

Politechnika Lubelska

**Wiesław Wójcik
Wacław Nastaj**

Geometria wykreślna

Część I — wykład

Lublin 1998

OPINIODAWCA:

Doc. dr inż. **Stanisław Glinicki**

Wydanie III uaktualnione dla potrzeb
kierunku *Wychowanie Techniczne*
i *Zarządzanie i Marketing*

Wydano za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

ISBN 83-87270-12-1

© Copyright by Politechnika Lubelska 1998

Wydawnictwa Uczelniane Politechniki Lubelskiej

Nakład 500 egz. F. B5. Ark. wyd. 8,52. Ark. druk. 12,37.
Zam. 13/98

Zakład Wydawniczo-Poligraficzny Politechniki Lubelskiej
ul. Bernardyńska 13, 20-950 Lublin

SPIS TREŚCI

Rozdział I: WIADOMOŚCI WSTĘPNE	5
1.1. Elementy przestrzeni właściwe i niewłaściwe	5
1.2. Niektóre zależności między elementami przestrzeni	7
1.3. Rzutowanie	10
Rozdział II: ODWZOROWANIE ELEMENTÓW	14
2.1. Rzuty Monge'a (na dwie rzutnie). Układ odniesienia	14
2.2. Rzuty punktu	16
2.3. Rzuty prostej. Rzuty dwóch prostych	17
2.4. Odwzorowanie płaszczyzny	22
2.5. Pominięcie układu odniesienia	28
Rozdział III: ELEMENTY PRZYNALEŻNE	30
3.1. Punkt i prosta do siebie przynależne	30
3.2. Prosta i płaszczyzna do siebie przynależne	30
3.3. Punkt i płaszczyzna do siebie przynależne	30
Rozdział IV: ELEMENTY WSPÓLNE	35
4.1. Punkt wspólny dwóch prostych	35
4.2. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny rzutującej	35
4.3. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny dowolnej	37
4.4. Krawędź dwóch płaszczyzn określonych prostymi i punktami	39
Rozdział V: ELEMENTY RÓWNOLEGŁE	44
5.1. Proste równoległe	44
5.2. Prosta i płaszczyzna do siebie równoległe	44
5.3. Płaszczyzny równoległe	46
Rozdział VI: ELEMENTY PROSTOPADŁE	47
6.1. Prosta dowolna prostopadła do prostej głównej (poziomej lub czołowej)	47
6.2. Prosta prostopadła do płaszczyzny	48
6.3. Płaszczyzny do siebie prostopadłe	49
6.4. Proste dowolne do siebie prostopadłe	52
Rozdział VII: ODLEGŁOŚCI	53
7.1. Kład prostokątny odcinka	53
7.2. Odległość punktu od płaszczyzny	56
7.3. Odległość punktu od prostej	58
7.4. Odległość prostych równoległych	59
7.5. Odległość płaszczyzn równoległych	60

Rozdział VIII: OBROTY I KŁADY. KOLINEACJA	62
8.1. Obrót punktu. Obrót odcinka. Obrót trójkąta	62
8.2. Kład punktu	65
8.3. Kład płaszczyzny rzutującej i podniesienie z kładu	66
8.4. Powinowactwo osiowe układów płaskich	69
8.5. Kład płaszczyzny dowolnej i podniesienie z kładu	70
8.6. Kolineacja	73
Rozdział IX: TRANSFORMACJE UKŁADU ODNIESIENIA	76
9.1. Transformacja punktu	78
9.2. Transformacja prostej. Zagadnienia miarowe	80
9.3. Transformacja płaszczyzny. Zagadnienia miarowe	83
9.4. Rzutnia boczna. Odwzorowanie elementów	84
Rozdział X: WIELOŚCIANY	91
10.1. Rodzaje wielościanów	91
10.2. Rzuty wielościanów	92
10.3. Przekroje i rozwinięcia wielościanów	99
10.4. Punkty przebicia wielościanu prostą	110
10.5. Przenikanie wielościanów	110
Rozdział XI: POWIERZCHNIE	118
11.1. Krzywe stożkowe. Konstrukcje elipsy, paraboli i hiperboli. Rzuty okręgu	118
11.2. Powierzchnie obrotowe	127
11.3. Przekroje powierzchni kuli	129
11.4. Powierzchnia walcowa. Przekroje i rozwinięcia powierzchni walcowej ..	130
11.5. Powierzchnia stożkowa. Przekroje i rozwinięcia powierzchni stożkowej ..	140
11.6. Punkty przebicia powierzchni prostą	151
11.7. Przenikanie powierzchni	155
11.8. Przenikanie powierzchni z wielościanami	175
Rozdział XII: AKSONOMETRIA	182
12.1. Rzut aksonometryczny	182
12.2. Aksonometria prostokątna	182
12.3. Aksonometria ukośnokątna	193
12.4. Kąty proporcjonalności	195
12.5. Przekroje	195
Wykaz ważniejszych oznaczeń	197
LITERATURA	199

Rozdział I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

1.1. Elementy przestrzeni właściwe i niewłaściwe

1.1.1. Przedmiot geometrii wykreślnej

Geometria wykreślna jest nauką o sposobach odwzorowywania elementów przestrzeni i utworów geometrycznych na płaszczyźnie oraz rozwiązywania zadań konstrukcyjnych odnoszących się do tych utworów. W procesie dydaktycznym tego przedmiotu student powinien nabyć również umiejętność odtworzania utworu geometrycznego na podstawie płaskiego obrazu (rysunku).

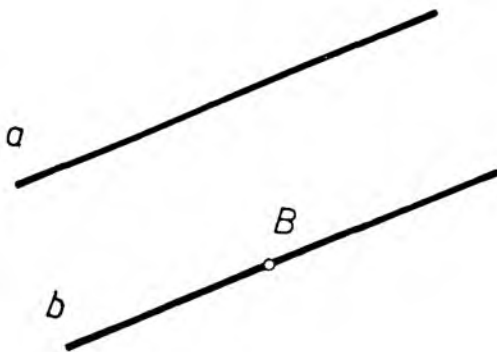
1.1.2. Elementy przestrzeni

Elementami przestrzeni są punkty, proste i płaszczyzny. Punkt, prosta i płaszczyzna są to pojęcia w aksjomatyce geometrii elementarnej jako pierwotne, nie wymagające definiowania. Elementy przestrzeni oznaczamy następująco:

punkty dużymi literami alfabetu łacińskiego, cyframi arabskimi lub cyframi rzymskimi, np. A, B, C,... 1, 2, 3,... I, II, III,..., można też stosować oznaczenia z indeksami np. A_1, A_2, A_3 ,

proste małymi literami alfabetu łacińskiego, np. a, b, c,... p, g, r,... x, y, z,... oraz oznaczenia z indeksami np. a_1, a_2, a_3 ...

płaszczyzny małymi literami alfabetu greckiego np. α, β, γ ... oraz oznaczenia z indeksami np. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$...

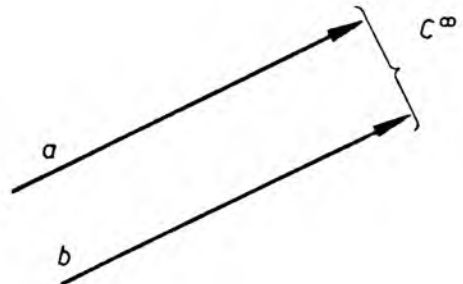


Rys. 1.1. Przez dany punkt właściwy B nie leżący na danej prostej właściwej a przechodzi jedna prosta właściwa b

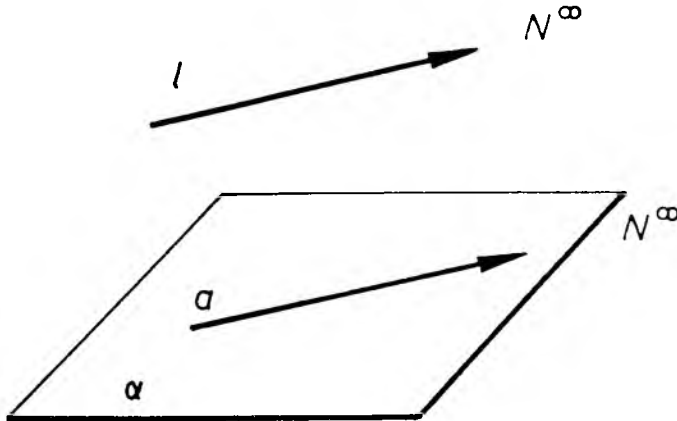
Elementy właściwe są to te, które występują w geometrii elementarnej (Euklidesowej), otaczające nas. W geometrii elementarnej przyjmujemy następujący aksjomat (pewnik) Euklidesa: przez dany punkt właściwy B nie leżący na danej prostej właściwej a przechodzi jedna i tylko jedna prosta właściwa b równoległa do prostej a (ilustracja graficzna na rys. 1.1.). Wobec tego, w geometrii elementarnej równoległymi nazywamy te, które nie mają wspólnego punktu właściwego.

Elementy niewłaściwe są to elementy nieograniczenie (nieskończenie) odległe, elementy w nieskończoności.

Punkt niewłaściwy jest punktem wspólnym prostych równoległych. Wszystkie proste o tym samym kierunku (równoległe) mają ten sam punkt wspólny niewłaściwy (przecinają się w tym samym punkcie niewłaściwym). Wobec tego punkt niewłaściwy nazywamy również kierunkiem. Każda prosta właściwa zawiera nieskończenie wiele punktów właściwych i jeden punkt niewłaściwy. Prostą właściwą uzupełnioną punktem niewłaściwym nazywamy prostą rzutową.



Rys. 1.2. Proste równoległe a i b przecinają się w punkcie niewłaściwym C^{∞}

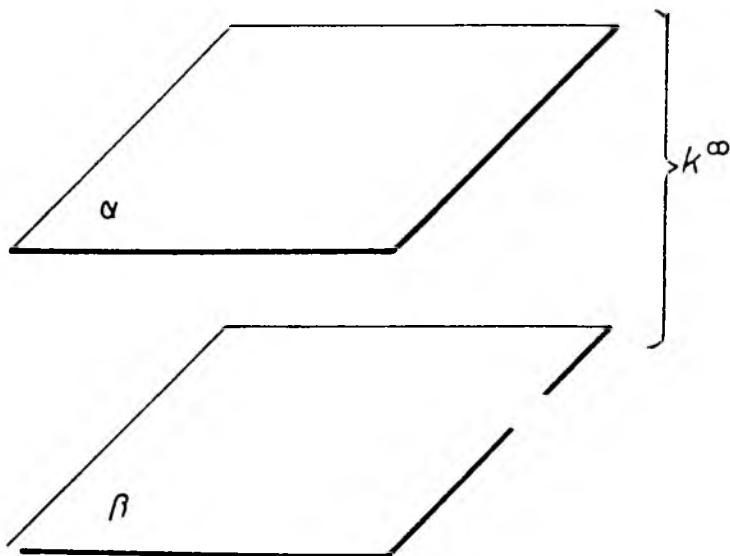


Rys. 1.3. Prosta właściwa $l \parallel \alpha$ przebija płaszczyznę α w punkcie niewłaściwym N^{∞}

Prosta niewłaściwa jest prostą wspólną płaszczyzn równoległych. Płaszczyzny równoległe α i β przecinają się w krawędzi niewłaściwej k^{∞} (rys. 1.4). Wszystkie płaszczyzny o tym samym ustawieniu mają tę samą krawędź wspólną niewłaściwą (przecinają się w tej samej krawędzi niewłaściwej). Każda płaszczyzna zawiera nieskończenie wiele punktów i prostych właściwych oraz jedną (tylko) prostą niewłaściwą, na której leżą wszystkie punkty niewłaściwe płaszczyzny. Płaszczyznę właściwą uzupełnioną punktem niewłaściwym nazywamy płaszczyzną rzutową.

Płaszczyzna niewłaściwa jest zbiorem wszystkich punktów niewłaściwych i prostych niewłaściwych przestrzeni. Przestrzeń euklidesową E uzupełnioną płaszczyzną niewłaściwą nazywamy przestrzenią rzutową $R, R = E \cup \sigma^{\infty}$. Zatem

przestrzeń rzutowa jest zbiorem wszystkich punktów właściwych i punktów niewłaściwych, wszystkich prostych właściwych i prostych niewłaściwych oraz wszystkich płaszczyzn właściwych i jednej (tylko) płaszczyzny niewłaściwej.



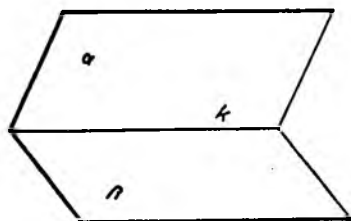
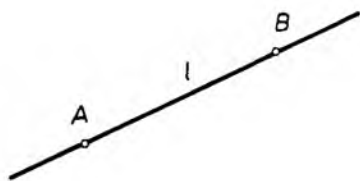
Rys. 1.4. Płaszczyzny równoległe α i β przecinają się w krawędzi niewłaściwej k^∞

1.1.3. Utwory geometryczne

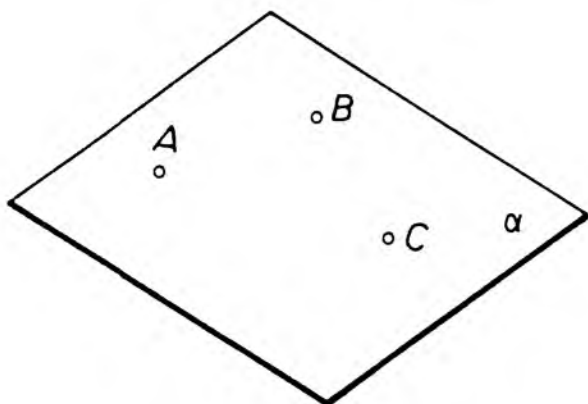
Utworem geometrycznym nazywamy zbiór elementów, tj. punktów, prostych i płaszczyzn. Utworami geometrycznymi są więc np. Wielokąty, wielościany, linie krzywe i powierzchnie.

1.2. Niektóre zależności między elementami przestrzeni

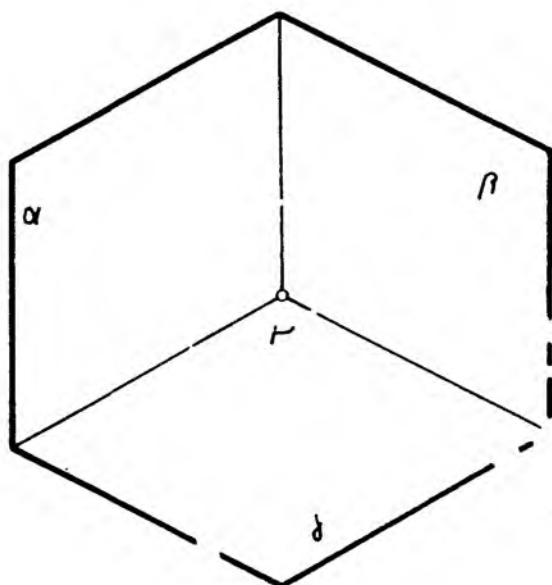
Rys. 1.5. Dwa punkty określają (wyznaczają) jedną i tylko jedną prostą $l = AB$



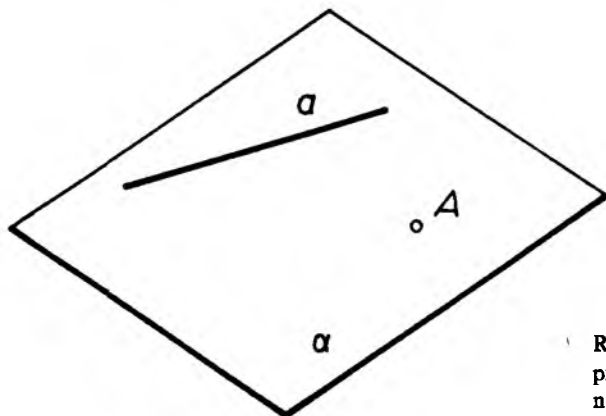
Rys. 1.6. Dwie płaszczyzny α i β określają (wyznaczają) jedną i tylko jedną prostą $k = \alpha \cap \beta$



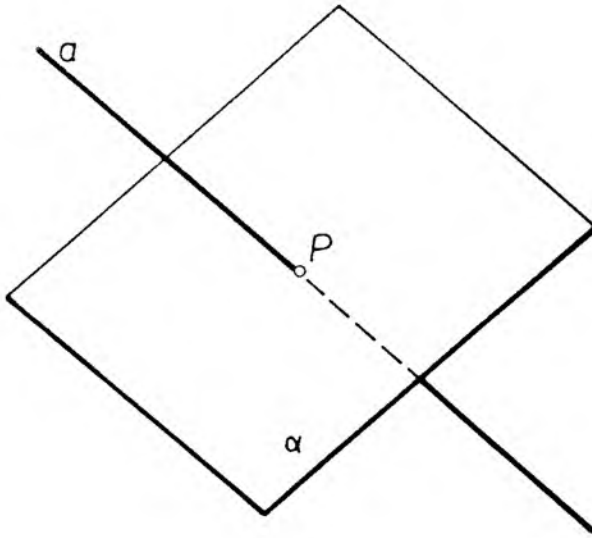
Rys. 1.7. Trzy punkty niewspółliniowe określają jedną i tylko jedną płaszczyznę



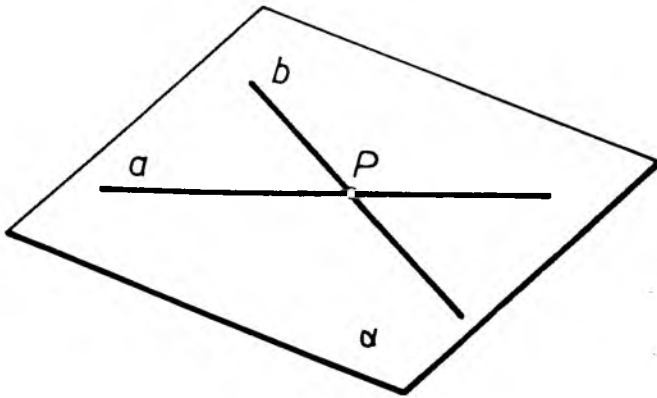
Rys. 1.8. Trzy dowolne płaszczyzny niewspółliniowe i niewspółpłaszczyznowe α , β , γ określają jeden i tylko jeden punkt $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$



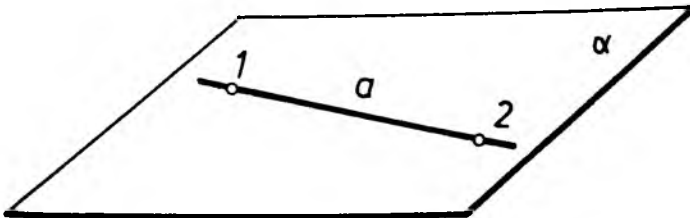
Rys. 1.9. Prosta a i punkt A nieprzynależne do siebie określają jedną i tylko jedną płaszczyznę ($\alpha = aA$)



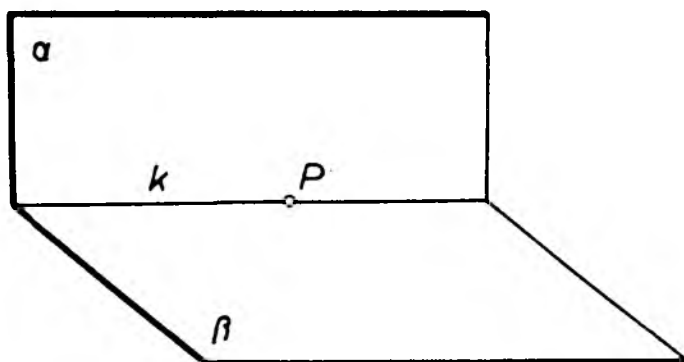
Rys. 1.10. Prosta a płaszczyzna α nieprzypadające do siebie określają punkt $P = a \cap \alpha$



Rys. 1.11. Dwie proste a i b przynależne do punktu P określają jedną i tylko jedną płaszczyznę $\alpha = ab$. Dwie proste a i b przynależne do płaszczyzny α określają tylko jeden punkt $P = a \cap b$



Rys. 1.12. Dwa punkty 1 i 2 przynależne do płaszczyzny $\alpha (1, 2 \in \alpha)$ określają prostą a przynależną do płaszczyzny $\alpha (a \subset \alpha)$



Rys. 1.13. Dwie płaszczyzny α i β przynależne do punktu P ($P \in \alpha \cap \beta$)
określają prostą k przynależną do punktu P ($P \in k$)

Oznaczenie przynależności elementów:

punkt i prosta do siebie przynależne – $A \in a$,

prosta i płaszczyzna do siebie przynależne – $a \subset \alpha$

punkt i płaszczyzna do siebie przynależne – $A \in \alpha$,

Oznaczenie równoległości i nierównoległości elementów:

proste równoległe a i b – $a \parallel b$,

proste nierównoległe a i b – $a \nparallel b$,

prosta a i płaszczyzna α równoległe – $a \parallel \alpha$,

prosta a i płaszczyzna α nierównoległe – $a \nparallel \alpha$,

płaszczyzny α i β równoległe – $\alpha \parallel \beta$

płaszczyzny α i β nierównoległe – $\alpha \nparallel \beta$,

Oznaczenia prostokątności i nieprostokątności elementów:

proste prostopadłe a i b – $a \perp b$,

proste nieprostokątne a i b – $a \nperp b$,

prosta a i płaszczyzna α prostopadłe – $a \perp \alpha$,

prosta a i płaszczyzna α nieprostokątne – $a \nperp \alpha$,

płaszczyzny prostopadłe α i β – $\alpha \perp \beta$,

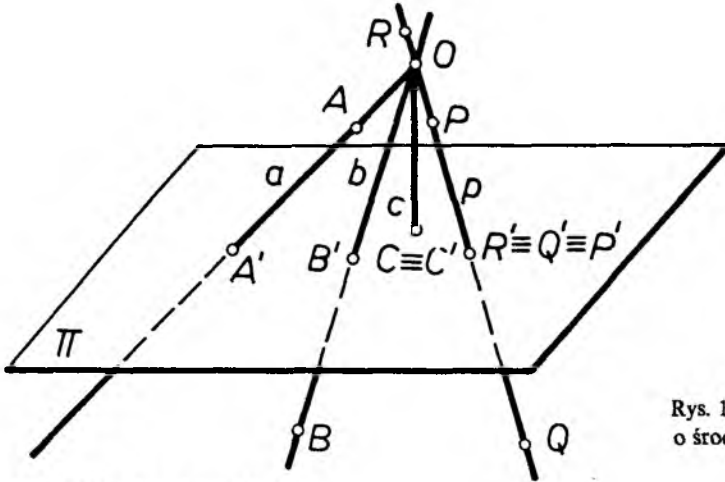
płaszczyzny nieprostokątne α i β – $\alpha \nperp \beta$.

1.3. Rzutowanie

1.3.1. Rzut środkowy

Przyjmujemy dowolną płaszczyznę π , przeważnie poziomą albo pionową, zwaną rzutnią lub tłem, na którą odwzorowuje się elementy przestrzeni i utwory geometryczne. Przyjmujemy punkt właściwy O nie leżący na rzutni, zwany środkiem rzutowania. Każda prosta przechodząca przez środek rzutowania

jest tzw. prostą rzutującą lub promieniem rzutującym. W celu odwzorowania danego punktu na rzutnię π (rys. 1.14) prowadzimy przez punkty O i A prostą rzutującą a i wyznaczamy punkt przebiecia A^I rzutni π prostą a . Punkt A^I nazywa się rzutem środkowym lub perspektywą punktu A. Podobnie wyznaczamy B^I . Jeżeli punkt C leży na rzutni, to jego rzut środkowy C^I jednoczy się z punktem C. Dla poszczególnych punktów P, Q, R leżących na prostej rzutującej p, ich rzuty środkowe jednoczą się w punkcie $P^I \equiv Q^I \equiv R^I$.



Rys. 1.14. Rzut środkowy o środku O i rzutni π

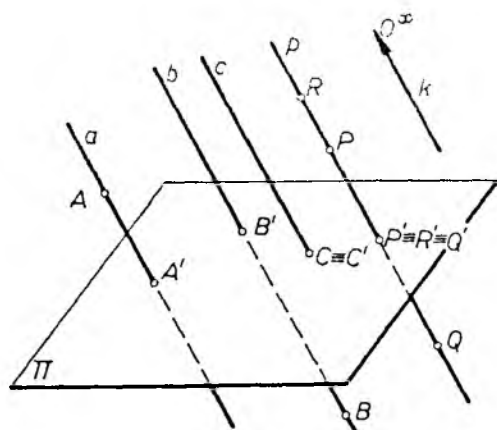
1.3.2. Rzuty równoległe

Przyjmujemy rzutnię π oraz dowolną prostą $k \parallel \pi$, będącą kierunkiem rzutowania. Środek rzutowania jest zatem punktem niewłaściwym O^∞ . W celu odwzorowania danego punktu A na rzutnię π (rys. 1.15), prowadzimy przez ten punkt prostą rzutującą $a \parallel k$ i wyznaczamy punkt przebiecia A^I rzutni π prostą a . Punkt A^I nazywa się rzutem równoległym punktu A. Podobnie wyznaczamy B^I . Jeżeli punkt C leży na rzutni, to jego rzut równoległy C^I jednoczy się z punktem C. Dla poszczególnych punktów P, Q, R,... prostej rzutującej p ich rzuty równoległe jednoczą się w punkcie $P^I \equiv Q^I \equiv R^I$.

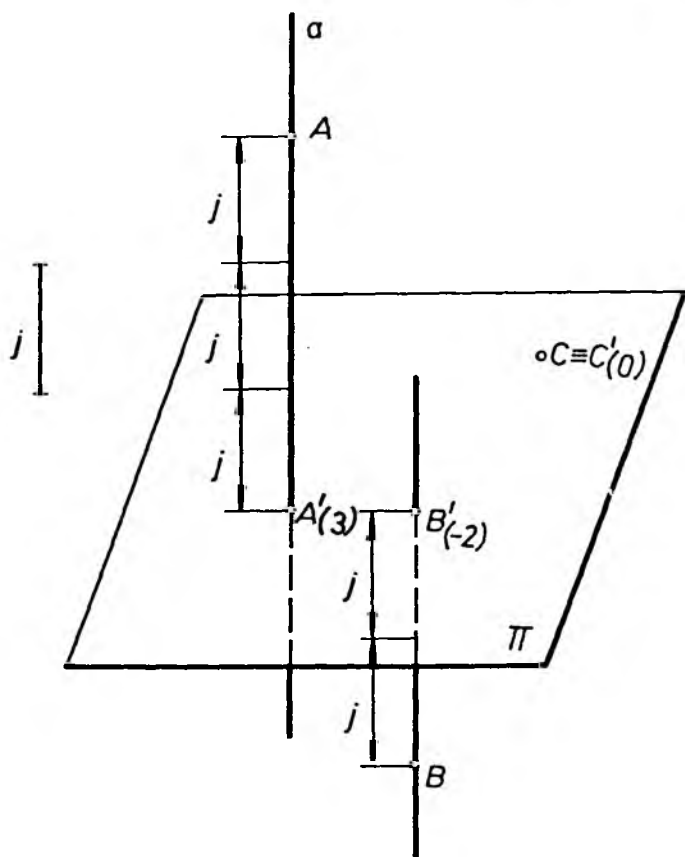
Zależnie od tego czy kierunek rzutowania k jest prostą prostopadłą do rzutni ($k \perp \pi$) czy nie prostopadłą do π , nazywamy rzut równoległy rzutem prostokątnym lub rzutem ukośnym.

1.3.3. Rzuty cechowane

Rzuty cechowane (rys. 1.16) są to rzuty prostokątne elementów i utworów geometrycznych na jedną rzutnię, na ogół poziomą, zwaną płaszczyzną porównawczą. Rzutnia dzieli przestrzeń na dwie półprzestrzenie: dodatnią, znajdującą się nad rzutnią i ujemną, pod rzutnią. Odcinkiem prostopadłym do rzutni przypisujemy znak + lub - w zależności od tego, czy należą do półprzestrzeni



Rys. 1.15. Rzut równoległy o kierunku k i rzutni π



Rys. 1.16. Rzuty cechowane na rzutnię π

dodatniej, czy ujemnej. Przyjmujemy jednostkę miary długości „j”. Liczba względna określająca odległość danego punktu, względem płaszczyzny porównawczej nazywa się cechą tego punktu. Rzut prostokątny A^I opatrzone cechą nazywa się rzutem cechowanym punktu A.

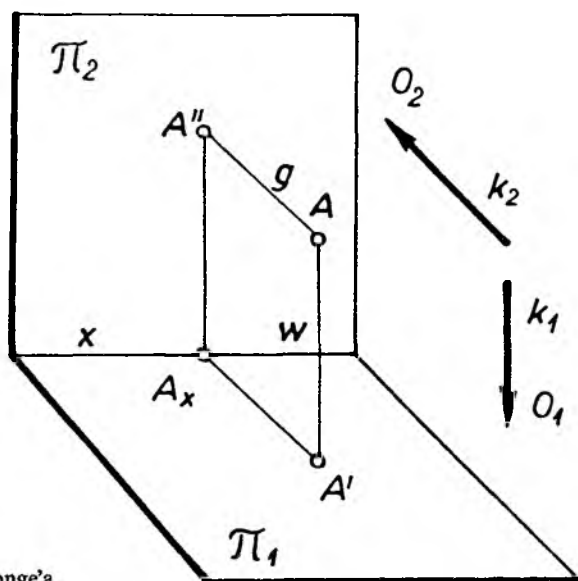
Rozdział II

ODWZOROWANIE ELEMENTÓW

2.1. Rzuty Monge'a (na dwie rzutnie). Układ odniesienia

2.1.1. Zasada rzutów Monge'a

Rzuty Monge'a są to jednocześnie rzuty prostokątne elementów lub utworów geometrycznych na dwie, trzy lub więcej, wzajemnie prostopadłe rzutnie, tworzące układ odniesienia (rys. 2.1.).

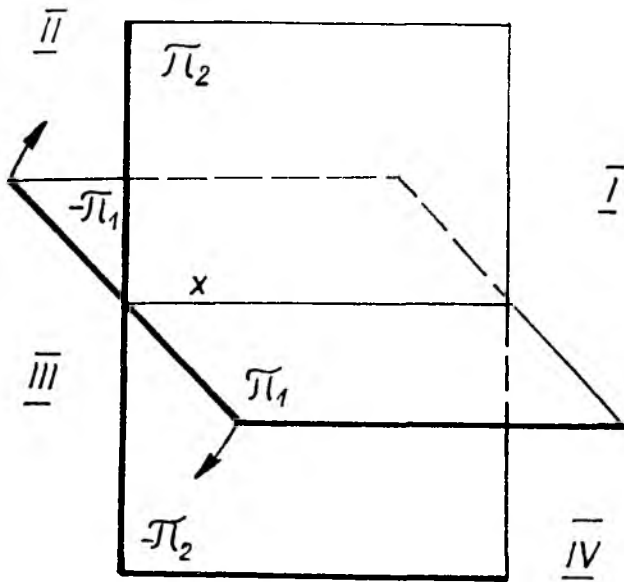


Rys. 2.1. Zasada rzutów Monge'a

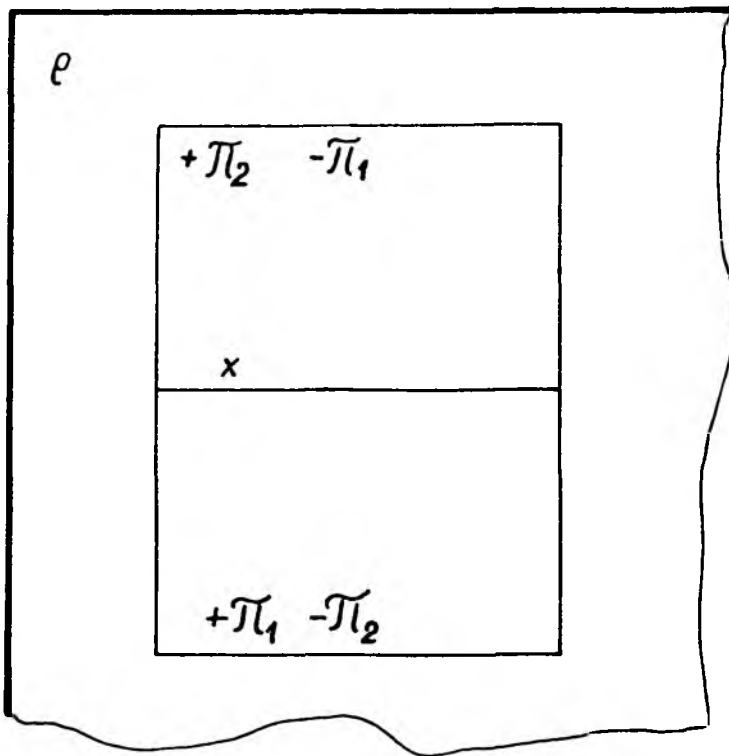
2.1.2. Układ odniesienia

Układ odniesienia w metodzie rzutów Monge'a składa się z dwóch wzajemnie prostopadłych rzutni: poziomej π_1 i pionowej π_2 . Krawędź tych rzutni (część wspólną) oznaczamy literą x i nazywamy osią rzutów lub osią „iks”.

Oś rzutów dzieli każdą rzutnię na dwie półrzutnie: poziome $+\pi_1$ i $-\pi_1$ oraz pionowe $+\pi_2$ i $-\pi_2$. Układ odniesienia dzieli przestrzeń na cztery części, zwane ćwiartkami, które oznaczamy kolejnymi cyframi rzymskimi I, II, III, IV – jak na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Sprowadzenie układu odniesienia do płaszczyzny rysunku. Ćwiartki przestrzeni

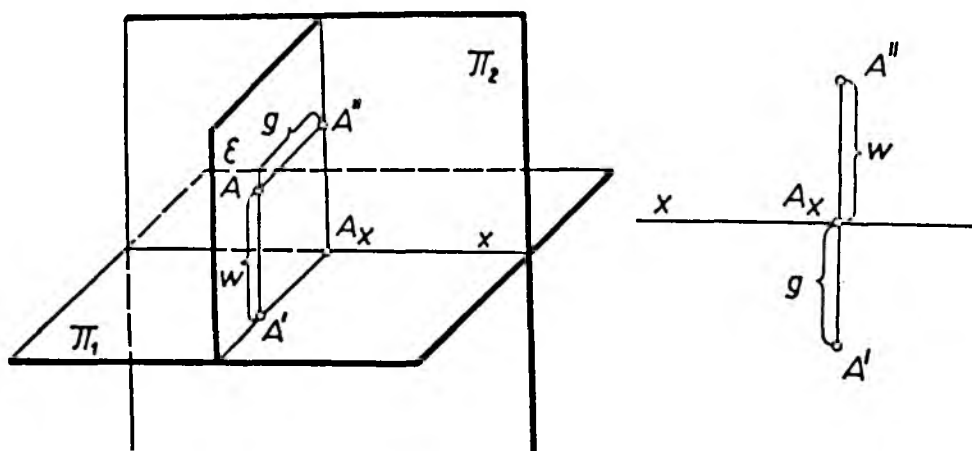


Rys. 2.3. Układ odniesienia sprowadzony do płaszczyzny rysunku

Sprowadzanie układu odniesienia do płaszczyzny rysunku odbywa się przez obrót rzutni poziomej o kąt 90° dookoła osi x tak, że półrzutnia pozioma dodatnia znajdzie się pod osią x , (rys. 2.3). Taki sam efekt otrzymamy obracając rzutnię pionową o kąt 90° dookoła osi x lecz w kierunku przeciwnym. Tak złożone rzutnie przenosimy na płaszczyznę rysunku ρ .

2.2. Rzuty punktu

Przyjmujemy układ odniesienia. Dany jest punkt A leżący w I ćwiartce przestrzeni. Wyznaczamy kolejno rzuty punktu A na rzutnię poziomą i pionową odpowiednio A^I i A^{II} , prowadząc przez punkt A proste rzutujące w i g (rys. 2.4.).

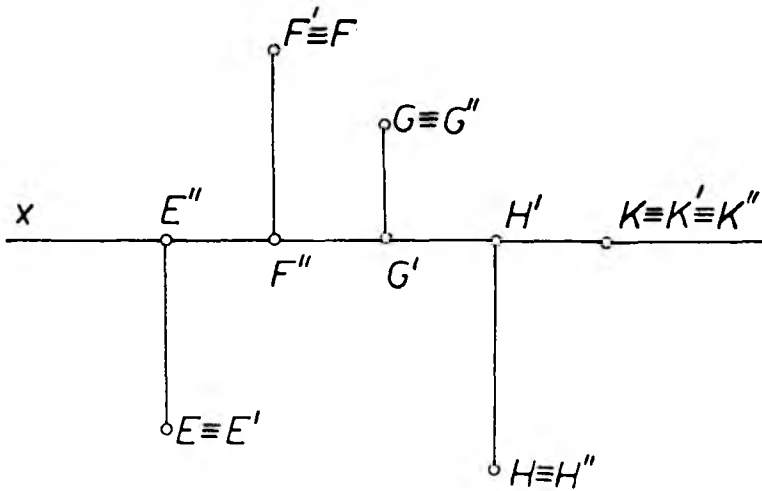


Rys. 2.4. Rzuty prostokątne punktu A w układzie odniesienia

A' jest rzutem poziomym, A^{II} rzutem pionowym punktu A . Proste w i g przechodzące przez punkt A określają płaszczyznę ε , która przecina oś x w punkcie A_x . Sprowadzamy układ odniesienia wraz z rzutami A^I i A^{II} do płaszczyzny rysunku.

Odległość punktu A od rzutni poziomej, odcinek $\overline{AA^I} = \overline{AA_x} = w$ nazywa się wysokością punktu A , a odległość punktu A od rzutni pionowej, odcinek $\overline{AA^{II}} = \overline{A^IA_x} = g$ nazywa się głębokością.

Wysokości punktów leżących nad rzutnią poziomą, a więc w ćwiartkach I i II są dodatnie, a leżących pod rzutnią poziomą w ćwiartkach III i IV są ujemne oraz głębokości punktów leżących przed rzutnią pionową, a więc w ćwiartkach I i IV są dodatnie, a leżących za rzutnią pionową w ćwiartkach II i III są ujemne. Punkty E, F leżące na rzutni poziomej (rys. 2.5) mają wysokość równą 0, a punkty G, H leżące na rzutni pionowej (rys. 2.5) mają głębokość równą 0. Punkt K , leżący na osi x na wysokość i głębokość równą 0.

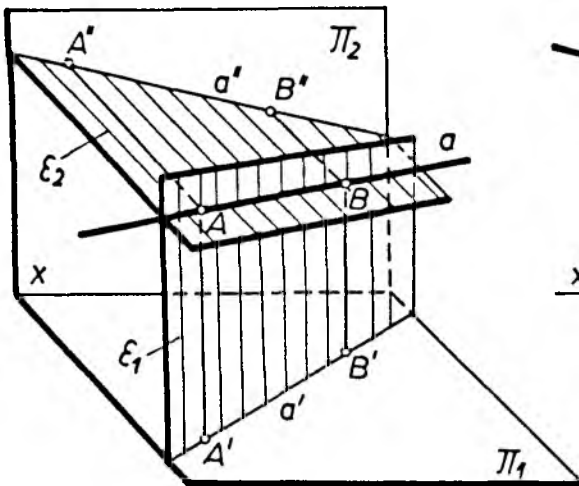


Rys. 2.5.

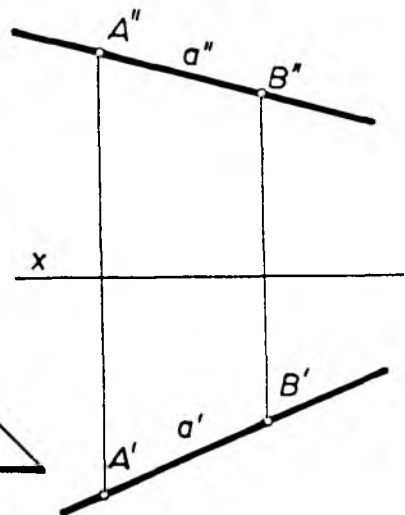
Rzuty A^I, A^{II} punktu A określają jednoznacznie jego położenie w przestrzeni. Prosta $A^I A^{II}$, prostopadła do osi x nazywa się prostą odnoszącą.

2.3. Rzuty prostej. Rzuty dwóch prostych

a)



b)



Rys. 2.6. Rzuty dowolnej prostej a

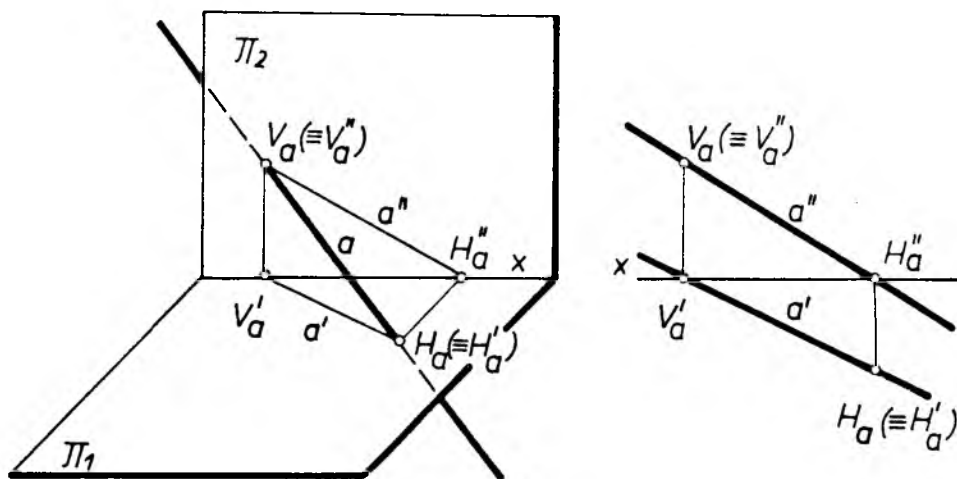
2.3.1. Rzuty prostej dowolnej

W celu wyznaczenia rzutów dowolnej prostej a prowadzimy przez tę prostą dwie płaszczyzny rzutujące: płaszczyznę poziomo rzutującą ε_1 – krawędź tej płaszczyzny z rzutnią poziomą jest rzutem poziomym a^I prostej a oraz płaszczyznę pionową – rzutującą ε_2 – krawędź tej płaszczyzny z rzutnią pionową jest rzutem pionowym a^{II} (rys. 2.6a) prostej a . Po sprowadzeniu układu odniesienia do płaszczyzny rysunku rzuty prostej przedstawiają się tak, jak na (rys. 2.6b). Podobny efekt uzyskamy, gdy zamiast prowadzenia przez prostą płaszczyzn rzutujących obierzemy na prostej dwa punkty A i B , i znajdziemy rzuty tych punktów. Rzut poziomy prostej $a^I = A^I B^I$, rzut pionowy $a^{II} = A^{II} B^{II}$.

Rzuty prostej jednoznacznie określają jej położenie w przestrzeni, to znaczy na podstawie rzutów prostej możemy jednoznacznie odtworzyć położenie prostej w przestrzeni (względem układu odniesienia).

2.3.2. Ślady prostej

Ślady prostej są to punkty w których prosta przebija rzutnie (rys. 2.7a i b). H_a ślad poziomy prostej a , jest to punkt przebicia rzutni poziomej prostą a , V_a ślad pionowy prostej a jest to punkt przebicia rzutni pionowej prostą a .



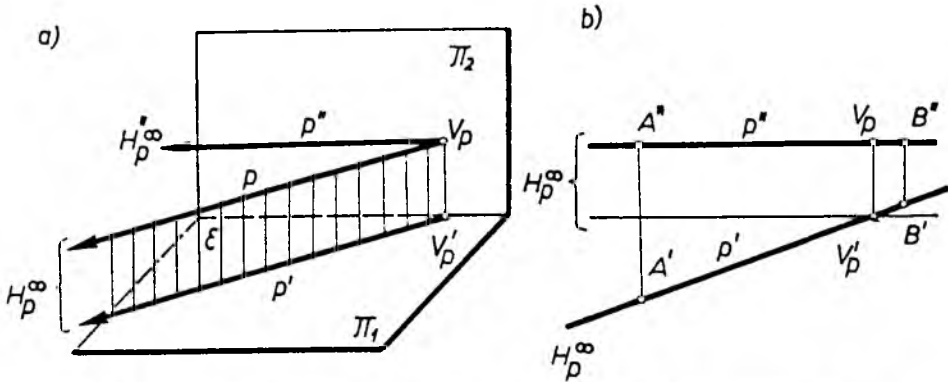
Rys. 2.7. Ślady prostej a

2.3.3. Szczególne położenie prostych

Prosta pozioma p (rys. 2.8).

Prostą równoległą do rzutni poziomej nazywamy prostą poziomą. Nazywamy ją również główną pierwszą. Wysokości punktów tej prostej są jednakowe,

więc rzut pionowy jest równoległy do osi rzutów, a rzut poziomy wskazuje, pod jakim kątem prosta jest nachylona do rzutni pionowej. Ślad poziomy prostej poziomej jest punktem niewłaściwym.

