć grubość jej ścianki.

Zgodnie z prawem Archimidesa, gdy kula jest w równowadze, to jej ciężar równa się sile wyporu:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_1 g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g .$$

Po skróceniu i przekształceniu powyższego równania otrzymamy promień wewnętrznej kuli:

$$r = R \sqrt[3]{\frac{2 \rho_1 - \rho}{2 \rho_1}} .$$

Natomiast grubość ścianki kuli będzie różnicą promieni:

$$d = R - r. \quad d = R \left[1 - \sqrt[3]{\frac{2\rho - \rho_1}{2\rho_1}} \right].$$

7.6. Obliczyć jaka musi być minimalna powierzchnia pływającej po wodzie kry lodowej o grubości $h = 0,5 \text{ m}$, aby mogła ona utrzymać samochód o masie $m = 600 \text{ kg}$, przy założeniu, że cała kra się zanurzy. Gęstość lodu $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$, gęstość wody $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$.

W przypadku równowagi i przy całkowitym zanurzeniu kry, ciężar samochodu łącznie z ciężarem kry równać się będzie sile wyporu:

$$mg + \rho S h g = S h \rho_w g,$$

skąd:

$$S = \frac{m}{h(\rho_w - \rho)} \quad S = 15 \text{ m}^2.$$

7.7. (xx 1987) Drewniany krążek w kształcie walca pływa w wodzie zanurzony do $k = 0.9$ jego wysokości. Obliczyć, jaka część x wysokości krążka będzie zanurzona w wodzie, jeżeli na wodę nalejemy warstwę oliwy całkowicie zakrywającą krążek. Gęstość oliwy wynosi $\rho_0 = 800 \text{ kg/m}^3$, a gęstość wody $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$. W przypadku równowagi, ciężar krążka równa się sile wyporu przez wodę i przez oliwę:

$$h S \rho_c g = S x \rho_w g + S(h - x) \rho_0 g \quad \text{lub} \quad h \rho_c = x \rho_w + h \rho_0 - x \rho_0$$

skąd:

$$x = h \frac{(\rho_c - \rho_0)}{\rho_w - \rho_0}$$

gdzie ρ_c – jest nieznaną gęstością walca, którą wyznaczamy z przypadku, gdy jest on zanurzony tylko w wodzie:

$$h S \rho_c g = k h S \rho_w g$$

skąd:

$$\rho_c = k \rho_w.$$

Mamy, więc:

$$x = h \frac{(k \rho_w - \rho_0)}{\rho_w - \rho_0},$$

I ostatecznie:

$$\frac{x}{h} = \frac{k \rho_w - \rho_0}{\rho_w - \rho_0} \quad \frac{x}{h} = \frac{1}{2}.$$

7.8. (x 1991) W powietrzu ciało waży $P_1 = 20 \text{ N}$, zaś w wodzie $P_2 = 18 \text{ N}$. Gęstość wody wynosi $\rho_w = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Obliczyć objętość i gęstość ciała. Przyśpieszenie ziemskie przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Zgodnie z prawem Archimedesesa różnica ciężaru ciała w powietrzu i w wodzie równa się sile wyporu:

$$P_1 - P_2 = V\rho_w g$$

gdzie V – jest szukaną objętością ciała:

$$V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_w g}$$

$$V = 200 \text{ cm}^3.$$

Gęstość ciała znajdziemy ze wzoru:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

gdzie m – jest masą ciała, którą określamy za pomocą ciężaru P_1 :

$$m = \frac{P_1}{g}.$$

Szuka gęstość ciała wyrazi się wzorem:

$$\rho = \rho_w \frac{P_1}{P_1 - P_2}$$

$$\rho = 10^4 \text{ kg/m}^3$$

Zadania uzupełniające

7.9. Łódź podwodna posiada masę $m = 8 \cdot 10^5 \text{ kg}$ i objętość $V = 900 \text{ m}^3$. Obliczyć, ile wody muszą nabrać jej zbiorniki, żeby się całkowicie zanurzyła, jeżeli przyjąć, że gęstość wody morskiej wynosi $\rho_w = 1030 \text{ kg/m}^3$.

$$\text{Odp. } m_x = 1,27 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

7.10. (xx 1998) Z blachy o grubości b i gęstości ρ_1 , należy zrobić pudełko w kształcie sześcianu o pięciu ścianach które zanurzyło by się do połowy w cieczy o gęstości ρ_2 . Obliczyć krawędź tego sześcianu.

$$\text{Odp. } x = 10 \frac{b\rho_1}{\rho_2}.$$

7.11. Balon o objętości $V = 1 \text{ m}^3$ został napełniony gazem o gęstości $\rho_1 = 0,9 \text{ kg/m}^3$. Obliczyć z jakim przyspieszeniem będzie się on wznosił, jeżeli gęstość powietrza otaczającego jest $\rho_2 = 1,3 \text{ kg/m}^3$ a masa powłoki tego balonu wynosi $m = 0,2 \text{ kg}$. Przyspieszenie ziemskie przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp. } a = \frac{V \rho_2 g - V \rho_1 g - m g}{m + V \rho_1} \quad a = 1,8 \text{ m/s}^2.$$

7.12. Pole powierzchni przekroju statku wynosi $S = 4000 \text{ m}^2$. Obliczyć, o ile powiększy się głębokość zanurzenia po załadunku towaru o ciężarze $Q = 5000 \cdot 10^3 \text{ N}$, przy założeniu, że ściany statku są pionowe, gęstość wody $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp. } x = \frac{Q}{S \rho_w g}, \quad x = 0,12 \text{ m}.$$

7.13. Kula pływa zanurzona w obu cieczach o gęstościach ρ_1 i ρ_2 w ten sposób, że płaszczyzna zetknięcia się obu cieczy przechodzi przez środek kuli. Obliczyć gęstość kuli.

$$\text{Odp. } \rho_x = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

7.14. (xx 1986) Jednorodny walec o wysokości $h = 0,2 \text{ m}$ i polu podstawy $S = 1 \text{ m}^2$, pływa w wodzie wypełniającej naczynie. Oś geometryczna walca jest ustawiona pionowo. Obliczyć minimalną pracę jaką należy wykonać ażeby walec zanurzyć całkowicie w wodzie, oraz objętość wody, która wylała się z naczynia. Gęstość wody i walca wynoszą odpowiednio $\rho_1 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ i $\rho_2 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp. } W = \frac{1}{2} S g h^2 \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1},$$

$$V = S h \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1},$$

$$W = 8 \text{ J}, \quad V = 0,04 \text{ m}^3.$$

Zadania testowe

7.15. W ścianie okrętu na głębokości $h = 2 \text{ m}$ zrobił się otwór o powierzchni $S = 1 \text{ dm}^2$. Jaką siłą należy przycisnąć deseczkę zatykającą otwór? Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

7.16. Jakie jest ciśnienie wywierane na nurka znajdującego się na głębokości $h = 6 \text{ m}$ w słodkiej wodzie jeziora?

7.17. (xx 1998) Kotwica waży w powietrzu $P = 1000 \text{ N}$. Jakiej siły trzeba użyć, ażeby podnieść ją z dna morskiego? Gęstość materiału kotwicy wynosi $\rho_k = 7700 \text{ kg/m}^3$, gęstość wody morskiej $\rho_w = 1030 \text{ kg/m}^3$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

7.18. (xx 1981) Na wadze umieszczone jest naczynie z wodą, zrównoważone odważnikami położonymi na drugiej szalce. W dłoni trzymamy nić, na której zawieszona jest kula metalowa. Jak zachowa się waga, jeżeli kulę zanurzymy w wodzie.

7.19 (xx 1995) Jaki procent objętości góry lodowej jest zanurzony w wodzie, jeżeli gęstość lodu jest $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ a wody morskiej $\rho_w = 1030 \text{ kg/m}^3$?

7.20. (x 1990) Statuetka z brązu waży w powietrzu $Q_1 = 21,5 \text{ N}$, W cieczy o ciężarze właściwym $\gamma = 9,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$ waży $Q_2 = 18,9 \text{ N}$. Jaka jest objętość statuetki?

7.21. (x 1991) Jak zmienia się w miarę wzrostu wysokości siła nośna balonu, jeżeli zachowuje on stałą objętość powłoki?

7.22. (xx 1984) Ciało pływa w cieczy o gęstości ρ zanurzone do $3/5$ swojej objętości. Jaka jest gęstość tego ciała?

7.23. (xx 1986) Ciężar ciała po zanurzeniu w wodzie zmniejszył się trzykrotnie. Ile wynosi gęstość tego ciała, jeżeli gęstość wody przyjąć $\rho_w = 1 \text{ kg/dcm}^3$.

7.24. (xx 1996) Na statek załadowano ładunek o masie równej jednej setnej masy statku. Ile razy zwiększyła się objętość części zanurzonej statku?

VIII. FIZYKA CZĄSTECZKOWA, TERMODYNAMIKA

8.1. Teoria kinetyczno-molekularna

Teoria kinetyczno-molekularna zajmuje się budową cząsteczkową ciał i opiera się na następujących pewnikach: wszystkie ciała składają się z cząsteczek. Cząsteczki te są w ustawicznym ruchu: w gazach poruszają się ruchem chaotycznym. W cieczach, ruchem drgającym wokół zmiennego położenia równowagi, a w ciałach stałych ruchem drgającym, ale wokół stałych punktów równowagi.

Prędkości cząsteczek, lub ich średnia energia kinetyczna jest wprost proporcjonalna do temperatury i wyraża się wzorem:

$$E = \frac{3}{2} k T \quad (8.1)$$

gdzie: k – jest stałą Boltzmana, która może być wyrażona w funkcji stałej gazowej i stałej Avogadra: (N_A)

$$k = \frac{R}{N_A}.$$

Stała Avogadra jest to ilość cząsteczek gazu w jednym kilomolu substancji.

$$N_A = 6 \cdot 10^{26} \frac{\text{Cz}}{\text{kilomol}}$$

8.2. Maxwellowski rozkład prędkości cząsteczek gazu

Cząsteczki danego gazu poruszają się z różnymi prędkościami, więc nie można mówić o jednej ściśle określonej prędkości. Dlatego też posługujemy się pojęciem rozkładu prędkości. Rozkład prędkości według Maxwella przedstawiony jest na **rys. 8.1**.

Na osi poziomej odłożona jest prędkość cząsteczek, natomiast na osi pionowej, liczba cząsteczek, których prędkości leżą w przedziale od V do $V+dV$, tzn. wielkość dN/NdV . Rozkład ten da się przedstawić za pomocą wykresu, na którym występuje maksimum dla pewnej prędkości, którą nazywa się prędkością najbardziej prawdopodobną. Jest to więc taka prędkość, jaką posiada największa ilość cząsteczek.

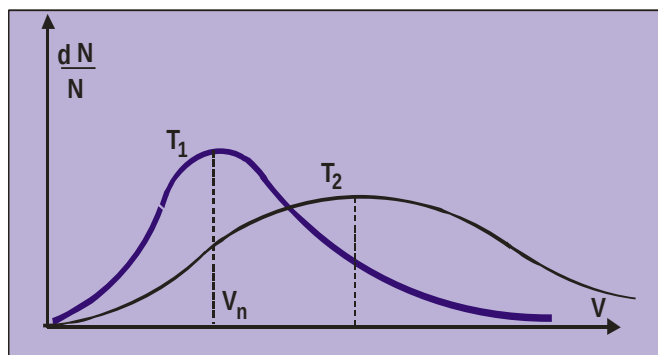
W miarę wzrostu temperatury będzie zwiększać się ilość cząsteczek o większych prędkościach, a zmniejszać się – o prędkościach mniejszych

Prędkość najbardziej prawdopodobna związana jest z prędkością średnią kwadratową ($\overline{v^2}$) następującym wzorem:

$$\overline{v^2} = v_n \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (8.3)$$

Sens fizyczny prędkości średniej kwadratowej jest następujący: energia kinetyczna cząsteczek gazu nie zmieniałaby się, gdyby cząsteczki zamiast rzeczywistych prędkości miały wszystkie jednakową prędkość, równą prędkością średniej kwadratowej.

Prędkość najbardziej prawdopodobna jak i inne prędkości zależy od masy cząsteczki a więc od rodzaju gazu. Np. dla cząsteczek azotu w temperaturze 0°C wynosi $v_{nN} = 400 \text{ m/s}$, a dla cząsteczek wodoru $v_{nH} = 1400 \text{ m/s}$.



Rys. 8.1. Rozkład prędkości cząsteczek gazu według Maxwella $T_2 > T_1$

Cząsteczki gazu będące w ustawicznym ruchu, zderzają się ze sobą. Droga jaką cząsteczka przebędzie od jednego zderzenia do następnego nazywa się drogą swobodną. W stosunku do wszystkich cząsteczek danego gazu, mówi się o średniej drodze swobodnej. Jest ona odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia gazu. Zależność średniej drogi swobodnej gazu od ciśnienia można przedstawić za pomocą następującego równania:

$$\lambda_1 p_1 = \lambda_2 p_2 \quad (8.4)$$

gdzie λ_1 λ_2 – są średnimi drogami swobodnymi przy ciśnieniach p_1 i p_2 odpowiednio.

Np. dla ciśnienia $p = 10^{-10} \text{ mm Hg}$ wynosi około 5 cm.

8.3. Podstawowy wzór teorii kinetyczno-molekularnej

Podstawowy wzór teorii kinetyczno-molekularnej wyraża zależność ciśnienia gazu od średniej energii kinetycznej cząsteczki:

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \bar{E} \quad (8.5)$$

gdzie: N – jest ilością cząsteczek gazu w objętości V ,

$\frac{N}{V}$ – jest koncentracją cząsteczek gazu lub gęstością oznaczaną przez n_0 (liczbą cząsteczek gazu w jednostce objętości).

Będziemy więc mieli:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{E} \quad (8.6)$$

Wzór powyższy nazywa się wzorem podstawowym, gdyż wyprowadza się z niego równanie stanu gazu doskonałego, z którego z kolei otrzymujemy trzy podstawowe przemiany termodynamiczne: izotermiczną, izobaryczną i izochoryczną. W miejsce średniej energii kinetycznej w równaniu (8.5) wstawiamy jej wartość ze wzoru (8.1) i otrzymujemy:

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{3}{2} kT.$$

Jeżeli mamy dwa stany tego samego gazu, to równanie powyższe możemy zapisać w postaci dwóch równań:

$$p_1 = \frac{N}{V_1} kT_1 \quad p_2 = \frac{N}{V_2} kT_2.$$

Po podzieleniu stronami otrzymanych równań i po przeniesieniu wyrazów ze wskaźnikami 1 na jedną stronę, natomiast ze wskaźnikami 2 na drugą, otrzymamy:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (8.7)$$

Równanie (8.7) nazywa się równaniem stanu gazu doskonałego. Załóżmy teraz, że w równaniu tym ciśnienie p_2 , temperatura T_2 i objętość V_2 przyjmą wartości w warunkach normalnych tzn. przy ciśnieniu normalnym, temperaturze 0°C i objętości V_0 . Wtedy równanie (8.7) przyjmie postać:

$$\frac{p V}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

gdzie wyrażenie $\frac{p_0 V_0}{T_0}$ jest wielkością stałą dla jednego mola gazu i nazywa się stałą gazową (R).

$$R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}.$$

Równanie (8.7) przyjmie więc postać:

$$P V = R T \quad (8.8)$$

które nazywa się równaniem Clapeyrona dla jednego mola gazu. Natomiast dla n moli gazu będzie:

$$p V = n R T \quad (8.9)$$

a dla dowolnej masy gazu będziemy mieli:

$$p V = \frac{m}{\mu} R T. \quad (8.10)$$

Powyższe równanie jest równaniem Clapeyrona dla dowolnej masy gazu o masie cząsteczkowej μ . Wiąże ono cztery podstawowe parametry: ciśnienie, objętość, temperaturę oraz masę danego gazu.

Przykład 8.1

Na skutek chwilowego otwarcia zaworu aparatury próżniowej wtargnęło do jej wnętrza powietrze, co spowodowało wzrost ciśnienia o $\Delta p = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Obliczyć masę powietrza, które weszło do aparatury, jeżeli jej objętość wynosiła $V = 30 \text{ dm}^3$, a temperatura $t = 27^\circ\text{C}$. Masa cząsteczkowa powietrza wynosi $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$.

Korzystamy ze wzoru (8.10):

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT,$$

gdzie p_1 , m_1 – są ciśnieniem i masą powietrza w aparaturze przed otwarciem zaworu. Natomiast po otwarciu zaworu będziemy mieli:

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT.$$

Po odjęciu stronami powyższych równań wyliczymy szukaną różnicę mas:

$$\Delta m = \frac{\Delta p}{R} \frac{V}{T} \mu \qquad \Delta m = 18 \text{ g}.$$

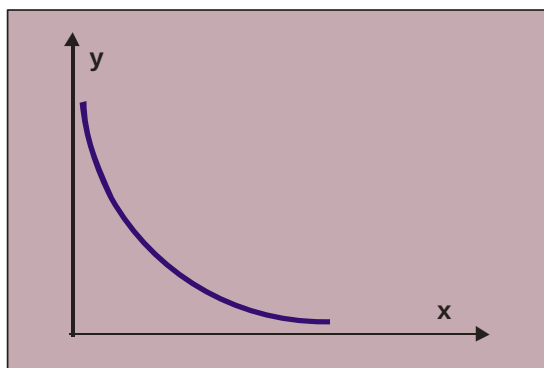
8.4. Przemiany gazowe

Przemiana izotermiczna zachodzi przy stałej temperaturze i określona jest prawem Boyle’a i Mawriotte’a, które mówi nam, że w stałej temperaturze i przy stałej masie, objętość gazu jest odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia.

Mamy, więc dla temperatury $T_1 = T_2$ równanie stanu gazu doskonałego (8.7) przyjmie postać:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \qquad (8.11)$$

Na wykresie w układzie współrzędnych (p, V) przedstawia się to prawo jako hiperbola równoboczna (rys. 8.2)

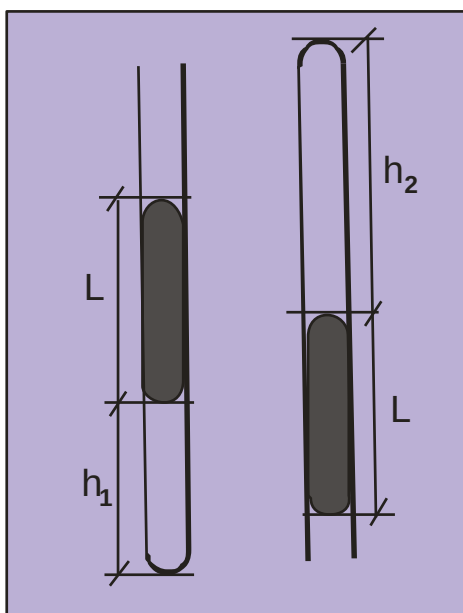


Rys 8.2. Zależność ciśnienia od objętości gazu przy stałej masie i temperaturze przedstawia się na wykresie jako hiperbola równoboczna

Przykład 8.2

Rurka szklana ustawiona pionowo wylotem do góry, zawiera słupek rtęci o długości L i zamyka słupek powietrza o wysokości h_1 (**rys. 8.3**). Jeżeli odwrócimy rurkę otworem do dołu, to słupek powietrza przyjmie wysokość h_2 . Obliczyć ciśnienie zewnętrzne.

Masa i temperatura powietrza zamkniętego w rurce są stałe, zmienia się tylko ciśnienie i objętość. Zgodnie z prawem Boyle'a-Mariotte'a, możemy napisać, że iloczyn ciśnienia i objętości w pierwszym położeniu rurki, równa się iloczynowi ciśnienia i objętości w drugim położeniu:



Rys. 8.3 Ilość powietrza zamkniętego w rurce i jego temperatura pozostają stałe, niezależnie od położenia rurki

$$(p_0 + \rho g L) S h_1 = (p_0 - \rho g L) S h_2$$

gdzie p_0 – jest szukany ciśnieniem zewnętrznym,

ρ – gęstością rtęci,

S – polem przekroju rurki.

Z powyższego równania, po przekształceniach wyliczymy szukane ciśnienie p_0 :

$$p_0 = \frac{\rho g L (h_1 + h_2)}{h_2 - h_1}.$$

Przemiana izobaryczna, ma miejsce przy stałym ciśnieniu i określona jest prawem Gay-Lussaca, które mówi nam, że przy stałym ciśnieniu i przy stałej masie gazu objętość jego jest wprost proporcjonalna do temperatury.

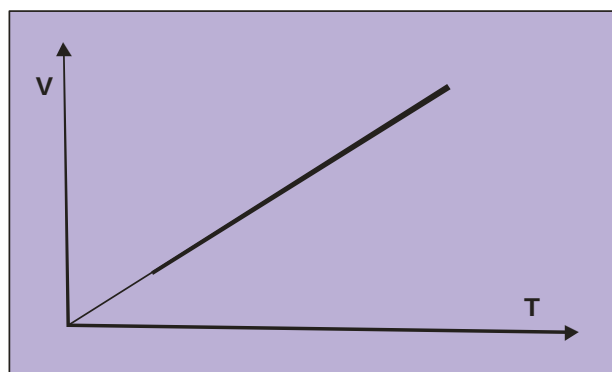
Dla $p_1 = p_2$ równanie stanu gazu doskonałego (8.7) przyjmie postać:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

lub

$$V_2 = \frac{V_1}{T_1} T_2 \quad (8.12)$$

Na wykresie, w układzie współrzędnych (V, T) zależność ta przedstawia się w postaci linii prostej (**rys. 8.4**).



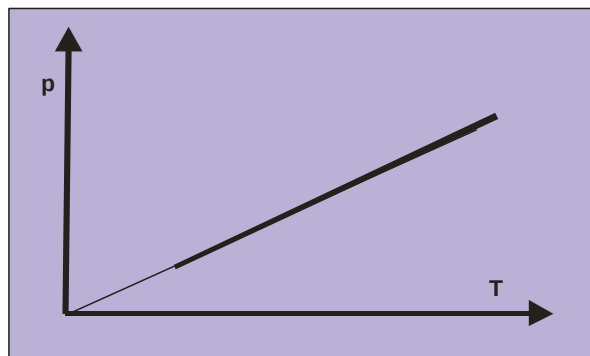
Rys. 8.4. Zależność objętości gazu przy stałym ciśnieniu i stałej masie, od temperatury

Przemiana izochoryczna odbywa się przy stałej objętości i jest określona prawem Charlesa, które mówi nam, że w stałej objętości i przy stałej masie gazu, jego ciśnienie jest wprost proporcjonalne do temperatury.

Dla $V_1 = V_2$ równanie stanu gazu doskonałego (8.7), przyjmie postać:

$$p_2 = \frac{p_1}{T_1} T_2 \quad (8.13)$$

Na wykresie w układzie (p, T) zależność ta przedstawi się w postaci linii prostej (**rys. 8.5**).



Rys. 8.5. Zależność ciśnienia gazu przy stałej objętości i stałej masie od temperatury

Przemiana adiabatyczna ma miejsce, gdy nie ma wymiany ciepła z otoczeniem. Równanie tej przemiany jest następujące:

$$p_1 V_1^K = p_2 V_2^K \quad (8.14)$$

gdzie: K – jest stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości:

$$K = \frac{c_p}{c_v} \quad (8.15)$$

gdzie: c_p – jest zawsze większe od c_v ponieważ gaz ogrzewany przy stałym ciśnieniu, oprócz tego, że się ogrzewa, wykonuje pracę. Przy stałej objętości gaz nie wykonuje pracy a tylko się ogrzewa.

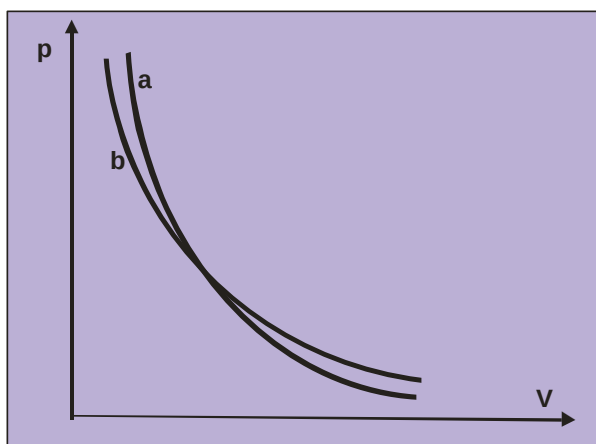
Różnica c_p i c_v równa się stałej gazowej podzielonej przez masę cząsteczkową danego gazu:

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu} \quad (8.16)$$

Jeżeli w miejscach, gdzie występują ciepła właściwe wstawimy ciepła molowe (duże C), to wtedy równanie (8.16) przyjmie formę:

$$C_p - C_v = R$$

Na wykresie w układzie p, V , przemiana adiabatyczna przebiega bardziej stromo w stosunku do przemiany izotermicznej (**rys. 8.6**).



Rys. 8.6. Krzywa a przedstawia przemianę adiabatyczną, natomiast krzywa b – izotermiczną

W przemianie adiabatycznej praca wykonywana jest kosztem energii wewnętrznej. Temperaturę po przemianie adiabatycznej wyliczyć można z następującego równania:

$$T_1 V_1^{K-1} = T_k V_k^{K-1} \quad (8.17)$$

8.5. Pierwsza zasada termodynamiki, praca wykonana przez gaz

Treścią pierwszej zasady termodynamiki jest przyrost bądź ubytek energii wewnętrznej ciała lub układu ciał. Do energii wewnętrznej zaliczamy wszystkie rodzaje energii związane z cząsteczkami danego ciała. Np. energia drgań cząsteczek, energia wiązania, jądrowa i inne. W zagadnieniach termodynamicznych mamy do czynienia nie z wartością bezwzględną energii wewnętrznej ale z samym przyrostem lub ubytkiem tej energii.

Pierwsza zasada termodynamiki mówi nam, że przyrost energii wewnętrznej ciała lub układu ciał, równa się dostarczonemu ciepłu do układu minus wykonana praca przez ten układ.

$$\Delta U = Q - W$$

W równaniu powyższym ciepło Q jest dodatnie, gdyż układ je zyskał a praca ujemna, bo została wykonana przez ten układ. Elementarna praca wykonana przez gaz przy przesunięciu tłoka o niewielki odcinek dh , wyraża się wzorem:

$$dW = F dh,$$

gdzie F – jest siłą, którą określamy za pomocą ciśnienia i pola przekroju tłoka:

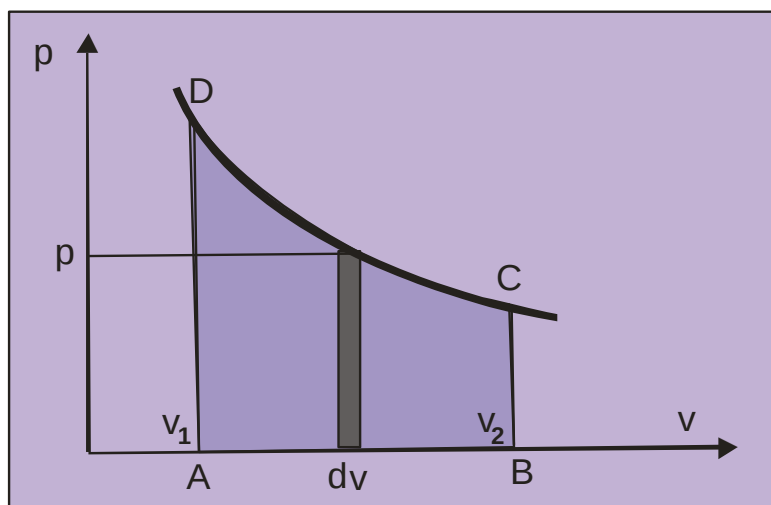
$$F = p S.$$

$$dW = p S dh,$$

lub

$$dW = p dV. \quad (8.18)$$

Praca ta na wykresie przedstawia się jako pole paska o szerokości dV i wysokości p . Praca przy zmianie objętości od V_1 do V_2 będzie polem pod krzywą: ABCD (rys. 8.7).



Rys. 8.7. Praca elementarna wykonana przez gaz jest polem paska o szerokości dV i wysokości p a praca całkowita jest polem figury ABCD

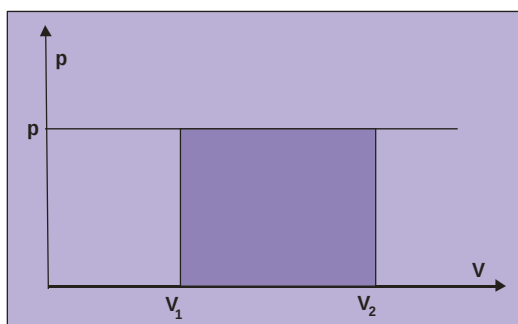
Krzywa DC przedstawia zmianę ciśnienia w zależności od objętości. Praca całkowita wyrazi się całką:

$$W = p \int_{V_1}^{V_2} dV, \quad (8.19)$$

W przypadku, gdy ciśnienie jest stałe (przemiana izobaryczna), to praca przedstawi się wzorem:

$$W = p (V_2 - V_1), \quad (8.20)$$

a na wykresie, w układzie współrzędnych p, V będzie polem prostokąta o boku $V_2 - V_1$ i wysokości p (**rys. 8.8.**).



Rys. 8.8. Praca w przemianie izobarycznej jest polem prostokąta o podstawie $V_1 - V_2$

Przykład 8.3.

W cylindrze o objętości $V = 300 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ znajduje się gaz pod ruchomym tłokiem o ciężarze $Q = 1200 \text{ N}$ i powierzchni $S = 100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ w temperaturze $T_1 = 17^\circ\text{C}$. Obliczyć pracę rozprężenia tego gazu przy zmianie temperatury o $\Delta T = 100^\circ\text{C}$, jeżeli zewnętrzne ciśnienie atmosferyczne wynosiło $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

Ponieważ ciśnienie jest stałe (przemiana izobaryczna), praca wyrażona jest wzorem:

$$W = \left(p_0 + \frac{Q}{S} \right) \Delta V,$$

gdzie:

$$\Delta V = V_2 - V_1.$$

Nieznana objętość V_2 wyliczamy z przemiany izobarycznej:

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Uwzględniając powyższą zależność, szukana praca wyrażona jest wzorem:

$$W = \left(p_0 + \frac{Q}{S} \right) V_1 \frac{\Delta T}{T_1} \quad W = 23 \text{ J}.$$

Druga zasada termodynamiki

Z obserwacji zjawisk w przyrodzie możemy zauważyć, że wszystkie rodzaje energii łatwo zamieniają się na ciepło. Wydzielanie się ciepła obserwujemy przy pracy mechanicznej, przy przepływie prądu elektrycznego, przy reakcjach chemicznych. Natomiast zamiana odwrotna, tzn. energii cieplnej na inne rodzaje energii nie odbywa się tak łatwo. To nie znaczy, żeby nie można było zamienić ciepła na inny rodzaj energii w ogóle, np. na pracę mechaniczną. Można, ale muszą być spełnione odpowiednie warunki. O tych warunkach mówi nam druga zasada termodynamiki, a mianowicie, ciepło może być zamienione na pracę lub na inny rodzaj energii tylko, wtedy gdy istnieje różnica temperatur. Wówczas, ciepło przepływając od ciała o temperaturze wyższej do ciała o temperaturze niższej może, ale nie musi, zamienić się częściowo na pracę.

Zamiana ta odbywa się w urządzeniach, które nazywają się silnikami cieplnymi. Pierwszym silnikiem cieplnym była maszyna parowa, później został wynaleziony silnik spalinowy a potem odrzutowy.

Każdy silnik cieplny charakteryzuje się sprawnością, którą definiujemy jako stosunek energii użytecznej do energii dostarczonej, co można wyrazić następującym wzorem:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (8.21)$$

gdzie Q_1 – jest ciepłem dostarczonemu do silnika,
 Q_2 – ciepłem oddanym do chłodnicy.

Sprawność silnika cieplnego można jeszcze wyrazić inaczej a mianowicie za pomocą temperatury grzejnicy i chłodnicy:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (8.22)$$

Silniki cieplne mają niewielką sprawność, sięgającą zaledwie 25%

8.7. Ciepła pobierane przez ciała przy różnych procesach

Ciepła właściwe, określa się wzorem:

$$c_w = \frac{Q}{m \Delta t} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \quad (8.23)$$

W nawiasie podany jest wymiar ciepła właściwego. Jest to ilość ciepła potrzebna do ogrzania jednego kg danego ciała o jeden stopień. Ilość ciepła, jaką pobiera ciało o dowolnej masie m , ażeby ogrzać się o Δt stopni wyraża się wzorem:

$$Q = m c_w \Delta t \quad (8.24)$$

W celu wyznaczenia ciepła właściwego danego ciała, korzystamy z tzw. bilansu cieplnego, tj. równania, w którym po jednej stronie jest ciepło stracone np. przez gorące opilki metalowe wrzucone do chłodnej wody, a po drugiej stronie równania, ciepło zyskane przez wodę i kalorymetr:

$$m c_x (t_1 - t_k) = m_w c_w (t_k - t_0) + m_k c_k (t_k - t_0),$$

gdzie t_1 – jest temperaturą początkową ciała gorącego,

t_k – jest temperaturą końcową,

t_0 – temperaturą początkową wody i kalorymetru.

Często w przypadku gazów zamiast masy podawany jest iloczyn ciepła molowego przez ilość moli. Wtedy wylicza się ciepło potrzebne do ogrzania danego gazu korzystając z pojęcia ciepła molowego, które definiujemy jako ilość ciepła potrzebna do ogrzania jednego kilomola gazu o jeden stopień.

Ciepło topnienia określa się, jako stosunek ciepła potrzebnego do stopienia m kg danej substancji, w stałej temperaturze topnienia, do masy tej substancji:

$$L = \frac{Q}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]. \quad (8.25)$$

Jest to ilość ciepła potrzebna do stopienia jednego kg danej substancji w temperaturze topnienia. Ilość ciepła potrzebna do stopienia m kg danej substancji wyrazi się wzorem:

$$Q = L m \quad (8.26)$$

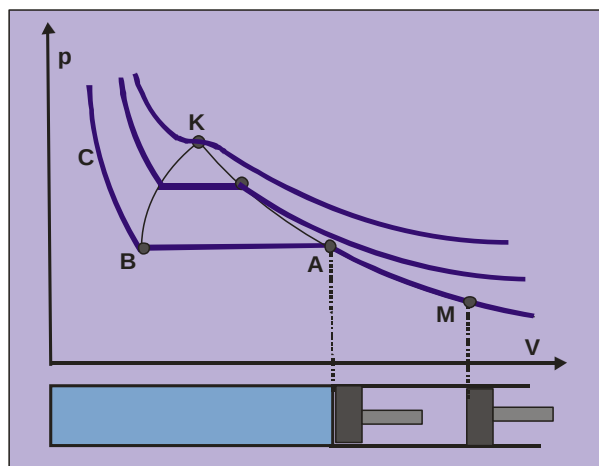
Podobnie określamy inne ciepła: parowania, rozpuszczania, sublimacji, spalania (wydziela się ciepło a nie jest pobierane)

8.8. Para nasycona i nienasycona

Istnieją dwa rodzaje par: nasycona i nienasycona. Para nasycona to taka, która posiada maksymalną gęstość i maksymalne ciśnienie w danej temperaturze, tzn. że nie może ona pomieścić w swojej objętości więcej cząsteczek. Do pary nasyconej nie stosują się prawa gazowe, gdyż zmniejszając np. objętość tej pary nie spowodujemy wzrostu jej ciśnienia, jak to wynika z prawa Boyle’a-Mariotte’a, ale ciśnienie pozostaje stałe, a część pary ulegnie skropleniu. Gdy natomiast podniesiemy temperaturę pary nasyconej, to w wyższej temperaturze będzie mogła ona pomieścić więcej cząsteczek, a więc będzie parą nienasyconą. Dlatego też parę nienasyconą nazywa się często parą przegrzaną. Do pary nienasyconej stosują się prawa gazowe.

Z pary nienasyconej możemy otrzymać parę nasyconą przez obniżenie temperatury lub zmniejszenie objętości, co jest równoznaczne ze wzrostem ciśnienia, albo przez zastosowanie obu sposobów jednocześnie. Temperatura, w której para nienasycona staje się nasyconą i skrapla się, nazywa się punktem rosy. Przejście pary nienasyconej w nasyconą można przedstawić na wykresie za po-mocą rodziny izoterm (**rys. 8.9**).

Punkt M przedstawia stan pary nienasyconej w pewnej objętości V i pod pewnym ciśnieniem p, co odpowiada też pewnemu położeniu tłoka w cylindrze.



Rys. 8.9. Punkt K odpowiada ciśnieniu, objętości i temperaturze krytycznej

Gdy przesuniemy tłok, tak, że objętość pary zmniejszy się, to wtedy wzrośnie ciśnienie i para nienasycona staje się parą nasyconą (punkt A). Przy dalszym zmniejszaniu objętości ciśnienie pozostaje stałe (odcinek AB linii prostej). Gdy cała para ulegnie skropleniu, wtedy niewielkie zmniejszenie objętości spowoduje duży wzrost ciśnienia co przedstawia krzywa BC. Dla wyższych temperatur odcinki linii prostej będą coraz krótsze, aż przy pewnej temperaturze zredukują się do punktu (przebiegu), który został nazwany punktem krytycznym (K). Odpowiada on ciśnieniu, objętości i temperaturze krytycznej.

Wynika stąd, że temperatura krytyczna to taka, powyżej której substancja może występować tylko w stanie lotnym, tzn. nie daje się skroplić przy zastosowaniu nawet bardzo wysokich ciśnień. Np. temperatura krytyczna dla powietrza wynosi -147°C .

Zadania rozwiązane

8.1. (xx 1981) Ciśnienie gazu jednoatomowego podgrzewanego w otwartym naczyniu jest stałe i równe $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Obliczyć zmianę liczby cząsteczek (ich różnicę) na jednostkę objętości, jeżeli temperatura wzrosła od $T_1 = 27^{\circ}\text{C}$ do

$T_2 = 327^{\circ}\text{C}$. Przyjąć $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \frac{\text{cz}}{\text{kmol}}$, $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Piszemy dwa razy podstawowy wzór teorii kinetyczno-molekularnej dla dwóch różnych ilości cząsteczek i różnych temperatur:

$$p = \frac{2}{3} \frac{n_1}{V} E_1 \quad p = \frac{2}{3} \frac{n_2}{V} E_2,$$

gdzie

$$E_1 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T_1 \quad \text{oraz} \quad E_2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T_2.$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności, wyznaczamy n_1 n_2 i następnie odejmujemy je od siebie:

$$n_1 - n_2 = \frac{p V N_A}{R T_1} - \frac{p V N_A}{R T_2}.$$

Szukana różnica cząsteczek na jednostkę objętości wyrazi się wzorem

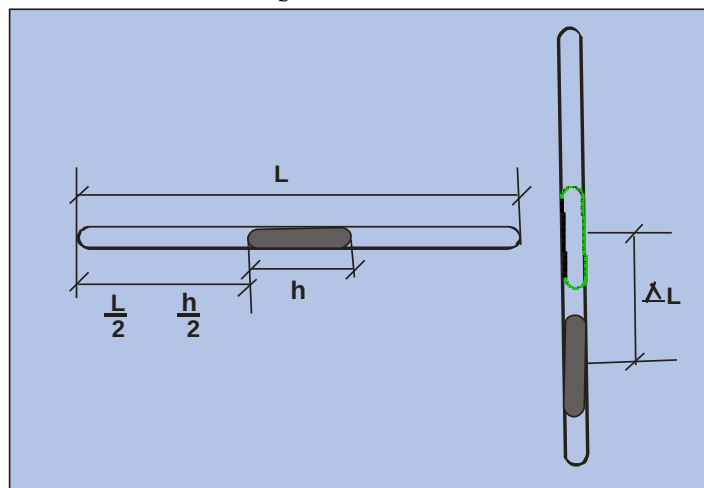
$$\frac{\Delta n}{V} = \frac{p N_A}{R} \left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right]$$

$$\frac{\Delta n}{V} = 1,22 \cdot 10^{23} \frac{\text{cz}}{\text{m}^3}.$$

8.2. (xx1981) Pośrodku poziomej rurki o długości $L = 1$ m zamkniętej na końcach znajduje się słupek rtęci o długości $h = 20$ cm. Gdy rurkę ustawiono pionowo, bez zmiany temperatury, słupek rtęci przesunął się o $\Delta L = 10$ cm (**rys. 8.10**).

Obliczyć ciśnienie w rurce w pozycji poziomej. Gęstość rtęci $\rho = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

a przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



Rys. 8.10. Gdy rurka przechodzi z pozycji poziomej w pionową, to słupek rtęci przesunie się o ΔL

Gdy rurka przechodzi z pozycji poziomej w pionową, wtedy zamknięte powietrze w lewej części rurki w pozycji poziomej a potem w górnej części, w pozycji pionowej, posiada masę i temperaturę stałą, więc stosując prawo Boyle'a-Mariotte'a możemy napisać równanie:

$$p_x \left(\frac{L}{2} - \frac{h}{2} \right) = p \left(\frac{L}{2} - \frac{h}{2} + \Delta L \right),$$

gdzie p_x – jest szukanim ciśnieniem powietrza tak w lewej jak i w prawej części rurki w pozycji poziomej,

p – ciśnienie tego samego powietrza w górnej części rurki gdy jest ona w pozycji pionowej.

Dla dolnej części rurki możemy napisać

$$p_x \left(\frac{L}{2} - \frac{h}{2} \right) = (p + \rho g h) \left(\frac{L}{2} - \frac{h}{2} - \Delta L \right).$$

Rugując ciśnienie p , przez wyznaczenie go z pierwszego równania i wstawienie do drugiego oraz po przekształceniach, otrzymamy równanie z którego wyznaczymy szukane ciśnienie p_x :

$$p_x = \frac{\rho g h [(L - h)^2 - 4 (\Delta L)^2]}{4 \Delta L (L - h)},$$

$$p_x = 49980 \text{ Pa}.$$

8.3. (x 1987) Pewna masa azotu zajmuje objętość $V_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ w temperaturze $T_1 = 100 \text{ K}$. Obliczyć temperaturę T_2 połowy tej masy azotu w objętości $V_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ pod tym samym ciśnieniem.

Korzystając z równania Clapeyrona, możemy napisać:

$$p V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \quad p V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2.$$

Po podzieleniu stronami powyższych równań wyliczymy szukaną temperaturę T_2 :

$$T_2 = \frac{2 T_1 V_2}{V_1} \quad T_2 = 400 \text{ K}.$$

8.4. (x 1986) Obliczyć masę tlenu, jaką można zmieścić w butli o pojemności $V = 8,3 \text{ dm}^3$ w temperaturze $T = 27^\circ \text{ C}$, jeżeli ciśnienie w butli nie może przekroczyć wartości $p = 10^7 \text{ Pa}$. Masa molowa tlenu $\mu = 32 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, stała gazowa

$$R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}.$$

Zadanie rozwiążemy korzystając jedynie z równania Clapeyrona dla dowolnej masy gazu:

$$p V = \frac{M}{\mu} R T,$$

Skąd wyznaczamy szukaną masę tlenu:

$$m = \frac{p V \mu}{R T}$$

$$m = 1,06 \text{ kg}$$

8.5. (xx 1983) W pionowo ustawionym naczyniu zamkniętym od góry tłokiem, który może poruszać się bez tarcia, znajduje się $n = 1 \text{ kmol}$ gazu o temperaturze $T = 300 \text{ K}$. Ciężar tłoka $Q = 500 \text{ N}$ a jego powierzchnia $S = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Obliczyć jaką będzie objętość tego gazu, jeżeli naczynie umieścimy w windzie poruszającej się do góry z przyspieszeniem $a = g/2$. Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$.

W oparciu o równanie Clapeyrona możemy napisać:

$$\left(p_0 + \frac{Q}{S} + p_b \right) V = n R T,$$

gdzie V – jest szukana objętości gazu,

p_b – ciśnieniem wywartym na gaz spowodowanym siłą bezwładności tłoka.

Jest ono równe iloczynowi masy tłoka przez przyspieszenie windy:

$$p_b = \frac{Q g}{g 2 S}.$$

Objętość V będzie:

$$V = \frac{2 n R T S}{2 p_0 S + 3 Q}$$

$$V = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

8.6. (xx 1979) Dwa jednakowe zbiorniki połączone rurką zawierają gaz doskonały pod ciśnieniem p w temperaturze T . Po ogrzaniu jednego zbiornika ciśnienie wzrosło do wartości p_1 . Zakładając, że temperatura w drugim zbiorniku nie uległa zmianie, obliczyć temperaturę w ogrzonym zbiorniku. Pominąć objętość rurki i rozszerzalność cieplną zbiorników.

Korzystamy z równania Clapeyrona dla pierwszego zbiornika przed jego ogrzaniem:

$$p V = \frac{m}{\mu} R T,$$

następnie, piszemy to samo równanie dla tego samego zbiornika po jego ogrzaniu do temperatury szukanej T_1 .

$$p_1 V = \frac{m - \Delta m}{\mu} R T_1,$$

gdzie Δm – jest masą gazu, która przeszła ze zbiornika ogrzanego do sąsiedniego, zwiększając tam ciśnienie bez zmiany temperatury. Równanie Clapeyrona dla drugiego zbiornika będzie więc:

$$p_1 V = \frac{m + \Delta m}{\mu} R T.$$

Rugując z ostatnich dwóch równań Δm , otrzymamy:

$$p_1 V \mu T - m R T_1 T = - \mu p_1 V T_1 + m R T T_1,$$

uwzględniając, że

$$p = \frac{m R T}{\mu V}$$

Wyliczymy T_1 :

$$T_1 = \frac{p_1 V}{2 p - p_1}.$$

8.7. (xx 1982) Dwa zbiorniki o objętości V_1 i V_2 wypełniono gazem o masie cząsteczkowej μ . Ciśnienia i temperatury gazów w zbiornikach wynosiły odpowiednio: p_1 i T_1 oraz p_2 i T_2 . Następnie oba zbiorniki połączono. Podczas tej operacji część gazu ulotniła się, a temperatura i ciśnienie gazu pozostałego w połączonych zbiornikach uzyskały wartości p i T . Obliczyć masę gazu, który się ulotnił, jeżeli dana jest stała gazowa R .

Piszemy dwa razy równanie Clapeyrona dla obu zbiorników przed ich połączeniem:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} R T_1 \quad p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} R T_2.$$

Następnie piszemy równanie Clapeyrona dla obu zbiorników, gdy zostały połączone:

$$p V = \left(\frac{m_1 + m_2 - \Delta m}{\mu} \right) R T,$$

gdzie:

$$V = V_1 + V_2.$$

Ostatecznie będziemy mieli:

$$\Delta m = \frac{\mu}{R} \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} - \frac{p V_1 + p V_2}{T} \right).$$

8.8. (xx 1987) W wyniku ogrzania gazu doskonałego o objętości V_1 znajdującego się pod ciśnieniem p_1 jego objętość i ciśnienie wzrosły k razy, a przyrost energii wewnętrznej wyniósł ΔU . Obliczyć stosunek ciepła molowego przy stałym ciśnieniu do ciepła molowego przy stałej objętości (C_p/C_v) dla tego gazu.

Piszemy dwa razy równanie Clapeyrona: przed ogrzaniem gazu i po ogrzaniu:

$$p_1 V_1 = n R T_1$$

$$k^2 p_1 V_1 = n R T_2$$

Następnie, odejmujemy od równania drugiego, pierwsze. Otrzymamy wtedy równanie, z którego wyznaczymy szukaną różnicę temperatur ΔT :

$$\Delta T = \frac{p_1 V_1 (k^2 - 1)}{n R}$$

Różnię tę wstawiamy do wzoru na ilość ciepła, które pobiera gaz przy ogrzewaniu się przy stałej objętości:

$$Q = n C_v \Delta T$$

$$Q = n C_v \frac{p_1 V_1 (k^2 - 1)}{n R}.$$

Uwzględniając, że $R = C_p - C_v$ oraz, że $Q = \Delta U$, następnie, dzieląc licznik i mianownik otrzymanego równania przez C_v , wyliczymy szukany stosunek $\frac{C_p}{C_v}$:

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{p_1 V_1 (k^2 - 1)}{\Delta U} + 1.$$

8.9. (x 1989) W cylindrze z tłokiem znajduje się $m = 1,3 \text{ kg}$ powietrza o temperaturze $T_1 = 280 \text{ K}$ i pod normalnym ciśnieniem $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$. Obliczyć, pracę, jaką wykona powietrze podczas rozprężania izobarycznego na skutek ogrzania go do temperatury $T_2 = 553 \text{ K}$. Przyjąć gęstość powietrza w warunkach normalnych $p_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$. Piszemy dwa razy równanie Clapeyrona dla dwóch temperatur i dla dwóch objętości przy stałym ciśnieniu:

$$p V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1$$

$$p V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2$$

Po odjęciu stronami powyższych dwóch równań, otrzymamy wyrażenie na pracę wykonaną przez powietrze

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1),$$

gdzie:

$$p(V_2 - V_1) = W.$$

Stałą R określamy w zależności od objętości jednego mola powietrza w warunkach normalnych:

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Masę cząsteczkową μ wyliczymy jako iloczyn objętości jednego mola w warunkach normalnych przez gęstość w tych samych warunkach.

$$\mu = V_0 \rho_0.$$

Uwzględniając powyższe wzory otrzymamy:

$$W = \frac{m}{\rho_0} \frac{p_0}{T_0} (T_2 - T_1).$$

$$W = 10^5 \text{ J}.$$

8.10. (xx 1976) Gaz o masie m oziębiono od temperatury T_1 do temperatury T_2 przy stałym ciśnieniu. Obliczyć pracę wykonaną przez ten gaz w tym procesie oraz zmianę energii wewnętrznej tego gazu. Przyjąć, że znane są: masa jednego mola μ , ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p i stała gazowa R .

Pracę znajdujemy z równania Clapeyrona zapisanego dla dwóch temperatur przy zmianie objętości, przy stałym ciśnieniu (zad. 8.9):

$$W = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1).$$

Zmianę energii wewnętrznej gazu obliczymy z pierwszej zasady termodynamiki:

$$\Delta U = Q - W,$$

gdzie Q wyraża się wzorem:

$$Q = m c_p (T_2 - T_1).$$

Ostatecznie więc będziemy mieli:

$$\Delta U = m (T_2 - T_1) \left(c_p - \frac{R}{\mu} \right).$$

8.11. (xx 1989) Masa gazu doskonałego znajdującego się w temperaturze T oziębia się izochorycznie, w wyniku czego ciśnienie gazu zmniejszyło się dwukrotnie. Następnie gaz rozszerza się pod stałym ciśnieniem, przy czym jego temperatura wzrasta do temperatury początkowej. Obliczyć pracę wykonaną przez gaz, jeżeli masa cząsteczkowa gazu wynosi μ , a stała gazowa R .

Gaz wykonuje pracę tylko w procesie izobarycznym, którą określamy z równania Clapeyrona:

$$p_1 dV = \frac{m}{\mu} R (T - T_1).$$

Nieznana temperaturę T_1 obliczamy z przemiany izochorycznej:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p}{T},$$

skąd:
$$T_1 = T \frac{p_1}{p}.$$

Uwzględniając, że $p_1 = \frac{p}{2}$ i po odpowiednich przekształceniach, otrzymamy:

$$W = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{2}.$$

8.12. (xx 1988) Gaz znajdujący się pod ciśnieniem $p_1 = 10^5$ Pa zajmował początkowo objętość $V_1 = 22$ dm³. W wyniku przemiany izobarycznej temperatura gazu wzrosła od $T_1 = 20^\circ\text{C}$ do $T_2 = 100^\circ\text{C}$. Obliczyć pracę wykonaną przez gaz.

Ponieważ ciśnienie jest stałe, to pracę wyliczamy ze wzoru:

$$W = p_1 (V_2 - V_1).$$

Nieznana objętość V_2 obliczymy z przemiany izobarycznej:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

skąd:
$$V_2 = \frac{V_1}{T_1} T_2.$$

Mamy więc:
$$W = p_1 V_1 \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right). \quad W = 6 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

8.13. (x 1990) Idealny silnik cieplny w ciągu każdego cyklu otrzymuje z kotła ciepło w ilości $Q_1 = 1,2 \text{ kJ}$. Temperatura kotła wynosi, $T_1 = 127^\circ\text{C}$, a chłodnicy $T_2 = 7^\circ\text{C}$. Obliczyć pracę wykonaną przez silnik w ciągu jednego cyklu oraz ciepło przekazywane przy tym do chłodnicy. Pracę wyliczamy porównując dwa wzory na sprawność silnika cieplnego:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (8.27)$$

gdzie: $Q_1 - Q_2$ jest ciepłem zamienionym na pracę. W układzie SI jest to szukana praca.

Mamy więc:

$$W = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Ciepło przekazane do chłodnicy (Q_2) wyliczymy również z równania (8.26):

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}, \quad Q_2 = 840 \text{ J}.$$

8.14. (xx 1978) Gaz doskonały rozprężając się izobarycznie wykonuje pracę $W = 600 \text{ J}$. Obliczyć ilość ciepła, którą pobiera gaz, jeżeli stosunek ciepła właściwego gazu pod stałym ciśnieniem do ciepła właściwego w stałej objętości wynosi $K = 1,4$. Wychodzimy ze wzoru Clapeyrona, który dla przemiany izobarycznej może być zapisany w następującej postaci:

$$p dV = \frac{m}{\mu} R \Delta T,$$

gdzie: $p dV = W$, jest dana praca.

Z powyższego równania wyznaczamy różnicę temperatur ΔT i wstawiamy ją do wzoru na ilość ciepła, którą pobiera gaz:

$$Q = m c_p \Delta T \quad \text{albo} \quad Q = m c_p \frac{W}{m} \frac{\mu}{R},$$

gdzie stałą gazową R wyznaczymy w funkcji $c_p - c_v$:

$$R = \mu (c_p - c_v)$$

Mamy, więc:

$$Q = c_p \frac{W}{(c_p - c_v)}.$$

Po wyciągnięciu c_v przed nawias otrzymamy:

$$Q = \frac{W K}{K - 1}, \quad Q = 2100 \text{ J}.$$

8.15. (xx 1980) (xx 1985) W cylindrze zamkniętym ruchomym tłokiem znajduje się tlen o masie $m = 0,2 \text{ kg}$. Po pobraniu przez tlen ciepła $Q = 916 \text{ J}$ jego temperatura wzrosła o $\Delta T = 5 \text{ K}$. Obliczyć ciepło właściwe tlenu w tej przemianie, pracę wykonaną przez gaz oraz zmianę energii wewnętrznej tlenu. Masa cząsteczkowa tlenu wynosi $\mu = 32 \text{ kg/kmol}$, stała gazowa $R = 8,31 \text{ J/mol K}$. Tarcie tłoka pomijamy.

Ciepło właściwe wyliczymy ze wzoru na ciepło pobrane przez gaz:

$$Q = m c_p \Delta T,$$

skąd:
$$c_p = \frac{Q}{m \Delta T}, \quad c_p = 916 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

Pracę wykonaną przez gaz, wyliczymy z równania Clapeyrona:

$$p dV = \frac{m}{\mu} R \Delta T, \quad W = 259 \text{ J}.$$

Zmianę energii wewnętrznej wyliczymy z pierwszej zasady termodynamiki:

$$\Delta U = Q - W, \quad \Delta U = 657 \text{ J}.$$

8.16. (xx 1975) W butli stalowej o pojemności $V = 0,02 \text{ m}^3$ znajduje się azot pod ciśnieniem $p = 10^6 \text{ N/m}^2$. Obliczyć, jaką ilość ciepła należy doprowadzić, aby ciśnienie w butli wzrosło dwukrotnie. Przyjąć ciepło molowe azotu w stałej objętości $C_v = 20,75 \text{ J/mol K}$ oraz $R = 8,31 \text{ J/mol K}$.

Szukana ilość ciepła obliczymy ze wzoru:

$$Q = n C_v \Delta T.$$

Różnicę temperatur ΔT znajdziemy, pisząc równanie Clapeyrona dwa razy, przed przemianą i po przemianie:

$$p V = n R T_1 \quad 2 p V = n R T_2.$$

Odejmując stronami otrzymamy ΔT a tym samym ilość ciepła Q :

$$Q = C_p \frac{p V}{R}, \quad Q = 5 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

8.17. (xx 1980) W naczyniu o stałej objętości V znajduje się gaz doskonały. Obliczyć ilość ciepła, którą należy dostarczyć, aby ciśnienie gazu wzrosło Δp , jeżeli dany jest stosunek $c_p/c_v = K$. Ilość dostarczonego ciepła wyliczymy ze wzoru:

$$Q = m c_v \Delta t.$$

Różnicę temperatur ΔT wyznaczymy z równania Clapeyrona:

$$V \Delta p = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Mamy więc:

$$Q = \frac{c_v V \Delta p \mu}{R},$$

gdzie:

$$R = \mu (c_p - c_v).$$

Ostatecznie szukana ilość ciepła wyrazi się wzorem: $Q = \frac{V \Delta p}{K - 1}$

8.18. w zamkniętym zbiorniku o pojemności $V = 2 \text{ m}^3$ znajduje się $m = 32 \text{ kg}$ powietrza o temperaturze $T_1 = 290 \text{ K}$. Po ogrzaniu izochorycznym ciśnienie wzrosło do $p_2 = 15 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Obliczyć ilość pobranego ciepła, jeżeli ciepło właściwe powietrza przy stałej objętości jest $c_v = 729 \text{ J/kg K}$ oraz $c_p/c_v = 1,4$.

Szukaną ilość ciepła wyliczymy ze wzoru:

$$Q = m c_v (T_2 - T_1).$$

Nieznana temperaturę T_2 otrzymamy z przemiany izochorycznej:

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}.$$

Nieznane ciśnienie początkowe p_1 wyznaczymy z równania Clapeyrona:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1,$$

skąd:

$$p_1 = \frac{m}{\mu} R \frac{T_1}{V_1}.$$

Ostatecznie ilość pobranego ciepła wyrazi się wzorem:

$$Q = \frac{p_2 V_1}{c_p/c_v - 1} - m c_v T_1 \quad Q = 735 \text{ kJ}.$$

8.19. Obliczyć, ile ciepła należy dostarczyć ażeby ogrzać izobarycznie powietrze o objętości $V = 10 \text{ dm}^3$ znajdujące się pod ciśnieniem $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ od temperatury $T_1 = 280 \text{ K}$ do $T_2 = 300 \text{ K}$. Jeżeli dana jest gęstość powietrza w warunkach normalnych $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$, ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu $c_p = 1016 \text{ J/kg K}$, temperatura i ciśnienie w warunkach normalnych T_0 i p_0 .

Szukaną ilość ciepła wyliczymy ze wzoru:

$$Q = m c_p (T_2 - T_1) \quad m = V \rho_t$$

gdzie: ρ_t – jest gęstością powietrza, którą trzeba wyrazić w funkcji gęstości w warunkach normalnych. W tym celu stosujemy równanie stanu gazu doskonałego:

$$\frac{p V}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

Po podzieleniu obu stron powyższego równania przez m i odwróceniu stronami otrzymamy:

$$\rho_t = \rho_0 \frac{T_0}{T_1} \frac{p}{p_0}.$$

Ostatecznie szukane ciepło Q wyrazi się wzorem

$$Q = V \rho_0 \frac{T_0}{T_1} \frac{p}{p_0} (T_2 - T_1)$$

$$Q = 515 \text{ J.}$$

8.20. (xx 1976) W naczyniu znajduje się $V_1 = 1 \text{ dm}^3$ wrzącej wody pod ciśnieniem zewnętrznym $p = 10^5 \text{ N/m}^2$. Woda wrząc zamieniła się całkowicie w parę o objętości $V_2 = 1671 \text{ dcm}^3$ bez zmiany temperatury i przy niezmienionym ciśnieniu zewnętrznym. Obliczyć, jaki procent dostarczonego ciepła, stanowi przyrost energii wewnętrznej związanej ze zmianą stanu skupienia. Przyjąć gęstość wody $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, ciepło parowania $R = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$. Przyrost energii wewnętrznej wyliczymy z pierwszej zasady termodynamiki:

$$\Delta U = Q - W,$$

gdzie: Q – jest ciepłem dostarczonym, które idzie na zmianę wody w parę:

$$Q = V_1 \rho R \quad W = p(V_2 - V_1).$$

Przyrost energii wewnętrznej wyrazi się teraz wzorem:

$$\Delta U = V_1 \rho R - p(V_2 - V_1).$$

Przyrost energii wewnętrznej w stosunku do dostarczonego ciepła będzie:

$$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{V_1 \rho R - p(V_2 - V_1)}{V_1 \rho R}$$

$$\frac{\Delta U}{Q} 100 \% = 92,6 \ %.$$

8.21. (xx 1981) W kolbie znajduje się woda o temperaturze $t = 0^{\circ}\text{C}$. Wypompowując z kolby powietrze powodujemy zamarzanie wody związane z jej parowaniem. Obliczyć, jaka część wody wyparuje, jeżeli nie będzie dopływu ciepła z zewnątrz. Ciepło topnienia lodu $L = 3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$, ciepło parowania wody $R = 22,7 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$.

Jeżeli przez x oznaczymy pewną ilość wody, która wyparowała na skutek zmniejszenia ciśnienia, to ciepło potrzebne do wyparowania tej ilości wody wyrazi się wzorem:

$$Q = R x.$$

Parowanie odbyło się kosztem ciepła odebranego wodzie, na skutek czego ona zamarzła. Ciepło stracone przez wodę przy jej zamarzaniu wyrazi się wzorem:

$$Q = (m - x)L,$$

gdzie: m – jest masą wody przed wyparowaniem.