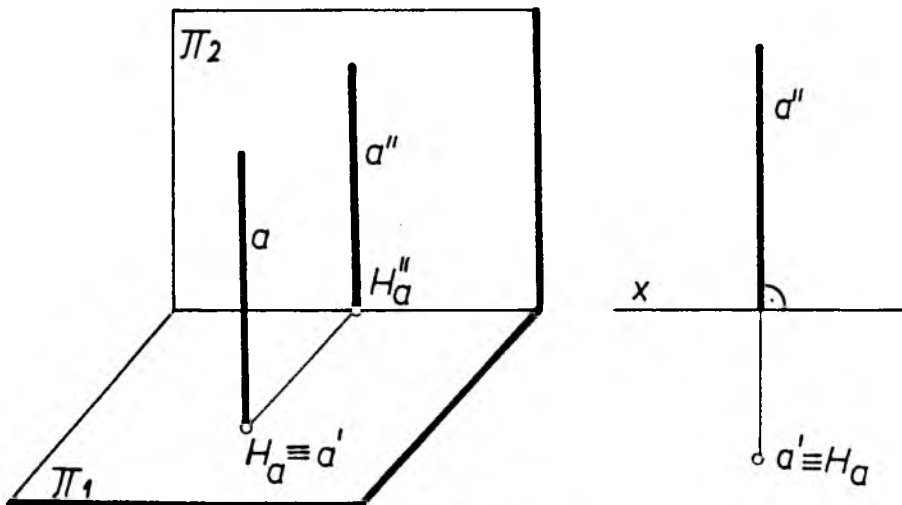


Rys. 2.8. Prosta pozioma w przestrzeni i układzie odniesionym do płaszczyzny rysunku

Prosta czołowa c

Prostą czołową lub prostą główną drugą nazywamy prostą równoległą do rzutni pionowej. Głębokości punktów tej prostej są jednakowe, więc rzut poziomy prostej jest równoległy do osi x , a nachylenie rzutu pionowego do osi x przedstawia nachylenie rzutu poziomej. Ślad pionowy prostej czołowej jest punktem niewłaściwym.

Prosta pionowa, a $\perp \pi_1$ (rys. 2.9)

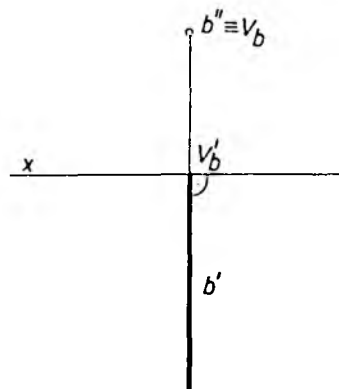


Rys. 2.9. Prosta pionowa

Prosta pionowa jest prostą prostopadłą do rzutni poziomej. Jej rzut poziomy jest punktem, a rzut pionowy jest prostą prostopadłą do osi x .

Prosta celowa $b \perp \pi_2$ (rys. 2.10.)

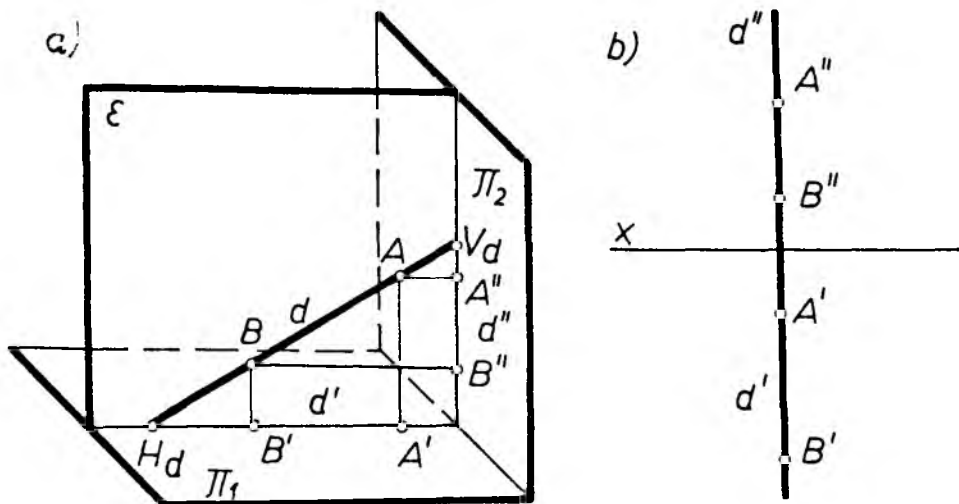
Prosta celowa jest prostą prostopadłą do rzutni pionowej. Jej rzut pionowy jest punktem, a rzut poziomy prostą prostopadłą do osi x .



Rys. 2.10. Prosta celowa

Prosta prostopadła do osi x , $d \perp x$ (rys. 2.11)

Rzuty d' i d'' prostej d prostopadłej do osi x nie określają jednoznacznie prostej d w przestrzeni.



Rys. 2.11. Prosta prostopadła do osi x

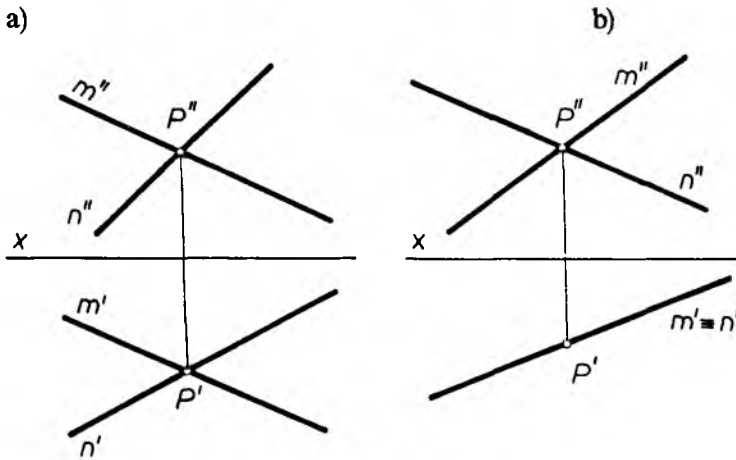
W celu jednoznacznego określenia prostej należy na niej przyjąć dwa dowolne punkty A i B .

2.3.4. Rzuty dwóch prostych

Dwie dowolne proste w przestrzeni mogą zajmować względem siebie następujące położenia: 1) mogą się przecinać, 2) być do siebie równoległe, 3) mogą być względem siebie skośne (wichrowate).

Proste przecinające się (rys. 2.12)

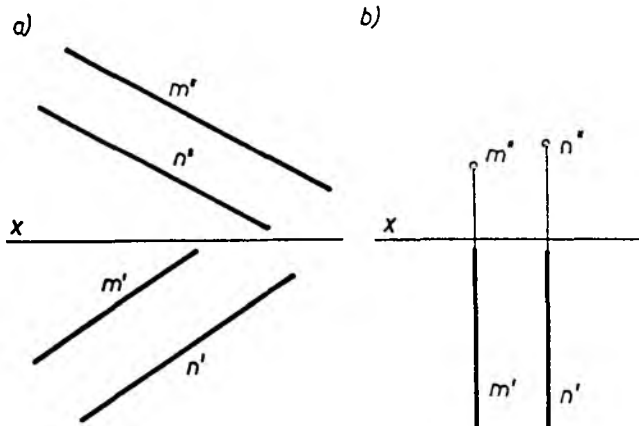
Rzuty punktu P przecięcia się prostych m i n leżą na jednej prostej odnoszącej. I odwrotnie, ze stwierdzenia, że odpowiednie rzuty dwóch prostych m i n parami przecinają się w dwóch punktach (m^I z n^I i m^{II} z n^{II}) leżących na jednej odnoszącej wynika, że proste m i n mają punkt wspólny P , którego rzutami są wymienione punkty przecięcia rzutów prostych m i n , $P^I = n^I \cap m^I$ i $P^{II} = n^{II} \cap m^{II}$.



Rys. 2.12. Proste przecinające się m i n

Proste równoległe $m \parallel n$

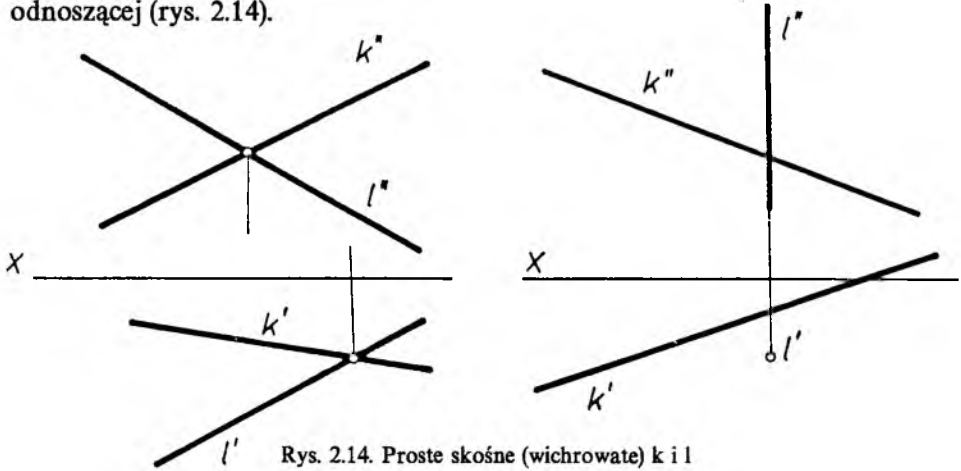
Rzuty prostych równoległych są do siebie odpowiednio równoległe: $n^I \parallel m^I$ i $m^{II} \parallel n^{II}$ (rys. 2.13).



Rys. 2.13. Proste równoległe m i n

Proste skośne (wichrowate) k i l

Punkty przecięcia się rzutów prostych skośnych nie leżą na jednej prostej odnoszącej (rys. 2.14).

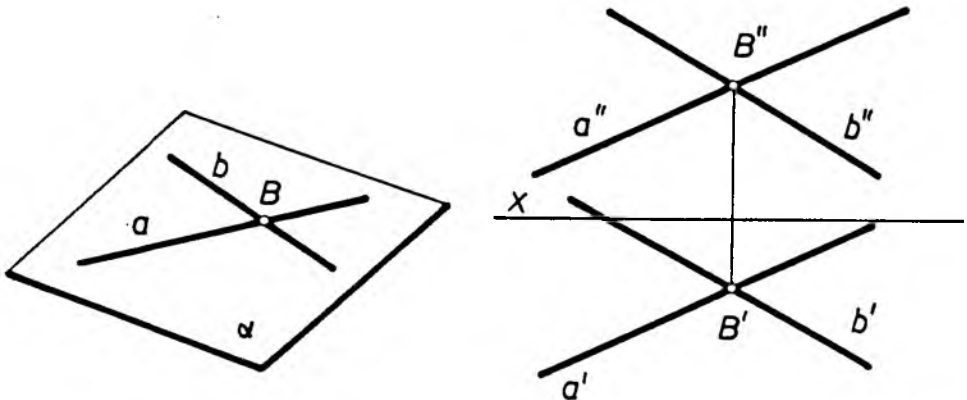


W szczególnych przypadkach rzuty jednoimienne mogą się nie przecinać, ale tylko jedne poziome lub czołowe.

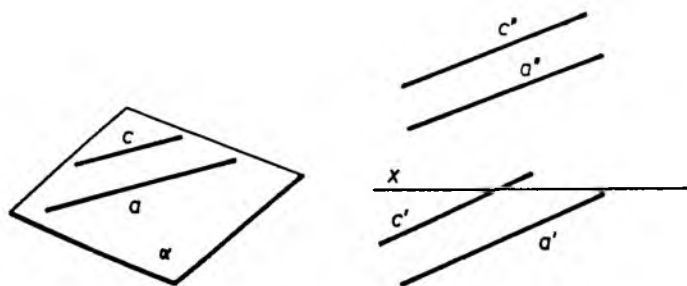
2.4. Odwzorowanie płaszczyzny

Odwzorowanie płaszczyzny polega na odwzorowaniu elementów, które ją określają. Płaszczyzna może być określona kilkoma sposobami, a mianowicie:
1) *Płaszczyzna określona dwiema przecinającymi się prostymi.*

Przykład tak określonej płaszczyzny – płaszczyzna określona prostymi a i b przecinającymi się w punkcie B , co możemy zapisać symbolami: $\alpha = ab$, $a \cap b = B$ – pokazano na rys. 2.15.



2) *Płaszczyzna określona dwiema prostymi równoległymi*

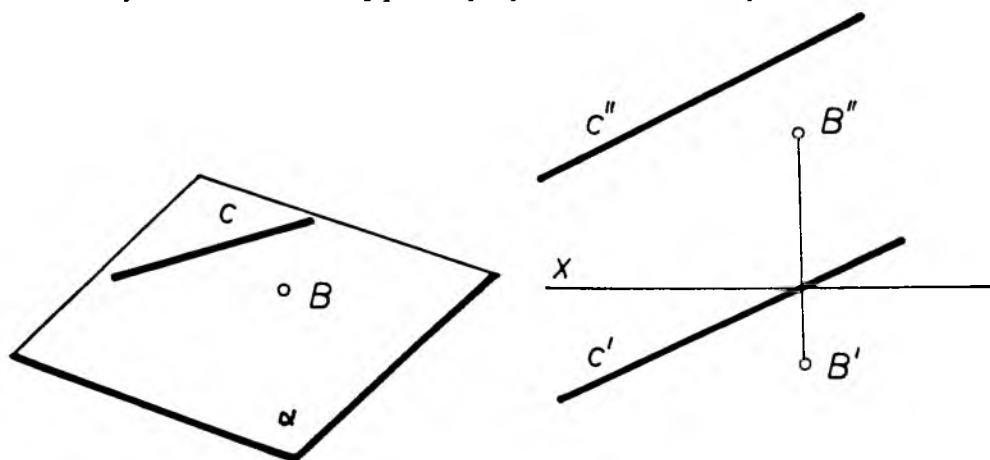


Rys. 2.16. Płaszczyzna określona dwiema prostymi równoległymi,
 $\alpha = ac, a \parallel c$

Na rys. 2.16 pokazano przykładowo rzuty dwóch prostych równoległych a i c określających płaszczyznę $\alpha = ac$.

3) *Płaszczyzna określona prostą c i punktem B nie leżącym na niej*

Przykład tak określonej płaszczyzny zilustrowano na rys. 2.17.



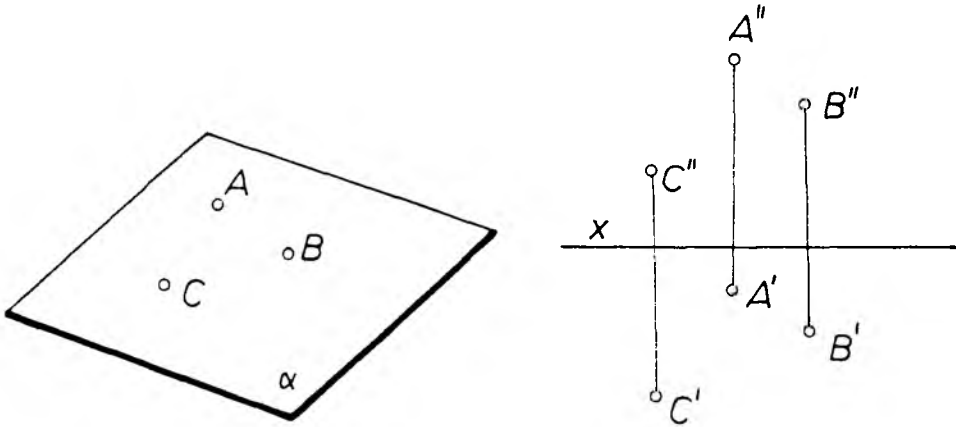
Rys. 2.17. Płaszczyzna określona prostą c i punktem B , $\alpha = Bc$

4) *Płaszczyzna określona trzema punktami A, B, C niewspółliniowymi*

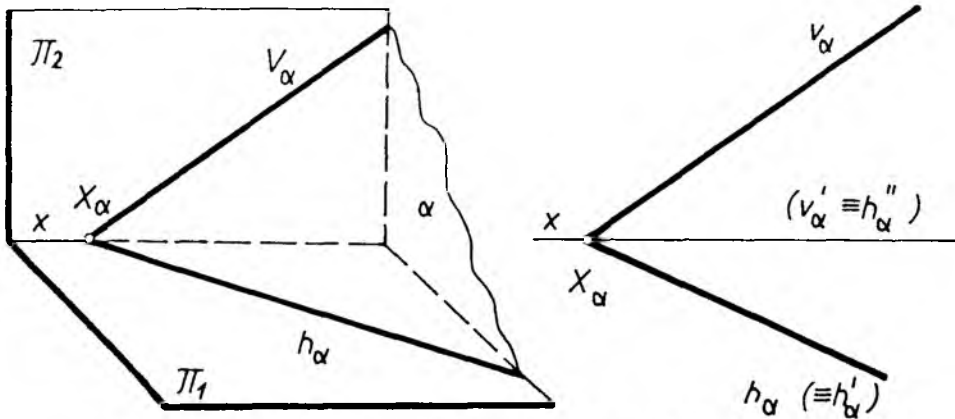
Przykład tak wyznaczonej płaszczyzny ilustruje rys. 2.18.

Do określenia płaszczyzny użycie więcej niż trzech punktów nie jest celowe. Powyższe cztery przypadki określenia płaszczyzny są sobie równoważne.

Łącząc punkty A, B, C otrzymujemy trójkąt ABC , który też w sposób jednoznaczny określa płaszczyznę. Ten sposób określenia płaszczyzny jest o wiele bardziej obrazowy niż określenie jej trzema punktami.



Rys. 2.18. Płaszczyzna określona trzema niewspółliniowymi punktami, $\alpha = ABC$



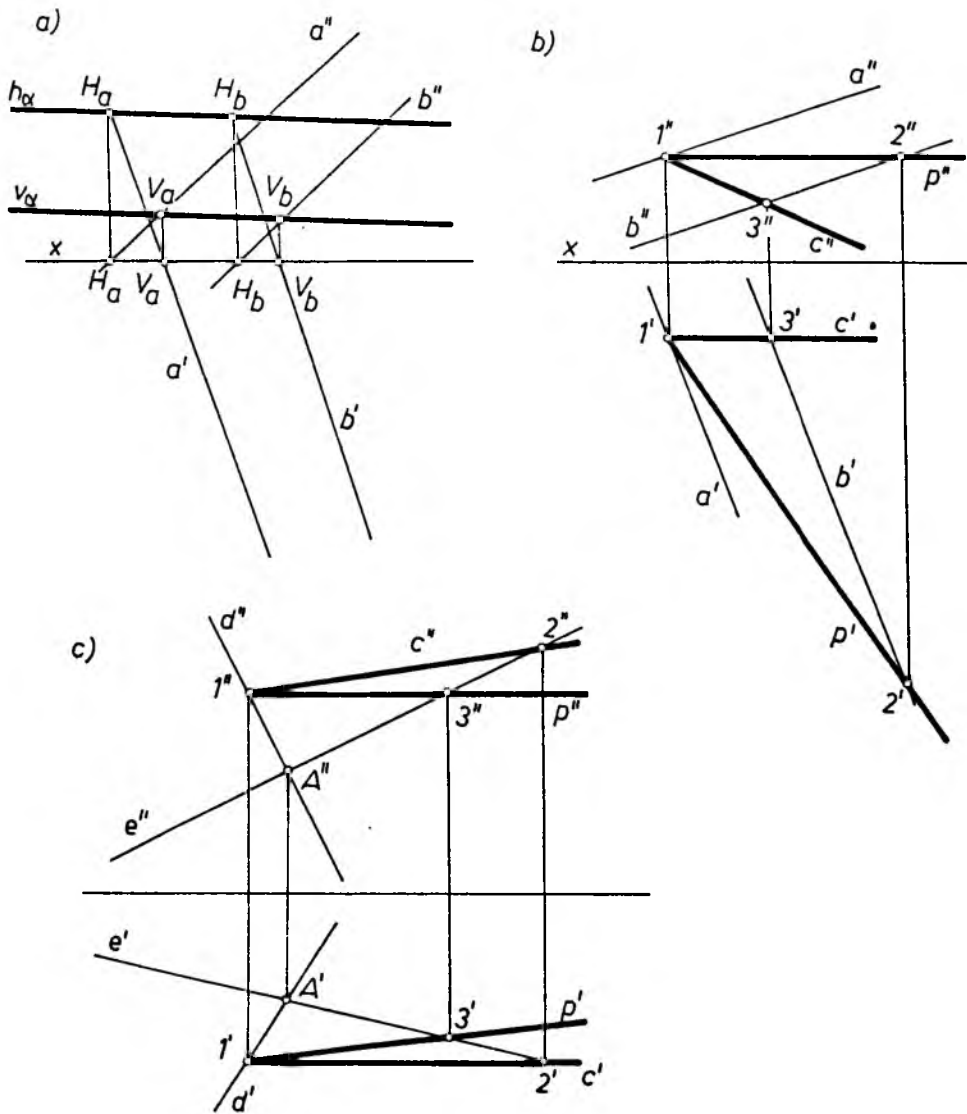
Rys. 2.19. Płaszczyzna określona śladami, $\alpha = h_\alpha v_\alpha$

5) Płaszczyzna określona śladami, $\alpha = h_\alpha v_\alpha$

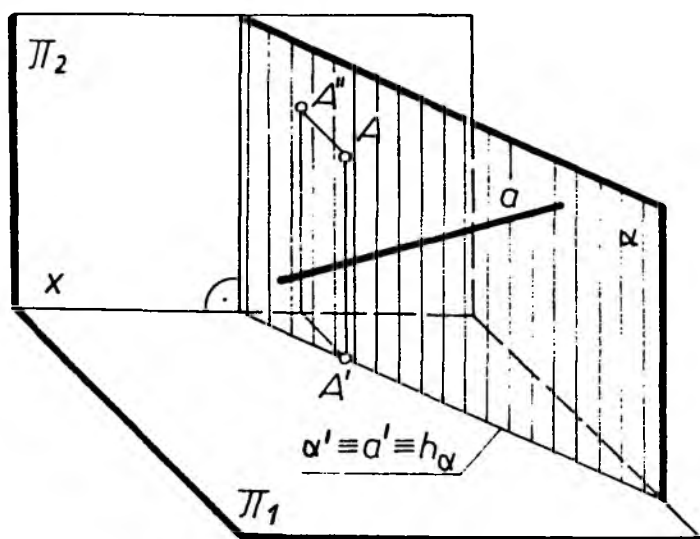
Jest to szczególny przypadek określenia płaszczyzny za pomocą dwóch prostych zwanych śladami płaszczyzny przecinających się na osi x . Kiedy $\alpha \parallel x$, ślady przetną się w nieskończoności (w punkcie niewłaściwym osi x). Śladami płaszczyzny nazywamy krawędzie przecięcia tej płaszczyzny z rzutniami (krawędzią dwóch płaszczyzn α i β nazywamy ich część wspólną, tj. prostą $k = \alpha \cap \beta$).

Śladem poziomym h_α płaszczyzny α jest krawędź przecięcia tej płaszczyzny z rzutnią poziomą, a śladem pionowym v_α płaszczyzny α jest jej krawędź przecięcia z rzutnią pionową. Wyrażenia w nawiasach (rys. 2.19) oznaczają rzuty śladów, które zazwyczaj pomijamy. Punkt przecięcia osi x płaszczyzną nazywamy węzłem płaszczyzny i oznaczamy X_α .

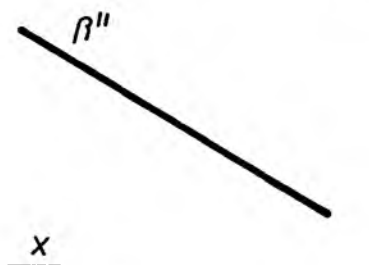
Przejdźcie od wybranego do innego sposobu odwzorowania płaszczyzny nie nastęrcza większych kłopotów, przykłady na rys. 2.20.



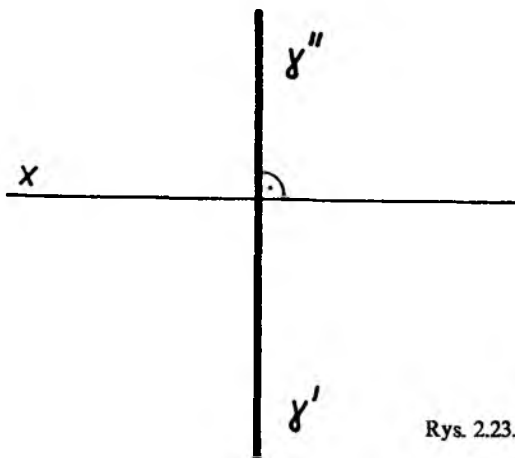
Rys. 2.20. Zmiana sposobu odwzorowania płaszczyzny: a) określenie śladów płaszczyzny określonej prostymi równoległymi; wyznaczenie prostych czołowej i poziomej płaszczyzny określonej, b) prostymi równoległymi a i b, c) prostymi przecinającymi się d i e



Rys. 2.21. Płaszczyzna poziomo-rzutująca α



Rys. 2.22.



Rys. 2.23. Płaszczyzna podwójnie rzutująca γ

2.4.2. Szczególne położenie płaszczyzn

Płaszczyzna poziomo-rzutująca, $\alpha \perp \pi_1$ (rys. 2.21)

Płaszczyznę prostopadłą do rzutni poziomej nazywamy płaszczyzną poziomo-rzutującą.

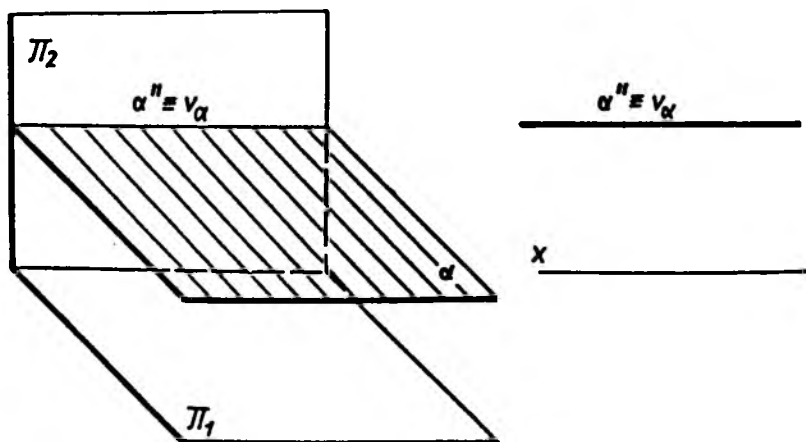
Płaszczyzna pionowo-rzutująca $\beta \perp \pi_2$ (rys. 2.22)

Płaszczyzna podwójnie rzutująca $\gamma \perp x$

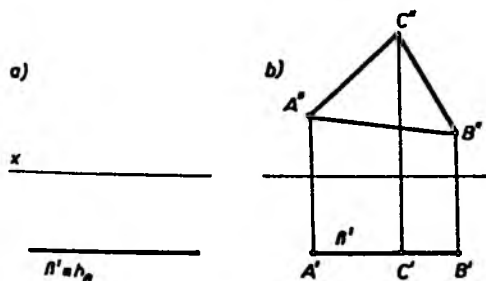
Płaszczyznę podwójnie rzutującą nazywamy płaszczyzną prostopadłą jednocześnie do obu rzutni (rys. 2.23).

Płaszczyzna pozioma $\alpha \parallel \pi_1$ (rys. 2.24)

Płaszczyznę poziomą nazywamy płaszczyzną równoległą do rzutni poziomej. Jest ona szczególnym przypadkiem płaszczyzny pionowo-rzutującej.



Rys. 2.24. Płaszczyzna pozioma α



Rys. 2.25. Przykłady określenia płaszczyzny czołowej

Płaszczyzna czołowa $\beta \parallel \pi_2$ (rys. 2.25)

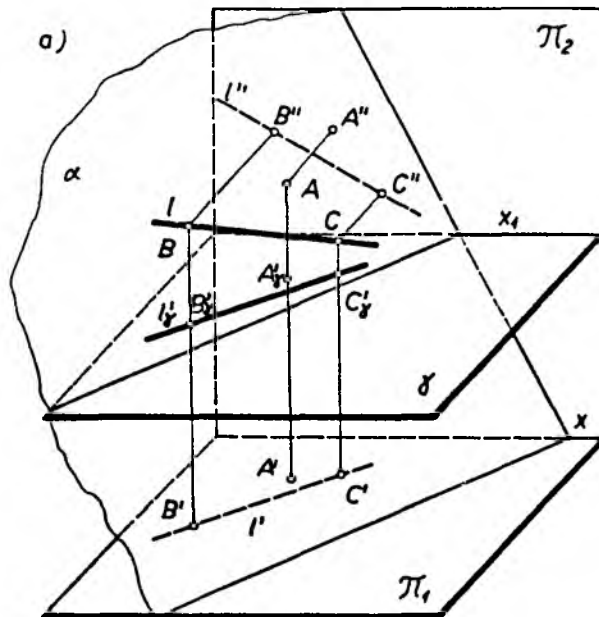
Płaszczyznę czołową nazywamy płaszczyznę równoległą do rzutni pionowej.

2.5. Pominięcie układu odniesienia

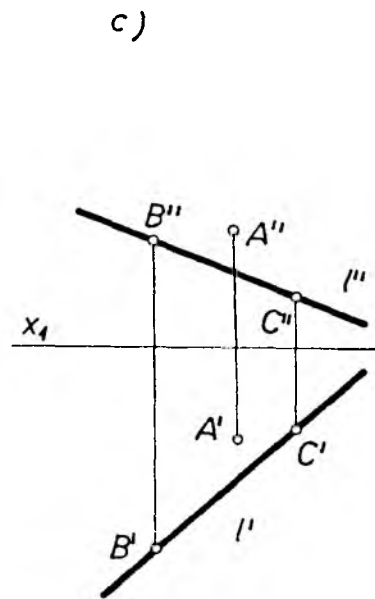
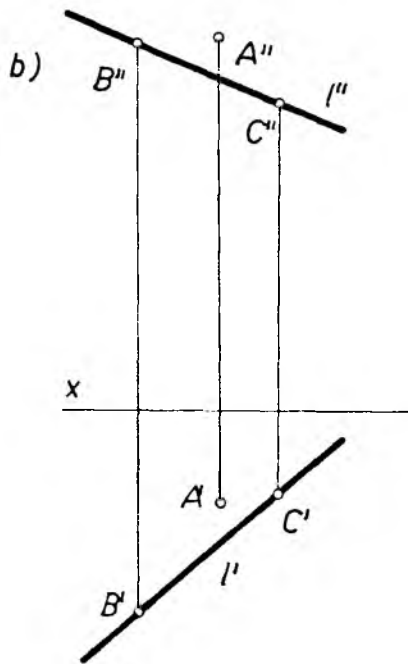
Na rys. 2.26a przedstawiono poglądowo rzuty płaszczyzny α określonej punktem A i prostą b ($\alpha = Ab$) na rzutnię π_1 o π_2 oraz płaszczyznę poziomą γ .

Rzuty płaszczyzny $\alpha = Ab$ w układzie odniesienia określonym rzutami π_1 i π_2 przedstawia rys. 2.26b, a rzuty tej samej płaszczyzny w układzie odniesienia określonym rzutami π_2 i γ – rys. 2.26c. Jak widać, postać rzutów nie zależy od wyboru rzutni poziomej, jedynie rzut pionowy w drugim przypadku „przybliżył” się do osi (głębokości wszystkich punktów zmieniły się o tę samą wartość). Do podobnego wniosku dojdziemy zmieniający rzutnię pionową na płaszczyznę czołową.

Wybór przedstawionych rzutni nie wpływa na końcowe rozwiązanie, o ile to rozwiązanie nie będzie związane z konkretną rzutnią, np. wyznaczanie śladów płaszczyzny, śladów prostej. Dlatego jeśli w czasie rozwiązywania nie będziemy używać śladów, to wybór konkretnego układu odniesienia (w przedstawieniu płaskim osi x) nie jest konieczny. Należy zauważyć, że dla jednoznacznego określenia prostej czy płaszczyzny należy określić kierunek odnoszącej, najlepiej przez określenie obu rzutów tego samego punktu. W przypadku prostej czołowej czy poziomej odnoszące są prostopadłe do jednego z rzutów: poziomego prostej czołowej lub pionowego prostej poziomej.



Rys. 2.26a.



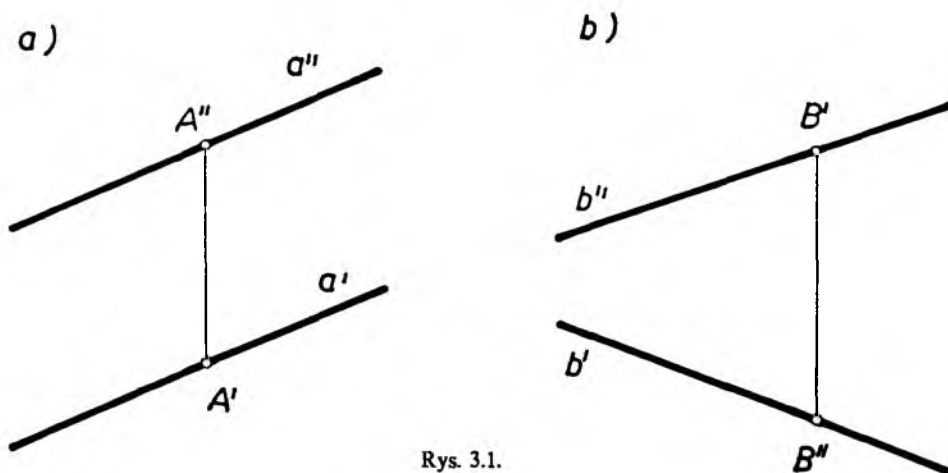
Rys. 2.26.b)c).

Rozdział III

ELEMENTY PRZYNALEŻNE

3.1. Punkt i prosta do siebie przynależne, $A \in a$

Jeżeli punkt i prosta są do siebie przynależne, to odpowiednie (jednoimienne) rzuty punktu i prostej do siebie przynależą (rys. 3.1.a).



Na rys. 3.1b punkt B i prosta b nie przynależą do siebie bo np. B' i b'' nie są odpowiednie (jednoimienne).

3.2. Prosta i płaszczyzna do siebie przynależne

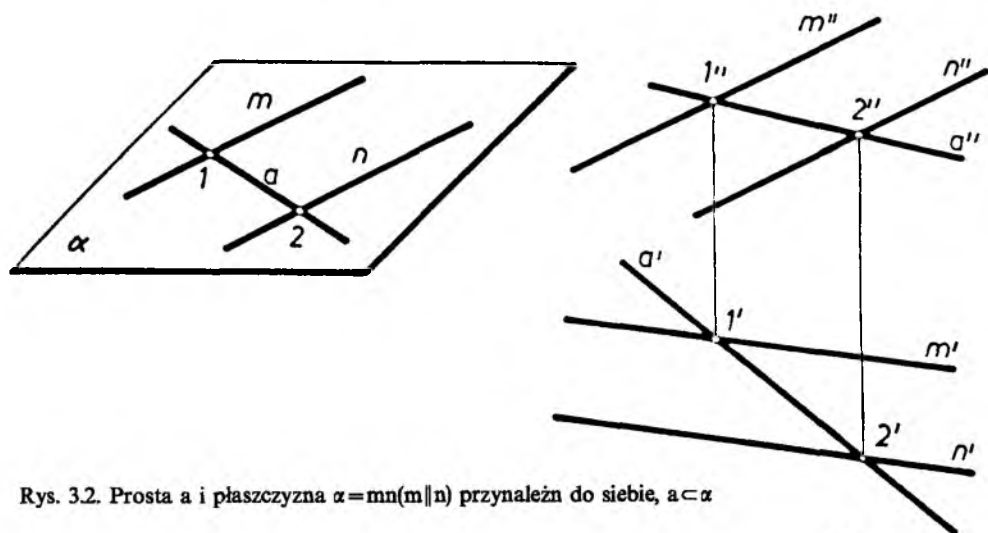
Prosta i przynależna do płaszczyzny, jeżeli dwa różne punkty są przynależne do tej płaszczyzny.

Na rys. 3.2 i 3.3 przedstawiono przynależne do siebie prostą i płaszczyznę α przy różnych sposobach określenia płaszczyzny.

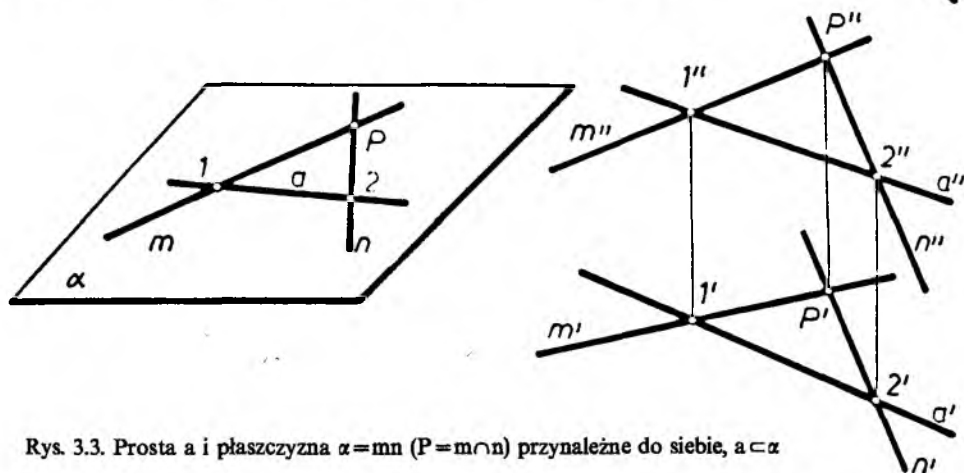
3.3. Punkt i płaszczyzna do siebie przynależne

Punkt leży na płaszczyźnie, gdy leży na prostej leżącej na tej płaszczyźnie.

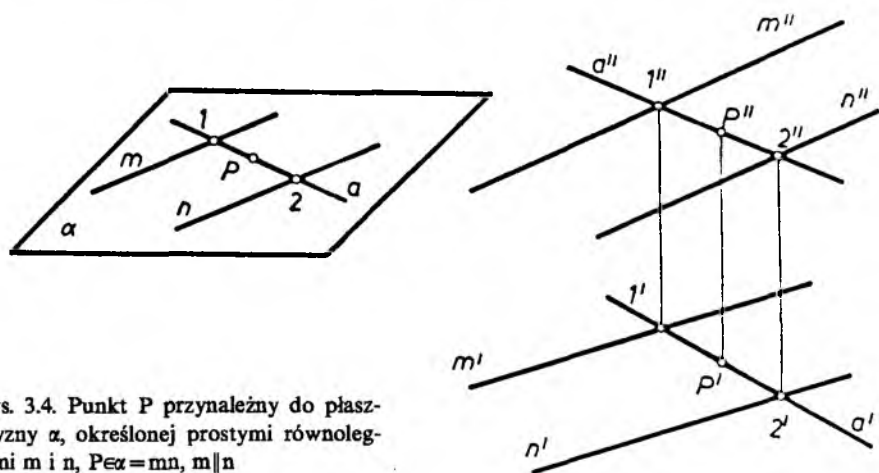
Na rys. 3.4 i 3.5 podano przykłady i sposób wyznaczania rzutów punktu przynależnego do płaszczyzny określonej różnymi sposobami.



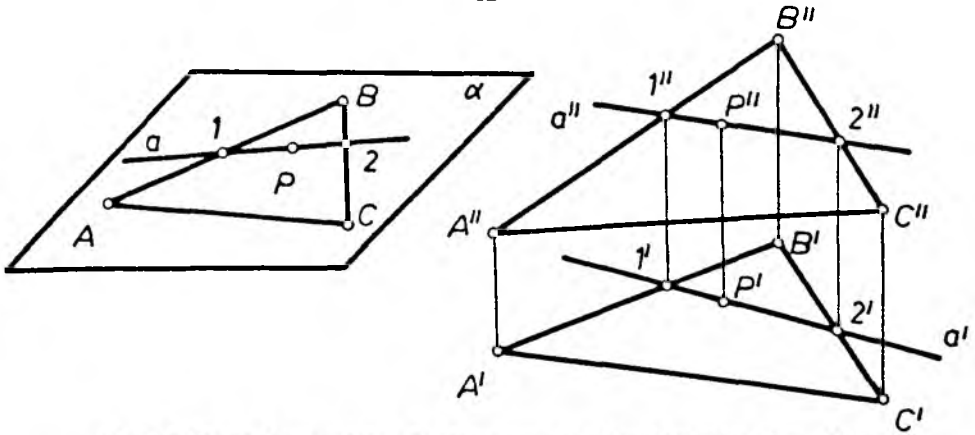
Rys. 3.2. Prosta a i płaszczyzna $\alpha = mn(m \parallel n)$ przynależne do siebie, $a \subset \alpha$



Rys. 3.3. Prosta a i płaszczyzna $\alpha = mn (P = m \cap n)$ przynależne do siebie, $a \subset \alpha$



Rys. 3.4. Punkt P przynależny do płaszczyzny α , określonej prostymi równoległymi m i n , $P \in \alpha = mn, m \parallel n$

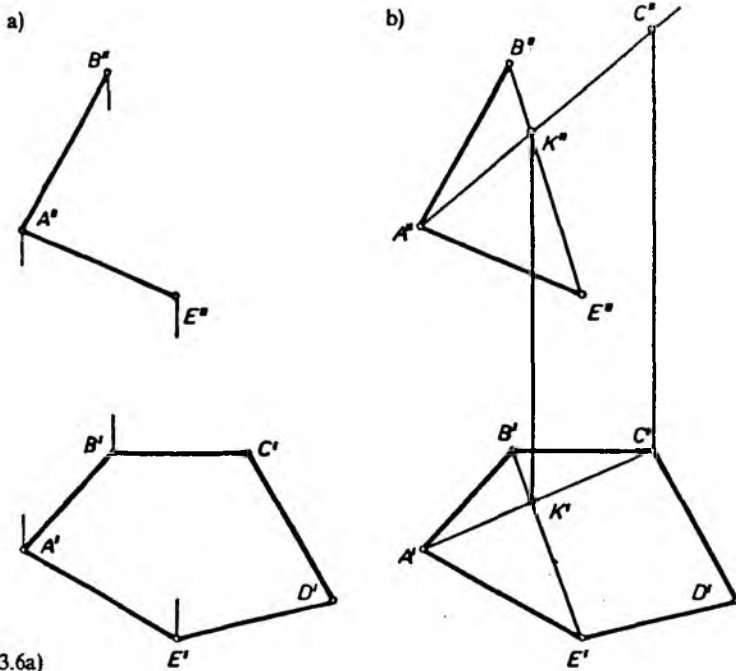


Rys. 3.5. Punkt P przynależny do płaszczyzny określonej trójkątem $P \in \alpha = ABC$

Przykłady

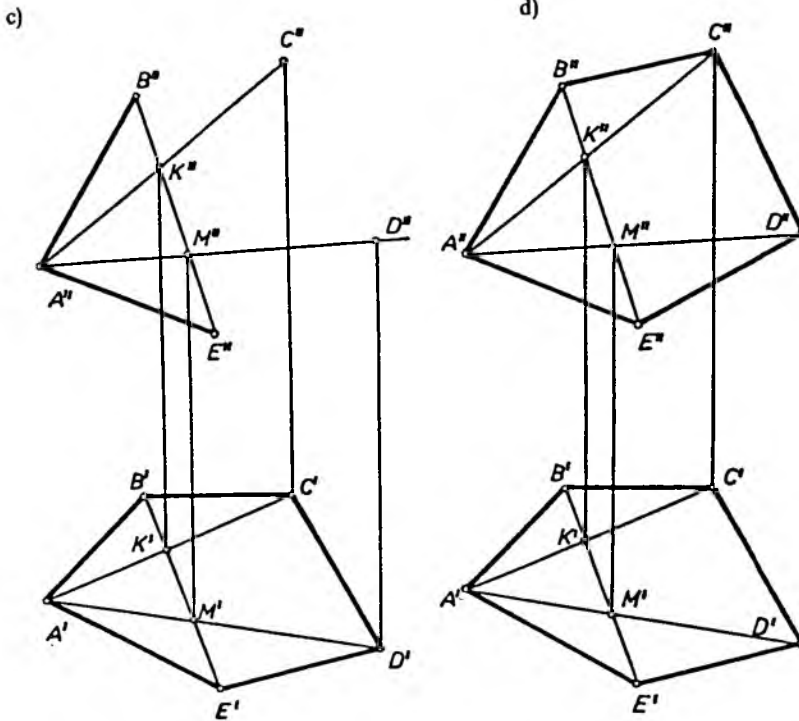
1. Wyznaczyć rzut pionowy pięciokąta ABCDE, jeśli dany jest jego rzut poziomy i rzuty pionowe punktów A, B, E.

Rozwiązanie w rozbiciu na etapy pokazano na rys. 3.6.



Rys. 3.6a)

Rys. 3.6b) Na rzucie poziomym prowadzimy przekątną $B'E'$ i $A'C'$, które przecinają się w punkcie K' . Z rzutu poziomego $K' = A'C' \cap B'E'$ prowadzimy odnoszącą do przecięcia z rzutem pionowym $B''E''$ przekątną BE i zaznaczamy punkt K'' . Rzut pionowy C'' znajdujemy w punkcie przecięcia przedłużenia prostej $A''K''$ z odnoszącą z punktu C'

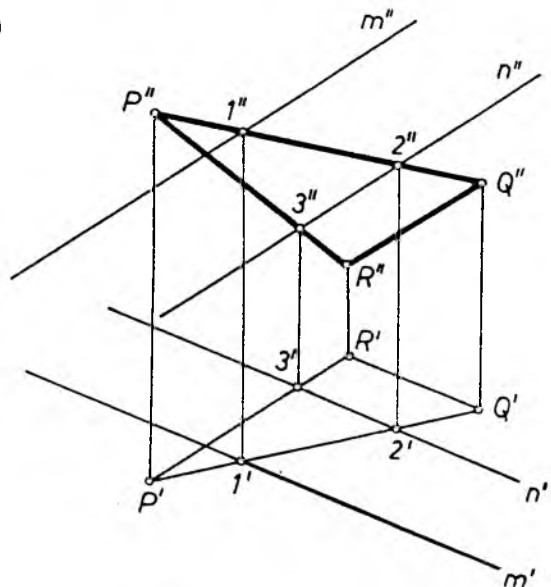


Rys. 3.6c) Rzut pionowy D'' punktu D znajdujemy analogicznie prowadząc przekątną AD. Łącząc odcinkami rzuty pionowe punktów B,C,D i E otrzymujemy szukany rzut $A'' B'' C'' D'' E''$ pięciokąta

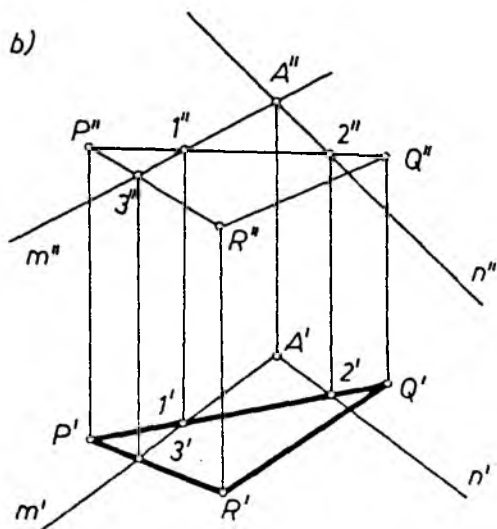
2. Wyznaczyć rzuty trójkąta PQR leżącego na płaszczyźnie. Dany jest rzut poziomy (rys. 3.7a) lub pionowy (rys. 3.7b) trójkąta, szukany jest rzut brakujący.

Rozwiązanie na rys. 3.7.

a)



Rys. 3.7a). Trójkąt PQR przynależny do płaszczyzny $\alpha = mn$, $m \parallel n$



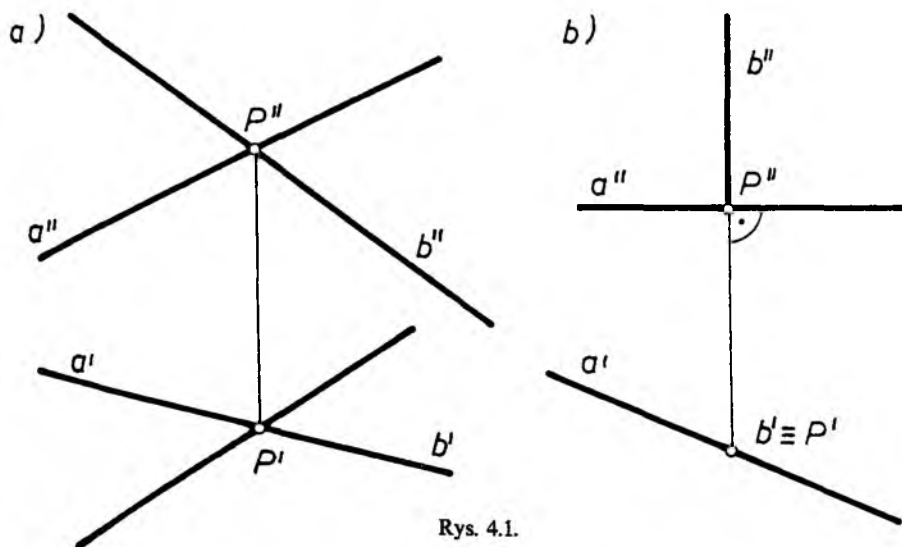
Rys. 3.7.b) Trójkąt PQR przynależy do płaszczyzny $\alpha = mn$, $A = m \cap n$

Rozdział IV

ELEMENTY WSPÓLNE

4.1. Punkt wspólny dwóch prostych, $P = a \cap b$

Rzuty wspólnego punktu dwóch prostych a i b (punktu przecięcia się prostych) leżą na prostej odnoszącej, rys. 4.1.



Rys. 4.1.

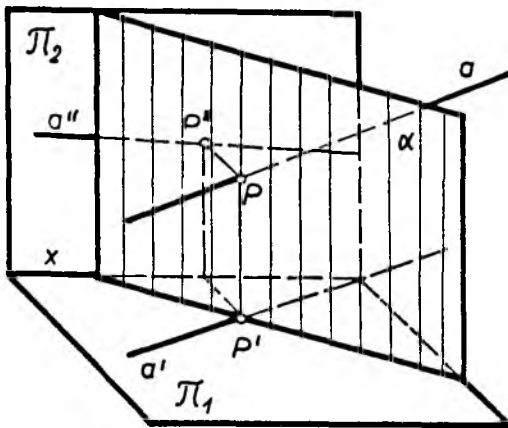
4.2. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny rzutującej

Rzuty punktu przebiecia płaszczyzny rzutującej prostą znajdujemy niemal natychmiast, rys. 4.2a i b.

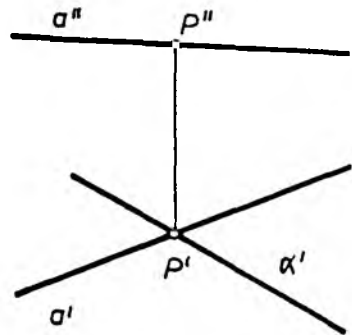
Przykładowo na rys. 4.2b w przecięciu a^I i α^I rzutów poziomych prostej a i płaszczyzny poziomo-rzutującej α znajdujemy P^I rzut poziomy szukanego punktu przebiecia P ; następnie wystawiamy z P^I odnoszącą, która przetnie a^{II} rzut pionowy prostej a w punkcie P^{II} będącym oczywiście rzutem pionowym punktu przebiecia P .

Kilka dalszych przykładów wyznaczania punktu przebiecia płaszczyzny rzutującej dowolną prostą przedstawia rys. 4.3. Przykład a) i d) rozwiązujemy tak samo jak na rys. 4.2b. Natomiast tok rozwiązania przykładów b) i c) jest taki sam z jedną różnicą: ponieważ dana płaszczyzna α jest wówczas pionowo-rzutującą, to najpierw w przecięciu α^{II} z a^{II} wyznaczamy P^{II} , a P^I określimy prowadząc z P^{II} odnoszącą do przecięcia z a^I .

a)

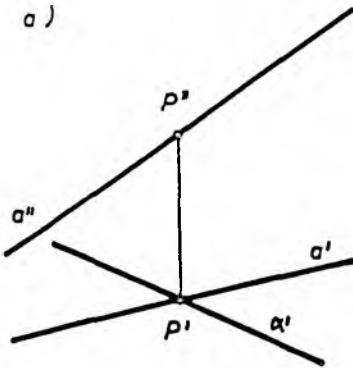


b)

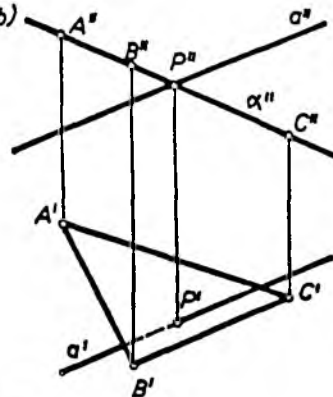


Rys. 4.2. Punkt przebiecia płaszczyzny poziomo-rzutu α prostą a ; $P = a \cap \alpha$, $\alpha \perp \pi_1$

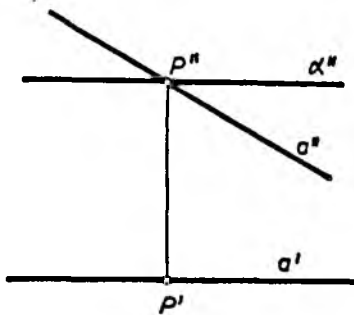
a)



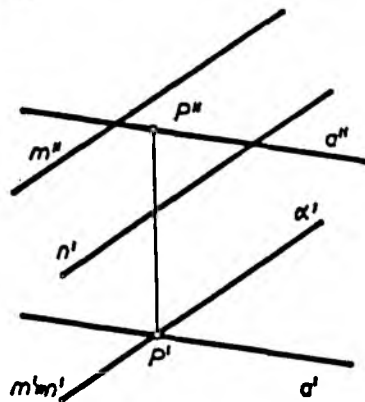
b)



c)



d)



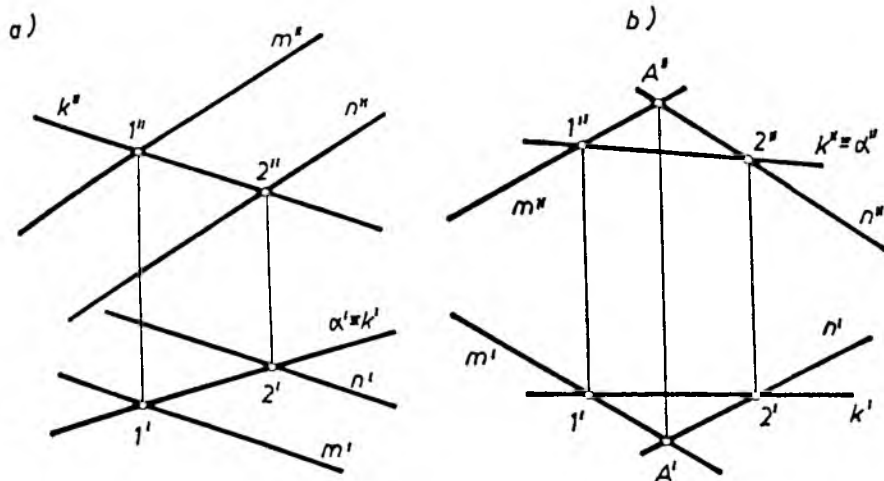
Rys. 4.3. Wyznaczanie punktu przebiecia P prostą a z płaszczyzną rzutującą α

Przykład:

Wyznaczyć krawędź przecięcia płaszczyzny dowolnej β płaszczyzną rzutującą α .

Rozwiązania dla różnie określonych płaszczyzn β przedstawia rys. 4.4. Jeden z rzutów szukanej krawędzi pokrywa się rzutem płaszczyzny rzutującej α , natomiast brakujący rzut krawędzi określamy, wyznaczając dwa punkty tej krawędzi;

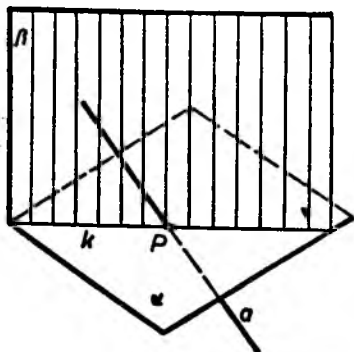
przykładowo na rys. 4.4a krawędź k określają punkty 1 i 2 będące punktami przebiecia płaszczyzny α prostymi m i n



Rys. 4.4. Krawędź płaszczyzny rzutującej α z płaszczyzną β określoną:
a) $\beta = mn$, $m \parallel n$; b) $\beta = mn$, $A = m \cap n$

4.3. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny dowolnej; $P = a \cap \alpha$

W celu wyznaczenia punktu przebiecia płaszczyzny dowolnej prostą należy postępować następująco (rys. 4.5):



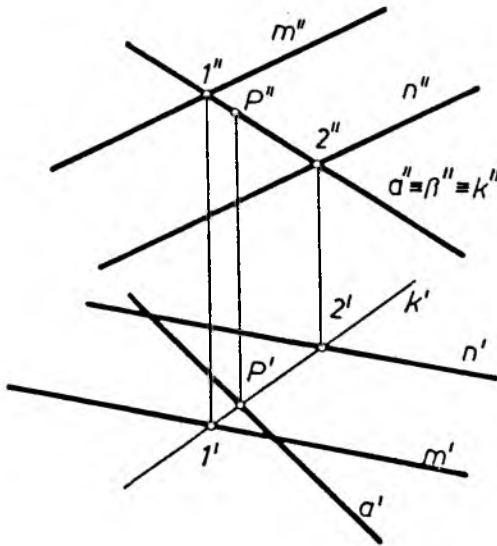
Rys. 4.5. Wyznaczanie punktu przebiecia płaszczyzny α prostą a — schemat

- 1) $a \subset \beta$ (przez prostą a prowadzimy płaszczyznę β najwygodniej rzutującą),
- 2) $k = \alpha \cap \beta$ (znajdujemy krawędź przecięcia płaszczyzn α i β),
- 3) $P = k \cap a$ (znajdujemy punkt przecięcia krawędzi k z prostą a).

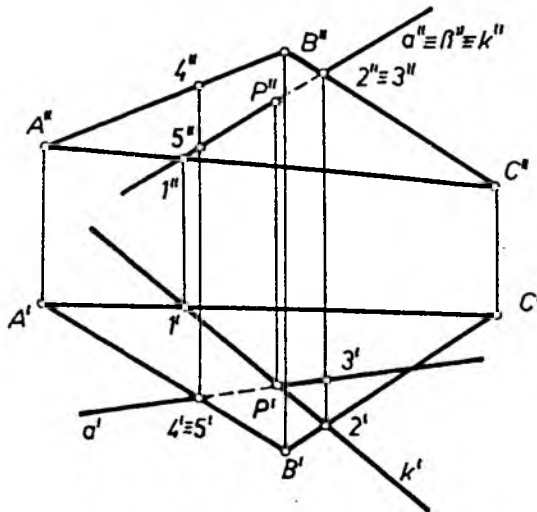
Punkt P jest szukanym punktem wspólnym prostej a i płaszczyzny α .

Przykłady:

Dana jest płaszczyzna α i prosta a ; wyznaczyć punkt wspólny P .
Rozwiązanie na rys. 4.6.

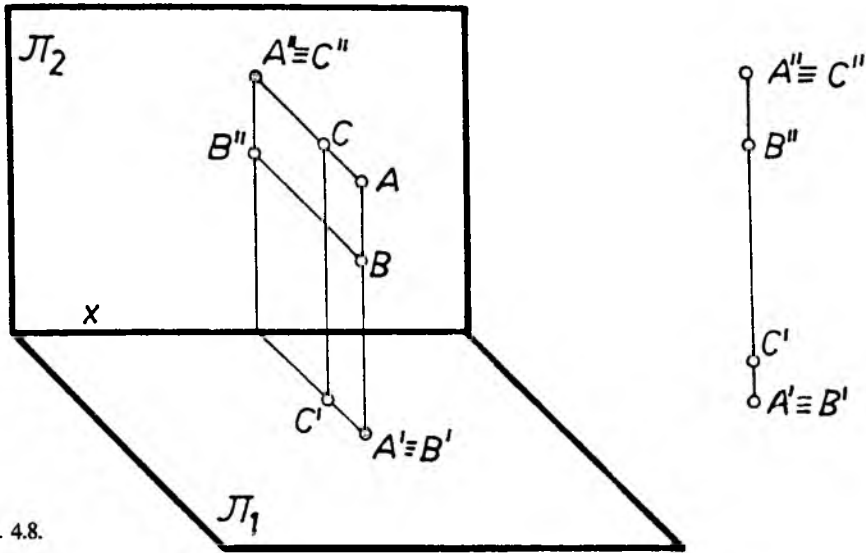


Rys. 4.6. Punkt przecięcia prostej a z płaszczyzną $\alpha = mn$ ($m \parallel n$), $P = a \cap \alpha$



Rys. 4.7. Punkt przecięcia płaszczyzny $\alpha = ABC$ prostą a , $P = a \cap \alpha$

Na rys. 4.7 została ustalona widoczność prostej a w obu rzutach, w stosunku do nieprzezroczystego trójkąta ABC . Widoczność prostej ustala się na podstawie widoczności punktów, w następujący sposób (rys. 4.8):



Rys. 4.8.

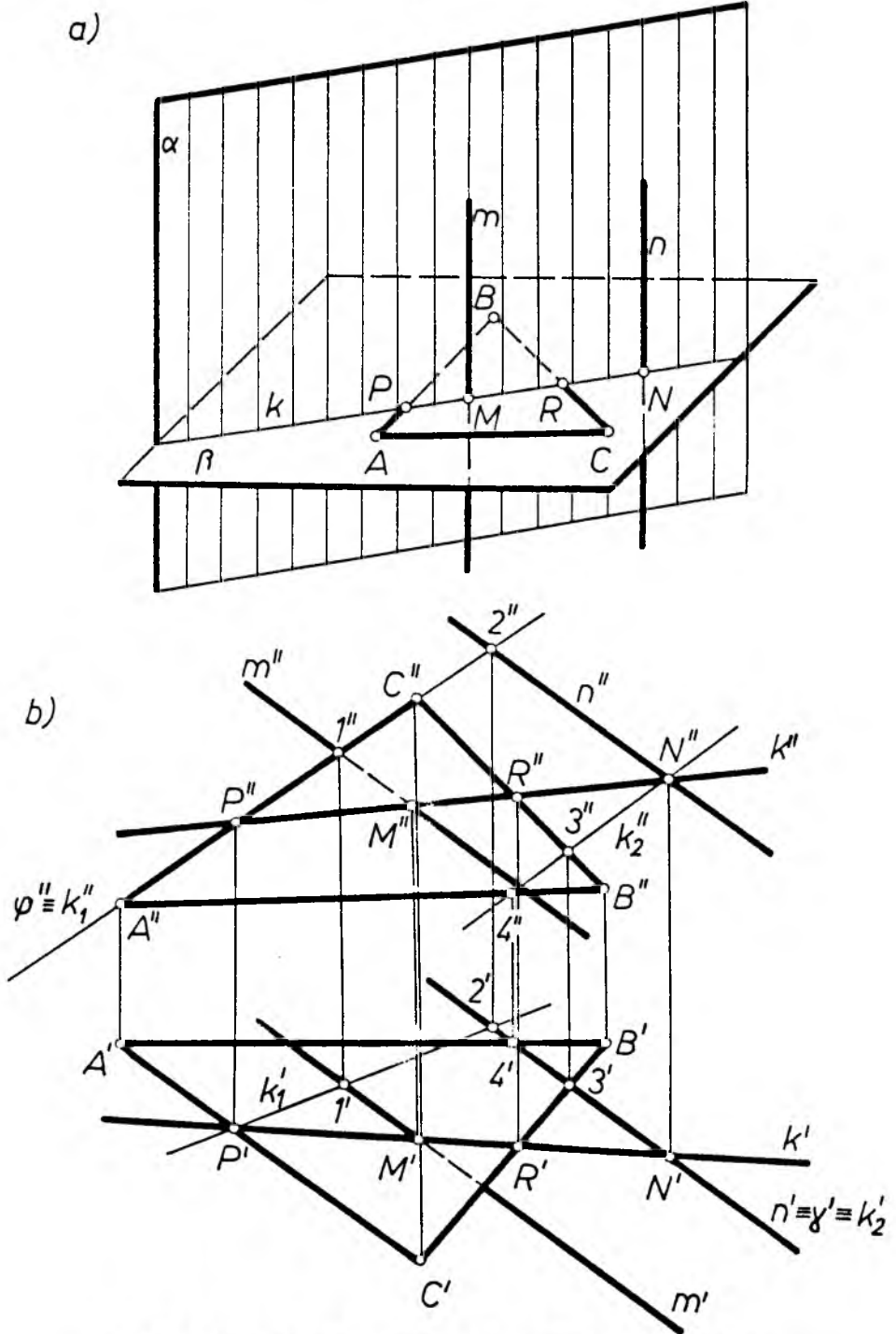
Przyjmujemy dwa punkty A i B takie, że ich rzuty poziome się jednoczą. Ustalamy, że punkt A na rzutni poziomej jest widoczny, gdyż na większą wysokość niż punkt B . Przyjmujemy następnie punkt C tak, że rzuty pionowe punktów A i C się jednoczą. Podobnie ustalamy, że punkt A na rzutni pionowej jest widoczny, bo ma większą głębokość niż punkt C . Zależności te pozwalają na ustalenie widoczności prostej w stosunku do nieprzezroczystego trójkąta.

4.4. Krawędź dwóch płaszczyzn określonych prostymi i punktami, $k = \alpha \cap \beta$

Krawędź dwóch płaszczyzn określamy, wyznaczając dwa punkty krawędzi. Dla przykładu rozpatrzmy płaszczyzny $\alpha = mn$ ($m \parallel n$) i $\beta = ABC$ (rys. 4.9).

Możemy wyznaczyć punkty M i N , w których proste m i n przebijają płaszczyznę β , albo punkty P i R , w których boki trójkąta ABC przebijają płaszczyznę α .

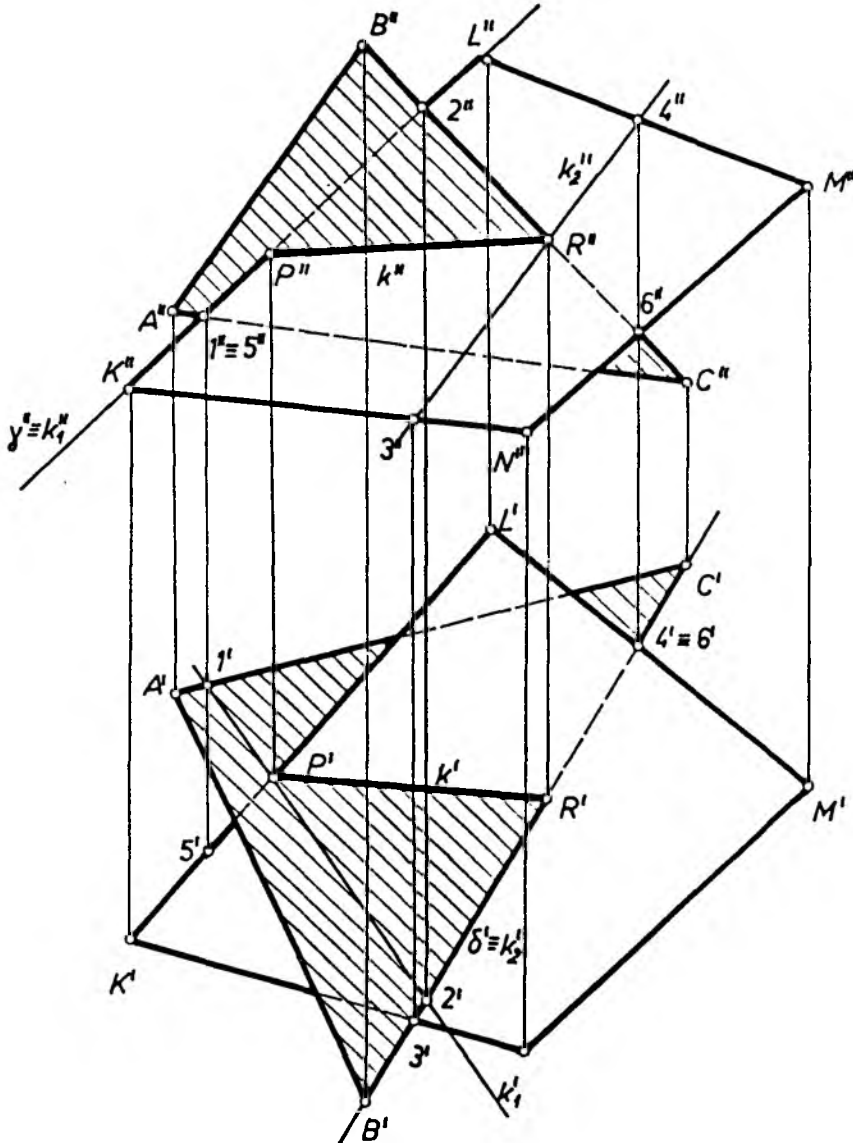
Do wyznaczenia krawędzi potrzebne są tylko dwa punkty, na rys. 4.9 wyznacza się M i N . Im dalej od siebie położone są punkty, tym dokładniej jest wyznaczona krawędź, a więc najkorzystniej wyznaczyć punkty P i N . W tym celu przez bok AC prowadzimy płaszczyznę pionowo-rzutującą φ , znajdujemy krawędź $k_1 = \varphi \cap \alpha$; następnie przez prostą n prowadzimy płaszczyznę poziomo-rzutującą γ , wyznaczamy krawędź $k = \gamma \cap \beta$ i punkt N . Punkty P i N wyznaczają krawędź $k = \alpha \cap \beta$.



Przykłady:

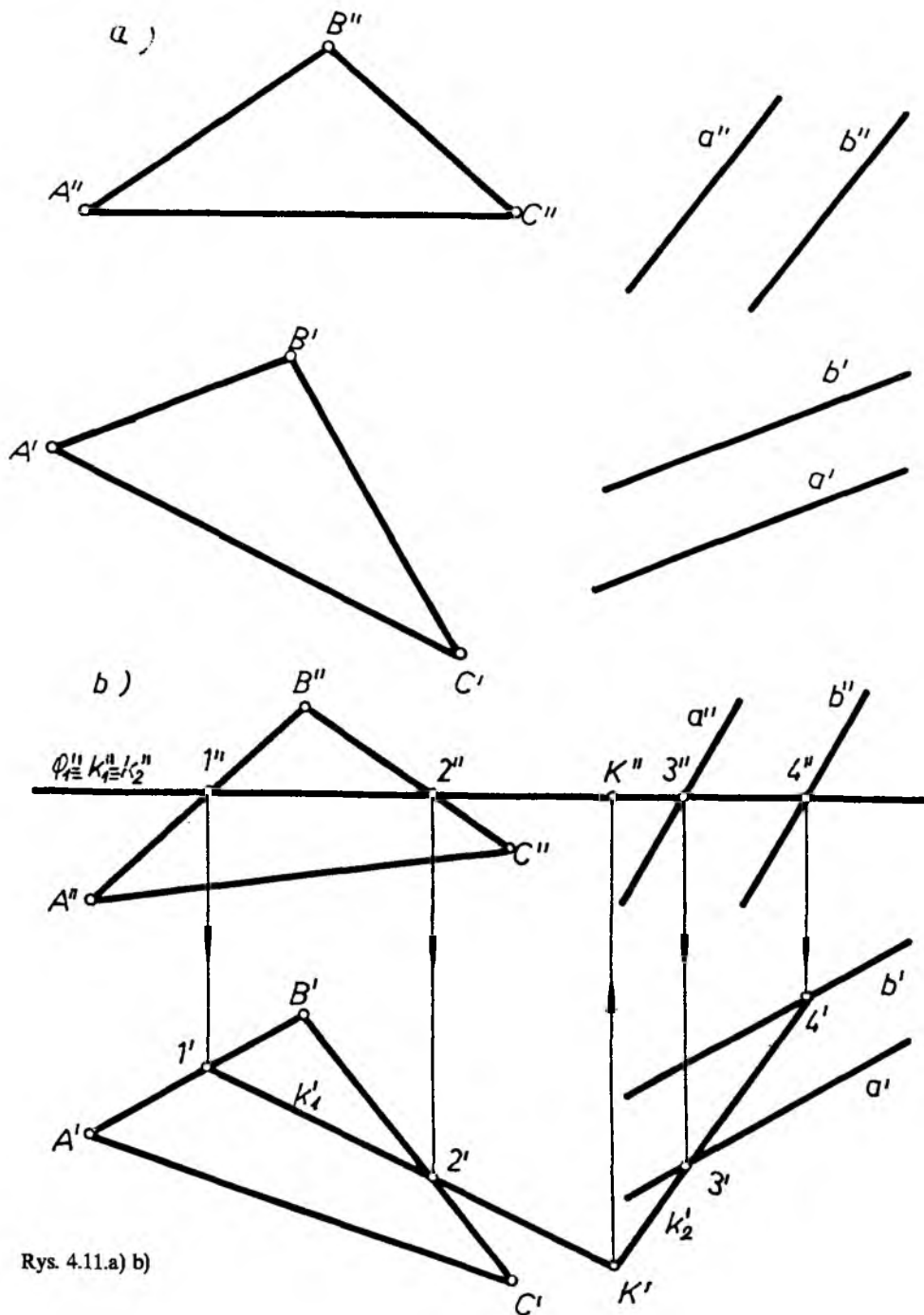
1) Dane są płaszczyzny określone punktami: $\alpha = ABC$ (trójkąt) i $\beta = KLMN$ (trapez). Należy wyznaczyć linię przenikania tych figur płaskich oraz ustalić widoczność figur metodą w poprzednim punkcie.

Zadanie rozwiązano na rys. 4.10 prowadząc pomocnicze płaszczyzny rzutujące γ i δ dla wyznaczenia punktów P i R oraz przyjmując dodatkowe punkty 5 i 6 dla ustalenia widoczności.

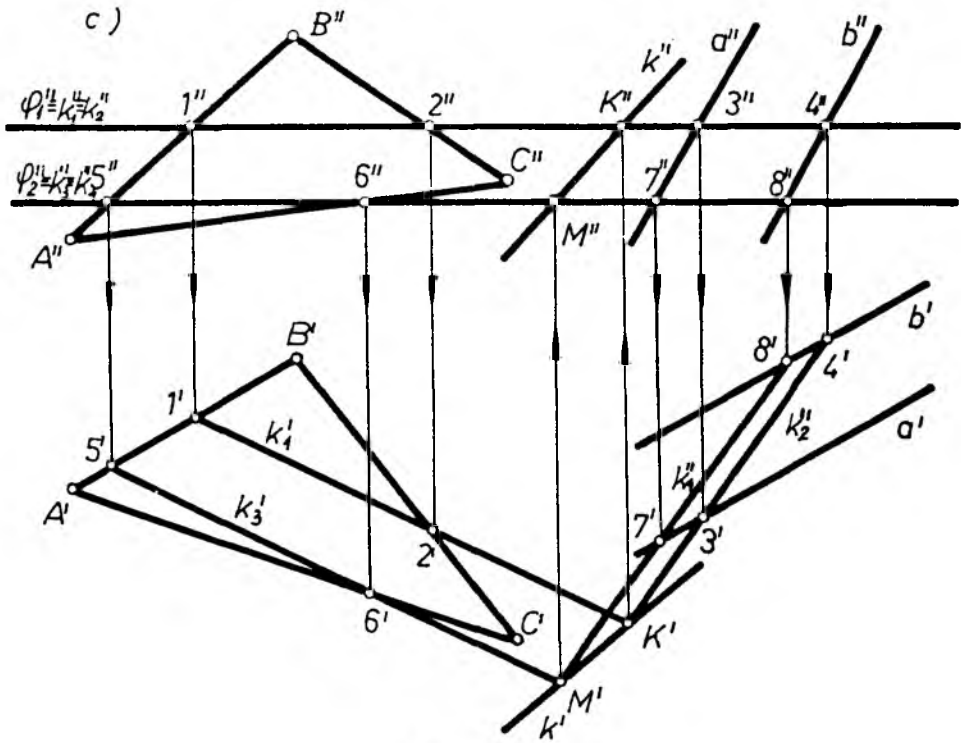


Rys. 4.10. Przenikanie figur płaskich

2. Dane są dwie płaszczyzny $\alpha = ABC$ i $\beta = ab$ ($a \parallel b$), rys. 4.11a.



Rys. 4.11.a) b)



Rys. 4.11c.

Zadanie rozwiązano w sposób następujący:

Wprowadzono płaszczyznę pomocniczą φ_1 (poziomo-rzutującą) i wyznaczono k_1 krawędź płaszczyzn φ_1 i α ($k_1 = \varphi_1 \cap \alpha$) oraz k_2 krawędź płaszczyzn φ_1 i β ($k_2 = \varphi_1 \cap \beta$). K punkt wspólny krawędzi k_1 i k_2 ($K = k_1 \cap k_2$) jest punktem wspólnym obu płaszczyzn α i β ($K \in k = \alpha \cap \beta$), rys. 4.11b.

Analogicznie wprowadzając płaszczyznę rzutującą φ_2 wyznaczamy jej krawędzie k_3 i k_4 z płaszczyznami α i β . Punkt przecięcia M krawędzi k_3 i k_4 jest też punktem wspólnym płaszczyzn α i β ($M \in k = \alpha \cap \beta$). Punkty K, M określają szukaną krawędź k .

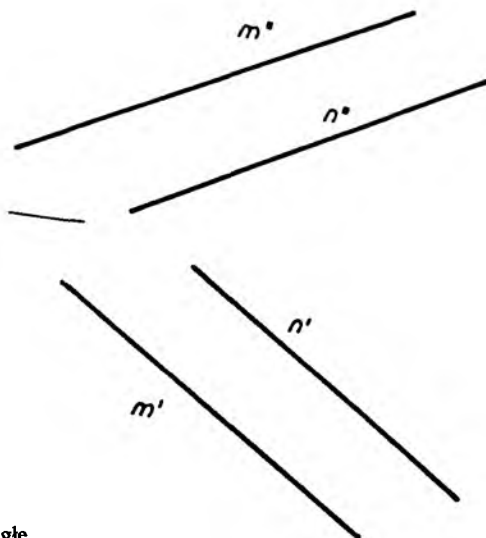
Rozdział V

ELEMENTY RÓWNOLEGŁE

5.1. Proste równoległe

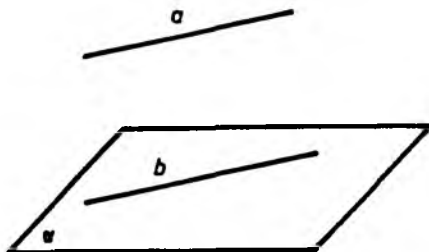
Dwie proste nazywamy równoległymi, jeśli leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają wspólnych punktów właściwych.

Rzuty prostych równoległych są odpowiednio do siebie równoległe. Jeżeli odpowiednie rzuty dwóch prostych równoległych są do siebie równoległe ale nie prostopadłe do osi x , to proste są do siebie równoległe (rys. 5.1).



Rys. 5.1. Proste równoległe

5.2. Prosta i płaszczyzna do siebie równoległe; $a \parallel \alpha$ (rys. 5.2.)

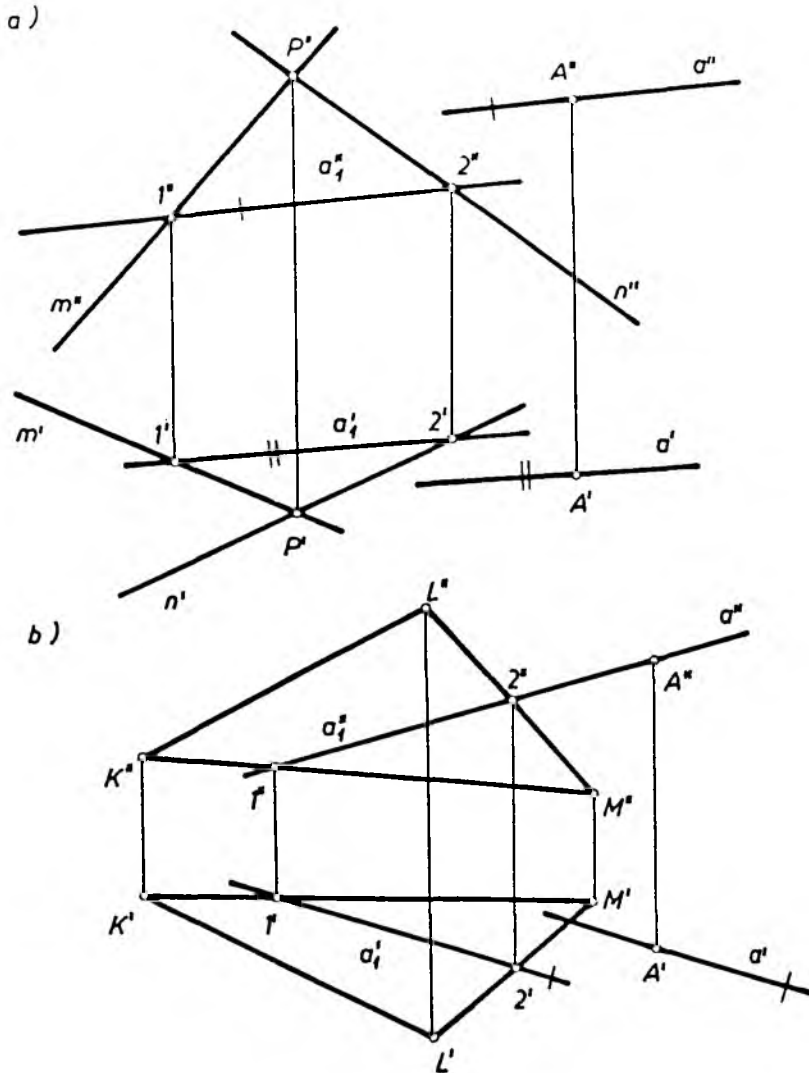


Rys 5.2. Prosta a i płaszczyzna α równoległe, $a \parallel \alpha$

Prosta a jest równoległa do płaszczyzny α wówczas, gdy jest równoległa do prostej b leżącej na płaszczyźnie α . Płaszczyzna α jest równoległa do prostej a wówczas, gdy przechodzi przez prostą b równoległą do prostej a .

Zadanie:

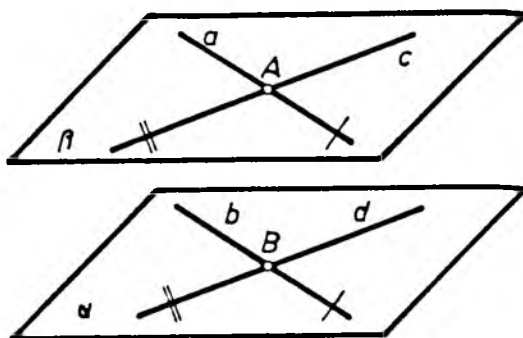
Przez dany punkt A poprowadzić prostą a równoległą do danej płaszczyzny α . Dany jest jeden rzut prostej a . Przykłady rozwiązań na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Wyznaczanie brakującego rzutu prostej a równoległej do danej płaszczyzny α .
a) $\alpha = mn$ ($P = m \cap n$); b) $\alpha = ABC$; równoległość odpowiednich prostych na rysunku oznaczona krótkimi cienkimi kreskami

5.3. Płaszczyzny równoległe

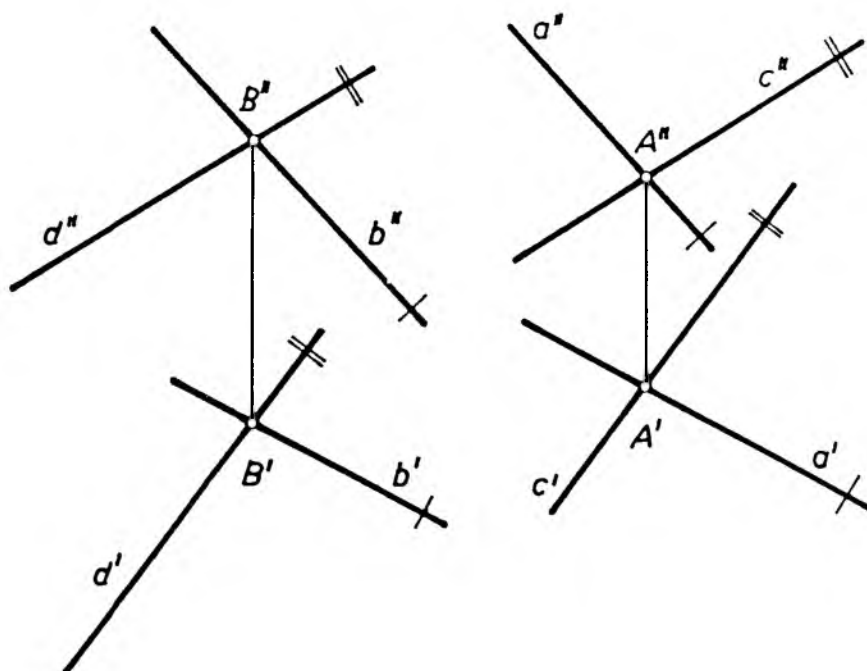
Dwie płaszczyzny są równoległe, jeśli nie mają wspólnych punktów właściwych. Można stwierdzić, że płaszczyzna β jest równoległa do płaszczyzny α wówczas, gdy przechodzi przez dwie przecinające się proste, równoległe do płaszczyzny α (rys. 5.4).



Rys. 5.4. Płaszczyzny równoległe, $\alpha \parallel \beta$

Zadanie:

Przez dany punkt A poprowadzić płaszczyznę równoległą do danej płaszczyzny. Przykład rozwiązania na rys. 5.5.



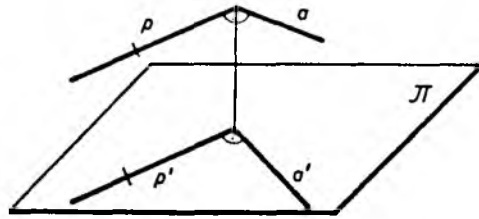
Rys. 5.5. Płaszczyzny równoległe: $\alpha \parallel \beta$; $\alpha = bd$, $b \cap d = B$, $\beta = ac$, $A = a \cap c$

Rozdział VI

ELEMENTY PROSTOPADŁE

6.1. Prosta dowolna prostopadła do prostej głównej; $a \perp p$ i $a \perp c$

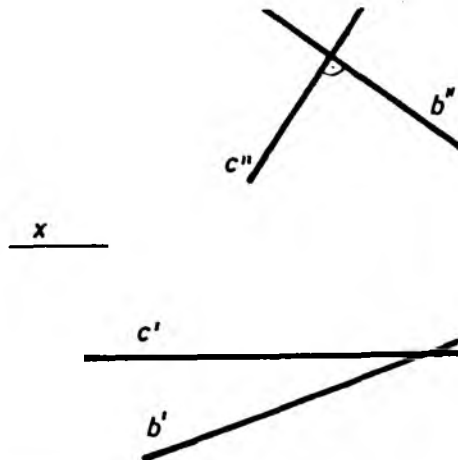
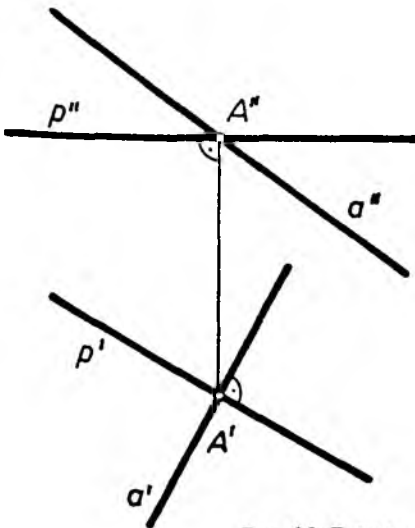
Rzuty dwóch prostych do siebie prostopadłych, z których jedna jest równoległa do rzutni, są na tej rzutni prostopadłe. Mogą to być proste przecinające się lub skośne (rys. 6.1, 6.2)



Rys. 6.1. Rzuty dwóch prostych prostopadłych $a \perp p$; $p \parallel \pi$,
 $a \perp p \Rightarrow a' \perp p'$ i na odwrót: $a' \perp p'$, $p \parallel \pi \Rightarrow a \perp p$

a)

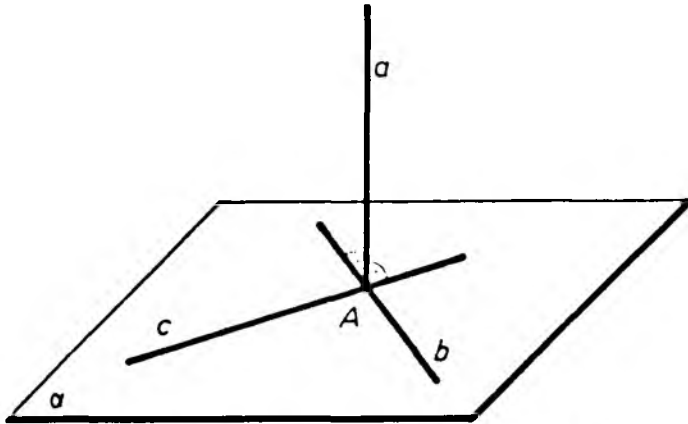
b)



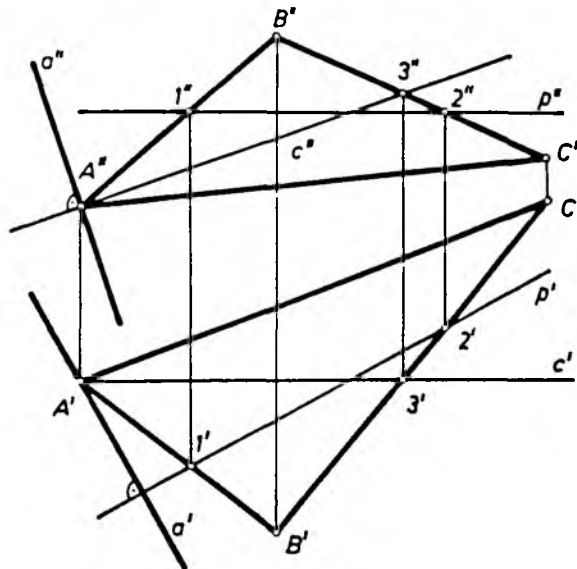
Rys. 6.2. Proste prostopadłe do prostych głównych

6.2. Prosta prostopadła do płaszczyzny: $a \perp \alpha$

Prosta a jest prostopadła do płaszczyzny α wówczas, gdy jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących na tej płaszczyźnie (rys. 6.3).