Porównując powyższe ciepła, otrzymamy:

$$R x = (m - x)L,$$

z którego wyliczymy jaka część wody wyparowała czyli stosunek x/m :

$$\frac{x}{m} = \frac{L}{R + L}$$

$$\frac{x}{m} = 12,6 \text{ \%}.$$

8.22. (1987) Jaką prędkość początkową należy nadać bryle lodu o temperaturze $t = -10^{\circ}\text{C}$, rzuconej z wysokości $h = 100 \text{ m}$, ażeby po zderzeniu z Ziemią całkowicie się stopiła? Ciepło właściwe lodu $C = 2100 \text{ J/kg K}$, ciepło topnienia lodu $L = 3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$. Zakładamy, że wydzielone ciepło całkowicie pobiera lód. Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Energia potencjalna bryły lodu, oraz jej energia kinetyczna, którą trzeba jej nadać, zamienia się na ciepło, które ogrzewa lód do temperatury topnienia i go topi:

$$\frac{m v_0^2}{2} + m g h = m C [0 - (-10)] + m L$$

skąd wyznaczamy szukaną prędkość początkową v_0 .

$$v_0 = \sqrt{2[C(\Delta t) + L - g h]} \quad v_0 = 836,7 \text{ m/s}.$$

Zadania uzupełniające

8.23. Obliczyć, ile cząsteczek gazu znajduje się w 1 dm^3 przy ciśnieniu $p = 10^{-4} \text{ mm Hg}$ ($p = 0,013 \text{ Pa}$) i temperaturze $t = 27^\circ \text{C}$, oraz w 1 cm^3 w warunkach normalnych (liczba Loschmidta). Dana jest liczba Avogadra $N_A = 6 \cdot 10^{26} \text{ cz/kmol}$ oraz objętość jednego mola w warunkach normalnych $V_0 = 22,4 \text{ dcm}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Odp.} \quad N &= \frac{N_A}{V_0} \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} & N &= 3,2 \cdot 10^{15} \frac{\text{cz}}{\text{dcm}^3} \\ n_0 &= \frac{N_A}{V_0} & n_0 &= 2,7 \cdot 10^{19} \frac{\text{cz}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

8.24. (xx 1977) Pęcherzyk powietrza wypływa z dna jeziora. W chwili osiągnięcia powierzchni wody jego objętość jest $n = 3$ razy większa niż na dnie. Obliczyć głębokość jeziora, jeżeli temperatura wody na dnie wynosi $t_1 = 7^\circ \text{C}$, a na powierzchni $t_2 = 17^\circ \text{C}$. przyjąć ciśnienie atmosferyczne $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, gęstość wody $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp.} \quad h = \frac{p_0 (n T_1 - T_2)}{\rho g T_2} \quad h = 19,6 \text{ m.}$$

8.25. (xx 1979) Balon o objętości $V = 150 \text{ m}^3$ jest wypełniony ogrzanym powietrzem o temperaturze $t_1 = 350 \text{ K}$ i ciśnieniu $p = 990 \text{ hPa}$. Obliczyć siłę nośną balonu, jeżeli temperatura otaczającego powietrza wynosi $t_2 = 290 \text{ K}$, a ciśnienie zewnętrzne jest takie samo jak wewnątrz balonu. Łączna masa powłoki i wyposażenia balonu wynosi $m = 20 \text{ kg}$, gęstość powietrza w warunkach normalnych ($T_0 = 273 \text{ K}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$) jest równa $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Odp.} \quad F = \frac{V g \rho_0 T_0 p}{p_0} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) - m g \quad F = 105 \text{ N.}$$

8.26. Naczynie w kształcie cylindra o długości $L = 0,8 \text{ m}$, w pozycji horyzontalnej zostało rozdzielone na dwie równe części nieważkim tłokiem, mogącym przesuwać się bez tarcia, ale początkowo zablokowanym. Obliczyć ile razy było większe ciśnienie w jednej części zbiornika w stosunku do drugiej części, jeżeli tłok po zwolnieniu przesunął się na odległość $d = 20 \text{ cm}$.

$$\text{Odp.} \quad n = \frac{L + 2d}{L - 2d} \quad n = 3.$$

8.27. (x 1985) Otwarta butelka znajduje się w powietrzu o temperaturze $t = 27^{\circ}\text{C}$. Obliczyć do jakiej temperatury należało by ogrzać butelkę (wraz z zawartym w niej powietrzem), ażeby uszło z niej połowa cząsteczek powietrza. Pominąć rozszerzalność cieplną szkła butelki.

Odp. $T_x = 2 T$ $T_x = 600 \text{ K}$.

8.28. W zbiorniku o objętości $V = 40 \text{ dcm}^3$ znajduje się azot o masie $m_1 = 50 \text{ g}$ i tlen o masie $m_2 = 10 \text{ g}$. Obliczyć do jakiej temperatury można mieszaninę tych gazów, jeżeli ścianki zbiornika wytrzymują maksymalne ciśnienie $p = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

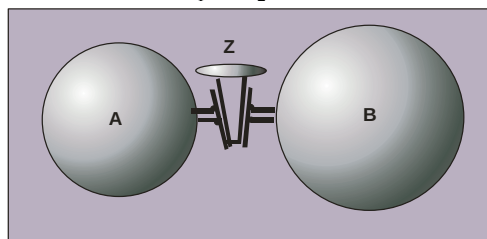
Odp. $T = \frac{p V}{R \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right)}$ $T = 476 \text{ K}$.

8.29. Dwa zbiorniki o różnych objętościach, jeden o objętości $V_1 = 0,004 \text{ m}^3$ a drugi o objętości $V_2 = 0,002 \text{ m}^3$ zawierające powietrze w temperaturze $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ są połączone długą poziomą rurką o średnicy $d = 0,01 \text{ m}$, w której znajduje się kropla rtęci. Obliczyć na jaką odległość przesunie się kropla rtęci, jeżeli jeden zbiornik zostanie ogrzany do temperatury $t_1 = 7^{\circ}\text{C}$, a drugi oziębiony do temperatury $t_2 = -3^{\circ}\text{C}$. Nie uwzględniać rozszerzalności samych zbiorników oraz przyjąć, że objętość rurki jest mała w stosunku do objętości zbiorników.

Odp. $x = \frac{4 V_1 V_2 (T_1 - T_2)}{\pi d^2 (V_1 T_1 + V_2 T_2)}$ $x = 0,6 \text{ m}$.

8.30. W zbiorniku A (rys. 8.11.) o pojemności $V_1 = 0,1 \text{ m}^3$ znajduje się powietrze pod ciśnieniem $p_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. W zbiorniku B o pojemności $V_2 = 0,3 \text{ m}^3$ znajduje się też powietrze, ale pod ciśnieniem $p_2 = 4 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. Obliczyć ciśnienie, jakie będzie wywierać powietrze, jeżeli otworzymy zawór Z łączący obydwie zbiorniki, zakładając, że temperatura w czasie mieszania się powietrza pozostanie stała.

Odp. $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$ $p = 3,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.



Rys. 8.11. Przy zamkniętym zaworze Z panują różne ciśnienia w obu zbiornikach. Po jego otwarciu ciśnienia się wyrównują

8.31. (xx 1975) Z butli o pojemności $V = 0,01 \text{ m}^3$ ulated się na skutek wady zaworu gaz o masie cząsteczkowej $\mu = 32 \text{ kg/kmol}$. W temperaturze $T_1 = 280 \text{ K}$ manometr wskazywał ciśnienie $p = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$. Po pewnym czasie w temperaturze $T_2 = 290 \text{ K}$ manometr wskazał to samo ciśnienie. Obliczyć masę gazu, który się ulotnił, przyjmując stałą gazową $R = 8,3 \text{ J/mol K}$.

$$\text{Odp.} \quad \Delta m = \frac{p V \mu}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad \Delta m = 0,0237 \text{ kg}.$$

8.32. Gaz został ogrzany przy stałym ciśnieniu od temperatury $t_1 = 27^\circ\text{C}$ do $t_2 = 57^\circ\text{C}$. Obliczyć, o ile procent zwiększyła się objętość tego gazu.

$$\text{Odp.} \quad \frac{dV}{V} 100 = 10 \%$$

8.33. (xx 1984) W cylindrze o objętości V_1 znajduje się gaz doskonały pod ciśnieniem p_1 . Obliczyć przyrost energii wewnętrznej w dwóch przypadkach:

- a) przy stałej objętości V_1 ciśnienie wzrosło k razy,
- b) pod stałym ciśnieniem p_1 objętość wzrosła n razy.

Przyjąć stałą gazową R i ciepło molowe w stałej objętości C_v .

$$\text{Odp.} \quad \text{a) } \Delta U_1 = \frac{C_v p_1 V_1 (k-1)}{R} \quad \text{b) } \Delta U_2 = \frac{C_p p_1 V_1 (n-1)}{R}.$$

8.34. (x 1988) Azot o masie $m = 0,2 \text{ kg}$ ogrzano od temperatury $t_1 = 20^\circ\text{C}$ do temperatury $t_2 = 100^\circ\text{C}$ pod stałym ciśnieniem. Obliczyć ilość ciepła pobraną przez gaz i wykonaną pracę. Ciepło właściwe azotu w stałej objętości wynosi $c_v = 726 \text{ J/kg K}$, masa molowa $\mu = 28 \text{ kg/k mol}$, stała gazowa $R = 8,3 \text{ J/mol K}$.

$$\text{Odp.} \quad Q = m \left(\frac{R}{\mu} + c_v \right) (T_2 - T_1) \quad Q = 16,4 \cdot 10^3 \text{ J} \quad W = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) \quad W = 4,57 \text{ kJ}.$$

8.35. (xx 1986) cylinder o polu podstawy $S = 100 \text{ cm}^2$ zawiera gaz o temperaturze $t_1 = 27^\circ\text{C}$ gaz ten jest zamknięty tłokiem znajdującym się na wysokości $h = 60 \text{ cm}$ od dna naczynia. Masa tłoka jest równa $m = 10 \text{ kg}$. Obliczyć pracę, jaką wykona gaz przy ogrzaniu go $\Delta t = 50 \text{ K}$, jeżeli ciśnienie atmosferyczne jest $p_a = 1000 \text{ hPa}$. Przyspieszenie ziemskie przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$. Tarcie tłoka o ścianki naczynia pominąć.

$$\text{Odp.} \quad W = \left(p_a + \frac{m g}{S} \right) S h \frac{\Delta T}{T_1} \quad W = 11000 \text{ J}.$$

8.36. (1978) Ruchomy tłok o ciężarze G i powierzchni S zamyka ustawione pionowo cylindryczne naczynie zawierające n moli gazu doskonałego. Obliczyć przyrost temperatury potrzebny na to, ażeby podczas ogrzewania gazu tłok podniósł się na wysokość h . Ciśnienie zewnętrzne wynosi p_0 , stała gazowa R . Tłok przesuwają się bez tarcia..

Odp.
$$\Delta T = \frac{(p_0 S + G)}{n R} h.$$

8.37. W zamkniętym zbiorniku o objętości $V = 10 \text{ cm}^3$ znajduje się powietrze pod ciśnieniem $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Po ogrzaniu, ciśnienie wzrosło $n = 5$ razy. Obliczyć ilość ciepła pobranego przez gaz, jeżeli dany jest stosunek $c_p/c_v = 1,4$.

Odp.
$$Q = \frac{p V (n - 1)}{c_p/c_v - 1} \quad Q = 2 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

8.38. Obliczyć, ile ciepła należy dostarczyć do $V = 5 \text{ dm}^3$ powietrza znajdującego się w warunkach normalnych ($t_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$), żeby przy stałym ciśnieniu objętość jego wzrosła $n = 3$ razy. Dane jest ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu $c_p = 1020 \text{ J/kg K}$, gęstość powietrza w warunkach normalnych $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$.

Odp.
$$Q = V \rho_0 c_p 2 T_0 \quad Q = 3620 \text{ J}.$$

8.39. Wodę o masie $m = 2 \text{ kg}$, znajdującą się w warunkach normalnych, zamieniono na parę, bez zmiany ciśnienia. Obliczyć zmianę energii wewnętrznej przy tym procesie, jeżeli ciepło parowania wody wynosi $C = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$. Objętość jednego kg pary pod normalnym ciśnieniem jest $V_2 = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Odp.
$$\Delta U = m C - p \Delta V \quad \Delta U = 4,5 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

8.40. Pokój ma objętość V . Obliczyć spadek temperatury powietrza w tym pokoju po wniesieniu do niego bryły lodu o masie m i temperaturze $T = 273 \text{ K}$. Początkowa temperatura powietrza wynosiła T_1 . Ciepło topnienia lodu L , ciepło właściwe wody C , ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu c_p , gęstość powietrza w warunkach normalnych ρ_0 , ciśnienie p_0 . Ciśnienie powietrza w pokoju w temperaturze T_1 wynosiło p . Zakładamy, że masa powietrza w pokoju pozostała stała, a wszystek lód uległ stopieniu i ogrzeje się woda z niego powstała.

Odp.
$$T = \frac{m C (T_1 - T) + m L}{m C + \rho_0 \frac{T_0}{T_1} \frac{p}{p_0} c_p V}$$

8.41. Masę $m = 0,04$ kg gazu ogrzano od temperatury $T_0 = 273$ K do temperatury $T_2 = 373$ K izobarycznie. Obliczyć, jaki procent dostarczonego ciepła zostało zużyte na wykonanie pracy a jaki na zmianę energii wewnętrznej. Dane są: stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3$ J/kmol K, ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu $c_p = 840$ J/kg K, masa cząsteczkowa $\mu = 44$ kg/kmol K.

$$\text{Odp.} \quad \frac{W}{Q} 100 = 23 \% \quad \frac{\Delta U}{Q} 100 = 77 \%.$$

8.42. Obliczyć masę cząsteczkową gazu, dla którego $c_p/c_v = 1,4$ znajdującego się w zbiorniku o objętości $V = 10$ dm³. Gęstość tego gazu wynosi $\rho = 0,097$ kg/m³ i jest wiadomo, że aby ogrzać go o $\Delta T = 10$ K należy dostarczyć ciepła w ilości $Q = 100$ J. Stała gazowa $R = 8,3 \cdot 10^3$ J/kmol.

$$\text{Odp.} \quad \mu = \frac{R \rho V T}{Q (c_p/c_v - 1)} \quad \mu = 2 \text{ kg/kmol.}$$

8.43. Ile ciepła należy użyć, aby ogrzać powietrze w objętości $V = 1$ m³ od temperatury $T_0 = 273$ K do temperatury $T_2 = 293$ K pod normalnym ciśnieniem $p_0 = 10^5$ Pa. Jaka część zużytego ciepła idzie na pokonanie ciśnienia zewnętrznego przy rozprężaniu się izobarycznym powietrza? Ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu wynosi $c_p = 1020$ J/kg K, gęstość powietrza w warunkach normalnych $\rho_0 = 1,3$ kg/m³.

$$\text{Odp.} \quad Q = \rho_0 V c_p (T_2 - T_1) \quad Q = 26520 \text{ J.} \quad \frac{W}{Q} = 27 \%.$$

8.44. Jaką ilość wrzącej wody o temperaturze $t_1 = 100^\circ\text{C}$ należy wlać do $m = 10$ kg lodu o temperaturze $t_0 = -10^\circ\text{C}$ aby otrzymać wodę o temperaturze $t_k = 20^\circ\text{C}$. Ciepło pobrane przez naczynie pomijamy. Ciepło właściwe lodu $C = 2100$ J/kg K, ciepło topnienia lodu $L = 3,3 \cdot 10^5$ J/kg, ciepło właściwe wody $C_w = 4190$ J/kg K.

$$\text{Odp.} \quad m_x = \frac{m C (0^\circ - t_0) + m L + m C_w (t_k - 0^\circ)}{C_w (t_1 - t_k)} \quad m_x = 12 \text{ kg}$$

Zadania testowe

8.45. (xx 1988) Jak zmieni się średnia prędkość cząsteczek gazu doskonałego, jeżeli temperatura bezwzględna gazu wzrośnie czterokrotnie?

8.46. (x 1985) Podać wymiar stałej Boltzmana.

8.47. (xx 1981) Jak zmieniła się objętość gazu doskonałego, jeżeli jego temperatura bezwzględna i ciśnienie wzrosły dwa razy?

8.48. (xx 1981) Kiedy musimy dostarczyć więcej energii na ogrzanie tej samej masy gazu o tę samą różnicę temperatur, w procesie izobarycznym czy izochorycznym?

8.49. (xx 1989) W jednym naczyniu znajduje się jeden mol wodoru, w drugim, jeden mol tlenu o tej samej temperaturze i objętości. Co można powiedzieć o ciśnieniu tych gazów?

8.50. (xx 1981) Podczas jakiej przemiany gazu doskonałego nie zmienia się jego energia wewnętrzna?

8.51. (xx 1988) Czy i w jaki sposób można przekazać substancji pewną ilość ciepła nie powodując zmiany jej temperatury?

8.52. (xx 1986) Podczas której spośród przemian stanu gazu doskonałego, dostarczenie danej ilości ciepła spowoduje największy przyrost temperatury?

8.53. (xx 1983) W której spośród przemian gazu doskonałego dostarczone ciepło idzie w całości na powiększenie energii wewnętrznej gazu?

8.54. (xx 1984) Ile razy zwiększyło się ciśnienie gazu doskonałego, jeżeli jego objętość zmniejszyła się dwukrotnie a temperatura wzrosła trzy razy?

8.55. (x 1989) Jakie różnice występują przy izotermicznym sprężeniu gazu doskonałego i rzeczywistego? Zdefiniować temperaturę krytyczną.

8.56. (x 1986) Gaz doskonały sprężono izotermicznie zmniejszając dwukrotnie jego objętość. Jak zmieni się ciśnienie tego gazu?

8.57. (x 1985) Jakiej zmianie ulega temperatura gazu, przy jego adiabatycznym rozprężaniu?

8.58. (1986) Narysować wykres przedstawiający zależność ciśnienia gazu od jego objętości w przemianie podlegającej prawu Boyle'a- Mariotte'a.

8.59. (1981) Gęstość powietrza w temperaturze t jest równa ρ . Jakie jest ciśnienie tego powietrza, jeżeli wiadomo, że w warunkach normalnych (t_0 , p_0) jego gęstość wynosi ρ_0 .

8.60. (1986) W temperaturze T_0 i pod ciśnieniem p_0 gęstość gazu doskonałego wynosi ρ_0 . Jaka będzie gęstość tego gazu w temperaturze t i po ciśnieniu p ?

8.61. (xx 1998) Naczynie zawiera sprężony gaz pod ciśnieniem $p_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ w temperaturze $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Jakie będzie ciśnienie gazu, gdy z naczynia zostanie wypuszczona połowa masy gazu, a jego temperatura obniży się do $t_2 = 12^\circ\text{C}$?

8.62. (xx 1998) Jaka będzie masa powietrza znajdującego się w zbiorniku o pojemności $V = 60 \text{ cm}^3$ pod ciśnieniem $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ i temperaturze $T = 20^\circ\text{C}$. Gęstość powietrza w warunkach normalnych jest $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$?

8.63. Znaleźć gęstość mieszaniny składającej się z 8 g helu i 4 g argonu pod ciśnieniem $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ i w temperaturze $t = 27^\circ\text{C}$.

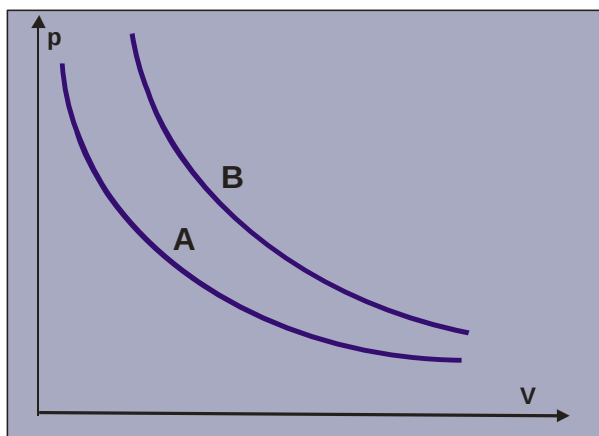
8.64. Jaka jest gęstość mieszaniny w warunkach normalnych, składającej się z jednej części wagowej wodoru i ośmiu części wagowych tlenu (mieszanina piorunująca)?

8.65. (xx 1998) Gęstość mieszaniny azotu i wodoru pod ciśnieniem $p = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ temperaturze $t = 320 \text{ K}$ wynosi $\rho = 0,3 \text{ kg/m}^3$. Obliczyć liczbę cząsteczek wodoru przypadającą na 1 m^3 mieszaniny. Masa molowa wodoru $\mu_1 = 2 \text{ kg/kmol}$, azotu $\mu_2 = 28 \text{ kg/kmol}$.

8.66. (x 1987) Ciepło molowe tlenu pod stałym ciśnieniem wynosi $C_p = 28,9 \text{ J/mol K}$. Jakie jest ciepło molowe tlenu w stałej objętości, jeżeli dana jest stała gazowa $R = 8,3 \text{ J/mol K}$?

8.67. (x 1990) Jakie związki zachodzą pomiędzy ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu a ciepłem właściwym przy stałej objętości gazu doskonałego?

8.68. (x 1990) W układzie współrzędnych p, V przedstawiono dwa procesy: A i B (rys. 8.12). Który z nich przebiega w wyższej temperaturze?



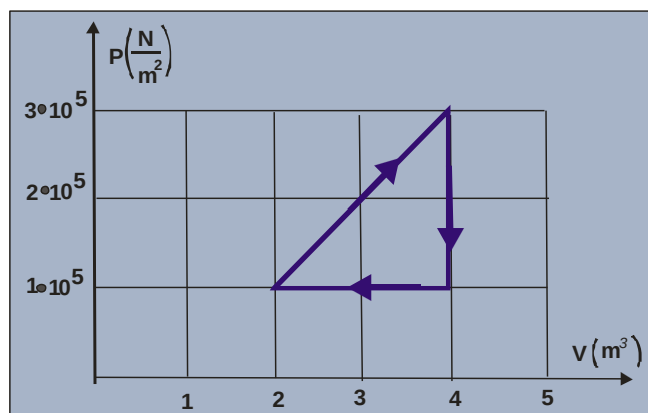
Rys. 8.12. Przebieg dwóch procesów dla dwóch różnych temperatur

8.69. (xx 1985) Narysować w układzie współrzędnych p, V obieg termodynamiczny składający się z izochory, izobary i adiabaty.

8.70. (xx 1983) Gaz doskonały znajdujący się pod ciśnieniem $p = 10^5 \text{ Pa}$ zajmował początkowo objętość $V = 30 \text{ dm}^3$. Gaz ten ogrzano pod stałym ciśnieniem od temperatury $t_1 = 27^\circ\text{C}$ do $t_2 = 127^\circ\text{C}$. Jaką pracę wykonał ten gaz?

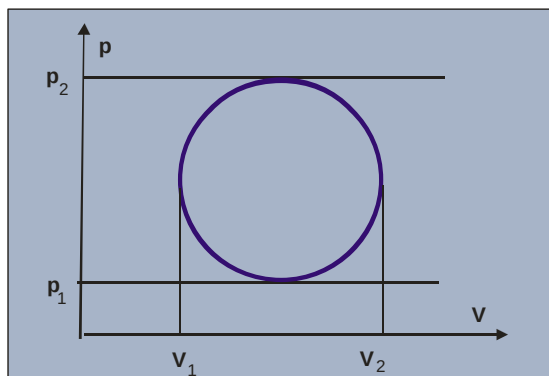
8.71. (xx 1982) W cylindrze z ruchomym tłokiem znajduje się gaz pod stałym ciśnieniem p . Jaką pracę wykona ten gaz, jeżeli w wyniku ogrzania, jego objętość wzrośnie od objętości V do $2V$? Tarcie tłoka o ścianki naczynia omijamy.

8.72. Obliczyć pracę wykonaną przez gaz w procesie termodynamicznym przedstawionym na wykresie na rys. 8.13.



Rys. 8.13

8.73. (xx 1988) Jaką pracę wykonał gaz w cyklu przedstawionym na wykresie na rys. 8.14.



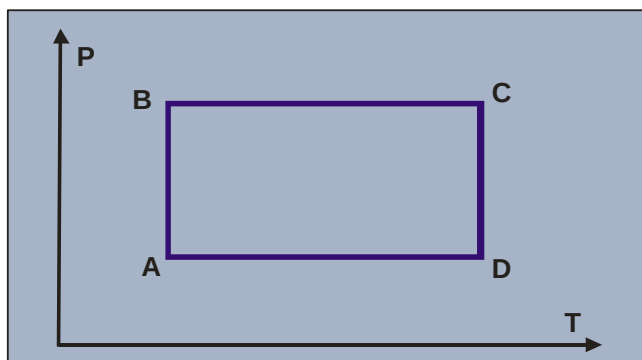
Rys. 8.14

8.74. (xx 1983) Stan początkowy gazu jest określony parametrami $p_1 V_1$. W wyniku jakiego rozprężenia: izobarycznego czy izotermicznego do objętości V_2 gaz wykona większą pracę?

8.75. (x 1987) Ile wynosi wartość pracy w przemianie izochorycznej gazu?

8.76. (x 1987) Ile wynosi wartość pracy w przemianie izobarycznej gazu?

8.77. (xx 1981) Pewien cykl termodynamicznego gazu doskonałego przebiega tak jak pokazuje rys. 8.15. W którym z punktów A,B,C,D objętość gazu jest największa a w którym najmniejsza?



Rys. 8.15

8.78. (xx 1981) Dysponując śrutem ołowianym, rurą tekturową o znanej długości i termometrem, zaprojektuj doświadczalne sprawdzenie zasady zachowania energii (pierwszej zasady termodynamiki).

8.79. (x 1988) W wyniku procesu kołowego gaz wykonał pracę $W = 2 \text{ kJ}$ i przekazał chłodnicy ilość ciepła $Q = 8 \text{ kJ}$. Znaleźć sprawność tego cyklu.

8.80. (xx 1982) Podczas rozprężania izotermicznego silnik Carnota pobrał z grzejnika ciepło w ilości $Q = 10 \text{ J}$. Podczas sprężania izotermicznego do chłodnicy zostało odprowadzone ciepło w ilości $Q_2 = 6 \text{ J}$. Ile wynosi sprawność tego silnika?

8.81. (xx 1989) Temperatura bezwzględna źródła ciepła jest trzy razy wyższa od temperatury bezwzględnej chłodnicy. Jaką część pobranego ciepła oddaje gaz do chłodnicy?

8.82. (xx 1985) Silnik Carnota pracuje w zakresie temperatur 227°C i 127°C . Jaką pracę wykonał ten silnik, jeżeli w wyższej temperaturze pobrał $2,5 \text{ kJ}$ ciepła?

8.83. (x 1987) Temperatura grzejnicy silnika Carnota wynosi $t_1 = 127^\circ\text{C}$ a temperatura chłodnicy $t_2 = 300 \text{ K}$. Ile wynosi sprawność tego silnika?

8.84. (xx 1981)(xx 1986) Pierwszy silnik Carnota pracuje w temperaturze 400 K i 200 K , drugi między temperaturami 300 K i 100 K , a trzeci między temperaturami 500 K i 250 K . Który z tych silników ma największą sprawność teoretyczną?

8.85. (x 1989) W jednym silniku Carnota temperatura źródła wynosi 400 K a temperatura chłodnicy 200 K . O drugim silniku wiadomo, że pobiera on ze źródła ciepła 1000 J a oddaje do chłodnicy 600 J ciepła. Który z tych silników ma większą sprawność?

8.86. (xx 1981) W zamkniętej butli o objętości $V = 1 \text{ m}^3$ znajduje się powietrze w warunkach normalnych. Ile ciepła trzeba dostarczyć ażeby ciśnienie wzrosło dwukrotnie. Gęstość powietrza w warunkach normalnych $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$, a ciepło właściwe przy stałej objętości $c_v = 700 \text{ J/kg K}$.

8.87. (xx 1984) Czy można zagotować wodę, nie podgrzewając jej?

8.88. Ile ciepła trzeba dostarczyć do ogrzania 1 m^3 powietrza w warunkach normalnych, aby przy stałym ciśnieniu objętość jego wzrosła dwa razy. Ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu wynosi $c_p = 1020 \text{ J/kg K}$. Gęstość powietrza w warunkach normalnych $\rho_0 = 1.293 \text{ kg/m}^3$.

8.89. Ile wynosi ilość ciepła potrzebna do zamiany 1 kg lodu o temperaturze $t_1 = -10^\circ\text{C}$ na wodę o temperaturze $t_2 = 20^\circ\text{C}$? Ciepło właściwe lodu $C_1 = 2100 \text{ J/kg K}$, ciepło topnienia lodu $C_2 = 3,35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$, ciepło właściwe wody $C_3 = 4190 \text{ J/kg K}$.

8.90. Do kalorymetru zawierającego $m_1 = 0,05 \text{ kg}$ wody o temperaturze $T_1 = 20^\circ\text{C}$, wlano $m_2 = 0,15 \text{ kg}$ wody o temperaturze $T_2 = 80^\circ\text{C}$. Jaka była temperatura mieszaniny, jeżeli ciepło pobrane przez kalorymetr pominie?

8.91. (xx 1981) W naczyniu z wodą pływa bryła lodu. Jak zmieni się poziom wody w naczyniu po całkowitym stopieniu się lodu? Temperatura wody i lodu w czasie trwania procesu jest stała i wynosi 0°C .

8.92. Jaka jest zależność między współczynnikiem rozszerzalności liniowej a objętościowej ciał stałych?

8.93. (x 1985) Objętość pary nasyconej zmalała dwukrotnie przy stałej temperaturze. Jakiej zmianie uległo ciśnienie tej pary?

8.94. (x 1991) Dlaczego po wyjściu z kąpielni na powietrze odczuwamy zimno, chociaż temperatura powietrza jest wyższa od temperatury wody?

IX. ELEKTROSTATYKA

9.1. Prawo Coulomba

Elektrostatyka jest to nauka o ładunkach elektrycznych będących w spoczynku. Istnieją dwa rodzaje ładunków ujemne i dodatnie. Jedną z podstawowych właściwości ładunków jest ich wzajemne oddziaływanie: różnoimienne się przyciągają, a jednoimienne się odpychają. Siła oddziaływania między nimi wyraża się wzorem Coulomba, który mówi nam, że dwa punktowe ładunki elektryczne oddziałują na siebie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu tych ładunków a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości. Wartość liczbowa tej siły wyraża się wzorem:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (9.1)$$

gdzie k – jest współczynnikiem proporcjonalności, zależnym od wyboru jednostek i od rodzaju ośrodka w którym znajdują się dane ładunki.

Dla układu SI i dla próżni lub powietrza, współczynnik ten ma wartość:

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$$

ale z drugiej strony
$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0},$$

gdzie ϵ_0 – jest przenikalnością dielektryczną próżni:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$$

Porównując prawe strony wzorów określających współczynnik k otrzymamy:

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$$

skąd:
$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \pi} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

gdzie F – jest jednostką pojemności elektrycznej – Farad

Prawo Coulomba dla układu SI i dla próżni ma więc postać:

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (9.2)$$

Jeśli ładunki znajdują się w ośrodku innym niż próżnia lub powietrze, to we wzorze (9.2) wystąpi jeszcze względna stała dielektryczna ϵ_r , charakterystyczna dla danego ośrodka i prawo Coulomba wyrazi się wtedy wzorem:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (9.3)$$

Względna stała dielektryczna ϵ_r jest liczbą niemianowaną, określającą, ile razy zmniejszy się siła oddziaływania między dwoma ładunkami umieszczonymi w danym ośrodku, do siły oddziaływania tych samych ładunków w próżni.

Iloczyn przenikalności dielektrycznej próżni (ϵ_0) przez względną stałą dielektryczną (ϵ_r) nazywa się bezwzględną stałą dielektryczną i oznacza się literą ϵ :

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Wzór (9.1) podaje tylko wartość liczbową siły oddziaływania pomiędzy dwoma ładunkami. Siła jest wektorem, dlatego też ogólniej, prawo Coulomba można zapisać w postaci wektorowej:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{U}_r$$

gdzie $\vec{U}_r$ – jest wektorem jednostkowym o kierunku siły oddziaływania między ładunkami i o wartości bezwzględnej jednostkowej:

$$\vec{U}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

będziemy mieli:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

lub

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}.$$

Jednostką ładunku w układzie SI jest Coulomb. Jest to ładunek przeniesiony przez prąd o natężeniu 1 A w czasie 1 s.

$$1\text{C} = 1\text{A} \cdot 1\text{s}.$$

Drugą jednostką ładunku elektrycznego jest najmniejszy ładunek, jaki istnieje w przyrodzie, ładunek jaki posiada elektron. Nazywa się on ładunkiem elementarnym:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Gdy naelektryzujemy odizolowany przewodnik, to ładunki rozmieszczą się na powierzchni przewodnika. Jeżeli powierzchnia będzie miała stałą krzywiznę, jak np. powierzchnia kuli, to ładunki rozmieszczą się równomiernie. Gęstość powierzchniowa ładunku będzie stała. Jeżeli będą występować większe krzywizny np. ostrza, to tam ładunek będzie gromadził się w większym stopniu. Gęstością powierzchniową ładunku nazywamy stosunek zgromadzonego ładunku Q na danej powierzchni do wielkości pola tej powierzchni (S), co wyraża się wzorem:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad (9.4)$$

W dielektryku natomiast, ładunki elektryczne mogą rozmieszczać się w całej objętości. Mówimy wtedy o gęstości objętościowej, jako stosunku ładunku znajdującego się w objętości dielektryka do tej objętości:

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad (9.5)$$

Przykład 9.1

Dwie kuleczki o masie m każda, wiszą na izolacyjnych nitkach o długości L każda, stykając się ze sobą. Po naelektryzowaniu, odepchnęły się tak, że nitki utworzyły kąt α (**rys. 9.1**). Obliczyć wielkość ładunku na każdej kulce.

Po naelektryzowaniu, kuleczki oddalały się dotąd, aż siła odpychania elektrostatycznego $\vec{F}_C$ określona prawem Coulomba, zrównoważyła się z siłą $\vec{F}_1$ składową poziomą ciężaru kuleczki:

$$k \frac{q^2}{r^2} = m g \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

skąd:

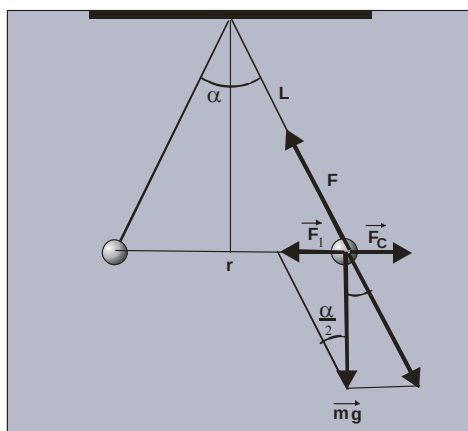
$$q = r \sqrt{\frac{m g \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{k}}.$$

gdzie r – jest odległością pomiędzy kulkami w przypadku równowagi sił, którą wyrażamy w zależności od długości nitki L i kąta α :

$$\frac{r}{2} = L \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ostatecznie będziemy mieli:

$$q = 2 L \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{m g \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{k}}.$$



Rys. 9.1. Kulki po naelektryzowaniu oddalają się od siebie do momentu aż siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_C$ zrównoważą się

9.2. Natężenie pola elektrycznego

Każdy ładunek elektryczny wytwarza wokół siebie pole elektryczne, tzn. przestrzeń, w której można zauważyć działanie sił na ładunek próbny. Pole elektryczne, jak i każde inne pole, określone jest przez natężenie pola i przez potencjał. Natężeniem pola elektrycznego w danym jego punkcie nazywamy stosunek siły działającej na ładunek próbny q umieszczony w tym punkcie do wielkości tego ładunku:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (9.6)$$

Ponieważ siła jest wektorem, to i natężenie pola elektrycznego też jest wielkością wektorową. Jest to wektor o kierunku i zwrocie zgodnym z działającą siłą $\vec{F}$. Liczbowo natężenie pola elektrycznego równe jest sile działającej na jednostkowy, dodatni ładunek umieszczony w danym punkcie pola.

Gdy wektor siły $\vec{F}$ zastąpimy jej wartością liczbową, określoną prawem Coulomba, to otrzymamy wzór wyrażający wartość liczbową natężenia pola elektrycznego w zależności od odległości od ładunku punkowego, który wytwarza pole i od tego ładunku:

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (9.7)$$

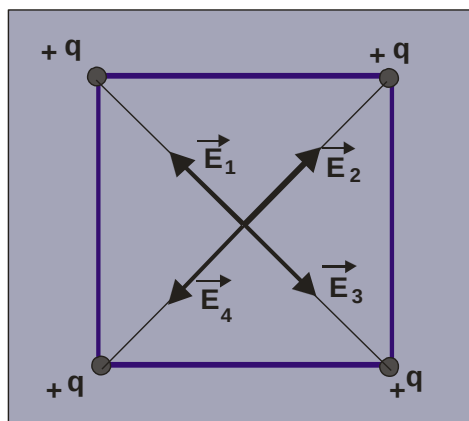
W zapisie wektorowym będzie:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r} \vec{U}_r$$

gdzie $\vec{U}_r$ – jest wektorem jednostkowym.

Przykład 9.2.

Określić natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu o boku a w wierzchołkach którego znajdują się jednakowe ładunki dodatnie $+q$ (rys. 9.2).



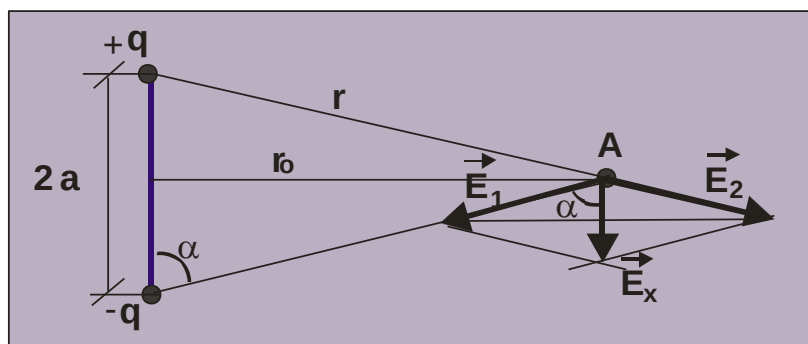
Rys. 9.2. Natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu, w narożach, którego znajdują się jednakowe ładunki elektryczne, jest równe zero

Natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu jest równe sumie wektorowej natężeń pochodzących od poszczególnych ładunków, znajdujących się w wierzchołkach tego kwadratu. Jak widać z **rys. 9.2** wypadkowa ta jest równa zero.

Natomiast potencjał elektryczny w tym samym punkcie będzie różny od zera i będzie się równał sumie potencjałów pochodzących od czterech ładunków, gdyż potencjał jest wielkością skalarną.

Przykład 9.3

Obliczyć natężenie pola elektrycznego pochodzącego od dipola elektrycznego w punkcie A leżącym na symetralnej dipola w odległości r_0 od niego (**rys. 9.3**). Dipolem elektrycznym nazywamy dwa ładunki elektryczne jednakowe co do wartości bezwzględnych, ale o znakach przeciwnych, oddalonych od siebie o daną odległość. Szukane natężenie pola elektrycznego w punkcie A będzie wektorem wypadkowym dwóch natężeń: $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ pochodzących od ładunków $-q$ i $+q$.



Rys. 9.3. Wektor $\vec{E}_x$ jest natężeniem pola elektrycznego pochodzącego od dipola

Z rysunku widać, że
$$\frac{E_x}{2} = E_1 \cos \alpha$$

gdzie E_x – jest wartością liczbową szukanego natężenia pola.

Uwzględniając, że $E_1 = k \frac{q}{r_1^2}$ oraz $\cos \alpha = \frac{a}{r}$, otrzymamy:

$$E_x = k \frac{2 a q}{r^3}.$$

Wyrażenie $2 a q = p$ nazywamy momentem elektrycznym dipola. Wartość liczbową natężenia pola elektrycznego od dipola wyrazi się ostatecznie wzorem:

$$E_x = k \frac{p}{r^3} \quad (9.8)$$

9.3. Strumień natężenia pola elektrycznego

Jeżeli przez daną powierzchnię przenika pole elektryczne w postaci linii sił pola, to możemy wektorowi natężenia pola $\vec{E}$ przyporządkować pewną elementarną powierzchnię ds , jako wektor o kierunku prostopadłym do tego elementu (**rys. 9.4**).

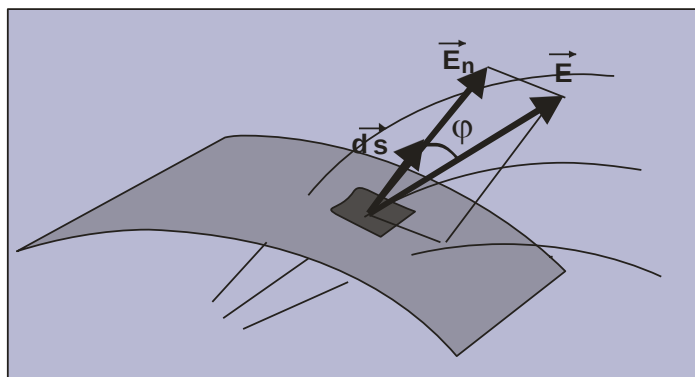
Strumieniem elementarnym wektora natężenia pola elektrycznego, nazywamy iloczyn skalarny wektora natężenia pola elektrycznego przez wektor elementarnej powierzchni:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (9.9)$$

lub
$$d\Phi = E ds \cos \varphi. \quad (9.10)$$

Strumień całkowity po powierzchni, do której wektor natężenia pola elektrycznego jest prostopadły, wyraża się wzorem:

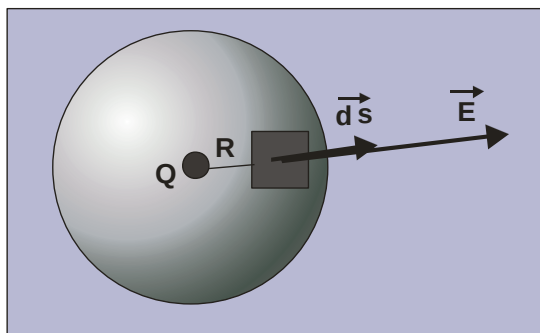
$$\Phi = E \cdot S \quad (9.11)$$



Rys. 9.4. Strumień natężenia pola elektrycznego, jest to iloczyn skalarny wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ i wektora elementarnej powierzchni $\vec{ds}$

Przykład 9.4

Obliczyć strumień natężenia pola elektrycznego po powierzchni kulistej otaczającej ładunek Q .



Rys. 9.5. Powierzchnia całkowita otaczająca ładunek Q jest sumą elementarnych powierzchni $\vec{ds}$ i równa się całej powierzchni kuli

Strumień całkowity wektora $\vec{E}$ po powierzchni kulistej wyrazi się wzorem:

$$\Phi = E \int ds$$

gdzie E – jest wartością liczbową natężenia pola elektrycznego na powierzchni kuli:

$$E = k \frac{Q}{R^2},$$

$$\int ds = 4 \pi R^2 \quad \text{jest powierzchnią kuli.}$$

Podstawiając powyższe dane do wzoru (9.11) i uwzględniając, że

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

otrzymamy:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (9.12)$$

Otrzymany wynik jest twierdzeniem Gaussa, które mówi nam, że strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię zamykającą ładunek Q lub wiele ładunków, równa się ilorazowi tego ładunku (lub sumy ładunków) przez przenikalność dielektryczną próżni ϵ_0 .

9.4. Potencjał elektryczny

Potencjałem elektrycznym w danym punkcie pola nazywamy stosunek pracy, potrzebnej do przesunięcia ładunku próbnego (dodatniego) z nieskończoności do danego punktu pola do wartości tego ładunku:

$$V = \frac{W}{q} \quad (9.13)$$

Podobnie jak w przypadku natężenia pola grawitacyjnego, tak i tutaj, należy wyrazić potencjał elektryczny w funkcji ładunku, który wytwarza pole i odległości jego od danego punktu pola. W tym celu trzeba wyliczyć pracę W . Sposób wyliczenia pracy jest taki sam jak w polu grawitacyjnym z tym, że praca w polu grawitacyjnym jest ujemna (siły przyciągające), natomiast praca w polu elektrycznym przy przesuwaniu ładunku w kierunku sił odpychających, jest dodatnia i wyraża się wzorem:

$$W = k \frac{Qq}{r} \quad (9.14)$$

gdzie Q – jest ładunkiem punktowym (dodatnim, który wytwarza pole) q ładunkiem próbnym też dodatnim.

Potencjał elektryczny w danym punkcie pola wyraża się, więc wzorem:

$$V = k \frac{Q}{r} \quad (9.15)$$

Różnica potencjałów pomiędzy dwoma punktami pola określa się tym samym wzorem jak i sam potencjał:

$$V_2 - V_1 = \frac{W}{q} \quad (9.16)$$

gdzie W – jest pracą wykonaną przeciwko siłom pola, przy przesunięciu ładunku próbnego q pomiędzy punktami pola gdzie panują potencjały V_1 i V_2 .

Powyższy wzór pozwala zdefiniować jednostkę różnicy potencjałów – jednego volta: Różnica potencjałów jest równa jednemu woltowi, jeżeli praca na przesunięcie ładunku jednego Coulomba wynosi jeden dżul.

Zależność pomiędzy różnicą potencjałów a natężeniem pola (jednorodnego) wyraża wzór:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta r} \quad (9.17)$$

gdzie Δr – jest odległością, na której występuje dana różnica potencjałów.

9.5. Pojemność elektryczna

Pojemnością elektryczną przewodnika nazywamy stosunek ładunku zgromadzonego na danym przewodniku do wytworzonego potencjału:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (9.18)$$

Jednostką pojemności jest farad. Przewodnik ma pojemność jednego farada, jeżeli ładunkiem jednego coulomba naładuje się do potencjału jednego wolta. Pojemność przewodnika w kształcie kuli o promieniu R jest wprost proporcjonalna do jej promienia i wyraża się wzorem:

$$C = 4 \pi \epsilon_0 R \quad (9.19)$$

ponieważ pojemność przewodnika zależy od obecności przewodników znajdujących się w sąsiedztwie, więc należy mówić o pojemności dwóch przewodników, czyli o kondensatorze. Kondensatorem nazywamy, więc układ dwóch przewodników, zwanych okładkami, oddzielonych od siebie dielektrykiem. Pojemność kondensatora, którego okładkami są płytki metalowe (kondensator płaski), gdy między okładkami jest próżnia lub powietrze, wyraża się wzorem:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (9.20)$$

gdzie S – jest polem powierzchni jednej okładki,
 d – odległością między okładkami.

Jeżeli pomiędzy okładkami kondensatora zamiast powietrza będzie znajdować się inny dielektryk o względnej przenikalności dielektrycznej ϵ_r to wzór (9.20) przyjmie postać:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} \quad (9.21)$$

Kondensatory możemy łączyć w baterie szeregowo lub równolegle. W połączeniu szeregowym odwrotność pojemności otrzymanej baterii jest równa sumie odwrotności pojemności poszczególnych kondensatorów:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (9.22)$$

W połączeniu tym ładunek zgromadzony w każdym kondensatorze jest jednakowy. W połączeniu równoległym, pojemność całkowita baterii równa się sumie pojemności poszczególnych kondensatorów:

$$C = C_1 + C_2 + C_3. \quad (9.23)$$

W tym połączeniu napięcie na każdym kondensatorze będzie jednakowe.

Naładowany kondensator posiada energię, która wyraża się wzorem:

$$W_k = \frac{1}{2} Q U. \quad (9.24)$$

Powyższy wzór można przekształcać w zależności od potrzeby, korzystając ze wzoru (9.18), wyrażając energię w funkcji pojemności kondensatora i napięcia między okładkami lub w funkcji pojemności i ładunku zgromadzonego w kondensatorze:

$$W_k = \frac{1}{2} C U^2 \qquad W_k = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Zadania rozwiązane

9.1. (x 1988) Dwie jednakowe kuleczki o masach m każda wiszą w powietrzu jedna obok drugiej na jedwabnych niciach o długości L każda, stykając się ze sobą. Jakimi ładunkami należy naelektryzować te kulki, aby odległość między nimi była d ? Przenikalność dielektryczna próżni wynosi ϵ_0 .

Po naelektryzowaniu kuleczki odepchnęły się tak, że wypadkowa ciężaru i siły wywieranej przez nitkę ($\vec{F}_1$) (**rys. 9.1.**), zrównoważyła się z siłą odpychania elektrostatycznego ($\vec{F}_C$):

$$m g \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}.$$

Uwzględniając, że:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2 \sqrt{L^2 - \frac{d^2}{4}}}$$

otrzymamy:

$$q = 2 \sqrt{\frac{m g \pi \epsilon_0 d^3}{\sqrt{4 L^2 - d^2}}}.$$

9.2. (xx 1976) Dwie małe metalowe kuleczki umieszczono w powietrzu w odległości $r = 1$ m od siebie na izolującej podstawie. Między te kulki rozdzielono ładunek Q w ten sposób, że siła ich wzajemnego odpychania osiąga maksimum. Obliczyć wartość tej siły, jeżeli ładunek $Q = 1$ C. Stała dielektryczna $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$.

Jeżeli ładunek na jednej kulce oznaczymy przez x , to ładunek na drugiej kulce będzie $Q - x$. Siła oddziaływania pomiędzy tymi kulkami wyrazi się wzorem:

$$F = k \frac{(Q - x)x}{r^2}.$$

Będzie ona miała wartość maksymalną, gdy jej pochodna (względem x) będzie równać się zeru:

$$\frac{k}{r^2} (Q - 2x) = 0$$

skąd:
$$x = \frac{Q}{2}.$$

9.3. (xx 1978) W oleju o gęstości $\rho_1 = 800 \text{ kg/m}^3$ wytworzono pionowe, skierowane do góry, jednorodne pole elektryczne o natężeniu $E = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. W polu tym umieszczono naelektryzowaną kulkę o promieniu $r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ i gęstości $\rho_2 = 8,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Obliczyć ładunek kulki, jeżeli wiadomo, że pozostaje ona w spoczynku. Przyjąć przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Gdy kulka jest w spoczynku, to wszystkie siły działające na nią równoważą się, więc ich wypadkowa jest równa zeru:

$$mg - \rho_1 g V - qE = 0$$

gdzie
$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_2 \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Mamy więc:
$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_2 g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g = qE$$

skąd:
$$q = \frac{4/3 \pi r^3 g (\rho_2 - \rho_1)}{E}$$

$$q = 1,13 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

9.4. (xx 1979) Kulkę wahadła matematycznego o masie m , naelektryzowaną ładunkiem q umieszczono w jednorodnym, pionowym polu elektrycznym o natężeniu E . Wyznaczyć stosunek okresów drgań wahadła obliczonych dla przeciwnych zwrotów natężeń pola elektrycznego, przy danym przyspieszeniu ziemskim g .

Okres drgań wahadła bez pola elektrycznego wyraz się wzorem:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Jeżeli oprócz siły ciężkości działa jeszcze inna siła jak np. pochodząca od pola elektrycznego, to należy do przyspieszenia ziemskiego dodać lub odjąć przyspieszenie wynikające z działania tej dodatkowej siły. Przyspieszenie spowodowane działaniem pola elektrycznego o natężeniu E na kulkę o masie m i ładunku q wyraża się wzorem:

$$a = \frac{E q}{m}.$$

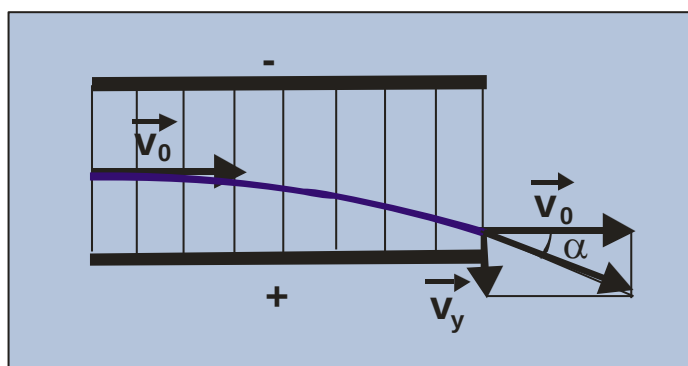
Będziemy więc mieli:

$$T_1 = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g + \frac{E q}{m}}} \quad T_2 = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g - \frac{E q}{m}}}.$$

Po podzieleniu stronami powyższych równań, otrzymamy:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m g - E q}{m g + E q}}.$$

9.5. (xx 1977) Pomiędzy okładki kondensatora próżniowego, płaskiego, wpada elektron równoległe do płytek i wylatuje pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do pierwotnego kierunku (**rys. 9.6.**). Obliczyć energię kinetyczną elektronu w chwili wejścia do kondensatora, jeżeli natężenie pola wewnątrz kondensatora wynosi $E = 5 \cdot 10^3$ V/m, to długość okładek kondensatora wynosi $L = 4$ cm. Pole grawitacyjne pomijamy. Przyjąć $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.



Rys. 9.6. Składowa prędkość prostopadła do linii sił pola jest zawsze równa prędkości początkowej $\vec{v}_0$

Składowa prędkość wzdłuż linii sił pola, w chwili wyjścia elektronu z tego pola, wyraża się wzorem:

$$\vec{v}_y = \vec{a} t$$

gdzie $\vec{a}$ – jest przyspieszeniem w kierunku linii sił pola, którego wartość bezwzględna wyraża się wzorem:

$$a = \frac{E e}{m}$$

Czas t określimy ze składowej prędkości w kierunku prostopadłym do linii sił pola (**rys. 9.6.**)

$$t = \frac{L}{v_0}$$

Mamy więc:

$$v_y = \frac{E e L}{m v_0}$$

uwzględniając, że:

$$v_y = v_0 \operatorname{tg} \alpha,$$

otrzymamy:

$$v_0^2 = \frac{E e L}{m \operatorname{tg} \alpha},$$

A następnie szukana energia kinetyczna elektronu wyrazi się wzorem:

$$E_k = \frac{E e L}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$E_k = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ J}.$$

9.6. Obliczyć siłę przyciągania się dwu płytek kondensatora płaskiego o polu powierzchni S każda, jeżeli na jednej okładce znajduje się ładunek $+q$ a na drugiej $-q$.

Siłę przyciągania się okładek kondensatora obliczymy korzystając z twierdzenia Gaussa. (Prawo Coulomba nie może być tutaj stosowane, gdyż ładunki nie są punktowe). Otaczamy jedną okładkę powierzchnią Gaussa i wyliczamy strumień natężenia pola elektrycznego po tej powierzchni. Z **rys. 9.7.** widać, że tylko przez powierzchnię znajdującą się pomiędzy okładkami strumień jest różny od zera, ponieważ na zewnątrz kondensatora nie ma pola:

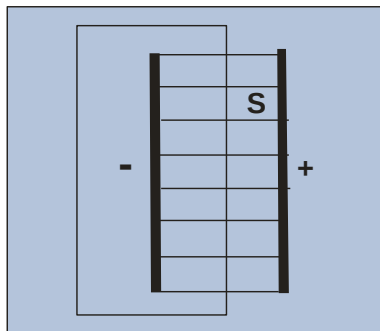
$$\Phi = E S$$

ale

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Z porównania tych strumieni otrzymamy:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$



Rys. 9.7. Jedną okładkę kondensatora otaczamy powierzchnią Gaussa i wyliczamy strumień wektora natężenia pola elektrycznego po tej powierzchni

Otrzymana wartość natężenia pola należy podzielić przez dwa, ponieważ w rzeczywistości natężenie pola pomiędzy okładkami kondensatora pochodzi od dwóch okładek a nie od jednej, która jest otoczona powierzchnią Gaussa.

Mamy więc:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S 2},$$

ale natężenie pola elektrycznego E można też wyrazić wzorem:

$$E = \frac{F}{q}.$$

Z porównania powyższych natężeń otrzymamy równani, z którego wyliczymy szukana siłę:

$$F = \frac{q^2}{2S\epsilon_0} \quad (9.25)$$

9.7. Dwie kule o masie $m = 1$ kg każda i promieniu $r = 3$ cm wiszą na nitkach o długości $L = 80$ cm każda, stykając się ze sobą. Obliczyć, do jakiego potencjału należy naładować te kule aby po odepchnięciu się, nitki utworzyły między sobą kąt $\alpha = 60^\circ$.

Po naelektryzowaniu, kule będą się oddalać od siebie dotąd aż wypadkowa ciężaru i siły wywieranej przez linkę zrówna się z siłą odpychania elektrostatycznego (**rys. 9.1**):

$$m g \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = k \frac{q^2}{x^2}$$

gdzie x – jest odległością pomiędzy kulami, którą wyliczamy z równania:

$$\frac{x}{2} = L \sin \frac{\alpha}{2},$$

gdzie q – jest ładunkiem znajdującym się na jednej kuli, którego wartość wyrażamy w funkcji szukanego potencjału:

$$q = C V$$

gdzie C – jest pojemnością kuli, która przedstawia się wzorem:

$$C = 4 \pi \epsilon_0 r$$

Uwzględniając powyższe zależności, wyliczymy szukany potencjał kuli:

$$V = \frac{L \sin \frac{\alpha}{2}}{r} \sqrt{\frac{m g \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\pi \epsilon_0}}$$

$$V = 61 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

9.8. (xx 1981) Prędkość początkowa elektronów emitowanych przez okładkę naładowanego kondensatora próżniowego wynosi v . Elektrony docierają do drugiej okładki z prędkością $2v$. Ładunek na okładkach kondensatora wynosi $q = \text{constans}$, pole powierzchni okładki jest S . Obliczyć, o ile należy zwiększyć odległość między okładkami, ażeby prędkość elektronów osiągających drugą okładkę wynosiła $4v$. Masa i ładunek elektronu wynoszą odpowiednio m i e , przenikalność dielektryczna próżni ϵ_0 .

Energia, jaką nabędzie elektron przechodząc od jednej okładki do drugiej, równa się pracy pola elektrycznego:

$$\frac{m (2v)^2}{2} - \frac{m v^2}{2} = e U \quad U = E d_1$$

gdzie E – jest natężeniem pola elektrycznego, którego wartość określamy z twierdzenia Gaussa:

$$E = \frac{q}{S \epsilon_0}.$$

Uwzględniając powyższe wzory wyliczymy d_1 :

$$d_1 = \frac{3}{2} m \frac{v^2 S \epsilon_0}{e q}.$$

Przy zwiększonej odległości możemy napisać następujące równanie:

$$\frac{m (4v)^2}{2} - \frac{m v^2}{2} = e U.$$

gdzie

$$U = E d_2$$

Analogicznie jak poprzednio wyliczamy d_2 a następnie, różnicę $d_2 - d_1$:

$$d_2 - d_1 = 6 \frac{m v^2 S \epsilon_0}{e q}.$$

9.9. (x 1985) Obliczyć przyspieszenie elektronu, z jakim poruszałby się on pomiędzy okładkami płaskiego kondensatora próżniowego o pojemności C , naładowanego ładunkiem Q . Dodatkowe dane: m – masa elektronu, e – ładunek elektronu, d – odległość między okładkami kondensatora. Pole grawitacyjne zaniedbujemy.

Siła działająca na elektron znajdujący się w polu elektrycznym o natężeniu E wyrazi się wzorem:

$$F = E e.$$

Uwzględniając, że $E = U/d$ oraz, że $a = F/m$ będziemy mieli:

$$a = \frac{U e}{d m}.$$

Gdy napięcie U wyrazimy w funkcji pojemności kondensatora, korzystając ze wzoru $C=Q/U$, to szukane przyspieszenie będzie:

$$a = \frac{Q e}{C d m}.$$

9.10. (xx 1986)(x 1989) Kondensator próżniowy naładowano do różnicy potencjałów $U = 1000 \text{ V}$ i połączono równolegle z kondensatorem nie naładowanym lecz wypełnionym dielektrykiem. Obliczyć względną przenikalność dielektryczną ϵ_r , jeżeli po połączeniu tych kondensatorów różnica potencjałów między ich okładkami wynosiła $U_1 = 100 \text{ V}$ a wymiary geometryczne obydwu kondensatorów są takie same. Dla połączenia równoległego kondensatorów możemy napisać równanie:

$$C_0 + C_r = \frac{Q}{U_1}$$

gdzie C_0 – jest pojemnością kondensatora próżniowego,

C_r – pojemnością kondensatora z dielektrykiem,

Q – ładunkiem całkowitym tak przed jak i po połączeniu kondensatorów, który wyrażamy wzorem:

$$Q = C_0 U.$$

Mamy więc:

$$C_0 + C_r = \frac{C_0 U}{U_1}.$$

Dzieląc powyższe równanie przez C_0 oraz uwzględniając, że $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ oraz że

$C_r = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$, wyliczymy ϵ_r :

$$\epsilon_r = \frac{U}{U_1} - 1 \quad \epsilon_r = 9.$$

9.11. (xx 1978) Płaski kondensator powietrzny o powierzchni okładek $S = 0,05 \text{ m}^2$ i odległości między nimi $d = 10^{-3} \text{ m}$, połączono na stałe z baterią o napięciu $U = 100 \text{ V}$. Obliczyć, o ile zmieni się ładunek kondensatora po całkowitym zanurzeniu go w oleju o względnej stałej dielektrycznej $\epsilon_r = 6$. Przyjąć przenikalność dielektryczną próżni $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C/Vm}$.

Gdy kondensator podłączony jest do źródła prądu, to napięcie na jego okładkach pozostaje stałe, a w przypadku zmiany pojemności, zmienia się ładunek. Możemy zapisać to w sposób następujący:

$$dQ = U dC,$$

gdzie

$$dC = C_r - C_0.$$

Uwzględniając, że:

$$C_r = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$$

oraz

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

otrzymamy:

$$dQ = \frac{\epsilon_0 U S (\epsilon_r - 1)}{d}.$$

$$dQ = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

9.12. (x 1986) Płaski kondensator naładowano do napięcia U . Po odłączeniu od źródła, odległość między jego okładkami zmniejszono n razy. Energia kondensatora zmieniła się przy tym o ΔW . Obliczyć początkową pojemność kondensatora.

Zmiana energii kondensatora wyrazi się wzorem:

$$\Delta W = E_1 - E_2 \quad \text{lub} \quad \Delta W = \frac{1}{2} U_1 Q - \frac{1}{2} U_2 Q,$$

Napięciem kondensatora U_2 powstałym po odłączeniu go od źródła prądu i po zmniejszeniu odległości między okładkami n razy. Stąd, że ładunek pozostaje stały ($Q = C_0 U_1$) możemy napisać:

$$U_2 = \frac{C_0 U_1}{C_2}.$$

Równanie zmiany energii kondensatora przyjmie teraz postać:

$$\Delta W = \frac{1}{2} C_0 U_1^2 - \frac{1}{2} U_1^2 \frac{C_0^2}{C_2},$$

gdzie

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S n}{d}.$$

Po podzieleniu stronami ostatnich dwóch równań, otrzymamy:

$$C_2 = C_0 n.$$

Ostatecznie, szukana pojemność początkowa kondensatora wyrazi się wzorem:

$$C_0 = \frac{2 n \Delta W}{U^2 (n - 1)}.$$

9.13. (1980) Kondensator naładowano do napięcia $U_0 = 100 \text{ V}$. Po odłączeniu od źródła napięcia kondensator częściowo rozładowano poprzez opornik o dużej oporności. W czasie rozładowania przez opornik przepłynął ładunek $q = 5 \text{ mC}$ i wydzielilo się w nim ciepło $W = 3/8 \text{ J}$. Obliczyć pojemność kondensatora.

Wydzielone ciepło (energia) równa się różnicy energii początkowej i tej, która pozostała:

$$W = E_0 - E_p,$$

gdzie $E_0 = \frac{1}{2} Q_1 U_0$ $E_p = \frac{1}{2} Q_2 U_2,$

gdzie $Q_1 = U_0 C$ – jest ładunkiem kondensatora przed jego rozładowaniem.

$Q = Q_1 - q$ – jest pozostałym ładunkiem w kondensatorze.

U_2 – jest napięciem na kładkach kondensatora po częściowym jego rozładowaniu, które wyliczymy ze wzoru:

$$C U_2 = Q_1 - q.$$

Uwzględniając powyższe zależności, otrzymamy:

$$C = \frac{q^2}{2(U_0 q - W)}.$$

$$C = 10^{-4} \text{ F}.$$

9.14. (xx 1975) Dwa kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 połączono szeregowo i dołączono do źródła prądu stałego o napięciu U . Obliczyć energię każdego kondensatora. Energia każdego kondensatora wyrazi się wzorem:

$$E_1 = \frac{1}{2} Q U_1 \quad E_2 = \frac{1}{2} Q U_2$$

gdzie Q – jest ładunkiem jednakowym w każdym kondensatorze, który wyraża się wzorem:

$$Q = C_1 U_1 \quad \text{lub} \quad Q = C_2 U_2.$$

Mamy więc: $E_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2$ $E_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2.$

Dwie niewiadome U_1 i U_2 wyznaczamy rozwiązując dwa następujące równanie:

$$U_1 + U_2 = U \quad U_1 C_1 = U_2 C_2.$$

Szukane energie wyrażają się wzorami:

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} \quad E_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2 \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}.$$

9.15. (xx 1975) Okładki próżniowego kondensatora płaskiego o powierzchni $S = 500 \text{ cm}^2$ znajdują się w odległości $d_1 = 1 \text{ cm}$ od siebie i są naładowane do napięcia $U_1 = 500 \text{ V}$. Obliczyć, jaką pracę trzeba wykonać, aby po odłączeniu od źródła napięcia, okładki oddalić na odległość $d_2 = 4 \text{ cm}$? Przyjąć stałą dielektryczną dla próżni $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$.