Rys. 6.3. Prosta a prostopadła do płaszczyzny α



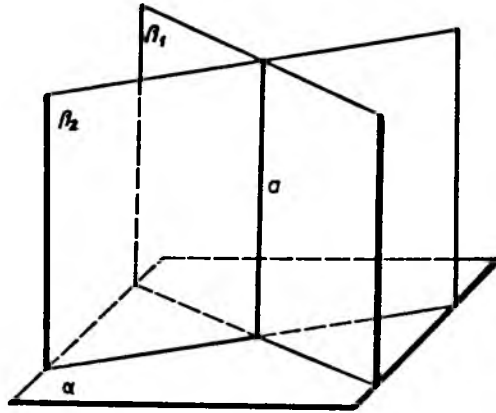
Rys. 6.4. Prosta a prostopadła do płaszczyzny $\alpha = ABC$
($a' \perp p'$, $a'' \perp p''$)

Do ustalenia zależności prostopadłości prostej a do płaszczyzny α , określamy na płaszczyźnie α prostą poziomą p i czołową c (rys. 6.4). Wówczas na podstawie poprzedniego punktu, jeśli $a \perp \alpha$ mamy: $a' \perp p'$ i $a'' \perp c''$.

6.3. Płaszczyzny do siebie prostopadłe: $\beta \perp \alpha$

Mamy dwa określenia prostopadłości dwóch płaszczyzn.

1. Płaszczyzna β jest prostopadła do płaszczyzny α wówczas, gdy przechodzi przez prostą a prostopadłą do płaszczyzny α . Przez tę prostą a możemy poprowadzić pęk płaszczyzn (rys. 6.5).



Rys. 6.5. Prosta a prostopadła do α wyznacza pęk płaszczyzn zawierających prostą a i prostopadłych do α

Przykład:

Dana jest płaszczyzna α i dowolna prosta a .

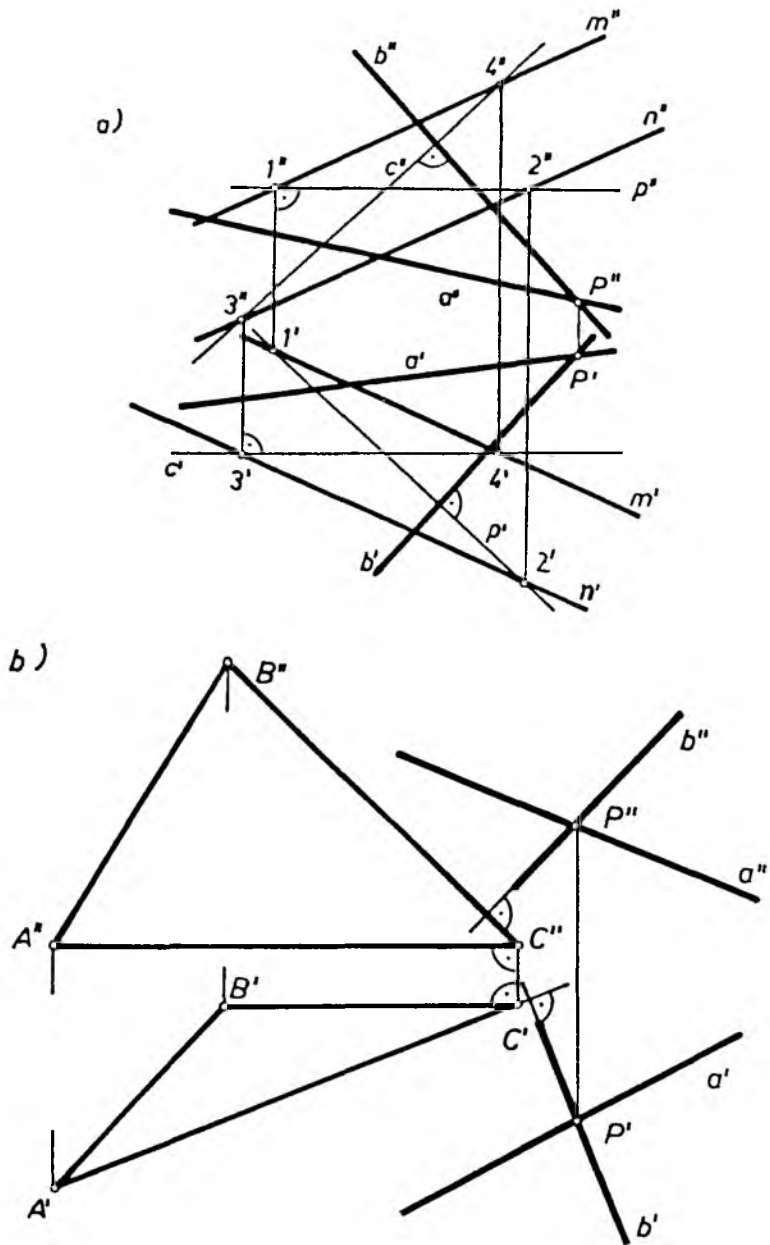
Przez prostą a poprowadzić płaszczyznę β prostopadłą do płaszczyzny α .

Rozwiązanie na rys. 6.6.

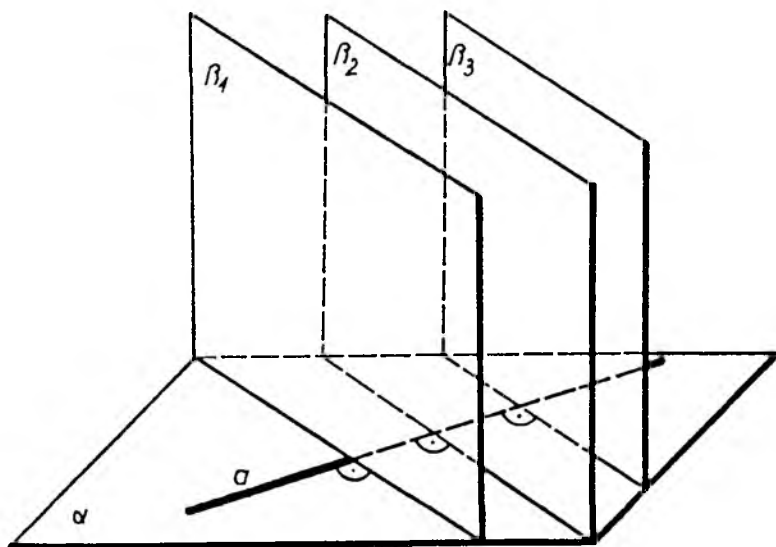
W obu przykładach na rys. 6.6 płaszczyznę β prostopadłą do danej płaszczyzny α określają proste a i b przecinające się w punkcie P (dowolnie obranej na prostej a).

2. Płaszczyzna β jest prostopadła do płaszczyzny α wówczas, gdy jest prostopadła do prostej a , leżącej na płaszczyźnie α (rys. 6.7). Prostopadłe do tej prostej możemy poprowadzić pęk płaszczyzn równoległych.

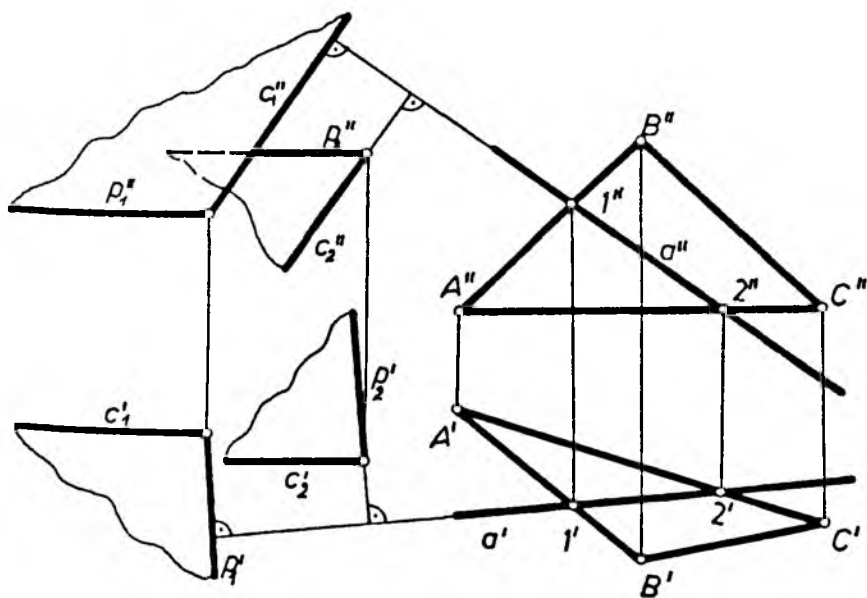
Na rysunku 6.7 przykładowo podano sposób wyznaczania płaszczyzny prostopadłej do danej płaszczyzny, oparty na tej definicji. W tym celu w płaszczyźnie $\alpha = ABC$ określono dowolną prostą a i prostopadłe do niej — uwzględniając prostopadłość odpowiednich rzutów — poprowadzono płaszczyzny $\beta_1 = p_1c_1$ oraz $\beta_2 = p_2c_2$ przez wybrane punkty.



Rys. 6.6. Płaszczyzna $\beta = ab$ ($P = a \cap b$) prostopadła do płaszczyzny określonej: a) $\alpha = mn$ ($m \parallel n$); b) $\alpha = ABC$, $a \perp \alpha$ – warunek prostopadłości płaszczyzn α i β

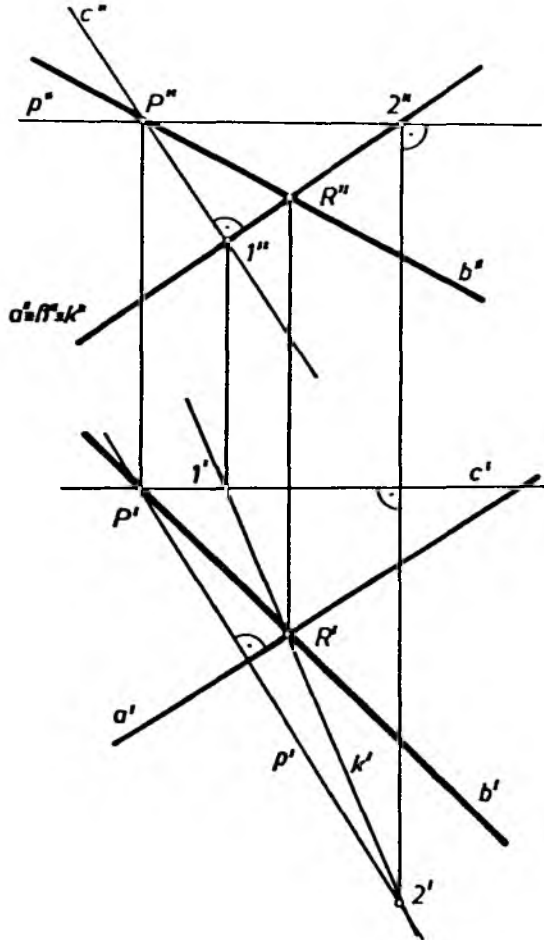


Rys. 6.7. Płaszczyzny równoległe $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ prostopadłe do płaszczyzny α ;
 $\beta_2 \parallel \beta_2 \parallel \beta_3, \beta_1 \perp a \subset \alpha$



Rys. 6.8. Płaszczyzny $\beta_1 = p_1c_1$ i $\beta_2 = p_2c_2$ prostopadłe do płaszczyzny
 $\alpha = ABC; \beta_1, \beta_2 \perp a, a \subset \alpha$

6.4. Proste dowolne do siebie prostopadłe



Rys. 6.9.

Prosta b jest prostopadła do prostej a wówczas, gdy przynależy do płaszczyzny α prostopadłej do prostej a . Prosta b może przecinać prostą a lub może być względem prostej a skośna.

Każda prosta leżąca na płaszczyźnie prostopadłej do prostej a , jest do tej prostej a prostopadła.

Przykład:

Przez dany punkt P poprowadzić prostą b prostopadłą do danej prostej a i prostą a przecinającą.

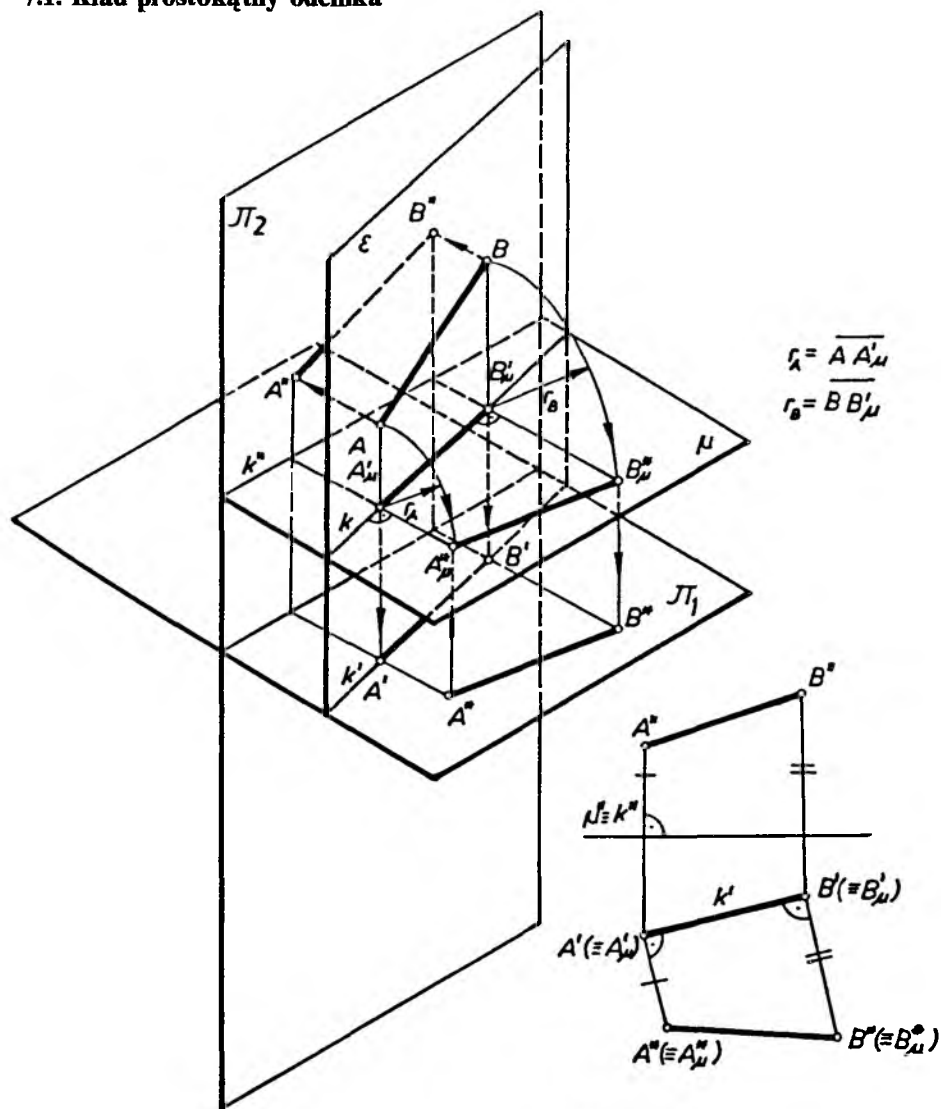
Rozwiązanie podano na rys. 6.9.

Przez punkt P poprowadzimy płaszczyznę $\alpha = p \subset (\alpha \perp a)$; znajdujemy punkt $R = \alpha \cap a$ prowadząc przez prostą a płaszczyznę $\beta \perp \pi_2$; szukaną prostą $b \perp a$ wyznaczają punkty P, R .

Rozdział VII

ODLEGŁOŚCI

7.1. Kład prostokątny odcinka

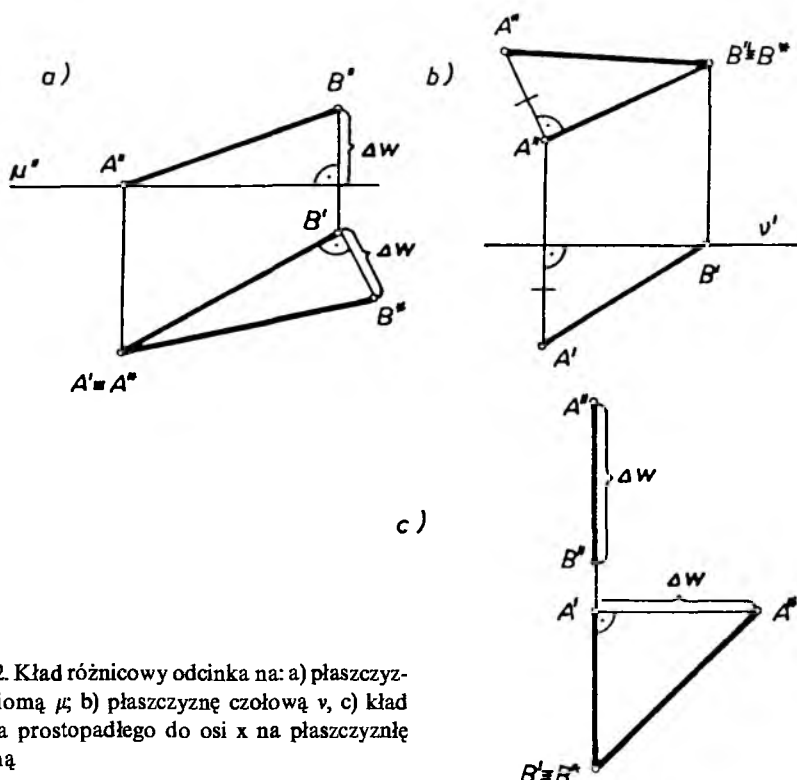


Rys. 7.1. Kład trapezowy poziomy odcinka $\overline{AB}$ na płaszczyznę poziomą μ

Długość odcinka wyznaczamy metodą kładu prostokątnego. Dokonamy kładu poziomego. W tym celu przez odcinek AB prowadzimy płaszczyznę poziomo-rzutującą ε i następnie dokonujemy obrotu (kładu tej płaszczyzny) wraz z odcinkiem dookoła k krawędzi płaszczyzny poziomo-rzutującej z płaszczyzną poziomą μ , na którą wykonujemy kład tak, że płaszczyzna ε znajdzie się na płaszczyźnie μ (rys. 7.1). Nowe położenie odcinka nazywamy kładem prostokątnym odcinka. Długość kładu A^*B^* na rzutni jest jego rzeczywistą, naturalną długością. W szczególnym przypadku kładu możemy dokonać na rzutnię poziomą π_1 dookoła śladu poziomego h_ε .

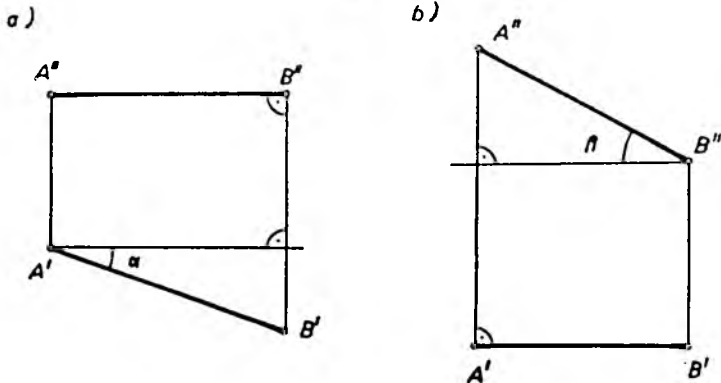
Można też wykonywać kłady pionowe na płaszczyznę czołową v (lub rzutnię pionową π_2) postępując analogicznie jak poprzednio. Tak wykonane kłady (rys. 7.1) nazywamy też kładami trapezowymi. Prowadząc płaszczyznę μ lub v przez jeden z końców odcinka AB otrzymamy kład trójkątny – nazywany też różnicowym – wymagający mniej czynności i przez to częściej stosowany.

Przykłady różnych kładów są na rys. 7.2.

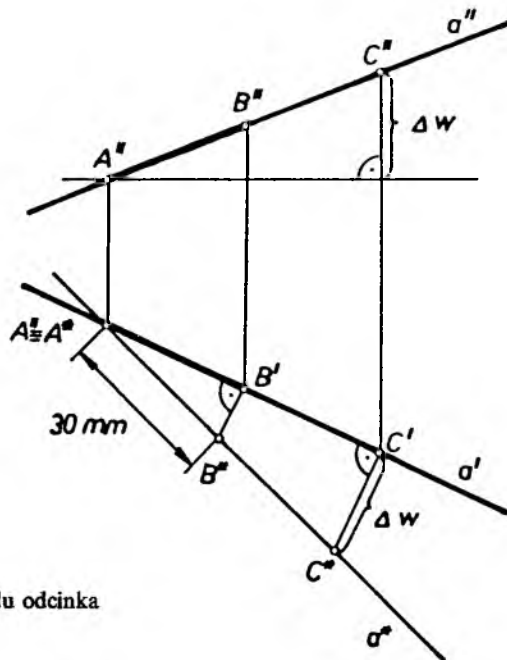


Rys. 7.2. Kład różnicowy odcinka na: a) płaszczyznę poziomą μ ; b) płaszczyznę czołową v , c) kład odcinka prostopadłego do osi x na płaszczyznę poziomą

Uwaga: gdy odcinek jest poziomy lub czołowy to w odpowiednim rzucie mamy jego rzeczywistą wielkość, oraz możemy określić kąt prostej do odpowiedniej rzutni, rys. 7.3.



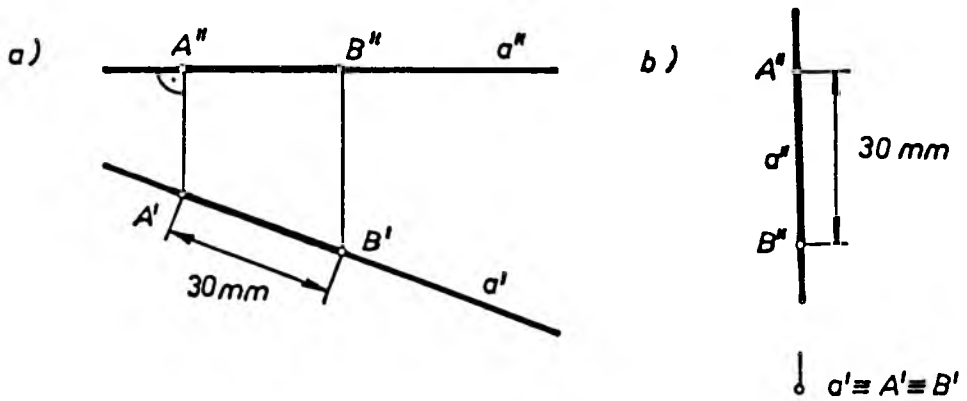
Rys. 7.3.a) Rzuty odcinka poziomego; $A'B' = AB$, $\alpha = \angle(AB, \pi_2)$
 b) Rzuty odcinka czołowego; $A''B'' = AB$, $\beta = \angle(AB, \pi_1)$



Rys. 7.4. Podnoszenie z kładu odcinka określonej długości

Zadanie:

Wyznaczyć na prostej a odcinek $\overline{AB}$ długości 3 cm. Przyjmujemy dowolny punkt A oraz drugi dowolny punkt C leżące na prostej a ; znajdujemy kład odcinka AC (rys. 7.4). Następnie odmierzymy odcinek $A^*B^* = 3$ cm i wracamy do rzutów (podnosimy z kładu) wyznaczając kolejno B^I i B^{II} .

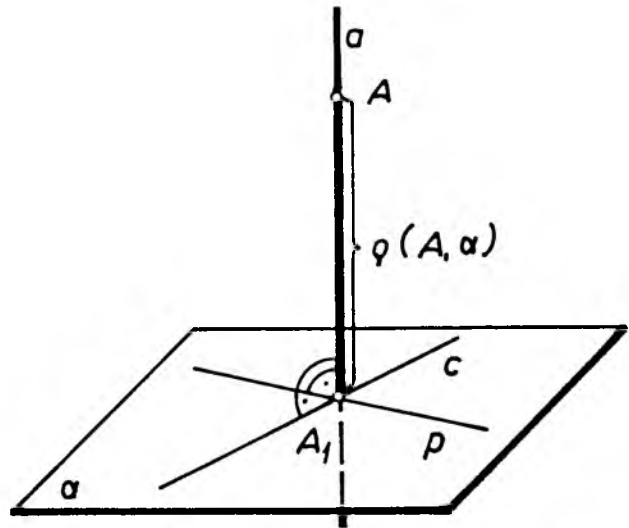


Rys. 7.5.

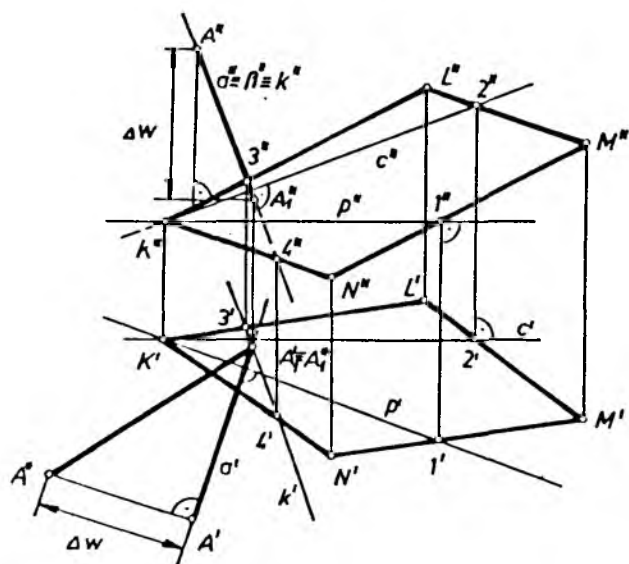
Gdy prosta a jest w położeniu szczególnym, to zadania rozwiązujemy jak na rys. 7.5.

7.2. Odległość punktu od płaszczyzny, $\rho(A, \alpha)$

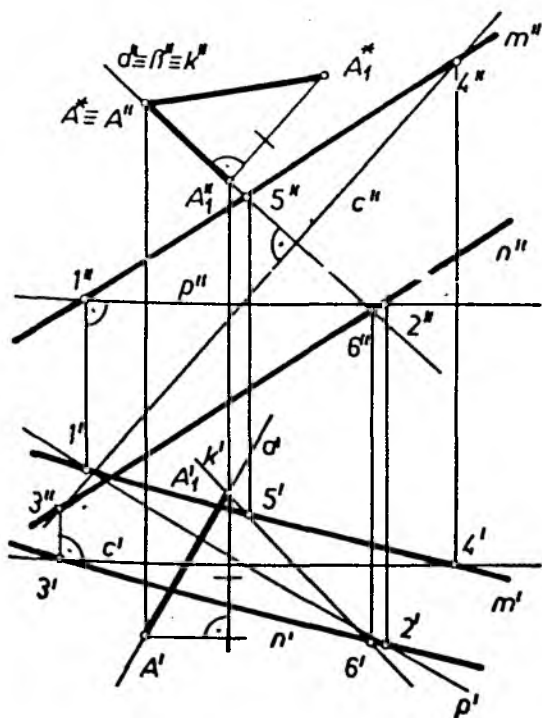
W celu wyznaczenia odległości punktu A od płaszczyzny (oznaczenie $\rho(A, \alpha)$ — rys. 7.6.) postępujemy następująco:



Rys. 7.6. Odległość punktu od płaszczyzny



Rys. 7.7. $\rho(A, \alpha)$ — odległość punktu A od płaszczyzny α określonej równoległobokiem KLMN



Rys. 7.8. $\rho(A, \alpha)$ — odległość punktu A od płaszczyzny $\alpha = mn, m \parallel n$

- 1) $A \in a \perp \alpha$ (przez punkt A prowadzimy prostą $a \perp \alpha$),
- 2) $B = a \cap \alpha$ (znajdujemy punkt B przebiecia płaszczyzny α prostą a),
- 3) $\overline{AB}$ (odcinek AB jest odległością punktu A od płaszczyzny α),
- 4) $A*B^*$ (wykonujemy kład odcinka AB).

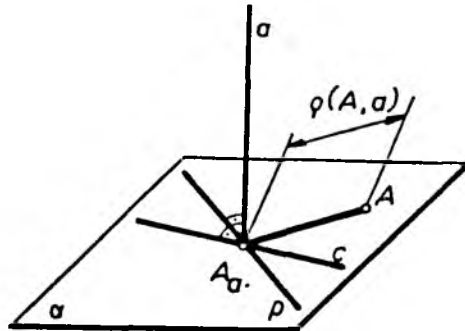
Zadanie:

Wyznaczyć rzeczywistą odległość danego punktu A od danej płaszczyzny α . Przykładowe rozwiązania dla dowolnej płaszczyzny pokazuje rys. 7.7, 7.8.

7.3. Odległość punktu od prostej $\rho(A,a)$

W celu wyznaczenia odległości punktu A od prostej a postępujemy następująco (rys. 7.9):

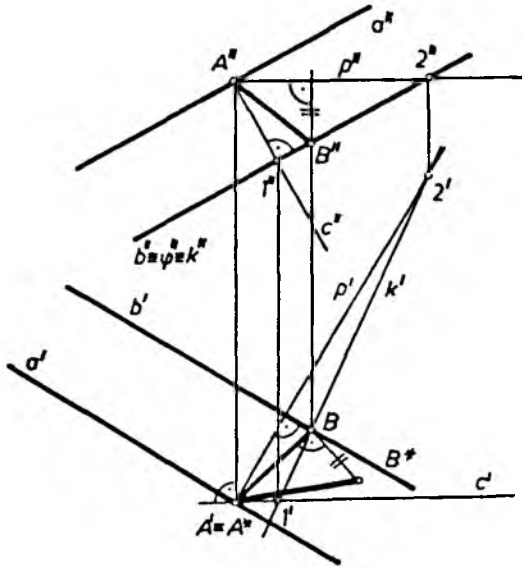
- 1) $\alpha = pc$, $A \in \alpha$, $a \perp \alpha$ (przez punkt A prowadzimy płaszczyznę α prostopadłą do prostej a),
- 2) $A_a = \alpha \cap a$ (znajdujemy punkt przecięcia prostej a płaszczyzną α),
- 3) $\rho(A,a) = \overline{AA_a}$ (odcinek $\overline{AA_a}$ jest odległością punktu od prostej)
- 4) $A*A_a^*$ (Wykonujemy kład odcinka $\overline{AA_a}$).



Rys. 7.9. Odległość punktu A od prostej a ;
 $\rho(A,a)$

Zadanie:

Wyznaczyć odległość danego punktu A od danej prostej a . Przykładowe rozwiązanie pokazano na rys. 7.10.



Rys. 7.11. Wyznaczanie $\rho(a,b)$, $a \parallel b$

7.5. Odległość płaszczyzn równoległych: $\rho(\alpha, \beta)$, $\alpha \parallel \beta$

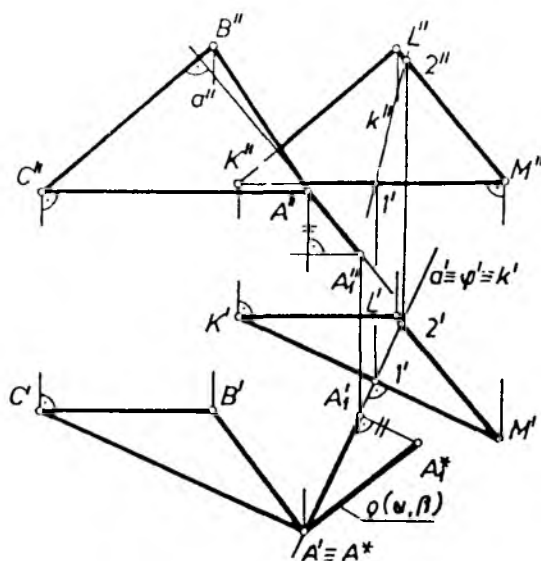
Odległość płaszczyzn równoległych wyznacza się podobnie jak odległość punktu od płaszczyzny, a mianowicie:

- 1) $A \in \alpha$ (obieramy dowolny punkt A na płaszczyźnie α),
- 2) $A \in a \perp \alpha$ (przez punkt A prowadzimy prostą a prostopadłą do obu płaszczyzn),
- 3) $B = a \cap \beta$ (znajdujemy punkt B przebiecia płaszczyzny β prostą a),
- 4) $\rho(\alpha, \beta) = \overline{AB}$ ($\overline{AB}$ — odległość płaszczyzn równoległych),
- 5) A^*B^* (kład odcinka $\overline{AB}$).

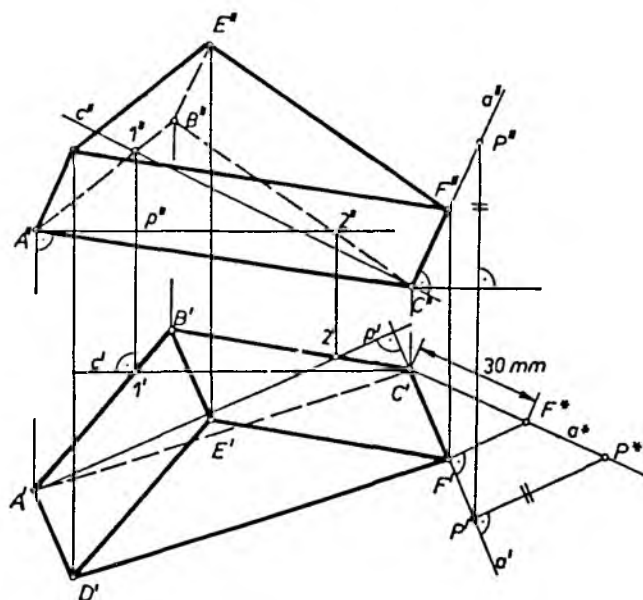
Przykładowe rozwiązanie pokazano na rys. 7.12.

Zadanie:

Na trójkącie ABC zbudować graniastosłup prosty o wysokości 3 cm.
Przykładowe rozwiązanie podano na rys. 7.13.



Rys. 7.12.



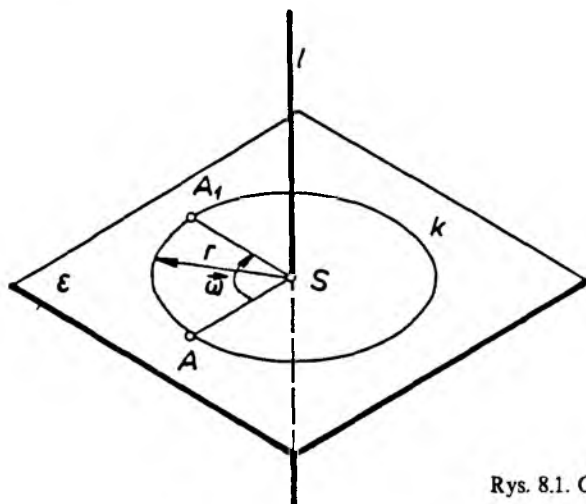
Rys. 7.13.

Rozdział VIII

OBROTY I KŁADY. KOLINEACJA

8.1. Obrót punktu. Obrót odcinka. Obrót trójkąta

Obrotem punktu A dookoła osi l nazywamy taką zmianę położenia punktu w przestrzeni, przy której przemieszcza się on po okręgu k , o skierowany kąt obrotu $\vec{\omega}$, zajmując końcowe położenie A_1 .



Rys. 8.1. Obrót punktu A dookoła prostej l

Elementy obrotu punktu A (rys. 8.1):

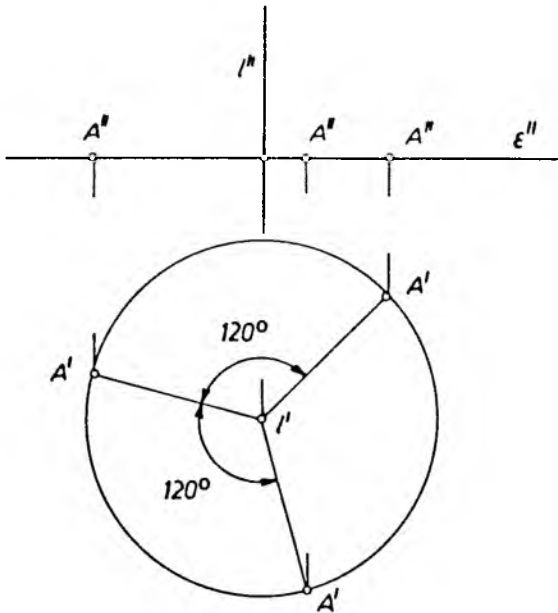
- 1) l – oś obrotu,
- 2) ε – płaszczyzna obrotu,
- 3) S – środek obrotu, $S = \varepsilon \cap l$,
- 4) r – promień obrotu, $r = AS$,
- 5) k – okrąg obrotu,
- 6) $\vec{\omega}$ – skierowany kąt obrotu.

Przez obrót figury geometrycznej rozumiemy odwzorowanie każdego punktu tej figury poprzez obrót wokół ustalonej osi l o ustalony kąt.

W zagadnieniach dotyczących obrotu punktu, odcinka i trójkąta osią obrotu l wybieramy prostą pionową lub celową.

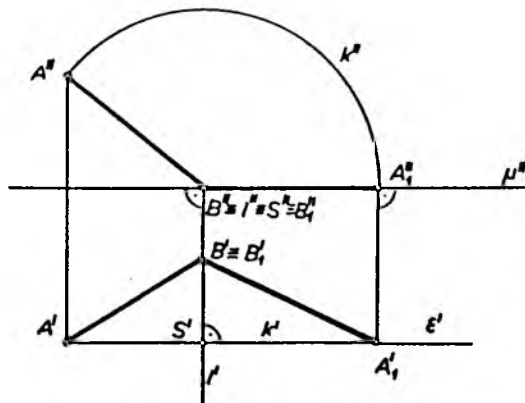
Zadania:

1) Obrócić punkt A wokół osi pionowej. O ile nie ustalimy kierunku obrotu zadanie ma dwa rozwiązania (rys. 8.2).



Rys. 8.2

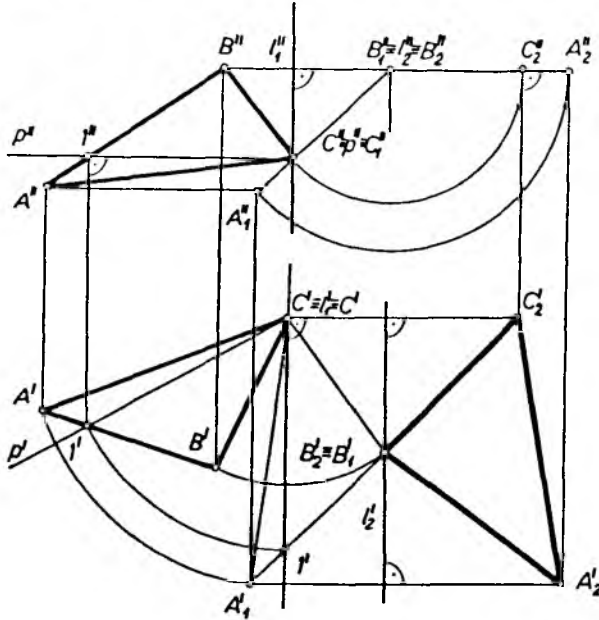
2) Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB metodą obrotu (rozwiązanie na rys. 8.3).



Rys. 8.3. Wyznaczanie naturalnej długości odcinka: $A_1B_1 = AB$

3) Wyznaczyć rzeczywistą wielkość trójkąta ABC metodą obrotów. Zadanie rozwiązujemy wykonując kolejno dwa obroty (rys. 8.4).

Najpierw obracając wokół osi pionowej l_1 prostą poziomą p do położenia celowego, sprowadzamy płaszczyznę trójkąta ABC w położenie pionowo-rzutujące ($\Delta A_1 B_1 C_1$), a następnie wykonując obrót trójkąta $\Delta A_1 B_1 C_1$ dookoła osi celowej l_2 , sprowadzamy ΔABC do położenia poziomego ($\Delta A_2 B_2 C_2$). Trójkąt $\Delta A_2 B_2 C_2$ jest naturalną wielkością ΔABC .



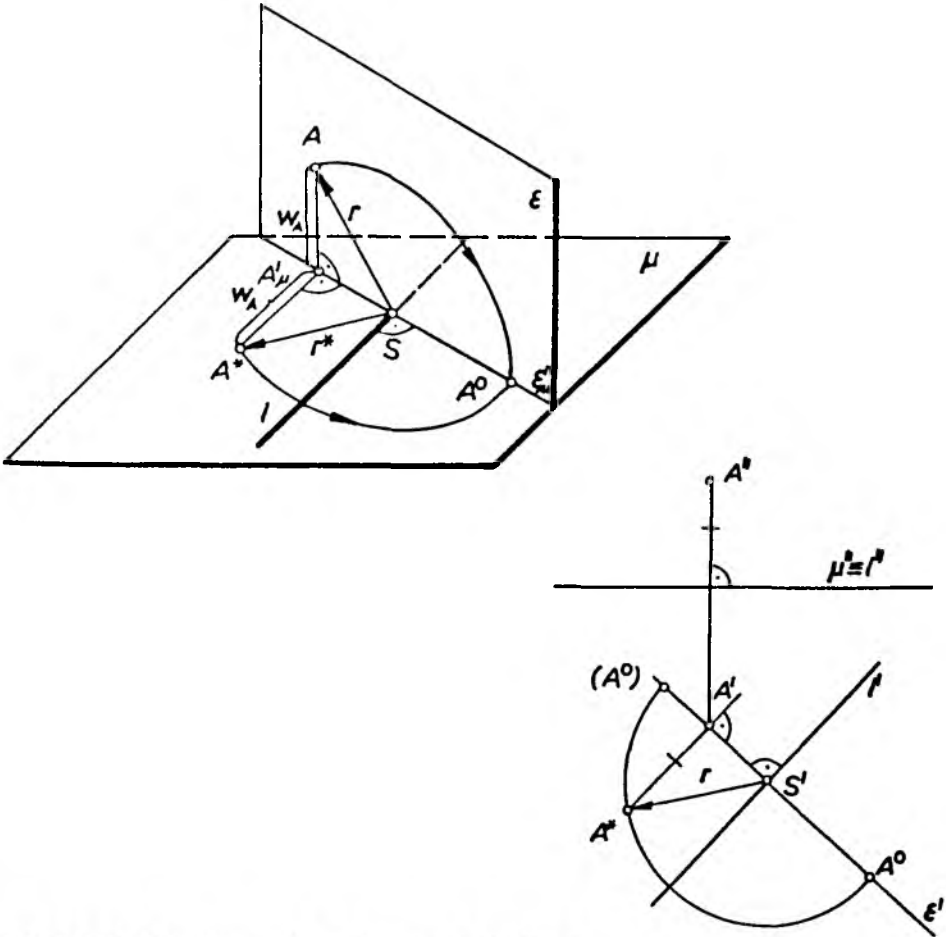
Rys. 8.4.

Uwaga 1: Punkty leżące na osi obrotu w wyniku odwzorowania poprzez obrót przechodzą same w siebie. Wobec tego przy odwzorowywaniu figury geometrycznej 1-wymiarowej (odcinek, prosta) przecinającej oś obrotu, wystarczy odwzorować tylko jeden punkt do jednoznacznego określenia obrazu tej figury (rys. 8.3), jako że za drugi punkt możemy wziąć punkt przecięcia z osią obrotu. Podobnie przy obrocie figury płaskiej (2-wymiarowej) przecinającej oś obrotu wystarczy — do wyznaczenia jej nowego położenia — odwzorowanie jej 2 punktów.

Uwaga 2: W celu sprowadzenia figury płaskiej poprzez obrót do położenia rzutującego należy odpowiednią prostą główną obrócić do położenia rzutującego (rys. 8.4.).

8.2. Kład punktu

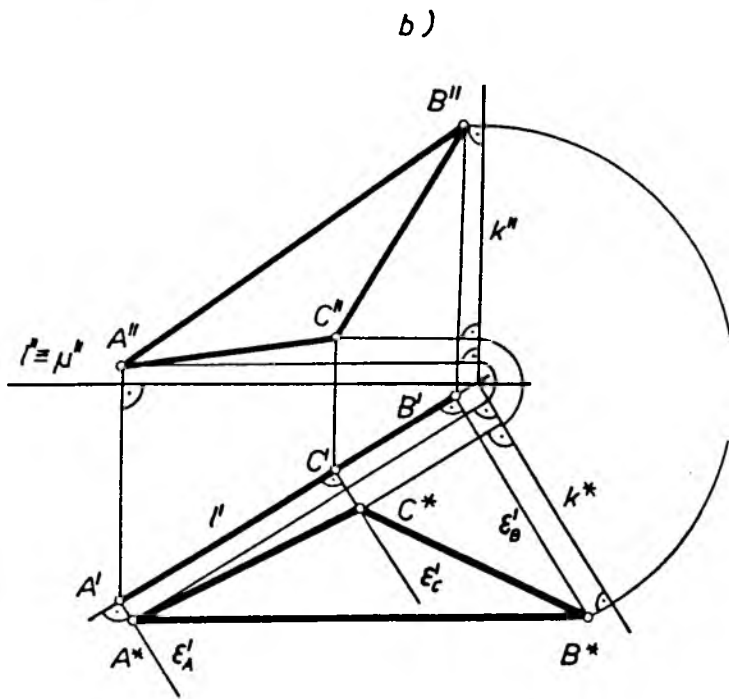
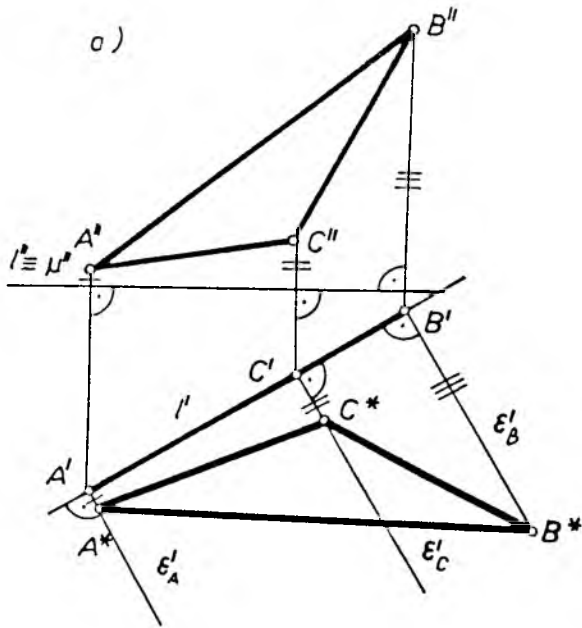
Kładem punktu nazywamy obrót punktu dookoła prostej leżącej na rzutni lub na płaszczyźnie równoległej do rzutni tak, że punkt znajdzie się na rzutni lub na płaszczyźnie równoległej do rzutni zawierających oś obrotu.



Rys. 8.5. Kład dowolny punktu na płaszczyznę poziomą μ

Na rys. 8.5 pokazano kład dowolny punktu A dookoła prostej poziomej $l (l \equiv p)$ na płaszczyznę poziomą μ .

W szczególnym przypadku, kiedy odpowiednia odnosząca z punktu A przecina oś i płaszczyznę kładu pod kątem prostym, mamy do czynienia z kładem prostokątnym punktu A (rys. 8.6). Kłady prostokątne odcinka omówiono w poprzednim rozdziale.



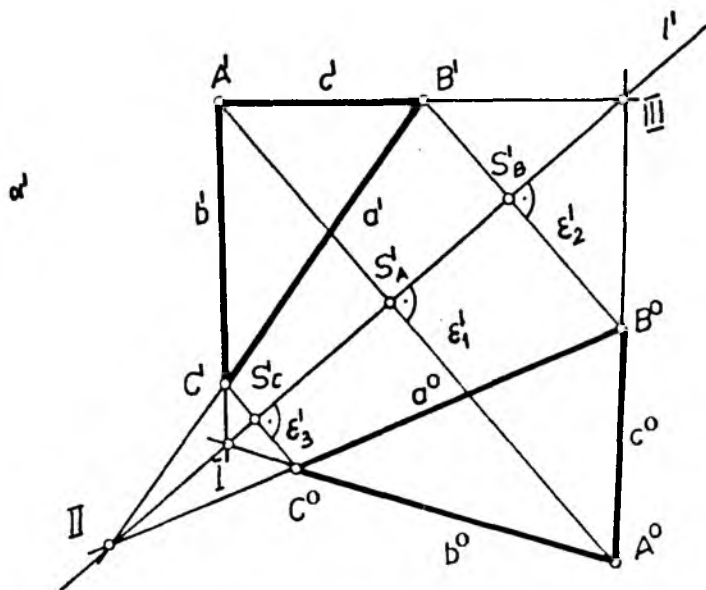
Rys. 8.8. Kład prostokątny płaszczyzny poziomo-rzutu $\alpha = ABC$ na płaszczyznę poziomą μ

8.4. Powinowactwo osiowe prostokątne układów płaskich

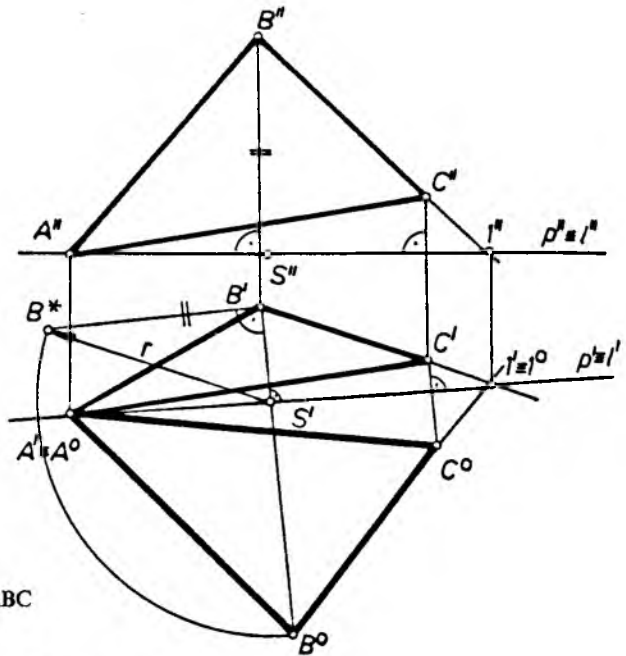
Aby dokonać kładu płaszczyzny dowolnej wystarczy dokonać kładu jednego punktu tej płaszczyzny nie leżącego na osi kładu. Kład dowolnego układu elementów leżących na płaszczyźnie znajdujemy stosując zależności, tzw. powinowactwa osiowego prostokątnego układów płaskich. Weźmy pod uwagę dwa układy płaskie α^I i α^O , rys. 8.9, dla których zachodzi powinowactwo osiowe prostokątne, wówczas występują następujące zależności geometryczne:

- 1) każdemu punktowi A odpowiada tylko jeden punkt A^O i odwrotnie;
- 2) każdej prostej a^I odpowiada tylko jedna prosta a^O i odwrotnie;
- 3) z przynależności punktu A^I i prostej a^I wynika przynależność punktu A^O i prostej a^O i odwrotnie;
- 4) dwa odpowiadające sobie punkty A^I i A^O leżą na prostej prostopadłej do osi powinowactwa;
- 5) pary odpowiadających sobie prostych a^I i a^O , b^I i b^O ... przecinają się na osi powinowactwa (osi obrotu l). Oś obrotu l jest osią powinowactwa. Kierunek prostopadły do osi powinowactwa jest kierunkiem powinowactwa prostokątnego, a proste na których leżą odpowiadające sobie punkty A^I i A^O , B^I i B^O ... są promieniami powinowactwa. Powinowactwo osiowe jest określone, jeśli znana jest oś powinowactwa l i jedna para odpowiadających sobie punktów, np. A^I i A^O .

Wcześniej korzystaliśmy z własności powinowactwa bez dokładniejszego ich omówienia przy konstrukcjach na rys. 8.7.



Rys. 8.9. Powinowactwo osiowe prostokątne

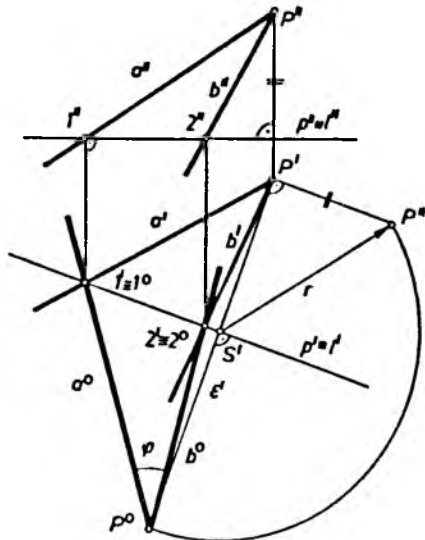


Rys. 8.10. Kład płaszczyzny $\alpha = ABC$

8.5. Kład płaszczyzny dowolnej i podniesienie z kładu

W zależności od sposobu określenia płaszczyzny stosujemy różne konstrukcje kładu płaszczyzny, które są uogólnieniem konstrukcji z punktu 8.3.

1) Przykład kładu płaszczyzny $\alpha = ABC$ (określonej trójkątem) w celu wyznaczenia rzeczywistej wielkości ΔABC , przedstawia rys. 8.11.



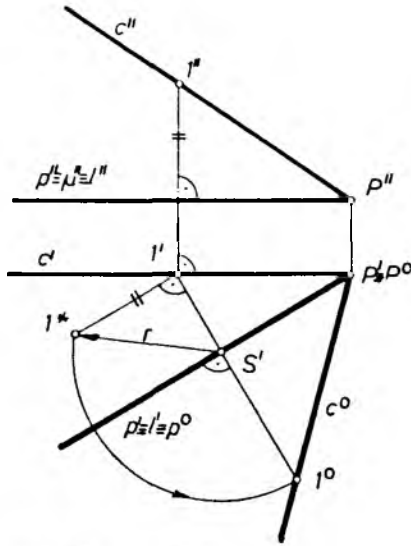
Rys. 8.11. Określenie wielkości kąta płaskiego przy pomocy kładu płaszczyzny kąta

Zadanie:

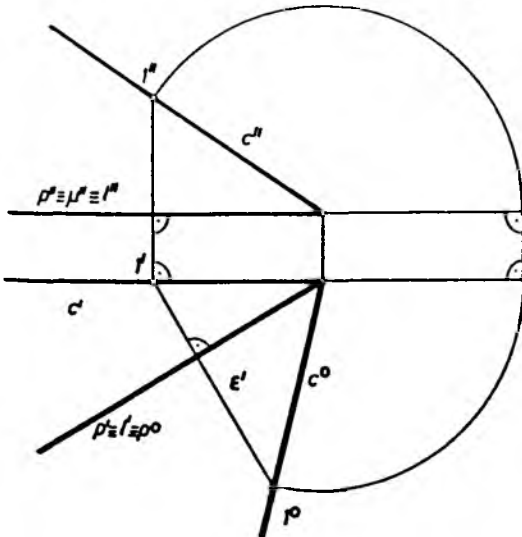
Wyznaczyć $\angle(a,b)$ kąt między prostymi a,b przecinającymi się w punkcie P (rozwiązanie na rys. 8.11).

2) Płaszczyzna określona prostą czołową i poziomą.

Jest to szczególny przypadek z poprzedniego punktu określenia płaszczyzny prostymi przecinającymi się. Możemy tutaj zastosować klasyczną konstrukcję kładu (rys. 8.12 – do odwzorowania wystarczy dokonanie kładu jednego punktu) albo uproszczoną, wynikającą z tego, że odcinki prostych czołowych i poziomych oraz ich obrazy są sobie równe, jako że są w naturalnej wielkości (rys. 8.13).



Rys.8.12. Kład płaszczyzny kąta $\alpha = pc$

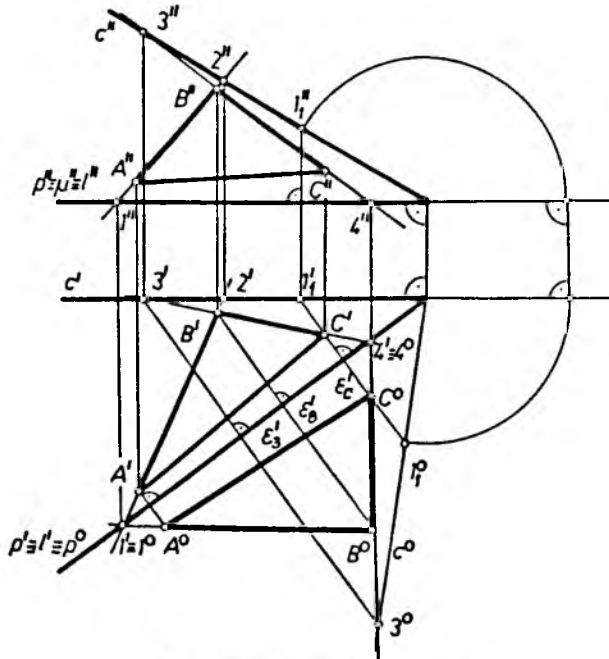


Rys. 8.13. Kład płaszczyzny $\alpha = pc$

Zadanie:

Określić naturalną wielkość $\Delta ABC \subset \alpha = pc$. Dany jest rzut poziomy trójkąta. Zadanie rozwiązujemy w następującej kolejności:

- wyznaczamy rzut pionowy trójkąta zawartego w płaszczyźnie $\alpha = pc$,
- wykonujemy kład płaszczyzny biorąc za oś obrotu jedną z prostych głównych (na rys. 8.14 wzięto prostą poziomą p),
- korzystając z powinowactwa osiowego prostokątnego wyznaczmy kład ΔABC .



Rys. 8.14. Kład $\Delta ABC \subset \alpha = pc$

Można to zadanie rozwiązać w inny sposób. Mianowicie, zamiast wykonywać kład płaszczyzny $\alpha = pc$, po znalezieniu brakującego rzutu ΔABC , można wykonać kład jednego z wierzchołków trójkąta ABC, a pozostałe dwa wierzchołki odwzorować korzystając z powinowactwa osiowego prostokątnego.

Zagadnieniem odwrotnym do wykonania kładu jest podniesienie płaszczyzny z kładu. Pokażemy je w zadaniach.

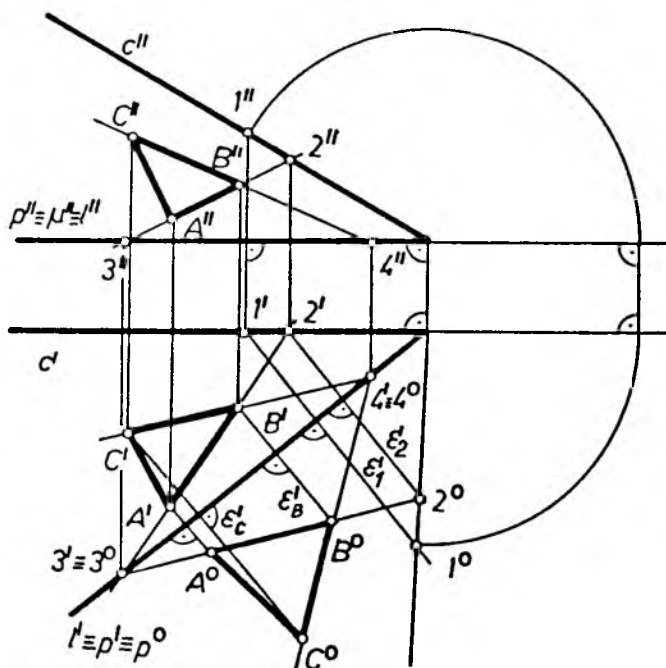
Zadanie 1: Wyznaczyć rzuty trójkąta równobocznego o boku 2 cm na płaszczyźnie $\alpha = pc$.

Zadanie to rozwiążemy (rys. 8.15) w kolejności:

- dokonamy kład płaszczyzny $\alpha = pc$,

- na płaszczyźnie α° budujemy trójkąt równoboczny $A^\circ B^\circ C^\circ$ spełniający warunki zadania,
- podnosimy z kładu.

Podnosząc z kładu, określamy jeden rzut (na rys. 8.15 był to rzut poziomy) korzystając z powinowactwa. Następnie określamy i drugi rzut na podstawie przynależności ΔABC do płaszczyzny $\alpha = pc$.



Rys. 8.15. Podniesienie kładu trójkąta równobocznego

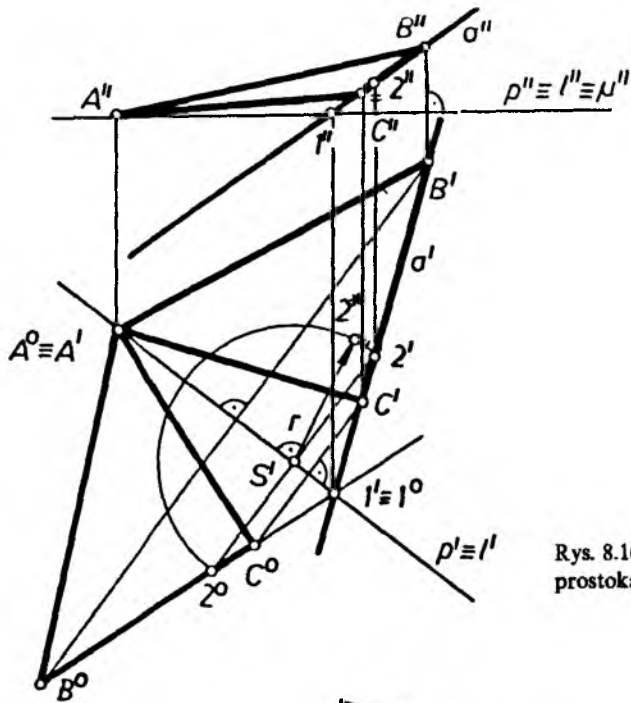
Zadanie 2: Dana jest płaszczyzna określona punktem A i prostą a. Znaleźć rzuty trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC, o kącie prostym przy wierzchołku B i wierzchołkach B, C leżących na prostej a.

Kolejność czynności przy rozwiązaniu (rys. 8.16) tego zadania taka sama jak i w poprzednim.

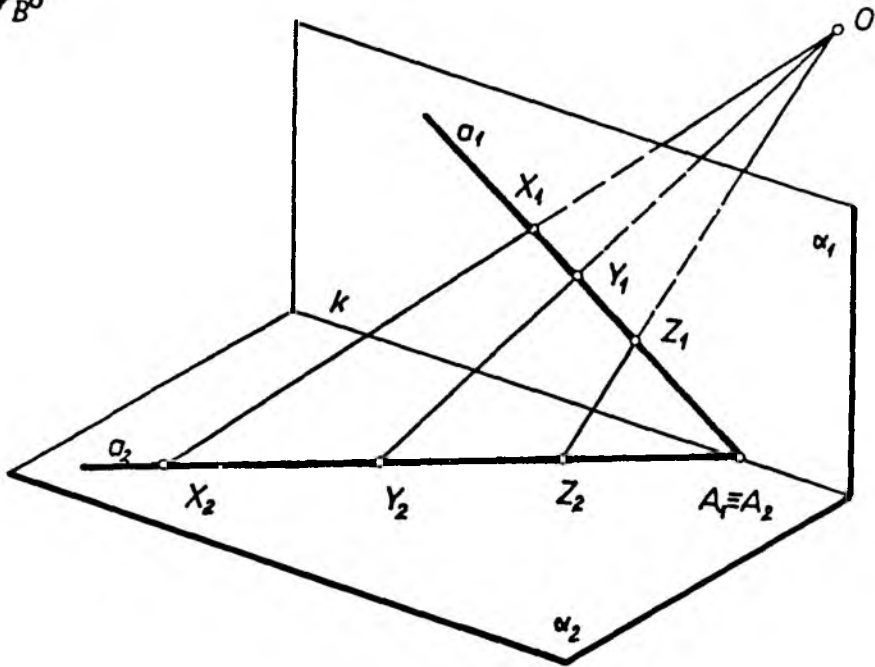
8.6. Kolineacja

8.6.1. Określenie kolineacji

Układem płakim nazywamy zbiór wszystkich punktów i prostych (właściwych i niewłaściwych) danej płaszczyzny α .



Rys. 8.16. Podniesienie z układu trójkąta prostokątnego



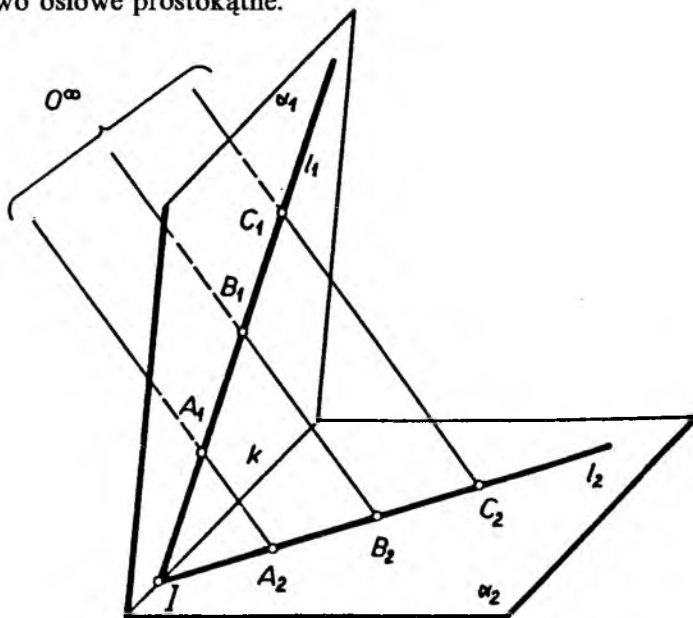
Rys. 8.17. Kolineacja środkowa

Weźmy pod uwagę dwa układy płaskie α_1 i α_2 (rys. 8.17). Jeśli określona jest odpowiedniość, która każdemu punktowi X_1 układu α_1 przypisuje jakiś punkt X_2 układu α_2 , to mówimy, że mamy podane przekształcenie układu (α_1) na układ (α_2). W geometrii wykreślnej największe znaczenie mają tzw. przekształcenia kolineacyjne lub kolineacje.

Określenie: Przekształcenie układu α_1 na układ α_2 nazywa się kolineacyjne (rys. 8.17) jeśli dla każdej trójki X_1, Y_1, Z_1 punktów układu α_1 leżących na prostej, odpowiadające im trzy punkty X_2, Y_2, Z_2 układu α_2 również leżą na prostej układu α_2 . Krawędź k przecięcia płaszczyzn α_1 i α_2 nazywamy osią kolineacji, punkt O środkiem kolineacji, a proste przechodzące przez punkt O promieniami kolineacji. Punktom prostej a_1 układu α_1 odpowiadają punkty prostej a_2 , która przecina się z prostą a_1 na osi kolineacji k w punkcie I .

8.6.2. Powinowactwo

Szczególny przypadek opisanego przekształcenia, gdy O jest punktem niewłaściwym O^∞ nazywamy powinowactwem (rys. 8.18). Punkt O^∞ nazywamy wówczas kierunkiem powinowactwa, a krawędź płaszczyzn α_1 i α_2 nazywamy osią powinowactwa. Kiedy krawędź jest prostopadła do kierunku, mamy powinowactwo osiowe prostokątne.



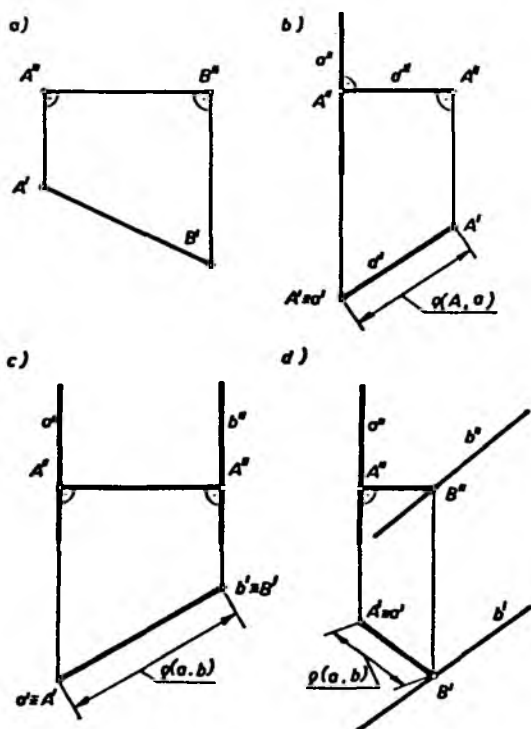
Rys. 8.18. Powinowactwo osiowe

Kolineacja (powinowactwo) ma również zastosowanie do wyznaczania przekrojów wielościanów i brył obrotowych. Przykłady w rozdziale X (punkt 10.3) i w rozdziale XI (punkt 11.5).

Rozdział IX

TRANSFORMACJE UKŁADU ODNIESIENIA

Celem odwzorowania poprzez transformację układu odniesienia jest uzyskanie względem wprowadzanego (układu odniesienia) położenia dogodnego dla ustalenia zależności, np. miarowych między odwzorowanymi figurami. W rezultacie transformacji figura sprowadzona zostaje z położenia dowolnego w szczególne, którym może być położenie rzutujące lub równoległe do rzutni.



Rys. 9.1. Szczególne położenie figur płaskich względem układu odniesienia (układ odniesienia pominięto)

Przykłady:

1) Dla określenia naturalnej długości odcinka należy go sprowadzić w położenie równoległe do jednej z rzutni (rys. 9.1).

2) W celu wyznaczenia odległości punktu od prostej, prostą należy sprowadzić w położenie rzutujące (rys. 9.1b).

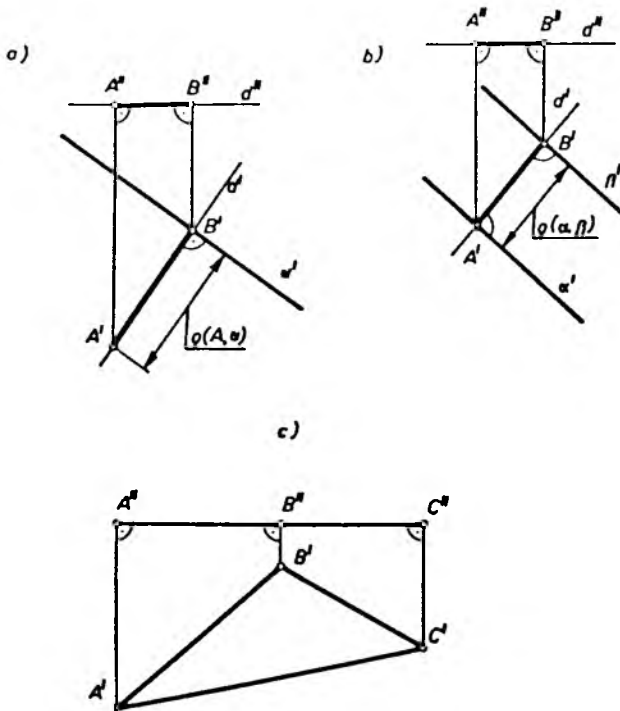
3) Żeby znaleźć odległość między prostymi równoległymi proste te przeprowadzamy w położenie rzutujące (rys. 9.1c).

4) Dla wyznaczenia odległości między prostymi skośnymi, jedna z nich powinna zająć położenie rzutujące (rys. 9.1d).

5) Odległość punktu od płaszczyzny możemy określić bez trudu, jeśli płaszczyzna jest rzutująca (rys. 9.2a).

6) Odległość między płaszczyznami będzie dana w naturalnej wielkości jeśli będą one rzutujące (rys. 9.2b).

7) Wielkość figury płaskiej jest naturalną dla płaszczyzn równoległych do jednej z rzutni (rys. 9.2c).



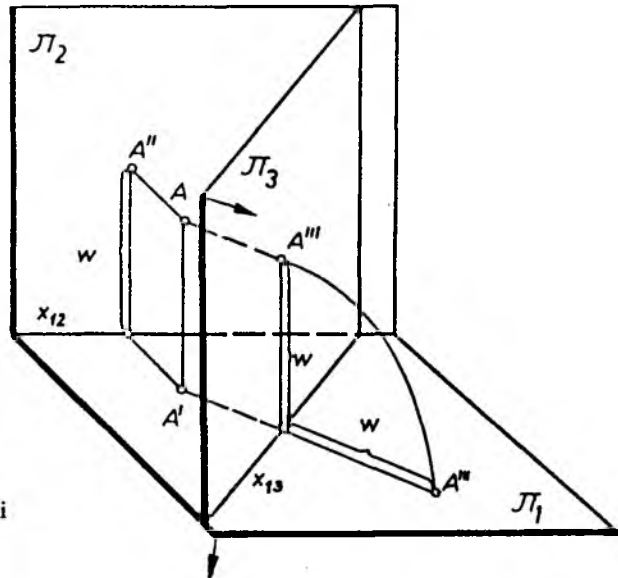
Rys. 9.2. Szczególne położenie figur płaskich względem rzutni

Rysunki 9.1 i 9.2 pokazują tylko ostateczne położenie figury w nowym układzie odniesienia po odwzorowaniu. Transformacja układu odniesienia polega na wprowadzaniu dodatkowych (kolejno prostopadłych rzutni) do pierwotnego układu odniesienia, złożonego z dwóch prostopadłych do siebie rzutni π_1, π_2 . Każdą następną rzutnię $\pi_3, \pi_4 \dots$ wprowadzamy prostopadle do poprzedniej, a więc π_3 prostopadle do π_1 lub do π_2 , π_4 prostopadle do π_3 itd.

Każda nowo wprowadzona rzutnia jest wprowadzana w ściśle określonym celu, a więc np. π_3 równoległe do prostej, π_4 następnie prostopadłe do tej prostej, przy sprowadzaniu prostej w położenie rzutujące.

9.1. Transformacja punktu

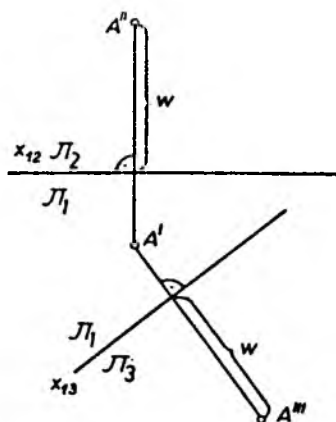
W pierwotnym układzie odniesienia przyjmujemy punkt A oraz wprowadzamy trzecią rzutnię π_3 prostopadłą do jednej z rzutni π_1 lub π_2 . Na rys. 9.3. π_3 wprowadzono prostopadłe do π_1 . Znajdujemy rzuty A^I , A^{II} oraz A^{III} – rzut



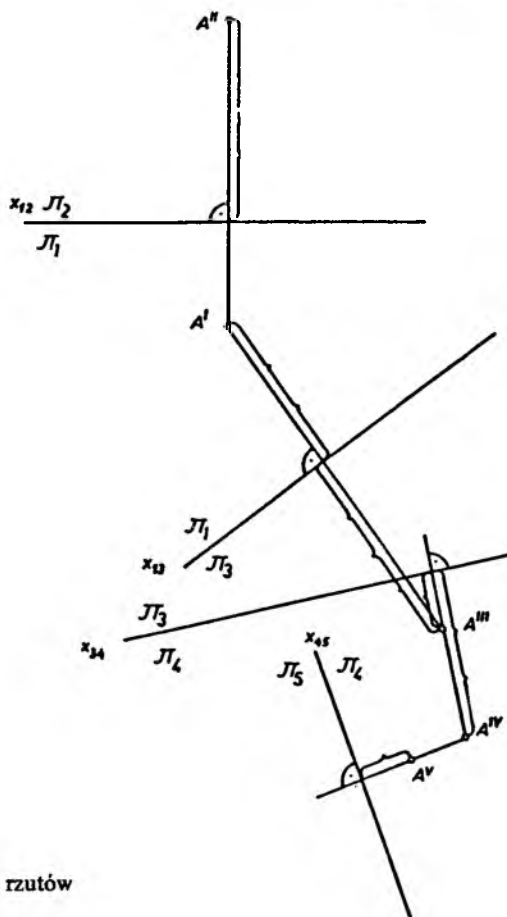
Rys. 9.3. Wprowadzenie rzutni transformowanej π_3

prostokątny punktu A na rzutnię π_3 . Mamy teraz dwa układy odniesienia; jeden określony przez rzutnie π_1 i π_2 $u(\pi_1, \pi_2)$ oraz drugi $u(\pi_1, \pi_3)$ – określony przez rzutnie π_1 i π_3 . Rzuty punktu (ogólniej: figury) na π_1 i π_2 będą więc parą rzutów bezpośrednio związanych z sobą w pierwszym z wymienionych układów, a rzuty na π_1 i π_3 tworzą drugą parę rzutów związanych bezpośrednio. Jak łatwo zauważyć wysokości punktu A w obu układach $u(\pi_1, \pi_2)$ i $u(\pi_1, \pi_3)$ są jednakowe. Oba układy sprowadzamy następnie do jednej wspólnej płaszczyzny. Najwygodniej wszystkie rzutnie π_1 , π_2 , π_3 i π_4 , π_5 ... (jeśli byłyby takie wprowadzone) sprowadzić zawsze do płaszczyzny π_1 lub π_2 . I tak, jeśli wprowadzono $\pi_3 \perp \pi_1$ lub $\pi_3 \perp \pi_2$ i kolejno $\pi_4 \perp \pi_3$, $\pi_5 \perp \pi_4$... to sprowadzamy najpierw π_1 i π_2 do jednej z nich, nazwijmy ją π , a następnie kolejno do π sprowadzamy π_3, π_4, π_5 ... Na rys. 9.3 pokazano jak sprowadzić rzutnie π_1 , π_2 , π_3 do płaszczyzny π_2 , a na rys. 9.4 obraz otrzymany w wyniku tego przekształcenia.

Rys. 9.4. Przedstawienie płaskie rzutni transformowanych



Rys. 9.5. Określenie kolejnych rzutów transformowanych



Na rys. 9.5 podano przykład przedstawienia na płaszczyźnie wprowadzonych w następujący sposób rzutni transformowanych $\pi_3 \perp \pi_1$, $\pi_4 \perp \pi_3$, $\pi_5 \perp \pi_4$. Obrazowo opisano na nim sposób odwzorowywania (odmierzania współrzędnych), oznaczono osie według zasady: x_{ij} – oś układu $u(\pi_i, \pi_j)$ i rzuty A^k – rzut na rzutnię π_k (k na oznaczeniu A^k zapisujemy rzymskimi cyframi).

Wprowadzono rzutnie $\pi_3, \pi_4, \dots$ nazywamy rzutniami transformowanymi, a rzuty na nie rzutami transformowanymi.

9.2. Transformacja prostej. Zagadnienia miarowe

Zgodnie z twierdzeniem, że dwa punkty określają prostą, do określenia rzutu transformowanego prostej należy przetransformować dwa różne punkty prostej, obrazy tych punktów określą obraz prostej. Konstruując kolejne rzuty transformowane prostej, chcemy najczęściej sprowadzić ją do położenia rzutującego, przy którym najłatwiej określić odległość innych figur od prostej, względnie do położenia równoległego do rzutni transformowanej w celu określenia rzeczywistej długości odcinków zawartych w prostej. Wiemy, że jeśli w stosunku do jednej z dwu rzutni wzajemnie prostopadłych prosta zajmie położenie rzutujące, to rzut na drugą rzutnię jest w naturalnej wielkości. W celu sprowadzenia prostej w położenie rzutujące należy więc na poprzednim rzucie transformowanym określić naturalną wielkość prostej. Z drugiej strony wiemy, że jeśli prosta jest równoległa do rzutni, to rzut na tę płaszczyznę jest w rzeczywistej wielkości. Te dwa stwierdzenia określają tok postępowania przy transformowaniu prostej.

Mianowicie:

wprowadzamy jedną rzutnię równoległą do prostej, a następnie drugą prostopadłą do tej prostej, to prosta zajmie w stosunku do tej ostatniej rzutni położenie rzutujące.

Zadanie 1:

Wyznaczyć $\rho(A, B)$ rzeczywistą wielkość odcinka $\overline{AB}$. (Rozwiązanie na rys. 9.6).

Zadanie 2:

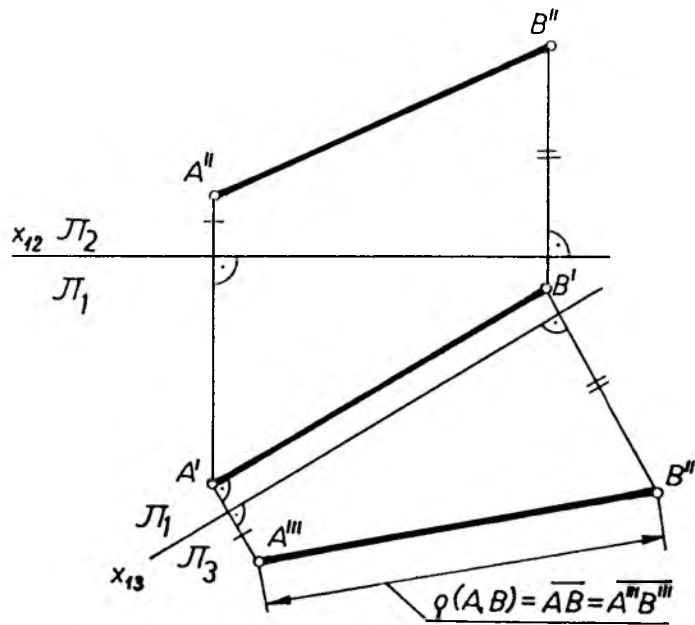
Wyznaczyć $\rho(A, a)$ odległość punktu A od prostej a . (Rozwiązanie na rys. 9.7).

Zadanie 3:

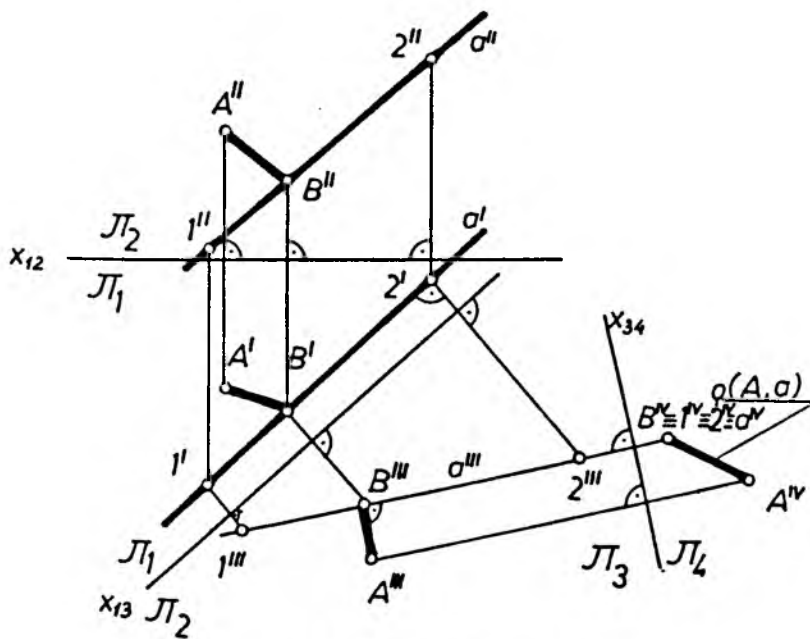
Wyznaczyć $\rho(a, b)$ odległość między prostymi równoległymi a, b . (Rozwiązanie na rys. 9.8).

Zadanie 4:

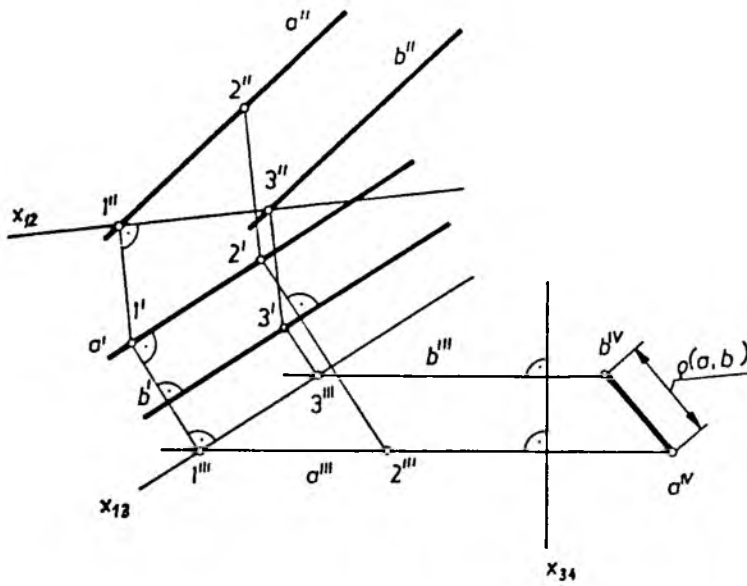
Wyznaczyć $\rho(a, b)$ odległość między prostymi skośnymi a, b . Określić odcinek odległości na rzucie poziomym i pionowym. Rozwiązanie na rys. 9.9 – na rzucie na π_4 odcinek odległości $\overline{A^{IV}B^{IV}}$ jest w naturalnej wielkości, rzut $\overline{A^{III}B^{III}}$ jest więc równoległy do osi x_{34} . Korzystając z tego bez trudu określimy A .



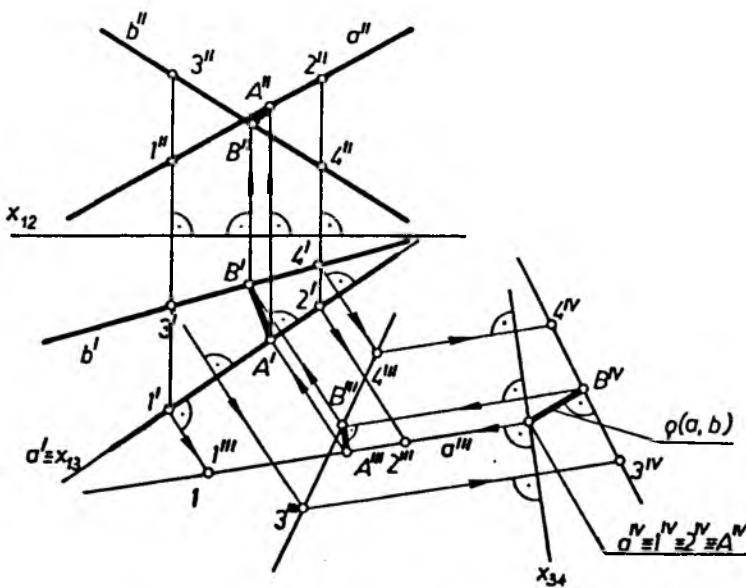
Rys. 9.6. Transformacja odcinka



Rys. 9.7. Odległość punktu od prostej



Rys. 9.8. Wyznaczanie $\rho(a, b)$ ($a \parallel b$) metodą transformacji

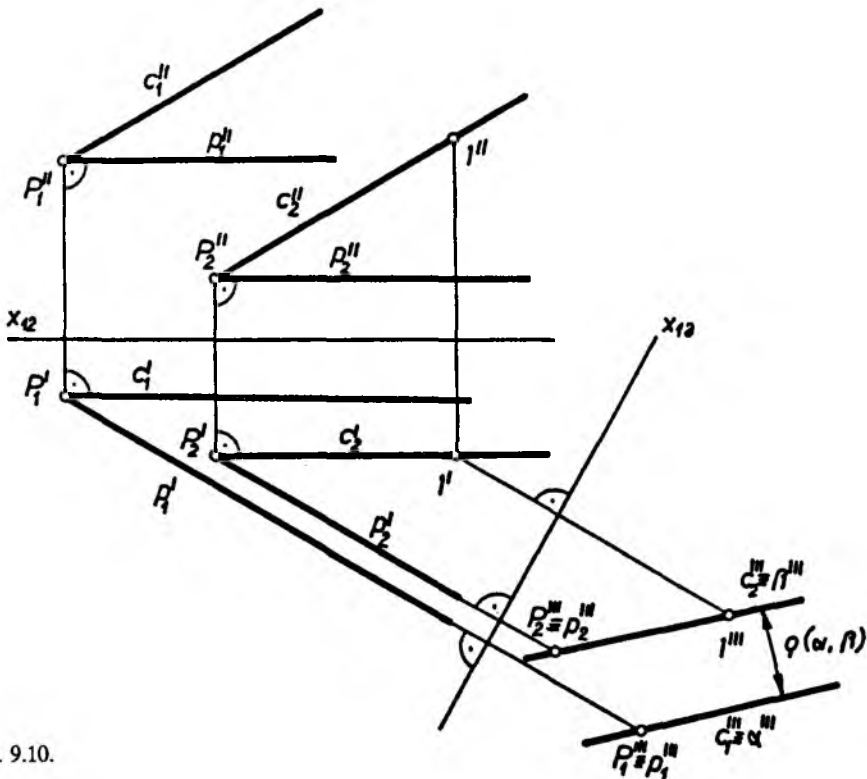


Rys. 9.9. Wyznaczanie odległości między prostymi skośnymi

9.3. Transformacja płaszczyzny. Zagadnienia miarowe

W celu znalezienia rzutu transformowanego płaszczyzny, trzeba znaleźć obrazy trzech niewspółliniowych punktów płaszczyzny. Przy transformacji płaszczyzn najczęściej chcemy sprowadzić płaszczyznę w położenie rzutujące lub równoległe do rzutni.