Szukana praca równa się różnicy energii naładowanego kondensatora po rozsunięciu okładek i przed rozsunieniem:

$$W = E_2 - E_1,$$

gdzie
$$E_2 = \frac{1}{2} Q U_2 \quad E_1 = \frac{1}{2} Q U_1.$$

Ładunek Q pozostaje bez zmiany po odłączeniu kondensatora od źródła prądu i wyraża się wzorem:

$$Q = C_1 U_1 \quad \text{jak również} \quad Q = C_2 U_2.$$

Dlatego też napięcie U_2 wyliczymy z równania:

$$C_1 U_1 = C_2 U_2.$$

uwzględniając, że:
$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d_2}$$

otrzymamy:
$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S U_1^2}{d_1} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right)$$

$$W = 1,69 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

9.16. (xx 1976) Kondensator bez dielektryka naładowano ładunkiem $q = 400 \text{ C}$ i odłączono od źródła napięcia. Po wprowadzeniu dielektryka pomiędzy okładki kondensatora o stałej dielektrycznej $\epsilon_r = 4$, napięcie zmalało do wartości $U = 100 \text{ V}$. Obliczyć pojemność kondensatora, jego energię przed i po wprowadzeniu dielektryka. Przyjąć, że dielektryk całkowicie wypełnia przestrzeń wewnątrz kondensatora.

Pojemność kondensatora możemy wyrazić wzorem:

$$C_0 = \frac{q}{U_0},$$

gdzie U_0 – jest napięciem początkowym na okładkach kondensatora, które wyliczymy stąd, że ładunek pozostaje stały tak przed jak i po wprowadzeniu dielektryka:

$$U_0 = \frac{C}{C_0} U.$$

Uwzględniając, że: $C = \epsilon_r C_0$, otrzymamy:

$$C_0 = \frac{q}{\epsilon_r U} \quad C_0 = 1 \text{ F}.$$

Energia kondensatora przed wprowadzeniem dielektryka będzie

$$E_0 = \frac{1}{2} q U \quad E_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Po wprowadzeniu dielektryka:

$$E = \frac{1}{2} q \epsilon_r U \quad E = 8 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

9.17. (xx 1977) Kondensator płaski, którego obszar między okładkami jest całkowicie wypełniony dielektrykiem, ma pojemność $C = 4 \text{ } \mu\text{F}$. Po naładowaniu go do napięcia $U = 100 \text{ V}$ i odłączono od źródła zasilania, z kondensatora usunięto dielektryk. Wymagało to wykonania pracy $W = 0,1 \text{ J}$. Obliczyć względną przenikalność dielektryka.

Wykonana praca równa się różnicy energii kondensatora po usunięciu dielektryka i przed usunięciem:

$$W = E_0 - E.$$

Energie E_0 i E wyrażamy w funkcji napięcia na okładkach kondensatora i jego pojemności:

$$W = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 - \frac{1}{2} C U^2.$$

Nieznane napięcie U_0 wyznaczymy stąd, że ładunek w obu przypadkach jest taki sam, analogicznie jak w zadaniach **9.14** i **9.15**:

$$U_0 = \frac{U C}{C_0}.$$

Mamy więc:

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \left(\frac{C}{C_0} - 1 \right).$$

Uwzględniając, że:

$$\frac{C}{C_0} = \epsilon_r, \quad \text{otrzymamy:}$$

$$\epsilon_r = \frac{2 W + C U^2}{C U^2} \quad \epsilon_r = 6$$

Zadania uzupełniające

9.18. (x 1990) Dwie jednakowe kulki naładowane ładunkami dodatnimi $q_1 = 4 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ i $q_2 = 10^{-11} \text{ C}$ znajdują się w powietrzu w odległości znacznie przewyższającej ich promienie. Obliczyć masy tych kulek, jeżeli wiadomo, że siła wzajemnego przyciągania działająca między kulkami zgodnie z prawem grawitacji równoważy siłę coulombowskiego odpychania. Przyjąć $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$.

Odp. $m = \sqrt{\frac{k q_1 q_2}{G}} \quad m = 0,23 \text{ kg}$

9.19. Trzy małe kuleczki o masie $m = 10 \text{ mg}$ każda, zawieszone zostały w jednym punkcie na oddzielnych nitkach jedwabnych o długości $L = 1 \text{ m}$, każda stykając się ze sobą. Po naelektryzowaniu zajęły one położenie w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $a = 10 \text{ cm}$. Obliczyć ładunek każdej kuleczki.

Odp. $q = \sqrt{\frac{a^3 m g \sqrt{3}}{3 k \sqrt{3 L^2 - a^2}}} \quad q = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$

9.20. (1981) Kulka miedziana o średnicy $d = 1 \text{ cm}$ pozostaje w równowadze w oleju o gęstości $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $E = 3,6 \text{ V/m}$. Obliczyć ładunek tej kulki przyjmując gęstość miedzi $\rho_1 = 8600 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Odp. $q = \frac{\pi d^3 g (\rho_1 - \rho)}{6 E} \quad q = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ C}.$

9.21. (xx 1987) Okres wahadła matematycznego zbudowanego z nieprzewodzącej nici i małej kulki o masie $m = 0,002 \text{ kg}$ wynosi $T_1 = 2 \text{ s}$. Po naładowaniu kulki ładunkiem $q = 0,005 \text{ C}$, okres wahadła zmniejszył się do $T_2 = 1 \text{ s}$. Obliczyć natężenie pola elektrycznego Ziemi. Przyspieszenie ziemskie przyjąć równe $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Odp. $E = \frac{m g}{q} \left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1 \right) \quad E = 120 \text{ V/m}.$

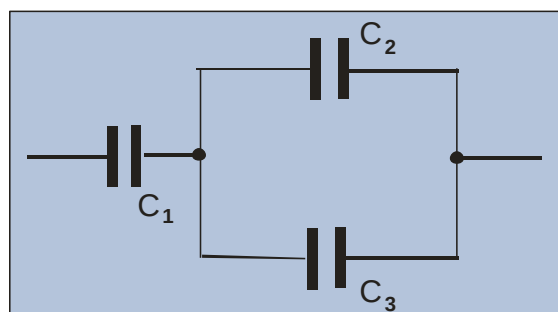
9.22. (xx 1979) Płytki płaskiego kondensatora próżniowego o polu powierzchni S są ustawione poziomo. Dolna jest umocowana na stałe, górna zaś zawieszona na sprężynie o współczynniku sprężystości k . Obliczyć, o ile wydłuży się sprężyna, jeżeli na płytki wprowadzi się równe co do wartości, lecz o znakach przeciwnych ładunki q . Przenikalność dielektryczna próżni wynosi ϵ_0 .

Odp,
$$x = \frac{q^2}{2 S k \epsilon_0}.$$

9.23. (xx 1981) Natężenie pola elektrycznego między okładkami płaskiego kondensatora próżniowego o długości $L = 20$ cm wynosi $E = 1,2 \cdot 10^4$ N/C. Prostopadle do linii sił pola wpada elektron o energii kinetycznej $E_k = 2$ keV. Obliczyć odcinek o jaki odchyli się elektron od pierwotnego kierunku przy wyjściu z kondensatora. Wpływ siły ciężkości można pominąć, ładunek elektronu wynosi $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Odp.
$$y = \frac{E e L^2}{4 E_k} \quad y = 0,06 \text{ m}.$$

9.24. Trzy kondensatory o pojemnościach C_1 C_2 C_3 połączono jak pokazuje rys. 9.8 i naładowano ładunkiem Q . Obliczyć ładunek zgromadzony na każdym kondensatorze.



Rys. 9.8. Połączenie kondensatorów do zadania 9.24

Odp.
$$Q_1 = \frac{Q}{2}, \quad Q_2 = \frac{Q C_2}{2(C_2 + C_3)}, \quad Q_3 = \frac{Q C_3}{2(C_2 + C_3)}.$$

9.25. Obliczyć potencjał pola elektrycznego utworzonego przez dipol elektryczny w punkcie zupełnie dowolnym, w odległości r_1 od jednego ładunku i r_2 od drugiego.

Odp.
$$V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

9.26. (xx 1976) Kondensator powietrzny o zmiennej pojemności od $C_1 = 20 \text{ pF}$ do $C_2 = 200 \text{ pF}$ naładowano do napięcia $U = 220 \text{ V}$ przy pojemności C_2 . Obliczyć wartość wykonanej pracy przy zmianie pojemności od C_2 do C_1 po uprzednim odłączeniu go od źródła napięcia. Opory mechaniczne pominąć.

$$\text{Odp.} \quad W = \frac{U^2 C_2}{2} \left(\frac{C_2}{C_1} - 1 \right) \quad W = 4,36 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$$

9.27. Kulka naładowana ładunkiem q zawieszona została na cienkiej jedwabnej nici w przestrzeni płaskiego kondensatora powietrznego, którego okrągłe okładki o promieniu R są poziome. Gdy okładkom udzielono ładunek Q , napięcie nici zwiększyło się dwukrotnie. Obliczyć ciężar kulki. Ciężar nici pomijamy.

$$\text{Odp.} \quad F = \frac{Q q}{\epsilon_0 \pi R^2}$$

9.28. Dwa kondensatory o pojemnościach $C_1 = 1 \text{ } \mu\text{F}$ i $C_2 = 2 \text{ } \mu\text{F}$ połączono szeregowo i dołączono do źródła prądu o napięciu $U = 100 \text{ V}$. Obliczyć zmianę energii kondensatorów, jeżeli odłączono ich od źródła napięcia i połączono równolegle.

$$\text{Odp.} \quad \Delta W = \frac{C_1 C_2 (C_2 - C_1)^2 U^2}{2 (C_1 + C_2)^3} \quad \Delta W = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

9.29. Obliczyć, jaki maksymalny ładunek Q można doprowadzić do kondensatora płaskiego powietrznego o pojemności $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$, jeżeli odległość między okładkami wynosi $d = 1 \text{ mm}$ a natężenie pola, przy którym następuje przebicie ma wartość $E = 4 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.

$$\text{Odp.} \quad Q = C E d \quad Q = 4 \cdot 10^{-2} \text{ C.}$$

9.30. (xx 1989) Płaski kondensator powietrzny naładowany został do pewnej różnicy potencjałów i odłączony od źródła prądu. Obliczyć ile razy zmieni się:

- pojemność kondensatora,
- różnica potencjałów między okładkami,
- natężenie pola elektrycznego,
- energia kondensatora, jeżeli odległość pomiędzy okładkami wzrośnie od wartości d do $d + dx$.

$$\begin{array}{ll} \text{Odp.} & \text{a) } \frac{C_2}{C_1} = \frac{d}{d + dx} \quad \text{b) } \frac{U_2}{U_1} = \frac{d + dx}{d} \\ & \text{c) } \frac{E_2}{E_1} = 1 \quad \text{d) } \frac{W_2}{W_1} = \frac{d + dx}{d}. \end{array}$$

9.31. Kondensator płaski o pojemności $C_1 = 2 \mu\text{F}$ naładowany do napięcia $U_1 = 290 \text{ V}$, dołączony został równolegle do drugiego kondensatora, naładowanego do napięcia $U_2 = 50 \text{ V}$. Obliczyć pojemność drugiego kondensatora, jeżeli po połączeniu napięcie wspólne ustaliło się na $U_k = 80 \text{ V}$.

$$\text{Odp.} \quad C_x = \frac{C_1(U_1 - U_k)}{U_k - U_2} \quad C_x = 14 \mu\text{F}.$$

9.32. (xx 1996) W jednorodnym, pionowym polu elektrycznym o natężeniu E umieszczono wahadło matematyczne składające się z jedwabnej nici o długości L i metalowej kulki o masie m naładowanej ładunkiem q . Obliczyć różnicę okresów wahań wahadła wywołaną zmianą zwrotu natężenia pola elektrycznego na przeciwny.

$$\text{Odp.} \quad \Delta T = 2\pi\sqrt{mL} \left[\frac{1}{\sqrt{mg - qE}} - \frac{1}{\sqrt{mg + qE}} \right]$$

9.33. (xx 1981) Dwa przewodniki odizolowane o pojemnościach $C_1 = 30 \text{ pF}$ i $C_2 = 15 \text{ pF}$ naładowano odpowiednio do potencjałów $V_1 = 20 \text{ V}$ i $V_2 = 10 \text{ V}$. Po połączeniu przewodników i zanurzeniu ich w nafcie, ich potencjał wyniósł $V = 18 \text{ V}$. Obliczyć pojemność układu przed i po połączeniu i zanurzeniu ich w nafcie..

$$\begin{aligned} \text{Odp.} \quad C_p &= C_1 + C_2 & C_p &= 45 \text{ pF} \\ C_n &= \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{V} & C_n &= 41,7 \text{ pF}. \end{aligned}$$

9.34. Dwie kule o promieniach r_1 i r_2 naładowano jednakowym ładunkiem Q . Obliczyć pracę przeniesienia ładunku q z jednej kuli na drugą, zakładając, że odległość pomiędzy kulami jest dużo większa od sumy promieni tych kul oraz, że $Q \gg q$.

$$\text{Odp.} \quad W = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right).$$

9.35. Kondensator o pojemności $C_1 = 1 \mu\text{F}$ został naładowany do napięcia $U = 110 \text{ V}$ i dołączony równolegle do baterii dwóch kondensatorów neutralnych połączonych szeregowo, których pojemności wynoszą: $C_2 = 2 \mu\text{F}$ i $C_3 = 3 \mu\text{F}$. Obliczyć ładunek, który przepłynął przy tym połączeniu przez przewody łączące kondensatory.

$$\text{Odp.} \quad q = \frac{U}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \quad q = 0,06 \text{ mC}.$$

9.36. Ładunek punktowy o wartości $q = 3 \mu\text{C}$ został umieszczony w środku osłony kulistej z dielektryka o względnej stałej dielektrycznej $\epsilon_r = 3$. Promień wewnętrzny osłony wynosił $a = 250 \text{ mm}$, a zewnętrzny $b = 500 \text{ mm}$. Obliczyć energię elektryczną zgromadzoną w warstwie dielektryka.

Odp.
$$W = \frac{q^2}{8 \pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad W = 27 \text{ mJ}.$$

Zadania testowe

9.37. (x 1989) (xx 1981) Kulka została naładowana pewnym ładunkiem. W jaki sposób można ustalić znak tego ładunku?

9.38. Ile ładunków elementarnych posiada jeden coulomb?

9.39. (xx 1981) Określić kierunek natężenia pola elektrycznego przy powierzchni naładowanego przewodnika.

9.40. (x 1981)(xx 1985) Natężenie pola elektrycznego w pewnym punkcie wynosi $E = 1000 \text{ V/m}$. Jak wielka siła działa na umieszczony w tym punkcie ładunek $q = 10^{-6} \text{ C}$?

9.41. Jakie jest natężenie pola elektrycznego w środku sześciokąta foremnego, jeżeli w jego wierzchołkach znajdują się jednakowe ładunki, każdy $+q$?

9.42. (xx 1987) Jakie jest natężenie i potencjał pola elektrycznego wewnątrz naładowanego kulistego przewodnika?

9.43. (xx 1982) Potencjał pola elektrycznego w punkcie odległym o $r = 0,5 \text{ m}$ od ładunku punktowego wynosi $V = 10 \text{ V}$. Ile wynosi natężenie pola (E) w tym punkcie?

9.44. (xx 1985) W pewnym obszarze potencjał elektryczny jest stały. Określić natężenie pola w tym punkcie.

9.45. (x 1998) Dwie kule metalowe, naładowane jednakowym ładunkiem, mają różne promienie. Przy powierzchni, której z tych kul (mniejszej czy większej) natężenie pola elektrycznego jest większe?

9.46. (xx 1984) Wykazać, że przyśpieszenie deuteronu i cząstki alfa w jednorodnym polu elektrycznym jest takie samo. Przyjąć, że masa protonu jest równa masie neutronu i nie uwzględniać zmiany masy z prędkością.

9.47. (xx 1981) Czy tor cząstki poruszającej się w jednorodnym polu elektrycznym jest zawsze identyczny z kierunkiem sił pola?

9.48. (x 1986) Kondensator płaski o powierzchni okładek S , wypełniony dielektrykiem o względnej przenikalności ϵ_r naładowano ładunkiem q . Obliczyć natężenie pola elektrycznego między okładkami, jeżeli przenikalność dielektryczna próżni jest ϵ_0 .

9.49. (xx 1998) Pyłek o ciężarze $P = 10^{-7} \text{ N}$ posiadający ładunek $q = 10^{-12} \text{ C}$ znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym między poziomymi okładkami kondensatora próżniowego oddalonymi od siebie o odległość $d = 1 \text{ cm}$. Jaka jest różnica potencjałów między okładkami, jeżeli pyłek pozostaje spoczynek?

9.50. (xx 1998) Jaka różnica potencjałów powinna być przyłożona pomiędzy dwoma płytkami metalowymi oddalonymi jedna od drugiej o $d = 15$ cm, aby wytworzyć natężenie pola elektrycznego $E = 600$ V/m.

9.51. (xx 1991) Okładki kondensatora płaskiego oddległe od siebie o $d = 10$ cm mają potencjały: $V_1 = 300$ V i $V_2 = 900$ V. Jakie jest natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie pomiędzy okładkami?

9.52. (xx 1996) Jak zmieni się natężenie pola elektrycznego w kondensatorze o pojemności C , jeżeli między jego okładki wprowadzi się dielektryk o względnej przenikalności elektrycznej ϵ_r ?

9.53. (xx 1984) Jak zmieni się energia naładowanego kondensatora, jeżeli po odłączeniu go od źródła napięcia przestrzeń pomiędzy okładkami wypełni się dielektrykiem o względnej przenikalności dielektrycznej $\epsilon_r = 2$?

9.54. (xx 1981) Kondensator płaski dołączony jest na stałe do źródła napięcia stałego U . Jak zmieni się energia tego kondensatora, jeżeli między jego okładki wsuniemy płytkę z dielektryka o względnej stałej dielektrycznej ϵ_r ?

9.55. Kondensator płaski o pojemności $C = 5$ μ F dołączony został na stałe do źródła napięcia stałego $U = 100$ V. Jaki ładunek elektryczny wpłynie do kondensatora, jeżeli między jego okładki wsunie się płytkę z dielektryka o względnej stałej dielektrycznej $\epsilon_r = 4$.

9.56. Kondensator płaski powietrzny o pojemności $C = 5$ μ F dołączony został na stałe do źródła napięcia stałego $U = 100$ V. Jaki ładunek elektryczny wpłynie do kondensatora gdy zmniejszymy odległość pomiędzy okładkami z $d_1 = 2$ cm do $d_2 = 0,5$ cm.

9.57. (xx 1996) Do naładowanego kondensatora dołączono równolegle taki sam kondensator nie naładowany. Jak zmieni się energia układu i jaka jest przyczyna tej zmiany?

9.58. (xx 1998) Różnica potencjałów pomiędzy chmurą burzową a Ziemią wynosi $U = 7 \cdot 10^6$ V. Jaka energia została rozproszona, gdy ładunek $Q = 50$ C został przeniesiony z chmury do Ziemi przy uderzeniu pioruna.

9.59. (x 1988) Energia kondensatora płaskiego dołączonego do źródła prądu o napięciu $U = 200$ V. jest równa $W = 2,4 \cdot 10^{-2}$ J. Jaka jest pojemność tego kondensatora?

9.60. (x 1987) Napięcie między okładkami kondensatora o pojemności $C = 0,1$ μ F wynosi $U = 10$ V. Jaki ładunek został zgromadzony w tym kondensatorze?

9.61. (xx 1985) Która z wielkości: C – pojemność, Q – ładunek, U – napięcie, E – natężenie pola elektrycznego, W – energia naładowanego kondensatora, nie zmieni swojej wartości, jeżeli kondensator wypełnimy dielektrykiem?

9.62. (xx 1982) Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora płaskiego w funkcji następujących danych: Q – ładunek na jednej okładce kondensatora, C – pojemność kondensatora, d – odległość między okładkami.

9.63. (xx 1991) Kule metalowe o różnych promieniach są naładowane takimi samymi ładunkami elektrycznymi. Co się stanie po połączeniu tych kul przewodnikiem?

9.64. (xx 1998) Kulę o promieniu $R = 10 \text{ cm}$ naładowano ładunkiem $Q = 100 \text{ pC}$. Jaki będzie potencjał tej kuli, jeżeli stałą dielektryczną próżni wyrazimy wzorem $\epsilon_0 = 10^{-9}/36 \pi \text{ F/m}$?

9.65. (xx 1996) Na dwie metalowe kule o promieniach $r_1 = 2 \text{ m}$ oraz $r_2 = 4 \text{ m}$ naniesiono jednakowe ładunki elektryczne. Jaki jest stosunek potencjałów tych kul?

9.66. (xx 1983) Jak zmieni się energia naładowanego kondensatora, jeżeli jego pojemność zwiększy się czterokrotnie, a jednocześnie dwukrotnie zmniejszy się napięcie między jego okładkami.

9.67. Jaka jest całkowita pojemność trzech kondensatorów o pojemnościach: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 4 \mu\text{F}$ połączonych ze sobą szeregowo.

9.68. (xx 1998) Trzy kondensatory o pojemnościach: C_1 , $C_2 = \frac{C_1}{2}$, $C_3 = \frac{C_1}{3}$ połączono szeregowo i dołączono do źródła napięcia. Który z kondensatorów naładuje się do najwyższego napięcia?

X. PRĄD ELEKTRYCZNY STAŁY

10.1. Natężenie prądu elektrycznego

Prądem elektrycznym nazywamy uporządkowany ruch ładunków elektrycznych: elektronów w metalach, jonów dodatnich i ujemnych w elektrolitach, jonów dodatnich i elektronów w gazach. Po przyłożeniu napięcia do końców przewodnika pojawia się na całej jego długości pole elektryczne, pod wpływem, którego zaczyna się uporządkowany ruch ładunków elektrycznych z prędkością bardzo małą, wynoszącą około 0,1 cm/s. Kierunek powstałego prądu jest zgodny z kierunkiem ruchu ładunków elektrycznych dodatnich. Jest to techniczny kierunek prądu. Wszystkie reguły odnoszą się do tego kierunku prądu.

Natężenie prądu określa się jako stosunek ilości ładunków przepływających przez poprzeczny przekrój przewodnika do czasu tego przepływu:

$$I = \frac{Q}{t} \quad (10.1)$$

Jednostką natężenia prądu jest jeden **amper**. Definicja ampera w układzie SI. nie opiera jednak się na powyższym wzorze, lecz na oddziaływaniu wzajemnym dwóch przewodników równoległych z prądami i jest jedną z podstawowych jednostek tego układu (str.9).

10.2. Opór elektryczny, prawo Ohma.

Prąd elektryczny płynąc przez dany przewodnik natrafia na opór, zwany oporem elektrycznym, który można określić za pomocą prawa Ohma: stosunek napięcia przyłożonego do końców przewodnika do natężenia prądu w nim płynącego jest wielkością stałą dla danego przewodnika i nazywa się jego oporem:

$$R = \frac{U}{I} \quad (10.2)$$

Opór elektryczny nie zależy od napięcia, gdyż przy większym napięciu płynie prąd o większym natężeniu, przy mniejszym – mniejszy, a stosunek tych wielkości pozostaje stały dla danego przewodnika.

Jednostką oporu elektrycznego przewodnika jest **om** (Ω): przewodnik ma opór jednego oma, jeżeli pod napięciem jednego wolta płynie prąd o natężeniu jednego ampera. Natomiast opór elektryczny przewodnika zależy od jego wymiarów, tzn. od jego długości i pola przekroju: jest wprost proporcjonalny do długości i odwrotnie proporcjonalny do pola przekroju:

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (10.3)$$

gdzie ρ – jest oporem właściwym. Jest to opór przewodnika o długości 1 m i polu przekroju 1 m². Wymiarem oporu właściwego jest $\Omega \text{ m}$.

Opór elektryczny zależy też od temperatury przewodnika. Dla półprzewodników i elektrolitów maleje ze wzrostem temperatury, natomiast dla metali maleje z obniżeniem temperatury, co wyraża się wzorem:

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta t) \quad (10.4)$$

gdzie R_0 – jest oporem elektrycznym w temperaturze 0°C ,

α – współczynnikiem temperaturowym danego przewodnika

Δt – różnicą temperatur w stosunku do 0°C .

W temperaturach bardzo niskich, bliskich zera bezwzględnego, opór metali znika całkowicie, co nazywamy zjawiskiem nadprzewodnictwa.

Przewodniki o różnych oporach możemy łączyć szeregowo, równolegle lub w sposób mieszany. W połączeniu szeregowym, całkowity opór równa się sumie oporów poszczególnych przewodników:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (10.5)$$

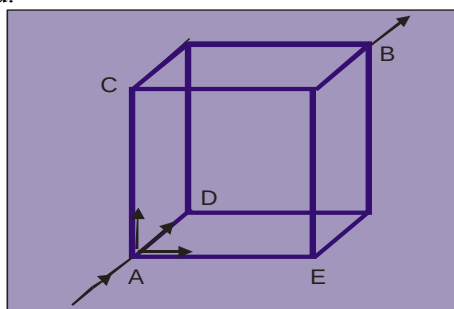
W połączeniu tym, natężenie prądu w poszczególnych przewodnikach jest jednakowe. W połączeniu równoległym, odwrotność oporu całkowitego, równa się sumie odwrotności oporów poszczególnych przewodników:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (10.6)$$

W połączeniu tym napięcia na poszczególnych przewodnikach są jednakowe, a natężenia prądów różne. Każde połączenie mieszane można rozłożyć na kombinację połączenia szeregowego i równoległego. W celu wyliczenia oporu całkowitego w połączeniu mieszanym, rozpatrujemy obwód zastępczy, w którym uwidocznione są połączenia szeregowe i równoległe.

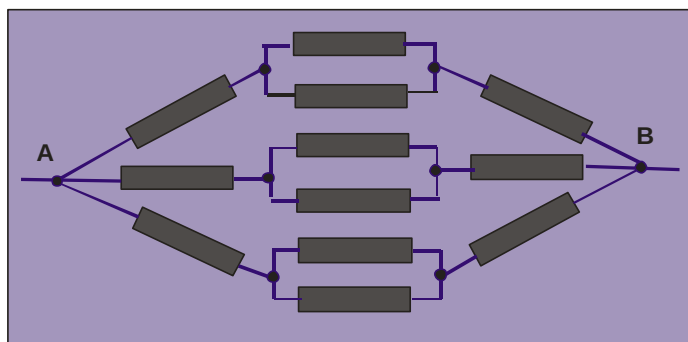
Przykład 10.1.

Z dwunastu jednakowych przewodników o oporze $r = 1 \text{ om}$ każdy, zrobiony został szkielet sześcianu.



Rys. 10.1. Sześcian składający się z dwunastu oporników włączony jest do obwodu punktami A i B

W celu obliczenia oporu całkowitego w/w oporników, tworzymy obwód zastępczy, przedstawiony na **rys. 10.2**.



Rys. 10.2. Układ zastępczy oporników do przykładu 10.1

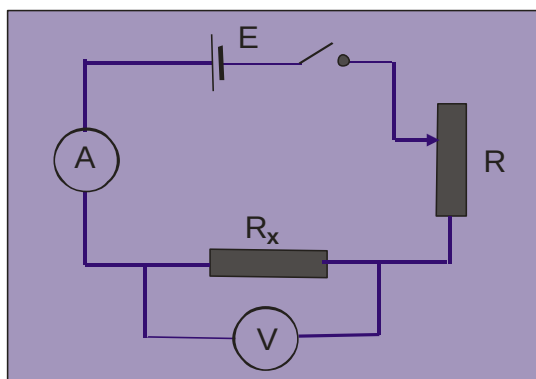
Widać z niego, że są to trzy grupy oporników w połączeniu szeregowym, z których pierwsza składa się z trzech równolegle połączonych oporników, druga z sześciu, a trzecia z trzech. Mamy więc:

$$R = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} \quad \text{lub} \quad R = \frac{5}{6} r .$$

10.2. Pomiar oporu przewodnik.

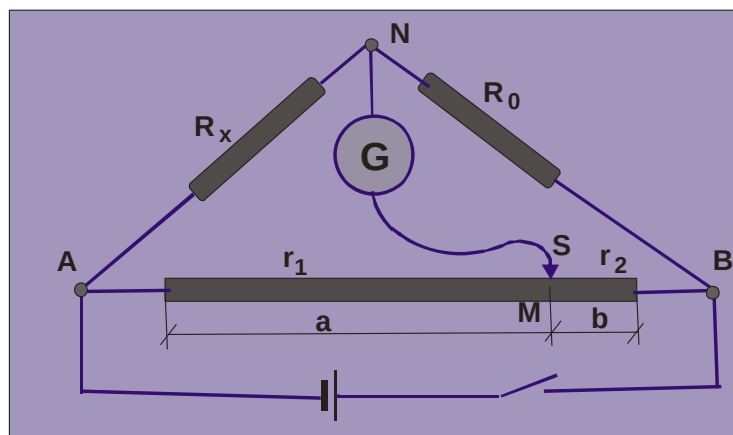
Opór danego przewodnika możemy zmierzyć opierając się bezpośrednio na prawie Ohma, albo za pomocą mostka Wheatstone'a. W pierwszym przypadku zestawiamy obwód jak na **rys. 10.3**.

Przy różnych położeniach suwaka, na oporniku R otrzymujemy różne wartości napięcia i natężenia prądu R_x na oporniku, ale ich stosunek pozostaje stały. Korzystając, więc ze wzoru (10.2) wyliczamy opór R_x .



Rys. 10.3. Schemat do pomiaru oporu elektrycznego metodą prawa Ohma

W celu wyznaczenia nieznanego oporu R_x za pomocą mostka Wheastone'a zestawiamy obwód jak na rys. 10.4.



Rys. 10.4. Schemat mostka Wheastone'a

Prąd płynący ze źródła prądu stałego rozdziela się na dwa prądy w punkcie A: płynący przez opornik r_1 (i_1) oraz przez opornik R_x (i_2). Można znaleźć taki punkt M na oporniku AB, że potencjał w punkcie M będzie taki sam jak w punkcie N, wtedy prąd przez galwanometr G nie będzie płynąć i spadki napięć na opornikach r_1 i R_x będą jednakowe, co możemy zapisać:

$$r_1 i_1 = R_x i_2$$

oraz będą jednakowe spadki napięć na opornikach R_0 i r_2 :

$$r_2 i_1 = R_0 i_2$$

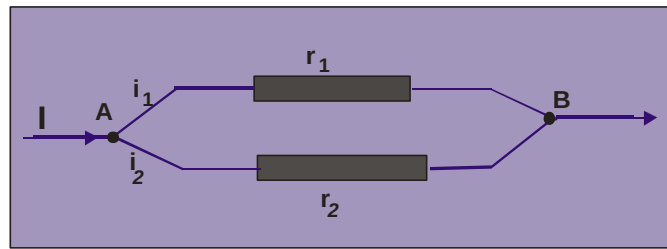
Po podzieleniu stronami powyższych dwóch równań oraz zastąpieniu oporów r_1 i r_2 przez odpowiednie odcinki a i b $\left(r_1 = \rho \frac{a}{S}, r_2 = \rho \frac{b}{S} \right)$, otrzymamy:

$$R_x = R_0 \frac{a}{b}$$

gdzie R_0 – jest oporem znanym (wzorcowym).

10.3. Prawa Kirchhoffa

Gdy dwa przewodniki o oporach r_1 i r_2 połączymy równolegle, to prąd przed rozgałęzieniem o natężeniu I rozdzieli się w punkcie A na dwa prądy: na prąd o natężeniu i_1 płynący przez opornik r_1 oraz na prąd o natężeniu i_2 płynący przez opornik r_2 (rys. 10.5.).



Rys. 10.5. Prąd o natężeniu I rozdziela się w punkcie A na dwa prądy: o natężeniu i_1 oraz na prąd o natężeniu i_2

Pierwsze prawo Kirchhoffa mówi nam o tym, że suma natężeń prądów w przewodnikach połączonych równolegle, równa się natężeniu prądu przed rozgałęzieniem:

$$i_1 + i_2 = I \quad (10.7)$$

lub

$$i_1 + i_2 - I = 0$$

Ostatnie równanie można uogólnić i pierwsze prawo Kirchhoffa można wypowiedzieć, że suma prądów wpływających i wypływających z danego węzła obwodu równa się zero:

$$\sum i = 0 \quad (10.8)$$

Drugie prawo Kirchhoffa mówi nam, że natężenia prądów płynących przez przewodniki równoległe o oporach r_1 i r_2 (**rys. 10.5.**) są odwrotnie proporcjonalne do wartości tych oporów:

$$i_1 r_1 = i_2 r_2 \quad (10.9)$$

Wynika stąd, że spadki napięć na oporach połączonych równolegle są jednakowe:

$$U_1 = U_2$$

Powyższe równanie można przedstawić w postaci bardziej ogólnej a mianowicie, że suma spadków napięć z ewentualnymi siłami elektromotorycznymi w danym oczku obwodu jest równa zero:

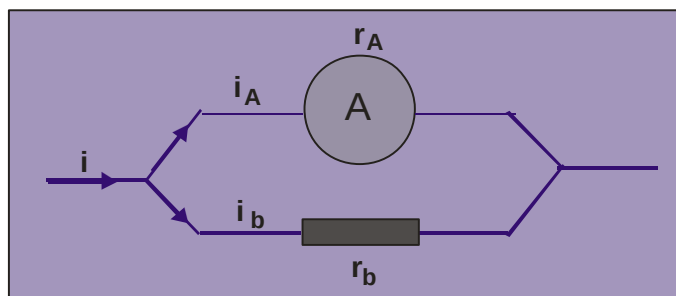
$$\sum U = 0 \quad (10.10)$$

Przykład 10.2

Amperomierz o oporze wewnętrznym $r_A = 0,7 \Omega$ posiada skalę do $i_A = 5$ amperów. Jaki opornik należy dołączyć równolegle do tego amperomierza (**rys. 10.6**), żeby można było nim mierzyć prąd o natężeniu $i = 20$ A?

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa możemy napisać: $i_A + i_b = i$ zaś z drugim prawem Kirchhoffa będziemy mieli:

$$i_A r_A = i_b r_b$$



Rys. 10.6. Mierzony prąd rozdziela się na prąd płynący przez amperomierz (i_A) i na prąd płynący przez bocznik (i_b)

Wyznaczając z równania pierwszego i_b następnie, wstawiając do równania drugiego wyznaczymy r_b :

$$r_b = \frac{i_A r_A}{i - i_A} \quad r_b = 0,23 \, \Omega.$$

10.5. Praca i moc prądu stałego

Prąd elektryczny płynący przez przewodnik wykonuje pracę, która równa jest wydzielonemu ciepłu. Pracę tę określamy z elektrostatyki ze wzoru (9.16), wyrażającego pracę wykonaną przy przemieszczeniu ładunku q między punktami pola o potencjałach V_1 i V_2 . Przyjmując, że

$$W = q (V_2 - V_1)$$

oraz $V_2 - V_1 = U$ i $q = i t$

otrzymamy: $W = U i t$ (10.11)

gdzie $U i = P$ jest mocą prądu.

Dlatego też praca prądu może być wyrażona iloczynem mocy i czasu:

$$W = P \cdot t. \quad (10.12)$$

Jednostkę pracy prądu elektrycznego otrzymuje się więc z jednostki mocy i jednostki czasu, jak np. Wat-sek. Wat-godz. itp., ale najczęściej używaną jednostką pracy prądu jest kilowat-godz (**kWh**).

$$1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ J}. \quad (10.13)$$

Ciepło wydzielone w czasie przepływu prądu, wyraża się w układzie SI takim samym wzorem jak i praca:

$$Q = U i t \quad (10.14)$$

10.6. Siła elektromotoryczna źródła prądu (SEM)

Siłą elektromotoryczną źródła prądu jest różnica potencjałów na zaciskach tego źródła, gdy nie czerpiemy z niego prądu. Gdy prąd jest pobierany, wtedy różnica potencjałów jest mniejsza od siły elektromotorycznej o spadek napięcia na oporze wewnętrznym źródła:

$$U = E - r_w i$$

lub
$$E = U + r_w i \quad (10.15)$$

gdzie $U = R_z i$ jest spadkiem napięcia na oporze zewnętrznym źródła.

Wzór (10.15) można, więc przekształcić do następującej postaci:

$$i = \frac{E}{R_z + r_w} \quad (10.16)$$

nosi on nazwę prawa Ohma dla całego obwodu, gdyż uwzględnia opór wewnętrzny źródła. Gdy mamy kilka (n) źródeł prądu, o SEM E każde, które łączymy szeregowo, to wtedy wzór (10.16) przyjmie postać:

$$i_s = \frac{n E}{R_z + n r_w} \quad (10.17)$$

W przypadkułączenia równoległego n ogniw o sile elektromotorycznej E każde będziemy mieli:

$$i_r = \frac{E}{R_z + \frac{r_w}{n}} \quad (10.18)$$

W pierwszym przypadku otrzymujemy wyższe napięcie, w drugim większe natężenie prądu.

10.7. Prąd elektryczny w elektrolitach

Elektrolitem nazywamy roztwór wodny kwasów, zasad i soli, w których znajdują się obojętne cząsteczki tych substancji oraz jony dodatnie i ujemne, gdyż pod wpływem wody następuje rozpad cząsteczek soli kuchennej (NaCl) na jony dodatnie sodu (Na^+) i jony ujemne chloru (Cl^-):



Jonem nazywamy atom lub cząsteczkę posiadającą ładunek elektryczny tzn. dodatkowy elektron (jon ujemny) lub brak elektronu (jon dodatni).

Gdy do elektrolitu wstawimy dwie płytki metalowe, (elektrody) jedną połączymy z biegunem ujemnym źródła prądu a drugą z dodatnim, to nastąpi ruch jonów do odpowiednich elektrod (płytek): dodatnich do ujemnej a ujemnych jonów do dodatniej.

Jony po dojściu do elektrod zubożniają się tzn. jony ujemne oddają nadmiar elektronów a dodatnie przyjmują elektrony, stając się cząsteczkami obojętnymi, które osiadają na elektrodach lub wchodzi w reakcje chemiczne.

Taki uporządkowany ruch jonów w elektrolicie łącznie z wydzielaniem się substancji na elektrodach nazywamy elektrolizą. Masa wydzielonej substancji określona jest pierwszym prawem elektrolizy (Faraday'a): jest ona wprost proporcjonalna do natężenia prądu i czasu trwania elektrolizy, co można zapisać:

$$m = k i t. \quad (10.19)$$

gdzie k – jest równoważnikiem elektrochemicznym.

Drugie prawo elektrolizy mówi nam, że jeżeli przepuścimy prąd o tym samym natężeniu i w tym samym czasie przez dwa różne elektrolity, to masy wydzielonych substancji będą się miały tak jak ich gramorównoważniki chemiczne:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (10.20)$$

Uwzględniając wzór (10.19) będziemy mieli:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{lub} \quad \frac{R_1}{k_1} = \frac{R_2}{k_2} = \frac{R}{k} = F.$$

Wielkość ta (F) została nazwana stałą Faradey'a, jest to ładunek, który wydziela na elektrodzie jeden gram-równoważnik danej substancji. Wynosi on 96 500 C.

Zadania rozwiązane

10.1. Obliczyć, ile elektronów przepłynie przez przekrój poprzeczny włókna żarówki w czasie $t = 1$ s, jeżeli natężenie prądu pobieranego przez tę żarówkę wynosi $i = 2$ A. Wyliczamy ładunek przepływający przez poprzeczny przekrój włókna w czasie t :

$$Q = i t.$$

Ładunek jednego elektronu wynosi $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Na ładunek Q składa się n elektronów, co możemy zapisać:

$$Q = n e$$

stąd:

$$n = \frac{i t}{e}.$$

$$n = 1,25 \cdot 10^{19}$$

10.2. Obliczyć, w jaki sposób należy połączyć $n = 50$ oporników o oporze $r = 10 \Omega$ każdy, aby całkowity opór układu wyniósł $R = 5 \Omega$.

Przez x oznaczamy liczbę oporników w jednym rzędzie, zaś y liczbę rzędów. Możemy, więc napisać dwa następujące równania:

$$x y = n$$

$$\frac{y}{x r} = \frac{1}{R}.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymamy:

$$x = \sqrt{\frac{n R}{r}}$$

$x = 5$, w każdym rzędzie
 $y = 10$ rzędów.

10.3. (xx 1975) Żarówka z włóknem wolframowym pobiera moc $P = 50 \text{ W}$, przy normalnym świeceniu, gdy temperatura jej włókna wynosi $t_2 = 2500 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Obliczyć moc pobieraną przez tę żarówkę w pierwszej chwili po przyłączeniu jej do źródła napięcia, gdy włókno ma temperaturę pokojową $t_1 = 20^{\circ} \text{C}$. Współczynnik temperaturowy oporu wolframu wynosi $\alpha = 0,0045 \text{ K}^{-1}$.

Moc należy wyrazić za pomocą oporu:

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

W naszym przypadku:

$$P_x = \frac{U^2}{R_0 (1 + \alpha t_1)} \quad P = \frac{U^2}{R_0 (1 + \alpha t_2)}.$$

Po podzieleniu stronami otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy szukaną moc:

$$P_x = P \frac{(1 + \alpha t_2)}{(1 + \alpha t_1)} \quad P_x = 562 \text{ W}.$$

10.4. (xx 1998) Jaka powinna być moc czajnika elektrycznego, ażeby w ciągu czasu $t = 10 \text{ min}$ można było w nim ogrzać $m = 0,6 \text{ kg}$ wody od temperatury $T_1 = 283 \text{ K}$, do temperatury $T_2 = 373 \text{ K}$ zakładając, że sprawność czajnika wynosi $\eta = 0,6$ ciepło właściwe wody $C = 4190 \text{ J/kg K}$.

Sprawnością danego urządzenia nazywamy stosunek pracy użytecznej do pracy włożonej:

$$\eta = \frac{m C (T_2 - T_1)}{U i t}.$$

Z powyższego równania wyznaczamy szukaną moc:

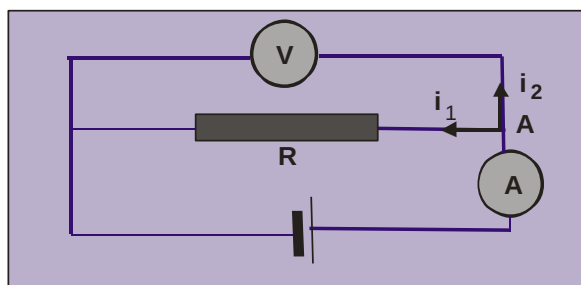
$$U i = \frac{m C (T_2 - T_1)}{t \eta}$$

$$M = 629 \text{ W}.$$

10.5. (x 1987)(x 1991) W obwodzie elektrycznym przedstawionym na **rys. 10.7.** amperomierz wskazuje natężenie prądu $i = 0,04 \text{ A}$, a woltomierz napięcie $U = 20 \text{ V}$. Obliczyć opór R_V woltomierza, jeżeli opór $R = 1000 \ \Omega$, a opór amperomierza pomijamy.

W punkcie A prąd o natężeniu i rozdziela się na dwa prądy:

$$i = i_1 + i_2.$$



Rys 10.7. Obwód elektryczny z którego należy wyznaczyć opór woltomierza R_V

W oparciu o drugie prawo Kirchhoffa możemy napisać:

$$i_1 R = i_2 R_V.$$

Wyznaczając z pierwszego równania i_2 i wstawiając do równania drugiego, otrzymamy:

$$i_1 R = R_V (i - i_1).$$

Uwzględniając, że: $i_1 = \frac{U}{R}$ wyliczymy R_V :

$$R_V = \frac{U R}{R i - U}$$

$$R_V = 1000 \ \Omega.$$

10.6. (xx 1989) Ogniwo galwaniczne zwarto opornikiem $R_1 = 8,1 \ \Omega$. Następnie, to samo ogniwo zwarto opornikiem $R_2 = 10 \ \Omega$. W pierwszym i drugim przypadku ilość ciepła wydzielonego na tych opornikach była taka sama. Obliczyć opór wewnętrzny r ogniwa.

Ilość wydzielonego ciepła w pierwszym przypadku wyrazi się wzorem:

$$Q = R_1 i_1^2 t,$$

w drugim

$$Q = R_2 i_2^2 t$$

gdzie

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + r} \quad i_2 = \frac{E}{R_2 + r}.$$

Uwzględniając powyższe zależności otrzymamy równanie:

$$R_1 \frac{E^2}{(R_1 + r)^2} t = R_2 \frac{E^2}{(R_2 + r)^2} t,$$

z którego wyznaczymy szukany opór r :

$$r = \sqrt{R_1 R_2} \quad r = 9 \Omega.$$

10.7. (x 1988) W kalorymetrze zawierającym $m = 0,1$ kg nafty zanurzono spiralę o oporze $R = 3,6 \Omega$ i połączono ją z elektrodami ogniwa o sile elektromotorycznej $E = 1,8$ V. Po upływie czasu $t = 1020$ s temperatura nafty wzrosła o $\Delta t = 3$ K. Obliczyć opór wewnętrzny tego ogniwa. Ciepło właściwe nafty wynosi $c = 2100$ J/kgK.

Ilość wydzielonego przez spiralę ciepła wyrazi się wzorem:

$$Q = R i^2 t$$

gdzie

$$i = \frac{E}{R + r}.$$

Mamy więc:

$$Q = \frac{R E^2}{(R + r)^2} t.$$

Ciepło potrzebne do ogrzania nafty wyraża się wzorem:

$$Q = m c \Delta T.$$

Porównując w/w ciepła, otrzymamy równanie z którego wyznaczymy opór:

$$r = E \sqrt{\frac{R t}{m c \Delta T}} - R \quad r = 0,74 \Omega$$

10.8. (xx 1978) Amperomierz połączony z biegunami ogniwa o sile elektromotorycznej $E = 1,6$ V i oporze wewnętrznym $r = 0,2 \Omega$ wskazuje natężenie prądu $i = 4$ A. Jakie będzie wskazanie amperomierza, jeżeli nie odłączając go od źródła prądu dołączymy równolegle do niego opornik o oporze $R = 0,1 \Omega$. Przyjąć, że SEM ogniwa nie ulega zmianie.

Dla obwodu bez dodatkowego oporu możemy napisać równanie:

$$E = i (R_A + r),$$

gdzie R_A – jest oporem amperomierza.

Dla obwodu z dodatkowym oporem R połączonym równolegle z amperomierzem będziemy mieli:

$$E = i_x \left(\frac{R_A R}{R_A + R} + r \right),$$

gdzie i_x jest całkowitym natężeniem prądu w tym obwodzie.

Z powyższych dwóch równań wyznaczamy dwie niewiadome: i_x oraz R_A :

$$i_x = \frac{(i R + E - i r)}{R E + E r - i r^2} \quad (10.21)$$

$$R_A = \frac{E - i r}{i}. \quad (10.22)$$

Całkowity prąd i_x rozdziela się na dwa prądy – płynący przez amperomierz (i_A) oraz przez opór R (i_R):

$$i_x = i_A + i_R.$$

W oparciu o drugie prawo Kirchhoffa możemy napisać:

$$i_A R_A = i_R R.$$

Rozwiązując układ powyższych dwóch równań i uwzględniając wzory (10.21), (10.22) otrzymamy:

$$i_A = \frac{R i E}{R E + E r - i r^2}, \quad i_A = 2 \text{ A}.$$

10.9. (xx 1975) Moc pobierana przez opornik zewnętrzny R dołączony do źródła prądu zależy od wartości tego oporu. Obliczyć siłę elektromotoryczną źródła prądu, jego opór wewnętrzny, jeżeli maksymalna moc prądu w obwodzie zewnętrznym $P_{\max} = 9 \text{ W}$, a natężenie prądu, jaki wtedy płynie wynosi $i = 3 \text{ A}$. Moc źródła prądu należy wyrazić w funkcji oporu zewnętrznego R . W tym celu korzystamy ze wzoru:

$$P = R i^2 \quad i = \frac{E}{R + r},$$

gdzie r – jest oporem źródła prądu.

Mamy więc:

$$P = R \frac{E^2}{(R + r)^2}.$$

Maksymalną moc w obwodzie otrzymamy, obliczając jej pochodną względem oporu R i otrzymany wynik porównując do zera:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{E^2 (R + r)^2 - R E^2 2 (R + r)}{(R + r)^4}.$$

Wystarczy porównać do zera tylko licznik. Wtedy otrzymamy:

$$r = R,$$

ale:

$$P_{\max} = R i^2,$$

skąd:

$$R = \frac{P_{\max}}{i^2} \quad R = 1 \text{ } \Omega.$$

Siła elektromotoryczna będzie:

$$E = 2 R i \quad E = 6 \text{ V}.$$

10.10. (xx 1977) Kondensator płaski i opór $R = 4,5 \, \Omega$ połączono ze sobą równolegle i dołączono do źródła prądu stałego. Odległość między okładkami kondensatora wynosiła $d = 2 \, \text{mm}$, a natężenie pola elektrycznego w kondensatorze wynosiło $E = 22,5 \cdot 10^2 \, \text{V/m}$. Obliczyć siłę elektromotoryczną źródła, jeżeli wiadomo, że jego opór wewnętrzny $r = 0,5 \, \Omega$.

Prąd stały nie płynie przez kondensator, ale napięcie na jego okładkach równa się spadkowi napięcia na oporze R :

Szukaną siłę elektromotoryczną wyliczymy ze wzoru:

$$\varepsilon = i(R + r).$$

Natężenie prądu i znajdziemy z porównania napięcia na oporniku i na kondensatorze:

$$R i = E d, \text{ stąd } i = \frac{E d}{R}.$$

Szukana siła elektromotoryczna będzie:

$$\varepsilon = \frac{E d}{R}(R + r) \quad \varepsilon = 5 \, \text{V}.$$

10.11. (xx 1977) Grzałkę o oporze R umieszczono w zamkniętym naczyniu o stałej objętości, zawierającym n moli gazu doskonałego. Obliczyć, ile czasu będzie trwało ogrzewanie gazu od temperatury T_1 do temperatury T_2 przy założeniu, że całe ciepło wydzielone na oporze R jest zużyte na ogrzanie gazu. SEM źródła zasilającego grzałkę wynosi E , jego opór wewnętrzny r a ciepło molowe gazu w stałej objętości wynosi C_V .

Ciepło potrzebne do ogrzania w/w gazu wyrazi się wzorem:

$$Q = n C_V (T_2 - T_1).$$

Ciepło to równe jest energii elektrycznej dostarczonej przez grzałkę:

$$Q = R i^2 t.$$

Porównując w/w ciepło z energią elektryczną i uwzględniając, że:

$$i = \frac{E}{R + r}$$

otrzymamy równanie z którego wyznaczymy szukany czas t :

$$t = \frac{n C_V (T_2 - T_1) (R + r)^2}{R E^2}.$$

10.12. (xx 1978) Dwa jednakowe ogniwa o oporze wewnętrznym r każde, zasilają żarówkę. Obliczyć jej opór, jeżeli wiadomo, że moc pobierana przez tę żarówkę jest taka sama zarówno przy szeregowym jak i przy równoległym połączeniu ogniw.

Moc wydzielana w żarówce wyraża się wzorem:

$$M = i^2 R_z$$

gdzie i – jest natężeniem prądu w obwodzie, które dla szeregowo połączonych ogniw wyrazi się wzorem:

$$i = \frac{2E}{R_z + 2r},$$

natomiast dla równolegle połączonych będzie:

$$i = \frac{E}{R_z + \frac{r}{2}}.$$

Uwzględniając powyższe wzory oraz to, że moc jest jednakowa przy szeregowym jak i równoległym połączeniu ogniw, możemy napisać:

$$\frac{4E^2}{(R_z + 2r)^2} R_z = \frac{E^2}{\left(R_z + \frac{r}{2}\right)^2} R_z.$$

Z powyższego równania wyznaczmy opór żarówki:

$$R_z = r.$$

Zadania uzupełniające

10.13. Obliczyć, ile elektronów przepływa przez poprzeczny przekrój przewodnika o powierzchni $S = 2 \text{ mm}^2$ w czasie $t = 1 \text{ min}$, jeżeli gęstość prądu w tym przewodniku wynosi $\sigma = 25 \text{ A/cm}^2$?

Odp. $n = 1,9 \cdot 10^{20}$

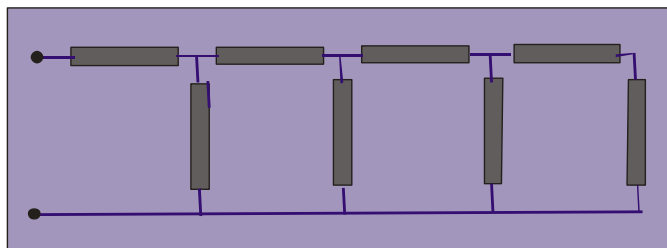
10.14. W jakim stosunku należy podzielić okrąg na dwie części, żeby opór całkowity utworzony z tych części w połączeniu równoległym był 4,5 razy mniejszy od oporu drutu, z którego został zrobiony dany okrąg.

Odp. $\frac{L_2}{L_1} = 2$

10.15. Ramka prostokątna wykonana z drutu oporowego włączona została do obwodu elektrycznego najpierw jednym krótszym bokiem, a następnie jednym dłuższym. W pierwszym przypadku opór ramki wyniósł R , a w drugim $1,6 R$. Obliczyć stosunek oporów boku większego do mniejszego.

Odp. $\frac{r_2}{r_1} = 2.$

10.16. Znaleźć opór zastępczy układu oporników o wartości $R = 21\Omega$ każdy, przedstawiony na rys. 10.8.



Rys. 10.8. Układ oporników do zadania 10.16

Odp. $R_z = 34\Omega$

10.17. (xx 1981) Temperatura włókna żarówki włączonej do sieci o napięciu $U_1 = 220\text{ V}$ i pobierającej moc $P_1 = 100\text{ W}$ wynosi $T_1 = 2000\text{ K}$. Po włączenie do sieci o napięciu $U_2 = 110\text{ V}$ żarówka ta pobiera moc $P_2 = 30\text{ W}$ a temperatura włókna wynosi $T_2 = 1620\text{ K}$. Jaki jest temperaturowy współczynnik włókna?

Odp. $\alpha = 0,0018 \frac{1}{\text{K}}$

10.18. (xx 1979) Żarówka z włóknem wolframowym ma moc $P = 60\text{ W}$, przy napięciu $U = 120\text{ V}$. Opór tej żarówki w temperaturze 0°C wynosi $R_0 = 20\Omega$. Obliczyć temperaturę żarzenia włókna żarówki przy napięciu $U = 120\text{ V}$, jeżeli współczynnik temperaturowy oporu wolframu jest $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} 1/\text{K}$.

Odp $t = \frac{U^2 - P R_0}{P R_0 \alpha} \quad T = 2473\text{ K}.$

10.19. (xx 1987) Jaki dodatkowy opór R należy połączyć szeregowo z żarówką o mocy P dostosowanej do napięcia U , aby przy tym napięciu moc układu była n -krotnie mniejsza ?

Odp. $R = \frac{U^2 (n-1)}{P}.$

10.20. (xx 1978) Przez diodę próżniową płynie prąd stały o natężeniu $i = 6\text{ mA}$. Wiadomo, że na anodzie tej lampy w ciągu czasu $t = 20\text{ min}$, wydziela się ilość ciepła $Q = 16,4\text{ J}$. Obliczyć stosunek ładunku elektronu do jego masy, jeżeli prędkość elektronów uderzających o anodę wynosi $V = 9 \cdot 10^5\text{ m/s}$.

Odp. $\frac{e}{m} = \frac{V^2 i t}{2 Q} \quad \frac{e}{m} = 1,78 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}.$

10.21. (xx 1984) Dwa oporniki o oporach R_1 i R_2 połączone równolegle dołączono do ogniwa o oporze wewnętrznym r . Obliczyć siłę elektromotoryczną ogniwa, jeżeli wiadomo, że moc wydzielana w oporniku R_1 wynosi P .

Odp.
$$E = \sqrt{\frac{P}{R_1} \frac{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{R_2}}.$$

10.22. (1979) Czajnik elektryczny zawiera dwie spirale grzejne o oporze $r = 4 \Omega$ każda. Czajnik jest zasilany z baterii o SEM $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$. Czas zagotowania tej samej masy wody, przy szeregowym połączeniu obu spiral jest taki sam jak przy połączeniu równoległym. Obliczyć, natężenie prądu, który przepływa przez baterię przy jej zwarcu.

Odp.
$$i_{zw} = 3 \text{ A}.$$

10.23. Woltomierz o oporze wewnętrznym $R_v = 5000 \Omega$ połączony został z biegunami źródła prądu o nieznaney sile elektromotorycznej. Obliczyć opór wewnętrzny tego źródła prądu, jeżeli wiadomo, że wskazania woltomierza są o 2% mniejsze od SEM źródła.

Odp.
$$r_w = \frac{2 R_v}{98} \quad r_w = 102 \Omega.$$

10.24. Ogniwo o SEM $\mathcal{E} = 15 \text{ V}$ zostało zwarte oporem. Wtedy napięcie użyteczne na tym oporze wynosiło $U = 1,2 \text{ V}$. Obliczyć, ile takich ogniw należy spiąć w szereg, aby przy zwarcu utworzonej baterii tym samym oporem napięcie użyteczne wzrosło $n_0 = 3$ razy.

Odp.
$$n_x = \frac{n_0 U}{\mathcal{E} - n_0 (\mathcal{E} - U)} \quad n_x = 6.$$

10.25. (xx 1980) Opornik o oporności $R = 4 \Omega$ i kondensator płaski połączono równolegle i dołączono do źródła stałego o SEM $\mathcal{E} = 2 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $r_w = 0,5 \Omega$. Natężenie pola elektrycznego w kondensatorze osiągnęło wartość $E = 200 \text{ V/m}$. Obliczyć odległość między okładkami kondensatora.

Odp.
$$d = \frac{\epsilon R}{E (R + r_w)} \quad d = 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

10.26. (xx 1989) Znaleźć opór wewnętrzny źródła prądu, jeżeli moc wydzielona w obwodzie zewnętrznym jest jednakowa dla dwóch wartości oporu zewnętrznego $R_1 = 5 \Omega$ i $R_2 = 0,2 \Omega$.

Odp.
$$r_w = \sqrt{R_1 R_2} \quad r_w = 1 \Omega.$$

10.27. (1990) Obliczyć opór wewnętrzny r pojedynczego ogniwa, jeżeli przy połączeniu równoległym trzech takich ogniw na oporze zewnętrznym $R = 0,3 \Omega$ wydziela się taka sama moc, jak w przypadku szeregowego połączenia 9 takich ogniw.

Odp. $r_w = \frac{4}{3} R$ $r_w = 0,4 \Omega$.

10.28. (xx 1983) W oporniku dołączonym do baterii złożonej z pięciu szeregowo połączonych ogniw, każde o siłę elektromotorycznej $E = 1,4 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $r_w = 0,3 \Omega$, wydziela się moc $P = 8 \text{ W}$. Obliczyć natężenie prądu płynącego w obwodzie.

Odp. $i = \frac{5 E \pm \sqrt{25 E^2 - 20 r_w P}}{10 r_w}$ $i_1 = 2 \text{ A}$ $i_2 = 2,7 \text{ A}$.

10.29. (xx 1981) (xx1998) Dwa grzejniki o oporach R_1 i $R_2 = 2 R_1$ połączono raz szeregowo a drugi raz równolegle. Obliczyć stosunek mocy wydzielonych w każdym grzejniku w obu przypadkach, jeżeli napięcie źródła pozostało to samo.

Odp. $\frac{P_{1s}}{P_{1r}} = \frac{1}{9}$ $\frac{P_{2s}}{P_{2r}} = \frac{4}{9}$

10.30 (xx 1981) Ogniwo tworzy z oporem zewnętrznym $R_1 = 3,75 \Omega$ obwód, w którym płynie prąd o natężeniu $i_1 = 0,5 \text{ A}$. Jeżeli opór zewnętrzny zwiększymy o wartość $R_2 = 4,7 \Omega$, to natężenie prądu w obwodzie zmniejszy się do $i_2 = 0,4 \text{ A}$. Obliczyć SEM i opór wewnętrzny ogniwa.

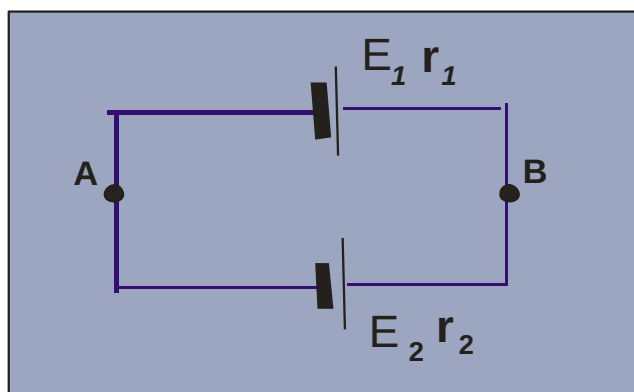
Odp. $E = \frac{i_1 i_2 R_2}{i_1 - i_2}$ $E = 9,5 \text{ V}$.

$$r_w = \frac{i_2 R_2 + i_2 R_1 - i_1 R_1}{i_1 - i_2} \quad r_w = 15,3 \Omega$$

10.31. Dwa ogniwa o siłach elektromotorycznych $E_1 = 2 \text{ V}$ oraz $E_2 = 1,5 \text{ V}$ i oporach wewnętrznych $r_1 = 0,6 \Omega$ i $r_2 = 0,4 \Omega$ połączono równolegle jak pokazuje rys. 10.9. Obliczyć różnicę potencjałów pomiędzy punktami A i B.

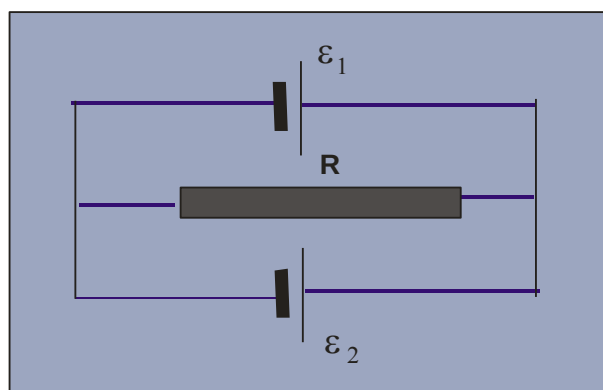
Odp. $\Delta U = E_2 + r_2 \frac{E_1 - E_2}{r_1 - r_2}$ $\Delta U = 1,7 \text{ V}$

lub $\Delta U = E_1 - r_1 \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$ $\Delta U = 1,7 \text{ V}$.