Jeśli prosta zawarta w transformowanej płaszczyźnie została sprowadzona poprzez transformację w położenie rzutujące, to płaszczyzna będzie też rzutująca. W ogólnym przypadku w celu sprowadzenia prostej w położenie rzutujące potrzeba dwóch kolejnych transformacji, jeśli zaś weźmiemy prostą główną to do sprowadzenia tej płaszczyzny położenia w położenie rzutujące wystarczy tylko jedna transformacja (rys. 9.10). W takim przypadku do określenia rzutu transformowanego płaszczyzny wystarczy przetransformować dwa punkty: punkt przecięcia prostych głównych P i różny od niego dowolny punkt (najlepiej przynależny do jednej z prostych głównych).



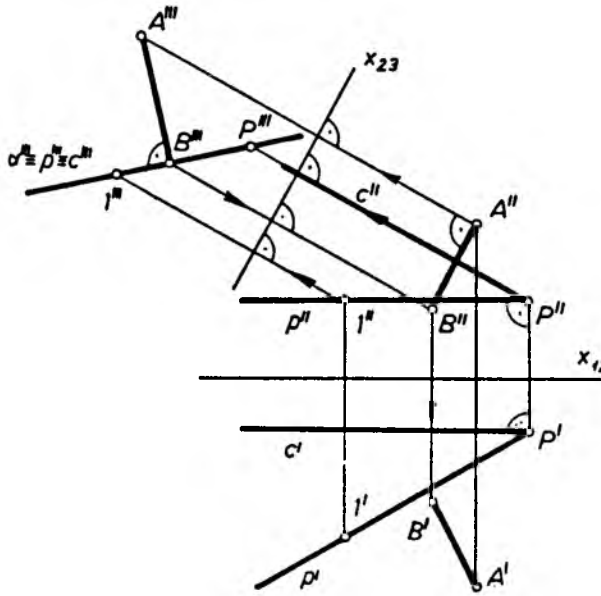
Rys. 9.10.

Zadanie 1:

Znaleźć $\rho(\alpha, \beta)$ odległość płaszczyzn równoległych α i β . Rozwiązanie na rys. 9.10.

Zadanie 2:

Znaleźć $\rho(A, \alpha)$ odległość punktu A od płaszczyzny $\alpha = pc$. Rozwiązanie na rys. 9.11).



Rys. 9.11.

Zadanie 3:

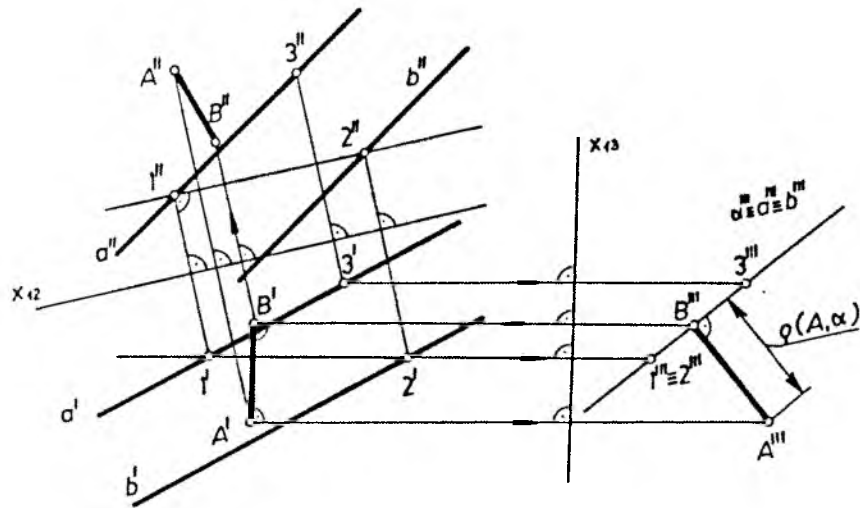
Znaleźć $\rho(A, \alpha)$ odległość punktu A od płaszczyzny $\alpha = ab$, $a \parallel b$. Rozwiązanie na rys. 9.12. Rozwiązując to zadanie, najpierw określamy prostą poziomą i prostą czołową płaszczyzny α , a dalej rozwiązujemy jak poprzednie zadanie.

Zadanie 4.

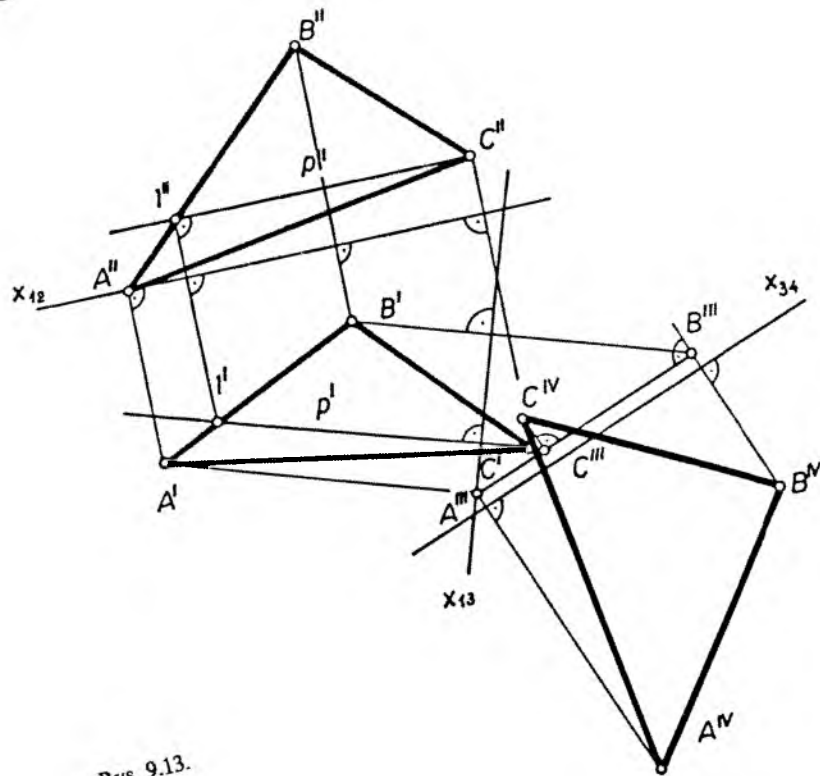
Wyznaczyć rzeczywistą wielkość ΔABC . Płaszczyznę ABC sprowadzamy najpierw w położenie rzutujące, a poprzez wprowadzenie następnej rzutni równoległej do płaszczyzny ABC na kolejnym rzucie transformowanym $\Delta A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ będzie naturalną wielkością ΔABC (rys. 9.13).

9.4. Rzutnia boczna. Odwzorowanie elementów

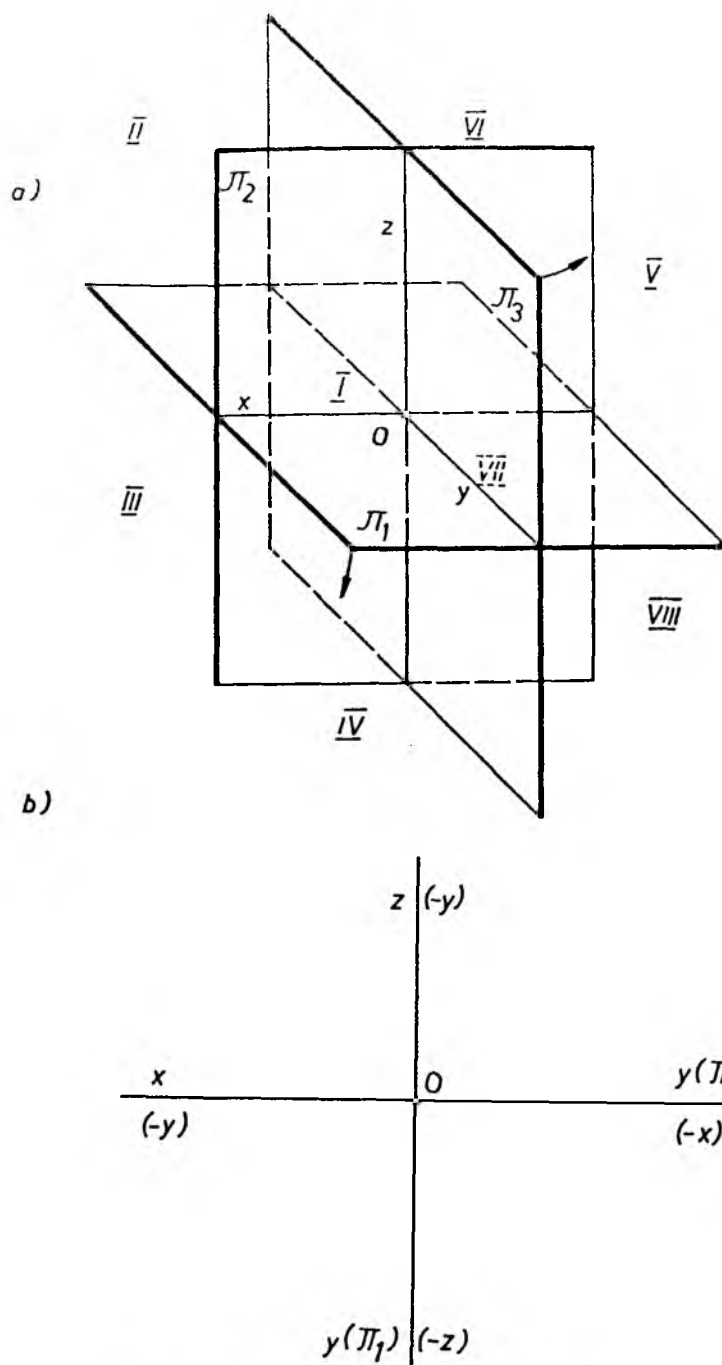
Przyjmujemy układ trzech rzutni do siebie prostopadłych π_1, π_2, π_3 . Rzutnię π_3 nazywamy rzutnią boczną. Rzutnie te przecinają się w krawędziach x, y, z, które nazywamy osiami rzutów. Układ odniesienia (rys. 9.14a) sprowadzamy do płaszczyzny rysunku przez obrót rzutni poziomej dookoła osi x i rzutni bocznej dookoła osi z o kąty 90° , a następnie układ odniesienia przenosimy na płaszczyznę rysunku ρ , (rys. 9.14b).



Rys. 9.12.



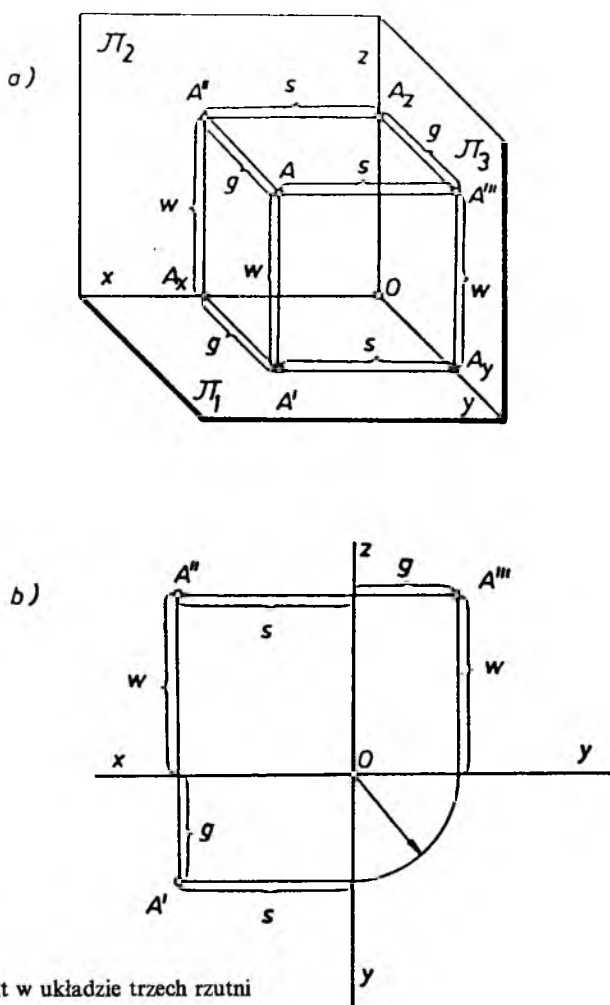
Rys. 9.13.



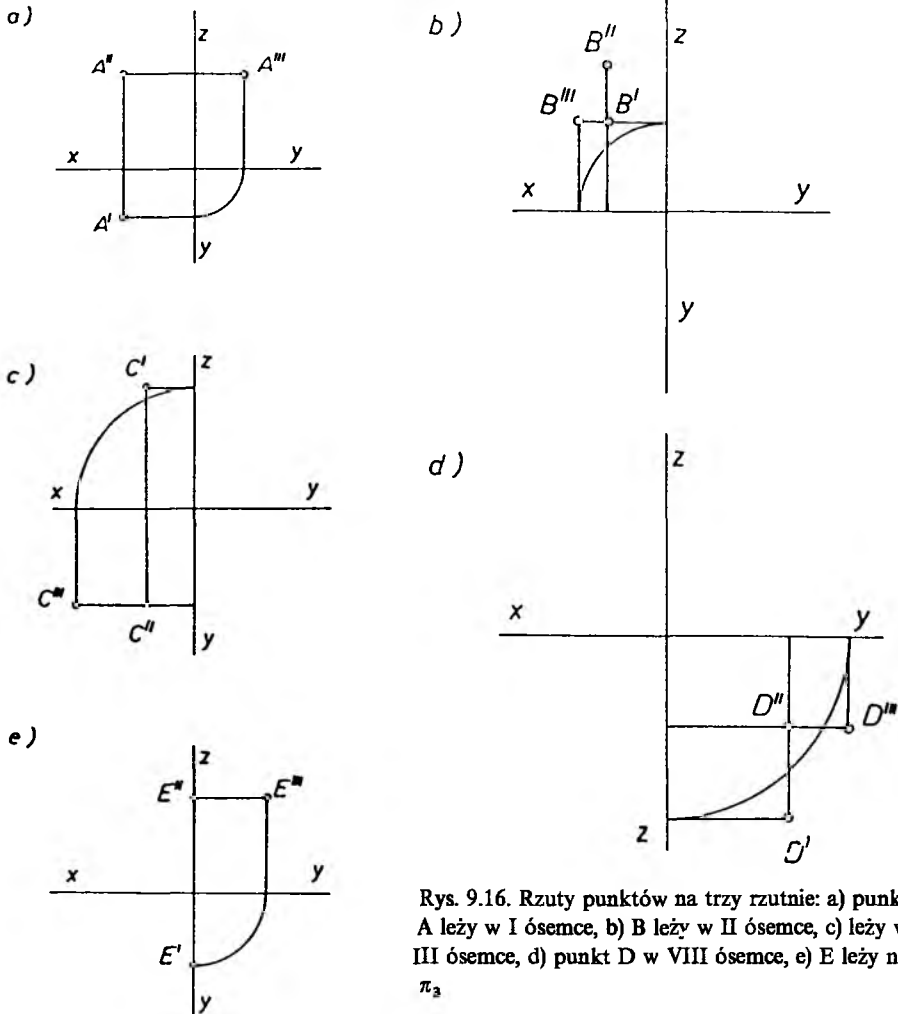
Rys. 9.14. Układ trzech rzutni (z rzutnią boczną)

Jak widzimy, oś y występuje dwukrotnie, raz na π_1 i drugi raz na π_3 . Przestrzeń jest podzielona na 8 części zwanych ósemkami lub oktantami. Numeracja części jest podobna do numeracji ćwiartek, z tym że części I, II, III, IV leżą po lewej stronie rzutni bocznej, a części V, VI, VII i VIII po prawej, jak zaznaczono na rysunku.

Dla wyznaczenia rzutów punktu A przyjmujemy rysunek uproszczony układu odniesienia przedstawiający tylko I część przestrzeni (rys. 9.15a). Znajdujemy rzuty A^I , A^{II} , A^{III} punktu A znanym sposobem. A^{III} nazywamy rzutem bocznym punktu A . Ustalamy odległość punktu A od rzutni bocznej jako szerokość s punktu A . Przyjmujemy, że wszystkie trzy współrzędne s, g, w punktu A znajdującego się w I ósemce przestrzeni są dodatnie. Rzuty punktu A przenosimy do układu odniesienia sprowadzonego do płaszczyzny rysunku ρ (rys. 9.15b).



Rys. 9.15. Punkt w układzie trzech rzutni



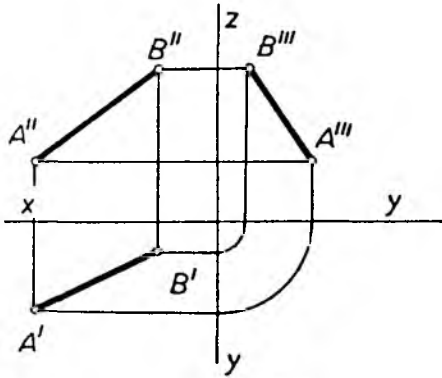
Rys. 9.16. Rzuty punktów na trzy rzutnie: a) punkt A leży w I ósemce, b) B leży w II ósemce, c) leży w III ósemce, d) punkt D w VIII ósemce, e) E leży na π_3

Szerokości punktów leżących w częściach od I do IV są dodatnie, bo leżą po lewej stronie rzutni bocznej, oraz szerokości punktów w częściach od V do VIII są ujemne. Szerokości punktów leżących na rzutni bocznej są równe 0. Wyznaczmy rzuty różnych punktów leżących w różnych częściach przestrzeni i na rzutniach (rys. 9.16).

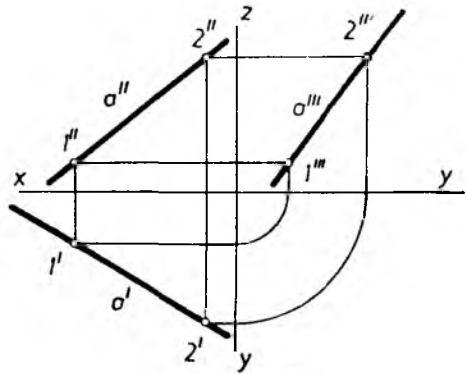
Odzworowanie odcinka i prostej w układzie trzech rzutni

W celu odzworowania odcinka należy określić rzuty jego końców na trzy rzutnie π_1 , π_2 , π_3 , przykład na rys. 9.17.

Położenie prostej w układzie trzech rzutni określamy rzutując dwa dowolne (różne) punkty prostej na π_1 , π_2 , π_3 , przykład na rys. 9.18.



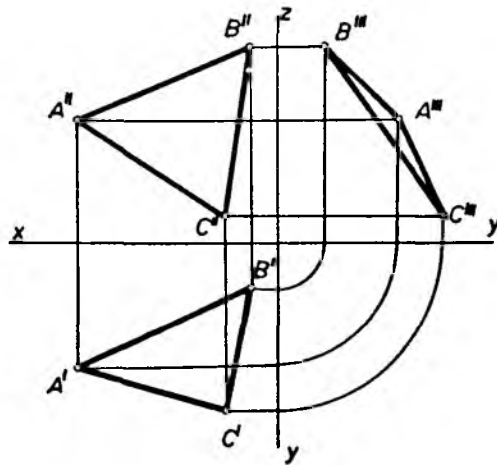
Rys. 9.17



Rys. 9.18.

Odzworowanie płaszczyzny

Odzworowanie płaszczyzny polega na odzworowaniu elementów, które ją określają, przykład na rys. 9.19.



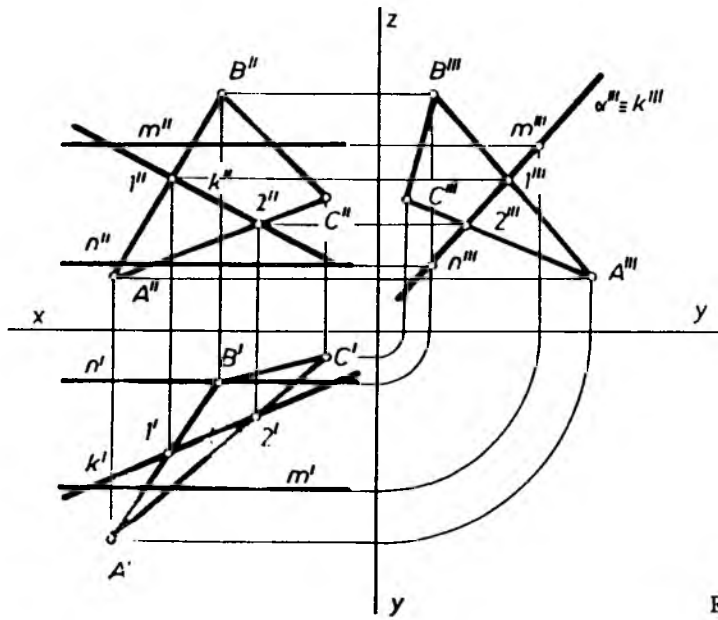
Rys. 9.19.

Zadanie 1:

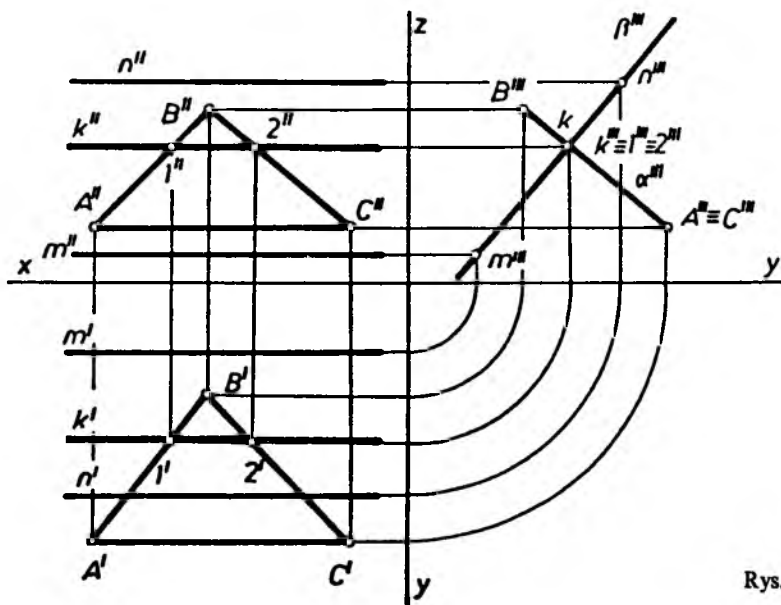
Wyznaczyć $k = \alpha \cap \beta$ krawędź płaszczyzn $\alpha = ABC$ i $\beta = mn$ ($m, n \parallel x$). Rozwiązanie na rys. 9.20. (Wyznaczamy najpierw k^{III} , a dopiero później k^I i k^{II}).

Zadanie 2:

Wyznaczyć $k = \alpha \cap \beta$ – krawędź płaszczyzn α i β równoległych do osi x (α, β – płaszczyzny boczno-rzutujące). Rozwiązanie na rys. 9.21.



Rys. 9.20.



Rys. 9.21.

Rozdział X

WIELOŚCIANY

10.1. Rodzaje wielościanów

Wielościanem nazywamy bryłę, której ściany złożone są ze skończonej ilości wielokątów płaskich. Wielościany mogą być wklęsłe i wypukłe, dzielimy je na: 1) ostrosłupy, 2) graniastosłupy, 3) wielościany foremne i półforemne, 4) wielościany nieforemne.

Ostrosłupy — wielościany mające ściany boczne w postaci trójkątów o jednym wspólnym wierzchołku zwanym wierzchołkiem ostrosłupa, w którym przecinają się krawędzie boczne ostrosłupa oraz podstawę w postaci dowolnego wielokąta płaskiego, którego boki nazywamy krawędziami podstawy. Mamy ostrosłupy proste i pochyłe. Ostrosłup prosty jest to taki, którego podstawę można wpisać w okrąg, a spodek wysokości leży w środku tego okręgu. Krawędzie boczne są zatem równej długości. Ostrosłup pochyły nie spełnia tych warunków. Ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, nazywamy ostrosłupem prawidłowym.

Graniastosłupy — wielościany mające ściany boczne w postaci równoległoboków lub prostokątów, oraz dwie równoległe podstawy, krawędzie boczne są do siebie równoległe. Mamy graniastosłupy proste i pochyłe. Graniastosłup prosty ma krawędzie boczne prostopadłe do podstaw, a ściny boczne są prostokątami. Graniastosłup pochyły nie spełnia tych warunków. Graniastosłup prosty, którego podstawy są przystającymi wielokątami foremnymi nazywamy graniastosłupem prawidłowym.

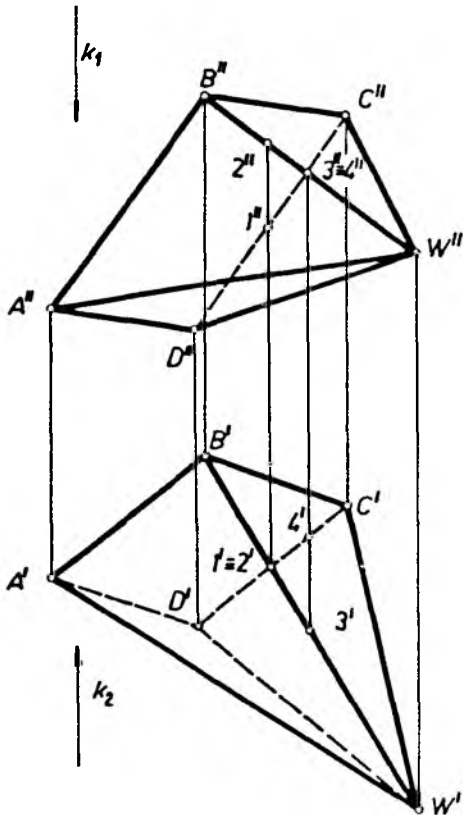
Wielościany foremne — inaczej bryły Platona, są to wielościany, których ściany złożone są z jednakowych wielokątów foremných. Istnieją następujące wielościany foremne:

- 1) czworościan — utworzony z 4 trójkątów równobocznych,
- 2) sześcian — z kwadratów,
- 3) ośmiościan foremny trójkątów foremných,
- 4) dwunastościan foremny — z pięciokątów foremných oraz
- 5) dwudziestościan foremny, utworzony z 20 trójkątów równobocznych.

Wielościany półforemne utworzone są z niejednakowych wielokątów foremných. Wielościany, których nie możemy zaliczyć do jednej wyżej wymienionych rodzajów, są wielościanami nieforemnymi.

10.2. Rzuty wielościanów

Rzuty wielościanu wyznaczamy, określając rzuty jego wierzchołków, a następnie jego krawędzi. Rzut konturu wielościanu nazywamy zarysem wielościanu. Jeżeli założymy, że ściany wielościanu są nieprzezroczyste, to przy kierunku patrzenia $k \perp \pi$ kontur wielościanu jest linią podziału jego ścian, krawędzi i wierzchołków na widoczne i niewidoczne. Przykład rzutów graniastosłupa i określenia widoczności jego krawędzi podano w punkcie 9.4. Obecnie podamy kilka dalszych przykładów rzutów wielościanów:



Rys. 10.1. Rzuty ostrosłupa dowolnego (czworokątnego)

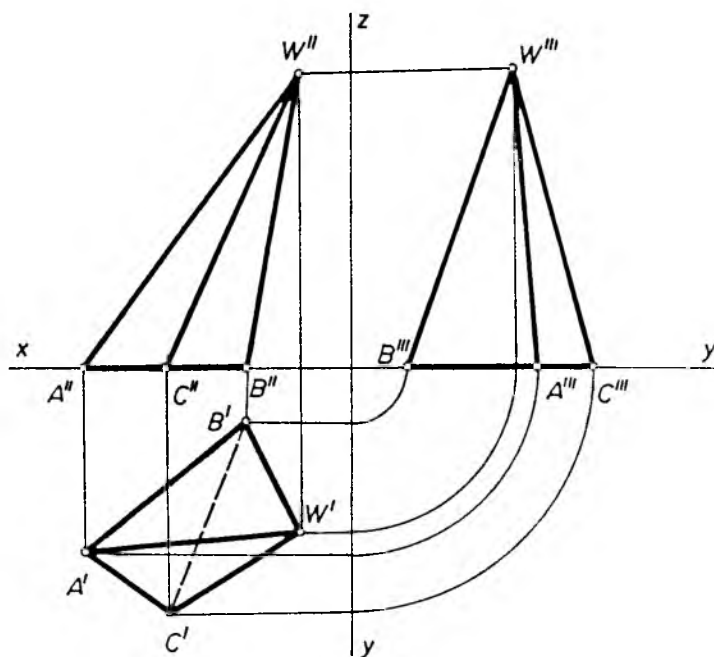
1) Rzuty ostrosłupa o podstawie ABCD (równoległobok) i wierzchołku W na dwie rzutnie (rys. 10.1). W celu określenia widoczności krawędzi ostrosłupa w obu rzutach przyjmujemy kierunki widzenia: $k_1 \perp \pi_1$ — kierunek widzenia z góry i $k_2 \perp \pi_2$ — kierunek widzenia z przodu. Następnie bierzemy pod uwagę punkty przecięcia się rzutów krawędzi: $1^I \equiv 2^I$ w rzucie poziomym i $3^I \equiv 4^I$ w rzucie pionowym. Znajdujemy brakujące rzuty tych punktów i stwierdzamy że wysokość punktu 2 jest większa od wysokości punktu 1, więc punkt 2 i krawędź BW są w rzucie poziomym widoczne, a krawędź DC jest niewidoczna oraz głębokość punktu 3 jest większa od głębokości punktu 4, więc punkt 3 i krawędź BW są widoczne w rzucie pionowym, a krawędź DC jest niewidoczna.

2) Rzuty ostrosłupa (o podstawie ABC leżącej na rzutni π_1) na trzy rzutnie (rys. 10.2).

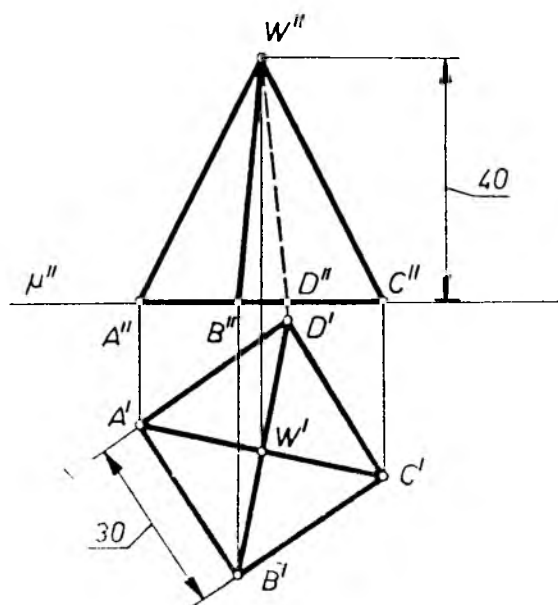
3) Rzut ostrosłupa prawidłowego o podstawie kwadratowej leżącej w płaszczyźnie poziomej μ , długość boku 3 cm, wysokość — 4 cm (rys 10.3).

4) Rzuty graniastosłupa prostego na trzy rzutnie (rys. 10.4).

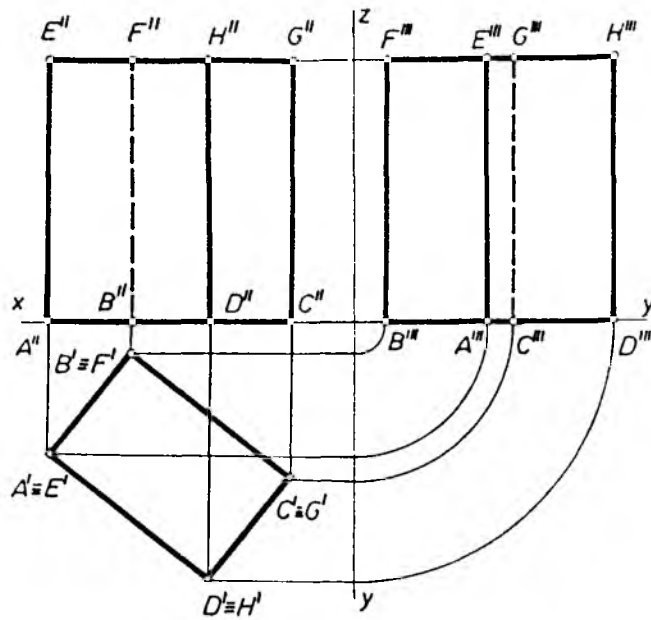
5) Rzuty graniastosłupa pochyłego na dwie rzutnie, podstawa równoległa do π_1 (rys. 10.5).



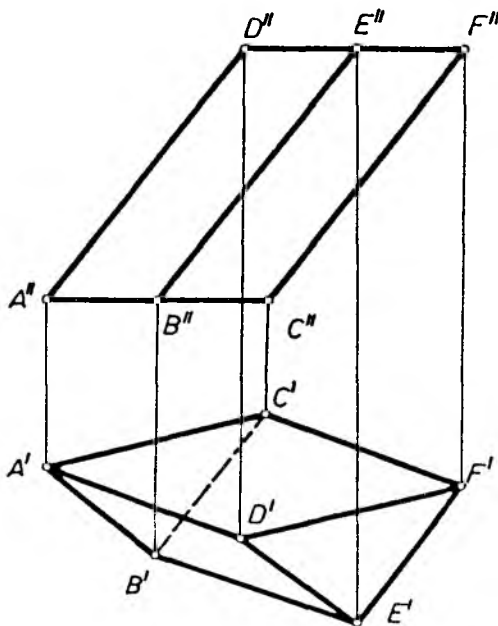
Rys. 10.2. Rzuty ostrosłupa pochyłego trójkątnego w układzie trzech rzutni



Rys. 10.3. Rzuty ostrosłupa prawidłowego prostego (kwadratowego)



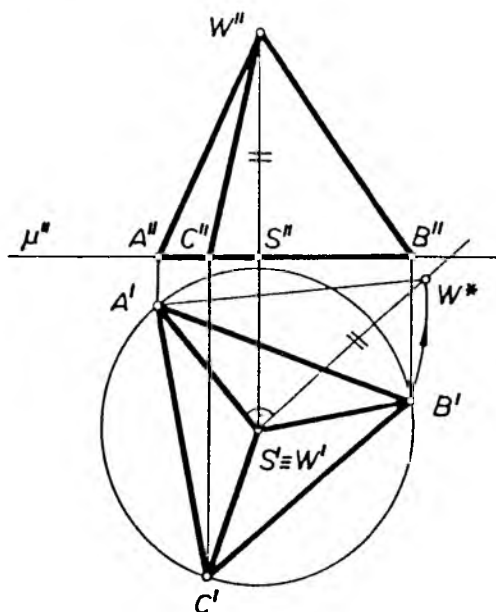
Rys. 10.4. Rzuty graniastosłupa prostego czworokątnego w układzie trzech rzutni



Rys. 10.5. Rzuty graniastosłupa pochylego trójkątnego

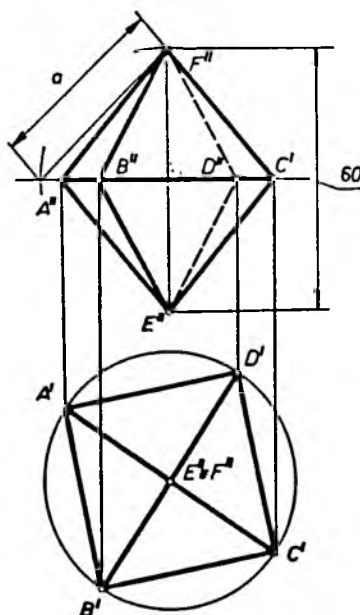
6) Rzuty czworobścianu foremnego, podstawa równoległa do π_1 . Wysokość wyznaczono z kładu odcinka $\overline{AS}$ (Rys. 10.6)

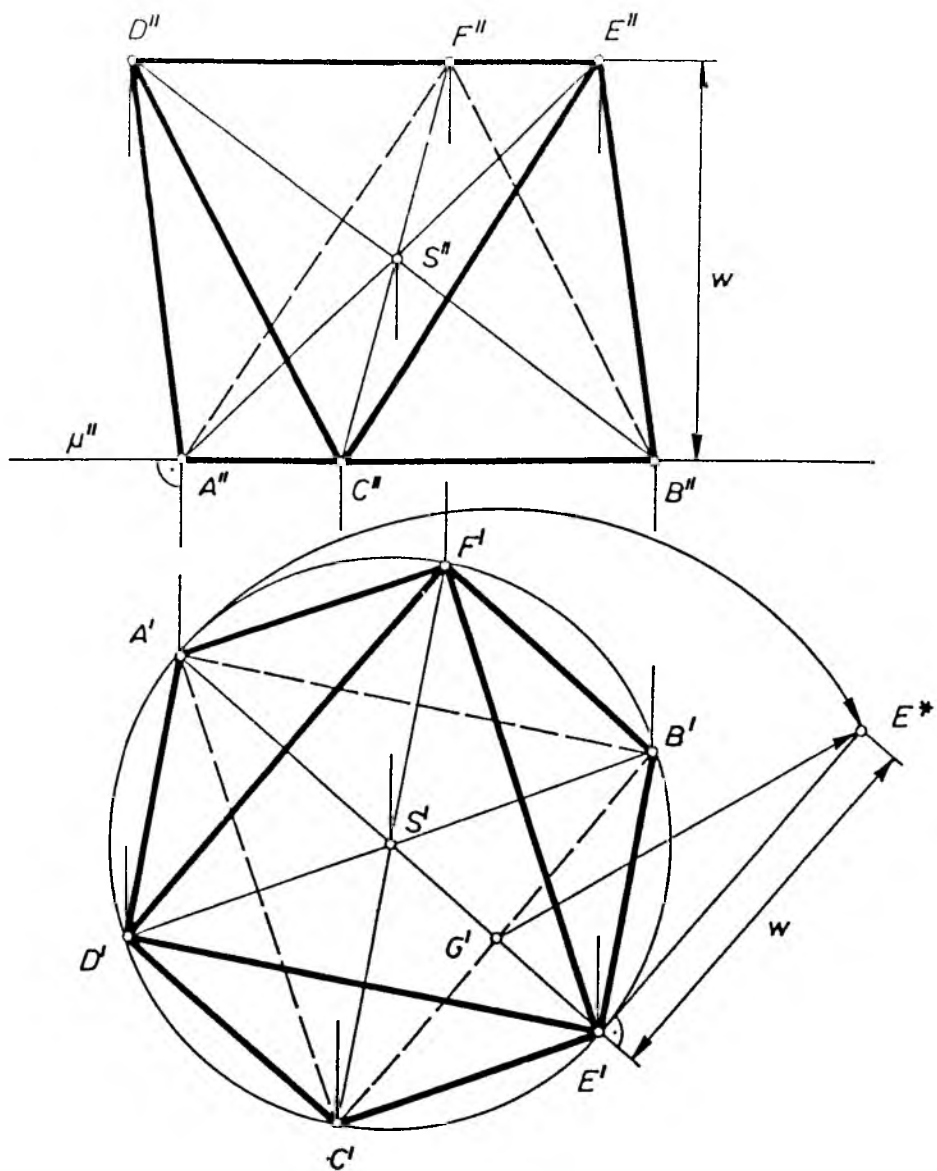
Rys. 10.6. Czworobścian foremny



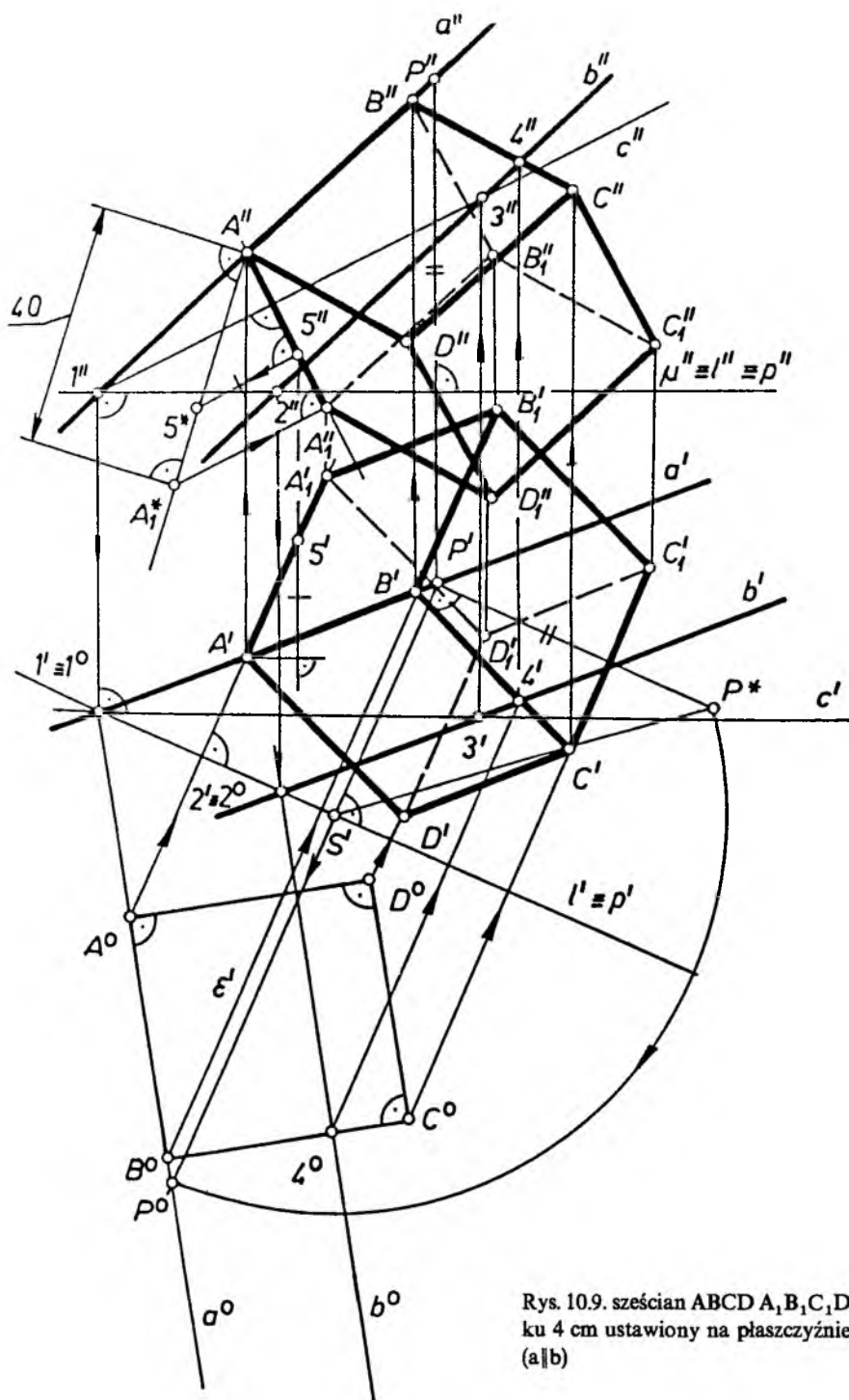
7) Wyznaczanie rzutów ośmiościanu foremnego o przekątnej pionowej długości 6 cm (rys. 10.7)

Rys. 10.7. Ośmiościan foremny

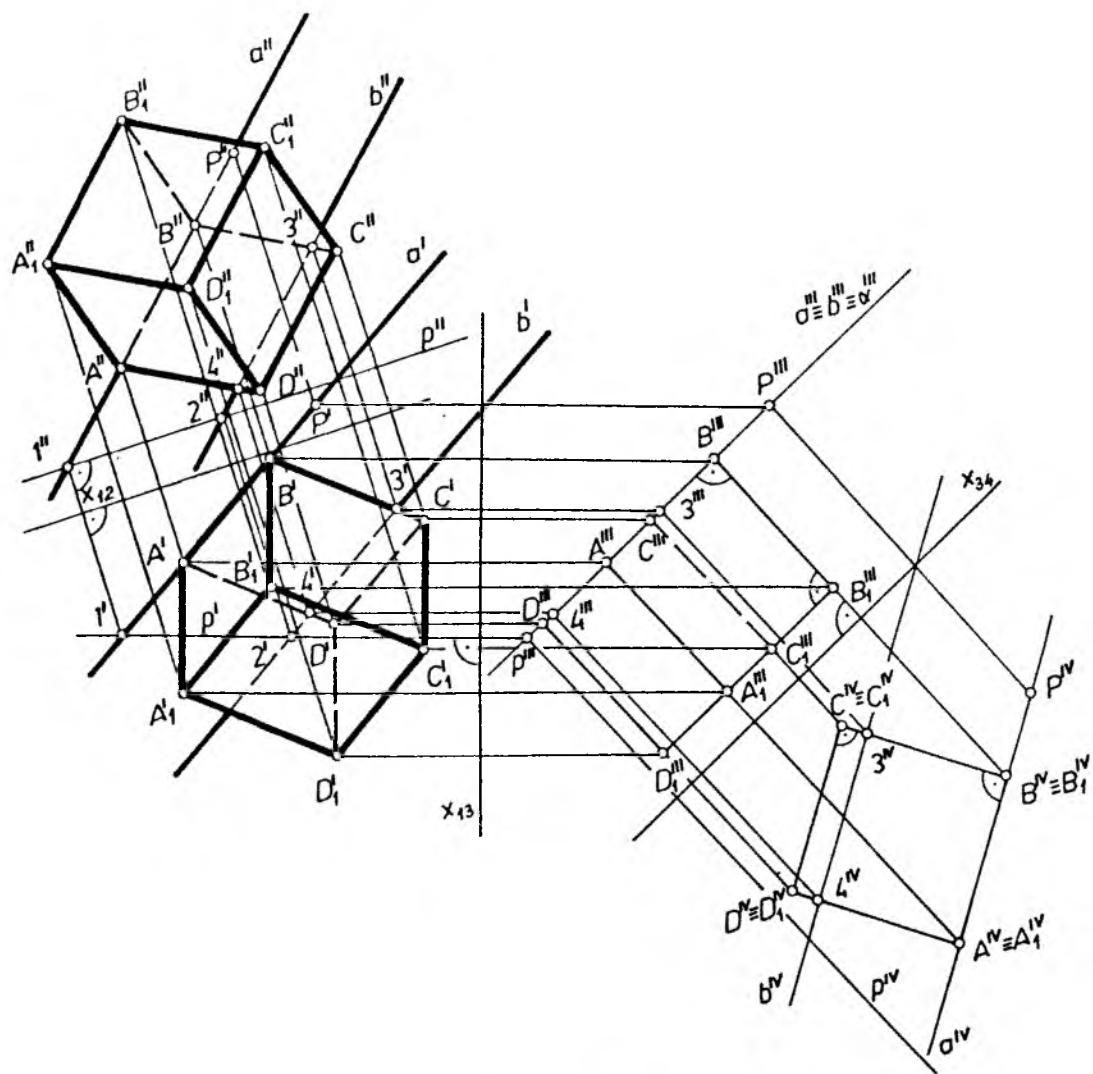




Rys. 10.8. Ośmiościan foremny



Rys. 10.9. sześcian $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ o boku 4 cm ustawiony na płaszczyźnie $\alpha = ab$ ($a \parallel b$)



Rys. 10.10. Sześcian o boku 3 cm ustawiony
na płaszczyźnie $\alpha = ab$ ($a \parallel b$)

Konstrukcję rozpoczynamy od wyznaczenia rzutu poziomego i pionowego ΔABC i rzutów poziomych pozostałych wierzchołków ośmiokąta, które w rzucie poziomym wraz z A^I, B^I, C^I wyznaczają sześciokąt foremny. Znając rzeczywistą długość GE wysokości ΔBCE równą wysokości ΔABC i wykorzystując kład określamy różnicę wysokości punktów E i G , a następnie rzut pionowy punktu E i kolejno D^{II}, F^{II} .