Rys. 10.9. Układ ogniw do obliczenia różnicy potencjałów pomiędzy punktami A i B

10.32. Obliczyć natężenia prądów w poszczególnych gałęziach obwodu elektrycznego przedstawionego na **rys. 10.10**, jeżeli dane są siły elektromotoryczne źródeł prądu $\varepsilon_1 = 5 \text{ V}$, $\varepsilon_2 = 4 \text{ V}$, ich opory wewnętrzne $r_1 = r_2 = 0,5 \Omega$ oraz opór $R = 2 \Omega$.



Rys. 10.10. Schemat do obliczeń natężeń prądów do zadania 10.32

Odp..

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1 (R + r) - \varepsilon_2 R}{R r_1 + R r_2 + r_1 r_2}, \quad i_1 = 2 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon_1 - R i_1 - r i_1}{R}, \quad i_2 = 0 \text{ A}$$

$$i_3 = i_1 + i_2, \quad i_3 = 2 \text{ A}.$$

Zadania testowe

10.33. (xx 1987) (xx1998) Jakie jest natężenie prądu wytworzonego przez krążący elektron na pierwszej orbicie w atomie wodoru, jeżeli ładunek elektronu wynosi $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, a jego częstość $\nu = 6,5 \cdot 10^{15}$ Hz?

10.34. Elektron krążący po orbicie kołowej wokół jądra atomu stanowi elementarny prąd elektryczny. Wyrazić natężenie tego prądu w funkcji następujących danych: e – ładunek elektronu, V – prędkość liniowa elektronu, r – promień jego orbity.

10.35. (xx 1998) Ile elektronów przepływa w ciągu jednej sekundy przez włókno żarówki o mocy $P = 40$ W dostosowanej do napięcia $U = 220$ V i połączonej do tego napięcia?

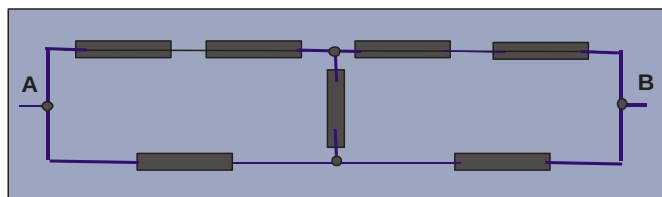
10.36. Kwadrat, którego każdy bok ma opór $r = 1 \Omega$ włączono do obwodu sąsiednimi wierzchołkami. Jaki będzie opór całkowity?

10.37. (xx 1987) Na ile równych części podzielić należy jednorodny, prostoliniowy przewodnik, aby przy równoległym połączeniu tych części opór był n razy mniejszy?

10.38. (x 1987) Dane są dwa przewodniki A i B o jednakowej długości, wykonane z tego samego materiału. Średnica przewodnika A jest dwa razy większa od średnicy przewodnika B. Który z przewodników ma większy opór i o ile?

10.39. (1998) Jaki ładunek przepłynie przez przewodnik o oporze $r = 100 \Omega$ dołączony do źródła prądu o napięciu $U = 1000$ V w czasie $t = 5$ s?

10.40. Jaki jest opór zastępczy układu oporników przedstawionych na **rys. 10.11**, jeżeli każdy z nich jest równy $r = 1 \Omega$, a do obwodu układ włączony został punktami A i B?



Rys. 10.11. Układ oporników do zadania 10.40.

10.41. Jak zmieni się opór przewodnika, jeżeli jego długość zwiększy się 10 razy a przekrój zmaleje 2 razy?

10.42. (xx 1998) W temperaturze 0°C przewodnik metalowy ma opór R_0 . Do jakiej temperatury należy go ogrzać, żeby jego opór zwiększył się do $2 R_0$, jeżeli współczynnik temperaturowy wynosi $\alpha = \frac{1}{273} 1/\text{st}$?

10.43. (xx 1989) Dwa woltomierze o oporach $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ połączono szeregowo i dołączono do źródła prądu o SEM wynoszącej $E = 6$ V. Co wskażą woltomierze, jeżeli pominie się opór wewnętrzny źródła?

10.44. (x 1989) Co wskazuje woltomierz połączony bezpośrednio z zaciskami ogniwa?

10.45. (x 1985) Dlaczego woltomierz podłączony do zacisków akumulatora wskazuje napięcie niższe od siły elektromotorycznej tego akumulatora?

10.46. Przez przewodnik o oporze $r_1 = 10 \Omega$ płynie prąd o natężeniu $i = 2 \text{ A}$. Następnie, dołączono do niego równolegle drugi przewodnik o oporze $r_2 = 5 \Omega$. Jaki popłynął prąd przez ten dołączony przewodnik, jeżeli założymy, że napięcie pozostało stałe?

10.47. Jaki opór i jak należy dołączyć go do amperomierza o oporze R , ażeby zwiększyć jego zakres pomiarowy trzy razy?

10.48. (xx 1998) Jaki dodatkowy opór i w jaki sposób, należy dołączyć do woltomierza o zakresie $0\text{--}100 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym R , aby można było nim mierzyć napięcie do 1000 V ?

10.49. (xx 1991) Przy napięciu $U = 24 \text{ V}$ przepływa przez poprzeczny przekrój przewodnika ładunek $q = 12 \text{ C}$ w czasie $t = 2 \text{ min}$. Jaki jest opór tego przewodnika?

10.50. (xx 1998) W czajniku elektrycznym ogrzewa się $m = 1 \text{ kg}$ wody od temperatury $t_1 = 15^\circ \text{ C}$ do temperatury $t_2 = 100^\circ \text{ C}$. Jaki jest koszt ogrzania wody przy taryfie $k = 90 \text{ gr/kWh}$, jeżeli sprawność czajnika wynosi $\eta = 0,85$ a ciepło właściwe wody $C = 4190 \text{ J/kg K}$.

10.51. Jaki prąd pobiera żarówka o mocy $M = 100 \text{ W}$, zasilana napięciem $U = 220 \text{ V}$?

10.52. (xx 1981) Do końców przewodu o długości L i średnicy d przyłożono napięcie U . Jaka moc wydzielila się w przewodniku, jeżeli opór właściwy materiału jest ρ ?

10.53. (xx 1988) Podczas przepływu prądu o natężeniu $i = 3 \text{ A}$ w oporniku wydzielila się energia cieplna z szybkością 100 W . Jaki jest jego opór?

10.54. (xx 1986) W oporniku o oporze $R = 10 \Omega$ wydzielila się moc $P = 90 \text{ W}$. Jaka była różnica potencjałów między końcami tego opornika?

10.55. (x 1985) Opór przewodnika zmniejszono dwukrotnie. Jakiej zmianie uległa moc w nim wydzielona, jeżeli napięcie nie uległo zmianie.

10.56. (xx 1998) Po zamknięciu obwodu różnica potencjałów na zaciskach baterii jest równa $U = 18 \text{ V}$. Jaki jest opór wewnętrzny baterii, jeżeli jej siła elektromotoryczna jest równa $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$ a opór obwodu zewnętrznego jest $R = 6 \Omega$.

10.57. (x 1986) Przewodnik aluminiowy o masie m i długości L połączono z ogniwem o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i oporze wewnętrznym r . Jakie jest natężenie prądu płynącego w obwodzie, jeżeli dana jest oporność właściwa aluminium ρ i jej gęstość d .

10.58. (xx 1983) Przedstawić graficznie zależność napięcia na biegunach ogniwa od natężenia czerpanego zeń prądu.

10.59. (x 1991)(1998) Ile wynosi opór obwodu, w którym prąd elektryczny o natężeniu $i = 0,4 \text{ A}$ wykonuje pracę $W = 40 \text{ J}$ w czasie $t = 50 \text{ s}$.

10.60. (x 1991) Dlaczego spirala kuchenki elektrycznej nagrzewa się silniej w tym miejscu, w którym jest cieńsza?

10.61. (xx 1981) Mamy trzy żarówki o mocach: 100 W, 200 W i 500 W, przystosowane do tego samego napięcia. Która z tych żarówek ma największy opór elektryczny?

10.62. (x 1987) Ile razy wzrośnie masa substancji wydzielonej na elektrodzie woltametr, gdy przez elektrolit przepłynie prąd o natężeniu dwukrotnie większym w ciągu tego samego czasu?

10.63. (x 1986) Przez elektrolit przepłynął ładunek elektryczny q . Jaka masa metalu wydzielila się na skutek tego na katodzie? Równoważnik elektrochemiczny wynosi k .

10.64. (xx 1990) Jaki ładunek przeniesie w procesie elektrolizy 1 mol jonów substancji jednowartościowej?

10.65. (xx 1981) W wannie elektrolitycznej na jednej elektrodzie wydzielą się pierwiastek trójwartościowy o masie cząsteczkowej μ_1 zaś na drugiej, pierwiastek jedno-wartościowy o masie cząsteczkowej μ_2 . Obliczyć stosunek wydzielonych mas.

10.66. (xx 1982) Jaki jest sens fizyczny stałej Faraday'a?

10.67. (xx 1983) Opisać doświadczenie umożliwiające wyznaczenie równoważnika elektrochemicznego miedzi?

10.68. Co to jest równoważnik elektrochemiczny danej substancji?

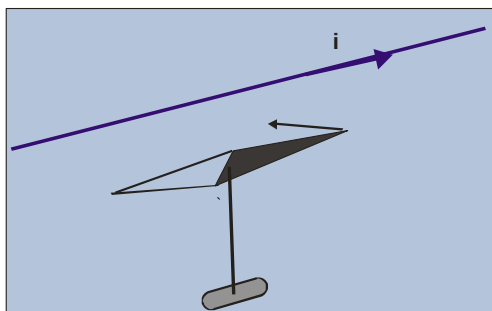
10.69. Jaka substancja wydzielą się na dodatniej elektrodzie, a jaka na ujemnej, w czasie ładowania akumulatora?

10.70. Jaka jest pojemność akumulatora, wyrażona w amperogodzinach, jeżeli w czasie ładowania wydzielilo się? 30 g PbO_2 (Każda drobina PbO_2 daje dwa elektrony).

XI. ELEKTROMAGNETYZM

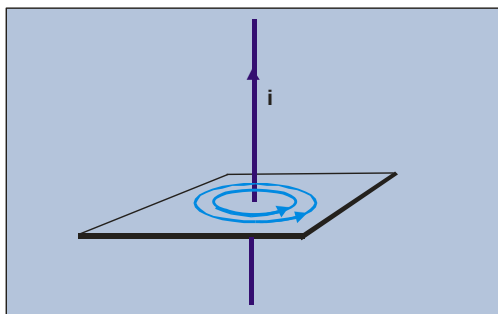
11.1. Pole magnetyczne przewodników z prądem

Dział fizyki zwany elektromagnetyzmem bierze swój początek od bardzo prostego doświadczenia przeprowadzonego przez Ersteda w 1820 r. W doświadczeniu tym igielka magnetyczna ustawiona pod przewodnikiem z prądem wychyla się, gdy przez przewodnik płynie prąd wykazując, że prąd elektryczny wytwarza pole magnetyczne (rys. 11.1). Magnesy trwale wytwarzają pola magnetyczne też dzięki prądom „elementarnym” w tych magnesach.



Rys.11.1. Prąd elektryczny wytwarza pole magnetyczne, gdyż igielka magnetyczna ustawiona pod przewodnikiem z prądem wychyla się

Pole magnetyczne jest to przestrzeń, w której można zauważyć działanie sił na próbny północny biegun magnetyczny. Droga, po której poruszałby się ten biegun nazywa się linią sił pola. Wokół przewodnika prostoliniowego linie sił pola są w postaci okręgów współśrodkowych otaczających przewodnik. Można się o tym przekonać sypiąc na płytkę szklaną, przez środek, której przechodzi przewodnik z prądem prostopadle do płytki, opilki żelazne. Wtedy opilki te ułożą się wzdłuż okręgów (rys. 11.2.).



Rys. 11.2. Opilki żelazne układają się wzdłuż okręgów współśrodkowych wyznaczając w ten sposób kształt linii sił pola od przewodnika z prądem

Zwrot linii sił pola określamy regułą prawej śruby: jest mianowicie taki, w którym należy obrócić prawą śrubę, żeby przesunęła się w kierunku przepływu prądu (**rys. 11.2**).

Natężenie pola magnetycznego w odległości r_0 od przewodnika prostoliniowego, po którym płynie prąd o natężeniu i , określa się wzorem:

$$H = \frac{i}{2 \pi r_0} \quad (11.1)$$

Gdy przewodnik jest w kształcie okręgu o promieniu r_0 , to natężenie pola w środku tego okręgu wyrazi się wzorem:

$$H = \frac{i}{2 r_0} \quad (11.2)$$

Jeżeli kierunek prądu płynącego po tym okręgu jest zgodny z ruchem wskazówek zegara, to przed płaszczyzną przewodnika utworzy się biegun południowy (S), a za przewodnikiem biegun północny (N).

Jeżeli przewodnik z prądem jest w kształcie solenoidu, to natężenie pola w jego środku określa wzór:

$$H = n i \quad (11.3)$$

gdzie n – jest ilością zwojów przypadających na jednostkę długości solenoidu i może się wyrazić za pomocą stosunku ilości wszystkich zwojów do całej długości solenoidu:

$$n = \frac{N}{L}$$

stąd:

$$H = \frac{N}{L} i .$$

11.2. Prawo Ampera

Wokół przewodnika prostoliniowego po którym płynie prąd o natężeniu i wytwarza się pole magnetyczne o liniach sił w kształcie okręgów współśrodkowych otaczających dany przewód (**rys. 11.2**). Pole to może wykonać pracę, przesuwając „próbny” biegun magnetyczny północny wzdłuż wybranej linii sił pola .

Prawo Ampera mówi nam, że praca po drodze otaczającej przewód z prądem (zwana pracą okrężną) równa się natężeniu prądu płynącego w tym przewodniku, co wyraża się wzorem:

$$2 \pi r_0 H = i \quad (11.4)$$

gdzie H – może być uważane za siłę działającą na jednostkowy biegun magnetyczny próbny, która jest równa natężeniu pola magnetycznego.

Z powyższego wzoru wynika od razu wzór (11.1) na wartość natężenia pola magnetycznego od przewodnika prostoliniowego.

Przykład 11.1

Korzystając z prawa Ampera, obliczyć natężenie pola magnetycznego w środku solenoidu o n zwojach na każdy metr długości solenoidu przewodzącego prąd o natężeniu i (rys. 11.3).

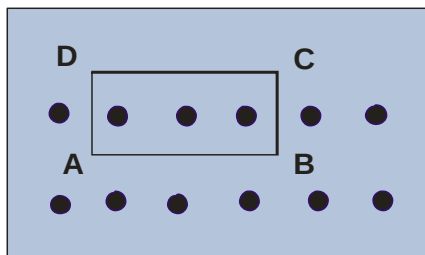
Otoczamy kilka zwojów solenoidu konturem ABCD po którym wyliczamy pracę pola. Praca ta na drodze $AB = L'$ wynosi:

$$H L' = n' i$$

gdzie n' – jest ilością zwojów objętych konturem ABCD.

L' – jest odcinkiem na którym znajduje się n' zwojów.

Praca na drodze BC i DA jest równa zero, gdyż linie sił pola są prostopadłe do drogi. Na drodze CD praca jest też równa zero, ponieważ natężenie pola na zewnątrz solenoidu jest praktycznie biorąc równe zero w porównaniu z natężeniem pola wewnątrz solenoidu.



Rys. 11.3. Natężenie pola magnetycznego w środku solenoidu możemy obliczyć z prawa Ampera, rozpatrując pracę okrężną po konturze ABCD

Mamy więc:

$$H = \frac{n'}{L'} i$$

lub

$$H = \frac{N}{L} i.$$

gdzie N – jest ilością wszystkich zwojów solenoidu o długości L .

11.3. Indukcja magnetyczna

Pole magnetyczne może być też scharakteryzowane przez indukcję magnetyczną określoną według wzoru:

$$B = \mu_0 H \quad (11.5)$$

gdzie μ_0 – jest przenikalnością magnetyczną próżni, która posiada następującą wartość

$$\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \frac{N}{A^2}. \quad (11.6)$$

Wzory (11.1), (11.2), (11.3) przyjmą teraz postać:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2 \pi r_0} \quad (11.7)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{2 r_0} \quad (11.8)$$

$$B_3 = \mu_0 n i. \quad (11.9)$$

Jeżeli w polu magnetycznym znajdzie się inny ośrodek niż powietrze lub próżnia, wtedy indukcja magnetyczna wyrazi się wzorem:

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (11.10)$$

gdzie μ_r – jest względną przenikalnością magnetyczną ośrodka. Jest to liczba niemianowana i dla próżni lub powietrza wynosi 1, ale dla innych ciał jest różna od jedności, tak więc:

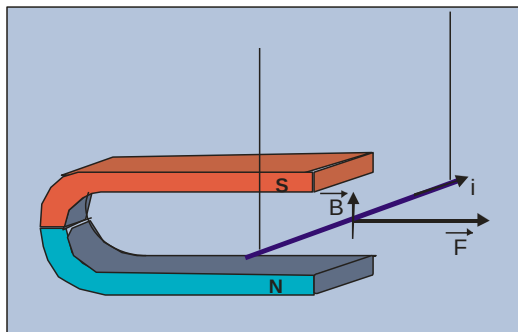
$$\mu_r \gg 1 \quad \text{dla ciał ferromagnetycznych (Fe)}$$

$$\mu_r \geq 1 \quad \text{dla ciał paramagnetycznych (Al.)}$$

$$\mu_r \leq 1 \quad \text{dla ciał diamagnetycznych (Bi).}$$

11.4. Siła elektrodynamiczna

Przewodnik, przez który płynie prąd, wytwarza pole magnetyczne. Jeżeli więc znajdzie się on w jakimś innym polu magnetycznym, to nastąpi oddziaływanie pomiędzy tymi polami, na skutek czego na przewodnik będzie działać siła, która nazywa się siłą elektrodynamiczną. Kierunek tej siły określamy za pomocą reguły Fleminga – trzech palców lewej ręki, ustawionych względem siebie prostopadle: jeżeli palec wskazujący ustawimy w kierunku wektora natężenia pola magnetycznego, a środkowy w kierunku prądu, to kciuk wskaże nam kierunek siły elektrodynamicznej (rys. 11.4).



Rys. 11.4. Na przewodnik z prądem działa siła elektrodynamiczna $\vec{F}$ prostopadła do wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ i do kierunku przepływu prądu $\vec{i}$

Siła ta wyraża się wzorem:

$$\vec{F} = i \vec{L} \times \vec{B} \quad (11.11)$$

gdzie L – jest długością prostoliniowego przewodnika objętego polem magnetycznym,
 i – natężeniem prądu.

Natomiast wartość liczbowa tej siły określa wzór (zgodnie z definicją iloczynu wektorowego):

$$F = i L B \sin \alpha \quad (11.12)$$

gdzie α – jest kątem zawartym pomiędzy kierunkiem przewodnika a wektorem indukcji magnetycznej.

Jeżeli kąt ten będzie równać się 90° to wzór (11.12) przyjmie postać

$$F = i L B \quad (11.13)$$

Z powyższego wzoru wyznacza się indukcję magnetyczną B a następnie jej jednostkę – teslę.

$$B = \frac{F}{i L} \quad (11.14)$$

Indukcja magnetyczna jest równa jednej tesli, jeżeli na przewodnik o długości 1 m, w którym płynie prąd o natężeniu 1 A, będzie działać siła 1 N.

Przykład 11.2

Miedziany pręt o masie $m = 0,25$ kg i długości $L = 0,5$ m, zawieszono poziomo na dwóch równoległych, jednakowej długości drucikach o znikomej masie, przymocowanych do jego końców. Całość umieszczono w jednorodnym pionowym polu magnetycznym o indukcji $B = 0,5$ T. Obliczyć natężenie prądu i siłę napinającą każdy z drucików, jeżeli druciki te odchyliły się od kierunku pionowego o kąt $\alpha = 30^\circ$ ($g = 10$ m/s²).

Na skutek działania siły elektromotorycznej pręt będzie odchylał się z położenia równowagi, dotąd aż składowa pozioma ciężaru pręta ($\vec{F}$) zrówna się z siłą elektrodynamiczną ($\vec{F}_B$), co widać na **rys.11.5**. Możemy więc napisać:

$$m g \operatorname{tg} \alpha = i L B$$

skąd:

$$i = \frac{m g \operatorname{tg} \alpha}{L B}$$

$$i = 5,77 \text{ A.}$$

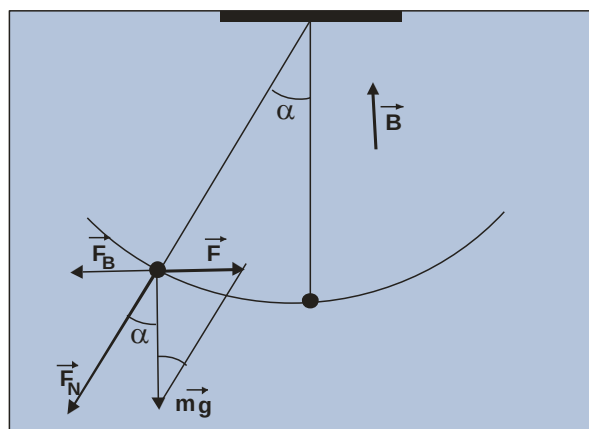
Z trójkąta działających sił mamy:

$$\cos \alpha = \frac{m g}{F_N}$$

i ostatecznie:

$$F_N = \frac{m g}{2 \cos \alpha}$$

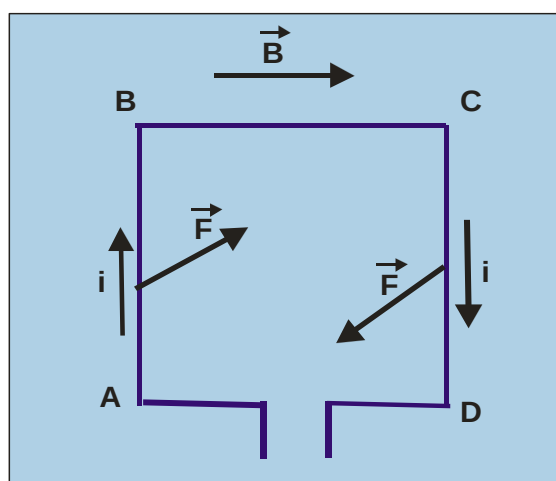
$$F_N = 1,44 \text{ N.}$$



Rys. 11.5. Pręt wychyla się z położenia równowagi dotąd, aż składowa pozioma ciężaru pręta ($\vec{F}$) zrównoważy się z siłą elektrodynamiczną ($\vec{F}_B$)

11.5. Moment magnetyczny

Gdy przewodnik w postaci ramki umieścimy w polu magnetycznym, gdy wektor indukcji magnetycznej będzie równoległy do płaszczyzny ramki, to na tę ramkę będzie działać para sił powodująca jej obrót. Zgodnie z regułą Fleminga na bok AB (rys. 11.6) będzie działać siła za płaszczyznę rysunku, przy kierunku prądu od A do B, a na bok CD – będzie działać siła w kierunku przed płaszczyznę rysunku.



Rys. 11.6. Na ramkę z prądem umieszczoną w polu magnetycznym w płaszczyźnie równoległej do wektora indukcji magnetycznej działa moment pary sił, powodujący obrót tej ramki

Natomiast na boki BC i AD nie będzie działać siła elektromotoryczna, gdyż boki te są równoległe do linii sił pola ($\sin\alpha = 0$).

Powstały moment pary sił można określić wzorem następującym:

$$M = F a$$

gdzie a – jest długością boku BC ramki.

ale $F = i B L$

gdzie L – jest długością boku $AB = a$.

Możemy, więc napisać: $M = i B a^2$

lub $M = i B S$

gdzie S – jest polem ramki.

Otrzymany wzór określa tzw. moment magnetyczny. W oparciu o ten moment działają silniki elektryczne i przyrządy pomiarowe, takie jak amperomierze, woltomierze, galwanometry.

11.6. Oddziaływanie dwóch przewodów równoległych z prądami, amper

Przewody równoległe, po których płyną prądy o natężeniach i_1 i i_2 oddziałują na siebie: przyciągają się gdy kierunki prądów są te same, a odpychają, gdy są przeciwnie. Ponieważ pole magnetyczne wytwarzane przez jeden przewód obejmuje przewód znajdujący się w sąsiedztwie, więc będzie na ten drugi przewód działać siła elektrodynamiczna:

$$F = i_2 B L \quad (11.15)$$

gdzie L – jest długością jednego i drugiego przewodnika,

B – indukcja magnetyczna utworzona przez przewód pierwszy, która wyraża się wzorem (11.7):

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2 \pi d} \quad (11.16)$$

gdzie d – jest odległością pomiędzy przewodami.

Wstawiając wartość indukcji magnetycznej ze wzoru (11.16) do wzoru (11.15) i uwzględniając wartość liczbową μ_0 (wzór 11.6) otrzymamy:

$$F = \frac{2 \cdot 10^{-7} i_1 i_2 L}{d} \quad (11.17)$$

Z powyższego wzoru definiujemy jednostkę natężenia prądu – amper (rozdział I)

11.7. Siła Lorentza

Na przewodnik umieszczony w polu magnetycznym, przez który nie płynie prąd, nie działa siła elektromotoryczna. Ponieważ prąd elektryczny polega na uporządkowanym ruchu ładunków elektrycznych, więc jeżeli w polu magnetycznym w próżni, będą poruszać się swobodne ładunki, to na nie będzie działać siła elektrodynamiczna, która nazywa się siłą Lorentza. Wyraża się ona, w ujęciu wektorowym wzorem:

$$\vec{F} = q \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (11.18)$$

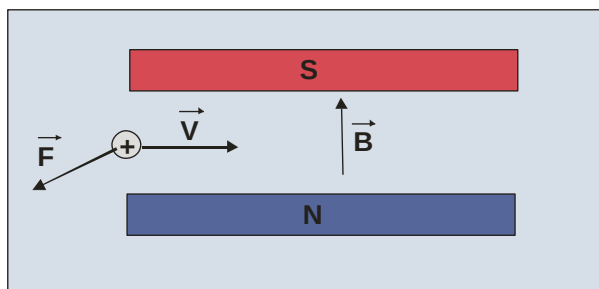
W zapisie skalarnym (wartość liczbowa siły) będzie:

$$F = q V B \sin \alpha \quad (11.19)$$

gdzie V – jest prędkością cząstki posiadającej ładunek q ,

α – kątem pomiędzy kierunkiem prędkości cząsteczki a kierunkiem wektora indukcji magnetycznej.

Kierunek siły Lorentza można określić z reguły Fleminga (odnoszącej się do ładunków dodatnich) lub z samego iloczynu wektorowego. Będzie ona prostopadła, jednocześnie do wektora indukcji magnetycznej i do wektora prędkości V (rys.11.7).



Rys. 11.7. Na ładunek elektryczny wpadający w pole magnetyczne prostopadłe do linii sił pola działa siła $\vec{F}$ (Lorentza) prostopadła do wektora $\vec{B}$ i do wektora $\vec{V}$

Cząstka posiadająca ładunek q , wpadająca w pole magnetyczne prostopadłe do linii sił pola, nie będzie przyciągana przez biegun północny ani przez biegun południowy, lecz będzie „wypychana” z pola magnetycznego. Siła prostopadła do wektora prędkości, jest siłą dośrodkową powodującą ruch rozpatrywanej cząstki po okręgu, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola. Promień tego okręgu wylicza się przyjmując siłę Lorentza za siłę dośrodkową:

$$q V B = \frac{m V^2}{R} \quad (11.20)$$

skąd

$$R = \frac{m V}{q B}$$

Na zasadzie siły Lorentza działają przyrządy: cyklotrony, spektrometry masowe, separatory elektromagnetyczne, za pomocą których wyznacza się masy cząstek elementarnych.

Natomiast ładunek swobodny wpadający w pole elektryczne prostopadle do linii sił pola, np. między okładki kondensatora, będzie przyciągany przez jedną okładkę a odpychany przez drugą. Będzie poruszać się jak kamień w rzucie poziomym w polu grawitacyjnym tzn. po paraboli. Składowa prędkość prostopadła do linii sił pola będzie stała i równa prędkości początkowej a składowa w kierunku linii sił pola będzie taka jak w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

P r z y k ł a d 11.3 (xx 1976)

Pole magnetyczne o indukcji $B = 5 \cdot 10^{-4}$ T jest skierowane prostopadle do pola elektrycznego o natężeniu $E = 10^3$ V/m.

Obliczyć, prędkość z jaką powinien wpadać elektron w kierunku prostopadłym jednocześnie do obu w/w pól, żeby przeszedł on przez pola nie ulegając odchyleniu. Obliczyć promień okręgu, po którym poruszałby się elektron z wyżej obliczoną prędkością, gdyby działało tylko pole magnetyczne, bez pola elektrycznego. Przyjąć:

$$\frac{e}{m} = 1,8 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}.$$

Na elektron wpadający w pole elektryczne prostopadle do wektora natężenia pola $\vec{E}$ działa siła $\vec{F}_E$ wyrażająca się wzorem:

$$\vec{F}_E = e \vec{E}$$

Jeżeli w tym samym obszarze działa pole magnetyczne o indukcji B prostopadle do wektora $\vec{E}$ i skierowanej do czytelnika, to na ten elektron będzie działać siła $\vec{F}_B$ skierowana przeciwnie do siły $\vec{F}_E$ i wyrazi się wzorem (11.19), dla kąta $\alpha = 90^\circ$:

$$F_B = e V B.$$

Żeby elektron przeszedł przez dwa pola nie zmieniając kierunku biegu to w/w siły muszą się równoważyć:

$$e E = e V B$$

skąd:

$$V = \frac{E}{B}$$

$$V = 2 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Jeżeli w danym obszarze występuje tylko pole magnetyczne, to elektron zatoczy okrąg o promieniu, który wyliczymy z porównania siły Lorentza z siłą dośrodkową (wzór 11.20.):

$$e V B = \frac{m V^2}{R},$$

skąd:

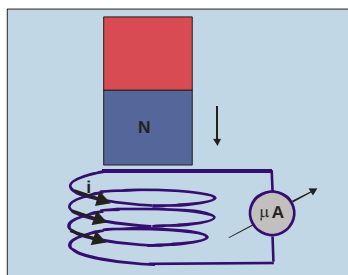
$$R = \frac{m V}{e B}$$

$$R = 0,022 \text{ m}.$$

11.8. Zjawisko indukcji elektromagnetycznej

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej nazywamy wytwarzanie prądu elektrycznego w przewodniku (tworzącym obwód zamknięty), umieszczonym w zmiennym polu magnetycznym lub poruszającym w stałym polu. Jeżeli więc do cewki będziemy zbliżać magnes to wytworzy się w niej prąd, gdyż będzie ona znajdować się wtedy w zmiennym (o rosnącym natężeniu) polu magnetycznym. (**rys. 11.8**).

Kierunek tego prądu określa się regułą Lenza: będzie mianowicie taki, że pole magnetyczne powstałe z tego prądu przeciwstawia się ruchowi wywołującemu prąd, a więc żeby w danym przypadku (**rys. 11.8**) przybliżający się biegun północny magnetyczny był odpychany, to musi powstać w cewce prąd o takim kierunku, żeby wytworzył się biegun północny, z tej strony cewki, do której zbliża się biegun północny magnesu, a więc kierunek prądu będzie niezgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.



Rys. 11.8. W cewce wytworzy się prąd, gdy znajdzie się ona w zmiennym polu magnetycznym

Jeżeli obwód będzie przerwany, to prąd nie będzie płynął, lecz w przerwie obwodu wytworzy się różnica potencjałów, jako siła elektromotoryczna indukcji elektromotorycznej:

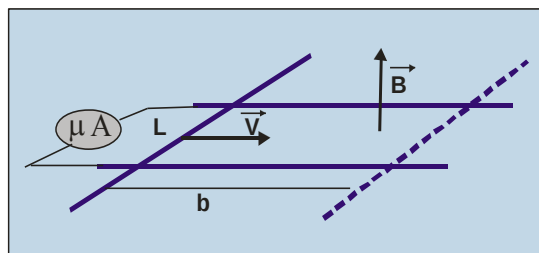
$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (11.21)$$

gdzie $\Delta \Phi$ jest zmianą strumienia wektora indukcji magnetycznej i wyraża się wzorem:

$$\Delta \Phi = \Delta B \cdot S \quad (11.22)$$

Zmiana strumienia magnetycznego, może odbywać się nie tylko poprzez zmianę indukcji ΔB lecz poprzez zmianę powierzchni ΔS . Można na tej podstawie wyprowadzić wzór na siłę elektromotoryczną indukcji elektromagnetycznej, rozpatrując przewodnik o długości L poruszający się z prędkością V . Będzie on przecinać linie sił pola magnetycznego o indukcji magnetycznej B , zakreślając pewną powierzchnię ΔS (**rys. 11.9**).

Żeby przesunąć przewodnik o długości L w polu magnetycznym o indukcji B , prostopadle do linii sił pola, na odległość b , to należy wykonać pracę przeciwko powstałej sile elektromotorycznej: ponieważ, gdy pojawi się prąd w przewodniku, znajdującym się w polu magnetycznym to zacznie działać na niego siła elektrodynamiczna wzór (11.13), tym większa im szybciej będzie poruszać się przewodnik. Przeciwnie tej sile wykonywana jest praca.



Rys. 11.9. W przewodniku poruszającym się z prędkością $\vec{v}$ prostopadle do wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ powstaje SEM

Praca ta jest ujemna, ponieważ jest wykonywana przeciwko sile powstałej z ruchu przewodnika. Możemy więc napisać:

$$W = - F b$$

gdzie F – jest wartością liczbową siły elektrodynamicznej, która wyraża się wzorem (11.13):

$$F = i L B.$$

Mamy, więc:

$$W = - i L B b. \quad (11.23)$$

Praca ta jest równa ciepłu wydzielonemu w obwodzie, która wyraża się wzorem:

$$W = U i \Delta t. \quad (11.24)$$

Przez porównanie wzorów (11.23) i (11.24) otrzymamy równanie z którego wyliczymy Szukane U :

$$U = - \frac{L B b}{\Delta t} \quad (11.25)$$

gdzie $\frac{b}{\Delta t} = v$ – jest prędkością z jaką porusza się przewodnik w polu magnetycznym.

Będzie, więc:

$$U = - L B v \quad (11.26)$$

W celu wyprowadzenia wzoru (11.21), zastępujemy iloczyn $L b$ we wzorze (11.25) powierzchnią zakresloną przez przewodnik w czasie Δt :

$$\Delta S = L b.$$

Wzór (11.25) przyjmie teraz postać:

$$U = - \frac{B \Delta S}{\Delta t},$$

ale iloczyn $B \Delta S = \Delta \Phi$ – jest zmianą strumienia wektora indukcji magnetycznej (11.22). Ostatecznie będziemy mieli:

$$U = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

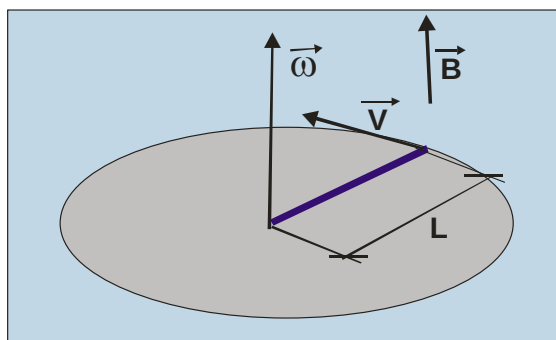
Przykład 11.4

Prąd o długości L obraca się wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców, przecinając prostopadle linie sił pola o indukcji B , wykonując n obrotów na sek. (**rys. 11.10**). Obliczyć różnicę potencjałów utworzoną na końcach pręta.

I sposób: Gdy prąd nie płynie w obwodzie, to różnica potencjałów równa się sile elektromotorycznej (w zadaniach pomijamy znak minus):

$$U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Indukcja magnetyczna jest w tym przypadku stała, natomiast zmienia się powierzchnia, dlatego też możemy napisać:



Rys. 11.10. W pręcie obracającym się w polu magnetycznym prostopadle do linii sił pola indukuje się na jego końcach różnica potencjałów

$$\Delta \Phi = B \Delta S$$

gdzie $\Delta S = \pi L^2$ przy jednym obrocie pręta.

Pręt wykonuje n obrotów w czasie jednej sekundy, więc w czasie Δt będzie wykonywać $n \cdot \Delta t$ obrotów. Różnica potencjałów na końcach pręta będzie więc:

$$U = B n \pi L^2 \quad (11.27)$$

II sposób: Korzystamy ze wzoru (11.26):

$$U = v L B,$$

gdzie v – jest prędkością środka pręta: $v = \omega \frac{L}{2},$

gdzie $\omega = 2 \pi n.$

Ostatecznie szukana różnica potencjałów będzie:

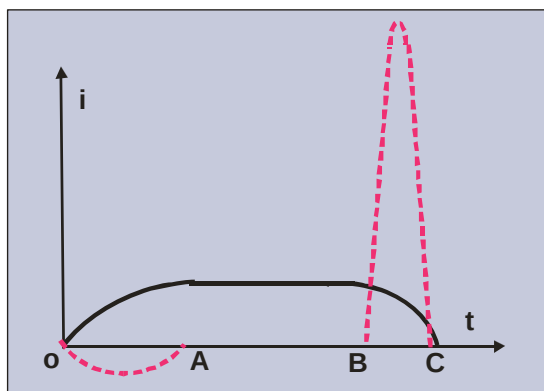
$$U = \pi n B L^2.$$

11.9. Zjawisko samoindukcji

Płynący prąd w przewodniku wytwarza wokół siebie pole magnetyczne, więc w momencie włączenia prądu pole to się tworzy – jest zmienne, dzięki czemu indukuje się w tym samym przewodniku drugi prąd elektryczny. Zjawiskiem samoindukcji nazywamy, więc powstawanie prądu elektrycznego w przewodniku od jego własnego pola magnetycznego. Wzór na siłę elektromotoryczną zjawiska samoindukcji jest następujący:

$$E = -L \frac{di}{dt} \quad (11.28)$$

Zależy ona od szybkości zmiany natężenia prądu pierwotnego. L jest współczynnikiem samoindukcji. Posiada on swoją jednostkę – jeden henr. Współczynnik samoindukcji jest równy jednemu henrowi, jeżeli zmiana natężenia prądu o jeden amper w czasie jednej sekundy, wytworzy SEM samoindukcji równą jednemu woltowi. Współczynnik ten często nazywa się indukcyjnością. Zjawisko samoindukcji można przedstawić za pomocą wykresu, co jest przedstawione na **rys.11.11**.



Rys. 11.11. W czasie wyłączania prądu (odcinek BC) powstaje duży impuls prądu samoindukcyjnego

Przy włączaniu prądu do obwodu powstaje pole magnetyczne, gdyż przedtem go nie było, i w tym czasie powstaje drugi prąd w tym samym przewodniku, o kierunku przeciwnym. Odcinek OA, linia przerywana pod osią czasów. Gdy ustali się natężenie prądu, a więc będzie już stałe pole magnetyczne, wtedy nie będzie też i prądu samoindukcyjnego (odcinek AB). W momencie wyłączenia prądu (odcinek BC) powstaje silny impuls prądu w tym samym kierunku, jak i prąd pierwotny (zgodny z zasadą Lenza). Ponieważ czas zanikania pola przy wyłączaniu jest krótszy od czasu jego narastania, więc i powstaje silniejszy prąd samoindukcyjny przy wyłączaniu prądu w obwodzie niż przy włączaniu. Jeżeli w obwodzie płynie prąd zmienny, to cały czas będzie indukować się prąd samoindukcyjny.

11.10. Prąd zmienny (przemienny)

Większość elektrowni na całym świecie wytwarza prąd elektryczny na zasadzie zjawiska indukcji elektromagnetycznej, w urządzeniach zwanych prądnicami lub maszynami elektrycznymi. Działają one na zasadzie ruchu obrotowego przewodników (poruszanych energią zewnętrzną) w polu magnetycznym. Mogą też obracać się magnesy lub elektromagnesy w pobliżu zwojów przewodników, indukując w nich prąd elektryczny.

Wytworzony w ten sposób prąd jest prądem przemiennym, tzn. zmienia się jego kierunek przepływu w czasie, oraz jest prądem zmiennym tzn. zmienia się wartość natężenia i napięcia. Zmiana ta ma charakter sinusoidalny, więc wartość natężenia w danej chwili, zwana natężeniem chwilowym wyraża się wzorem:

$$i = i_0 \sin \omega t \quad (11.29)$$

gdzie i_0 – jest wartością szczytową natężenia prądu,

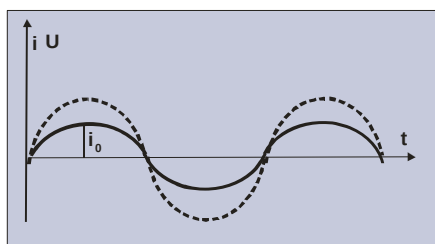
$$\omega = 2 \pi n$$

n – jest częstością zmian kierunku przepływu prądu przemiennego. W naszych elektrowniach $n = 50$ Hz.

Odwrotność częstości jest równa okresowi zmian prądu przemiennego. Wprowadza się też pojęcie natężenia skutecznego prądu zmiennego, jako wartość natężenia takiego prądu stałego, który wydzielal by tyle samo ciepła co i dany prąd zmienny w tym samym czasie i wyraża się wzorem

$$i_s = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \quad (11.30)$$

Zależność wartości natężenia prądu przemiennego od czasu przedstawia **rys. 11.12.**



Rys. 11.12. Wykres przedstawiający zależność natężenia (linia ciągła) i napięcia (linia przerywana) prądu przemiennego od czasu

Analogicznie przedstawia się przebieg zmiany wartości napięcia od czasu (linia przerywana). Wzory na napięcie chwilowe i skuteczne będą analogiczne jak natężenie chwilowe i skuteczne:

$$U = U_0 \sin \omega t \quad (11.31)$$

gdzie U_0 – jest napięciem szczytowym, napięcie skuteczne wyrazi się wzorem:

$$U_s = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (11.32)$$

Maksimum natężenia prądu przypada w tych samych momentach co maksimum napięcia, jedynie tylko w tym przypadku, gdy w obwodzie prądu zmiennego nie ma ani indukcyjności, ani pojemności. Jeżeli natomiast występuje jakakolwiek indukcyjność, wtedy maksimum natężenia opóźnia się względem maksimum napięcia, ponieważ indukcyjność stawia prądowi przemiennemu pewien opór zwany oporem indukcyjnym. Wielkość tego oporu jest wprost proporcjonalna do współczynnika samoindukcji L oraz do częstości drgań prądu i wyraża się wzorem:

$$R_L = \omega L \quad (11.33)$$

Jeżeli oprócz oporu indukcyjnego uwzględnimy opór omowy (występujący w obwodzie), to całkowity opór wyrazi się wzorem:

$$R'_L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (11.34)$$

Natomiast, jeżeli w obwodzie prądu przemiennego wystąpi pojemność, to maksimum napięcia będzie opóźniać się w stosunku do maksimum natężenia, ponieważ pojemność stawia prądowi zmiennemu opór, zwany oporem pojemnościowym, który jest odwrotnie proporcjonalny do pojemności i do częstości drgań prądu i wyraża się wzorem:

$$R_C = \frac{1}{\omega C} \quad (11.35)$$

Jeżeli uwzględnimy opór omowy, to całkowity opór wyrazi się wzorem:

$$R'_C = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (11.36)$$

Jeżeli w obwodzie prądu zmiennego będzie występować opór indukcyjny, pojemnościowy i omowy, to całkowity opór nazywać się będzie zawadą prądu przemiennego i będzie wyrażać się wzorem:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (11.37)$$

Widać z powyższego wzoru, że można tak dobrać częstość drgań prądu przemiennego ω , ażeby opór indukcyjny zredukował się z oporem pojemnościowym, co będzie miało miejsce wtedy, gdy wyrażenie w nawiasie będzie równe się zeru.:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Uwzględniając, że:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

otrzymamy:

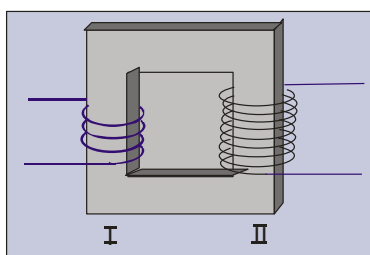
$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (11.38)$$

Wzór (11.38) nazywa się wzorem Thomsona. Wyraża on okres drgań rezonansowych, przy których występuje tylko opór omowy.

11.11 Transformator

Transformator jest urządzeniem służącym do zamiany niskiego napięcia zmiennego na wysokie, ze zmniejszeniem natężenia prądu lub odwrotnie (przekładniki napięciowe). Każdy transformator składa się z rdzenia wykonanego z materiału ferromagnetycznego, na którym nawinięte są dwa uzwojenia – pierwotne i wtórne (**rys. 11.13**).

Jeżeli przepuścimy prąd przemienny przez uzwojenie pierwotne, to wytworzy on zmienne pole magnetyczne zamknięte w rdzeniu, które z kolei wytwarza wirowe pole elektryczne o liniach sił w kształcie okręgów otaczających pole magnetyczne, a więc znajdujących się na zewnątrz i wewnątrz rdzenia (prawo Maxwella). Linie te natrafiają na swobodne elektrony w uzwojeniu wtórnym powodując ruch elektronów a więc prąd elektryczny. Ażeby zapobiec stratom energii na wytwarzanie prądów wirowych w samym rdzeniu, to buduje się go z cienkich blaszek odizolowanych od siebie.



Rys.11.13. Schemat transformatora, gdzie występuje większa ilość zwojów, tam indukuje się wyższe napięcie

Jeżeli w uzwojeniu wtórnym będzie więcej zwojów niż w pierwotnym, to wytworzy się tam wyższe napięcie. Stosunek liczby zwojów w uzwojeniu wtórnym do liczby zwojów w uzwojeniu pierwotnym nazywa się przekładnią transformatora i równa się stosunkowi napięcia w uzwojeniu wtórnym do napięcia w uzwojeniu pierwotnym, co można wyrazić następującymi wzorami:

$$p = \frac{N_2}{N_1} \quad (11.39)$$

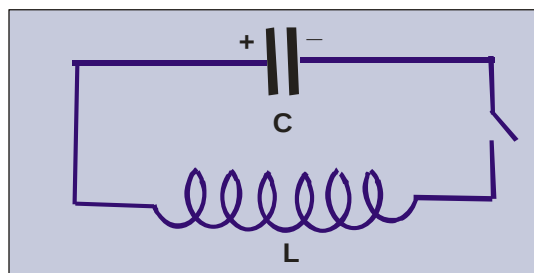
lub

$$p = \frac{U_2}{U_1} \quad (11.40)$$

11.12. Obwody drgające

W układ każdego obwodu drgającego wchodzi indukcyjność (cewka) oraz pojemność (kondensator) (**rys. 11.14**). Naładowany kondensator (C) rozładowuje się przez cewkę (L). Prąd rozładowania kondensatora jest prądem zanikającym, więc indukuje cewce drugi prąd o tym samym kierunku. Na skutek tego, chociaż napięcie na okładkach kondensatora spadnie do zera, to prąd będzie płynął dalej w tym samym kierunku dzięki zaindukowanej SEM w cewce, ładując kondensator przeciwnie.

Potem nastąpi ponowne rozładowanie kondensatora, znowu naładowanie przeciwnie itd. W obwodzie będzie płynął prąd przemienny, zwany prądem drgającym. Okres drgań określa wzór (11.38).



Rys. 11.14. Obwód drgający posiada główne elementy: kondensator (pojemność) oraz cewkę (indukcyjność).

Naładowany kondensator (C) rozładowuje się przez cewkę (L). Prąd rozładowania kondensatora jest prądem zanikającym, więc indukuje w cewce drugi prąd o tym samym kierunku. Na skutek tego, chociaż napięcie na okładkach kondensatora spadnie do zera, to prąd będzie płynął dalej w tym samym kierunku na skutek zaindukowanej SEM w cewce, ładując kondensator przeciwnie. Potem nastąpi ponowne rozładowanie kondensatora, znowu naładowanie przeciwnie itd. W obwodzie będzie płynął prąd przemienny, zwany prądem drgającym. Okres drgań określa wzór (11.38).

Gdyby nie było strat energii na wydzielanie się ciepła oraz na wypromieniowanie fali elektromagnetycznej (układ powyższy jest źródłem fal EM), to drgania te trwały by bez końca. Długość fali wypromieniowanej przez układ drgający wyraża się wzorem:

$$\lambda = V_c T$$

gdzie V_c – jest prędkością fali elektromagnetycznej równą prędkości światła.

Uwzględniając wzór (11.38) będziemy mieli:

$$\lambda = V_c 2\pi\sqrt{LC}$$

Z powyższego wzoru wynika, że aby zmniejszyć długość fali λ , należy zmniejszyć indukcyjność obwodu, co można zrobić przez zmniejszenie ilości zwojów lub w ogóle ich wyrzucenie. Możemy również zmniejszyć pojemność kondensatora przez rozsuniecie jego okładek lub zmniejszenie ich powierzchni.

Zadania rozwiązane

11.1. Dwa równoległe przewody odległe od siebie o d przewodzą prądy w tych samych kierunkach i o natężeniu i każdy. Obliczyć wartość indukcji magnetycznej w środku odległości pomiędzy tymi przewodami.

Wartość indukcji magnetycznej od przewodu pierwszego wyraża się wzorem:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2 \pi d/2}.$$

Od drugiego:

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{2 \pi d/2}.$$

Wartości bezwzględne tych indukcji są jednakowe, ale ich zwroty są przeciwne. Dlatego też indukcja wypadkowa będzie równa zero. W innym punkcie, bliżej któregoś przewodu będzie różna do zera.

11.2. Prostoliniowy przewódnik o masie $m = 0,1$ kg umieszczony został na dwóch równoległych szynach poziomych, oddległych od siebie o $a = 10$ cm, prostopadle do szyn. W przewodniku płynął prąd o natężeniu $i = 10$ A. Obliczyć natężenie pola magnetycznego, w którym układ został ustawiony, ażeby przewódnik zaczął poruszać się po szynach, przecinając linie sił pola prostopadle. Współczynnik tarcia statycznego o szyny wynosił $k = 0,2$.

Przewódnik zacznie poruszać się, gdy siła elektrodynamiczna przewyższy siłę tarcia. W zadaniu rozpatrujemy przypadek graniczny, gdy siły te się równoważą:

$$F_1 = i L \mu_0 H \quad F_2 = k m g.$$

Porównując te siły otrzymamy równanie z którego wyznaczymy natężenie pola H :

$$H = \frac{k m g}{\mu_0 i a} \quad H = 0,017 \cdot 10^7 \text{ A/m}$$

11.3. (xx 1990) Znaleźć stosunek q/m dla naładowanej cząstki, która przyspieszona napięciem U wlatuje w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji B i po zakreśleniu półokręgu, wpada do detektora w odległości x od szczeliny wejściowej. Kierunek ruchu cząstki jest prostopadły do kierunku pola magnetycznego. Siła Lorentza jest siłą dośrodkową:

$$q V B = \frac{m V^2}{R}.$$

Cząstka przed wпадnięciem w pole magnetyczne przyspieszana była napięciem U , a więc uzyskała energię kinetyczną równą pracy sił pola:

$$\frac{m V^2}{2} = q U.$$

Wyznaczając prędkość (V) z równania pierwszego i wstawiając do drugiego oraz uwzględniając, że $R = x/2$ otrzymamy:

$$\frac{q}{m} = \frac{8 U}{B^2 x^2}.$$

11.4. Obliczyć wartość indukcji magnetycznej pola, w którym atom izotopu miedzi, pojedynczo zjonizowany o liczbie masowej $A = 64$ zatoczyłby łuk o promieniu $R = 1$ m, wpadając w pole magnetyczne prostopadle do linii sił, przyspieszony różnicą potencjałów $U = 20$ kV. Przyjąć, że masa protonu równa jest masie neutronu i wynosi $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Izotop miedzi wpadający w pole magnetyczne prostopadle do linii sił pola porusza się po okręgu o promieniu R . Siłą dośrodkową jest siła Lorentza. Możemy więc napisać:

$$e V B = \frac{A m_0 V^2}{R}.$$

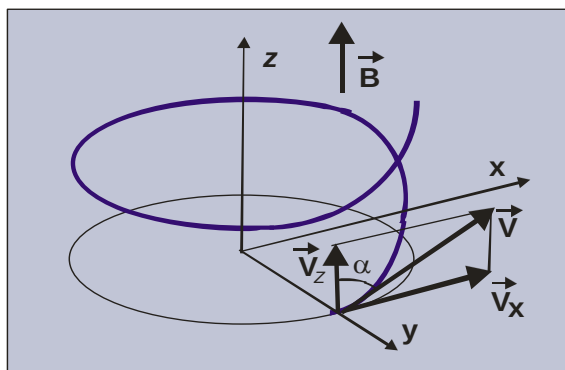
Nieznaną prędkość V wyznaczymy z równania energii:

$$\frac{A m_0 V^2}{2} = e U.$$

Otrzymamy więc
$$B = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2 A m_0 U}{e}} \quad B = 0,16 \text{ T}.$$

11.5. Elektron poruszający się w próżni z prędkością $V = 10^6$ m/s wpada w jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B = 0,03$ T pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do kierunku linii sił pola. Obliczyć promień toru elektronu (linii śrubowej), po której będzie się on poruszać oraz skok tej linii. Masa elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, ładunek elektronu $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Daną prędkość elektronu rozkładamy na dwie prędkości składowe: prostopadłą do linii sił V_x oraz na prędkość wzdłuż linii sił pola V_z (rys. 11.15.).



Rys. 11.15. Tor cząstki naładowanej w polu magnetycznym, wpadającej w pole magnetyczne pod kątem α do linii sił pola

Promień linii śrubowej obliczymy, przyjmując siłę Lorentza za siłę dośrodkową w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola:

$$\frac{m V_x^2}{R} = e V_x B.$$

Uwzględniając, że $V_x = V_0 \sin \alpha$ otrzymamy:

$$R = \frac{m V_0 \sin \alpha}{e B} \quad R = 0,16 \text{ mm}.$$

Skok linii śrubowej obliczymy jako drogę przebytą ruchem jednostajnym z prędkością V_z , w kierunku linii sił pola, w czasie równym okresowi w ruchu po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku prędkości V_z :

$$h = V_z T$$

gdzie

$$T = \frac{2 \pi R}{V_x}$$

zaś:

$$V_z = V_0 \cos \alpha.$$

Uwzględniając powyższe zależności otrzymamy:

$$h = \frac{V_0 2 \pi m \cos \alpha}{e B} \quad h = 0,6 \text{ mm}.$$

11.6. (xx 1987) Elektron i cząstka α poruszają się w próżni po torach kołowych w jednorodnym polu magnetycznym, w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola. Obliczyć stosunek promieni tych torów, jeżeli wartości pędów w/w cząstek są jednakowe.

Piszemy dwa równania dla obu cząstek:

$$\frac{m_e V_e^2}{r_e} = e V_e B \quad \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{r_\alpha} = 2 e V_\alpha B.$$

Dzieląc stronami powyższe równania, otrzymamy:

$$\frac{r_e}{r_\alpha} = 2.$$

11.7. (xx 1981) Elektron porusza się po okręgu o promieniu $r = 1 \text{ cm}$, w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola magnetycznego o indukcji $B = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$. Obliczyć długość fali deBroglie'a tego elektronu. Przyjąć ładunek elektronu $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Stałą Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Długość fali de Broglie'a (fali materii) wyraża się wzorem:

$$\lambda = \frac{h}{m V}$$

gdzie V jest prędkością danej cząstki, którą wyliczamy z równania:

$$\frac{m V^2}{r} = e V B.$$

Mamy więc

$$\lambda = \frac{h}{e B r} \quad \lambda = 10^{-9} \text{ m}.$$

11.8. (xx 1982) Naładowana cząstka o określonej energii kinetycznej porusza się w polu magnetycznym po okręgu o promieniu $R = 2 \text{ cm}$. Po przejściu przez płytkę ołowianą, porusza się dalej po okręgu lecz o promieniu $r = 1 \text{ cm}$, w tym samym polu magnetycznym. Obliczyć względną zmianę energii kinetycznej cząstki. Zmianę masy z prędkością można pominąć.

Piszemy dwa równania dla rozpatrywanej cząstki: gdy porusza się ona po okręgu o promieniu R i po przejściu przez płytkę, po okręgu o promieniu r .

$$\frac{m V_1^2}{R} = q V_1 B$$

$$\frac{m V_2^2}{r} = q V_2 B.$$

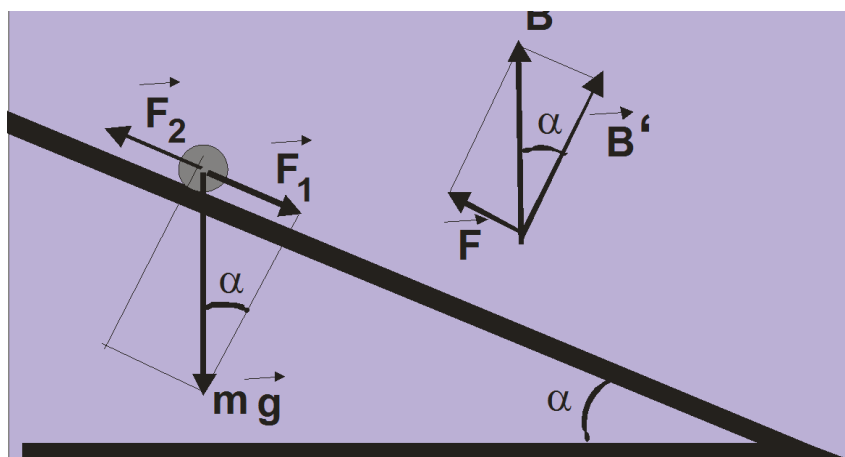
Z równań powyższych wyliczymy prędkości V_1 i V_2 a następnie wstawiamy je do wzorów na energię kinetyczną cząstki:

$$E_1 = \frac{R^2 q^2 B^2}{2 m} \quad E_2 = \frac{r^2 q^2 B^2}{2 m}.$$

Szukana względna zmiana energii kinetycznej będzie:

$$\frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{r^2 - R^2}{R^2} \quad \frac{E_2 - E_1}{E_1} = -\frac{3}{4}.$$

11.9. Pręt o długości $L = 0,5 \text{ m}$ i masie $m = 0,01 \text{ kg}$, położony jest na dwóch równoległych szynach nachylonych do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Szyny znajdują się w polu magnetycznym o indukcji $B = 0,2 \text{ T}$, o kierunku prostopadłym do podstawy równi i zwarte są oporem $R = 1 \text{ om}$. Obliczyć prędkość końcową pręta, jeżeli pominiemy tarcie (**rys. 11.16**).



Rys. 11.16. Siły działające na pręt: $\vec{F}_1$ – składowa siły ciężkości, $\vec{F}_2$ – siła elektrodynamiczna

Na pręt działają dwie siły: składowa siły ciężkości w kierunku równi, powodująca zsuwanie się pręta po równi. Wartość liczbowa tej siły wyraża się wzorem:

$$F_1 = m g \sin \alpha$$

oraz siła elektrodynamiczna:

$$F_2 = i L B'$$

gdzie i – jest natężeniem prądu indukowanego w pręcie

B' – składowa indukcji magnetycznej o kierunku prostopadłym do równi.

Składową tę wyrażamy za pomocą indukcji magnetycznej B , danej w treści zadania wzorem następującym:

$$B' = B \cos \alpha$$

Im większy jest kąt nachylenia równi, a więc im szybciej rośnie prędkość pręta, tym większy prąd indukuje się w tym pręcie a tym samym będzie też większa siła elektrodynamiczna. Siła ta hamuje ruch pręta, więc w pewnym momencie zrówna się z siłą F_1 i wtedy ruch pręta staje się ruchem jednostajnym. Możemy więc napisać:

$$m g \sin \alpha = i L B \cos \alpha$$

$$i = \frac{E}{R},$$

gdzie E – siła elektrodynamiczna zaindukowana w pręcie, którą wyrażamy wzorem:

$$E = v L B \cos \alpha$$

Wzór na natężenie prądu przyjmie teraz postać:

$$i = \frac{v L B \cos \alpha}{R}.$$

Szukana prędkość pręta wyrazi się więc wzorem:

$$v = \frac{R m g \tan \alpha}{L^2 B^2 \cos \alpha} \quad v = 6,7 \text{ m/s}.$$

11.10. (xx 1978) Indukcja jednorodnego pola magnetycznego rośnie proporcjonalnie do czasu ze wzorem: $B = k t$, gdzie współczynnik k wynosi: $k = 10 \text{ T/s}$. W polu tym znajduje się nieruchoma, kwadratowa ramka o boku $a = 1 \text{ m}$, zbudowana z drutu o przekroju $s = 10^{-6} \text{ m}^2$ i oporze właściwym $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Płaszczyzna ramki jest prostopadła do kierunku wektora natężenia pola magnetycznego. Obliczyć ilość ciepła wydzieloną w ramce w czasie $\tau = 2 \text{ s}$.

Wychodzimy ze wzoru:

$$E = \frac{d \Phi}{d t},$$

gdzie

$$d \Phi = S d B$$

więc:

$$\frac{d \Phi}{d t} = S \frac{d B}{d t}$$

ale: $\frac{dB}{dt} = k$, gdyż jest pochodną wyrażenia $B = k t$.

Mamy więc: $E = S k$

Szukana ilość ciepła wyraża się wzorem $Q = \frac{U^2}{R} \tau$.

Podstawiając za ilość otrzymana wartość na E , będziemy mieli:

$$Q = \frac{S^2 k^2 \tau}{R}$$

gdzie

$$S = a^2$$

$$R = \frac{4 \rho a}{s}$$

Ostatecznie, ilość wydzielonego ciepła wyrazi się wzorem:

$$Q = \frac{a^3 k^2 \tau s}{4 \rho}$$

$$Q = 2,9 \text{ kJ.}$$

11.11. (1979) Miedziany pierścień o promieniu $R = 10 \text{ cm}$, wykonany jest z drutu o przekroju $s = 10 \text{ mm}^2$. Pierścień ten umieszczono w zmieniającym się jednostajnie polu magnetycznym o liniach sił prostopadłych do płaszczyzny pierścienia. Obliczyć, z jaką prędkością zmienia się indukcja pola magnetycznego, jeżeli prąd indukowany w pierścieniu ma natężenie $i = 10 \text{ A}$, a oporność właściwa miedzi wynosi $\rho = 1,71 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$.

Wychodzimy ze wzoru: $E = \frac{d\Phi}{dt}$

gdzie $d\Phi = S dB$

Mamy więc: $E = \frac{S dB}{dt}$.

Szukana zmiana indukcji magnetycznej, jako pochodna indukcji po czasie będzie:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{E}{S}$$

Uwzględniając, że:

$$E = \rho \frac{2 \pi R}{s} i$$

oraz:

$$S = \pi R^2,$$

otrzymamy:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{2 \rho i}{s R} \quad \frac{dB}{dt} = 0,34 \text{ T/s.}$$

11.12. Przewodnik w kształcie ramki kwadratowej o boku $a = 20 \text{ cm}$, obraca się jednostajnie w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 0,2 \text{ T}$ wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych boków ramki, wykonując $n = 20 \text{ obr/s}$. Obliczyć SEM zaindukowanej w ramce, oraz natężenie prądu w chwili $t = 0,03 \text{ s}$ licząc od położenia ramki, gdy przecina ona prostopadle linie sił pola. Opór ramki wynosi $R = 0,02 \Omega$.