9) Wyznaczyć rzuty sześcianu o boku 4 cm ustawionego na płaszczyźnie $\alpha = ab, a \parallel b$, bok AB leży na prostej a . Kolejność rozwiązania (rys. 10.9) metodą kładu: wykonujemy kład płaszczyzny α . Na α° określamy kwadrat $A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$, a następnie podnosimy go z kładu. Korzystając z kładu pomocniczego określamy długości rzutów wysokości AA_1 sześcianu, a następnie konstruujemy rzuty punktów A_1, B_1, C_1, D_1 . Określamy widoczność. Rozwiązanie metodą transformacji pokazano na rys. 10.10 (dla sześcianu o boku $a = 3$ cm).

10.3. Przekroje i rozwinięcia wielościanów

W przekroju wielościanu płaszczyzną otrzymać możemy w ogólnym przypadku wielokąt, którego liczba boków nie może przekroczyć liczby ścian przekrojonego wielościanu.

W szczególnym przypadku figurą przekroju może być punkt albo odcinek. Przykładowo w przekroju czworoscianu może występować czworokąt, trójkąt, odcinek, punkt.

Wielokąt przekroju jest jednoznacznie określony, jeśli znane są jego wszystkie wierzchołki. Wierzchołkami wielokąta przekroju są punkty przebicia płaszczyzny przekroju krawędziami wielościanu.

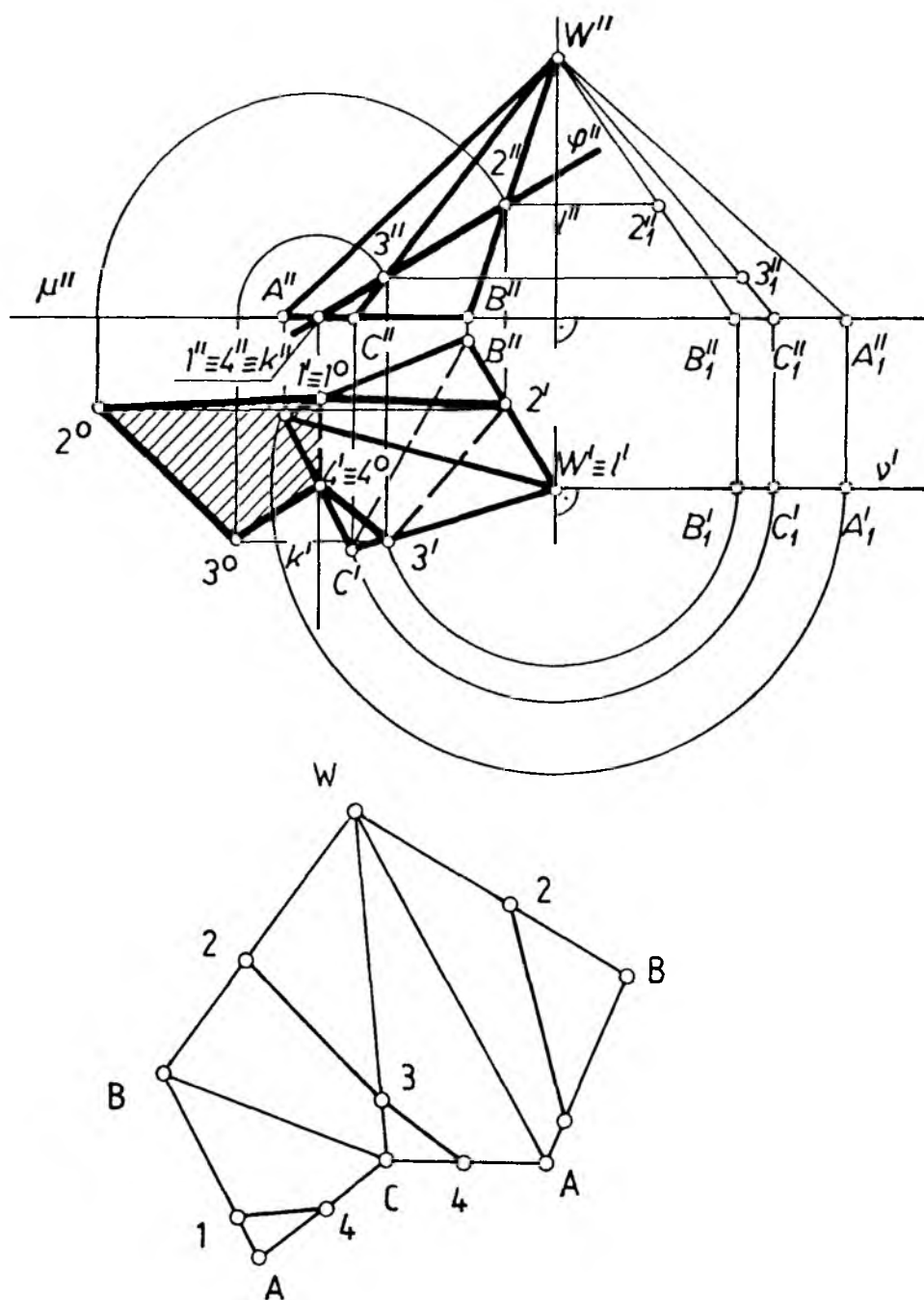
Dlatego też, żeby wyznaczyć przekrój wielościanu wystarczy określić punkty przebicia płaszczyzny przekroju krawędziami krojonego wielościanu. Zadanie określenia przekroju jest bezproblemowe, jeśli płaszczyzna jest rzutująca. Jeśli dana płaszczyzna przekroju nie jest rzutująca, to najlepiej ją sprowadzić w położenie rzutujące poprzez transformację układu odniesienia i dopiero wtedy wyznaczyć przekrój.

Do wyznaczania przekrojów ostrosłupów i graniastosłupów można wykorzystać zależności kolineacji między płaszczyznami przekroju i podstawy. Zagadnienie to rozpatrzmy na przykładach.

Przykład 1.

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną ϕ pionowo-rzutującą, znaleźć rzeczywistą wielkość przekroju oraz wyznaczyć rozwinięcie (siatkę) ostrosłupa z zaznaczeniem linii przekroju. Rozwiązanie na rys. 10.11.

Wyznaczenie wierzchołków wielokąta przekroju nie stanowi problemu – są nimi punkty przebicia krawędzi ostrosłupa z płaszczyzną przekroju ϕ , określimy



Rys. 10.11. Przekrój płaszczyzną rzutującą i rozwinięcie ostrosłupa trójkątnego

te punkty na rzucie pionowym. Rzeczywistą wielkość przekroju przykładowo wyznaczymy metodą kładu dokoła prostej celowej $k = \mu \cap \varphi$.

Dla wyznaczenia rzeczywistych długości krawędzi bocznych ostrosłupa stosujemy metodę obrotu. W tym celu przez wierzchołek ostrosłupa wprowadzimy płaszczyznę czołową v i obracamy krawędziami WA, WB, WC tak, aby się znalazły w płaszczyźnie v .

W nowym położeniu krawędzie te są w naturalnej długości na rzutni pionowej. Można też z łatwością ustalić prawdziwe położenie wierzchołków przekroju 2 i 3, wiedząc, że przy obrocie odcinków dokoła osi pionowej l, punkt i jego obraz mają taką samą wysokość. Po określeniu naturalnej długości wszystkich krawędzi możemy skonstruować — też w naturalnej wielkości — ściany ostrosłupa, które łączymy z sobą na płaszczyźnie rysunku w taki sposób, żeby całkowita długość niepołączonych jednoimiennych krawędzi była minimalną — tak skonstruujemy rozwinięcie.

Przykład 2.

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną dowolną $\varphi = KLM$, znaleźć rzeczywistą wielkość przekroju oraz wyznaczyć rozwinięcie siatki ostrosłupa z zaznaczeniem linii przekroju. Zadanie rozwiązujemy (rys. 10.12) metodą transformacji układu odniesienia: w celu sprowadzenia w położenie rzutujące wprowadzamy trzecią rzutnię π_3 prostopadłe do φ i π_1 , znajdujemy trzeci rzut ostrosłupa i α^{III} trzeciego rzutu płaszczyzny α . Znajdujemy wielokąt przekroju 1-2-3-4-5-1 we wszystkich rzutach rozpoczynając od trzeciego. Rzeczywistą wielkość przekroju znajdujemy metodą kładu na płaszczyznę poziomą.

Rozwinięcie siatki ostrosłupa wyznaczamy podobnie jak w przykładzie poprzednim, obracając krawędzie boczne WB i WC do płaszczyzny czołowej v przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa. Krawędzie WA i WD odwzorowują się w rzucie pionowym w rzeczywistej wielkości.

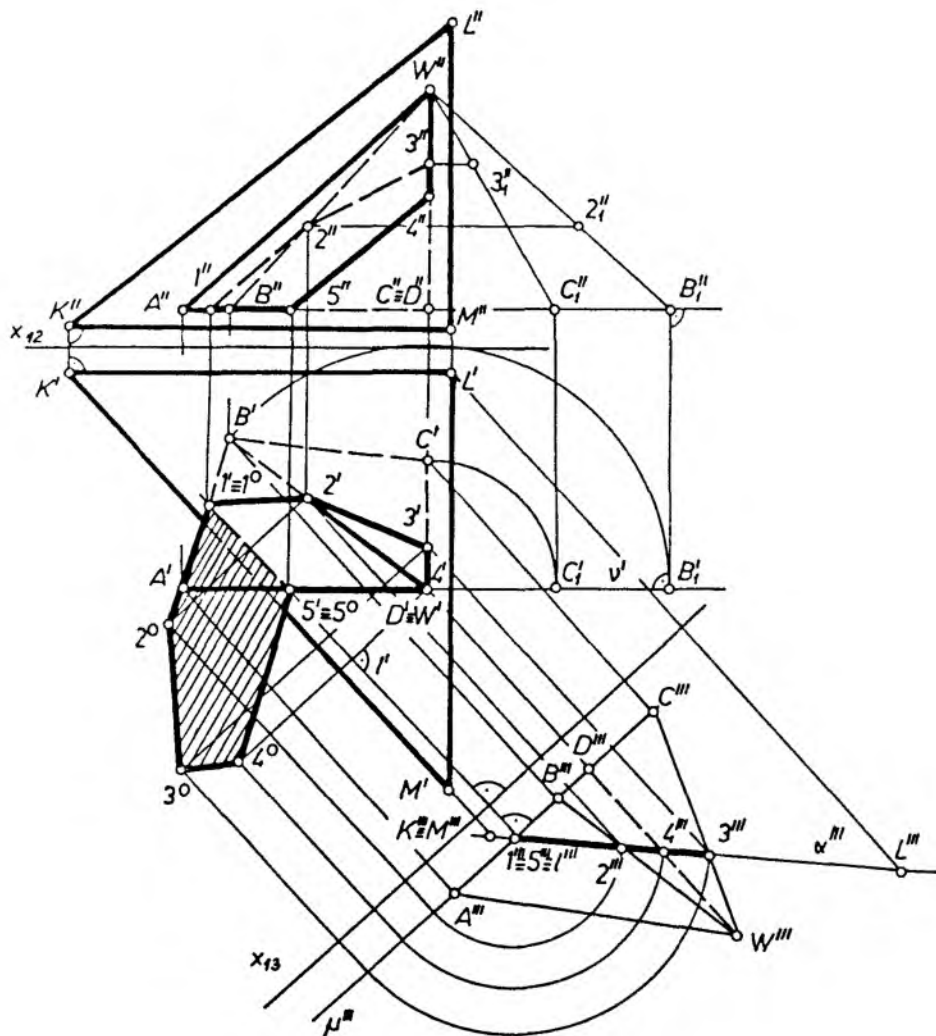
Przykład 3.

Wyznaczyć przekrój graniastosłupa prostego płaszczyzną rzutującą, wyznaczyć rzeczywistą wielkość przekroju oraz znaleźć rozwinięcie siatki graniastosłupa z zaznaczeniem linii przekroju.

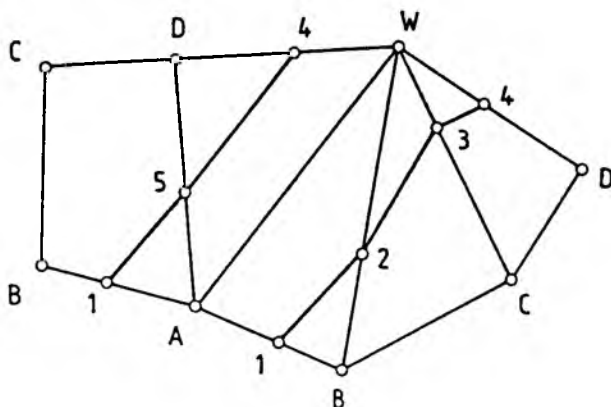
Zadanie to rozwiązujemy analogicznie jak przykład 1, z tym że, nie potrzebujemy wyznaczyć rzeczywistej wielkości krawędzi graniastosłupa prostego (boczne krawędzie są w naturalnej wielkości na rzucie pionowym, podstawa zaś na rzucie poziomym — rys. 10.13).

Przykład 4.

Wyznaczyć przekrój normalny graniastosłupa pochylego płaszczyzną przechodzącą przez punkt N oraz znaleźć rozwinięcie siatki graniastosłupa z zaznaczeniem linii przekroju.



Rys. 10.12.a) Przekrój ostrosłupa czworokątnego płaszczyznowego nierzutującą

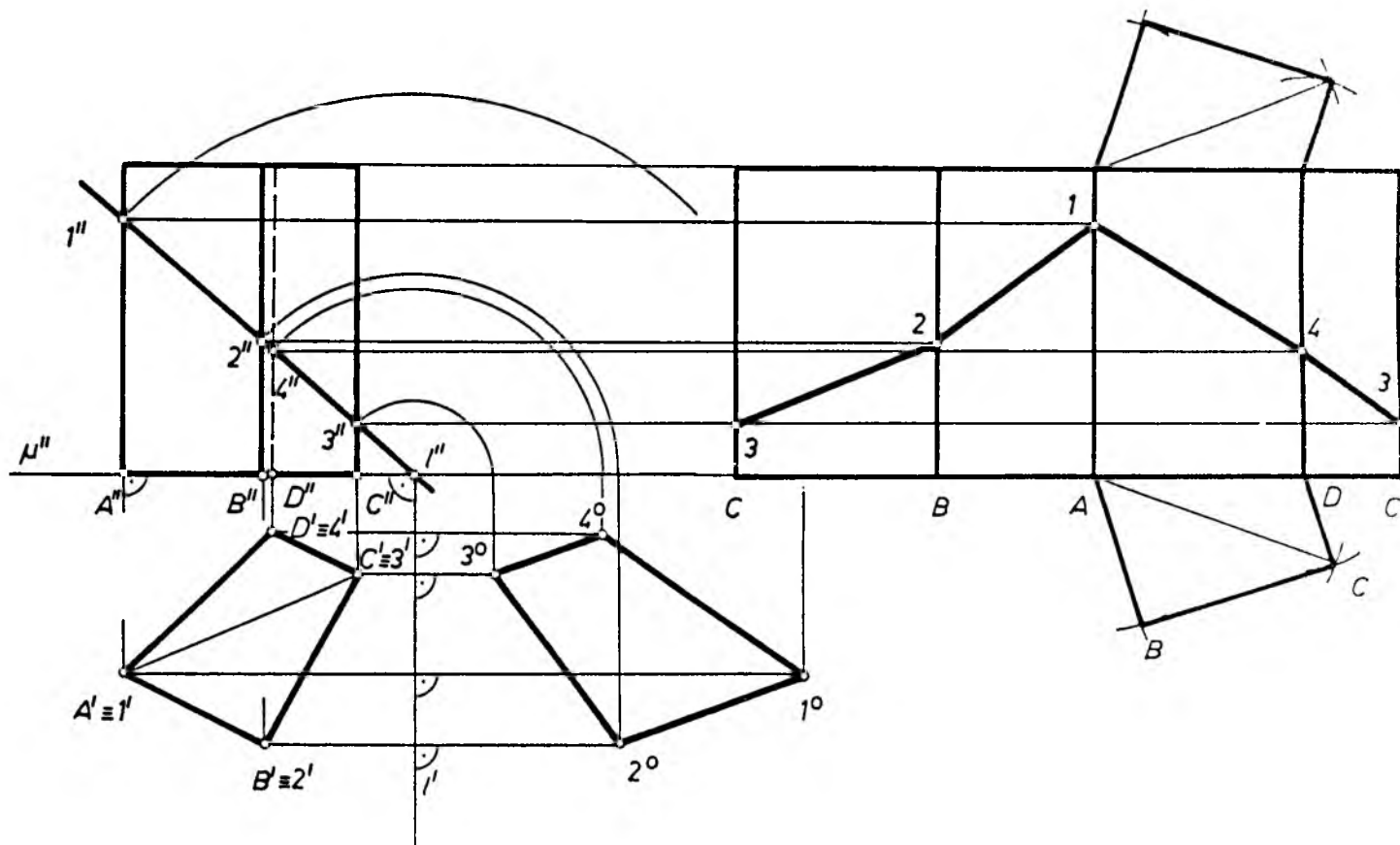


Rys. 10.12.b) Rozwinięcie ostrosłupa czworokątnego z zaznaczeniem linii przekroju

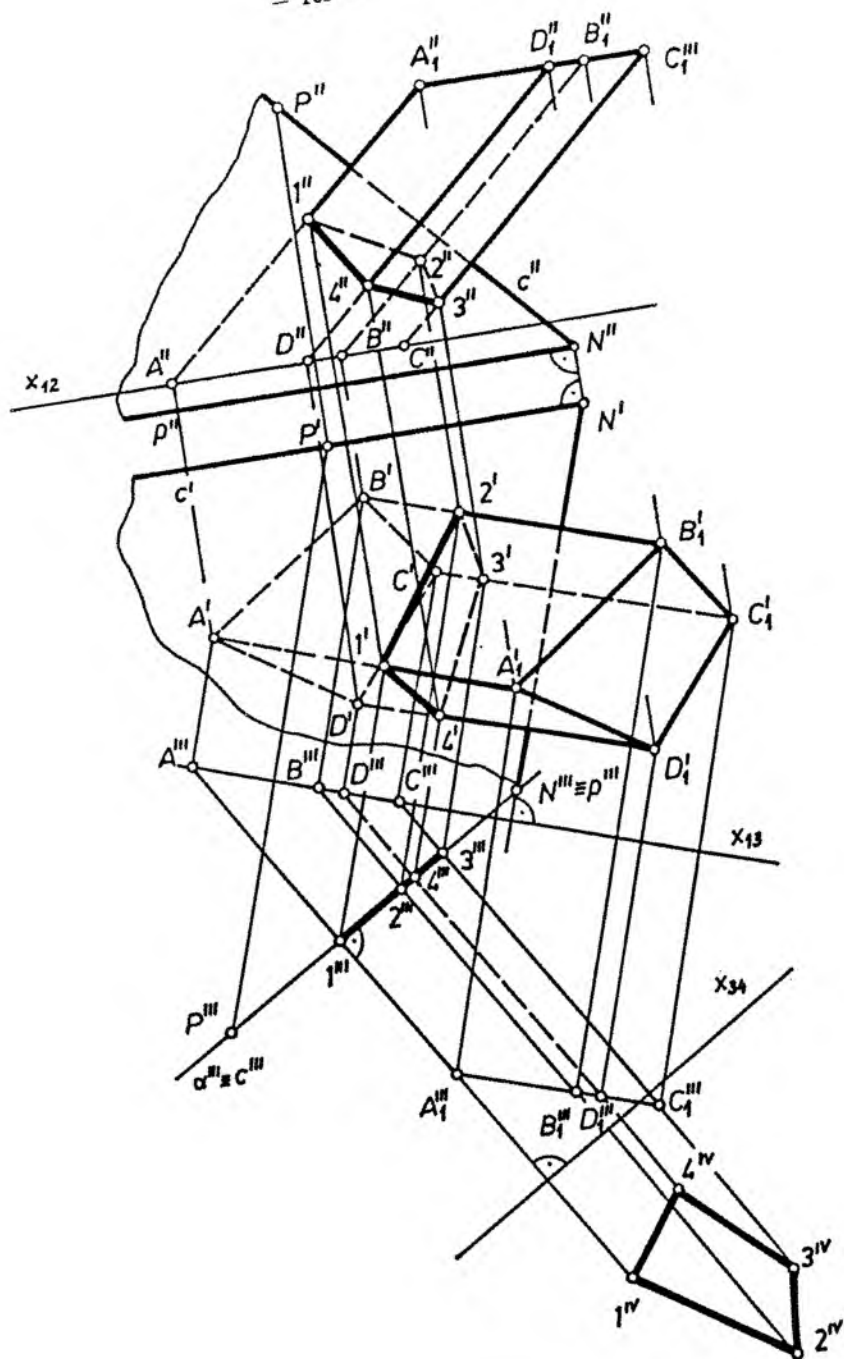
Zadanie rozwiązujemy (rys. 10.14 i 10.15) metodą transformacji. Przez punkt N prowadzimy płaszczyznę α prostopadłą do krawędzi bocznych. W celu sprowadzenia α w położenie rzutujące, wprowadzamy $\pi_3 \perp \pi_1$ i $\pi_3 \perp \alpha$. W rzucie trzecim znajdujemy rzut przekroju 1-2-3-4-1 i rzeczywiste długości krawędzi bocznych, a w rzucie czwartym na π_4 rzeczywistą wielkość przekroju. Boki wielokąta przekroju są równe szerokości ścian bocznych graniastosłupa. W rozwinięciu siatki graniastosłupa (rys. 10.15) linia przekroju jest prostą.

Do wyznaczania przekroju wielościanów (graniastosłupów i ostrosłupów) płaszczyznami może mieć zastosowanie również metoda kolineacji środkowej i powinowactwa osiowego układów płaskich. Jeżeli φ – płaszczyzna przekroju (rys. 10.16) przecina ε – płaszczyznę podstawy wielościanu (graniastosłupa lub ostrosłupa) wzdłuż krawędzi k , wówczas boki przekroju przecinają się na krawędzi k z odpowiadającymi im bokami podstawy albo są do krawędzi k równoległe, jeśli boki podstawy są do krawędzi k równoległe. Twierdzenie to ilustrują rysunki: 10.16a i b.

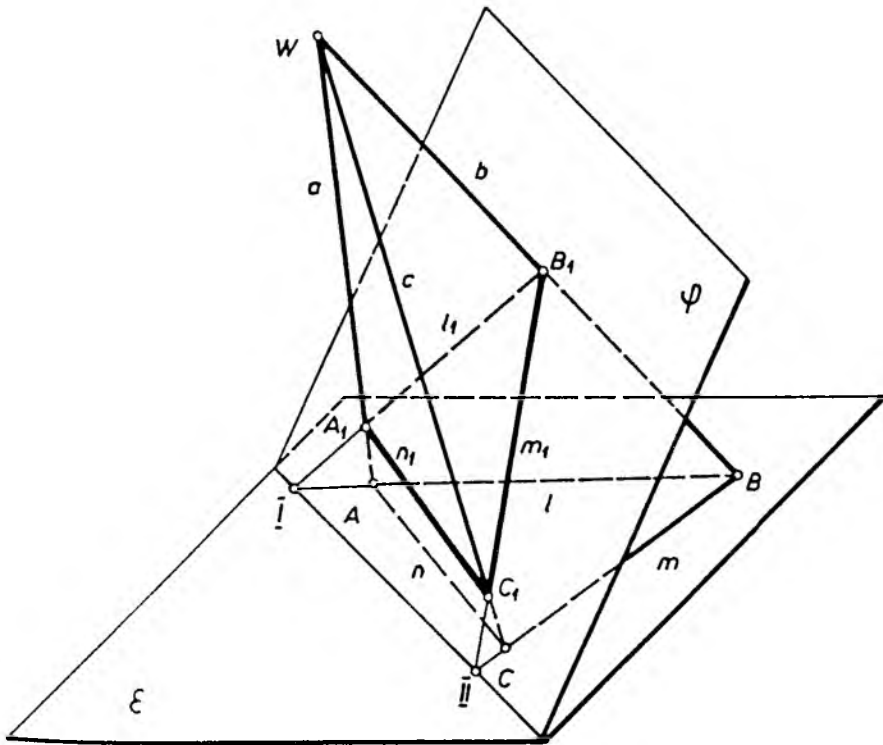
Jeśli na przykład płaszczyzny ε , φ i płaszczyzna ściany BC_1C_2 graniastosłupa lub płaszczyzna ściany WBC ostrosłupa przecinają się w punkcie II , to ich trzy krawędzie: krawędź k , prosta BC i prosta B_1C_1 przecinają się w tym samym punkcie II . W pierwszym przypadku między układem płaskim na płaszczyźnie ε (podstawą graniastosłupa), a układem płaskim na płaszczyźnie φ (przekrojem graniastosłupa) występuje znany związek – powinowactwo osiowe. Jeśli więc wyznaczmy rzut prostokątny na dowolną płaszczyznę π (nie prostopadłą ani do płaszczyzny ε jego podstawy, ani do płaszczyzny φ jego przekroju), to na tej płaszczyźnie π między rzutem podstawy graniastosłupa a rzutem jego przekroju zachowany zostanie związek powinowactwa osiowego.



Rys. 10.13. Przekrój płaszczyzną rzutującą i rozwinięcie graniastosłupa prostego czworokątnego



Rys. 10.14. Przekrój normalny graniastopu pochylego czworokątnego



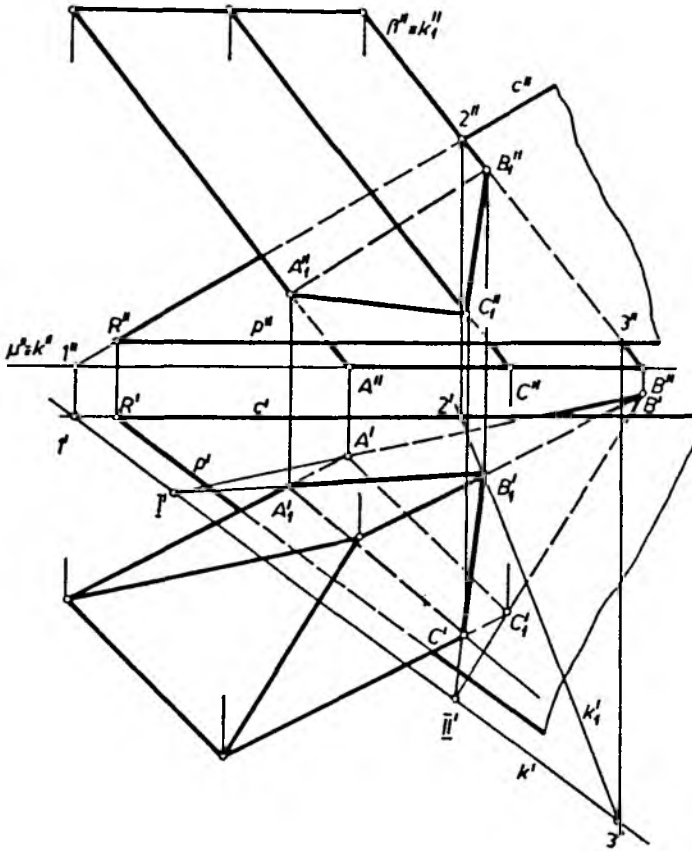
Rys. 10.16.b). Zależności kolineacji środkowej między przekrojem, a podstawą ostrosłupa

W szczególności, jeśli podstawa graniastopu leży na płaszczyźnie poziomej μ (lub na płaszczyźnie czołowej ν), to z powyższego wynika, że: między układem na płaszczyźnie μ (lub ν) podstawy graniastopu a układem φ^I rzutu poziomego (lub φ^{II} rzutu pionowego) jego przekroju płaszczyzną φ występuje związek powinowactwa osiowego, przy czym oś tego powinowactwa jest krawędź k płaszczyzny podstawy μ (lub ν) z płaszczyzną przekroju φ , a kierunek powinowactwa jest równoległy do rzutów poziomych $a^I \parallel b^I$ (lub do rzutów pionowych $a^{II} \parallel b^{II}$...) krawędzi bocznych $a \parallel b$... tego graniastopu.

Przykład 1.

Dane są rzuty graniastopu trójkątnego, ukośnego, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej μ . Wykreślić rzuty przekroju tego graniastopu płaszczyzną dowolną $\varphi = pc$ ($p \cap c = P$) stosując metodą powinowactwa osiowego. Rozwiązanie podano na rys. 10.17.

Określimy najpierw jeden dowolny wierzchołek przekroju jako punkt przecięcia krawędzią boczną graniastopu. W tym celu przez dowolną krawędź



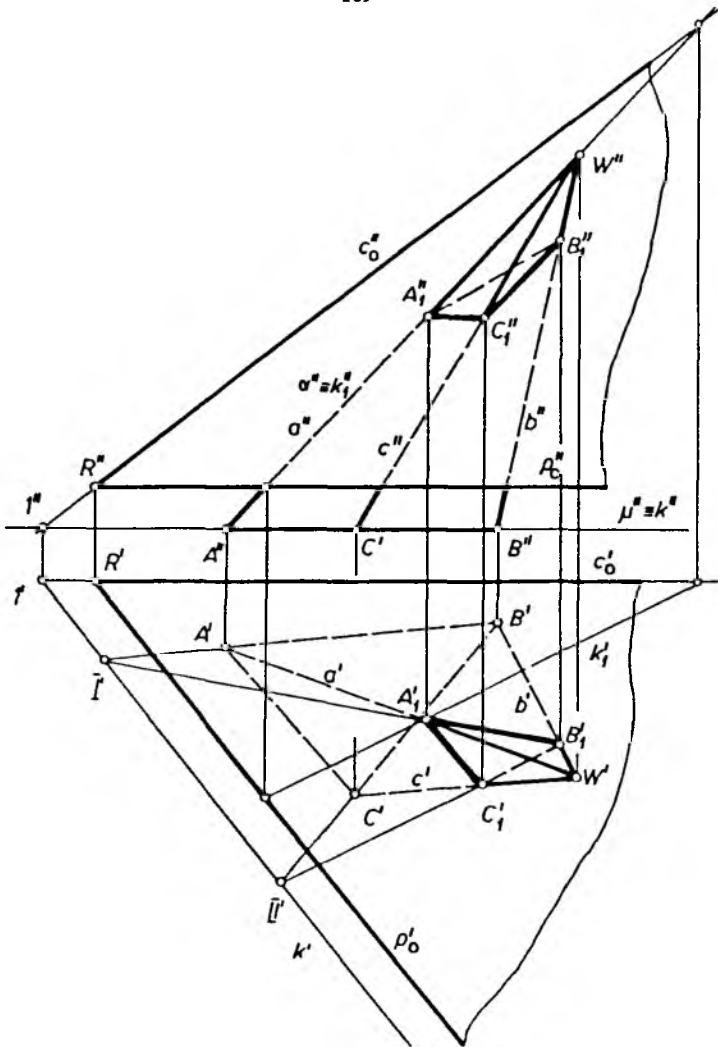
Rys. 10.17. Wyznaczanie przekroju graniastosłupa na podstawie zależności powinowactwa osiowego

boczną graniastosłupa prowadzimy pomocniczą płaszczyznę pionowo-rzutującą β i wyznaczamy krawędź k_1 przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną $\varphi = pc$. Wyznaczony punkt B_1 jest pierwszym wierzchołkiem szukanego przekroju graniastosłupa. Rzuty poziome dalszych wierzchołków przekroju graniastosłupa wyznaczymy stosując zależności powinowactwa osiowego układów płaskich.

Wyznaczany trójkąt $A_1^I B_1^I C_1^I$ jest rzutem poziomym szukanego przekroju graniastosłupa. Następnie znajdujemy rzut pionowy.

Przykład 2.

Dane są rzuty ostrosłupa trójkątnego, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej μ . Wykreślić rzuty przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną dowolną $\varphi = p_o c_o$, $p_o \cap c_o = P$ Rozwiązanie podano na rys. 10.18.



Rys. 10.18. Wyznaczanie przekroju ostrosłupa na podstawie zależności kolineacji środkowej

Przez dowolną krawędź boczną np. a ostrosłupa prowadzimy pomocniczą płaszczyznę pionowo-rzutującą α i wyznaczamy jej krawędź k_1 z płaszczyzną $\varphi = p_o c_o$. Punkt A_1 jest pierwszym wierzchołkiem szukanego przekroju ostrosłupa. Rzuty poziome pozostałych wierzchołków przekroju wyznaczamy wykorzystując zależności kolineacji środkowej. Wyznaczony trójkąt $A_1^I B_1^I C_1^I$ jest rzutem poziomym przekroju ostrosłupa. Następnie określamy rzut pionowy trójkąta $A_1 B_1 C_1$.

10.4. Punkty przebicia wielościanu prostą

W celu wyznaczenia punktów przebicia wielościanu prostą, prowadzimy przez tę prostą pomocniczą płaszczyznę tnącą i wyznaczamy przekrój wielościanu. Punkty przebicia leżą na przecięciu się przekroju z prostą.

Dany jest ostrosłup o podstawie ABCD leżącej na płaszczyźnie poziomej α i o wierzchołku W oraz dana jest prosta a . Wyznaczyć punkty przebicia ostrosłupa prostą (rys. 10.19).

Na prostej a obieramy właściwy punkt R, prowadzimy przez ten punkt i przez wierzchołek ostrosłupa prostą q . Prosta a i q określają pomocniczą płaszczyznę tnącą φ . Znajdujemy krawędź k przecięcia φ z płaszczyzną α poprzez wyznaczenie punktów przebicia Q i P. Krawędź k przecina podstawę w punktach 1 i 2, które łączymy z wierzchołkiem. Otrzymujemy więc przekrój ostrosłupa płaszczyzną φ . Na przecięciu się przekroju z prostą a leżą szukane punkty przebicia S i T.

Punkt R może być niewłaściwy, prosta q przechodząca przez wierzchołek jest równoległa do prostej a i wówczas płaszczyzna φ jest określona dwiema prostymi równoległymi.

Przykład 2.

Dany jest graniastosłup pochyły o podstawie leżącej na płaszczyźnie poziomej α oraz dana jest prosta a . Wyznaczyć punkty przebicia graniastosłupa (rys. 10.20).

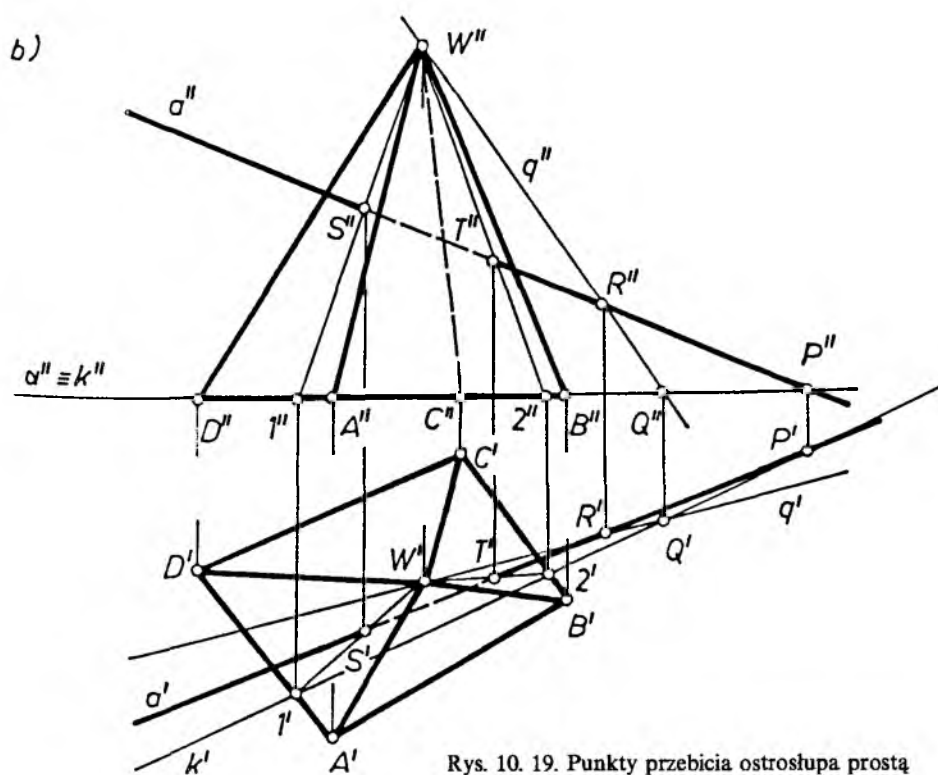
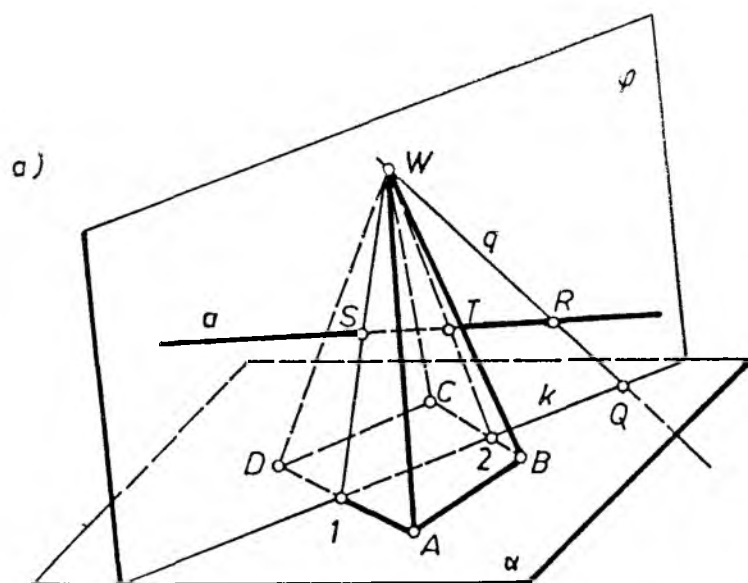
Na prostej a obieramy dowolny punkt R, prowadzimy przez ten punkt prostą q równoległą do krawędzi bocznej graniastosłupa. Proste a i q określają pomocniczą płaszczyznę tnącą φ . Krawędź $k = \alpha \cap \varphi$ znajdujemy poprzez wyznaczenie punktów przebicia P i Q.

Krawędź k przecina podstawę w punktach 1 i 2, przez które prowadzimy proste równoległe do krawędzi bocznych graniastosłupa. Otrzymujemy więc przekrój graniastosłupa płaszczyzną φ . Na przecięciu się przekroju z prostą a leżą szukane punkty przebicia.

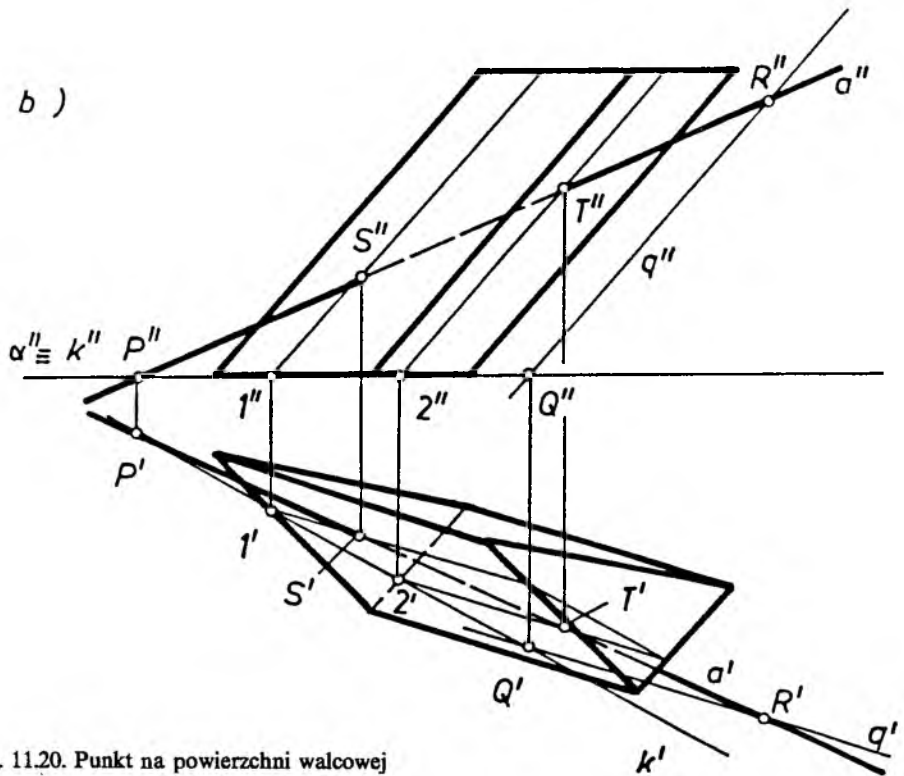
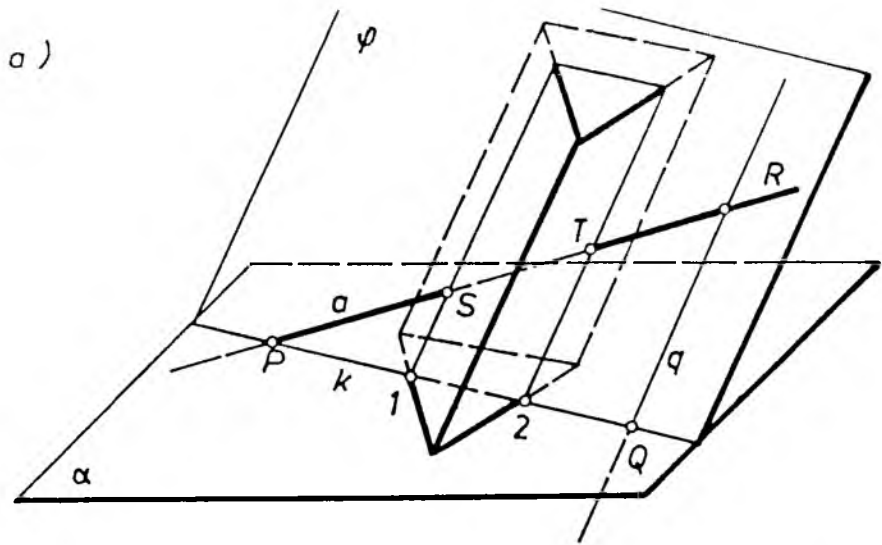
10.5. Przenikanie wielościanów

Wspólną linię dwóch przenikających się wielościanów nazywamy wielokątem przenikania, który jest na ogół wielokątem przestrzennym. Przenikanie może być niezupełne lub zupełne, w tym drugim przypadku wielokąt przenikania rozpada się na dwie części.

W celu wyznaczenia wielokąta przenikania wielościanów, wyznaczamy najpierw wierzchołki wielokąta, a następnie łączymy je odpowiednio według schematu.



Rys. 10. 19. Punkty przebiecia ostroslupa prostą



Rys. 11.20. Punkt na powierzchni walcowej

Wierzchołkami wielokąta przenikania są punkty, w których krawędzie jednego wielościanu przebijają ściany drugiego i punkty, w których krawędzie drugiego wielościanu przebijają ściany pierwszego. Zagadnienie to wyjaśnimy na kilku przykładach.