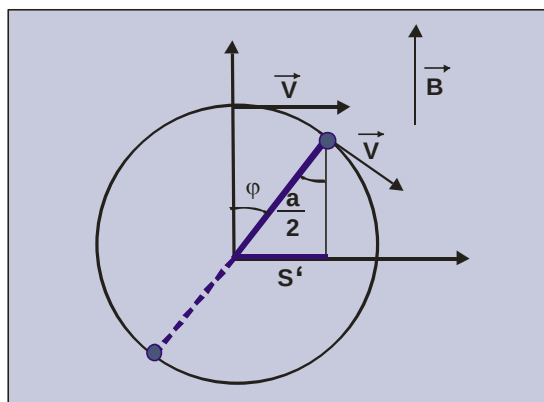
Szukana siła elektromotoryczna wyrazi się wzorem:

$$E = \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{lub} \quad E = \frac{B dS'}{dt},$$

gdzie S' – jest rzutem powierzchni ramki w jej dowolnym położeniu, na płaszczyznę prostopadłą do wektora $\vec{B}$, (**rys. 11.17**):

$$S' = s \sin \varphi$$

gdzie $\varphi = \omega t \quad s = a^2$



Rys. 11.17. S' jest rzutem powierzchni ramki na płaszczyznę prostopadłą do wektora indukcji $\vec{B}$

Będzie więc: $S' = a^2 \sin \omega t$

lub $\frac{dS'}{dt} = a^2 (\cos \omega t) \omega$

gdzie $\omega = 2\pi n$.

Ostatecznie, zaindukowana siła elektrodynamiczna w ramce będzie:

$$E = a^2 2\pi n \cos 2\pi n t \quad E = 0,71 \text{ V}.$$

Natężenie prądu:

$$i = \frac{E}{R} \quad i = 35,5 \text{ A}.$$

11.13. (xx 1985) W jednorodnym pionowym polu magnetycznym o indukcji $B = 200 \text{ mT}$ na poziomych, równoległych szynach umieszczono prostopadle do nich przewodnik o masie 10 g . Odległość między szynami wynosi $L = 0,1 \text{ m}$. Gdy szyny połączono ze źródłem prądu o SEM $\varepsilon = 75 \text{ V}$, przewodnik zaczął przesuwać się z przyspieszeniem $a = 3 \text{ m/s}^2$. Obliczyć opór wewnętrzny źródła prądu, jeżeli opór zewnętrzny tego obwodu wynosi $R = 25 \Omega$, współczynnik tarcia przewodnika o szyny $k = 0,2$ a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Na pręt działają dwie siły: elektrodynamiczna i siła tarcia. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki, suma wszystkich sił działających na dane ciało równa się iloczynowi masy tego ciała przez przyspieszenie jakie ono uzyskuje. Możemy więc napisać:

$$iLB - kmg = ma$$

gdzie i – należy wyrazić za pomocą oporu wewnętrznego źródła prądu według znanego wzoru (10.16)

$$i = \frac{\varepsilon}{R + r_w}.$$

Po przekształceniach otrzymamy szukaną wartość oporu wewnętrznego źródła prądu r_w :

$$r_w = \frac{\varepsilon LB}{m(a + kg)} - R \quad r_w = 5 \Omega.$$

11.14. (xx 1985) Napięcie maksymalne źródła prądu sinusoidalnego zmiennego wynosi $U_0 = 300 \text{ V}$. Do źródła tego dołączono neonówkę, która świeci wtedy gdy $U_z \geq 150 \text{ V}$. Obliczyć stosunek czasu, w którym neonówka świeci, do czasu, w którym neonówka nie świeci.

150 woltów odpowiada połowie wartości napięcia maksymalnego. Czas, w ciągu którego napięcie wzrasta od zera do 150 V , jest czasem gdy neonówka nie świeci. Wyliczymy go korzystając ze wzoru:

$$U = U_0 \sin \omega t \quad \text{lub} \quad \frac{U}{U_0} = \sin \omega t.$$

Uwzględniając, że $\omega = \frac{2\pi}{T}$ i podstawiając za U oraz za U_0 odpowiednie wartości liczbowe, otrzymamy:

$$t = \frac{T}{12}.$$

Czas świecenia neonówki będzie różnicą:

$$t_s = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} \quad s = \frac{\frac{T}{4} - \frac{T}{12}}{\frac{T}{12}} = 2.$$

11.15. (xx 1990) Zmiana natężenia prądu o $\Delta i = 0,8 \text{ A}$ w czasie $\Delta t = 0,2 \text{ s}$ wzbudza SEM $\mathcal{E} = 1,2 \text{ V}$ w cewce indukcyjnej obwodu drgającego. Obwód dostrojony jest do odbioru fali elektromagnetycznej o częstotliwości $f = 400 \text{ Hz}$. Obliczyć pojemność kondensatora wchodzącego w skład obwodu drgającego, jeżeli opór cewki i przewodów pomijamy.

Szukaną pojemność kondensatora wyliczymy ze wzoru:

$$\lambda = V_c 2 \pi \sqrt{L C} \quad \text{lub} \quad \frac{V_c}{f} = V_c 2 \pi \sqrt{L C}$$

gdzie V_c – jest prędkością fali elektromagnetycznej.

Nieznaną wartość współczynnika indukcji L wyliczymy ze wzoru:

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt}.$$

Ostatecznie będziemy mieli: $C = \frac{di}{f^2 4 \pi^2 \mathcal{E} dt}, \quad C = 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ F}.$

Zadania uzupełniające

11.16. Prąd elektryczny o natężeniu $i = 10 \text{ A}$ płynie w przewodniku w kształcie dwóch półokręgów o jednakowych promieniach $r_0 = 40 \text{ cm}$, wzajemnie do siebie prostopadłych. Obliczyć wartość liczbową indukcji magnetycznej w środku tych okręgów.

Odp. $B = \frac{\mu_0 i}{2 r_0} \sqrt{2} \quad B = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$

11.17. (xx 1989) W płaszczyźnie poziomej leżą dwie równoległe szyny odległe od siebie o $L = 0,2 \text{ m}$, połączone ze źródłem prądu. Na szyny położono poprzeczkę z przewodnika o masie $m = 0,4 \text{ kg}$. Układ ten ustawiono w pionowym polu magnetycznym o indukcji $B = 0,4 \text{ T}$. Obliczyć, z jakim przyspieszeniem przesuwa się poprzeczka, jeżeli natężenie prądu płynącego w obwodzie wynosi $i = 25 \text{ A}$, współczynnik tarcia poprzeczki o szyny wynosi $k = 0,2$ a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Odp. $a = \frac{i L B - k m g}{m} \quad a = 3 \text{ m/s}^2$

11.18. Przewodnik o długości $L = 0,5 \text{ m}$ i masie $m = 3 \text{ g}$, wisi na dwóch linkach w polu magnetycznym o natężeniu $H = 40 \cdot 10^3 \text{ A/m}$, którego linie skierowane są poziomo i prostopadle do przewodnika. Obliczyć maksymalną wartość natężenia prądu płynącego w tym przewodniku, przy którym linki się jeszcze nie zerwą, jeżeli wytrzymałość każdej linki wynosi $F = 40 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

Odp.
$$i = \frac{2F - mg}{L \mu_0 H} \quad i = 2 \text{ A}.$$

11.19. Prostoliniowy przewodnik o długości $L = 0,5 \text{ m}$, porusza się w polu magnetycznym w kierunku prostopadłym do linii sił pola, przy czym sam przewodnik ustawiony jest też prostopadle do linii sił. Obliczyć siłę działającą na swobodny elektron w przewodniku, jeżeli na jego końcach wytwarza się różnica potencjałów wynosząca $U = 2 \cdot 10^{-4} \text{ V}$.

Odp.
$$F = e \frac{U}{L} \quad F = 6,4 \cdot 10^{-23} \text{ N}.$$

11.20. Obliczyć jaką różnicą potencjałów powinien być przyspieszony elektron, aby wpadając w pole magnetyczne o natężeniu $H = 2 \cdot 10^2 \text{ A/m}$, prostopadle do linii sił tego pola, zakreślił okrąg o promieniu $R = 20 \text{ cm}$. Masa elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Odp.
$$U = \frac{e \mu_0 H^2 R^2}{2 m} \quad U = 2,3 \cdot 10^2 \text{ V}.$$

11.21. Obliczyć do jakiego potencjału należy naładować kulkę aluminiową o masie m i promieniu r_0 , aby wpadając w pole magnetyczne o indukcji B , prostopadle do linii sił pola, poruszała się po okręgu o promieniu R . Prędkość kulki wynosi V .

Odp.
$$U = \frac{m V}{4 \pi \epsilon_0 r_0 R B}.$$

11.22. Proton posiadający prędkość $V = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ wpada w dwa wzajemnie prostopadle pola magnetyczne o indukcji $B = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ każde, pod kątem prostym do obu pól. Obliczyć promień krzywizny okręgu, po którym będzie poruszać się dana cząstka. Przyjąć masę protonu $m = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Odp.
$$R = \frac{m V}{e B \sqrt{2}}, \quad R = 0,48 \text{ m}.$$

11.23. Przewodzący cylinder o średnicy $d = 1\text{ cm}$ stanowi anodę. Wzdłuż osi tego cylindra umieszczony został drut prostoliniowy, wolframowy, stanowiący katodę, która w czasie żarzenia emituje elektrony. Napięcie pomiędzy katodą i anodą $U = 100\text{ V}$. Obliczyć wartość indukcji pola magnetycznego, którego linie sił są skierowane równoległe do katody, żeby natężenie prądu anodowego spadło do zera (efekt dynatronowy). Średnica katody może być zaniedbana w porównaniu ze średnicą anody. Masa elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$

Odp.
$$B = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{2 U m}{e}}, \quad B = 1,35 \cdot 10^{-2}\text{ T}.$$

11.24. (xx 1977) Dwie długie równoległe szyny miedziane, ustawione pionowo w odległości L są połączone u góry oporem R i znajdują się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , prostopadłym do płaszczyzny szyn. Po szynach zsuwa się bez tarcia przewodnik miedziany o masie m . Obliczyć ustaloną wartość prędkości zsuwania się przewodnika, jeżeli opór szyn i przewodnika pominiemy.

Odp.
$$V = \frac{m g R}{L^2 B^2}$$

11.25. Dany jest przewodnik nieskończenie długi, w którym płynie prąd o natężeniu $i = 5\text{ A}$. Od tego przewodnika równoległe do niego oddala się pręt o długości $L = 0,5\text{ m}$ ze stałą prędkością $V = 2\text{ m/s}$. Obliczyć siłę elektromotoryczną zaindukowaną w pręcie w chwili, gdy znajduje się on w odległości $b = 0,2\text{ m}$ od przewodnika.

Odp.
$$E = \frac{\mu_0 i L V}{2 \pi b} \quad E = 5 \cdot 10^{-6}\text{ V}.$$

11.26. Obwód w kształcie okręgu o promieniu $R = 10\text{ cm}$ ustawiony został w polu magnetycznym, którego indukcja magnetyczna rośnie proporcjonalnie do czasu zgodnie ze wzorem:

$$B = k t,$$

gdzie $k = 2 \cdot 10^{-2}\text{ T/s}$. Płaszczyzna okręgu jest prostopadła do kierunku wektora indukcji magnetycznej. Obliczyć pracę potrzebną na przesunięcie ładunku jednego Coulomba przy jednym pełnym obiegu.

Odp.
$$W = \pi R^2 q k \quad W = 6,3 \cdot 10^{-4}\text{ J}.$$

11.27. (xx 1980) W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 0,84 \text{ T}$, obraca się jednostajnie kwadratowa ramka o boku $a = 5 \text{ cm}$ zrobiona z miedzianego drutu o przekroju $s = 0,5 \text{ mm}^2$. Maksymalne natężenie prądu indukcyjnego w obracającej się ramce wynosi $i = 1,9 \text{ A}$. Obliczyć częstość obrotów ramki, jeżeli oporność właściwa miedzi wynosi $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$.

Odp.
$$v = \frac{2 i \rho}{a B s \pi} \quad v = 0,981/\text{s}$$

11.28. Przewodnik o oporze $R = 1 \Omega$ i długości $L = 0,5 \text{ m}$ położono na dwóch równoległych szynach poziomych, które zostały połączone ze źródłem prądu o sile elektromotorycznej $E = 2 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $r_w = 0,5 \Omega$. Całość wstawiono w jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B = 0,2 \text{ T}$, prostopadłej do płaszczyzny szyn. Wtedy przewodnik zaczął poruszać się ze stałą prędkością $V = 2 \text{ m/s}$. Obliczyć natężenie prądu w przewodniku, jeżeli opór szyn zaniedbamy.

Odp.
$$i = \frac{E - V L B}{R + r_w} \quad i = 1,2 \text{ A}.$$

11.29. Do okładek kondensatora o pojemności $C = 10^{-6} \text{ F}$, przyłożone zostało napięcie $U = 220 \text{ V}$ i po jego naładowaniu, odłączony został od źródła prądu. Następnie, został rozładowany poprzez cewkę o indukcyjności $L = 10^{-2} \text{ H}$. Obliczyć maksymalny prąd płynący w tym obwodzie, jeżeli pominie się straty energii.

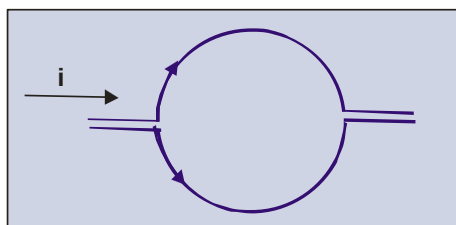
Odp.
$$i_{\max} = U \sqrt{\frac{C}{L}} \quad i_{\max} = 2,2 \text{ A}.$$

11.30. (xx 1988) Kwadratowa ramka o boku $a = 0,2 \text{ m}$ obraca się dookoła osi prostopadłej do linii sił pola magnetycznego o indukcji $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Obliczyć, przy jakiej liczbie obrotów na sekundę maksymalna różnica potencjałów między końcami tej ramki będzie równa $\varepsilon = 1 \text{ mV}$. Oś obrotu leży w płaszczyźnie ramki.

Odp.
$$n = \frac{U}{2 \pi a^2 B}, \quad n = 0,8 \cdot 10^2 \text{ Hz}.$$

Zadania testowe

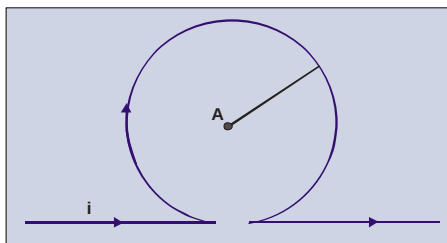
11.31. (xx 1987) Prostoliniowy przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu i , przechodzi w dwa identyczne półkoliste rozwidlenia (**Rys. 11.18**). Jakie jest natężenie pola magnetycznego w środku tak uformowanego kołowego przewodnika?



Rys.11.18. Obwód kołowy z prądem, od którego należy określić natężenie pola magnetycznego, w jego środku

11.32. (1986) W jaki sposób można ustalić, który z biegunów akumulatora jest dodatni, mając do dyspozycji igłę magnetyczną i kawałek przewodnika?

11.33. (xx 1989) W bardzo długim, cienkim przewodniku tworzącym kołową pętlę o promieniu r płynie prąd o natężeniu i (**rys. 11.19**). Czy można tak dobrać wartość natężenia prądu w przewodniku, ażeby natężenie pola magnetycznego w punkcie A było równe zero?



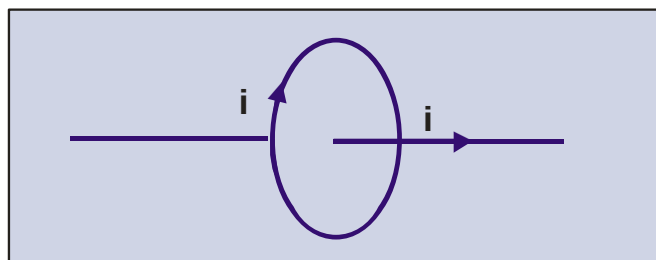
Rys. 11.19. Pętla kołowa z prądem, w której w środku należy określić natężenie pola magnetycznego

11.34. (x 1991) Czy można rozdzielić bieguny magnetyczne N i S magnesu sztabkowego, rozcinając go w połowie długości?

11.35. (x 1989)(1998) Dwa długie równoległe druty, umieszczone w powietrzu, oddalone są o 10 cm. Jaka jest siła przyciągania na jednostkę długości tych prętów, jeżeli płyną przez nie, w tym samym kierunku prądy o natężeniu 1 A?

11.36. (xx 1987) Dlaczego dwa, cienkie, długie, prostoliniowe przewodniki, w których płyną prądy o kierunkach zgodnych, przyciągają się, a o kierunkach przeciwnych odpychają się?

11.37. (xx 1988) Wewnątrz przewodnika kołowego umieszczono centralnie i prostopadle do płaszczyzny, w której się znajduje, długi prostoliniowy przewodnik (**rys. 11.20**). Czy przewodniki te oddziałują na siebie, gdy płyną przez nie prądy?



Rys.11.20. Czy dwa przewodniki, w kształcie okręgu i prostoliniowy, ustawione jak na rysunku oddziałują ze sobą?

11.38. (xx 1998) Jaki jest moment pary sił działającej na kwadratową ramkę o boku $a = 1 \text{ cm}$, przez którą płynie prąd o natężeniu $i = 1 \text{ A}$, która znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 10 \text{ T}$, jeżeli płaszczyzna ramki tworzy z kierunkiem linii sił pola kąt $\alpha = 60^\circ$?

11.39. (xx 1990)(xx 1998) Jaka siła działa na przewodnik o długości $L = 2 \text{ m}$, przewodzący prąd o natężeniu $i = 2 \text{ A}$, umieszczony pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do linii sił pola magnetycznego o indukcji $B = 1 \text{ T}$.

11.40. (1996) Jaka siła działa na przewodnik o długości $L = 2 \text{ m}$ przewodzącym prąd o natężeniu $i = 1 \text{ A}$ umieszczony pod kątem $\alpha = 90^\circ$ względem linii sił indukcji magnetycznej o wielkości $B = 1 \text{ T}$?

11.41. (xx 1991) Jak zachowują się zwoje zwojnicy (przyciągają się czy się odpychają), gdy płynie przez nie prąd elektryczny?

11.42. (xx 1988) W jednorodnym i stałym polu porusza się elektron ruchem jednostajnym prostoliniowym. Jakie to pole: grawitacyjne, elektryczne czy magnetyczne?

11.43. (xx 1981)(x 1986) Dlaczego stałe pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej naładowanej cząstki?

11.44. (x 1987) Określić wartość i kierunek siły, z jaką pole magnetyczne działa na poruszającą się w nim cząstkę naładowaną?

11.45. (x 1987) Proton i cząstka α wbiegły z jednakowymi prędkościami do obszaru jednorodnego pola magnetycznego prostopadle do linii sił pola. Dla której z tych cząstek promień zakrzywienia toru będzie większy?

11.46. (xx 1984) Elektron porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B po okręgu o promieniu r z niewielką prędkością. Jak zmieni się promień tego okręgu, jeżeli prędkość elektronu zmaleje trzykrotnie, zaś indukcja magnetyczna wzrośnie dwukrotnie?

11.47. Jaki jest okres ruchu cząstki o masie m i ładunku q , poruszającej się prostopadle do kierunku pola magnetycznego o indukcji B ?

11.48. (x 1987) Strumień magnetyczny zmienia się w czasie według wzoru: $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$. Jak zmienia się w czasie siła elektromotoryczna indukcji?

11.49. (xx 1981) Czy w ramce o przekroju s poruszającej się ruchem postępowym w jednorodnym polu magnetycznym indukuje się siła elektromotoryczna?

11.50. (xx 1987) Ramka w formie kwadratu obraca się w jednorodnym polu magnetycznym. Oś obrotu ramki pokrywa się z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej. Jaka siła elektromotoryczna zaindukuje się w ramce?

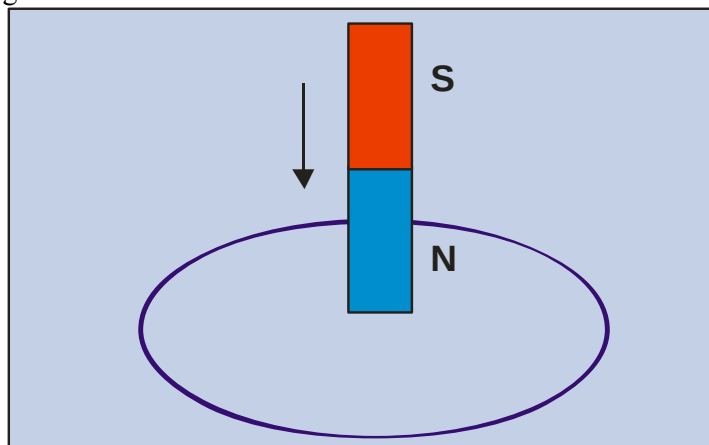
11.51. (xx 1981) Kosztem jakiej energii powstaje w cewce prąd indukcyjny wywołany zbliżeniem do niej magnesu?

11.52. (xx 1987)(x 1998) W cewce, zmiana natężenia prądu 2–12 A, w ciągu czasu 5 s, powoduje powstanie SEM samoindukcji równej 4 V. Jaka jest indukcyjność tej cewki?

11.53. (x 1990) Amplituda natężenia prądu zmiennego wynosi $i_0=9,8\text{A}$. Jaka jest wartość skuteczna natężenia prądu?

11.54. (x 1990)(xx 1998) Z ilu zwojów powinno składać się uzwojenie wtórne transformatora podwyższającego napięcie od $U_1=110\text{V}$ do $U_2=11000\text{V}$, jeżeli uzwojenie pierwotne posiada $N_1=20$ zwojów.

11.55. (x 1991) Określić, w którą stronę płynie prąd indukcyjny w poziomo położonym miedzianym pierścieniu, gdy z góry będziemy zbliżać do niego północny biegun magnesu.



Rys. 11.21. W pierścieniu powstaje prąd przy zbliżaniu do tego pierścienia magnesu

11.56. (x 1987) Obwód drgający składający się z cewki indukcyjnej oraz z kondensatora płaskiego emituje fale elektromagnetyczne o długości λ . Ile razy należy zmniejszyć odległość między okładkami kondensatora by układ emitował fale o długości 2λ ?

11.57. (xx 1986)(xx 1997) Obwód drgający składa się z kondensatora o pojemności C i cewki o indukcyjności L . Jaka będzie długość fali emitowanej przez ten obwód, jeżeli prędkość fali elektromagnetycznej wynosi V_c .

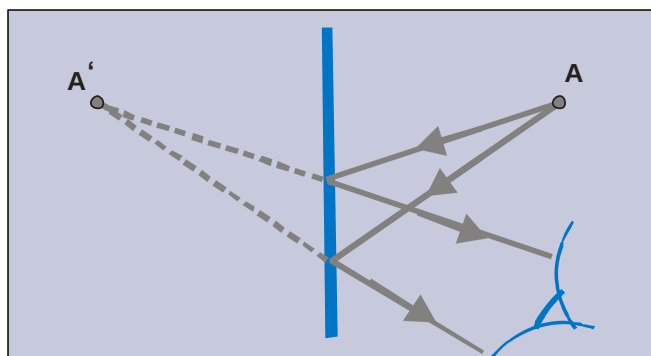
11.58. (xx 1982) W obwodzie drgającym LC, zmniejszono trzykrotnie odległość pomiędzy okładkami kondensatora płaskiego. Jak należy zmienić indukcyjność cewki w tym obwodzie, ażeby okres drgań własnych pozostał bez zmian?

XII. OPTYKA GEOMETRYCZNA

12.1. Obraz w zwierciadle płaskim

Optyka geometryczna zajmuje się biegiem promieni świetlnych w różnych ośrodkach i w przyrządach optycznych. Opiera się ona na dwóch prawach: odbicia i załamania światła.

Prawo odbicia mówi nam, że w przypadku, gdy światło ulega odbiciu od jakiejś powierzchni, to kąt odbicia równa się kątowi padania. Za pomocą tego prawa wyjaśniamy powstawanie obrazów w różnych zwierciadłach: płaskim, wklęsłym i wypukłym. Powstawanie obrazów w zwierciadle płaskim wyjaśnia **rys. 12.1**.

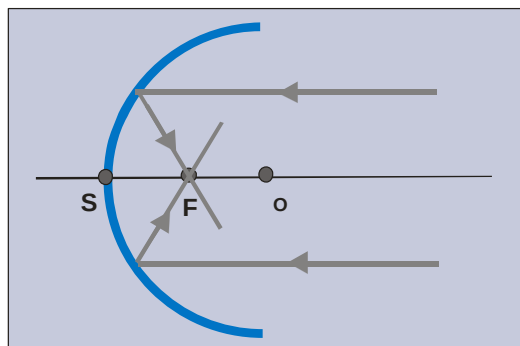


Rys. 12.1. Konstrukcja obrazu w zwierciadle płaskim

Z punktu A prowadzimy dwa promienie, które po odbiciu od zwierciadła będą rozbieżne, a więc się nie przecinają. Przeczną się natomiast przedłużenia tych promieni w punkcie A' , który jest obrazem punktu A. Jest to obraz pozorny, gdyż powstaje na przecięciu się przedłużeń promieni, a nie ich samych. Do oka wpadają promienie tak jakby wychodziły z punktu A' . Tam też jest widoczny punkt A. Oprócz tego jest to obraz prosty (nieodwrocony) i takiej samej wielkości.

12.2. Obrazy otrzymywane za pomocą zwierciadła wklęsłego i wypukłego

Każde zwierciadło wklęsłe posiada następujące elementy: środek krzywizny (O), jako środek kuli, której część powierzchni stanowi dane zwierciadło (rys. 12.2). Wierzchołek zwierciadła jako środek geometryczny powierzchni danego zwierciadła (S). Oś optyczna – prosta przechodząca przez wierzchołek zwierciadła i środek krzywizny.



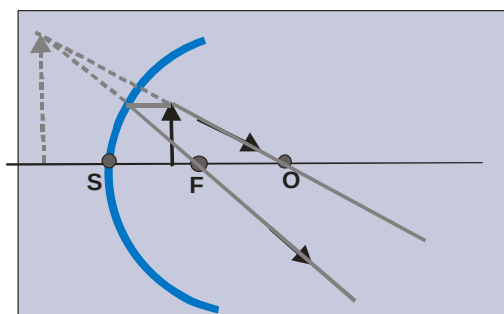
Rys. 12.2. Elementy zwierciadła wklęsłego: O – środek krzywizny, S – wierzchołek, F – ognisko

Ognisko zwierciadła (F), jest to punkt przecięcia się promieni, po odbiciu się od zwierciadła a biegnących równolegle do osi optycznej. Znajduje się ono w połowie odległości wierzchołka od środka krzywizny.

Ogniskowa zwierciadła, jest to odległość ogniska od wierzchołka zwierciadła. Równa jest połowie promienia krzywizny i wyraża się wzorem:

$$f = \frac{R}{2} \quad (12.1)$$

W celu wykreślenia obrazu danego przedmiotu, należy przede wszystkim zaznaczyć punkty charakterystyczne zwierciadła. Następnie z dowolnego punktu przedmiotu, zazwyczaj wierzchołka strzałki, kreśli się dwa promienie: jeden równoległe do osi optycznej, ten po odbiciu od powierzchni zwierciadła biegnie przez ognisko. Drugi promień prowadzimy przez środek krzywizny, który po odbiciu od zwierciadła biegnie po tej samej drodze. W punkcie, gdzie przecinają się promienie, powstaje obraz rzeczywisty, a gdzie przecinają się przedłużenia promieni – obraz pozorny. (**rys. 12.3.**) pokazuje sposób otrzymywania obrazu, gdy przedmiot ustawiony jest pomiędzy ogniskiem a zwierciadłem. Powstaje wtedy obraz pozorny, prosty i powiększony.



Rys. 12.3. Obraz pozorny, prosty i powiększony przedmiotu ustawionego pomiędzy ogniskiem a zwierciadłem wklęsłym

Gdy umieścimy przedmiot w ognisku, to otrzymamy obraz w nieskończoności, gdyż wtedy promień jak również przedłużenia promieni będą równoległe. Gdy przedmiot będzie się znajdował pomiędzy ogniskiem a środkiem krzywizny zwierciadła, to otrzymamy obraz rzeczywisty, powiększony i odwrócony, co jest pokazane na **rys. 12.4**.

Przypadek ten może posłużyć do wyprowadzenia podstawowego wzoru dla zwierciadeł: z trójkątów ABO i A'B'O możemy napisać następujące równanie:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{y-R}{R-x}$$

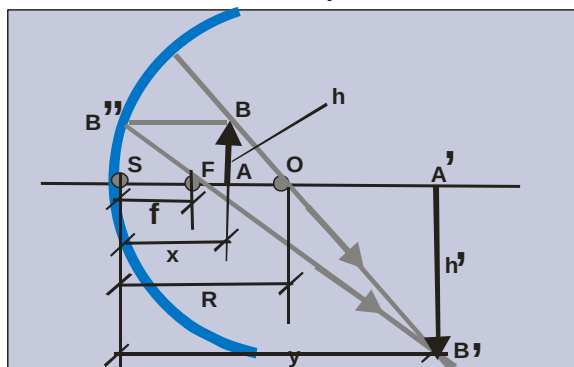
oraz
$$\frac{A'B'}{SB''} = \frac{y-f}{f}$$

Uwzględniając, że $AB = SB''$ i porównując powyższe równania stronami otrzymamy:

$$\frac{y-R}{R-x} = \frac{y-f}{f}$$

Wstawiając za $R = 2f$ oraz odpowiednio przekształcając, otrzymamy szukane podstawowe równanie dla zwierciadeł:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (12.2)$$



Rys. 12.4. Obraz rzeczywisty, odwrócony i powiększony przedmiotu ustawionego pomiędzy ogniskiem a środkiem krzywizny zwierciadła

Gdy obraz jest pozorny, to przy wyrażeniu $\frac{1}{y}$ wystąpi znak minus.

Powiększenie, jakie daje zwierciadło, określa się jako stosunek wielkości obrazu do wielkości przedmiotu i wyraża się wzorem:

$$p = \frac{h'}{h} \quad (12.3)$$

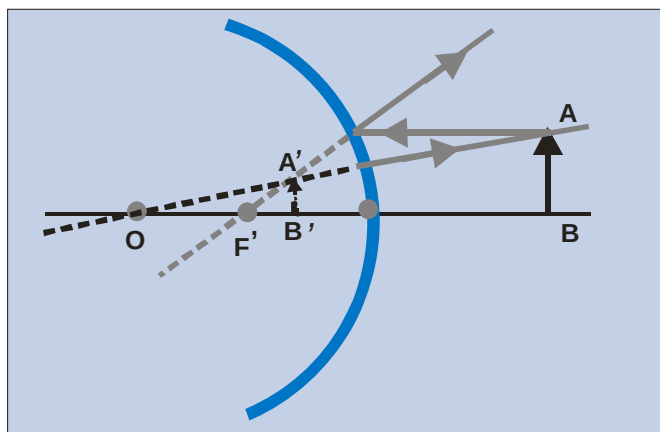
lub stosunkiem odległości obrazu od zwierciadła do odległości przedmiotu od zwierciadła:

$$p = \frac{y}{x} \quad (12.4)$$

Jeżeli przedmiot umieścimy w samym środku krzywizny, to otrzymamy obraz rzeczywisty, odwrócony i takiej samej wielkości. Natomiast, gdy przedmiot znajdzie się w odległości większej niż promień krzywizny, to obraz otrzymany będzie rzeczywisty, odwrócony i pomniejszony.

Wyżej wymienione obrazy można również otrzymać kreśląc jeden z promieni w kierunku wierzchołka zwierciadła, który odbija się pod tym samym kątem, co pada, a drugi równoległe do osi optycznej.

Zwierciadło wypukłe posiada ognisko pozorne (F') tzn. punkt w którym przecinają się przedłużenia promieni odbitych od zwierciadła, a padających na zwierciadło równoległe do osi optycznej. Zwierciadło to daje zawsze jeden i ten sam typ obrazu, niezależnie od tego gdzie umieścimy przedmiot, a mianowicie obraz pozorny, prosty i pomniejszony (**rys. 12.5**).



Rys. 12.5. Obraz w zwierciadle wypukłym ($A'B'$) jest zawsze pozorny, prosty i pomniejszony, niezależnie od tego gdzie umieścimy przedmiot

Przykład 12.1

Przedmiot o wysokości $h = 10$ cm umieszczono przed zwierciadłem wypukłym w odległości $x = 40$ cm. Obliczyć promień krzywizny tego zwierciadła, jeżeli wysokość obrazu wynosi $h' = 8$ cm.

Obraz jest pozorny, więc w zasadniczym równaniu (12.2) dla zwierciadeł, wystąpi przed wyrazem $1/y$ znak minus:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Ze wzorów na powiększenie (12.3) i (12.4) możemy napisać:

$$\frac{h'}{h} = \frac{y}{x}$$

lub
$$y = \frac{h'}{h} x .$$

Uwzględniając powyższe równania możemy wyliczyć ogniskową:

$$f = \frac{h' x}{h' - h}$$

jak również szukany promień krzywizny:

$$R = 2 f,$$

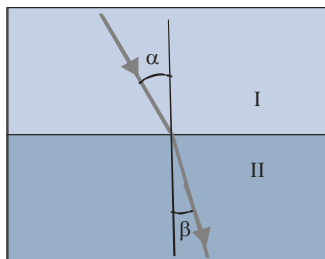
$$R = -320 \text{ cm}.$$

12.3. Współczynnik załamania światła

Jeżeli światło przechodzi z jednego ośrodka do drugiego to zmienia kierunek biegu, co nazywamy załamaniem (**rys. 12.6**). Dzieje się to dlatego, że w drugim ośrodku światło biegnie z inną prędkością.

Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania, równy jest stosunkowi prędkości światła w ośrodku pierwszym do prędkości światła w ośrodku drugim i nazywa się współczynnikiem załamania światła ośrodka drugiego względem pierwszego:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} = n_{2/1} \quad (12.5)$$



Rys. 12.6. Światło przechodząc z jednego ośrodka do drugiego zmienia kierunek biegu

Powyższy wzór został wyprowadzony w podrozdziale 6.6. bardzo często określa się powyższy współczynnik załamania względem próżni – nazywa się on wtedy bezwzględnym współczynnikiem załamania. Stosunek sinusów jak również stosunek prędkości światła w obu ośrodkach, można wyrazić za pomocą bezwzględnych współczynników załamania:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} . \quad (12.6)$$

Prędkość światła w próżni jest jednakowa dla fal o różnych długościach. Natomiast w danym ośrodku fale dłuższe rozchodzą się z większą prędkością a krótsze z mniejszą. Jeżeli więc światło przechodzi z ośrodka o większej prędkości do ośrodka o prędkości mniejszej, to długość fali ulega skróceniu. Dlatego też stosunek sinusów, jak i stosunek prędkości wyrazić w funkcji długości fal:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (12.7)$$

Przykład 12.2

Obliczyć bezwzględny współczynnik załamania danego materiału, jeżeli fala świetlna przechodząc z próżni do danego materiału zmniejsza swoją długość o 1/5 swojej pierwotnej długości.

Zależność pomiędzy bezwzględnymi współczynnikami załamania a długościami fal podaje wzór (12.7):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

gdzie

$$n_1 = 1.$$

Z treści zadania wynika, że:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{1}{5} \lambda_1$$

lub

$$\lambda_2 = \frac{4}{5} \lambda_1$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$n_2 = \frac{5}{4}.$$

12.4. Kąt graniczny, całkowite wewnętrzne odbicie

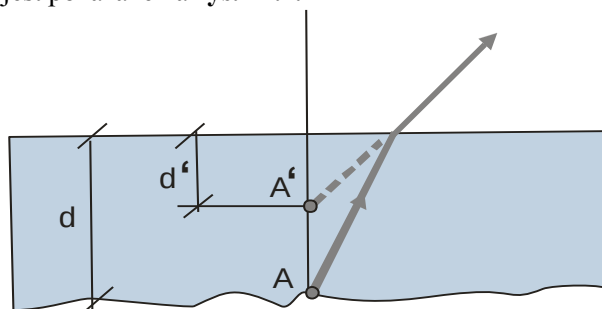
Jeżeli światło przechodzi z ośrodka optycznie gęstszego do optycznie rzadszego, tzn. z ośrodka o mniejszej prędkości światła do ośrodka o prędkości większej, to ulega załamaniu od prostopadłej, więc kąt załamania będzie większy od kąta padania. Przy zwiększaniu kąta padania będzie zwiększać się kąt załamania tak, że przy pewnym kącie padania kąt załamania wyniesie 90° . Wtedy kąt padania będzie nazywać się kątem granicznym – będzie więc to taki kąt padania w ośrodku optycznie gęstszym, dla którego kąt załamania w ośrodku optycznie rzadszym wynosi 90° .

Zależność pomiędzy kątem granicznym a współczynnikiem załamania światła jest następująca:

$$\frac{1}{\sin \gamma} = n_{2/1} \quad (12.8)$$

gdzie γ – jest kątem granicznym.

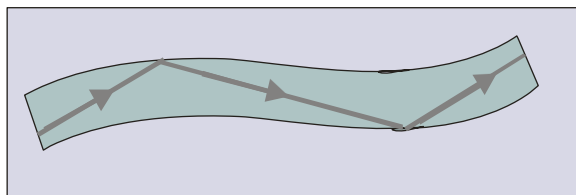
W oparciu o powyższy wzór działają przyrządy, zwane refraktometrami, za pomocą których wylicza się współczynnik załamania światła z pomiarów kąta granicznego. Dzięki zmianie kierunku biegu promieni np. z wody do powietrza, głębokość rzeki wydaje nam się mniejsza niż jest w rzeczywistości, ponieważ promienie wpadają do oka w kierunku jak gdyby wychodziły z punktu A' a nie z punktu A , co jest pokazane na **rys. 12.7**.



Rys. 12.7. Na skutek załamania promieni, rzeczywista głębokość rzeki d jest widziana jako d'

Promień światła padający pod kątem większym od granicznego nie wchodzi do ośrodka optycznie rzadszego, lecz ulega odbiciu, które nazywa się całkowitym wewnętrznym odbiciem, ponieważ 100% energii ulega odbiciu od powierzchni granicznej i nie wchodzi do ośrodka optycznie rzadszego.

Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia zostało wykorzystane do konstrukcji światłowodów, w których światło przebywa bardzo długą drogę ulegając całkowitemu wewnętrznemu odbiciu nie tracąc energii, co jest pokazane na **rys. 12.8**.

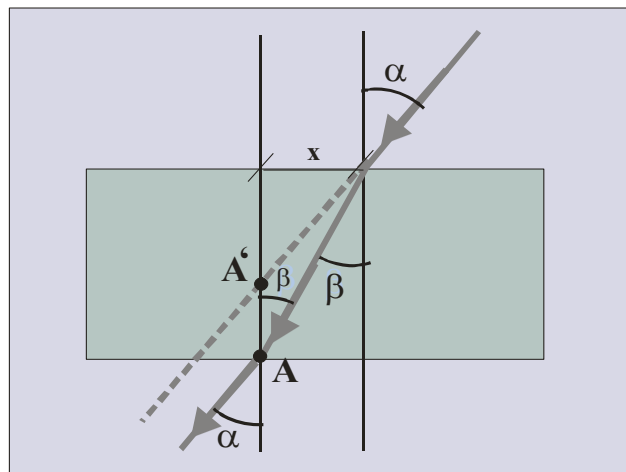


Rys. 12.8. Bieg promienia świetlnego w światłowodzie

W oparciu o zjawisko załamania światła wyjaśniamy bieg promieni przez płytkę równoległościenną, pryzmat i powstawanie obrazów za pomocą soczewek.

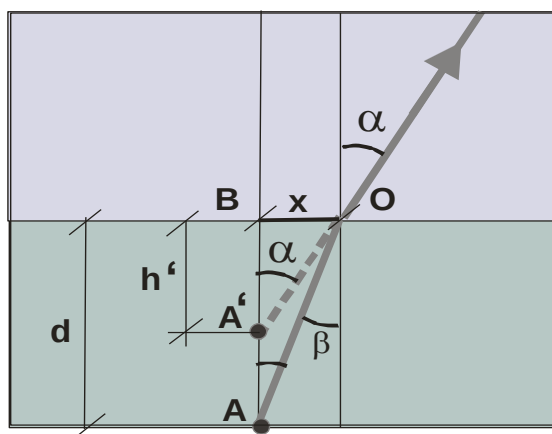
12.5. Płytkę równoległościenna

Promień światła przechodząc przez płytkę równoległościenną ulega przesunięciu, nie zmieniając swego pierwotnego kierunku biegu. Wielkość tego przesunięcia zależy od kąta padania, grubości płytki, oraz od współczynnika załamania materiału, z którego płytka jest wykonana (**rys. 12.9**).



Rys. 12.9. Przejście promienia świetlnego przez płytkę równoległościenną

Za pomocą płytki równoległościennej możemy obliczyć współczynnik załamania światła poprzez pomiar grubości rzeczywistej płytki oraz grubości pozornej, którą mierzymy za pomocą mikroskopu. Plamka A zrobiona na jednej stronie płytki będzie widoczna w punkcie A'. Grubością pozorną będzie odcinek h' , co jest widoczne na rys. 12.10.



Rys. 12.10. Płytkę równoległościenną o grubości d ma grubość pozorną h'

Z trójkąta $A' B O$ mamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{h'}$

Z trójkąta $A B O$ mamy $\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{d}$.

Powyższe równania dzielimy stronami: $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{d}{h'}$.

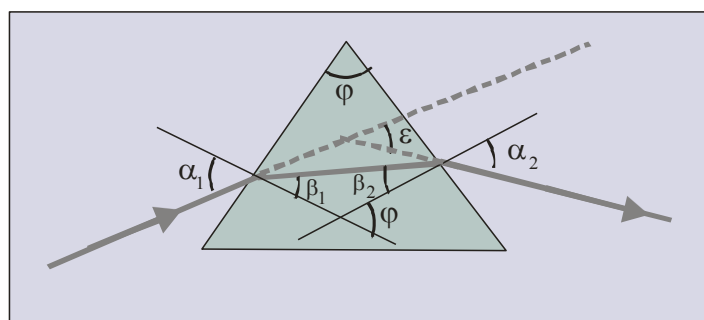
Dla małych kątów można przyjąć, że sinusy równają się tangensom, stosunek tangensów można zastąpić stosunkiem sinusów i wtedy będziemy mieli:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{d}{h'}$$

lub
$$\frac{d}{h'} = n. \quad (12.9)$$

12.6. Pryzmat

Promień światła jednorodnego, przechodząc przez pryzmat ulega załamaniu na pierwszej i drugiej powierzchni pryzmatu, na skutek czego zmienia kierunek swego biegu o kąt ε , który nazywa się kątem odchylenia (**rys. 12.11**).



Rys. 12.11. Pryzmat zmienia kierunek biegu promienia jednorodnego o kąt ε

Kąt ten zależy od kąta łamiącego pryzmatu (φ), współczynnika załamania materiału, z którego zrobiony jest pryzmat, oraz od kąta padania na pryzmat (α_1). Jeżeli kąt ten równa się kątowi wyjścia z pryzmatu (α_2), to kąt odchylenia (ε) będzie miał wartość minimalną. Zależność kąta odchylenia od w/w parametrów wyprowadza się w sposób następujący: z **rys. 12.11** widać, że

$$\varepsilon = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

gdyż kąt zewnętrzny w trójkącie równa się sumie kątów do niego nieprzyległych.

Przy założeniu, że kąt padania równa się kątowi wyjścia ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) oraz, że $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, będziemy mieli:

$$\varepsilon = 2\alpha - 2\beta.$$

Uwzględniając, że kąt łamiący pryzmatu $\varphi = 2\beta$ otrzymamy:

$$\varepsilon = 2\alpha - \varphi. \quad (12.10)$$

Korzystając ze wzoru (12.6) i przyjmując przybliżenie, że dla małych kątów sinus równa się samemu kątowi, możemy napisać:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{n_2}{n_1} \beta.$$

Wzór na kąt odchylenia przyjmie postać:

$$\varepsilon = \frac{n_2}{n_1} 2\beta - \varphi.$$

Uwzględniając, że $2\beta = \varphi$ otrzymamy:

$$\varepsilon = \varphi \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right), \quad (12.11)$$

gdzie n_2 – jest bezwzględnym współczynnikiem załamania materiału pryzmatu a

n_1 – jest bezwzględnym współczynnikiem załamania ośrodka, w którym znajduje się pryzmat.

W celu określenia współczynnika załamania materiału pryzmatu wyznaczamy kąty α i β w funkcji kątów: odchylenia ε i kąta łamiącego φ . Mamy, więc w oparciu o równanie (12.10)

$$\alpha = \frac{\varepsilon + \varphi}{2}$$

oraz stąd, że:

$$\varphi = 2\beta, \quad \beta = \frac{\varphi}{2}.$$

Mamy więc:

$$n = \frac{\sin \frac{\varepsilon + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (12.12)$$

12.7. Soczewki

Mamy dwa rodzaje soczewek: wypukłe i wklęsłe. Soczewki wypukłe charakteryzują się tym, że blisko swojej osi są grube, a na brzegach cienkie. Wklęsłe są w środku cienkie a na brzegach grube. Soczewki wypukłe, jeśli posiadają bezwzględny współczynnik załamania większy od współczynnika załamania, w ośrodku w którym się znajdują, są soczewkami skupiającymi.

Jeżeli natomiast znajdują się w ośrodku o współczynniku załamania większym niż ten, z którego same są zbudowane, to wtedy są soczewkami rozpraszającymi. Podobnie soczewka wklęsła może być soczewką skupiającą np. z powietrza ustawiona w wodzie.

Każda soczewka skupiająca posiada ognisko, jako punkt w którym przecinają się wszystkie promienie po przejściu przez soczewkę a biegnące do soczewki równoległe do osi optycznej.

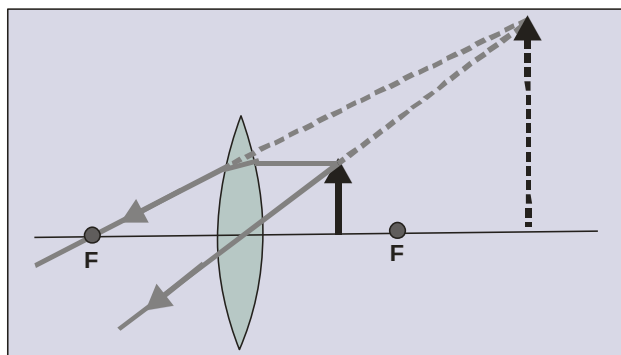
Soczewka skupiająca daje różne obrazy, w zależności od tego gdzie umieścimy przedmiot. W celu wykreślenia obrazu danego punktu (przedmiotu) wystarczy z tego punktu wykreślić dwa promienie, jeden biegnący równoległe do osi optycznej, który po załamaniu w soczewce przechodzi przez ognisko, drugi przez środek soczewki, ten nie ulega załamaniu, gdyż dla tego promienia soczewka jest płytką równoległościenną. Promień ten więc ulega przesunięciu, które dla soczewek cienkich jest tak niewielkie, że może być pominięte.

Jeżeli umieścimy przedmiot pomiędzy ogniskiem a soczewką, w tzn. ogniskowej soczewki, to otrzymamy obraz pozorny, prosty i powiększony (**rys. 12.12**). W ten sposób działa lupa – szkło powiększające.

Wzór na powiększenie jakie daje lupa jest następujący:

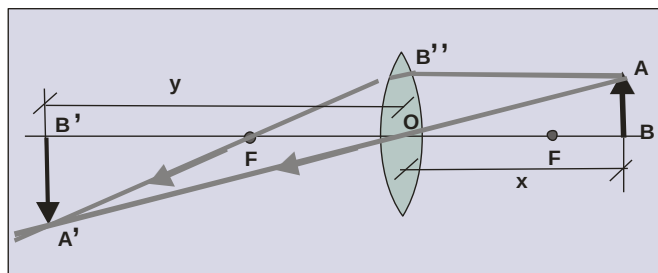
$$p = \frac{d}{f} + 1 \quad (12.13)$$

gdzie d – jest odległością dobrego widzenia,
 f – ogniskową soczewki.



Rys. 12.12. Obraz pozorny, prosty i powiększony, otrzymany za pomocą lupy.

Jeżeli przedmiot umieścimy w ognisku, to po przejściu przez soczewkę promienie będą równoległe. Obrazu, więc nie będzie. Gdy umieścimy przedmiot pomiędzy ogniskiem a podwójną ogniskową, to uzyskamy obraz rzeczywisty, odwrócony i powiększony (**rys. 12.13**). Tak będzie działać obiektyw mikroskopu.



Rys. 12.13. $A'B'$ jest obrazem rzeczywistym, powiększonym i odwróconym przedmiotu AB

W celu wyprowadzenia zasadniczego równania dla soczewek, rozpatrujemy dwa trójkąty: OAB i $OA'B'$. Z racji ich podobieństwa, możemy napisać:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{y}{x},$$

oraz drugie dwa trójkąty: $FA'B'$ i FOB'' , z których otrzymamy:

$$\frac{A'B'}{OB''} = \frac{y - f}{f}.$$

Ponieważ $OB'' = AB$ więc będziemy mieli:

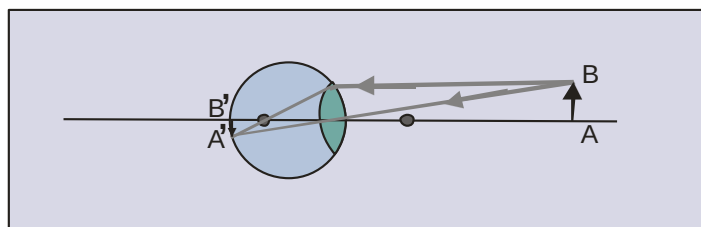
$$\frac{y}{x} = \frac{y - f}{f}$$

i po przekształceniu otrzymamy szukane równanie:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \quad (12.14)$$

Jeżeli obraz jest pozorny to wystąpi znak minus przed wyrazem $\frac{1}{y}$.

Jeżeli umieścimy przedmiot w odległości równej podwójnej ogniskowej, to otrzymamy obraz takiej samej wielkości, odwrócony i rzeczywisty. Ostatni przypadek to ten, gdy przedmiot umieścimy w odległości dużo większej od odległości podwójnej ogniskowej. Otrzymamy wtedy obraz rzeczywisty, pomniejszony i odwrócony.



Rys. 12.14. Obraz $A'B'$ jaki powstaje na siatkówce oka jest rzeczywisty, pomniejszony i odwrócony.

Obrazy takie daje obiektyw aparatu fotograficznego na kliszy, obiektyw lunety, oraz powstaje taki obraz na siatkówce naszego oka, co jest pokazane na rys. 12.14.

Przykład 12.3

Zostało stwierdzone, że jeżeli przedmiot ustawimy w odległości $x = 25$ cm od soczewki to otrzymuje się obraz na ekranie odwrócony i dwa razy powiększony. Obliczyć ogniskową tej soczewki.

Korzystamy z równania zasadniczego dla soczewek (12.14):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Uwzględniając wzór na powiększenie: $\frac{y}{x} = p$ otrzymamy:

$$f = \frac{p \cdot x}{p + 1} \quad f = 16,7 \text{ cm}.$$

Przykład 12.4

Obliczyć powiększenie jakie daje soczewka wypukła (lupa), o ogniskowej $f = 5$ cm, jeżeli przedmiot znajduje się w odległości $x =$ mniejszej od ogniskowej, a odległość dobrego widzenia jest równa $y = 25$ cm.

Wychodzimy ze wzoru na powiększenie jakie daje soczewka:

$$p = \frac{y}{x}, \quad (12.15)$$

gdzie y – jest odległością obrazu od soczewki, a więc odległością dobrego widzenia (d).

Wielkość $\frac{1}{x}$ wyliczamy ze wzoru:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$$

w którym występuje znak minus przed wyrazem $\frac{1}{y}$ ponieważ obraz jest pozorny.

Mamy więc:

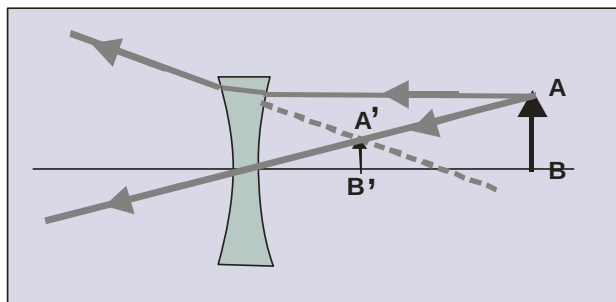
$$p = \frac{y}{x} + 1.$$

Uwzględniając, że y jako odległość obrazu od soczewki równa jest odległości dobrego widzenia d , możemy napisać:

$$p = \frac{d}{f} + 1 \quad p = 6.$$

Soczewka wklęsła i rozpraszająca posiada ognisko pozorne, tj. punkt, w którym przecinają się przedłużenia promieni załamanych w soczewce a biegnących do

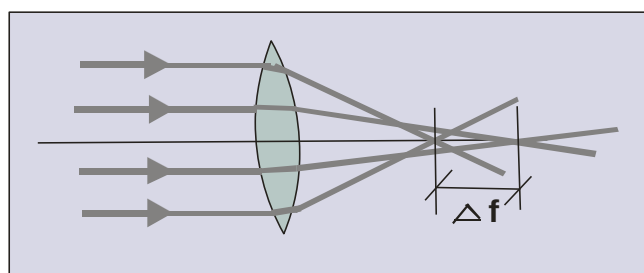
soczewki równoległe do osi optycznej. Soczewka ta daje zawsze jeden i ten sam typ obrazu, niezależnie od tego gdzie umieszczony został przedmiot, tzn. obraz pozorny, prosty i pomniejszony (rys. 12.15).



Rys. 12.15. Obraz $A'B'$ otrzymamy za pomocą soczewki rozpraszającej jest pozorny, prosty i pomniejszony

Soczewki mają następujące wady:

a) aberrację sferyczną, polegającą na tym, że jeżeli na soczewkę pada wiązka światła równoległa do osi optycznej, to te promienie, które biegną bliżej osi optycznej załamują się słabiej a więc mają swoje ognisko dalej od soczewki. Promienie, które biegną dalej od osi optycznej, załamują się silniej i mają swoje ognisko bliżej soczewki (rys. 12.16).



Rys.12.16. Ognisko nie jest punktowe, lecz rozciąga się na odcinku Δf ponieważ promienie skrajne przecinają się bliżej soczewki a pozostałe dalej

Ognisko, więc nie jest punktowe, ale rozciąga się na odcinku Δf . Wada ta powoduje, że uzyskiwane obrazy są nieostre. W celu zlikwidowania tej wady lub przynajmniej jej zmniejszenia, stosuje się „diafragmy” – są to przesłony z otworkiem w środku, które pozwalają na przejście przez soczewkę promieni tylko środkowych, tzn. biegnących bliżej osi optycznej.

b) Aberację chromatyczną polegającą na tym, że obrazy posiadają obwódkę barwną, na skutek rozszczepienia promienia białego na poszczególne fale jednorodne. Zapobiega się tej wadzie przez stosowanie układu soczewek.

c) Astygmatyzm, polegający na tym, że obraz punktu jest w postaci odcinka. Zdolnością zbierającą soczewek nazywamy odwrotność ogniskowej:

$$D = \frac{1}{f} \quad (12.16)$$

Powyższy wzór jest słuszny, gdy ogniskową mierzymy w metrach, jeżeli natomiast w centymetrach, to przyjmie on postać:

$$D = \frac{100}{f} \quad (12.17)$$

Jednostką zdolności skupiającej soczewki jest dioptria. Soczewka posiada zdolność skupiającą równą jednej dioptrii, jeżeli jej ogniskowa ma długość jednego metra. Zdolności skupiające dodają się, tzn. jeżeli złożymy kilka soczewek razem, to taki układ będzie miał zdolność skupiającą równą sumie zdolności skupiających poszczególnych soczewek:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 \quad (12.18)$$

Soczewka rozpraszająca ma zdolność skupiającą ujemną.

12.8. Zależność ogniskowej soczewki od współczynnika załamania materiału danej soczewki

W celu wyprowadzenia wzoru na taką zależność, rozpatrujemy dwa promienie wychodzące z punktu A: jeden biegnący wzdłuż osi optycznej a drugi pod kątem γ_1 (rys. 12.17). Możemy napisać:

$$\varepsilon = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Kąt łamiący soczewki – pryzmatu φ może być określony też jako suma kątów $\Theta_1 + \Theta_2$:

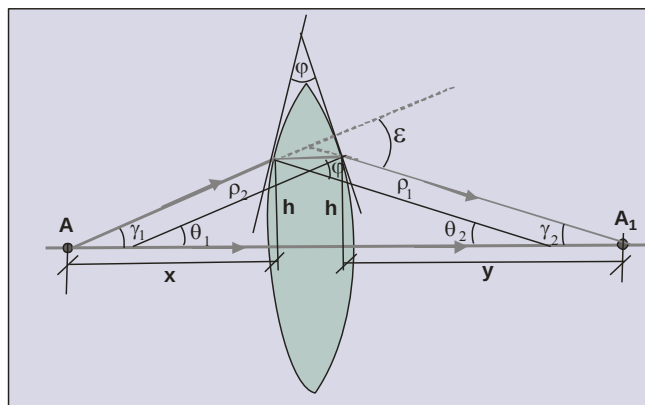
$$\varphi = \Theta_1 + \Theta_2.$$

Wstawiając wartości kątów ε i φ do wzoru (12.11) otrzymamy:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = (\Theta_1 + \Theta_2) \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right).$$

Kąty γ_1 γ_2 Θ_1 Θ_2 zastępujemy tangensami tych kątów:

$$\begin{aligned} \frac{h}{x} + \frac{h}{y} &= \left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2} \right) \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \\ \frac{1}{f} &= \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (12.19)$$



Rys. 12.17. Schemat służący do wyprowadzenia zależności ogniskowej soczewki od współczynnika załamania materiału soczewki

Przykład 12.5 (xx 1977) (xx 1989)

Soczewka szklana umieszczona w powietrzu ma zdolność zbierającą $+D$, umieszczona zaś w pewnym ośrodku ma zdolność zbierającą $-D$. Obliczyć bezwzględny współczynnik załamania ośrodka, jeżeli bezwzględny współczynnik załamania szkła wynosi $n = 1,5$.

Korzystamy z równania (12.19) gdy soczewka jest umieszczona w powietrzu:

$$\frac{1}{f_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

oraz gdy jest umieszczona w ośrodku o bezwzględnym współczynniku załamania n_x :

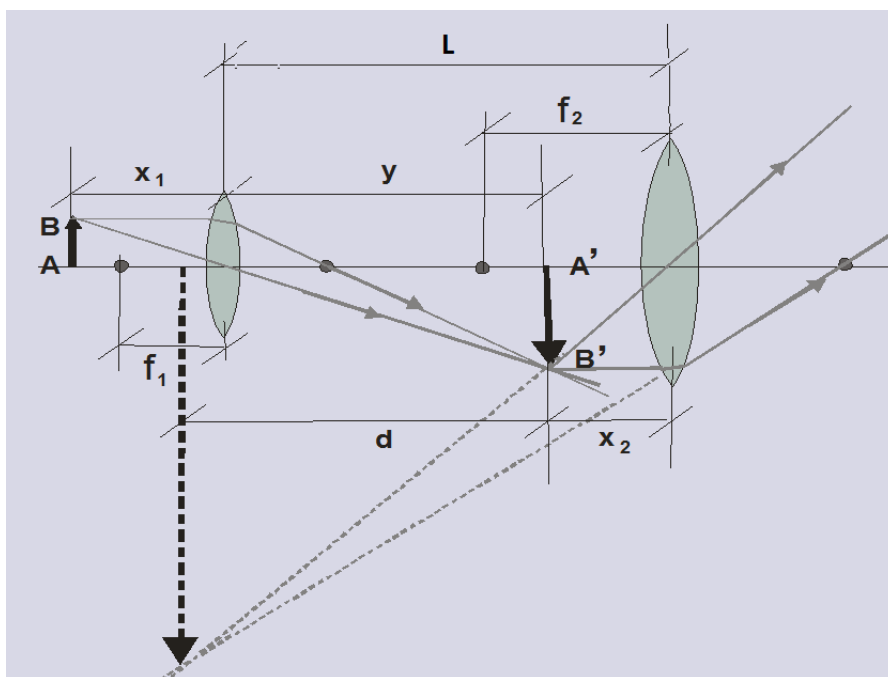
$$\frac{1}{f_2} = \left(\frac{n}{n_x} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Uwzględniając, że $\frac{1}{f_1} = D$ i $\frac{1}{f_2} = -D$ oraz dzieląc powyższe równania stronami wyliczymy n_x :

$$n_x = \frac{n}{2 - n}. \quad n_x = 3.$$

12.9. Mikroskop

Mikroskop składa się głównie z dwóch układów soczewek: obiektywu i okularu. Oglądany przedmiot umieszczany jest w odległości nieco większej od ogniskowej obiektywu. Uzyskany obraz jest rzeczywisty, odwrócony i powiększony. Trafia on w ogniskową drugiego układu soczewek (okularu), który działa jak lupa, dając obraz pozorny, powiększony i prosty oglądanego przedmiotu (**rys. 12.18**).



Rys. 12.18. Oglądany przedmiot AB umieszczamy przed obiektywem w odległości nieco większej od ogniskowej. Uzyskany obraz A'B' oglądamy przez okular jak przez lupę

Powiększenie, jakie uzyskuje się za pomocą mikroskopu jest równe iloczynowi powiększenia obiektywu przez powiększenie okularu:

$$p = \frac{y}{f_{ob}} \cdot \frac{d}{f_{ok}} \quad (12.20)$$

gdzie y – jest odległością pomiędzy obrazem rzeczywistym uzyskanym przez obiektyw a tym obiektywem, którą można traktować w przybliżeniu jako odległość obiektywu od okularu (L),

d – jest odległością dobrego widzenia, a więc odległością obrazu pozornego uzyskanego przez okular do tego okularu.

Wzór (12.20) może być zapisany w postaci:

$$p = \frac{L}{f_{ob}} \cdot \frac{d}{f_{ok}} \quad (12.21)$$

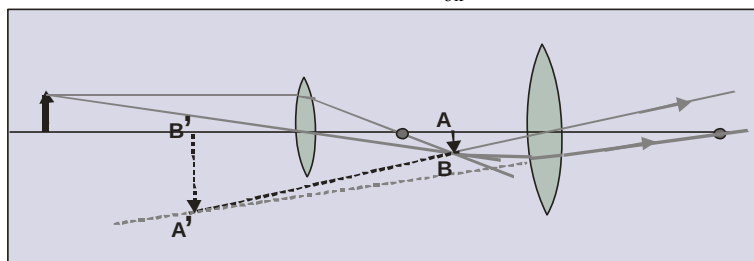
Największe powiększenie, jakie można uzyskać za pomocą mikroskopu optycznego sięga do około 1500 razy. Większych powiększeń nie można uzyskać z powodu tego, że światło ulega ugięciu na oglądanych preparatach i nie wchodzi do obiektywu. Najmniejsza odległość pomiędzy dwoma szczegółami widzianymi jeszcze oddzielnie równa się połowie długości fali, którą oświetlamy dany przedmiot i nazywa się zdolnością rozdzielczą mikroskopu.

12.10. Luneta

Luneta służy do oglądania przedmiotów odległych. Przedmiot obserwowany znajduje się w odległości dużo większej niż podwójna ogniskowa. Ostatecznie otrzymamy obraz pozorny, powiększony i odwrócony względem przedmiotu (**rys.12.19**).

Powiększenie, jakie daje luneta wyraża się stosunkiem ogniskowej obiektywu do ogniskowej okularu:

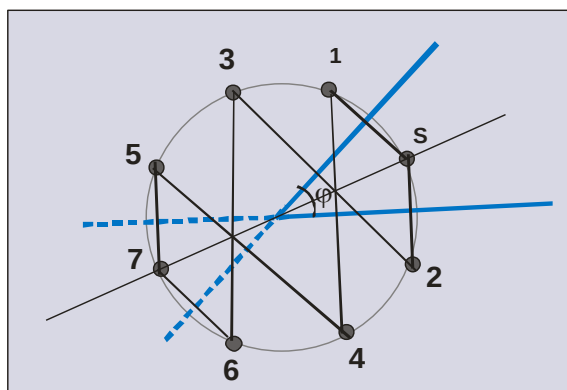
$$p = \frac{f_{ob}}{f_{ok}} \quad (12.22)$$



Rys. 12.19. Zasada działania lunety

Zadania rozwiązane

12.1. Obliczyć liczbę powstałych obrazów, przedmiotu ustawionego pomiędzy dwoma płaskimi zwierciadłami tworzącymi ze sobą kąt $\phi = 45^\circ$.



Rys. 12.20. Dla kąta pomiędzy zwierciadłami $\phi = 45^\circ$ otrzymuje się 7 obrazów punktu S ustawionego pomiędzy tymi zwierciadłami

Korzystamy ze wzoru na kąt między zwierciadłami:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

gdzie n – jest liczbą całkowitą 1, 2, 3, ...

Liczba n związana z ilością obrazów: ilość otrzymanych obrazów jest $n - 1$. Należy, więc określić liczbę n dla danego kąta wyrażonego w mierze łukowej. W naszym przypadku kąt 45° odpowiada $\pi/4$. Będzie więc $n = 8$, a liczba obrazów 7, co jest pokazane na rys. 12. 20: obrazy 1 i 2 dają obrazy 4 i 3, te z kolei dają obrazy 5 i 6, które dają już jeden obraz 7.

Jeżeli n jest parzyste, to jeden obraz znajduje się na dwusiecznej kąta, pod którym ustawione są zwierciadła.

Jeżeli n jest nieparzyste, to dwa obrazy znajdują się w płaszczyźnie zwierciadeł.

12.2. W jakiej odległości od zwierciadła kulistego wklęsłego o promieniu krzywizny $R = 30$ cm, należy umieścić przedmiot aby otrzymać obraz powiększony 3 razy. a) rzeczywisty, b) pozorny.

korzystamy z dwóch równań:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{y}{x} = n.$$

Rozwiązując je ze względu na x otrzymamy:

$$x = \frac{(n + 1)f}{n} \quad x = 20 \text{ cm.}$$

b) Dla obrazu pozornego będziemy mieli następujące dwa równania

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad \frac{y}{x} = n.$$

Rozwiązując je ze względu na x otrzymamy:

$$x = \frac{(n - 1)f}{n} \quad x = 10 \text{ cm.}$$

12.3. (x 1990) Na płytkę szklaną o współczynniku załamania $n = 1,5$ pada promień świetlny. Jaki jest kąt padania tego promienia, jeżeli promień załamany tworzy z promieniem odbitym kąt $\gamma = 120^\circ$.

Wychodzimy ze wzoru na współczynnik załamania światła:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

skąd:

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Kąt załamania β znajdziemy stąd, że suma kątów: odbicia (α) i załamania (β) wynosi $180^\circ - 120^\circ$: $\beta = 60^\circ - \alpha$, mamy więc $\sin \alpha = n \sin(60^\circ - \alpha)$

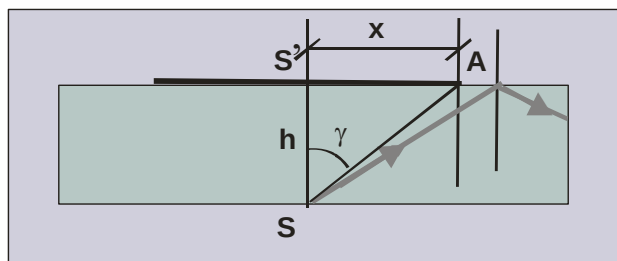
$$\text{lub } \sin \alpha = n(\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) \quad \text{albo} \quad \sin \alpha = n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

Uwzględniając, że $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ i po przekształceniach otrzymamy:

$$\sin \alpha = \frac{n \sqrt{3}}{2\sqrt{1+n+n^2}}, \quad \sin \alpha = 0,6528, \quad \alpha = 42^\circ 44'.$$

12.4. (xx 1982) Punktowe źródło światła umieszczono na głębokości h , w przezroczystej, jednorodnej cieczy o współczynniku załamania n . Obliczyć jaka powinna być minimalna średnica nieprzezroczystego krążka umieszczonego na powierzchni cieczy, ażeby światło emitowane przez źródło nie przechodziło przez tę powierzchnię.

Przyjąć, że prosta poprowadzona ze źródła światła prostopadłe do powierzchni cieczy przechodzi przez środek krążka (**rys. 12.21**).



Rys. 12.21. Krążek powinien mieć taką powierzchnię, żeby wszystkie promienie padające poza krążek uległy całkowitemu wewnętrznemu odbiciu

Z trójkąta S, S', A wyliczamy szukany promień krążka x :

$$x = h \operatorname{tg} \gamma$$

gdzie γ – jest kątem granicznym. Tangens tego kąta wyrażamy w funkcji sinusa:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}},$$

ale:

$$\sin \gamma = \frac{1}{n}.$$

Mamy, więc:

$$x = \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}.$$

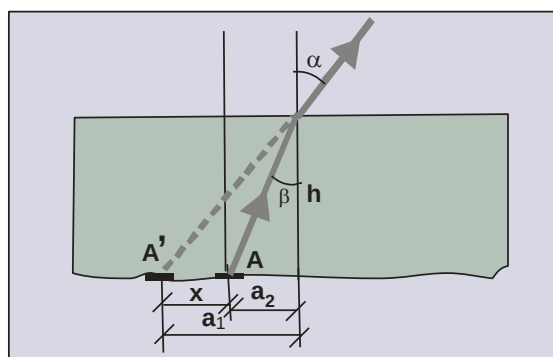
Mamy, więc:

$$x = \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}.$$

Natomiast szukana średnica krążka wyrazi się wzorem:

$$d = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

12.5. (xx 1987) Na dnie rzeki leży moneta. Człowiek chce ją potrafić kijem i celując, trzyma go pod kątem $\alpha = 30^\circ$ względem kierunku pionowego. Obliczyć w jakiej odległości x od monety kij utkwi w dnie rzeki, jeżeli jej głębokość wynosi $h = 1$ m, a współczynnik załamania wody względem powietrza jest $n = 1,3$ (Rys. 12.22).



Rys. 12.22. Na skutek zmiany kierunku biegu promieni świetlnych przechodzących z wody do powietrza, widzimy monetę w punkcie A' a nie gdzie ona się znajduje w punkcie A

Szukany odcinek x jest różnicą odcinków a_1 i a_2 :

$$x = a_1 - a_2$$

gdzie

$$a_1 = h \operatorname{tg} \alpha$$

$$a_2 = h \operatorname{tg} \beta.$$

Mamy, więc:

$$x = h (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta).$$

$\operatorname{tg} \beta$ należy wyrazić za pomocą $\sin \beta$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}.$$

Natomiast $\sin \beta$ należy wyrazić za pomocą współczynnika załamania światła:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Szukana odległość x wyrazi się więc wzorem:

$$x = h \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \quad x = 15 \text{ cm.}$$

12.6. (xx 1975) W jakiej odległości od cienkiej soczewki o ogniskowej $f = 20 \text{ cm}$ należy umieścić przedmiot, żeby odległość między przedmiotem a jego rzeczywistym obrazem była najmniejsza.

Należy wyrazić odległość między przedmiotem a jego obrazem w funkcji odległości przedmiotu od soczewki (x):

$$L = x + y$$

gdzie y – jest odległością obrazu od soczewki, którą wyznaczamy z zasadniczego wzoru dla soczewek (12.14):

$$y = \frac{f x}{x - f}.$$

Mamy, więc:

$$L = \frac{x^2}{x - f}.$$

Następnie, należy obliczyć pochodną odległości L po x i porównać ją do zera:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{2x(x-f) - x^2}{(x-f)^2}$$

Wystarczy porównać licznik do zera. Otrzymamy wtedy szukaną wielkość x :

$$x = 2f.$$

$$x = 40 \text{ cm.}$$

12.7. (xx 1976) Wysokość obrazu otrzymanego na ekranie za pomocą soczewki skupiającej wynosi $A_1 = 4 \text{ cm}$. Nie zmieniając odległości między przedmiotem i ekranem przesunięto soczewkę tak, że otrzymano drugi obraz o wysokości $A_2 = 1 \text{ cm}$ (rys. 12.23). Obliczyć wysokość przedmiotu.

Z definicji powiększenia, jakie daje soczewka możemy napisać:

$$\frac{A_1}{h} = \frac{y_1}{x_1} \quad \frac{A_2}{h} = \frac{y_2}{x_2}$$

Po pomnożeniu powyższych równań stronami, otrzymamy:

$$\frac{A_1 A_2}{h^2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2}.$$

W celu znalezienia szukanej wielkości h korzystamy z zasadniczego wzoru dla soczewek dla obu przypadków:

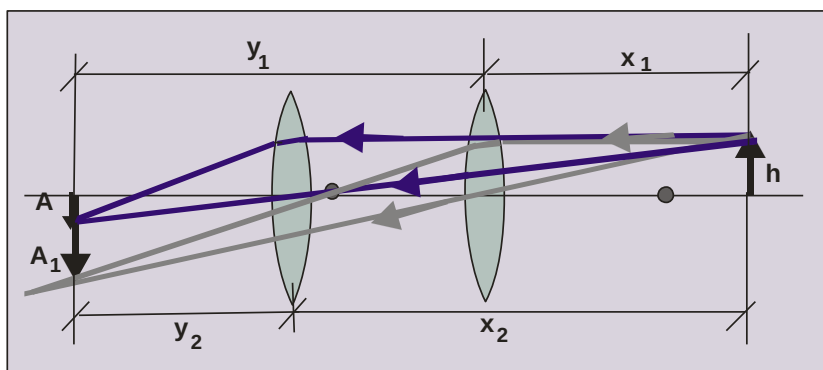
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{f} \qquad \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{f}.$$

Przez porównanie lewych stron równań będziemy mieli:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2}.$$

Następnie grupujemy wyrazy x po jednej stronie równania, a wyrazy y po drugiej:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2}.$$



Rys. 12.23. Po przesunięciu soczewki o odcinek $x_2 - x_1$ lub $y_1 - y_2$ otrzymamy znowu ostry obraz na ekranie ale pomniejszony

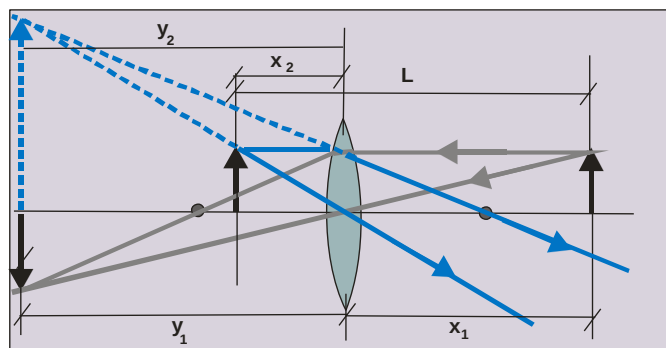
Z **rys. 12.23.** widać, że $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$ (odległość pomiędzy dwoma położeniami soczewki).

Mamy więc: $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 1$ lub $\frac{A_1}{h} \cdot \frac{A_2}{h} = 1$

skąd: $h = \sqrt{A_1 A_2}$ $h = 2 \text{ cm}.$

12.8. (xx 1981) Odległość pomiędzy dwoma punktowymi źródłami światła wynosi $L = 24 \text{ cm}$. Obliczyć, w którym miejscu odcinka łączącego dwa źródła światła należy postawić soczewkę skupiającą o ogniskowej $f = 9 \text{ cm}$, żeby obrazy obu źródeł powstały w tym samym punkcie.

Aby obrazy obu przedmiotów utworzyły się w tym samym miejscu to jeden obraz musi być rzeczywisty a drugi pozorny (**rys. 12.24**).



Rys.12.24. Soczewkę należy tak umieścić pomiędzy dwoma przedmiotami, ażeby jeden obraz był rzeczywisty a drugi pozorny

Możemy napisać:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{y_2},$$

ale $y_1 = y_2$ stąd mamy:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{f} \quad \text{lub} \quad \frac{2}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

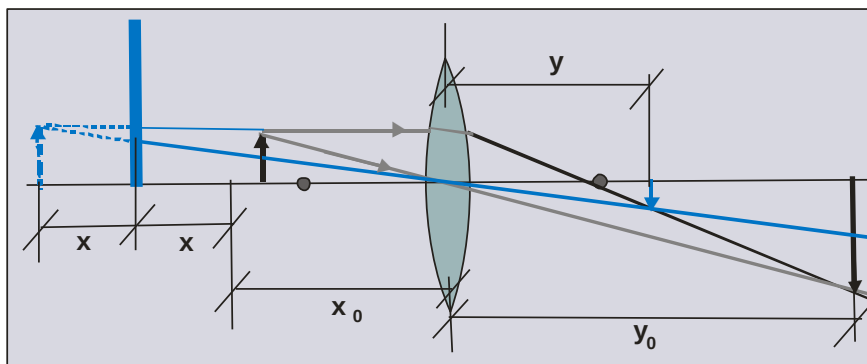
Suma odległości przedmiotów od soczewki wynosi L :

$$x_1 + x_2 = L$$

Mamy więc $\frac{2}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{L - x_1}$ i po przekształceniu:

$$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 2fL}}{2} \quad x_1 = 18 \text{ cm}, \quad x_2 = 6 \text{ cm}.$$

12.9. (xx 1984) Między zwierciadłem płaskim a soczewką ustawiono płonącą świecę w odległości $x_0 = 1 \text{ m}$ od soczewki. Soczewka daje dwa rzeczywiste obrazy świecy: jeden powiększony dwa razy, drugi zmniejszony dwa razy. Obliczyć odległość pomiędzy świecą i zwierciadłem (**rys. 12.25**).



Rys. 12.25. Obrazy uzyskane za pomocą soczewki i zwierciadła płaskiego są rzeczywiste i odwrócone. Jeden powiększony a drugi pomniejszony

Dla dwóch obrazów świecy piszemy dwa równania:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{2x + x_0} + \frac{1}{y}.$$

Korzystając ze wzorów na powiększenie, możemy napisać:

$$\frac{y_0}{x_0} = p_1 \quad \text{stąd} \quad y_0 = p_1 x_0$$

$$\frac{y}{2x + x_0} = p_2 \quad \text{stąd} \quad y = p_2 (2x + x_0).$$

Mamy, więc dwa równania dla dwóch obrazów świecy:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{p_1 x_0} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{2x + x_0} + \frac{1}{p_1 (2x + x_0)}.$$

Przez porównanie obu stron powyższych dwóch równań otrzymamy:

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{p_1 x_0} = \frac{1}{2x + x_0} + \frac{1}{p_1 (2x + x_0)} \quad \text{lub} \quad \frac{p_1 + 1}{p_1 x_0} = \frac{p_2 + 1}{p_2 (2x + x_0)}.$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy szukaną odległość między świecą a zwierciadłem:

$$x = \frac{x_0 (p_1 - p_2)}{2(p_1 + 1)p_2} \quad x = 0,5 \text{ m}.$$

12.10. (x 1986) Za pomocą szklanej soczewki płasko-wypukłej o promieniu krzywizny $R = 0,27 \text{ m}$ otrzymano obraz rzeczywisty, powiększony $p = 9$ razy.

Odległość przedmiotu od ekranu wynosi $d = 6$ m. Obliczyć współczynnik załamania szkła, materiału soczewki.

Wychodzimy ze wzoru określającego zależność ogniskowej soczewki od współczynników załamania materiału soczewki i współczynnika załamania ośrodka:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (n-1) \frac{1}{R}.$$

Ze wzoru na powiększenie mamy: $y = p \cdot x$.

Będzie, więc
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{p \cdot x} = (n-1) \frac{1}{R}.$$

Uwzględniając, że $x = p \cdot x = d$, otrzymamy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi, których rozwiązanie daje szukaną wartość współczynnika n :

$$n = 1 + \frac{R(p+1)^2}{p \cdot d} \quad n = 1,5.$$

12.11. (x 1990) Zdolność skupiająca dwuwypukłej soczewki w powietrzu wynosi $Z_1 = 5$ D. Obliczyć współczynnik załamania materiału, z którego zrobiona została soczewka, jeżeli bezwzględny współczynnik załamania wody wynosi $n_w = 1,33$ a powietrza $n_p = 1$.

Piszemy dwa równania: gdy soczewka jest umieszczona w powietrzu i w wodzie:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_p} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_w} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Uwzględniając, że $\frac{1}{f_1} = Z_1$ $\frac{1}{f_2} = Z_2$ oraz dzieląc powyższe dwa równania stronami, otrzymamy:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\left(\frac{n}{n_p} - 1 \right)}{\left(\frac{n}{n_w} - 1 \right)}.$$

Stąd wyliczymy szukany współczynnik załamania światła n :

$$n = (Z_1 - Z_2) \frac{n_w \cdot n_p}{Z_1 \cdot n_p - Z_2 \cdot n_w} \quad n = 1,53.$$

12.12. (x 1985) Przed soczewką umieszczono przedmiot i uzyskano jego obraz rzeczywisty czterokrotnie powiększony. Obliczyć odległość przedmiotu i obrazu od soczewki, jeżeli wiadomo, że stanowi ona układ sklejonych ze sobą soczewek płasko-wypukłych o zdolnościach zbierających $D_1 = 2D$ i $D_2 = 3D$

Układ soczewek ma zdolność zbierającą równą sumie zdolności skupiających obu soczewek. Możemy, więc napisać:

$$D_1 + D_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Drugie równanie otrzymamy ze wzoru na powiększenie: $\frac{y}{x} = p$.

Wyznaczając y z równania drugiego i wstawiając do pierwszego otrzymamy:

$$D_1 + D_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{p x}.$$

Po odpowiednich przekształceniach wyliczymy szukane wielkości odległości przedmiotu i obrazu od soczewki (x i y):

$$x = \frac{p+1}{p(D_1 + D_2)}, \quad x = 0,25 \text{ m.} \quad y = \frac{p+1}{D_1 + D_2}, \quad y = 1 \text{ m.}$$

12.13. (x 1987) Krótkowidz widzi dobrze z odległości $x_1 = 16 \text{ cm}$. Obliczyć ogniskową soczewek, jakich powinien on używać, żeby mógł widzieć dobrze z odległości $x_2 = 24 \text{ cm}$. Dla dobrego widzenia z odległości x_1 możemy napisać równanie:

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y},$$

gdzie f_0 – jest ogniskową soczewki oka, y – odległością soczewki od siatkówki oka (ekranu).

Dla odległości x_2 – większej, obraz powstaje przed siatkówką, więc soczewki (okulary) mają go przesunąć na dawne miejsce. Równanie teraz będzie miało postać:

$$\frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_x} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y}.$$

Rugując z powyższych dwóch równań wyrażenie $\frac{1}{f_0}$ będziemy mieli:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y},$$

skąd wyliczymy f_x :
$$f_x = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2}. \quad f_x = -48 \text{ cm}.$$

12.14. (xx 1985) Cienki krążek o powierzchni $A_0 = 32 \text{ cm}^2$ ustawiono na osi optycznej soczewki skupiającej, prostopadle do osi i uzyskano jego rzeczywisty obraz o powierzchni $A_1 = 2 \text{ cm}^2$. Nie zmieniając odległości przedmiotu od soczewki zanurzono układ ten do wody. Obliczyć powierzchnię ponownie otrzymanego obrazu, jeżeli wiadomo, że ogniskowa soczewki po zanurzeniu w wodzie zwiększyła się $k = 4$ razy.

Piszemy dwa równania: dla soczewki znajdującej się w powietrzu oraz gdy znajduje się ona w wodzie:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y_1}, \quad \frac{1}{kf} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y_2},$$

gdzie y_1 i y_2 – są odległościami obrazu w pierwszym i w drugim przypadku od soczewki. Odległości te wyrażamy w funkcji powierzchni:

$$\frac{y_1}{x} = \frac{h_1}{h_0}$$

gdzie h_1 jest średnicą krążka o powierzchni A_1 .

Mamy więc:
$$\frac{y_1}{x} = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \quad \text{skąd} \quad y_1 = x \sqrt{\frac{A_1}{A_0}}.$$

Analogicznie:
$$y_2 = x \sqrt{\frac{A_x}{A_0}}, \quad \text{gdzie} \quad A_0 = \frac{\pi h_0^2}{4}.$$

Powierzchnia szukana:
$$A_x = \frac{\pi h_x^2}{4}.$$

Będziemy mieli:
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{A_0}{A_1}}, \quad \frac{1}{kf} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{A_0}{A_x}}.$$

Wyznaczając z pierwszego równania wyrażenie $\frac{1}{f}$ i wstawiając do równania drugiego, otrzymamy równania, z którego wyliczymy szukaną powierzchnię A_x .

$$A_x = \frac{k^2 A_0}{\left(1 + \sqrt{\frac{A_0}{A_1}} - k\right)^2} \quad A_x = 512 \text{ cm}^2.$$

12.15. (xx 1981) Za pomocą soczewki skupiającej otrzymano w powietrzu obraz świecącego przedmiotu pomniejszony trzy razy. Po zanurzeniu całego układu w wodzie, bez zmiany odległości przedmiotu od soczewki powstaje obraz powiększony trzy razy. Obliczyć bezwzględny współczynnik załamania światła w szkle soczewki, jeżeli bezwzględny współczynnik załamania wody wynosi $n = 4/3$.

Dla obu przypadków piszemy dwa równania:

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_1} = (n_x - 1) \left(\frac{2}{R} \right) \quad \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_2} = \left(\frac{n_x}{n} - 1 \right) \left(\frac{2}{R} \right).$$

Z definicji powiększenia mamy: $y_1 = p_1 x_0$ $y_2 = p_2 x_0$

Będzie więc: $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{p_1 x_0} = (n_x - 1) \left(\frac{2}{R} \right)$ $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{p_2 x_0} = \left(\frac{n_x}{n} - 1 \right) \left(\frac{2}{R} \right)$.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i po podzieleniu stronami powyższych dwóch równań otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy n_x .

$$n_x = \frac{n(p_2 - p_1)}{p_2(1 + p_1) - p_1(1 + p_2)n} \quad n_x = 1,6.$$

12.16. (xx 1980) Ogniskowa obiektywu mikroskopu wynosi $f_1 = 5$ mm, a okularu $f_2 = 2$ cm. Przedmiot znajduje się w odległości $x_1 = 5,2$ mm od obiektywu. Obliczyć liniowe powiększenie mikroskopu. Odległość dobrego widzenia wynosi $d = 25$ cm (**rys.12.18**).

Korzystamy ze wzoru na powiększenie mikroskopu:

$$p = \frac{y}{x_1} \frac{d}{x_2}.$$

Odległość y (rys.12.18) wyliczymy z podstawowego równania dla soczewek w odniesieniu do obiektywu:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x_1} \quad \text{skąd:} \quad y = \frac{f_1 x_1}{x_1 - f_1}.$$

Odległość x_2 wyznaczmy z równania dla okularu:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{d} \quad \text{skąd:} \quad x_2 = \frac{f_2 d}{d + f_2}.$$

Szukane powiększenie wyrazi się wzorem:

$$p = \frac{f_1 (d + f_2)}{f_2 (x_1 - f_1)} \quad p = 337,5.$$

Zadania uzupełniające

12.17. Obliczyć ile powstaje obrazów, jeżeli umieścimy przedmiot pomiędzy dwoma zwierciadłami płaskimi tworzącymi ze sobą kąt a) 120° i b) 72° .

Odp. a) 2 obrazy, b) 4 obrazy.

12.18. Igła o długości $L = 5$ cm ustawiona została przed zwierciadłem kulistym, wklęsłym o promieniu krzywizny $R = 15$ cm prostopadle do osi optycznej w odległości $x = 10$ cm od zwierciadła. Obliczyć, gdzie powstanie obraz i jaki będzie jego wymiar.

$$\text{Odp. } y = \frac{R x}{2x - R} \quad y = 30 \text{ cm.} \quad h = \frac{R}{2x - R} L \quad h = 15 \text{ cm.}$$

12.19. Ze źródła światła wychodzą dwa promienie, które tworzą ze sobą kąt prosty, a padając na płaską powierzchnię cieczy załamują się odpowiednio pod kątami $\beta_1 = 30^\circ$ i $\beta_2 = 45^\circ$. Obliczyć współczynnik załamania tej cieczy.

$$\text{Odp. } n = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2}} \quad n = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

12.20. Obliczyć pozorną głębokość rzeki, jeżeli głębokość prawdziwa wynosi $h = 1$ m i jeżeli spoglądamy na powierzchnię rzeki pod kątem $\alpha = 45^\circ$, a współczynnik załamania wody wynosi $n = 4/3$.

$$\text{Odp. } x = h \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad x = 63 \text{ cm.}$$

12.21. Wyznaczyć wielkość przesunięcia promienia świetlnego po przejściu przez płytkę równoległościenną o grubości d w funkcji kąta padania α , jeżeli współczynnik załamania materiału płytki wynosi n .

$$\text{Odp. } s = d \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

12.22. (xx 1975) W odległości $d = 1$ m od ekranu ustawiono żarówkę. Obliczyć, jaki warunek powinna spełniać ogniskowa soczewki, która ustawiona między żarówką a ekranem, może dać na ekranie ostry obraz włókna żarówki.

$$\text{Odp. } f \leq \frac{d}{4}.$$

12.23. (xx 1981) Paląca się świeca znajduje się w odległości L od ekranu. Umieszczając pomiędzy ekranem a świecą soczewkę o ogniskowej f , można otrzymać na ekranie ostry obraz świecy przy dwóch położeniach soczewki. Obliczyć odległość pomiędzy tymi dwoma położeniami.

Odp. $\Delta x = \sqrt{L^2 - 4 L f}$.

12.24. Soczewka skupiająca daje ostry obraz przedmiotu na ekranie w pewnej odległości od soczewki. Między soczewką a ekranem ustawiono szklaną płytkę równoległościenną o grubości $d = 3$ cm i współczynniku załamania $n = 1,5$. Obliczyć, o ile należy przesunąć ekran, aby otrzymać na nim ponownie ostry obraz.

Odp. $x = d \frac{(n-1)}{n}$ $x = 1$ cm.

12.25. Soczewka płasko-wypukła o promieniu krzywizny $R = 6$ cm wytwarza obraz rzeczywisty powiększony $k = 10$ razy. Współczynnik załamania światła w szkłe wynosi $n = 1,5$. Obliczyć odległość przedmiotu od soczewki i obrazu od soczewki.

Odp. $x = \frac{R(k+1)}{k(n-1)}$ $x = 13,5$ cm, $y = \frac{R(k+1)}{n-1}$ $y = 135$ cm.

12.26. (xx 1977) Przedmiot ustawiono w odległości a od soczewki o ogniskowej f . Otrzymano obraz rzeczywisty w pewnej odległości od soczewki. Nie zmieniając odległości przedmiotu od soczewki złożono ją z drugą soczewką. Rzeczywisty obraz uzyskany za pomocą tego układu powstaje w odległości dwa razy większej niż w przypadku jednej soczewki. Obliczyć ogniskową drugiej soczewki i określić, czy jest ona zbierająca czy rozpraszająca.

Odp. $f = -\frac{2 a f}{a - f}$ $f < 0$ (rozpraszająca)

12.27. (xx 1990) Mamy dwie cienkie symetryczne soczewki: jedna dwuwypukła o współczynniku załamania $n_1 = 1,7$, a druga dwuwypukła o współczynniku załamania $n_2 = 1,51$. Obie soczewki mają jeden i ten sam promień krzywizny $R = 10$ cm. Soczewki są złożone razem i umieszczone w wodzie. Obliczyć ogniskową układu, jeżeli bezwzględny współczynnik załamania wody wynosi $n_w = 1,33$

Odp. $f_x = \frac{R n_w}{2(n_1 + n_2) - 4 n_w}$ $f_x = 12,1$ cm.

12.28. (x 1989) O ile zmieni się zdolność skupiająca soczewki oka ludzkiego o odległości dobrego widzenia $d = 25$ cm, jeżeli człowiek przenosi wzrok z książki, którą czytał, na rysunek wiszący w odległości $d = 2$ m od jego oczu. Przyjmujemy, że w obu przypadkach powstaje jednakowo ostry obraz na siatkówce oka.

$$\text{Odp.} \quad \Delta D = \frac{d - d_1}{d d_1} \quad \Delta D = -3,5 \text{ dioptrii.}$$

12.29. (x 1989) Zdolność skupiająca soczewki szklanej w powietrzu wynosi D_1 dioptrii. Obliczyć, ile wynosi ogniskowa tej soczewki w wodzie. Bezwzględny współczynnik załamania szkła soczewki jest równy n a wody n_1 .

$$\text{Odp.} \quad f_x = \frac{(n - 1) n_1}{(n - n_1) D_1}$$

12.30. (xx 1980) Szklana soczewka skupiająca daje na ekranie obraz przedmiotu zmniejszony pięciokrotnie. Nie zmieniając odległości między przedmiotem i soczewką, zanurzone cały układ w wodzie i przesunięto ekran tak, iż ponownie powstał ostry obraz. Obliczyć stosunek wysokości tego obrazu do wysokości przedmiotu, jeżeli bezwzględny współczynnik załamania szkła, wody i powietrza wynosi odpowiednio: $n_1 = 3/2$, $n_2 = 4/3$, $n_3 = 1$

$$\text{Odp.} \quad \frac{h_2}{h_o} = \frac{p (n_1 - n_3) n_2}{p n_1 (n_3 - n_2) + n_3 (n_1 - n_2)} \quad \frac{h_2}{h_o} = 2.$$

12.31. Obliczyć ogniskową soczewki zbierającej, jeżeli iloczyn odległości przedmiotu od pierwszego ogniska przez odległość drugiego ogniska od obrazu wynosi L .

$$\text{Odp.} \quad f = \sqrt{L}.$$

12.32. (xx 1979) Aparat fotograficzny daje możliwość uzyskania ostrego zdjęcia przedmiotu znajdującego się w odległości nie mniejszej niż $x_0 = 1,5$ m od obiektywu. Nie regulując aparatu, na jego obiektyw nałożono dodatkową soczewkę o zdolności skupiającej $Z = 1$ D. Obliczyć, w jakiej najmniejszej odległości od obiektywu może obecnie znajdować się przedmiot, aby jego zdjęcie było ostre.

$$\text{Odp.} \quad x = \frac{x_0}{1 + Z x_0} \quad x = 0,6 \text{ m.}$$

Zadania testowe

12.33. (x 1990) Promień świetlny pada na zwierciadło płaskie, prostopadle do powierzchni tego zwierciadła. Ile wynosi kąt padania i kąt odbicia?

12.34. Ile uzyskamy obrazów przedmiotu ustawionego pomiędzy dwoma lustrami płaskimi tworzącymi ze sobą kąt prosty?

12.35. (xx 1981) Jaką najmniejszą wysokość musi mieć pionowe zwierciadło płaskie, aby człowiek o wysokości H mógł zobaczyć się w nim cały?

12.36. (x 1986) (xx 1998) W jakiej odległości od zwierciadła kulistego wklęsłego o promieniu krzywizny R należy umieścić przedmiot, ażeby otrzymać obraz pozorny? Narysować bieg promieni.

12.37 (xx 1990) (xx 1998) Punktowe źródło światła umieszczono na osi optycznej w odległości $x = 5$ cm od zwierciadła kulistego wklęsłego i po odbiciu uzyskano wiązkę promieni równoległych. Jaki jest promień krzywizny tego zwierciadła?

12.38. (xx 1986) W jakiej odległości od zwierciadła kulistego wklęsłego o promieniu krzywizny R , należy umieścić przedmiot, ażeby wielkość otrzymanego obrazu była równa wielkości przedmiotu? Narysować bieg promieni.

12.39. (xx 1988) Czy zmieni się ogniskowa zwierciadła kulistego po zanurzeniu go do wody?

12.40. Punkt świetlny mieści się na osi głównej zwierciadła kulistego wklęsłego w środku pomiędzy ogniskiem a środkiem krzywizny. Gdzie będzie się znajdować obraz?

12.41. (x 1990) Jaki obraz powstaje od przedmiotu ustawionego przed zwierciadłem kulistym wypukłym? Wykonać rysunek.

12.42. Kąt padania na płaszczyznę ograniczającą dwa ośrodki wynosi $\alpha = 60^\circ$, kąt załamania $\beta = 45^\circ$. Jaki jest sinus kąta granicznego?

12.43. (x 1990) Jakie warunki muszą być spełnione, żeby promień świetlny na granicy powietrze-woda uległ całkowitemu wewnętrznemu odbiciu?

12.44. Kąt graniczny wynosi dla pewnej substancji $\gamma = 45^\circ$. Jaka jest wartość współczynnika załamania dla tej substancji?

12.45. (x 1989) Narysować przebieg promienia światła białego przez pryzmat szklany.

12.46. Bezwzględny współczynnik załamania światła dla wody wynosi $n_1 = 1,33$ dla szkła natomiast $n_2 = 1,5$. Jaki jest współczynnik załamania szkła względem wody?

12.47. (xx 1983) (xx 1998) Współczynnik załamania światła w szkłe wynosi $n = 1,5$. Z jaką prędkością rozchodzi się światło w szkłe, jeżeli wiadomo, że prędkość światła w próżni wynosi $V_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s ?

12.48. (xx 1984) Prędkość światła w szkłe wynosi V_1 , a w wodzie V_2 ($V_1 < V_2$). Jaki jest sinus kąta granicznego?

12.49. (xx 1983) Dla której barwy czerwonej czy fioletowej kąt graniczny jest mniejszy?

12.50. (x 1985) Podać określenie kąta granicznego w zjawisku całkowitego wewnętrznego odbicia, wyrazić go w zależności od współczynnika załamania światła.

12.51. (xx 1987) Promień światła przechodzi ze szkła do wody. Jaki jest kąt graniczny, jeżeli bezwzględny współczynnik załamania szkła wynosi n_{sz} , a wody n_w .

12.52. (xx 1989) (xx 1998) Długość fali światła czerwonego w próżni wynosi $\lambda_0 = 0,75 \mu\text{m}$. Określić długość fali tego światła w szkło o współczynniku załamania $n = 1,5$.

12.53. Soczewka wklęsła daje obraz zmniejszony dwa razy, gdy odległość przedmiotu od soczewki wynosi $x = 1 \text{ m}$. Jaka jest ogniskowa tej soczewki?

12.54. (xx 1981) Czy ogniskowa soczewki ulegnie zmianie po zanurzeniu jej do wody?

12.55. (xx 1990) Dla których spośród wymienionych barw ogniskowa soczewki jest najdłuższa: czerwonej, fioletowej, zielonej, żółtej czy niebieskiej?

12.56. (xx 1982) Jaka jest zdolność skupiająca dwóch soczewek?

12.57. (xx 1990) Czy zdolność skupiająca soczewek zależy od długości fali światła przechodzącego przez soczewkę?

12.58. (xx 1983) Szklaną soczewkę dwuwypukłą umieszczono w cieczy, w której prędkość rozchodzenia się światła jest mniejsza niż w szkło. Czy w tych warunkach soczewka jest skupiająca czy rozpraszająca?

12.59. (x 1987) Czy promień świetlny może ulec całkowitemu wewnętrznemu odbiciu przy przejściu z powietrza do wody? Uzasadnić odpowiedź.

12.60. (x 1985) Czy soczewka dwuwypukła może być rozpraszająca?

12.61. (xx 1986) Dwie soczewki płasko-wypukłe, każda o ogniskowej $f = 20 \text{ cm}$ sklejono ze sobą. Ile wynosi zdolność skupiająca powstałej w ten sposób soczewki.

12.62. (xx 1987) W jaki sposób można wyznaczyć doświadczalnie ogniskową soczewki rozpraszającej?

12.63. (xx 1988) Jak należy ustawić dwie cienkie soczewki skupiające o ogniskowych f_1 i f_2 , żeby wiązka promieni równoległych jednobarwnych przechodząc kolejno przez te dwie soczewki i po wyjściu za układ stała się znowu wiązką równoległą?

12.64. (x 1990) Czy o soczewce dwuwypukłej można powiedzieć, że jest ona zawsze soczewką skupiającą?

12.65. (x 1990) Kiedy zdolność skupiająca oka jest największa – przy oglądaniu przedmiotów bliskich czy dalekich?

12.66. (x 1987) W jakiej odległości od soczewki skupiającej należy umieścić przedmiot, aby otrzymać jego obraz pozorny? Wykonać konstrukcję obrazu.

12.67. (x 1991) Jaka jest ogniskowa soczewki o zdolności skupiającej wynoszącej 25D?

12.68. Jaka ma być ogniskowa lupy żeby powiększała $n = 10$ razy przy widzeniu z dobrej odległości $d = 25 \text{ cm}$?

12.69. Jaki jest stosunek zdolności zbierających dwóch soczewek o tych samych promieniach krzywizny, jeżeli jedna jest ze szkła a druga z diamentu? Współczynnik załamania szkła jest $n_s = 1,5$ a diamentu $n_d = 2,5$.

12.70. (xx 1981) Na powierzchnię szkła pada od wewnątrz promień światła żółtego pod kątem α granicznym dla tej długości fali. Jak zachowa się padający pod tym samym kątem α promień światła czerwonego, a jak fioletowego?

XIII. OPTYKA FIZYCZNA

13.1. Wielkości i jednostki fotometryczne

Fotometria zajmuje się tą częścią energii promienistej wysyłanej przez źródło światła, która wywołuje wrażenie świetlne w naszym oku. Wprowadzone zostały następujące wielkości: natężenie źródła światła, zwane też światłością. Jest to ilość energii świetlnej emitowanej przez źródło światła, prostopadle do powierzchni danego źródła, która wywołuje wrażenie świetlne. Jednostką tej wielkości jest jedna kandela. Definicja jej została podana w rozdziale I.

Drugą wielkością fotometryczną jest strumień świetlny. Jest to ilość energii świetlnej wysyłanej przez punktowe źródło światła o natężeniu I w kąt bryłowy $d\omega$ co można zapisać

$$d\Phi = I d\omega \quad (13.1)$$

Ponieważ kąt bryłowy wyraża się wzorem:

$$d\omega = \frac{dS}{r^2}$$

gdzie dS – jest podstawą stożka, którego wierzchołek znajduje się w punktowym źródle światła,

r – jest apotemą stożka i jednocześnie promieniem kuli, w środku której znajduje się źródło światła,

więc wzór (13.1) przyjmie teraz postać:

$$d\Phi = I \frac{dS}{r^2}. \quad (13.2)$$

Jednostką strumienia jest lumen. Jest to ilość energii świetlnej emitowanej w jednostkowy kąt bryłowy (steradian) przy punktowym źródle światła o natężeniu jednej kandel

Przykład 13.1

Żarówka o natężeniu $I = 150$ kandel wisi w odległości $h = 1,8$ m nad środkiem stołu, którego blat jest w kształcie koła o średnicy $d = 0,6$ m. Obliczyć strumień świetlny oświetlający blat stołu.

Całkowity strumień świetlny obliczamy ze wzoru (13.2):

$$d\Phi = I \frac{S}{r^2}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych: $I = 150$ cd, $S = \pi \left(\frac{0,6}{2} \right)^2 \text{ m}^2$, $r = 1,83$ m, otrzymamy:

$$\Phi = 13 \text{ lm}.$$

Trzecią wielkością fotometryczną jest natężenie oświetlenia lub oświetlenie. Jest to stosunek strumienia świetlnego padającego na daną powierzchnię do wielkości tej powierzchni:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (13.3)$$

Jednostką tej wielkości jest lux. Jest to oświetlenie, które powstaje gdy strumień świetlny równy jednemu lumenowi pada na powierzchnię 1 m². Np. przy czytaniu lub pisaniu oświetlenie powinno wynosić od 75 do 100 lx.

Podstawiając za $d\Phi$ wartość ze wzoru (13.2) do wzoru (13.3) będziemy mieli:

$$E = \frac{1}{r^2}$$

dla prostopadłego padania strumienia świetlnego.

Przy ukośnym padaniu promieni świetlnych pod kątem φ zawartym pomiędzy prostopadłą do powierzchni a kierunkiem biegu promieni, natężenie oświetlenia wyrazi się wzorem:

$$E = \frac{1}{r^2} \cos \varphi \quad (13.4)$$

Natężenie oświetlenia jest więc odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od źródła światła.

W przypadku dwóch powierzchni oddalonych o r_1 i r_2 od jednego punktowego źródła światła mamy następującą zależność:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (13.5)$$

Natomiast, gdy oświetlenie pochodzące od obu źródeł jest jednakowe, to wtedy natężenia tych źródeł są wprost proporcjonalne do kwadratu odległości, co wyraża się wzorem:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (13.6)$$

Na tej zasadzie działają fotometry, pozwalające określić natężenie źródła światła, gdy znane jest natężenie jednego źródła, uważanego za wzorcowe.

13.2. Kwanty promieniowania

Promieniowanie elektromagnetyczne, tak świetlne, jak i inne polega, według teorii korpuskularnej – na rozchodzeniu się pewnych porcji energii zwanych kwantami lub fotonami. Energia fotonu zależy od częstości drgań i jest wprost proporcjonalna do tej częstości. Wyraża się, więc wzorem:

$$E = h \nu . \quad (13.7)$$

gdzie $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ i nazywa się stałą Plancka,

ν – jest częstością drgań promieniowania, która jest odwrotnie proporcjonalna do długości fali elektromagnetycznej i wyraża się wzorem:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} . \quad (13.8)$$

gdzie $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ jest prędkością światła.

Wzór (13.7) przyjmie teraz postać:

$$E = h \frac{c}{\lambda} . \quad (13.9)$$

Ponieważ kwant promieniowania biegnie z prędkością światła, więc nie może posiadać masy spoczynkowej, lecz tylko masę jako równoważnik energii. Kwant promieniowania nigdy nie występuje w spoczynku.

Kwant promieniowania posiada też swój pęd określony jako stosunek jego energii do prędkości:

$$p = \frac{E}{c} . \quad (13.10)$$

Po uwzględnieniu wzorów (13.7) i (13.8) pęd kwantu wyrazi się wzorem:

$$p = \frac{h}{\lambda} . \quad (13.11)$$

P r z y k ł a d 13.2 (xx 1976)

Lampa sodowa ma moc promieniowania $P = 100 \text{ W}$. Długość fali światła sodowego (żółtego) wysyłanego przez tę lampę wynosi $\lambda = 589 \text{ nm}$.

Obliczyć ile fotonów wysyła ta lampa w ciągu jednej sekundy, jeżeli dana jest stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ i prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Wychodzimy ze wzoru na moc źródła promieniowania:

$$P = \frac{W}{t} ,$$

gdzie W – jest energią świetlną emitowaną przez lampę sodową. Energia ta jest równa wielokrotności energii jednego kwantu, co możemy zapisać:

$$W = n h \nu \quad \text{lub} \quad W = n h \frac{c}{\lambda} .$$

Moc źródła wyrazi się więc wzorem:

$$P = \frac{n h c}{\lambda t},$$

skąd wyliczymy n – ilość kwantów emitowanych przez źródło światła w czasie t :

$$n = \frac{P \lambda t}{h c}.$$

$$n = 3 \cdot 10^{20}$$

13.3. Zjawisko fotoelektryczne

Zjawisko fotoelektryczne polega na emisji elektronów z metalu pod wpływem oświetlenia tego metalu promieniowaniem ultrafioletowym lub widzialnym (światłem) z metali alkalicznych. W metalu znajduje się dużo swobodnych elektronów, które nie mogą wydostać się na zewnątrz, ponieważ mają za małą energię. Padające fotony promieniowania na metal przekazują elektronom energię, dzięki czemu mogą one opuścić metal. Stąd nazwa – zjawisko fotoelektryczne.

Można też wywołać emisję elektronów z metalu przez ogrzanie go do wysokiej temperatury. Będzie to wtedy tzw. termoemisja. Można też „wyrwać” elektrony z metalu silnym polem elektrycznym, co zostało nazwane emisją polową lub autoemisją.

Zjawiskiem fotoelektrycznym rządzą dwa prawa: pierwsze, mówi nam, że ilość emitowanych elektronów jest wprost proporcjonalna do natężenia promieniowania.

Drugie, że ich energia albo prędkość nie zależy od natężenia promieniowania, lecz od długości fali tego promieniowania. Jest mianowicie odwrotnie proporcjonalna do tej długości, lub wprost proporcjonalna do częstości. Prawo to wyjaśnia się w oparciu o teorię korpuskularną (kwantową) promieniowania: energia kwantu idzie na wydobycie elektronu z metalu (energię tę nazywamy pracą wyjścia) oraz na nadanie elektronowi energii kinetycznej, co możemy zapisać w postaci następującego równania:

$$h \nu = A + \frac{m V^2}{2} \quad (13.12)$$

gdzie A – jest pracą wyjścia elektronu z metalu.

Dla większości metali wartość pracy wyjścia waha się od 4 do 6 elektronowoltów. Elektronowolt, jest to energia, jaką nabywa elektron po przebyciu różnicy potencjałów jednego wolta.

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Natomiast dla metali alkalicznych praca wyjścia wynosi około 1,5 eV. Dlatego też zjawisko fotoelektryczne zachodzi w metalach alkalicznych pod wpływem światła, co zostało wykorzystane w fotokomórkach. Działają one na tej zasadzie, że w obwodzie fotokomórki płynie prąd, gdy pada na nią światło. Wtedy elektrony emitowane z katody zamykają obwód elektryczny.

Drugie prawo zjawiska fotoelektrycznego można sprawdzić doświadczalnie, stosując napięcie hamujące do emitowanych elektronów. Okazało się, że im krótszą falą naświetlamy dany metal tym większe napięcie hamujące jest potrzebne, a więc emitowane elektrony posiadają większą energię. Energia tych elektronów równa się pracy pola hamującego:

$$\frac{m V^2}{2} = e U \quad (13.13)$$

Pracę wyjścia określamy wzorem $A = h \nu_0$,

gdzie ν_0 – jest częstotścią progową, powyżej której zachodzi zjawisko fotoelektryczne.

Drugie prawo zjawiska fotoelektrycznego możemy teraz zapisać w postaci następującego równania:

$$h \nu = h \nu_0 + e U$$

Rozwiązując powyższe równanie ze względu na U otrzymamy:

$$U = \frac{h}{e} (\nu - \nu_0) \quad (13.14)$$

Jest to równanie linii prostej w układzie $U \nu$, którą otrzymujemy doświadczalnie. Współczynnik kierunkowy tej prostej wynosi:

$$\frac{h}{e} = \operatorname{tg} \alpha .$$

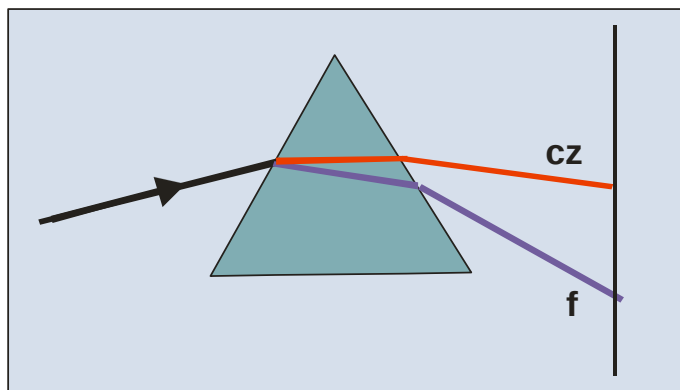
Stąd możemy też wyliczyć stałą Plancka h : $h = e \operatorname{tg} \alpha$. W tym przypadku $\operatorname{tg} \alpha$ nie jest liczbą niemianowaną, lecz określa się stosunkiem zmiany napięcia do odpowiadającej tej zmianie różnicy częstotści:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta U}{\Delta \nu} .$$

13.4. Analiza widmowa

Analiza widmowa zajmuje się rozpoznawaniem składu chemicznego źródła światła na podstawie widma liniowego charakterystycznego dla każdego pierwiastka, będącego źródłem światła w stanie gazowym lub w postaci świecących par. Widmo ciągłe natomiast powstaje wtedy, gdy źródłem światła jest ciało stałe np. świecący drucik żarówki. Nie korzystamy z niego w analizie widmowej.

Tak widmo liniowe jak i ciągłe powstaje przez rozszczepienie światła w pryzmacie. Jeżeli źródło światła wysyła tylko fale o niektórych długościach, to otrzymamy widmo liniowe, jeżeli wszystkie fale z zakresu promieniowania widzialnego, to otrzymamy widmo ciągłe. Rozszczepienie światła niejednorodnego (białego) w pryzmacie odbywa się dzięki temu, że fale krótsze załamują się silniej a dłuższe słabiej, co jest pokazane na **rys. 13.1**.



Rys.13.1. Widmo liniowe lub ciągłe otrzymujemy przez rozszczepienie światła niejednorodnego w pryzmacie

Poza zakresem promieniowania widzialnego tzn. od koloru fioletowego do czerwonego, występuje jeszcze promieniowanie nadfioletowe o falach krótszych od fali fioletowych, oraz fale podczerwone (cieplne) dłuższe od czerwonych.

Oprócz widma liniowego i ciągłego, które są widmami emisyjnymi, występują też i widma absorpcyjne. Charakteryzują się one tym, że na tle widma ciągłego występują czarne prążki. Powstają one na skutek pochłonięcia fal świetlnych o niektórych długościach przez gazy będące w wysokiej temperaturze.

Świecący gaz – wodór daje widmo liniowe składające się, w zakresie promieniowania widzialnego, z czterech linii: czerwonej, niebieskiej i blisko siebie leżących dwóch linii fioletowych. Długość fali poszczególnych linii wylicza się ze wzoru Balmera:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (13.15)$$

gdzie $R = 1,097 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$, nazywa się stałą Rydberga,

$n = 3, 4, 5, 6, \dots$ Dla $n = 3$ otrzymamy długość fali czerwonej. Dla n dalszych będziemy mieli długości fal następnych linii krótszych, z których większa część znajduje się w zakresie promieniowania ultrafioletowego.

13.5. Teoria Bohra budowy atomu

W celu wyjaśnienia mechanizmu powstawania widma liniowego wodoru, Bohr podał dwa założenia, zwane postulatami Bohra, modyfikujące ówczesny model atomu Rutherforda, w którym elektron krążył wokół jądra po jednym okręgu.

W oparciu o taki model nie można było wytłumaczyć powstawania widma liniowego wodoru. Bohr natomiast założył, że:

1) elektron może krążyć nie tylko po jednej orbicie, lecz po innych, ale tylko po takich dla których spełniony jest pewien warunek a mianowicie, że moment pędu elektronu równa się całkowitej wielokrotności stałej Plancka podzielonej przez 2π , co można zapisać w postaci następującego równania:

$$m V r = n \frac{h}{2\pi}, \quad (13.16)$$

gdzie $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ nazywa się główną liczbą kwantową.

V – prędkość liniowa na danej orbicie,

h – stała Plancka,

r – promień orbity elektronu przyjmujący różne wartości dla różnych n ,

2) Elektron przechodząc z orbity dalej położonej od jądra na orbitę bliżej jądra emituje kwant promieniowania, co możemy zapisać w ten sposób, że różnica energii elektronu na różnych orbitach zamienia się na energię kwantu wypromieniowanego przez atom:

$$E_s - E_n = h \nu \quad (13.17)$$

Siłą dośrodkową utrzymującą elektron w ruchu po okręgu dookoła jądra jest siła przyciągania elektrostatycznego między dodatnio naładowanym jądrem a elektronem. Możemy, więc napisać:

$$k \frac{e^2}{r^2} = \frac{m V^2}{r} \quad (13.18)$$

gdzie $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Wyznaczając z równania (13.16) prędkość elektronu V i wstawiając ją do równania (13.18) wyznaczymy promień okręgu po którym porusza się elektron w zależności od liczby n :

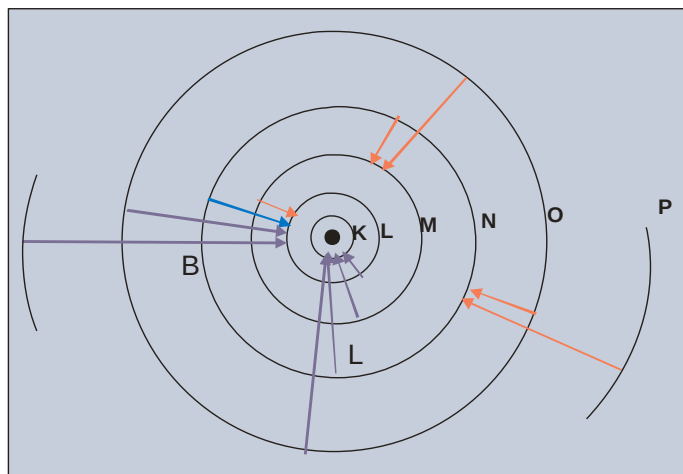
$$r = \frac{h^2 \epsilon_0}{e^2 \pi m} n^2 \quad (13.19)$$

dla $n = 1$ (pierwsza orbita) $r_1 = 0,53 \text{ \AA}$,

dla $n = 2$ (druga orbita) $r_2 = 2,12 \text{ \AA}$,

dla n następnych obliczymy dalsze orbity.

Zostały te orbity nazwane następującymi literami (idąc od jądra): K, L, M, N, O, P, itd. (**rys. 13.2**).



Rys. 13.2. Model atomu wodoru Rutheforda-Bohra

Powstały w ten sposób model atomu wodoru Rutheforda-Bohra pozwala wyjaśnić powstawanie widma liniowego wodoru w następujący sposób. Elektron przechodząc z danej orbity np. M (trzeciej) na orbitę L (drugą) emituje kwant promieniowania o ściśle określonej energii, a więc i o określonej długości fali odpowiadającej kolorowi czerwonemu. Jeżeli natomiast będzie przechodził z orbity N na orbitę L to emitowana zostanie fala krótsza odpowiadająca linii niebieskiej. Z dalszych orbit emitowane są fale coraz krótsze, gdyż im większa różnica poziomów energetycznych, tym krótsza fala jest emitowana. Przejście elektronu z orbit O i P na orbitę L odpowiada emisji dwóm falom fioletowym.

Widać więc, że przejściu elektronu na drugą orbitę (L) z innych, odpowiada emisja fal w zakresie promieniowania widzialnego (cztery linie) i dalszym liniom w ultrafiolecie. Linie te tworzą serię zwaną serią Balmera (wzór 13.15). Liczba dwa występująca w tym wzorze odpowiada przejściu elektronu na drugą orbitę.

Elektron może też przechodzić na inne orbity dając różne inne serie, jak np. przejściu elektronu na pierwszy poziom energetyczny towarzyszy emisja serii Lymana, leżąca całkowicie w ultrafiolecie. Seria Paschena odpowiadająca przejściu elektronu na orbitę trzecią leży całkowicie w podczerwieni. Seria Funda leżąca również w podczerwieni powstaje przy przejściu elektronu na orbitę czwartą.

W celu wyprowadzenia wzoru na różnicę energii odpowiadającą przejściu elektronu z danej orbity na inną, należy określić całkowitą energię elektronu. Energia ta równa jest sumie energii kinetycznej potencjalnej:

$$\text{Energia kinetyczna} \quad E_k = \frac{m V^2}{2}.$$

Po pomnożeniu licznika i mianownika przez promień orbity r otrzymamy:

$$E_k = \frac{m V^2 r}{2 r}.$$

Uwzględniając, że siłą dośrodkową utrzymującą elektron w ruchu wokół jądra, jest siła przyciągania elektrostatycznego pomiędzy jądrem a elektronem możemy napisać:

$$\frac{m V^2}{r} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

gdzie e – jest wartością liczbową ujemnego ładunku elektronu i dodatniego ładunku jądra.

Energia kinetyczna elektronu wyrazi się wzorem:

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} \quad (13.20)$$

Energia potencjalna elektronu równa jest potencjałowi pola w odległości r od jądra:

$$E_p = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}. \quad (13.21)$$

Znak minus pochodzi stąd, że przyjęto potencjał równy zeru w nieskończoności.

Energia całkowita elektronu wyrazi się wzorem:

$$E_c = -\frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 r} \quad (13.22)$$

Podstawiając w powyższym równaniu za promień orbity jego wartość ze wzoru (13.19), otrzymamy energię elektronu na n -tej orbicie:

$$E_c = -\frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (13.23)$$

Natomiast na innej orbicie, bliższej jądra np. k -tej, energia elektronu wyrazi się wzorem:

$$E_c = -\frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{k^2}. \quad (13.24)$$

Różnica energii będzie:

$$\Delta E = -\frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} + \frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{k^2}$$

lub

$$\Delta E = \frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (13.25)$$

gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$ Liczby te odpowiadają kolejnym orbitom, na które „spadają” elektrony z innych orbit: $n = k + 1, k + 2, \dots$

Otrzymana różnica energii równa jest energii kwantu promieniowania, emitowanego przy danym przejściu:

$$\Delta E = h \nu. \quad (13.26)$$

Przykład 23.3 (xx 1980)

W atomie wodoru elektron przechodzi z orbity drugiej na pierwszą. Obliczyć zmianę jego energii kinetycznej oraz zmianę pędu przy tym przejściu. Dane są: masa elektronu m , ładunek elektronu e , stała Plancka h i przenikliwość dielektryczna ϵ_0 .

Wychodzimy ze wzoru na energię kinetyczną elektronu. Następnie mnożymy licznik i mianownik przez promień orbity elektronu r i zastępujemy powstały wzór na siłę dośrodkową, siłą przyciągania elektrostatycznego. Energia kinetyczna elektronu wyrazi się wtedy wzorem:

$$E_k = \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 r}$$

Podstawiając za r wartość ze wzoru (13.19) otrzymamy:

$$E_k = \frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

Dla orbity drugiej $n = 2$, dla pierwszej $n = 1$. Szukana różnica energii kinetycznej elektronu będzie więc:

$$\Delta E = \frac{3 e^4 m}{32 \epsilon_0^2 h^2}.$$

W celu wyznaczenia zmiany pędu elektronu przy przejściu z orbity drugiej na pierwszą, wyliczamy pęd elektronu wychodząc z pierwszego postulatu Bobra:

$$m V r = n \frac{h}{2 \pi},$$

skąd:

$$m V = \frac{n h}{2 \pi r}.$$

Uwzględniając, że $r = \frac{h^2 \epsilon_0}{e^2 \pi m} n^2$, pęd wyrazi się wzorem:

$$m V = \frac{m e^2}{2 h \epsilon_0 n}.$$

Przyjmując dla drugiej orbity $n = 2$ a dla pierwszej $n = 1$ obliczymy szukaną różnicę pędów:

$$\Delta p = \frac{m e^2}{4 h \epsilon_0}.$$

13.6. Fale de Broglie'a

De Broglie podał hipotezę (sprawdzoną doświadczalnie), że elektrony i inne cząstki mogą wykazywać właściwości falowe a więc zachowywać się jak fale. Długość tej fali zależy od pędu cząstki i wyraża się wzorem:

$$\lambda = \frac{h}{m V}, \quad (13.27)$$

gdzie h – jest stałą Plancka.

Elektron krążący wokół jądra atomu wodoru, może więc być traktowany jako fala. Wtedy pierwszy postulat Bobra wyraża się w ten sposób, że elektron może krążyć tylko po takich orbitach, na których mieści się całkowita liczba fal de Broglie'a, co można zapisać:

$$2 \pi r = n \lambda \quad (13.28)$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$

Po uwzględnieniu wzoru (13.27) otrzymamy pierwszy postulat Bobra:

$$m V r = n \frac{h}{2 \pi}.$$

Elektron krążący wokół jądra nie może więc być uważany za kulkę posiadającą w danej chwili określone położenie i prędkość, jak ma to miejsce w mechanice klasycznej. Zostało to ujęte zasadą nieoznaczoności Heisenberga, która mówi nam, że im dokładniej wyznaczymy położenie cząstki, tym mniej dokładnie możemy określić jej prędkość lub pęd. Albo iloczyn zmiany dokładności położenia cząstki (Δx) przez zmianę pędu (Δp) jest równy bądź większy od stałej Plancka, co można zapisać:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \quad (13.29)$$

Przykład 13.4

Elektron porusza się po okręgu o promieniu $r = 1 \text{ cm}$ w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola magnetycznego o indukcji magnetycznej $B = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ T}$. Obliczyć długość fali de Broglie'a tego elektronu. Przyjąć $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ i $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Wychodzimy ze wzoru na długość fali de Broglie'a:

$$\lambda = \frac{h}{m V}.$$

Pęd elektronu znajdziemy stąd, że siłą dośrodkową utrzymującą elektron w ruchu po okręgu, jest siła Lorentza:

$$\frac{m V^2}{r} = B e V.$$

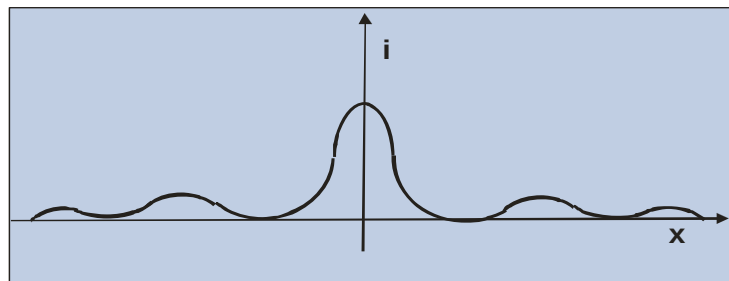
Mamy więc:

$$\lambda = \frac{h}{B e r} \quad \lambda = 10^{-9} \text{ m}.$$

13.7. Zjawisko ugięcia światła

Równoległa wiązka światła monochromatycznego tzn. o jednej długości fali, przechodząc przez szczelinę lub natrafiając na przeszkodę rzędu długości fali ulega ugięciu pod różnymi kątami w zakresie od -90^0 do $+90^0$. Szczelina staje się wtedy źródłem fali kolistej (Nie zachodzi tutaj rozszczepienie na poszczególne fale, gdyż mamy do czynienia ze światłem monochromatycznym). Zjawisko ugięcia światła nazywa się też często dyfrakcją.

Jeżeli na drodze promieni ugiętych ustawimy ekran, to na nim, na skutek interferencji fal ugiętych, uzyskamy obraz „dyfrakcyjny” danej szczeliny. Składa się on z prążka środkowego najjaśniejszego i po obu stronach z kilku mniej jasnych prążków (**rys. 13.3**).



Rys.13.3. Obraz dyfrakcyjny światła jednorodnego ugiętego w jednej szczelinie

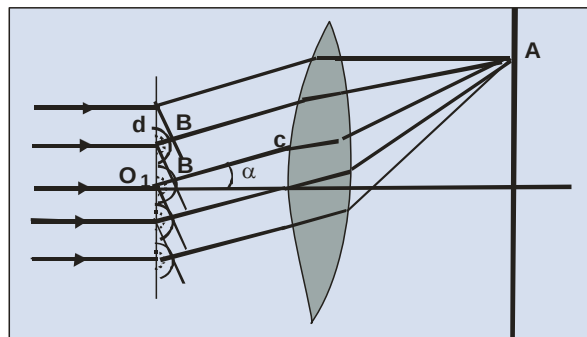
Między prążkami jasnymi są miejsca ciemne. Tam spotykają się fale w fazach przeciwnych, gdzie prążek jasny – w fazach zgodnych.

Zjawisko ugięcia światła jednorodnego ma miejsce również w przypadku kilku lub kilkuset szczelin, jak np. w siatce dyfrakcyjnej – płytce szklanej, na której zrobione zostały rysy, od 200 do 1000 na jednym milimetrze. Rysa dla światła jest nieprzezroczysta, a więc światło przez nią nie przechodzi, natomiast przechodzi tylko między rysami ulegając ugięciu (ale nie rozszczepieniu). Odległość pomiędzy środkami dwóch sąsiednich szczelin nazywa się stałą siatki.

Rozpatrzmy równoległą wiązkę światła jednorodnego padającego na siatkę dyfrakcyjną prostopadle do jej powierzchni (**rys. 13.4.**). Każda szczelina może być traktowana jako źródło nowej fali kolistej (zgodnie z zasadą Huygensa). Na **rys. 13.4.** linia przerywana oznacza dolinę fali a ciągła – grzbiet. Z wielu fal ugiętych rozpatrujemy te, które w wyniku interferencji dadzą na ekranie jasny prążek. Kierunek tych fal jest $O_1 C$, a kąt ugięcia α . Różnica dróg tych promieni, w stosunku do promieni wychodzących z sąsiednich szczelin wynosi $O_1 B$ i równa się długości fali λ . Wyraża się za pomocą kąta ugięcia α następującym wzorem:

$$O_1 B = d \sin \alpha \quad (13.30)$$

gdzie d – jest stałą siatki dyfrakcyjnej (odległością pomiędzy rysami).



Rys. 13.4. Jasny prążek powstaje w tym miejscu na ekranie, gdzie spotykają się fale w fazach zgodnych, dla których różnica dróg równa się długości fali lub jej wielokrotności

Promienie ze wszystkich szczelin ugięte pod tym samym kątem, zebrane soczewką, będą się wzmacniać w tym samym punkcie na ekranie. Znajdzie się taki punkt dalej od prążka środkowego, dla którego różnica dróg promieni interferencyjnych będzie wynosić 2λ . W punkcie tym też nastąpi wzmacnienie. Otrzymamy prążek drugiego rzędu. Prążki dalsze (coraz słabsze) będą w miejscach dla których różnica dróg będzie wynosić 3λ , 4λ . Ogólnie możemy napisać:

$$m\lambda = d \sin \alpha_m \quad (13.31)$$

gdzie $m = 1, 2, 3, \dots$ Liczby te odpowiadają prążkom rzędu pierwszego, drugiego itd.

Powyższy wzór pozwala wyznaczyć długość fali świetlnej poprzez pomiar sinusa kąta ugięcia α . Jeżeli na siatkę dyfrakcyjną rzucimy teraz wiązkę równoległą światła białego, to na każdej szczelinie następuje ugięcie każdej z fal o różnych długościach, tworzących światło białe i każda ugina się jednakowo w zakresie kąta półpełnego, dając natężenie prążka zerowego około 84% całego natężenia światła. Fala odpowiadająca barwie czerwonej, wcale więc nie ugina się silniej niż fala odpowiadająca barwie fioletowej. Na ekranie ustawionym za siatką w miejscu prążków, w przypadku światła jednorodnego, powstają widma (z wyjątkiem prążka środkowego). Dzieje się to dlatego, że w jednym miejscu na ekranie, na skutek interferencji wzmacniają się fale czerwone a w innym miejscu fale o innej długości. Dlatego, że fala odpowiadająca barwie czerwonej jest dłuższa od fali odpowiadającej barwie żółtej czy fioletowej, to będzie się wzmacniać dalej od prążka środkowego, a fale żółte czy fioletowe bliżej. Pozornie, więc tylko wydaje się, że fale czerwone uginają się silniej, a fioletowe słabiej.

Przykład 13.5 (xx 1978)

Na siatkę dyfrakcyjną o stałej $d = 2,5 \mu\text{m}$ pada prostopadle równoległa, monochromatyczna wiązka światła o długości fali $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$. Obliczyć maksymalną liczbę prążków, które można otrzymać za pomocą tej siatki.

Wychodzimy ze wzoru na siatkę dyfrakcyjną (13.31):

$$m \lambda = d \sin \alpha .$$

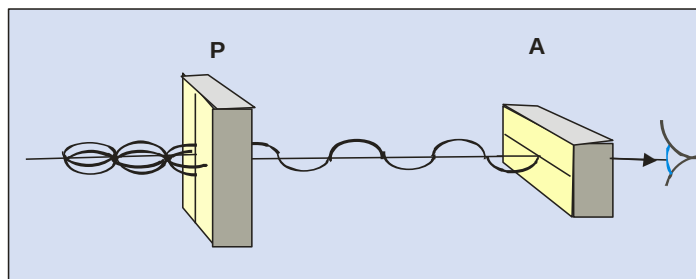
Maksymalną liczbę prążków otrzymamy zakładając, że kąt ugięcia $\alpha = 90^\circ$,

wtedy
$$m = \frac{d}{\lambda} .$$

Otrzymane cztery prążki znajdują się tylko po jednej stronie względem prążka środkowego. Po drugiej stronie też będzie cztery, plus jeden środkowy, razem więc maksymalna liczba prążków będzie wynosić dziewięć

13.8. Polaryzacja światła

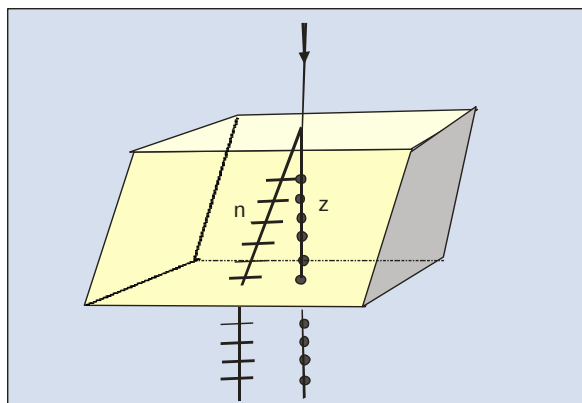
Zjawisko polaryzacji światła polega na sprowadzeniu drgań fali świetlnej do jednej płaszczyzny. W przypadku światła niespolaryzowanego drgania odbywają się w różnych płaszczyznach. Możemy spolaryzować światło za pomocą niektórych kryształów, np. kryształ zwany turmalinem ma tę właściwość, że mogą odbywać się w nim drgania świetlne tylko w jednej płaszczyźnie. Gdy więc światło niespolaryzowane padnie na taki kryształ, to przejdą przez niego tylko drgania w jednej płaszczyźnie, ulegając w ten sposób polaryzacji (**rys. 13.5**).



Rys. 13.5. Światło po przejściu przez pierwszy kryształ (p) drga w jednej płaszczyźnie

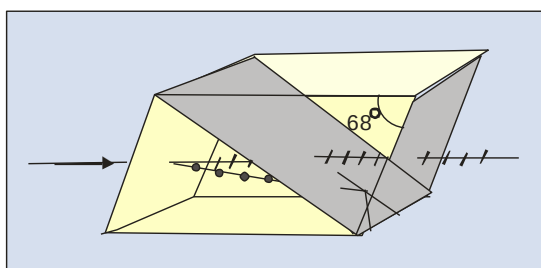
Możemy stwierdzić, że światło jest spolaryzowane za pomocą drugiego takiego samego kryształu – analizatora (A), gdyż okiem nie można odróżnić światła spolaryzowanego od niespolaryzowanego. Jeżeli znajdzie się takie położenie drugiego kryształu, przy którym będzie ciemne pole widzenia to światło jest spolaryzowane, ponieważ przychodzą drgania pionowe a mogą odbywać się w tym kryształ drgania poziome.

Światło można też spolaryzować za pomocą innego kryształu, szpatu islandzkiego, który jest węglanem wapnia (CaCO_3). Ma on tę właściwość, że rozszczepia promień świetlny na dwa promienie: zwyczajny (z) i nadzwyczajny (n) (**rys. 13.6**).



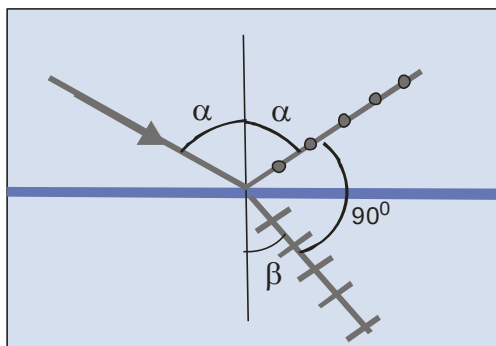
Rys. 13.6. Promień świetlny padający na kryształ szpatu islandzkiego ulega rozszczepieniu na dwa promienie. Obydwa są spolaryzowane w płaszczyznach do siebie prostopadłych

Obydwa te promienie są spolaryzowane w płaszczyznach do siebie wzajemnie prostopadłych. W celu usunięcia jednego z tych promieni rozcina się kryształ wzdłuż krótszej przekątnej i ponownie skleja klejem stanowiącym ośrodek optycznie rzadszy w stosunku do samego kryształu (balsam kanadyjski). Promień zwyczajny ulega wtedy całkowitemu wewnętrznemu odbiciu na warstwie kleju i pochłonięciu przez ściankę kryształu, natomiast drugi promień – nadzwyczajny przechodzi. Urządzenie to nazywa się pryzmatem Nikola (**rys. 13.7**).



Rys. 13.7. Pryzmat Nikola

Światło można też spolaryzować przez odbicie od powierzchni dielektryka np. od płytki szklanej, jeżeli tylko zostanie spełniony warunek, zwany warunkiem Brewstera: promień odbity z promieniem załamany ma tworzyć kąt prosty (**rys. 13.8**).



Rys. 13.8. Jeżeli promień odbity z promieniem załamanym utworzy kąt prosty, to obydwa promienie będą spolaryzowane w płaszczyznach do siebie prostopadłych

Powyższy warunek polaryzacji można jeszcze wypowiedzieć następująco: światło ulegnie całkowitej polaryzacji przy odbiciu, jeżeli będzie padać pod takim kątem, że $\tan$ tego kąta równać się będzie współczynnikowi załamania światła danej płytki:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

ale: $\beta = 90^\circ - \alpha$ (rys. 13.8).

Mamy więc:

$$n = \tan \alpha. \quad (13.32)$$

Niektóre substancje, takie jak cukier, terpentyna, skręcają płaszczyznę polaryzacji. Po przejściu światła spolaryzowanego przez roztwór np. cukru, drgania świetlne odbywają się w innej płaszczyźnie, tj. obróconej (skręconej) o pewien kąt w stosunku do płaszczyzny, w której się odbywały wchodząc do roztworu. Kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest wprost proporcjonalny do stężenia roztworu i jego grubości:

$$\alpha = k a L \quad (13.33)$$

gdzie k – jest współczynnikiem proporcjonalności, zwanym skręcalnością właściwą.

P r z y k ł a d 13.7. (xx 1989)

Promień świetlny padając na płytkę szklaną pod kątem $\alpha = 60^\circ$ ulega na skutek odbicia całkowitej polaryzacji. Ile wynosi prędkość światła w szkłe, z którego wykonano płytkę. Prędkość światła w próżni wynosi c .

Korzystamy ze wzoru na warunek polaryzacji (13.32):

$$n = \tan \alpha$$

ale:

$$n = \frac{c}{V}$$

Porównując prawe strony powyższych dwóch równań otrzymamy:

$$V = \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha} \quad V = 1,7 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

13.9. Promienie Roentgena

Promienie Roentgena są falą elektromagnetyczną powstającą przy gwałtownym zahamowaniu elektronów o dużej energii przez tarczę metalową. Wtedy pole magnetyczne towarzyszące strumieniowi elektronów zanika. Zanikające pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne (zgodnie z zasadą Maxwella). Zmiana pola elektrycznego wywołuje powstawanie pola magnetycznego itd. Powstaje, więc fala elektromagnetyczna promieniowania Rentgenowskiego.

Powstałe w ten sposób promienie Roentgena dają widmo ciągłe, zwane widmem hamowania, które charakteryzuje się tym, że posiada ostrą granicę po stronie fal krótszych. Wtedy elektron oddaje swoją energię w jednym zderzeniu z atomem tarczy. Jego energia zamienia się na energię kwantu promieniowania:

$$\frac{m V^2}{2} = h \nu \quad (13.34)$$

Ale energia kinetyczna elektronu zależy od różnicy potencjałów, która przyspiesza dany elektron zgodnie ze wzorem:

$$\frac{m V^2}{2} = e U. \quad (13.35)$$

Mamy więc: $e U = h \nu$ lub $e U = h \frac{c}{\lambda}.$

Z powyższego wzoru wynika, że minimalna długość fali promieni Roentgena jest odwrotnie proporcjonalna do napięcia przyspieszającego. Najmniejsze napięcie, które może już wytworzyć promienie roentgena wynosi około 10 kV, a długość powstałej fali około 100 Å. Długość fali promieni Roentgena wyznacza się za pomocą kryształów, które stanowią dla tych promieni siatkę dyfrakcyjną.

Promienie Roentgena dają jeszcze oprócz widma ciągłego widmo liniowe zwane charakterystycznym. Jest ono widoczne na tle widma ciągłego. Powstaje ono dzięki przechodzeniu elektronów atomów tarczy z orbit dalszych od jądra na orbity bliższe.

Zadania rozwiązane

13.1. W jakim miejscu pomiędzy dwoma źródłami światła o natężeniach $I_1 = 15 \text{ Cd}$ i $I_2 = 25 \text{ Cd}$, oddległymi od siebie o $d = 2 \text{ m}$ należy ustawić ekran, ażeby był jednakowo oświetlony z obu stron.

Ekran będzie jednakowo oświetlony, gdy natężenie oświetleń od obu źródeł będzie jednakowe:

$$E_1 = \frac{I_1}{x^2} \quad E_2 = \frac{I_2}{(d-x)^2}$$

Mamy więc

$$\frac{I_1}{x^2} = \frac{I_2}{(d-x)^2}$$

Po pierwiastkowaniu obu stron powyższego równania wyznaczmy x :

$$x = \frac{\sqrt{I_1} d}{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}},$$

$x = 0,87 \text{ m}$ od pierwszego źródła światła.

13.2. (xx 1975) Obliczyć temperaturę, w której średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu jednoatomowego jest równa energii fotonu w dalekiej podczerwieni, dla którego długość fali wynosi $\lambda = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Przyjąć $R = 8 \text{ J/molK}$, $h = 6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$.

Wychodzimy ze wzoru na średnią energię kinetyczną cząsteczki: $E = \frac{3}{2} k T$

ale:

$$k = \frac{R}{N_A},$$

więc:

$$E = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T.$$

Energia ta równa się energii kwantu o długości fali λ :

$$E = h \frac{c}{\lambda}.$$

Przez porównanie stronami ostatnich dwóch równań, otrzymamy:

$$\frac{3 R}{2 N_A} T = \frac{h c}{\lambda}.$$

Stąd

$$T = \frac{h c 2 N_A}{\lambda 3 R},$$

$$T = 300 \text{ K}.$$

13.3. (xx 1980) Na powierzchnię $S = 20 \text{ cm}^2$ pada wiązka światła o długości fali $\lambda = 590 \text{ nm}$ i wywiera ciśnienie $p = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Obliczyć liczbę fotonów padających na tę powierzchnię w ciągu czasu $t = 1 \text{ s}$, jeżeli odbiciu ulega $k = 80\%$ padających fotonów. Stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

Wychodzimy ze wzoru na ciśnienie:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Siłę F wyliczymy z drugiej zasady dynamiki:

$$F t = m V - \left(-\frac{80}{100} m V \right).$$

Uwzględniając, że $m V = \frac{h}{\lambda}$ i, że pada na powierzchnię S n fotonów, otrzymamy:

$$F t = \frac{n h}{\lambda} (1 + k),$$

gdzie $k = \frac{80}{100}.$

Ciśnienie, więc wyrazi się wzorem:

$$p = \frac{n h}{\lambda t S} (1 + k)$$

skąd: $n = \frac{p \lambda t S}{h (1 + k)}, \quad n = 2 \cdot 10^{18}.$

13.4. Światło monochromatyczne o długości fali $\lambda = 3000 \text{ Å}$ pada prostopadle na powierzchnię $S = 4 \text{ cm}^2$. Obliczyć ilość fotonów padających na tę powierzchnię w jednostce czasu, jeżeli natężenie tego światła wynosi $I = 15 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$. Prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

Wychodzimy ze wzoru na natężenie promieniowania:

$$I = \frac{E}{S t},$$

gdzie E – jest energią promieniowania:

$$E = n \frac{h c}{\lambda}. \quad \text{mamy więc:} \quad I = \frac{n h c}{S \lambda t}.$$

stąd: $n = \frac{I S \lambda t}{h c} \quad n = 9 \cdot 10^{13}.$

13.5. (xx 1987) Jaką długość fali powinien mieć foton, żeby jego masa była równa masie spoczynkowej elektronu? Masa spoczynkowa elektronu $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s, prędkość światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Masę elektronu wyliczymy z równania Einsteina:

$$m = \frac{E}{c^2}.$$

Uwzględniając, że energia fotonu $E = \frac{h c}{\lambda}$, oraz, że $m = m_0$, wyznaczmy

szukaną długość fali:
$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} \quad \lambda = 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

13.6. (xx 1977) Jądro pierwiastka promieniotwórczego, mające masę m , wyemitowało foton o długości fali λ . Obliczyć energię kinetyczną odrzutu jądra.

Energię odrzutu jądra wyznaczmy ze wzoru:

$$E = \frac{m V^2}{2}.$$

Prędkość odrzutu V obliczymy z zasady zachowania pędu: $m V = \frac{h}{\lambda}.$

Mamy, więc:
$$E = \frac{h^2}{2 m \lambda^2}$$

13.7. (xx 1979) Wykazać, że w przypadku emisji fotonu promieniowania rentgenowskiego, nie może on uzyskać pędu równego pędowi elektronu, wywołującego to promieniowanie.

Przypuśćmy, że foton może uzyskać pęd równy pędowi elektronu, co możemy zapisać:

$$\frac{h}{\lambda} = m V.$$

Energia fotonu równa się energii elektronu:
$$h \frac{c}{\lambda} = \frac{m V^2}{2}.$$

Po podzieleniu stronami powyższych dwóch równań otrzymamy: $V = 2 c,$

co jest niemożliwe, a więc i pęd fotonu nie może być równy pędowi elektronu, który wywołuje promieniowanie.

13.8. (xx 1981) Największa długość fali przy której zachodzi zjawisko fotoelektryczne dla katody sodowej wynosi $\lambda_0 = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Obliczyć, jaki pęd maksymalny uzyskują fotoelektrony, jeżeli katodę oświetlimy światłem o długości fali $\lambda = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Przyjąć $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Wychodzimy z równania na drugie prawo zjawiska fotoelektrycznego:

$$h \nu = A + \frac{m V^2}{2},$$

gdzie

$$A = h \frac{c}{\lambda_0}.$$

Po pomnożeniu licznika i mianownika, wyrażenia na energię kinetyczną, przez masę elektronu m , oraz uwzględnieniu wartości na ν i A otrzymamy:

$$h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{\lambda_0} + \frac{m^2 V^2}{2 m}.$$

skąd:

$$p = \sqrt{2 m h c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)} \quad p = 1,06 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

13.9. (xx 1986) Długofalowa granica zjawiska fotoelektrycznego dla pewnego materiału wynosi λ_0 . W wyniku oświetlenia tego materiału światłem o długości fali λ wybijane są elektrony, które wpadają w pole magnetyczne o indukcji B . Obliczyć moment pędu elektronu, który w polu magnetycznym porusza się po okręgu o maksymalnym promieniu. Dane są masa elektronu m , ładunek elementarny e , stała Plancka h , prędkość światła c .

Wychodzimy ze wzoru na drugie prawo zjawiska fotoelektrycznego:

$$h \nu = A + \frac{m V^2}{2}$$

lub

$$h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{\lambda_0} + \frac{m^2 V^2 r^2}{2 m r^2}.$$

Stąd kwadrat momentu pędu wyrazi się wzorem:

$$k^2 = 2 m r^2 h c \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 \lambda} \right) \quad (13.37)$$

Nieznany promień okręgu r wyznaczmy stąd, że w polu magnetycznym o indukcji B elektron porusza się po okręgu o danym promieniu r . Siłą dośrodkową jest siła Lorentza:

$$\frac{m V^2}{r} = e V B.$$

Po przekształceniu będziemy mieli:

$$m V r = e B r^2.$$

Wyznaczając z powyższego równania r^2 i wstawiając do równania (13.37), otrzymamy szukany moment pędu:

$$k = \frac{2 m h c}{e B} \frac{(\lambda_0 - \lambda)}{\lambda_0 \lambda}.$$

13.10. (xx 1982) Napięcie hamujące dla elektronów emitowanych z powierzchni metalu pod działaniem światła o długości fali λ_1 wynosi U_1 . Obliczyć wartość napięcia hamującego dla elektronów emitowanych z tego metalu pod wpływem światła o długości fali λ_2 . Dane są: e – ładunek elektronu, h – stała Plancka, c – prędkość światła.

W równaniu na drugie prawo zjawiska fotoelektrycznego (13.12) energię kinetyczną elektronu wyrażamy za pomocą napięcia przyspieszającego.

$$\frac{m V^2}{2} = e U.$$

Dla dwóch różnych napięć (U_1 i U_x) możemy napisać dwa równania:

$$h \frac{c}{\lambda_1} = A + e U_1, \quad h \frac{c}{\lambda_x} = A + e U_x.$$

Po odjęciu stronami powyższych dwóch równań, od drugiego pierwsze otrzymamy:

$$U_x = U_1 + \frac{h c}{e} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

13.11. (x 1986) Promień najmniejszej orbity elektronu w atomie wodoru wynosi $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$ m. Jaka jest długość fali de Broglie'a tego elektronu?

Długość fali de Broglie'a wyraża się wzorem:

$$\lambda = \frac{h}{m V}.$$

Pęd elektronu znajdziemy z pierwszego postulat Bahra (13.16)

$$m V = \frac{n h}{2 \pi r}.$$

Mamy, więc:

$$\lambda = \frac{2 \pi r}{n},$$

dla $n = 1$

$$\lambda = 2 \pi r,$$

$$\lambda = 3,14 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

13.12. (xx 1983) Cząstka alfa porusza się w próżni po okręgu o promieniu $R = 5 \text{ cm}$ w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$. Obliczyć długość fali de Broglie'a odpowiadającej tej cząstce. Stała Plancka $h = 6,67 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, ładunek elektronu $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Wychodzimy ze wzoru na długość fali de Broglie'a:

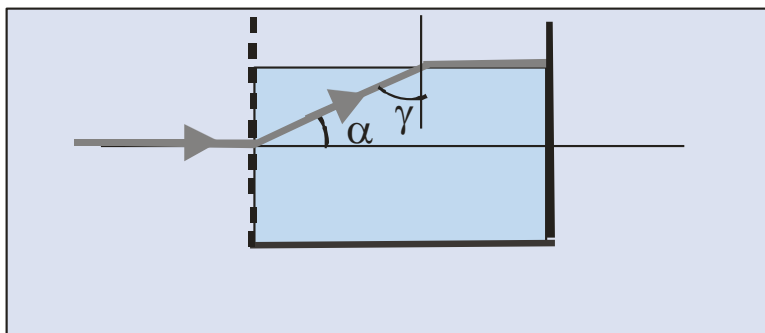
$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

Pęd cząstki alfa ($m v$) znajdziemy stąd, że siłą dośrodkową w jej ruchu po okręgu w polu magnetycznym jest siła Lorentza (ładunek cząstki alfa wynosi $2e$):

$$\frac{m v^2}{R} = 2 e v B \quad \text{lub} \quad m v = 2 e B R.$$

Mamy więc: $\lambda = \frac{h}{2 e B R}, \quad \lambda = 1,67 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$

13.13. (xx 1986) Ściankę prostopadłego naczynia szklanego stanowi siatka dyfrakcyjna o stałej $d = 2 \mu\text{m}$, a rysami poziomymi. Naczynie napełniono cieczą o współczynniku załamania $n = 5/4$. Na siatkę pada z zewnątrz prostopadle do niej wiązka światła monochromatycznego. Obliczyć długość fali λ światła padającego na siatkę, jeżeli wiadomo, że wiązka ugięta trzeciego rzędu pada na powierzchnię cieczy pod kątem granicznym (rys. 13.9).



Rys. 13.9. Kąt ugięcia α związany jest z kątem granicznym γ następującym równaniem $\alpha = 90 - \gamma$

Korzystamy ze wzoru na siatkę dyfrakcyjną (13.31):

$$3 \lambda = d \sin \alpha.$$

Kąt graniczny α związany jest z kątem granicznym γ następującą zależnością:

$$\alpha = 90 - \gamma,$$

więc:

$$3 \lambda = d \sin (90 - \gamma)$$

lub

$$3\lambda = d \cos \gamma$$

albo

$$3\lambda = d \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}.$$

Uwzględniając, że $\sin \gamma = \frac{1}{n}$ otrzymamy:

$$\lambda = \frac{d}{3n} \sqrt{n^2 - 1}, \quad \lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

13.14. (xx 1985) Długość fali odpowiadająca krótkofalowej granicy widma ciągłego lampy rentgenowskiej wynosi $\lambda = 3 \text{ nm}$. Obliczyć minimalną długość fali de Broglie'a elektronów bombardujących antykatodę w tej lampie. Przyjąć masę elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, stałą Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Efekt relatywistyczny można pominąć.

Wychodzimy ze wzoru na długość fali de Broglie'a:

$$\lambda_B = \frac{h}{m V}.$$

Prędkość elektronu (V), znajdziemy stąd, że jego energia kinetyczna równa się energii kwantu promieniowania rentgenowskiego:

$$\frac{m V^2}{2} = h \frac{c}{\lambda}.$$

Skąd:

$$V = \sqrt{\frac{2 h c}{m \lambda}}.$$

Ostatecznie:

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{h \lambda}{2 m c}}, \quad \lambda_B = 0,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

13.15. (xx 1981) Po zwiększeniu napięcia w lampie roentgenowskiej, o około $k = 1,5$ razy, długość fali odpowiadającej krótkofalowej granicy widma ciągłego przesunęła się o $\Delta\lambda = 0,03 \text{ nm}$. Obliczyć początkowe napięcie w lampie. Przyjąć $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Dla obu napięć piszemy dwa równania:

$$e U = h \frac{c}{\lambda_1}, \quad e(U + k U) = h \frac{c}{\lambda_2}.$$

Z powyższych równań wyznaczamy długości fal λ_1 i λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{h c}{e U}, \quad \lambda_2 = \frac{h c k}{e \Delta \lambda (1+k)}.$$

Po odjęciu stronami, otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy szukane napięcie:

$$U = \frac{h c k}{e \Delta \lambda (1+k)}, \quad U = 24,75 \text{ kV}.$$

13.16. (xx1977) Elektrony poruszające się z prędkością $V = 5 \cdot 10^6$ m/s wpadają w próżni do jednorodnego przyspieszającego pola elektrostatycznego o natężeniu $E = 10^4$ V/m równoległe do linii sił. Obliczyć najkrótszą drogę, jaką muszą przebyć w tym polu, żeby padając na anodę lampy rentgenowskiej mogły wytworzyć promieniowanie o długości fali $\lambda = 0,1$ nm. Relatywistyczną zmianę masy można pominąć. Przyjąć: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Różnica energii, jaką nabędzie elektron w polu elektrostatycznym w stosunku do tej jaką miał wpadając w pole, równa się pracy sił pola:

$$\frac{m V^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = F S.$$

Uwzględniając, że $F = e E$, oraz, że energia jaką nabędzie elektron zamienia się na energię kwantu wytworzonego promieniowania rentgenowskiego możemy napisać:

$$h \frac{c}{\lambda} - \frac{m V_0^2}{2} = e E S.$$

Skąd:
$$S = \frac{2 h c - \lambda m V_0^2}{2 e E \lambda}, \quad S = 1,23 \text{ m}.$$

13.17. (xx 1990) Jakie napięcie należy przyłożyć między katodę i anodę lampy rentgenowskiej, aby wysyłane promieniowanie wybijało z płytki cynkowej elektrony o maksymalnej prędkości $V = 6 \cdot 10^7$ m/s? Dane są: ładunek elektronu $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, masa elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, praca wyjścia elektronu z powierzchni cynku $W = 3,7$ eV. Przyjąć, że masa elektronu nie zmienia się.

Napięcie przyspieszające elektrony wyliczymy z równania:

$$e U = h \frac{c}{\lambda}.$$

Powstałe kwanty promieniowania rentgenowskiego mają wywołać zjawisko fotoelektryczne z płytki cynkowej. Możemy więc napisać:

$$e U = W + \frac{m V^2}{2}.$$

Stąd
$$U = \frac{W}{e} + \frac{m V^2}{2 e}, \quad U = 10,2 \text{ kV}.$$

Zadania uzupełniające

13.18. Żarówka o natężeniu $I = 500 \text{ Cd}$ znajduje się na latarni o wysokości $h = 6 \text{ m}$. Obliczyć, jakie jest oświetlenie powierzchni ziemi w odległości $d = 10 \text{ m}$ od podstawy latarni.

Odp.
$$E = \frac{I h}{(d^2 + h^2)^{3/2}}, \quad E = 1,88 \text{ lx}.$$

13.19. (xx 1975) Elektron po nabyciu w polu elektrycznym niewielkiej różnicy potencjałów o wartości U , uzyskuje pęd równy pędowi pojedynczego fotonu monochromatycznej wiązki promieniowania elektromagnetycznego. Obliczyć długość fali tego promieniowania i wyrazić ją przez wartość U , masę elektronu m , ładunek elektronu e , i stałą Plancka h .

Odp.
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 e U m}}.$$

13.20. Stacja radiowa pracuje na częstotściach $\nu = 103,7 \text{ MHz}$ i posiada moc $M = 200 \text{ kW}$. Obliczyć ilość kwantów emitowanych przez tę stację w czasie jednej sekundy. Jeżeli dana jest stała Plancka $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

Odp.
$$n = \frac{M t}{h \nu}, \quad n = 2,9 \cdot 10^{30}.$$

13.21. Fala elektromagnetyczna o częstotści $\nu = 300 \text{ MHz}$ pada prostopadle na powierzchnię $S = 50 \text{ cm}^2$. Obliczyć ilość fotonów padających na tę powierzchnię w jednostce czasu, jeżeli natężenie fali jest $I = 9 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

Odp.
$$n = \frac{I S}{h \nu}, \quad n = 2,3 \cdot 10^{18}.$$

13.22. Stacja radiowa emituje fale elektromagnetyczne we wszystkie kierunki z częstotliwością $\nu = 100 \text{ MHz}$ i z mocą $P = 150 \text{ kW}$. Znaleźć ilość fotonów przelatujących przez 1 m^2 powierzchni w odległości $d = 1 \text{ km}$ od stacji w jednostce czasu. Dana jest stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

$$\text{Odp.} \quad n = \frac{P t}{h \nu 4 \pi d^2}, \quad n = 1,8 \cdot 10^{23}.$$

13.23. (xx 1978) W pewnym ośrodku energia fotonu o długości fali $\lambda = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ma wartość $E = 4,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Obliczyć bezwzględny współczynnik załamania tego ośrodka ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$)

$$\text{Odp.} \quad n = \frac{h c}{E \lambda}, \quad n = 1,5.$$

13.24. Fala świetlna o natężeniu $I = 0,20 \text{ W/cm}^2$ trafia na powierzchnię odbijającą o współczynniku odbicia $\eta = 0,8$. Kąt padania wynosi $\alpha = 45^\circ$. Obliczyć wielkość ciśnienia normalnego wywieranego przez światło na tę powierzchnię.

$$\text{Odp.} \quad p = \frac{I(1 + \eta) \cos^2 \alpha}{c}, \quad p = 6 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

13.25. (xx 1984) Źródło monochromatycznego promieniowania ultrafioletowego emituje $n = 5 \cdot 10^{19}$ fotonów w ciągu jednej sekundy. Moc tego promieniowania wynosi $P = 50 \text{ W}$. Obliczyć pęd pojedynczego fotonu oraz maksymalną prędkość elektronów wybijanych przez te fotony z metalu o pracy wyjścia $W = 5 \text{ eV}$. Masa elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

$$\text{Odp.} \quad p = \frac{P t}{n c}, \quad p = 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{P t}{n} - W \right)}, \quad V = 6,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

13.26. Kulka żelazna, oddalona od innych ciał, oświetlona została światłem monochromatycznym o długości fali $\lambda = 2000 \text{ Å}$. Obliczyć, do jakiego maksymalnego potencjału naładuje się ta kulka tracąc fotoelektrony. Praca wyjścia z żelaza wynosi $W = 4,36 \text{ eV}$, Stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

$$\text{Odp.} \quad U = \frac{h c - W \lambda}{e \lambda}, \quad U = 1,85 \text{ V}$$

13.27. (x 1985) Światło monochromatyczne pada na płytkę metalową powodując emisję elektronów z jej powierzchni. Obliczyć długość fali tego światła, jeżeli wiadomo, że do zahamowania tych elektronów potrzebne jest napięcie U . Dodatkowe dane: h – stała Plancka, e – ładunek elektronu, W – praca wyjścia, c – prędkość światła.

Odp.
$$\lambda = \frac{h c}{e U + W}.$$

13.28. (xx 1998) Dla elektronów emitowanych w zjawisku fotoelektrycznym z powierzchni platyny, wartość potencjału hamującego wynosi $U = 0,8$ V. Obliczyć:

- a) długość fali padającego światła,
b) maksymalną długość fali, przy której jest jeszcze możliwe zjawisko fotoelektryczne.
Praca wyjścia z platyny wynosi $W = 6,3$ eV.

Odp. a)
$$\lambda = \frac{h c}{e U + W}, \quad \lambda = 1,72 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

b)
$$\lambda_0 = \frac{h c}{W}, \quad \lambda_0 = 1,98 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

13.29. Ile razy zwiększy się promień orbity elektronu w atomie wodoru znajdującym się w stanie podstawowym, po wzbudzeniu go kwantem o energii $E = 12,09$ eV. Dane są: stała Rydberga $R = 1,097 \cdot 10^7$ 1/m, stała Plancka $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J s, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

Odp.
$$\frac{r}{r_0} = \frac{h c R}{h c R - E}, \quad \frac{r}{r_0} = 9$$

13.30. Znaleźć długość fali de Broglie'a protonu o energii kinetycznej $E = 100$ eV. Masa spoczynkowa protonu wynosi $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Nie uwzględniamy efektu relatywistycznego.

Odp.
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m E}}, \quad \lambda = 2,84 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

13.31. Światło jednorodne o długości fali $\lambda = 589$ nm pada na siatkę dyfrakcyjną ulegając ugięciu. Na ekranie ustawionym za siatką w odległości $d = 50$ cm powstają prążki interferencyjne. Obliczyć stałą siatki, jeżeli prążek drugiego rzędu znajduje się w odległości $h = 8$ cm od prążka środkowego.

Odp.
$$a = \frac{2 \lambda \sqrt{h^2 + d^2}}{h}, \quad a = 0,007 \text{ mm}.$$

13.32. (x 1998) Na siatkę dyfrakcyjną, której stała $d = 0,01$ mm, pada prostopadle równoległa wiązka światła czerwonego ($\lambda_e = 7000$ Å). Obliczyć odległość między pierwszym i trzecim prążkiem na ekranie ustawionym w odległości $L = 1$ m od siatki (można przyjąć, że dla małych kątów $\sin \alpha = \tan \alpha$).

Odp. $\Delta x = 2 \frac{\lambda L}{d}, \quad \Delta x = 14 \text{ cm}.$

13.33. (xx 1979) Elektrony w lampie elektronowej są przyspieszane napięciem $U = 2$ kV. Obliczyć stosunek minimalnej długości fali de Broglie'a, odpowiadającej elektronom w tej lampie, do długości najkrótszej fali elektromagnetycznej powstającej przy hamowaniu elektronów na anodzie. ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $e/m = 1,8 \cdot 10^{11}$ C/kg).

Odp. $\frac{\lambda_B}{\lambda_e} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{U e}{2 m}}, \quad \frac{\lambda_B}{\lambda_e} = 0,045.$

13.34. (x 1987) Obliczyć największą prędkość elektronu, który jest hamowany przez antykatodę lampy rentgenowskiej, jeżeli najmniejsza długość fali widma ciągłego promieniowania rentgenowskiego wynosi $\lambda_{\min} = 0,5 \cdot 10^{-9}$ m. Stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, masa elektronu $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg. Efekt relatywistyczny zaniedbujemy.

Odp. $V = \sqrt{\frac{2 h c}{m \lambda}}, \quad V = 2,98 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$

13.35. (xx 1978) Do lampy rentgenowskiej przyłożono napięcie U . Obliczyć stosunek pędu elektronu w chwili uderzenia o anodę lampy do pędu fotonu odpowiadającego granicy krótkofalowej powstającego promieniowania rentgenowskiego. Prędkość światła w próżni – c , a stosunek elektronu do jego masy jest k . Relatywistyczną zmianę masy można pominąć.

Odp. $\frac{p_e}{p_f} = c \sqrt{\frac{2}{U k}}.$

13.36. (xx 1980) Promienie Roentgena wytwarzane napięciem U , padając na płytkę metalową wywołują zjawisko fotoelektryczne. Obliczyć najmniejszą długość fali de Broglie'a elektronów wysyłanych z metalu, jeżeli praca wyjścia z tego metalu wynosi W .

Odp. $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m (e U - W)}}.$

Zadania testowe

13.37. (xx 1981) Punktowe źródło światła oświetla małą powierzchnię oddaloną o 1 m i nachyloną pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do kierunku biegu promieni. Na jaką odległość należy odsunąć tę powierzchnię, aby uzyskać takie samo oświetlenie przy promieniach padających na nią prostopadle?

13.38. (xx 1989) Punktowe źródło światła o natężeniu I wysyła promieniowanie równomiernie w każdym kierunku. Znaleźć związek między strumieniem światła padającymi na powierzchnię półkolistą o promieniach r i R , jeżeli $r = R/2$.

13.39. (xx 1984) Dwa źródła światła wywołują promieniowanie o jednakowej mocy. Pierwsze z nich wysyła światło niebieskie, a drugie czerwone. Które z tych źródeł wysyła więcej fotonów w jednostce czasu?

13.40. (x 1986) (1998) Ile wynosi pęd fotonu o długości fali λ ? (stała Plancka h).

13.41. (xx 1987) Ile wynosi pęd fotonu, który posiada energię $E = 1 \text{ MeV}$? Dana jest prędkość światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

13.42. (xx 1998) Znaleźć energię fotonu, którego długość fali jest $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ ($h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

13.43. (xx 1998) Znaleźć maksymalną długość fali fotonu, który rozbija molekułę o energii wiązania $E = 15 \text{ eV}$. ($h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

13.44. (x 1986) Jaką masę można przypisać fotonowi o długości fali λ ? Dane: stała Plancka h i prędkość światła c .

13.45. (xx 1990) Jaką masę należy przypisać fotonowi o energii $h\nu$? Dana jest prędkość światła c .

13.46. (x 1990) Obliczyć stosunek energii fotonów fali czerwonej λ_c do energii fali fioletowej λ_f .

13.47. (xx 1998) Z jaką prędkością powinien poruszać się elektron, aby jego energia kinetyczna była równa energii fotonu o długości fali $\lambda = 5200 \text{ \AA}$?

13.48. (xx 1990) Czy graniczna długość fali, w zjawisku fotoelektrycznym zależy od materiału fotokatody?

13.49. (xx 1981) Czy ogniskowa soczewki zależy od pędu fotonu?

13.50. (xx 1982) Przez płytkę szklaną bieżą w tym samym kierunku dwa fotony: foton światła żółtego i foton światła czerwonego. Który z tych fotonów przebędzie w krótszym czasie odległość między ściankami płytki?

13.51. (xx 1981) (xx 1998) Oblicz ile czasu trwa przejście fotonu przez płytkę szklaną o grubości $s = 2 \text{ cm}$. Współczynnik załamania światła w szkłe wynosi $n = 1,5$, prędkość światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Światło pada prostopadle na płytkę.

13.52. (x 1990) Jaki warunek musi spełniać długość fali świetlnej padającej na powierzchnię metalu aby zaszło zjawisko fotoelektryczne?

13.53. (x 1985) (xx 1989) Od czego zależy długofalowa granica efektu fotoelektrycznego? Podaj wyrażenie na maksymalną długość fali światła wywołującego efekt fotoelektryczny, jeżeli praca wyjścia z danego metalu wynosi W , stała Plancka h , prędkość światła c .

- 13.54.** (x 1989) Podać prawa zjawiska fotoelektrycznego.
- 13.55.** (xx 1988) Czy zmieni się energia wybijanych fotoelektronów, gdy natężenie wiązki fotonów padających na powierzchnię metalu zwiększymy dwukrotnie?
- 13.56.** (xx 1987) Jaka jest maksymalna prędkość wybijanych elektronów z powierzchni cezu, przy oświetleniu go światłem o długości fali λ , jeżeli graniczna długość fali zjawiska fotoelektrycznego dla cezu wynosi λ_g . Dane są masa elektronu m_e , stała Plancka h , prędkość światła c .
- 13.57.** (xx 1986) Punktowe źródło światła oświetla płytkę metalową, wywołując emisję elektronów z jej powierzchni. Co ulegnie zmianie – liczba emitowanych elektronów czy ich prędkość, gdy źródło światła oddalimy od płytki?
- 13.58.** (xx 1981) Czemu jest równy iloczyn pędu danej cząsteczki i odpowiadająca jej długość fali de Broglie’a?
- 13.59.** (xx 1988) Jak zmieni się moment pędu elektronu w atomie wodoru przy jego przejściu z czwartej orbity na drugą?
- 13.60.** (x 1989) Wymienić postulaty Bohra.
- 13.61.** (xx 1986) Powierzchnię cezu oświetlono najpierw światłem czerwonym o dużym natężeniu, potem światłem fioletowym o małym natężeniu. W którym przypadku uzyskano elektrony o większej prędkości?
- 13.62.** (xx 1987) Znaleźć długość fali de Broglie’a cząsteczki o masie spoczynkowej m_0 poruszającej się z prędkością $V = 0,6 c$. Stała Plancka wynosi h .
- 13.63.** (xx 1990) Jakiego innego przyrządu optycznego poza pryzmatem można użyć, aby otrzymać widmo optyczne?
- 13.64.** (xx 1981) (xx 1984) (xx 1986) Promień świetlny padający na powierzchnię płytki szklanej pod kątem $\alpha = 60^\circ$ ulega po odbiciu całkowitej polaryzacji. Ile wynosi współczynnik załamania szkła, z którego wykonano płytkę?
- 13.65.** (xx 1985) Dla której z barw: czerwonej czy fioletowej kąt całkowitej polaryzacji, przy odbiciu światła od płytki szklanej jest większy?
- 13.66.** (xx 1988) Pod jakim kątem, względem poziomu, widać Słońce, jeżeli promień świetlny odbijając się od powierzchni wody zostaje całkowicie spolaryzowany? Bezwzględny współczynnik załamania wody wynosi n .
- 13.67.** (x 1989) Podać warunek maksymalnej polaryzacji światła podczas odbicia od powierzchni dielektryka o współczynniku załamania n .
- 13.68.** (xx 1981) (xx 1986) Napięcie przyłożone do lampy rentgenowskiej zwiększono dwukrotnie. Jak na skutek tego zmieni się długość fali określającą krótkofalową granicę ciągłego widma promieniowania tej lampy?
- 13.69.** (x 1990) Od czego zależy krótkofalowa granica promieniowania rentgenowskiego?
- 13.70.** (xx 1990) Graniczna długość fali widma ciągłego promieniowania rentgenowskiego wynosi λ_g . Jaka jest maksymalna prędkość hamowania elektronów na antykato-dzie? Dane są: masa elektronu m , prędkość światła c , stała Plancka h .

XIV. FIZYKA JĄDROWA

14.1 Odkrycie jądra atomowego i jego składniki

Jądro atomowe zostało odkryte przez Rutherforda w 1911 roku. W celu wyjaśnienia przenikania cząstek α przez cienkie folie metalowe, Rutherford podał hipotezę, że atom jest „pusty” tzn. składa się z bardzo małego jądra, w którym skupiona jest cała masa atomu o ładunku dodatnim i powłoki elektronowej o ładunku ujemnym (dawniej uważano, że atom jest pełną kulą o ładunku dodatnim z powtykanymi elektronami o ładunku ujemnym). W oparciu o założenie Rutherforda, doświadczenie z przenikaniem cząstek α przez cienkie folie tłumaczyło się bardzo dobrze.

Rutherford oszacował również średnicę jądra jako najmniejszą odległość, na jaką może zbliżyć się cząstka α do jądra pokonując siłę odpychania. Okazało się, że średnica jądra jest rzędu 10^{-14} m, podczas gdy średnica atomu jest rzędu 10^{-10} m. Jądro jest więc 10000 razy mniejsze od samego atomu.

Jądro atomowe składa się z dwóch rodzajów cząstek: protonów o ładunku dodatnim i neutronów obojętnych. Masy tych cząstek wynoszą odpowiednio:

$$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0078 \text{ j.m.a.}$$

$$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0087 \text{ j.m.a.}$$

gdzie j.m.a. – jednostka masy atomowej równa się $1/12$ masy izotopu węgla $^{12}_6\text{C}$).

Ilość wszystkich cząstek w jądrze: protonów i neutronów, zwanych nukleonami, nazywa się liczbą masową i oznacza się literą A, u góry symbolu pierwiastka. Liczba samych protonów w jądrze nazywa się liczbą porządkową, lub atomową i oznacza się literą Z, u dołu symbolu pierwiastka: ^A_ZX .

Liczba neutronów w jądrze równa się różnicy pomiędzy liczbą masową a liczbą atomową:

$$N = A - Z. \quad (14.1)$$

Izotopy są to atomy tego samego pierwiastka, a więc o tej samej liczbie atomowej Z, czyli posiadające tę samą liczbę protonów, ale o różnej liczbie masowej, a więc o różnej liczbie neutronów.

Izobary są to atomy o tej samej liczbie masowej A, lecz o różnej liczbie porządkowej, a więc o różnej liczbie protonów.

Promień jądra wyraża się wzorem:

$$r_j = r_0 \sqrt[3]{A} \quad (14.2)$$

gdzie r_0 – jest stałą, która dla $A \geq 40$ wynosi $1,07 \cdot 10^{-15}$ m.

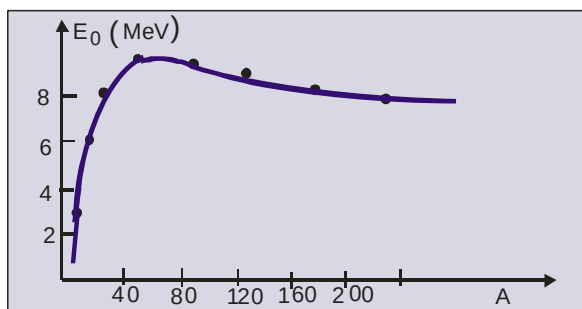
14.2. Energia wiązania jądra, defekt masy

Pomimo sił odpychających pomiędzy protonami, nukleony tworzą jądra dzięki występującym innym dużym siłom, które nazywają się siłami jądrowymi. Są one krótko zasięgowe, a więc działają tylko na małych odległościach, zawsze przyciągająco, niezależnie od rodzaju nukleonu.

Dzięki siłom wzajemnego przyciągania się nukleonów, możemy mówić o energii, która została nazwana energią wiązania. Energia ta podzielona przez liczbę nukleonów w jądrze daje energię wiązania przypadającą na jeden nukleon. Zależność tej energii od liczby masowej – A , przedstawia **rys. 14.1**. Największa energia przypada dla liczby masowej około 60 i wynosi $E_0 = 8,8$ MeV.

Z wykresu widać, że gdy powstaje lekkie jądro np. helu z dwóch deuteronów, tj. gdy przesuwamy się w kierunku większych energii przypadających na jeden nukleon, to wtedy energia wiązania wydzielą się na zewnątrz (podobnie, gdy kamień spadnie z pewnej wysokości na Ziemię, to będzie on związany z Ziemią siłą grawitacji, a jego energia wydzieli się w postaci ciepła).

W przypadku jąder ciężkich ($A > 60$), energia będzie się wydzielać przy ich rozdzielaniu na mniejsze fragmenty, gdyż mniejszym fragmentom będzie odpowiadać większa energia wiązania przypadająca na jeden nukleon.



Rys. 14.1. Zależność energii wiązania przypadającej na jeden nukleon w funkcji liczby masowej

Energia wiązania czerpana jest z ubytku lub z tzw. defektu masy. Masa jądra danego pierwiastka jest mniejsza od sumy mas poszczególnych nukleonów występujących oddzielnie. Różnica mas (Δm) zamienia się na energię według wzoru Einsteina:

$$E = \Delta m \, c^2, \quad (14.3)$$

gdzie c – jest prędkością światła w próżni.

Po podstawieniu za Δm masy jednego nukleonu, jako 1/12 część masy izotopu jądra węgla $^{12}_6\text{C}$, oraz za c prędkość światła w próżni, otrzymamy energię równoważną jednostce masy atomowej w dżulach. Po zamianie na MeV energia ta wyniesie:

$$E = 931 \text{ MeV} \quad (14.4)$$

Przykład 14.1

Obliczyć energię wiązania przypadającą na jeden nukleon przy tworzeniu się jądra deuteronu z neutronu i protonu, jeżeli masa neutronu wynosi $m_n = 1,0087 \text{ j.m.a.}$ a protonu $m_p = 1,0078 \text{ j.m.a.}$

Masa deuteronu $m_d = 2,0141 \text{ j.m.a.}$

$$\begin{array}{r} \text{Suma mas neutronu i protonu będzie: } 1,0087 \\ + 1,0078 \\ \hline 2,0165 \text{ j.m.a.} \end{array}$$

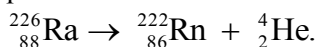
$$\begin{array}{r} \text{Defekt masy otrzymamy jako różnicę: } 2,0165 \\ - 2,0141 \\ \hline 0,0024 \text{ j.m.a.} \end{array}$$

Mamy więc $E = 0,0024 \cdot 931 = 2,23 \text{ MeV}$. Energia wiązania przypadająca na jeden nukleon będzie dwa razy mniejsza a więc wyniesie:

$$E = 1,1 \text{ MeV.}$$

14.3. Naturalna promieniotwórczość, promienie α , β , γ

Naturalną promieniotwórczością nazywamy samorzutny rozpad jądra atomowego na jego fragmenty. Każdy pierwiastek promieniotwórczy ma swój półokres rozpadu tj. czas, po upływie którego rozpada się połowa preparatu danego pierwiastka. Jądro radu np. ma półokres rozpadu równy 1600 lat i rozpada się na jądro radonu i jądro helu (cząstkę α), co można zapisać:



Rozpadowi promieniotwórczemu towarzyszy promieniowanie, które rozdziela się w polu magnetycznym na trzy części α , β , γ (**rys. 14.2.**).

Promienie α są to jądra helu o podwójnym elementarnym ładunku dodatnim. Promienie te wykazują właściwości jonizacyjne, a w powietrzu ich zasięg wynosi kilka cm. Po przebyciu tej drogi cząstka α znika, tzn. przyjmuje dwa elektrony i staje się dzięki temu obojętnym atomem helu.

Promienie β są to elektrony. Powstają one w momencie rozpadu jądra. Wtedy neutron zamienia się na proton i jeden elektron, co można zapisać:

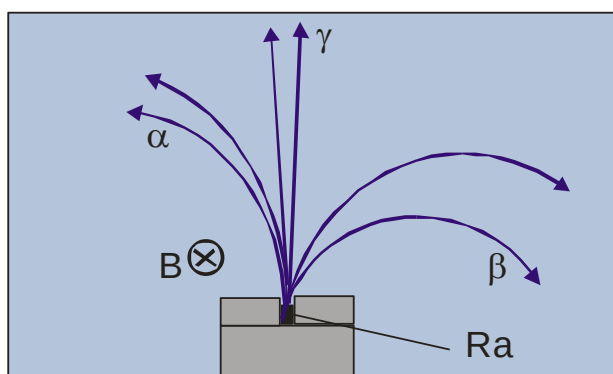
$$n \rightarrow p + \beta \quad (14.5)$$

Promienie β mają duży „rozrzut” energetyczny, co widać na **rys. 14.2.** jako rozbieżność ich torów. W celu wyjaśnienia tej rozbieżności, postawiono hipotezę, że jednocześnie z emisją elektronu, emitowana jest jeszcze jedna cząstka, obojętna

o masie spoczynkowej równej zero. Nazwano ją neutrinem. W przypadku, gdy cząstka β ma mniejszą energię, to oznacza, że więcej energii przypada na neutrino, gdy cząstka β ma większą energię, to wtedy neutrino ma energię mniejszą i wzór (14.5) przechodzi w następujący:

$$n \rightarrow p + \beta + \nu_0 \quad (14.6)$$

Promienie γ są to fale elektromagnetyczne nieodchylające się w polu magnetycznym. Kwant promieniowania γ powstaje stąd, że w momencie rozpadu jądra, nukleony przemieszczają się przechodząc na wyższe poziomy energetyczne. Wracając na poziomy niższe emitują kwanty promieniowania



Rys. 14.2. Promieniowanie emitowane przez pierwiastek radioaktywny (promieniotwórczy) – rad rozdziela się w polu magnetycznym na trzy rodzaje promieniowania α , β , γ

14.4. Prawo rozpadu promieniotwórczego

W celu otrzymania wzoru na prawo rozpadu promieniotwórczego, wprowadza się pojęcie stałej rozpadu, jako stosunku całkowitej liczby jąder uległych rozpadowi dN do liczby jąder w chwili początkowej N_0 i do czasu w ciągu, którego rozpad się dokonał dt :

$$\lambda = -\frac{dN}{N_0 dt} \quad (14.7)$$

Znak minus że ma miejsce względne zmniejszenie liczby jąder w jednostce czasu (stosujemy ten wzór gdy $T \gg dt$).

Ponieważ masa danej próbki jest wprost proporcjonalna do ilości jąder, wzór (14.7) może być wyrażony w funkcji ubytku masy dm i masy początkowej m_0 w odstępie czasu dt :

$$\lambda = -\frac{dm}{m_0 dt} \quad (14.8)$$

Za pomocą powyższego wzoru możemy łatwo określić stałą rozpadu λ mierząc ubytek masy dm w określonym czasie dt przy początkowej masie m_0 .

Wzór (14.7), po przekształceniu przyjmie postać:

$$-\lambda dt = \frac{dN}{N},$$

a po scałkowaniu otrzymamy:

$$-\lambda t = \ln N - \ln N_0$$

lub

$$-\lambda t = \ln \frac{N}{N_0}$$

i ostatecznie, prawo rozpadu promieniotwórczego wyrazi się wzorem:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (14.9)$$

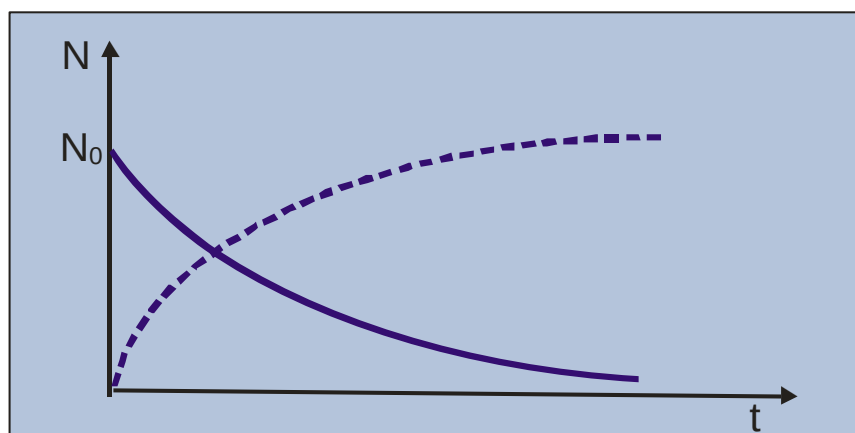
Gdzie N – jest liczbą jąder pozostałych (nierozpadniętych).

Powyższe prawo przedstawione jest na wykresie na **rys. 14.3.** linią ciągłą. Linia przerywana natomiast przedstawia zależność liczby jąder rozpadniętych od czasu:

$$\Delta N = N_0 - N$$

lub uwzględniając wzór (14.9):

$$\Delta N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (14.10)$$



Rys. 14.3. Prawo rozpadu promieniotwórczego – linia ciągła

Jeżeli za czas t we wzorze (14.9) podstawimy półokres rozpadu T , to wzór ten przyjmie postać:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}.$$

a po zlogarytmowaniu i po przekształceniu otrzymamy:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (14.11)$$

Prawo rozpadu promieniotwórczego może być też wyprowadzone w inny sposób: w chwili początkowej jest N_0 jąder, po upływie jednego półokresu rozpadu pozostanie $N_0/2$ jąder, po upływie $2T$ pozostanie $N_0/4$, po upływie $3T$ zostanie $N_0/8$ czyli $N_0/2^3$, ogólnie można więc powiedzieć, że po upływie czasu $t = nT$ pozostanie jąder:

$$N = \frac{N_0}{2^n},$$

gdzie

$$n = \frac{t}{T},$$

więc:

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Korzystając ze wzoru:

$$e^{\ln 2} = 2 \quad (14.12)$$

otrzymamy:

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{T} \ln 2},$$

gdzie

$$\frac{\ln 2}{T} = \lambda.$$

Mamy więc ostatecznie:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

P r z y k ł a d 14.2

Obliczyć ile cząstek α emituje 1g radu $^{226}_{88}\text{Ra}$ w czasie jednej sekundy (aktywność promieniotwórcza), jeżeli półokres rozpadu w/w pierwiastka wynosi $T = 1600$ lat.

Z liczby Avogadra wyliczymy ile jąder znajduje się w 1 g Ra.

Liczba Avogadra jest to ilość cząsteczek (atomów) w jednym kilomolu substancji. $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ cz/kmol. 226 kg radu zawiera N_A atomów radu to 1 kg

radu będzie zawierać $N_0 = \frac{N_A}{A}$ atomów radu.

Ilość jąder rozpadniętych w czasie dt wyliczymy ze wzoru (14.7):

$$dN = \lambda N_0 dt$$

Wyznaczając stałą rozpadu promieniotwórczego λ w funkcji półokresu rozpadu T ze wzoru (14.11), otrzymamy:

$$dN = \frac{\ln 2}{T} \frac{N_A}{A} dt \quad dN = 3,7 \cdot 10^{10}.$$

14.5. Reakcje jądrowe

Pierwszą reakcję jądrową przeprowadził Rutherford w 1919 roku, badając oddziaływanie cząstek α z atomami azotu. Zauważył on pojawienie się protonów, chociaż nie było nawet śladów wodoru. Widocznie, więc miała miejsce reakcja, w której jądra azotu, pod wpływem bombardowania cząstkami α zamieniają się na jądra tlenu i emitowany jest przy tym proton:

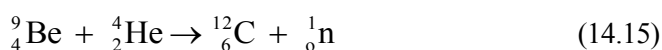


Reakcje jądrowe zapisują się też w formie skróconej:



Na pierwszym miejscu, przed nawiasem stoi jądro pierwiastka bombardowanego, w nawiasie: cząstka bombardująca i cząstka powstała z reakcji. Poza nawiasem – pierwiastek uzyskany z danej reakcji jądrowej. Reakcję jądrową należy rozumieć w ten sposób, że cząstka bombardująca np. cząstka α łączy się na bardzo krótki okres czasu z jądrem bombardowanym, a następnie nowo powstałe jądro rozpada się w różny sposób np. na proton i resztę jądra.

Drugą reakcję jądrową przeprowadził Chadwick w 1932 roku, która związana była z odkryciem neutronu: strumień cząstek α skierowany na płytkę berylową spowodował reakcję jądrową, w której powstawał izotop węgla ${}^{12}_6\text{C}$ i neutron. Przez długi czas reakcja ta była używana, jako jedyne źródło neutronów:



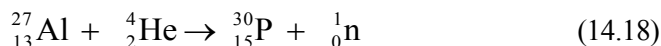
Trzecią z kolei reakcję jądrową otrzymali Cockcroft i Walton, też w 1932 roku, używając po raz pierwszy pocisków bombardujących, sztucznie przyspieszonych protonów za pomocą akceleratora Van de Graffa dającego napięcie do 600 kV. Protony bombardowały płytkę litu, w wyniku czego powstawały cząstki α :



Podobna reakcja zachodzi z borem, z tą różnicą, że z jednego jądra boru i jednego protonu otrzymuje się trzy cząstki α :

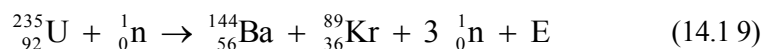


Następna reakcja jądrowa doprowadziła do wystąpienia sztucznej promieniotwórczości tzn. do wytworzenia pierwiastka promieniotwórczego: Państwo Joliot-Curie, bombardując tarczę aluminium cząstkami α zauważyli, że wykazuje ona właściwości promieniotwórcze po ustaniu naświetlenia cząstkami α . Oznaczało to, że w wyniku reakcji jądrowej wytworzył się nowy pierwiastek promieniotwórczy – był nim izotop $^{30}_{15}\text{P}$:



Otrzymany promieniotwórczy izotop fosforu ma półokres rozpadu $T = 2$ min. i rozpada się na krzem i cząstkę zwaną pozytonem. Ma ona masę równą masie elektronu, ale ładunek dodatni. Została też odkryta w promieniach kosmicznych przez Andersena w 1936 roku. Pierwiastki promieniotwórcze powstają również przy bombardowaniu różnych tarcz neutronami, których użył jako pocisków bombardujących po raz pierwszy Fermi. Mają one tę zaletę, że nie są odpychane przez jądro., które bombardują.

W 1939 roku została przeprowadzona przez Strassmana reakcja jądrowa prowadząca do zjawiska zwanego rozszczepieniem jądra, a polegającym na tym, że jądro izotopu uranu $^{235}_{92}\text{U}$ bombardowane neutronami o energii około 1 eV rozpada się na dwie części o stosunku mas 3/2. Wydziela się przy tym duża ilość energii i dwa lub trzy wolne neutrony o takiej energii, że każdy może wywołać nową reakcję rozszczepienia, co prowadzi do tzw. reakcji lawinowej (łańcuchowej)



Zadania rozwiązane

14.1. Obliczyć energię wiązania przypadającą na jeden nukleon dla jądra izotopu helu ^4_2He jeżeli masa protonu wynosi $m_p = 1,0078$ j.m.a. masa neutronu $m_n = 1,0087$ j.m.a. a masa jądra helu $M_{\text{He}} = 4,0026$ j.m.a.

Suma mas składników jądra helu wynosi:

	1,0078	
	1,0078	
	1,0087	Ubytek masy będzie: 4,0330
	+ 1,0087	-4,0026
razem	4,0330 j.m.a	0,0304 j.m.a.

Energia wiązania: $0,0304 \cdot 931 = 28,3$ MeV (931 MeV jest to energia równoważna jednostce masy atomowej). Energia wiązania przypadająca na jeden nukleon wyniesie:

$$E_0 = 28,3/4 = 7,075 \text{ MeV.}$$

14.2. Obliczyć, jaka ilość energii wydzielą się podczas powstawania z protonów i neutronów 4 g helu, o liczbie masowej 4, jeżeli liczba Avogadra wynosi $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ at/mol, masa protonu, neutronu i jądra helu jak w zadaniu poprzednim. Energię otrzymaną wyrazić w elektronowoltach i w dżulach. Energia powstająca przy tworzeniu się jednego jądra helu wynosi $E_{He} = 28,3$ MeV (zad. 14.1). Ponieważ w czterech gramach helu jest tyle atomów (jąder) ile wynosi liczba Avogadra, a energia wiązania jednego atomu helu wynosi $E_{He} = 28,3$ MeV, więc szukana ilość energii będzie iloczynem:

$$E_x = E_{He} \cdot N_A = 28,3 \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ MeV} = 169 \cdot 10^{23} \text{ MeV}$$

$$169 \cdot 10^{23} \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 270 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

14.3. (xx 1975) Okres połowicznego zaniku pewnego izotopu promieniotwórczego wynosi $T = 100$ s. Obliczyć, po upływie jakiego czasu z jednego grama tego izotopu pozostanie $m = 10$ mg? Przyjąć $\ln 2 = 0,7$ $\ln 10 = 2,3 \log 10$.

Wychodzimy ze wzoru: $m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$

lub
$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T} t},$$

gdzie m jest masą pierwiastka promieniotwórczego pozostałego po czasie t .
Po zlogarytmowaniu obu stron powyższego równania, otrzymamy:

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{\ln 2}{T} t,$$

skąd wyznaczymy szukany czas t :

$$t = T \frac{\ln \frac{m}{m_0}}{\ln 2}, \quad t = 657 \text{ s.}$$

14.4. (xx 1976) W próżniowej ampulce umieszczono na przeciąg czasu $t = 1$ roku masę $m = 5$ g preparatu promieniotwórczego o okresie połowicznego rozpadu $T \gg t$. W procesie rozpadu promieniotwórczego jeden gram tego preparatu emituje w czasie jednej sekundy $n_0 = 3,7 \cdot 10^{10}$ cząstek α stanowiących jądro helu. Obliczyć, jakie ciśnienie będzie wywierał hel w temperaturze $T = 300$ K, jeżeli zajmuje on objętość $V = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. $\left(N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \right) \left(R = 8,3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right)$.

Wychodzimy ze wzoru na ciśnienie gazu:

$$p = \frac{n}{V} \frac{R}{N_A} T,$$

gdzie n – jest ilością cząstek α , równą ilości atomów helu powstałych z rozpadu promieniotwórczego, w czasie t z masy m . Jeżeli $T \gg t$, to wtedy można przyjąć, że n jest proporcjonalne do m i t :

$$n = n_0 m t.$$

Szukane ciśnienie wyrazi się wzorem:

$$p = \frac{n_0 m t R T}{V N_A}, \quad p = 8,1 \cdot 10^3 \text{ Pa}.$$

14.5. (xx 1977) Promieniowanie kosmiczne wytwarza stale w atmosferze Ziemi masę $m = 10 \text{ kg}$ rocznie promieniotwórczego izotopu C^{14} . Obliczyć całkowitą masę tego izotopu wiedząc, że pozostaje ona stała. Okres połowicznego zaniku węgla C^{14} wynosi $T = 5740 \text{ lat}$, $\ln 2 = 0,69$.

Korzystamy ze wzoru: $\lambda = -\frac{\Delta m}{m_0 \Delta t},$

gdzie Δm – jest ilością powstałego pierwiastka w czasie Δt jednego roku.

Skąd
$$m_0 = \frac{\Delta m T}{\Delta t \ln 2},$$

$$m_0 = 83 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

14.6. (xx 1977) Rad o masie $m = 1 \text{ g}$ wysyła $\Delta N = 3,7 \cdot 10^{10}$ cząstek α w czasie $\Delta t = 1 \text{ s}$. Obliczyć wartość liczby Avogadra, jeżeli czas połowicznego zaniku radu wynosi $T = 1600 \text{ lat}$ ($\approx 5 \cdot 10^{10} \text{ s}$), a masa molowa radu jest równa $\mu = 226 \text{ g/mol}$, $\ln 2 = 0,69$.

Korzystamy ze wzoru: $\lambda = \frac{\Delta N}{N_0 \Delta t},$

gdzie N_0 jest liczbą atomów w próbce radu o masie $m = 1 \text{ g}$, którą znajdujemy z liczby Avogadra:

$$N_0 = m \frac{N_A}{\mu}.$$

Mamy, więc:

$$\lambda = \frac{\Delta N \mu}{m N_A \Delta t}.$$

Skąd:
$$N_A = \frac{\Delta N \mu T}{m \Delta t \ln 2}, \quad N_A = 6,06 \cdot 10^{23} \frac{\text{cz}}{\text{mol}}.$$

14.7. (x 1990) Preparat promieniotwórczy zawiera N_0 jąder promieniotwórczych o okresie połowicznego zaniku T . Obliczyć ile jąder ulega rozpadowi w ciągu czasu t ?

Wychodzimy ze wzoru $N = N_0 e^{-\lambda t}$,

gdzie N – jest liczbą jąder pozostałych po upływie czasu t . Natomiast liczba jąder rozpadniętych w tym samym czasie t będzie:

$$N' = N_0 - N$$

albo

$$N' = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right).$$

14. 8. (xx 1980) Jądro polonu ${}^{218}_{84}\text{Po}$ emituje cząstki α o energii $E = 4 \text{ MeV}$. Obliczyć energię kinetyczną, jaką uzyskuje jądro powstałe w wyniku tego procesu, Jeżeli chwili rozpadu jądro było nieruchome.

Ze wzoru na energię kinetyczną cząstki α wyliczymy jej prędkość:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Prędkość odrzutu jądra otrzymamy z zasady zachowania pędu:

$$m v = (M - m) V_j.$$

Skąd:

$$V_j = \frac{m}{M - m} \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Szukana energia kinetyczna odrzutu jądra wyrazi się wzorem:

$$E_j = \frac{M - m}{2} V_j^2.$$

Po podstawieniu otrzymanej wartości na V_j ostatecznie będziemy mieli:

$$E_j = \frac{m}{M - m} E, \quad E_j = 1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

14.9. (xx 1976) Jaką masę uranu $^{235}_{92}\text{U}$ zużywa na dobę reaktor jądrowy o mocy $M = 5 \text{ MW}$, jeżeli podczas każdego aktu rozpadu wydzielą się energia $E_0 = 200 \text{ MeV}$, a sprawność reaktora wynosi $\eta = 17\%$, $N_A = 6 \cdot 10^{26} \text{ 1/mol}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Wychodzimy ze wzoru na sprawność reaktora:

$$\eta = \frac{E_{uz}}{E_w}, \quad (14.20)$$

gdzie E_{uz} – jest energią dostarczoną do reaktora z reakcji jądrowych. Jest ona równa iloczynowi energii powstałej z jednego jądra przez liczbę n rozpadów w czasie t :

$$E_w = E_0 n,$$

gdzie n – jest liczbą atomów uranu biorących udział w reakcji

Wzór (14.20) przyjmie teraz postać:

$$\eta = \frac{M t}{E_0 n},$$

skąd:

$$n = \frac{M t}{E_0 \eta}.$$

Znając liczbę n możemy wyliczyć, z liczby Avogadra szukaną masę uranu:

N_A atomów uranu posiada masę $235 \text{ kg } (\mu)$

więc: $\frac{M t}{E_0 \eta}$ atomów będzie miało masę $x \text{ kg}$,

stąd:

$$x = \frac{M t \mu}{E_0 \eta N_A}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$x = 31 \text{ g}$$

14.10. (x 1990) Rad $^{226}_{88}\text{Ra}$ rozpada się przechodząc w trwały izotop ołowiu $^{226}_{82}\text{Pb}$. Obliczyć liczbę rozpadów α i β .

Ponieważ liczba masowa zmniejszyła się o 20 ($226 - 206 = 20$), a każda cząstka α posiada 4 nukleony, więc będzie 5 rozpadów α . Przy rozpadzie β powstaje jeden proton. W wyniku rozpadu α ubyło 10 protonów. Ponieważ z różnicy liczb porządkowych wynika, że ubyło 6 protonów ($88 - 82 = 6$) więc musiało powstać 4 protony, czyli miało miejsce 4 rozpady β .

Zadania uzupełniające

14.11. (xx 1998) Obliczyć energię wiązania przypadającą na jeden nukleon dla jądra izotopu węgla $^{12}_6\text{C}$, jeżeli masa protonu wynosi $m_p = 1,0078 \text{ j.m.a}$, neutronu $m_n = 1,0087 \text{ j.m.a}$, masa jądra węgla $m_C = 12,0000 \text{ j.m.a}$.

Odp. $E = 7,68 \text{ MeV}$.

14.12. Obliczyć energię wiązania ostatniego neutronu w izotopie litu ^7_3Li , którego masa atomowa wynosi $m_{\text{Li}} = 7,0160 \text{ j.m.a}$, jeżeli izotop litu ^6_3Li ma masę atomową $m_{\text{Li}} = 6,0151 \text{ j.m.a}$, a masa atomowa neutronu wynosi $m_n = 1,0087 \text{ j.m.a}$.

Odp. $E = 7,26 \text{ MeV}$

14.13. (xx 1975) Próbką promieniotwórczego pierwiastka o okresie połowicznego zaniku T ma masę m_0 . Obliczyć czas po upływie, którego masa ta zmniejszy się o Δm .

Odp. $t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{m_0}{m_0 - \Delta m}$.

14.14. (xx 1998) Obliczyć po upływie jakiego czasu nastąpi rozpad $\Delta m = 20 \text{ mg}$ polonu $^{210}_{84}\text{Po}$, jeżeli w chwili początkowej jego masa wynosiła $m_0 = 0,2 \text{ kg}$. Półokres rozpadu polonu wynosi $T = 138 \text{ dni}$.

Odp. $t = \frac{T \Delta m}{m_0 \ln 2}$, $t = 28,8 \text{ min}$.

14.15. Obliczyć okres połowicznego zaniku izotopu polonu $^{210}_{84}\text{Po}$, jeżeli wiadomo, że po upływie czasu $t = 458 \text{ dni}$ aktywność tego pierwiastka zmalała $k = 10$ razy (Aktywność pierwiastka promieniotwórczego nazywamy liczbę jąder rozpadających się w jednej sekundzie).

Odp. $T = \frac{t \ln 2}{\ln k}$, $T = 138 \text{ dni}$.

14.16. Obliczyć aktywność bryły uranu $^{238}_{92}\text{U}$ o masie $m = 1 \text{ kg}$ i wyrazić ją w Ci, jeżeli półokres rozpadu tego izotopu wynosi $T = 4,5 \cdot 10^9 \text{ lat}$ (1 Ci jest to liczba rozpadów cząstek α w 1 g radu w czasie 1 s. to $3,7 \cdot 10^{10}$)

Odp. $A = 0,33 \text{ mCi}$.

14.17. (xx 1978) Pierwiastek promieniotwórczy o okresie połowicznego zaniku T emituje cząstki α . Obliczyć liczbę cząstek emitowanych w czasie t przez próbkę tego pierwiastka o masie m . Masa molowa wynosi μ a liczba Avogadra N_A .

Odp.
$$N = \frac{N_A m}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right).$$

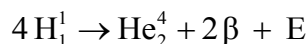
14.18. (xx 1998) Próbka radu o masie $m = 1 \text{ g}$ emituje w ciągu czasu $t_0 = 1 \text{ s}$ $n = 37 \cdot 10^9$ cząstek α , posiadających prędkość $V = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m/s}$. Obliczyć energię wydzielającą się w tym procesie w ciągu czasu $t = 1 \text{ min}$.

Odp.
$$E = \frac{n t m V^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \right), \quad E = 1,7 \text{ J/min}.$$

14.19. Obliczyć sprawność elektrowni jądrowej o mocy $P = 5000 \text{ kW}$, która zużywa w ciągu czasu $t = 1 \text{ godz.}$ masę $m = 1,2 \text{ g}$ uranu ${}^{235}_{92}\text{U}$. W czasie rozpadu jednego jądra uranu wydzielą się $E_0 = \text{MeV}$ energii. Liczba Avogadra $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ at/mol}$.

Odp.
$$\eta = \frac{P t \mu}{E_0 N_A m}, \quad \eta = 18\%.$$

14.20. Słońce czerpie energię z reakcji jądrowej, w której powstaje jedno jądro helu z czterech protonów:



Obliczyć, jaką ilość węgla należałoby spalić, ażeby uzyskać taką samą ilość energii jak przy użyciu $m = 4 \text{ g}$ wodoru z w/w reakcji, jeżeli ciepło spalania węgla jest $C_s = 30 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$

Odp.
$$M = 85 \text{ ton}.$$

Zadania testowe

14.21. (xx 1986) Ile razy ładunek jądra atomu rtęci $^{198}_{80}\text{Hg}$ jest większy od ładunku cząstki α ?

14.22. (x 1989) Ile neutronów i protonów znajduje się w jądrze uranu $^{238}_{92}\text{U}$?

14.23. (xx 1990) Czy masa jądra atomu jest dokładnie równa sumie mas cząstek, z których składa się jądro?

14.24. Określić, ile razy promień jądra uranu $^{238}_{92}\text{U}$ jest większy od promienia jądra deuteru ^2_1D .

14.25. (xx 1983) Metalowa płyta radioaktywna umieszczona w próżni emituje w ciągu jednostki czasu takie same liczby cząstek α i β oraz fotonów γ . Jakiego znaku ładunek pojawi się na powierzchni tej płyty?

14.26. (x 1985) Czas połowicznego zaniku pierwiastka promieniotwórczego wynosi T. Po jakim czasie liczba atomów tego pierwiastka zmaleje ośmiokrotnie?

14.27. (xx 1981) (xx 1987) (xx 1998) Preparat promieniotwórczy zawiera $N_0 = 10^8$ jąder promieniotwórczych o okresie połowicznego zaniku $T = 15$ godz. Ile jąder ulegnie rozpadowi w ciągu czasu $t = 60$ godz?

14.28. (xx 1982) Czas połowicznego rozpadu pewnej substancji wynosi $T = 4$ lata. Ile substancji radioaktywnej pozostanie po czasie $t = 12$ latach, jeżeli na początku masa tej substancji wynosiła $m_0 = 16$ g?

14.29. (xx 1985) (xx 1998) Ile gramów promieniotwórczego izotopu kobaltu zawierał 10 lat temu preparat, który obecnie zawiera $m = 10^{-3}$ g tego izotopu? Półokres rozpadu $^{60}_{27}\text{Co}$ wynosi 5 lat.

14.30. (xx 1989) Po 60 godz. pozostała 1/16 część masy początkowej izotopu promieniotwórczego. Ile wynosi półokres zaniku tego pierwiastka?

14.31. W ciągu czasu $t = 4$ godz. rozpadło się $p = 75\%$ początkowej liczby jąder pewnego izotopu promieniotwórczego. Jaki jest półokres rozpadu tego izotopu?

14.32. Czas połowicznego zaniku strontu $^{90}_{38}\text{Sr}$ wynosi $T = 20$ lat. Jaki % pierwotnej liczby jąder pozostanie po czasie $t = 10$ lat?

14.33. Promieniotwórczy izotop kobaltu $^{60}_{27}\text{Co}$ ma czas połowicznego zaniku $T = 5,7$ lat. Obliczyć aktywność masy $m = 1$ kg tego izotopu.

14.34. (xx 1988) Znajdujące się w spoczynku jądro promieniotwórcze rozpadło się emitując cząstkę α . Czy cząstka ta ma większą energię kinetyczną niż jądro powstałe z rozpadu?

14.35. (xx 1989) Jaki pęd posiada elektron, który porusza się z prędkością $V = 0,8 c$? Masa spoczynkowa elektronu wynosi $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

14.36. (xx 1986) Jaką energię kinetyczną uzyska cząstka α pod wpływem różnicy potencjałów wynoszącej U? Ładunek elektronu wynosi e.

14.37. (xx 1985) (1998) Jeden deutron i cząstka α przebyły tę samą różnicę potencjałów. Ile razy pęd cząstki α jest większy od pędu deutronu? Przyjąć, że masa protonu jest równa masie neutronu oraz, że prędkości początkowe obu cząstek były równe zeru.

14.38. (xx 1982) Z jaką prędkością powinno poruszać się ciało, żeby jego masa uległa podwojeniu?

14.39. (1981) Ile wynosi masa relatywistyczna cząstki o masie spoczynkowej m_0 poruszającej się z prędkością równą 0,6 prędkości światła?

14.40. (1986) Jądro berylu ${}^9_4\text{Be}$ pochłania jądro deutronu ${}^2_1\text{D}$ i zamienia się w jądro boru ${}^{10}_5\text{B}$. Napisać równanie reakcji i określić rodzaj powstałej cząstki.

14.41. (x 1990) Po wchłonięciu neutronu przez jądro ${}^{27}_{13}\text{Al}$, powstaje izotop sodu ${}^{24}_{11}\text{Na}$. Napisać równanie reakcji i określić rodzaj powstałej nowej cząstki.

14.42. (x 1990) Radioaktywny izotop krzemu ${}^{27}_{14}\text{Si}$ przechodzi w wyniku rozpadu w izotop aluminium ${}^{27}_{13}\text{Al}$. Napisać równanie reakcji i określić rodzaj wypromieniowanej cząstki

14.43. Izotop uranu ${}^{238}_{92}\text{U}$ zamienił się na izotop toru ${}^{234}_{90}\text{Th}$. Jaka cząstka została wyemitowana? Napisać reakcję.

14.44. Masa atomowa izotopu helu ${}^3_2\text{He}$ wynosi 3,016 j.m.a. jaka jest energia wiązania nukleonów, w tym jądrze? Jaka jest energia wiązania przypadająca na jeden nukleon? Jeżeli $m_n = 1,0087$ j.m. a., $m_p = 1,0078$ j.m.a.

14.45. Energia wiązania izotopu wapnia ${}^{42}_{20}\text{Ca}$ jest 361,7 MeV. Znaleźć masę atomową.

14.46. Ile kolejnych rozpadów α miało miejsce w przemianie izotopu ${}^{228}_{90}\text{Th}$ w izotop ołowiu ${}^{212}_{82}\text{Pb}$?

14.47. Jak zmieni się liczba masowa a jak porządkowa, jeżeli dany izotop wyemituje elektron?

14.48. Radioaktywny pierwiastek po emisji jednej cząstki α i dwóch cząstek β przemienił się w izotop uranu ${}^{235}_{92}\text{U}$. Co to za pierwiastek?

14.49. Półokres rozpadu izotopu strontu ${}^{88}_{38}\text{Sr}$ wynosi 28 lat.

a) w co zamieni się w/w izotop po rozpadzie β ?

b) Ile procent pozostanie tego izotopu po 112 latach?

14.50. Określić, jaki jest wiek kawałka drzewa pochodzącego z wykopaliska starożytnego, jeżeli stosunek zawartości izotopu węgla promieniotwórczego ${}^{14}_6\text{C}$ do izotopu stabilnego węgla ${}^{12}_6\text{C}$ w badanym kawałku drewna jest 4 razy mniejszy niż stosunek tych izotopów w żywych roślinach (drzewach)? Półokres rozpadu izotopu węgla ${}^{14}_6\text{C}$ jest $T = 5600$.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ TESTOWYCH

Rozdział I Międzynarodowy układ jednostek miar SI. Podstawowe wiadomości o wektorach.

- 1.19. Układ jednostek miar **SI**, jest to zbiór jednostek niektórych wielkości fizycznych, wybranych umownie, a służących do tworzenia wszystkich innych jednostek fizycznych. Do układu tego należą następujące jednostki: metr (m), sekunda (s), kilogram (kg), Amper (A), stopień Kalwina (K), Kandela (Cd).
- 1.20. Amper, jest to natężenie takiego prądu, który płynąc przez każdy z dwóch przewodów równoległych, nieskończenie długich, oddalonych od siebie o $L = 1$ m, umieszczonych w próżni, powoduje oddziaływanie pomiędzy tymi przewodami siłą $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N, na każdy metr bieżący przewodów.
- 1.21. Wielkościami skalarnymi są: **ciśnienie, czas, droga, masa, objętość, potencjał, praca, strumień**.
Wielkościami wektorowymi są: **pęd, prędkość, siła**.
- 1.22. $F = Q \frac{h}{L}$, $F = 800$ N.
 $N = Q \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L}$, $N = 3920$ N.
- 1.23. $F = Q \operatorname{tg} \alpha$, $F = 1732$ N.
- 1.24. $F_1 = Q \cos \alpha$, $F_1 = 5$ N.
 $F_2 = Q \sin \alpha$, $F_2 = 8,7$ N.
- 1.25. $F_x = F \frac{b}{a}$, $F_x = 1000$ N.
- 1.26. $F_x = \frac{F}{\sqrt{3}}$, $F_x = 57,3$ N.
- 1.27. $F_w = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$, $F_w = 5$ N.
- 1.28. $F_w = 10$ N
- 1.29. $F_w = 10$ N
- 1.30. $F_w = F \sqrt{3}$.
- 1.31. $F = \sqrt{2^2 + 3^2}$, $F = \sqrt{13}$.
- 1.32. $\vec{F}_s = 7 \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ $F_s = 7,1$ N.

- 1.33. $\vec{F}_r = 3 \vec{i} - 5 \vec{j} + 3 \vec{k}$ $F_r = 6,6 \text{ N}$.
 $F_x = Q \frac{\sqrt{2}}{4}$, $F_x = 35,3$.
- 1.34. $F_x = Q \frac{a}{L} \sin \alpha$, $F_x = 18 \text{ N}$.
- 1.35. Może wystawać 1/6 część długości belki.
- 1.36. $F_x = \frac{Q}{L-a} a$, $F_x = 250 \text{ N}$.

Rozdział II. Kinematyka punktu materialnego

- 2.23. $V_s = 6 \text{ m/s}$.
- 2.24. $V_s = \sqrt{\frac{g h}{2}}$.
- 2.25. $V_s = 8 \text{ m/s}$.
- 2.25. $V_s = 6 \text{ m/s}$.
- 2.26. $V_s = 0,5 \text{ m/s}$.
- 2.27. $V_s = \frac{2 V_1 V_2}{V_1 + V_2}$, $V_s = 240 \text{ m/s}$.
- 2.28. $x = Vt$, $x = 3,4 \text{ km}$.
- 2.29. $V_x = V \frac{d}{a}$, $V_x = 167 \text{ m/s}$.
- 2.30. $x = d \frac{V_r}{V}$, $x = 60 \text{ m}$.
- 2.31. $V = 200 \text{ km/s}$.
- 2.32. $V_p = V_r + \frac{L}{t}$, $V_p = 48 \text{ km/s}$.
- 2.33. $V = 5 \text{ m/s}$, $\alpha = 53^\circ 7'$.
- 2.34. $V = 50 \text{ m/min}$.
- 2.35. $V = 2 \text{ m/s}$.
- 2.36. $V = 50 \text{ km/h}$.
- 2.37. $a = \frac{2 S}{t^2}$, $a = 0,5 \text{ cm/s}^2$.
- 2.38. $V_k = V_0 + at$, $V_k = 60 \text{ km/h}$.
- 2.39. $d = 25 \text{ m}$, $t = 3,6 \text{ s}$.

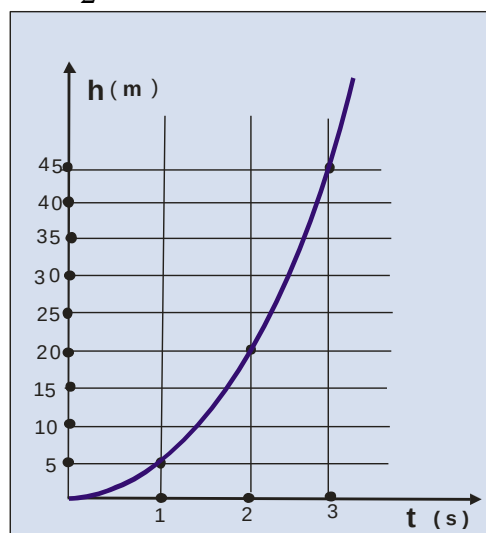
2.40. $S_5 = 18 \text{ m.}$

2.41. $S = 30 \text{ km.}$

2.42. $h = 240 \text{ m.}$

2.43. $a = \frac{d^2 S}{d t^2} = 2 \text{ A.}$ Nie zależy od czasu.

2.44. $h = \frac{g t^2}{2}, \quad h = 5 t^2 \text{ (parabola).}$



2.45. $h_{\max} = 20 \text{ m.}$

2.46. $h_1 = 7,1 \text{ m}, \quad h_2 = 4,2 \text{ m.}$

2.47. $V = 30 \text{ m/s.}$

2.48. $V_k = 25 \text{ m/s}, \quad h = 31,3 \text{ m.}$

2.49. $t = \sqrt{\frac{2 h}{g}}, \quad t = 8 \text{ s.}$

2.50. $y_1 = 5 \text{ m}, \quad y_2 = 20 \text{ m.}$

2.51. $V_0 = \frac{g t}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad V_0 11,5 \text{ m/s.} \quad V_0 = 5,1 \text{ m/s}$

2.52. $x = 28 \text{ m.}$

2.53. $\operatorname{tg} \alpha = 4, \quad \alpha = 76^\circ.$

2.54. $t = 1 \text{ s.}$

2.55. $\alpha = 45^\circ \quad x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$

Odległość x będzie największa, gdy kąt α będzie równy 45° .

2.56. $V_{\min} = V_0 \cos \alpha, \quad V_{\min} = 86,5 \text{ m/s.}$

Rozdział III. Dynamika punktu materialnego

- 3.41. $a = 15 \text{ m/s}^2$.
- 3.42. $F = 1 \text{ N}$.
- 3.43. $F = 6 \text{ N}$.
- 3.44. $F = 700 \text{ N}$.
- 3.45. $k = \tan \alpha$.
- 3.46. Określić kąt, przy którym klocek zsuwa się ruchem jednostajnym z równi utworzonej z deski. Tangens tego kąta jest szukany współczynnikiem tarcia.
- 3.47. $k = 0,05$.
- 3.48. $F = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$.
- 3.49. $k = 0,5$.
- 3.50. $F = 17 \text{ N}$.
- 3.51. $t = \frac{m V (n-1)}{F}$.
- 3.52. $F = 1 \text{ N}$.
- 3.53. $a = 5,86 \text{ m/s}^2$.
- 3.54. Są względem siebie w spoczynku, ponieważ przyspieszenie na równi, gdy tarcie zaniedbujemy, nie zależy od masy i są jednakowe dla obu ciał.
- 3.55. Wykres **B**
- 3.56. Zmieni, ponieważ przy stałej masie będzie zmieniać się prędkość.
- 3.57. Ruchem jednostajnym prostoliniowym, ponieważ przy stałej masie musi być stała prędkość.
- 3.58. Ruchem jednostajnie przyspieszonym, ponieważ proporcjonalnie do czasu wzrasta prędkość.
- 3.59. Dwa razy
- 3.60. $V_x = \frac{M V}{M + m}$, $V_x = 1,7 \text{ m/s}$.
- 3.61. $t = 1 \text{ s}$
- 3.62. $F = \frac{m V}{t}$, $F = 1600 \text{ N}$.
- 3.63. $p = V_0 m \cos \alpha$.
- 3.64. $\Delta p = 2 m V$.
- 3.65. Druga moneta się zatrzyma a pierwsza uzyska prędkość drugiej.
- 3.66. $F = 50 \text{ N}$.
- 3.67. a) spełnione są obie zasady: zasada zachowania energii i pędu.
b) Spełniona jest tylko zasada zachowania pędu, gdyż energia kinetyczna po zderzeniu niesprężystym jest mniejsza od energii kinetycznej przed zderzeniem.

- 3.68. $a = g \operatorname{tg} \alpha$.
- 3.69. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{2}$
- 3.70. $T = m (g + a) \quad T = 28 \text{ N}$.
- 3.71. Winda powinna poruszać się w dół ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = g/2$
- 3.72. Waga wskaże siłę $f = 2/3 mg$.
- 3.73. $T = m (g + a) \quad T = 630 \text{ N}$.
- 3.74. W układzie związanym z Ziemią nie działają żadne siły. Działają tylko siły w układzie związanym z samochodem
- 3.75. $F_2 = F_1 \frac{V_2^2}{V_1^2}, \quad F_2 = 4000 \text{ N}$.
- 3.76. $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 g k}{d}}$.
- 3.77. a) $T_N = m g - \frac{m V^2}{r}$, zmniejsza się.
b) $T_N = m g + \frac{m V^2}{r}$, zwiększa się.
- 3.78. $V = \sqrt{g r}, \quad V = 10 \text{ m/s}$.
- 3.79. $F = 13,75 \text{ kN}$.
- 3.80. $V = \sqrt{r g k}, \quad V = 8 \text{ m/s}$.
- 3.81. $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad n = 1 \text{ s}^{-1}$.
- 3.82. Nie może, bo działa prostopadle do prędkości.
- 3.83. $W = 150 \text{ J}$.
- 3.84. $W = 1500 \text{ J}$.
- 3.85. $W = m h (g + a), \quad W = 1200 \text{ J}$.
- 3.86. Praca przeciwko sile ciężkości nie zależy od drogi po której jest wykonywana i równa się iloczynowi ciężaru ciała przez wysokość na którą dane ciało zostało wniesione: $W = mg (AB)$.
- 3.87. $\frac{E_2}{E_1} = 9$.
- 3.88. $\frac{E_2}{E_1} = 3$.
- 3.89. $h = \frac{V_0^2}{2 g}$.

- 3.90. $h = \frac{\Delta E}{m g}$ $h = 1 \text{ m}.$
- 3.91. $W = \frac{m V^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \right)$
- 3.92. $E = \frac{m g^2 t^2}{2}.$ Wykres identyczny jak w zadaniu 2.44.
- 3.93. $W = 2400 \text{ J}.$
- 3.94. $P = m g k V,$ $P = 2400 \text{ W}.$

Rozdział IV. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

- 4.21. $\omega = 2 \text{ s}^{-1}.$
- 4.22. $\varepsilon = \frac{M}{I}.$ Jeżeli na bryłę sztywną, mogącą obracać się wokół swobodnej osi obrotu, momenty sił nie równoważą się, to bryła ta będzie obracać się ze stałym przyspieszeniem kątowym wprost proporcjonalnym do wypadkowego momentu siły, a odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności.
- 4.23. $T = 2 \pi \frac{I}{L}.$
- 4.24. a) $I = m a^2,$ $I = 0,01 \text{ kg m}^2.$
b) $I = 2 m a^2,$ $I = 0,02 \text{ kg m}^2.$
- 4.25. $I = \frac{7}{5} m R^2.$
- 4.26. $M = \frac{2 \pi n m R^2}{t}.$
- 4.27. $F = \frac{m V^2}{S}.$
- 4.28. $n = \frac{F t}{2 \pi m R},$ $n = 2 \text{ obr/s}.$
- 4.29. $t = \frac{I \omega^2}{2 P},$ $t = 0,45 \text{ s}.$
- 4.30. $\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{3}.$

- 4.31. $E = \frac{I V^2}{2 R^2}$
- 4.32. Energia wzrosła 4 razy.
- 4.33. Energia wzrosła 4 razy.
- 4.34. $W = 2 \pi^2 I n^2$, $W = 1892 \text{ J}$.

Rozdział V. Grawitacja

- 5.21. Stała grawitacji jest to siła z jaką przyciągają się dwa ciała o masie po jednym kg każde z odległości 1 metra.
- 5.22. $F = 3,3 \text{ N}$.
- 5.23. $\frac{M}{m} = \frac{4 \pi^2 d^3}{T^2 g R^2}$, $\frac{M}{m} = 340\,000$.
- 5.24. Zero, bo siły grawitacji równoważą się.
- 5.25. Cztery razy mniejsze.
- 5.26. Na wysokości $x = R(\sqrt{2} - 1)$, $x = 0,41 R$.
- 5.27. $M = \frac{g R^2}{G}$.
- 5.28. 360 N.
- 5.29. $g_M = 0,4 g_Z$.
- 5.30. $g = 0,1 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.
- 5.31. Na powierzchni Ziemi.
- 5.32. $g_x = 2 g$
- 5.33. Prędkości sputników nie zależą od masy, więc na tej samej wysokości mają tę samą prędkość.
- 5.34. $g_k = \frac{g_Z R_Z^2}{81 R_k^2}$, $g_k = \frac{1}{6} g_Z$.
- 5.35. $a = 6 g$.
- 5.36. $L = m \sqrt{G M r}$.
- 5.37. Doba musiałaby być 17 razy krótsza, więc musiała by trwać 1 godz. i 24 min.
- 5.38. $E_k/E_p = 0,5$.
- 5.39. $T = 2\pi^2 (R+h) \sqrt{\frac{R+h}{GM}}$.

- 5.40. $M = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{GT^2}$. $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- 5.41. Prędkość byłaby dwa razy większa.
- 5.42. $V = -gR$.

Rozdział VI. Ruch Harmoniczny i Falowy. Akustyka

- 6.19. Okres wzrośnie dwa razy.
- 6.20. $T = 2\pi\sqrt{\frac{mx}{F}}$, $T = 0,628 \text{ s}$.
- 6.21. $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\rho_z}{\rho_m}}$.
- 6.22. $T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gk}}$, $T = 0,13 \text{ s}$.
- 6.23. $T = \sqrt{\frac{Mx}{mg}}$, $T = 0,03 \text{ s}$.
- 6.24. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$.
- 6.25. W pierwszym przypadku wskazania zegara nie zmienia się, w drugim, zegar przestanie działać.
- 6.26. $V = \pi n h$, $V = 15,7 \text{ m/s}$.
- 6.27. Wraz ze wzrostem prędkości, maleje przyspieszenie.
- 6.28. $a = \frac{V^2}{A}$, $a = 0,2 \text{ m/s}^2$.
- 6.29. $T = \frac{2\pi A}{V_{\max}}$.
- 6.30. Wartość liczbowa przyspieszenia maleje od wartości maksymalnej, gdy $V_1 = 0$ (x maks.) do wartości $a = 0$, gdy prędkość osiągnie wartość maksymalną $V_2 = \omega A$.
- 6.31. $W = \frac{mg}{2} x^2$, $W = 0,05 \text{ J}$.
- 6.32. Cztery razy.
- 6.33. Nie zmieni się.
- 6.34. $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$.
- 6.35. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

- 6.36. $n = \frac{V}{\lambda}$, $n = 1000 \text{ Hz}$.
- 6.37. $V = \lambda n$, $V = 0,9 \text{ m/s}$.
- 6.38. $V_x = \frac{V_g L}{L - V_g \Delta t}$, $V_x = 1560 \text{ m/s}$.
- 6.39. W odległości $d = 0,25 \text{ m}$.
- 6.40. $h = 150 \text{ m}$.
- 6.41. $n = 414 \text{ Hz}$.
- 6.42. $i = 120 \text{ dB}$.
- 6.43. $I = 10^{-5} \text{ W/m}^2$.
- 6.44. $\frac{I_1}{I_2} = 1000$.

Rozdział VII. Ciecze i Ciała Stałe

- 7.15. $F = 1200 \text{ N}$.
- 7.16. $p = 1,6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.
- 7.17. $F = 870 \text{ N}$.
- 7.18. Szalka z odważnikami podniesie się do góry.
- 7.19. Góra lodowa zanurzy się 89% całej objętości.
- 7.20. $V = \frac{Q_1 - Q_2}{\gamma}$, $V = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $V = 260 \text{ cm}^3$.
- 7.21. Siła nośna balonu maleje.
- 7.22. $\rho_x = \frac{3}{5} \rho$.
- 7.23. $\rho_x = \frac{3}{2} \rho_w$.
- 7.24. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{101}{100}$.

Rozdział VIII. Fizyka Cząsteczkowa, Termodynamika

- 8.45. Średnia prędkość cząsteczek gazu wzrośnie dwukrotnie.
- 8.46. $\left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right]$.
- 8.47. Nie zmienia się.
- 8.48. W procesie izobarycznym.

- 8.49. Ciśnienia są jednakowe.
- 8.50. Podczas przemiany izotermicznej.
- 8.51. Podczas przemiany izotermicznej.
- 8.52. Podczas przemiany izochorycznej.
- 8.53. Podczas przemiany izochorycznej.
- 8.54. $p_2 = 6 p_1$.
- 8.55. Nie ma różnicy. Temperatura krytyczna to taka, powyżej której nie można skroplić pary (gazu) przy stosowaniu nawet bardzo wysokich ciśnień. Substancja występuje tylko w stanie lotnym.
- 8.56. $p_2 = 2 p_1$.
- 8.57. Rośnie objętość, więc obniża się temperatura, zgodnie z równaniem:
 $T \cdot V^{K-1} = C$
- 8.58. Wykres prawa Boyle'a-Mariott'a jest przedstawiony na rys. 8.2.
- 8.59. $p = p_0 \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$.
- 8.60. $p = p_0 \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$.
- 8.61. $p_x = p_1 \frac{T_2}{2 T_1}$, $p_x = 1,9 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.
- 8.62. $m = V \rho_0 \frac{T_0 p}{p_0 T}$, $m = 72,6 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$
- 8.63. $\rho = \frac{p(m_1 + m_2)}{R T \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right)}$, $\rho = 0,23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.
- 8.64. $\rho = 12 \frac{p}{R T}$, $\rho = 0,53 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.
- 8.65. $N_H = 4,1 \cdot 10^{25} \frac{\text{cz}}{\text{m}^3}$.
- 8.66. $C_v = C_p - R$, $C_v = 20,6 \text{ J/mol K}$.
- 8.67. $c_p - c_v = \frac{R}{\mu}$,
- $\frac{c_p}{c_v} = 1,6$ dla gazu o drobinach jednoatomowych,
- $\frac{c_p}{c_v} = 1,4$ dla gazu o drobinach dwuatomowych,

$$\frac{c_p}{c_v} = 1,3 \quad \text{dla gazu o drobinach trójatomowych.}$$

8.68. Proces B.

8.69.



8.70. $W = p V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \quad W = 10^3 \text{ J.}$

8.71. $W = P V.$

8.72. $W = 200 \text{ kJ.}$

8.73. $W = \pi \frac{(V_2 - V_1)(p_2 - p_1)}{4}.$

8.74. W procesie izobarycznym.

8.75. **Zero.**

8.76. $W = p(V_2 - V_1)$

8.77. Objętość gazu jest największa w punkcie D, najmniejsza w punkcie B.

8.78. Ustawić rurkę pionowo żeby śrut spadł swobodnie na dno rurki. Powtórzyć tę czynność n razy. Energia potencjalna śrutu, przy każdym uderzeniu o dno rurki, zamienia się na ciepło, co możemy stwierdzić mierząc przyrost temperatury denka.

8.79. $\eta = 20 \%$.

8.80. $\eta = 40 \%$.

8.81. Jedną trzecią część.

8.82. $W = 500 \text{ J.}$

8.83. $\eta = 25 \%$.

8.84. Największą sprawność ma silnik drugi.

8.85. Większa sprawność ma silnik pierwszy.

8.86. $Q = \rho_0 V c_v T_0, \quad Q = 247,1 \text{ kJ.}$

8.87. Można, obniżając ciśnienie.

8.88. $Q = \rho_0 V c_p T_0 \quad Q = 359 \text{ kJ.}$

8.89. $Q = 439,8 \text{ kJ.}$

8.90. $t_x = 65^\circ\text{C.}$

- 8.91. Poziom wody w naczyniu nie zmieni się, dlatego, że zmniejszenie objętości wody powstałej z lodu jest uzupełnione ilością wody powstałej z części lodu wystającego nad poziom wody w naczyniu.
- 8.92. $\alpha = 3 \lambda$.
- 8.93. Ciśnienie pozostało stałe.
- 8.94. Na skutek utraty ciepła przez nasze ciało na wyparowanie wody.

Rozdział IX. Elektrostatyka

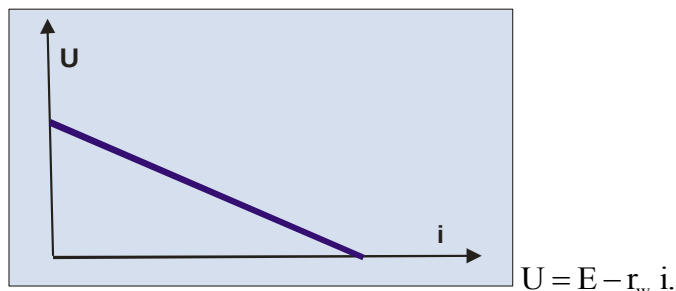
- 9.37. Wziąć część ładunku z kulki przez dotknięcie ją pałeczką ebonitową i przenieść do naładowanego znanym ładunkiem elektroskopu.
- 9.38. $n = 625 \cdot 10^{16} \text{ e}$.
- 9.39. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego jest prostopadły do powierzchni przewodnika, gdyż w przeciwnym razie wystąpiłaby składowa wektora pola równoległa do powierzchni przewodnika, powodująca przesunięcie się ładunków, a tymczasem znajdują się one w spoczynku.
- 9.40. $F = E q$, $F = 10^{-3} \text{ N}$.
- 9.41. $E = 0$.
- 9.42. $E = 0$, $V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r}$.
- 9.43. $E = 20 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.
- 9.44. $E = 0$
- 9.45. Natężenie pola elektrycznego jest większe przy powierzchni mniejszej kuli, ponieważ jest większe zagęszczenie linii sił pola, więc jest większe natężenie pola elektrycznego.
- 9.46. $a_D = \frac{e E}{2 m}$, $a_\alpha = \frac{2 e E}{4 m} = \frac{e E}{2 m}$.
- 9.47. Nie zawsze
- 9.48. $E = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 S}$.
- 9.49. $\Delta U = \frac{P}{q} d$, $\Delta U = 10^3 \text{ V}$.
- 9.50. $\Delta U = E d$, $\Delta U = 90 \text{ V}$.
- 9.51. $E = \frac{\Delta U}{d}$, $E = 6000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

- 9.52.** Natężenie pola zmaleje ϵ_r razy
 $(E = \frac{Q}{C d}, \text{ ponieważ pojemność wzrosła } \epsilon_r \text{ razy})$
- 9.53.** Energia zmaleje ϵ_r razy
 $(W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_r C} \text{ ponieważ pojemność wzrosła } \epsilon_r \text{ razy}).$
- 9.54.** $\frac{W_2}{W_1} = \epsilon_r$ $(W_1 = \frac{1}{2} C U^2, W_2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C U^2.)$
- 9.55.** $\Delta Q = C U (\epsilon_r - 1), \Delta Q = 15 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$
- 9.56.** $\Delta Q = C U \frac{d_1}{d_2} - 1, \Delta Q = 15 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$
- 9.57.** Energia układu zmaleje dwa razy. Przyczyną zmiany energii jest zmiana pojemności
- 9.58.** $E = \frac{1}{2} Q U, E = 1,75 \cdot 10^8 \text{ J}.$
- 9.59.** $C = \frac{2 W}{U^2}, C = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$
- 9.60.** $Q = C U, Q = 10^{-6} \text{ C}.$
- 9.61.** Nie zmieni swojej wartości: napięcie U , oraz natężenie pola E (gdy kondensator jest podłączony do źródła prądu).
- 9.62.** $E = \frac{Q}{C d}.$
- 9.63.** Po połączeniu kul przepłynie część ładunku z kuli o mniejszym promieniu do kuli o promieniu większym.
- 9.64.** $V = 9 \text{ V}.$
- 9.65.** $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}.$
- 9.66.** Energia naładowanego kondensatora pozostanie stała.
- 9.67.** $C = \frac{4}{7} \mu\text{F}.$
- 9.68.** Do najwyższego napięcia naładuje się kondensator o najmniejszej pojemności.

Rozdział X. Prąd elektryczny stały

- 10.33. $i = e v$, $i = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.
- 10.34. $i = \frac{e V}{2 \pi r}$
- 10.35. $n = 11 \cdot 10^{17}$.
- 10.36. $R = \frac{3}{4} \Omega$
- 10.37. $x = \sqrt{n}$
- 10.38. Większy opór ma przewodnik o mniejszej średnicy (4 razy).
- 10.39. $Q = 50 \text{ C}$.
- 10.40. $R = \frac{4}{3} \Omega$.
- 10.41. Opór przewodnika wzrośnie 20 razy.
- 10.42. Należy przewodnik ogrzać do temperatury $t_x = 273^\circ \text{C}$.
- 10.43. $U_1 = \frac{E R_1}{R_1 + R_2} = 2 \text{ V}$, $U_2 = \frac{E R_2}{R_1 + R_2} = 4 \text{ V}$.
- 10.44. Napięcie (różnicę potencjałów) a nie SEM ogniwa.
- 10.45. Ponieważ sam pobiera pewien prąd.
- 10.46. $i_x = 4 \text{ A}$.
- 10.47. $r_x = \frac{R}{2}$, równoległe do amperomierza.
- 10.48. $r_x = 9 R$, szeregowo.
- 10.49. $R = 240 \Omega$.
- 10.50. $x = 10,4 \text{ gr}$.
- 10.51. $i = 0,45 \text{ A}$.
- 10.52. $M = \frac{\pi d^2 U^2}{4 \rho L}$.
- 10.53. $R = 11,1 \Omega$.
- 10.54. $U = \sqrt{P R}$, $U = 30 \text{ V}$.
- 10.55. Moc zwiększyła się dwa razy.
- 10.56. $r_x = \left(\frac{E - U}{U} \right) R$, $r_x = 4 \Omega$.
- 10.57. $i_x = \frac{\varepsilon m}{\rho L^2 d + m r}$.

10.58.



10.59. $R = \frac{W}{i^2 t}, \quad R = 5 \Omega.$

10.60. Ponieważ w miejscu cieńszym jest większy opór.

10.61. Największy opór ma ta żarówka, która ma najmniejszą **moc**.

10.62. Masa substancji wzrośnie dwukrotnie.

10.63. $m = k q.$

10.64. $q = 96\,500 \text{ C}.$

10.65. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{3 \mu_2}.$

10.66. Stała Faraday'a jest to ładunek (96 500 C), który wydziela w czasie elektrolizy na elektrodzie masę równą jednemu gramrównoważnikowi danej substancji.

10.67. Do doświadczenia potrzebne jest: naczynie zawierające CuSO_4 , dwie płytki metalowe, mogą być miedziane (katoda i anoda). Amperomierz, wyłącznik, przewody, sekundomierz. Jedną z dwóch płytek ważymy na wadze analitycznej z dokładnością do 10 mg. (będzie to katoda). Po zanurzeniu elektrod do elektrolitu łączymy je ze źródłem prądu (akumulatorem) wstawiając w obwód amperomierz i wyłącznik. Od momentu zamknięcia obwodu wyłącznikiem mierzymy czas i natężenie prądu. W czasie elektrolizy pilnujemy żeby natężenie prądu było stałe. Po upływie czasu przynajmniej 20 min. Przerывamy elektrolizę i ważymy ponownie katodę. Różnica mas przed elektrolizą i po, daje nam masę miedzi wydzielonej na katodzie. Równoważnik elektrochemiczny wyznaczamy ze wzoru (10.19):

$$\Delta m = k i t.$$

10.68. Równoważnik elektrochemiczny, jest to ilość substancji wydzielonej na elektrodzie przez prąd o natężeniu 1 A w czasie 1 s.

10.69. Na anodzie wydziela się PbO_2 , a na katodzie Pb.

10.70. $C = 6,7 \text{ A h}.$

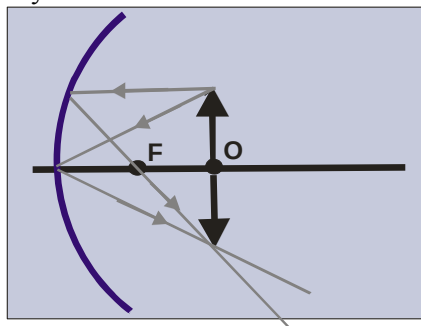
Rozdział XI. Elektromagnetyzm

- 11.31.** $H = 0$.
- 11.32.** Ustawić igłę magnetyczną pod przewodnikiem, którym na krótko łączymy bieguny akumulatora. Z kierunku wychylenia północnego bieguna igły magnetycznej ustalamy biegunowość akumulatora.
- 11.33** Nie można, bo pola magnetyczne od przewodu prostoliniowego i okręgu, chociaż są przeciwnie skierowane to po dodaniu nie zredukują się do zera.
- $$H_1 - H_2 = \frac{i}{2r} - \frac{i}{2\pi r} = \frac{i}{2r} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right).$$
- 11.34** Nie można, bo magnesy powstają z prądów elementarnych ruchu elektronów w atomach wokół jądra.
- 11.35** $F = 2 \cdot 10^{-6} \frac{N}{m}$.
- 11.36.** Ponieważ przewodnik znajduje się w polu magnetycznym wytworzonym przez drugi przewodnik znajdujący się w pobliżu. Będzie, więc na każdy przewodnik działać siła elektrodynamiczna, prostopadła do przewodnika. Zwrot tej siły zależy od kierunku prądów w przewodnikach: gdy kierunki prądów w obu przewodnikach są zgodne, to siły elektrodynamiczne działające na przewody mają zwroty takie, że przewody te przyciągają się. Gdy prądy w przewodach płyną w kierunkach przeciwnych to zwroty sił elektrodynamicznych są takie, że przewody te odpychają się.
- 11.37.** Nie oddziałują, ponieważ wektor indukcji magnetycznej pochodzący od okręgu jest równoległy do prostoliniowego przewodnika
- 11.38.** $M = B a^2 i \cos \alpha$, $M = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ N m}$.
- 11.39.** $F = B i L \sin \alpha$, $F = 0,02 \text{ N}$.
- 11.40.** $F = B i L$, $F = 2 \text{ N}$.
- 11.41.** Zwoje zwojnicy przyciągają się, gdyż stanowią przewodniki równoległe o tym samym kierunku prądów.
- 11.42.** Magnetyczne, wzdłuż linii sił pola. W innych polach jest ruch zmienny
- 11.43.** Ponieważ stałe pole magnetyczne nie zmienia wartości liczbowej prędkości cząstki, a tylko zmienia kierunek prędkości.
- 11.44.** Kierunek siły jest prostopadły do linii sił pola magnetycznego jednocześnie do wektora prędkości. Wartość liczbową w/w siły wyraża się wzorem:
 $F = q V B \sin \alpha$.
- 11.45.** Promień zakrzywienia będzie większy dla cząstki α (dwa razy).
- 11.46.** Promień zmaleje 6 razy.
- 11.47.** $T = \frac{2 \pi m}{q B}$.
- 11.48.** $\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \omega \sin \alpha$.
- 11.49.** Nie indukuje się, bo wzajemnie się znosi.

- 11.50. $E = 0$.
 11.51. Kosztem energii mechanicznej zbliżania magnesu.
 11.52. $L = \frac{E \Delta t}{\Delta i}$, $L = 2 \text{ Hn}$.
 11.53. $i_s = 7 \text{ A}$.
 11.54. $N_2 = \frac{U_2}{U_1}$, $N_2 = 2000 \text{ zwojów}$.
 11.55. W kierunku niezgodnym z ruchem wskazówek zegara.
 11.56. Odległość między okładkami kondensatora należy zmniejszyć 4 razy.
 11.57. $\lambda = V_c 2 \pi \sqrt{L C}$.
 11.58. Indukcyjność należy zmniejszyć 3 razy.

Rozdział XII. Optyka geometryczna

- 12.33. Kąt padania i odbicia równa się zero.
 12.34. $N = 3$.
 12.35. $h = \frac{H}{2}$.
 12.36. W odległości mniejszej od $\frac{R}{2}$ (rys. 12.3).
 12.37. Promień krzywizny $R = 10 \text{ cm}$.
 12.38. W środku krzywizny zwierciadła:



Rys. 12.26. Obraz w zwierciadle wklęsłym, gdy przedmiot umieszczony jest w środku krzywizny.

- 12.39. Nie zmienia się, bo kąty przy odbiciu pozostają te same.
 12.40. Obraz znajdzie się w odległości większej od promienia krzywizny od zwierciadła.
 12.41. Obraz pozorny, prosty i pomniejszony (rys. 12.5).
 12.42. $\sin \gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

- 12.43.** Promień świetlny musi przechodzić z wody do powietrza i padać pod kątem większym od granicznego.
- 12.44.** $n = \sqrt{2}$.
- 12.45.** Bieg promienia światła białego przedstawiony jest na rys.13.1
- 12.46.** $\frac{n_s}{n_w} = 1,12$.
- 12.47.** $V_x = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.
- 12.48.** $\sin \gamma = \frac{V_1}{V_2}$. $\alpha_{gr} = \arcsin \frac{V_1}{V_2}$.
- 12.49.** $\sin \gamma$ (a więc i sam kąt γ) będzie mniejszy dla fal fioletowych a większy dla fal czerwonych.
- 12.50.** $\sin \gamma = \frac{1}{n_{2/1}}$, gdzie $n_{2/1}$ jest współczynnikiem załamania ośrodka drugiego względem pierwszego. Kąt graniczny γ będzie wtedy, gdy promień świetlny przechodzi z ośrodka optycznie gęstszego do ośrodka optycznie rzadszego ($n_{2/1}$). Po przekroczeniu kąta granicznego następuje całkowite wewnętrzne odbicie.
- 12.51.** $\sin \gamma = \frac{n_w}{n_{sz}}$.
- 12.52.** $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, $\lambda = 0,5 \mu m$.
- 12.53.** $f = -1 m$.
- 12.54.** Tak, ponieważ ulega przesunięciu ognisko soczewki (ogniskowa wydłuża się)
- 12.55.** Dla barwy czerwonej.
- 12.56.** Zdolność skupiająca dwóch soczewek jest równa sumie zdolności poszczególnych soczewek.
- 12.57.** Zależy. Jest tym większa im fala jest krótsza.
- 12.58.** Szklana soczewka w tych warunkach będzie rozpraszającą.
- 12.59.** Nie może, gdyż przy zwiększaniu kąta padania kąt załamania będzie zawsze mniejszy od 90° a więc promień świetlny będzie wchodził do drugiego ośrodka.
- 12.60.** Może być, gdy znajduje się w ośrodku o większym współczynniku załamania.
- 12.61.** $Z = 10 D$.
- 12.62.** Należy połączyć ją z soczewką skupiającą, taką żeby układ był skupiający. Wyznaczyć ogniskową tego układu, a następnie jego zdolność skupiającą. Odejmując od zdolności zbierającej układu zdolność zbierającą soczewki skupiającej (wyznaczoną wcześniej), otrzymamy zdolność skupiającą soczewki rozpraszającej, z której wyznaczamy ogniskową.

- 12.63. Odległość między soczewkami powinna być równa sumie ogniskowych soczewek.
- 12.64. Nie zawsze, zależy to od ośrodka, w którym znajduje się soczewka
- 12.65. Zdolność skupiająca oka jest największa przy oglądaniu przedmiotów bliskich.
- 12.66. Przedmiot należy umieścić między ogniskiem a soczewką (**rys.12.12.**).
- 12.67. $f = 4 \text{ cm}$.
- 12.68. $f = \frac{d}{p-1}$, $f = 2,8 \text{ cm}$.
- 12.69. $\frac{D_s}{D_d} = \frac{1}{3}$.
- 12.70. $n_f > n_z > n_{cz}$. Kąt graniczny będzie mniejszy dla światła fioletowego od kąta granicznego dla światła żółtego. Padający promień światła fioletowego pod kątem większym od kąta granicznego ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu. Natomiast promień światła czerwonego przejdzie do drugiego ośrodka.

Rozdział XIII. Optyka fizyczna

- 13.37. $x = \frac{r}{\sqrt{\sin \alpha}}$, $x = \sqrt{2}$.
- 13.38. $\varphi_1 = \varphi_2$.
- 13.39. Energia światła czerwonego jest mniejsza, więc musi wysyłać więcej fotonów, przy tej samej mocy.
- 13.40. $p = \frac{h}{\lambda}$.
- 13.41. $p = \frac{E}{c}$, $p = 0,53 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- 13.42. $E = h \frac{c}{\lambda}$, $E = 3,1 \text{ eV}$.
- 13.43. $\lambda = \frac{h c}{E}$, $\lambda = 825 \text{ }^\circ\text{Å}$
- 13.44. $m = \frac{h}{c \lambda}$.
- 13.45. $m = \frac{h \nu}{c^2}$.
- 13.46. $\frac{E_c}{E_f} = \frac{\lambda_f}{\lambda_c}$

- 13.47. $V = \sqrt{\frac{2 h c}{\lambda m}}$, $V = 9 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$.
- 13.48. Zależy, bo różne materiały mają różne prace wyjścia.
- 13.49. Zależy, bo pęd fotonu zależy od długości fali.
- 13.50. W krótszym czasie przebiegnie płytkę foton światła czerwonego.
- 13.51. $t = \frac{S n}{c}$, $t = 10^{-10} s$.
- 13.52. $\lambda = \frac{h c}{W}$, gdzie W jest pracą wyjścia elektronu z danego metalu
- 13.53. Długofalowa granica efektu fotoelektrycznego zależy od pracy wyjścia:
 $\lambda = \frac{h c}{W}$.
- 13.54. 1) Ilość emitowanych elektronów jest wprost proporcjonalna do natężenia promieniowania.
 2) Energia emitowanych elektronów nie zależy od natężenia promieniowania lecz zależy od długości fali wywołującej zjawisko fotoelektryczne: jest odwrotnie proporcjonalna do długości fali.
- 13.55. Nie zmienia się.
- 13.56. $V = \sqrt{\frac{2 h c}{m} \left(\frac{\lambda_g - \lambda}{\lambda_g \lambda} \right)}$
- 13.57. Ulegnie zmianie liczba emitowanych elektronów: ulegnie zmniejszeniu.
- 13.58. $p \lambda = h$.
- 13.59. $\frac{p_4}{p_2} = 2$
- 13.60. Postulaty Bobra są podane na stronie 332 i 333
- 13.61. Elektrony o większej prędkości uzyskamy w przypadku światła fioletowego.
- 13.62. $\lambda = 1,33 \frac{h}{m_0 c}$.
- 13.63. Można użyć siatki dyfrakcyjnej.
- 13.64. $n = \operatorname{tg} \alpha$, $n = \sqrt{3}$.
- 13.65. kąt całkowitej polaryzacji jest większy dla fali fioletowej.
- 13.66. Pod kątem, dla którego $\operatorname{ctg} \alpha = n$.
- 13.67. Żeby tg kąta padania był równy n .
- 13.68. Długość fali zmaleje dwa razy.
- 13.69. Od napięcia przyspieszającego elektrony.
- 13.70. $V = \sqrt{\frac{2 h c}{m \lambda_g}}$

Rozdział XIV. Fizyka Jądrowa

- 14.21. 40 razy.
- 14.22. $n_p = 92$ $n_n = 146$.
- 14.23. Nie jest równa. Różnica mas równa się energii wiązania jądra
- 14.24. $\frac{r_u}{r_d} = 4,9$.
- 14.25. ujemny.
- 14.26. Po czasie $t = 3 T$.
- 14.27. $\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$, $\Delta N = 9,4 \cdot 10^7$.
- 14.28. $m = 2 \text{ g}$.
- 14.29. $m_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ g}$
- 14.30. $T = 15 \text{ godz.}$
- 14.31. $T = 2 \text{ dni}$
- 14.32. $\frac{N}{N_0} = 71 \%$.
- 14.33. $A = 4,37 \cdot 10^{16}$.
- 14.34. Ma większą energię, bo pędy są jednakowe.
- 14.35. $p = 3,65 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$.
- 14.36. $E = 2 \text{ e U}$.
- 14.37. $\frac{p_\alpha}{p_D} = 2$.
- 14.38. $V = c \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 14.39. $m = \frac{5}{4} m_0$
- 14.40. $\text{Be} (D n) \text{ B}$, powstaje neutron.
- 14.41. ${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{24}_{11}\text{Na} + {}^4_2\text{He}$, cząstka α .
- 14.42. ${}^{27}_{14}\text{Si} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al} + {}^0_1\beta$, pozyton.
- 14.43. ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^4_2\text{He}$, cząstka α
- 14.44. $E_{\text{wiq}} = 7,73 \text{ MeV}$, $E_0 = 2,58 \text{ MeV}$.
- 14.45. $m_A = m_c - \Delta m$, gdzie m_c jest masą wszystkich nukleonów w jądrze.
 $m_A = 42,35 - 0,39 = 41,93 \text{ j.m.a.}$
 Emisja cząstki α redukuje o dwa liczbę porządkową a o 4 liczbę masową.
- 14.46. W naszym zadaniu zostało wyemitowanych 4 cząstki α .
- 14.47. Liczba masowa pozostanie bez zmiany a liczba porządkowa wzrośnie o 1.

- 14.48.** Jest to izotop uranu $^{239}_{92}\text{U}$.
- 14.49.** Po rozpadzie β izotop strontu $^{88}_{38}\text{Sr}$ przechodzi w izotop $^{88}_{39}\text{Y}$.
 Po 28 latach pozostanie 50 %
 po $2 \times 28 = 56$ latach pozostanie 25 %,
 po $3 \times 28 = 84$ latach pozostanie 12,5 %,
 po $4 \times 28 = 112$ latach pozostanie 6,25 %.
- 14.50** Wiek badanego kawałka drewna wynosi 11200 lat.

WAŻNIEJSZE STAŁE FIZYCZNE

Wielkość fizyczna	Symbol	Przybliżona wartość
Ładunek elektronu	e	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
Masa spoczynkowa elektronu	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa spoczynkowa protonu	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa Ziemi	M_Z	$6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.
Masa Księżyca	M_K	$7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$.
Masa Marsa	M_M	$6,4 \cdot 10^{23} \text{ kg}$.
Masa Słońca	M_S	$2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
Objętość jednego kilomola gazu doskonałego w warunkach normalnych	V_0	$22,4 \text{ m}^3/\text{kmol}$.
Odległość Ziemi od Słońca	d	$1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.
Odległość Księżyca od Ziemi	d_k	$380 \cdot 10^6 \text{ m}$.
Prędkość światła w próżni	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
Przyspieszenie ziemskie	g	$9,81 \text{ m/s}^2$.
Promień Ziemi	R_Z	$6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.
Promień Księżyca	R_k	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$.
Promień Słońca	R_S	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$.
Stała Avogadra	N_A	$6,02 \cdot 10^{26} \text{ cz/kmol}$.
Stała Boltzmanna	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.
Stała Faraday'a	F	$9,65 \cdot 10^7 \text{ C/kmol}$.
Stała Grawitacji	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$.
Stała Plancka	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.
Stała Rydberga	R	$1,097 \cdot 10^{-7} \text{ 1/m}$.
Stała Stefana-Boltzmanna	σ	$6,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$.
Stała przesunięć Wienia	C	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$.
Uniwersalna stała gazowa	R	$8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$.