Przykład 1.

Dane są dwa ostrosłupy (rys. 10.21), jeden o podstawie ABCD i wierzchołku W_1 ustawiony podstawą na płaszczyźnie poziomej μ i drugi o podstawie MLN ustawiony na płaszczyźnie czołowej ν .

Przez wierzchołki ostrosłupów prowadzimy prostą t i wyznaczamy P_1, P_2 jej punkty przebicia z płaszczyznami μ i ν . Wyznaczamy też krawędź $k = \mu \cap \nu$. Każda płaszczyzna α_i przechodząca przez prostą t przecina ostrosłupy w krawędziach przechodzących przez wierzchołki W_1 i W_2 . Prowadzimy pomocnicze płaszczyzny tnące α_i przechodzące przez prostą t i kolejne krawędzie boczne ostrosłupów. Krawędzie tych płaszczyzn z płaszczyznami μ i ν (przyjmujemy oznaczenia tych krawędzi $k_{i\mu}$ i $k_{i\nu}$) przecinają się na krawędzi k . Wyznamy na przykład punkty przebicia ostrosłupa $MNLW_2$ krawędzią b . W tym celu prowadzimy pomocniczą płaszczyznę α_2 zawierającą B i prostą t . Krawędź $k_{2\mu}$ tej płaszczyzny z μ przechodzi przez punkt B . $k_{2\nu}$ – krawędź płaszczyzny α_2 i ν przecina podstawę MLN w punktach V i VI , które łączymy z wierzchołkiem W_2 , otrzymując krawędzie przekroju ostrosłupa $MLNW_2$ płaszczyzną α_2 . Krawędzie przekroju z krawędzią b mają punkty wspólne 5 i 6, które są wierzchołkami wielokąta przenikania.

W podobny sposób wyznaczamy wszystkie wierzchołki wielokąta przenikania. Stwierdzamy, że przenikanie jest niezupełne, że krawędzie a i n nie biorą udziału w przenikaniu. Wyznaczone wierzchołki wielokąta przenikania nanosimy na schematy przenikania i odpowiednio je łączymy na schemacie (można łączyć z sobą tylko punkty jednego oczka), a następnie na rysunku przenikania.

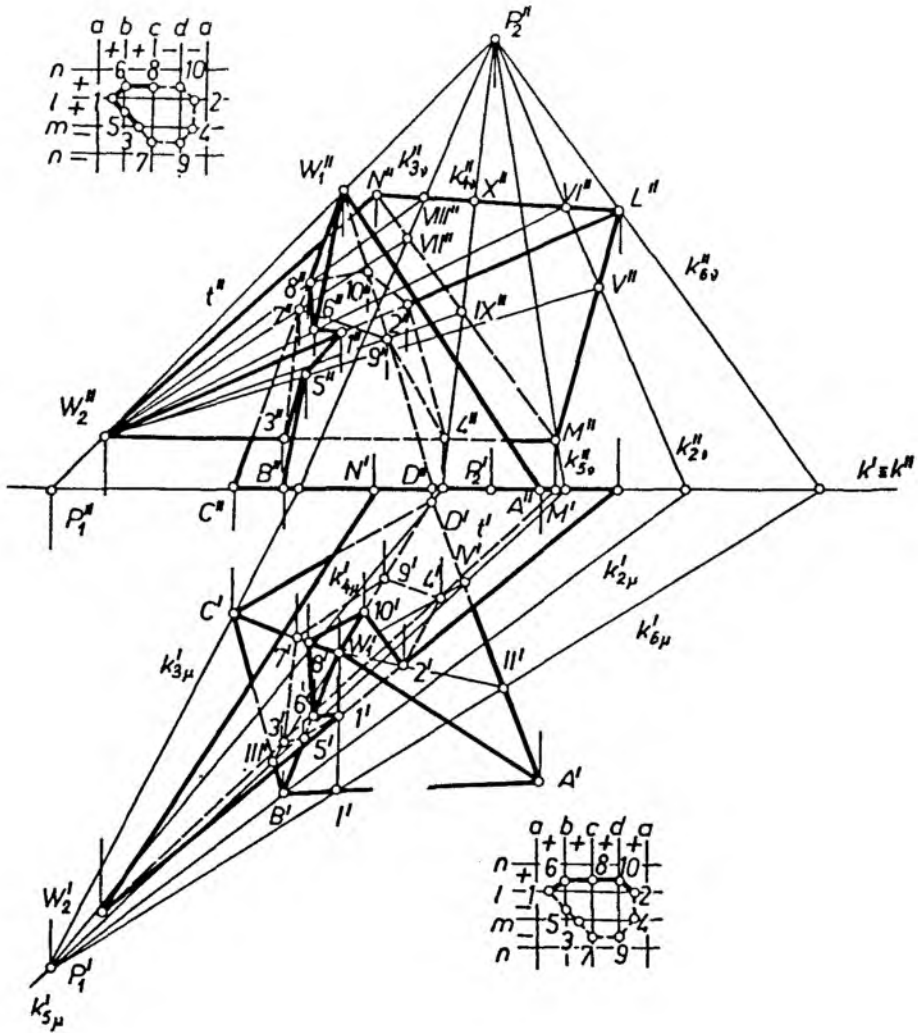
Znak „+” na siatce oznacza widoczność ściany bocznej ostrosłupa określonej przez dwie krawędzie, między którymi ustawiono ten znak, a „–” oznacza niewidoczność.

Bok wielokąta przenikania jest widoczny wtedy i tylko wtedy, kiedy ściany dwóch przenikających się wielościanów przynależne do tego boku są jednocześnie widoczne.

Tok rozwiązania jest taki sam dla dowolnych ostrosłupów. W przypadku gdy podstawy obu ostrosłupów ustawione są na jednej płaszczyźnie γ równoległej do rzutni, zadanie się upraszcza, gdyż wystarczy określić tylko punkt przebicia prostą t płaszczyznę γ i krawędzie płaszczyzn pomocniczych z płaszczyzną γ .

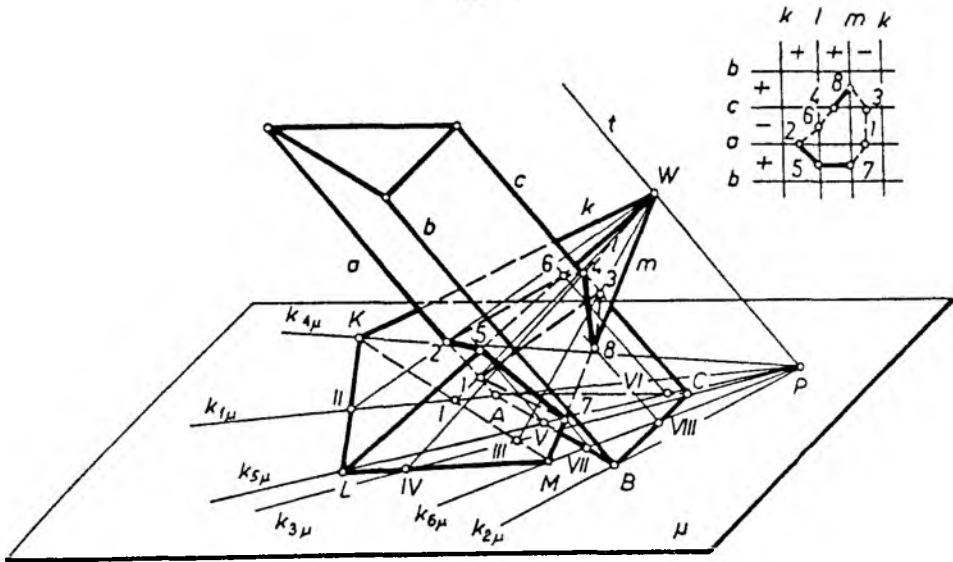
Przykład 2.

Wyznaczyć linię przenikania graniastosłupa z ostrosłupem. Dany jest graniastosłup o podstawie ABC i ostrosłup o podstawie KLM i wierzchołku W , ustawione podstawami na płaszczyźnie poziomej. Przez wierzchołek ostrosłupa



Rys. 10.21. Przenikanie dwóch ostrosłupów

prowadzimy prostą t (rys. 10.22 i 10.23) równoległe do krawędzi bocznych graniastosłupa i wyznaczamy P jej punktu przebiecia z μ . Każda płaszczyzna przechodząca przez prostą t i przecinająca oba wielościany przecina graniastosłup w krawędziach równoległych do krawędzi bocznych, a ostrosłup w krawędziach przechodzących przez wierzchołek W .

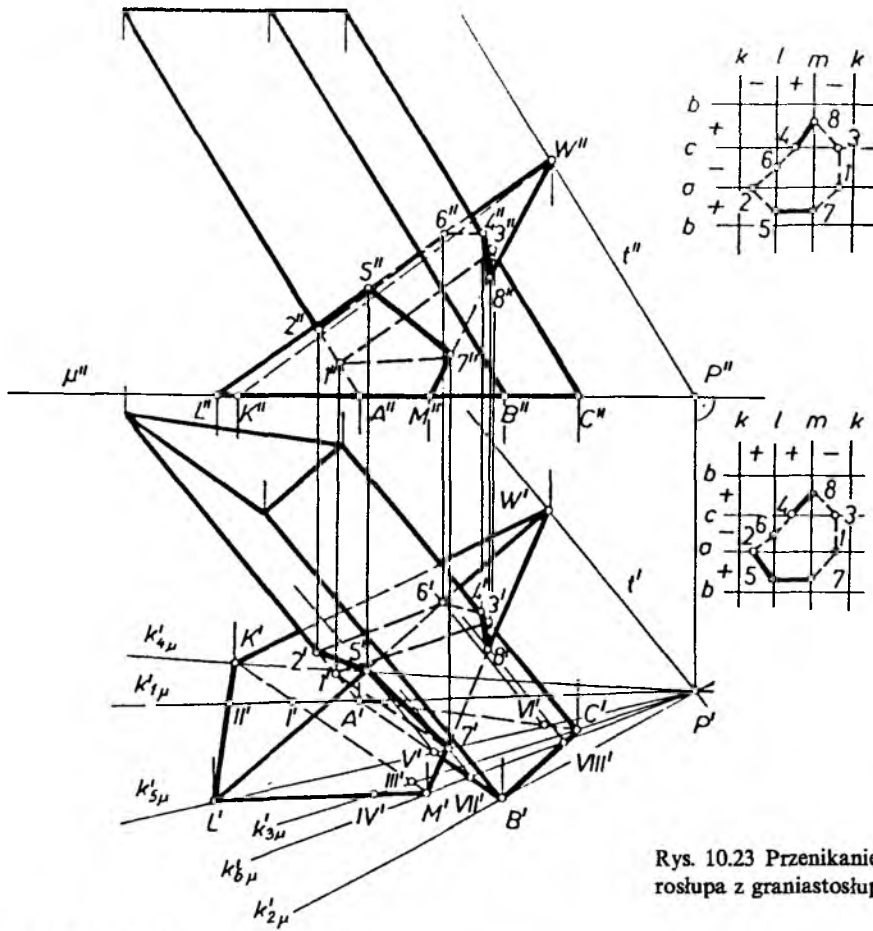


Rys. 10.22. Przenikanie ostrosłupa z graniastosłupem

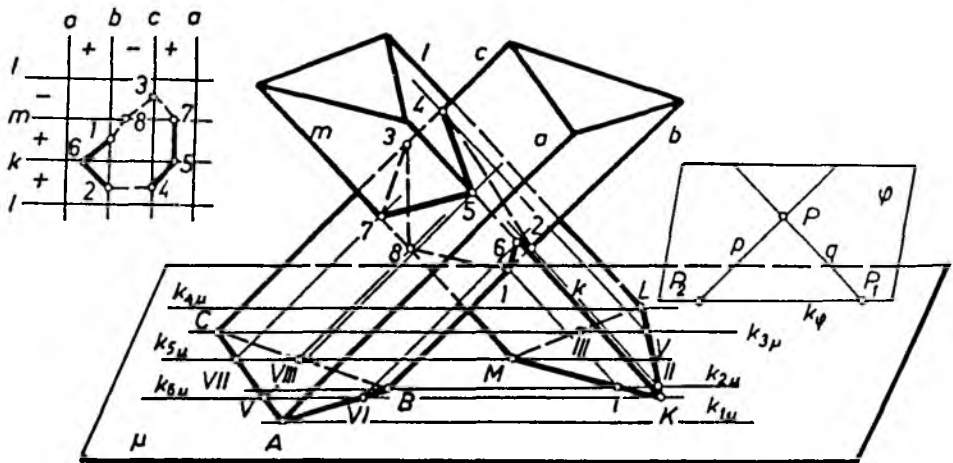
Dla wyznaczenia wierzchołków wielokąta przenikania prowadzimy pomocnicze płaszczyzny tnące przechodzące przez prostą t i kolejne krawędzie boczne graniastosłupa i ostrosłupa. Wyznaczamy na przykład punkty przebicia ostrosłupa krawędzią a graniastosłupa. W tym celu prowadzimy pomocniczą płaszczyznę tnącą α_1 przechodzącą przez krawędź a i prostą t . Krawędź $k_{1\mu} = \mu \cap \alpha_1$ przecina podstawę ostrosłupa KLM w punktach I, II, które łączymy z wierzchołkiem ostrosłupa, otrzymując krawędzie przecięcia ostrosłupa płaszczyzną. Krawędzie przekroju mają z krawędzią graniastosłupa a punkty wspólne 1 i 2, które są wierzchołkami wielokąta przenikania. W podobny sposób wyznaczamy wszystkie wierzchołki wielokąta przenikania. Stwierdzamy, że przenikanie jest niezupełne i że krawędzie b i k nie biorą udziału w przenikaniu. Wyznaczone wierzchołki wielokąta przenikania nanosimy na schematy przenikania i odpowiednio je łączymy – na schemacie, a następnie na rysunku przenikania.

Przykład 3.

Wyznaczyć linię przenikania dwóch graniastosłupów (rys. 10.24 i 10.25). Dane są dwa graniastosłupy o podstawach ABC i KLM ustawionych na rzutni poziomej. Wyznaczamy tzw. płaszczyznę kierowniczą φ , która jest równoległa do krawędzi bocznych obu graniastosłupów. W tym celu przyjmujemy w przestrzeni dowolny punkt P. przez który prowadzimy dwie proste p i q równoległe odpowiednio do krawędzi bocznych graniastosłupów. Każda płaszczyzna równoległa do φ przecinając graniastosłupy, przecina je w krawędziach równoległych do krawędzi bocznych obu graniastosłupów.

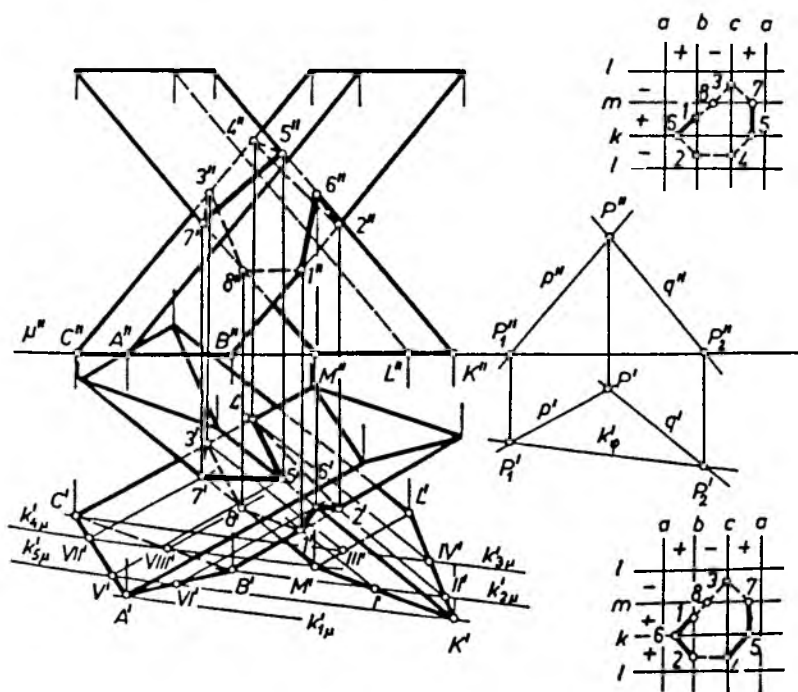


Rys. 10.23 Przenikanie ostrosłupa z graniastosłupem



Rys. 10.24. Przenikanie dwóch graniastosłupów

Dla wyznaczenia wierzchołków wielokąta przenikania prowadzimy pomocnicze płaszczyzny tnące równoległe do płaszczyzny kierowniczej, przechodzące przez kolejne krawędzie boczne graniastosłupów a, b, c i k, l, m. Wyznaczamy na przykład punkty przebicia graniastosłupa KLM krawędzią b. W tym celu prowadzimy pomocniczą płaszczyznę tnącą α_2 równoległą do płaszczyzny kierowniczej φ , przechodzącą przez krawędź b. Krawędź $k_{2\mu}$ przecina podstawę graniastosłupa KLM w punktach I i II, przez które prowadzimy krawędzie przecięcia graniastosłupa płaszczyzną α_2 , równoległe do krawędzi bocznych. Krawędzie przekroju mają z krawędzią b graniastosłupa punkty wspólne 1 i 2, które są wierzchołkami wielokąta przenikania.



Rys. 10.25. Przenikanie dwóch graniastosłupów

W podobny sposób wyznaczamy wszystkie wierzchołki wielokąta przenikania. Wyznaczone wierzchołki wielokąta przenikania nanosimy na schematy przenikania i odpowiednio je łączymy — na schemacie, a następnie na rysunku przenikania.

Rozdział XI

POWIERZCHNIE

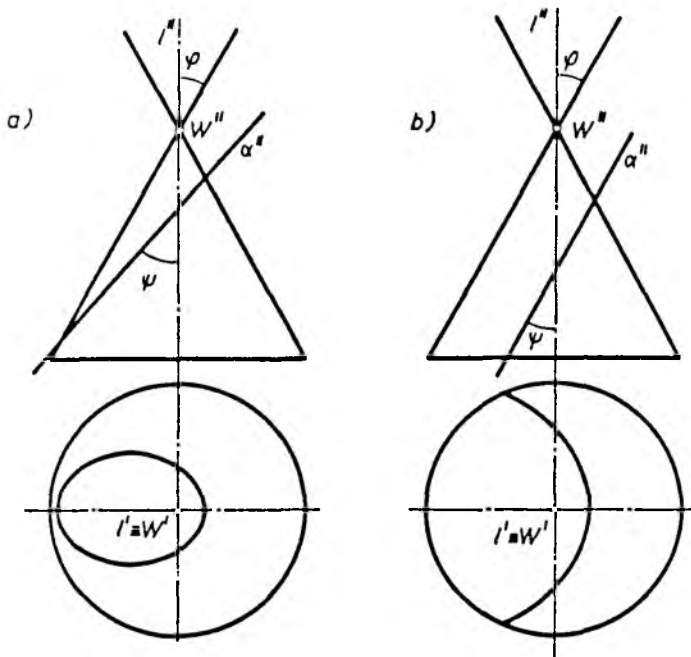
11.1. Krzywe stożkowe. Konstrukcje elipsy, paraboli i hiperboli. Rzuty okręgu

11.1.1. Krzywe stożkowe

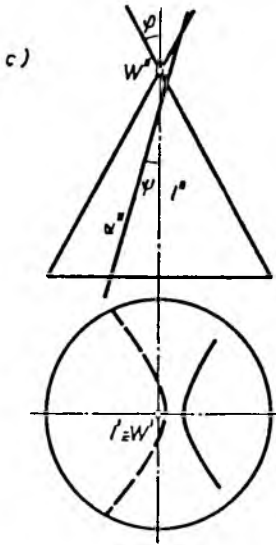
Krzywe stożkowe: elipsa, parabola i hiperbola są krzywymi stopnia drugiego. Otrzymujemy je przez wykonanie przekrojów powierzchni stożka obrotowego płaszczyznami ukośnymi nie przechodzącymi przez jego wierzchołek. Weźmy powierzchnię stożka obrotowego (rys. 11.1) o tworzących nachylonych do osi l pod kątem φ oraz płaszczyznę nachyloną do osi stożka pod kątem Ψ . Jeśli:

- $\varphi < \Psi$ – to krzywa jest elipsą,
- $\varphi = \Psi$ – krzywa jest parabolą,
- $\varphi > \Psi$ – krzywa jest hiperbolą.

Stożkowa jest określona, gdy dane są jej pięć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe.



Rys. 11.1. Tworzenie krzywych stożkowych: a) elipsy, b) paraboli

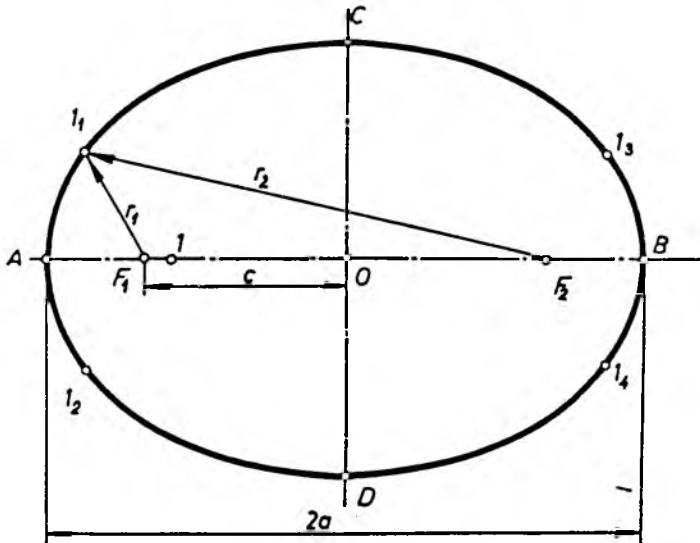


Rys. 11.1c) Tworzenie krzywej stożkowej hiperboli

11.1.2. Elipsa

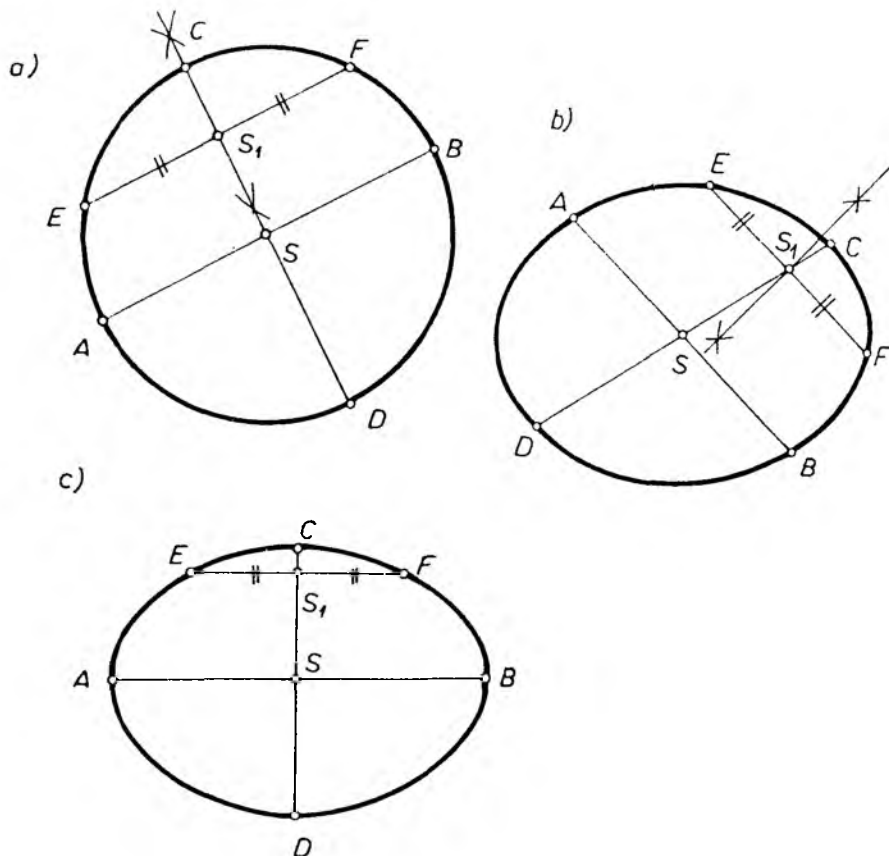
Elipsa jest miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny mających tę własność, że suma ich odległości od dwóch punktów stałych zwanych ogniskami jest wielkością stałą, równą wielkiej osi elipsy: $r_1 + r_2 = 2a$.

Konstrukcja elipsy na podstawie tej definicji jest podana i opisana na rys. 11.2.



Rys. 11.2. Konstrukcja elipsy. Dana jest oś wielka elipsy $\overline{AB}$ i ogniska F_1 i F_2 . Na ogniskowej F_1O wybieramy dowolny punkt 1 dzielący $\overline{AB}$ na dwa odcinki $A1$ i $1B$. Z ognisk F_1 i F_2 zataczamy po 2 łuki o promieniach $r_1 = \overline{A1}$ i $r_2 = \overline{AB}$. W przecięciu łuków znajdujemy punkty $1_1, 1_2, 1_3, 1_4$, które należą do konstruowanej elipsy

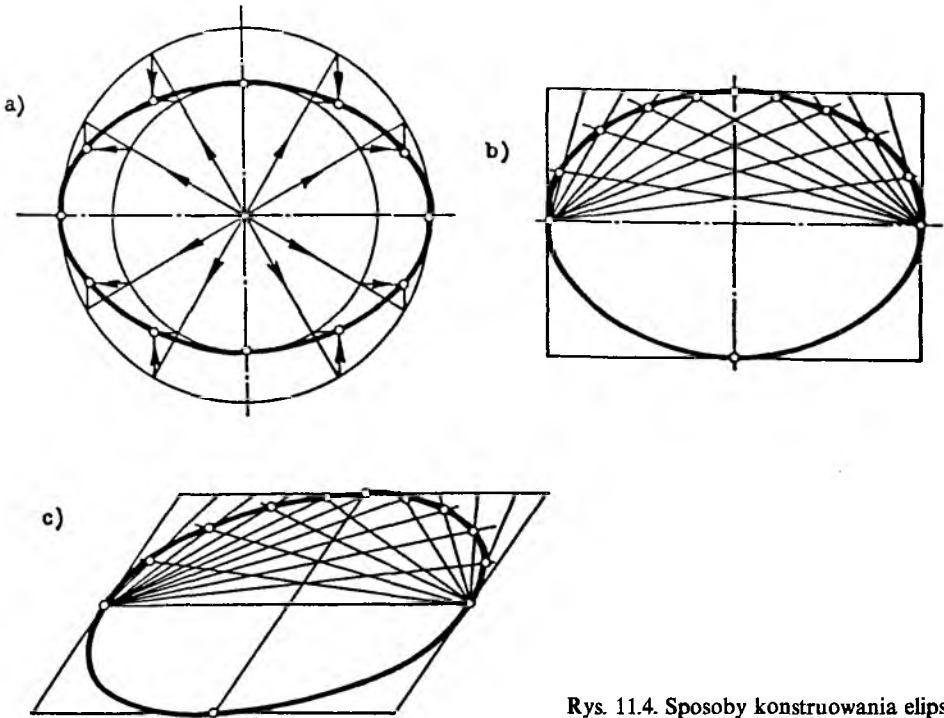
Elipsa jest określona, gdy dane są jej średnice sprzężone lub jej osie. Wyznaczenie średnic sprzężonych elipsy, podobnie jak średnic sprzężonych okręgu wykonujemy następująco (rys. 11.3): prowadzimy dowolną średnicę AB okręgu i do niej równoległą cięciwę; przez środek cięciwy S_1 i środek okręgu S przechodzi średnica sprzężona z daną średnicą AB .



Rys. 11.3. Wyznaczanie średnic sprzężonych elipsy

Średnice okręgu są do siebie prostopadłe. Podobnie wyznaczamy AB i CD średnice sprzężone elipsy, które nie są na ogół do siebie prostopadłe. Jedyną parą średnic sprzężonych elipsy do siebie prostopadłych są jej osie.

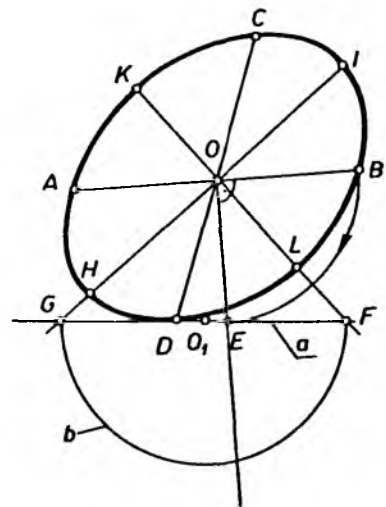
Powyższe zależności wynikają z twierdzenia, że każdą elipsę możemy uważać za rzut równoległy okręgu, a jej średnice sprzężone są rzutami równoległymi średnic sprzężonych okręgu. Równoległobok – o bokach równoległych do średnic sprzężonych – opisany na elipsie jest rzutem kwadratu opisanego na okręgu i o bokach równoległych do średnic sprzężonych okręgu, których rzutami równoległymi są średnice sprzężone elipsy. Z powyższych zależności wynikają konstrukcje elipsy pokazane na rysunku 11.4.



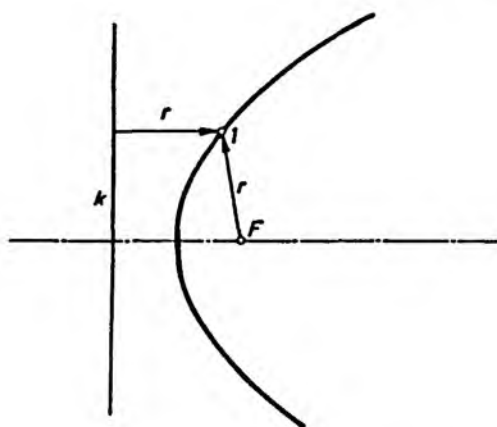
Rys. 11.4. Sposoby konstruowania elips

Średnice sprzężone elipsy określają ją w sposób jednoznaczny. Konstrukcję (wraz z opisem) osi elipsy, gdy są dane jej średnice sprzężone, podano na rys. 11.5.

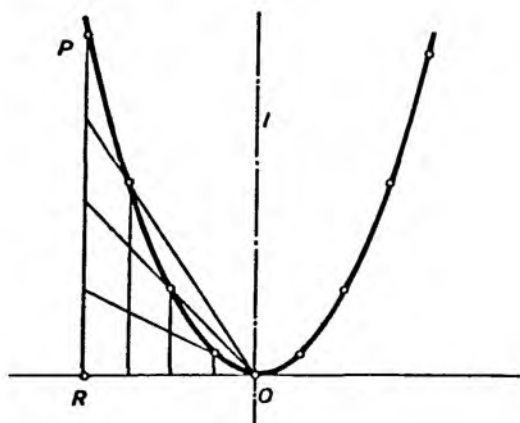
Kolejność konstrukcji: wystawiamy z O prostopadłą do AB i odkładamy na niej odcinek $OE = OB$; przez punkty E i D prowadzimy prostą a ; dzielimy odcinek ED na połowy i ze środka O_1 zakreślamy promieniem OO_1 łuk b . Łuk ten przecina prostą a w punktach F i G , przez które przechodzą osie elipsy HJ i KL .



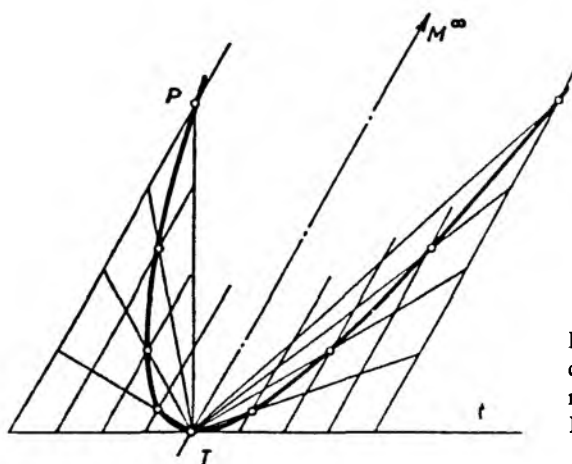
Rys. 11.5. Wyznaczanie kierunków osi elipsy, jeśli dane są średnice sprzężone AB i CD .



Rys. 11.6. Parabola



Rys. 10.7.a) Konstrukcyjne wyznaczanie paraboli — dane są: punkt P , wierzchołek O i oś l (OR i RP dzielimy na równe odcinki)



Rys. 11.7.b) Konstrukcyjne wyznaczanie paraboli — dane są punkt niewłaściwy M^{∞} i punkty właściwe P i T oraz styczna t w punkcie T

11.1.3. Parabola

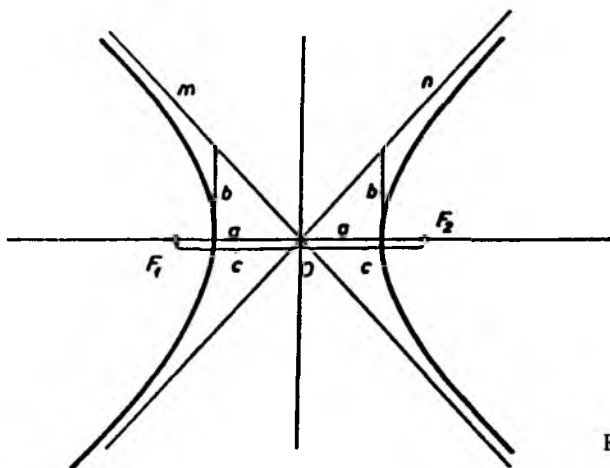
Parabolą o ognisku F i kierownicy k nazywamy krzywą stopnia drugiego, której punkty są równo oddalone od ogniska i kierownicy k (rys. 11.6).

Dany jest wierzchołek paraboli O , jej oś i dowolny punkt. Punkty paraboli wyznaczamy jak na rys. 11.7a – odcinki $\overline{PR}$ i $\overline{RO}$ dzielimy na jednakowe ilości odcinków równej długości.

Podobnie wyznaczamy punkty paraboli, gdy dany jest punkt niewłaściwy M^∞ paraboli, dwa punkty paraboli P, T oraz styczna t w punkcie T (rys. 11.7b).

11.1.4. Hiperbola

Hiperbolą o ogniskach F_1, F_2 i osiach a, b nazywamy krzywą stopnia drugiego, której punkty spełniają warunek: różnica odległości punktów od obu ognisk jest wielkością stałą równą $2a$ (rys. 11.8).



Rys. 11.8. Hiperbola

Na rys. 11.9 konstrukcja określa hiperbolę, jeśli dane są jej asymptoty m i n oraz punkt A . Przez punkt A prowadzimy dowolną prostą. Odcinek tej prostej zawarty pomiędzy punktem A i asymptotą n jest równy odcinkowi zawartemu między drugim punktem B hiperboli i drugą asymptotą. W oparciu o tę zależność wyznaczamy dalsze punkty $C, D, E...$

Opisane w od 11.1.1 do 11.1.4 krzywe stożkowe można zdefiniować i w inny sposób.

Mianowicie krzywą stożkową nazywamy zbiór wszystkich punktów X płaszczyzny, których odległość od punktu F (ogniska) i odległość od prostej k (kierownicy) nie przechodzącej przez F spełnia relację

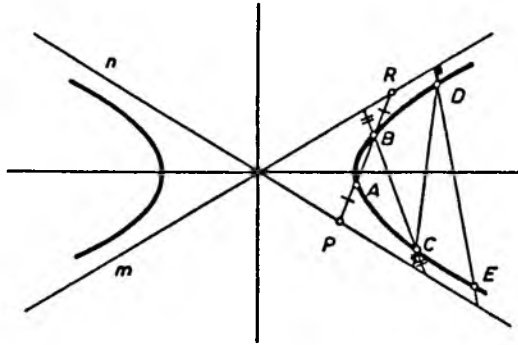
$$\rho(X, F) = \lambda \cdot \rho(X, k),$$

gdzie λ jest obraną liczbą dodatnią. Gdy:

$\lambda < 1$ krzywa nazywa się elipsą,

$\lambda = 1$ parabolą,

$\lambda > 1$ hiperbolą.



Rys. 11.9. Konstrukcyjne wyznaczanie hiperboli — dane są asymptoty m , n i dowolny punkt A

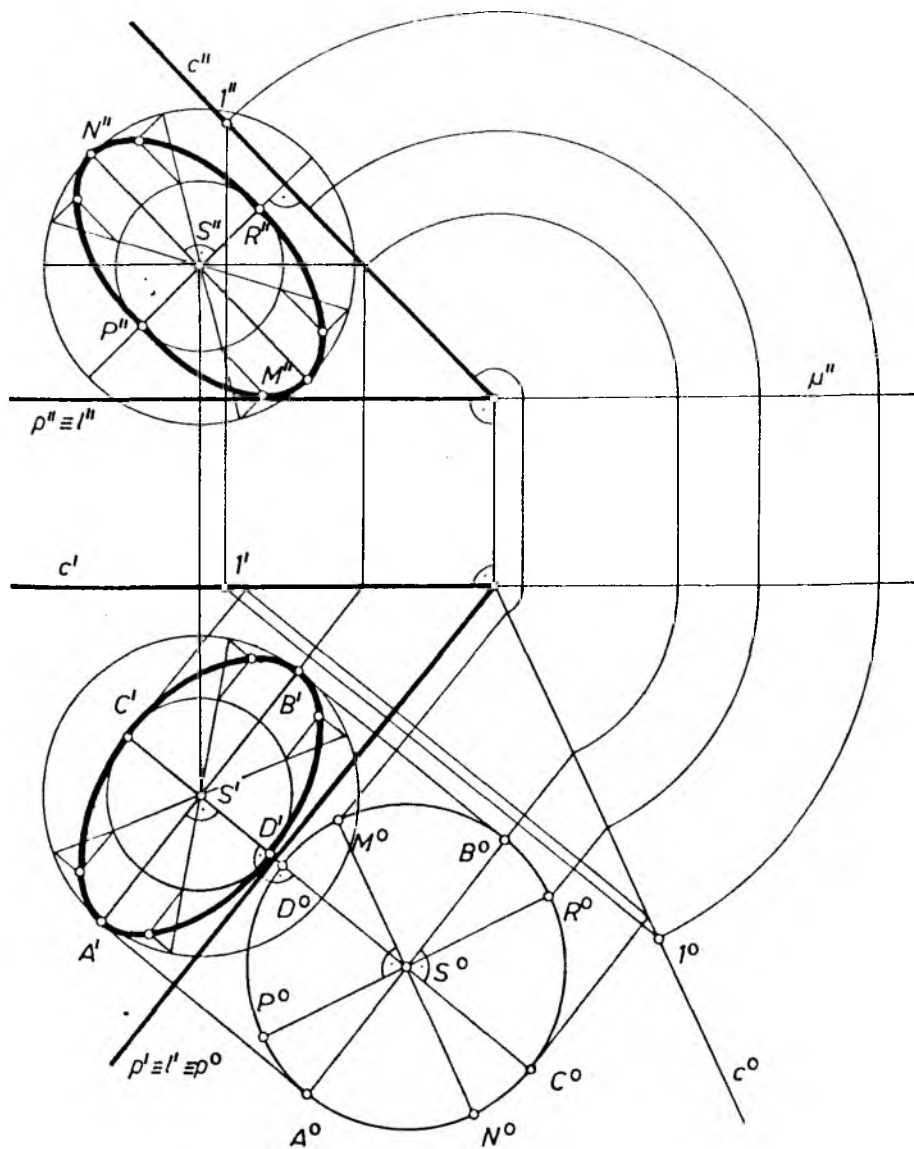
11.1.5. Rzuty okręgu

Jak wiadomo z punktu 11.1.2 każdą elipsę możemy uważać za rzut równoległy okręgu. W dalszej nauce geometrii wykreślnej, a w szczególności przy wyznaczaniu przekrojów kuli, walca obrotowego i stożka obrotowego, ważną rzeczą jest umiejętność wyznaczania rzutów okręgu. W tym celu wykonamy następującą konstrukcję.

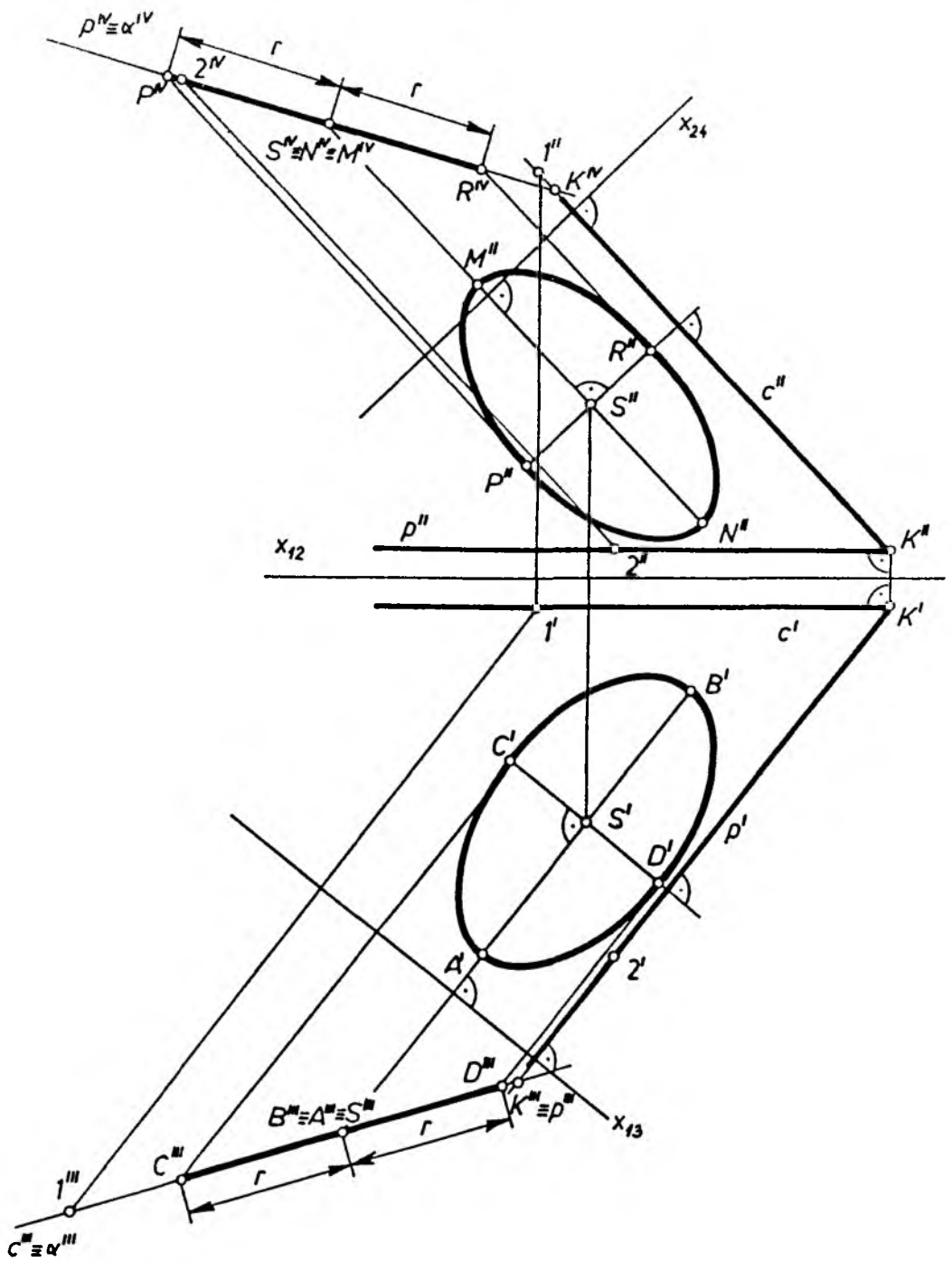
Narysować rzuty okręgu k o danym środku $S(S^I, S^{II})$ i promieniu r , leżącego na płaszczyźnie dowolnej $\alpha = pc$ (rys. 11.10).

Wykonujemy kład płaszczyzny α na płaszczyznę poziomą μ i wyznaczamy kład S° punktu S . Zakreślony z punktu S° okrąg k° o promieniu r jest kładem danego okręgu k . Parze średnic sprzężonych $A^\circ B^\circ$ i $C^\circ D^\circ$ okręgu k° odpowiada w rzucie poziomym para osi $\overline{A^I B^I}$ i $\overline{C^I D^I}$ elipsy k^I . Punkt C^I wyznaczamy korzystając z powinowactwa. W rzucie pionowym wyznaczamy osie elipsy k^{II} . W tym celu przyjmujemy w kładzie taką nową parę średnic sprzężonych $M^\circ N^\circ$ i $P^\circ R^\circ$ okręgu k° aby ich rzuty pionowe były osiami $\overline{M^{II} N^{II}}$ i $\overline{P^{II} R^{II}}$ elipsy k^I . Przyjęto więc $M^\circ N^\circ \parallel c^\circ$ i $P^\circ R^\circ \perp c^\circ$.

Inny sposób rozwiązania jest podany na rys. 11.11. W tym przypadku posłużyliśmy się dwukrotnie transformacją układu odniesienia.



Rys. 11.10. Rzuty okręgu

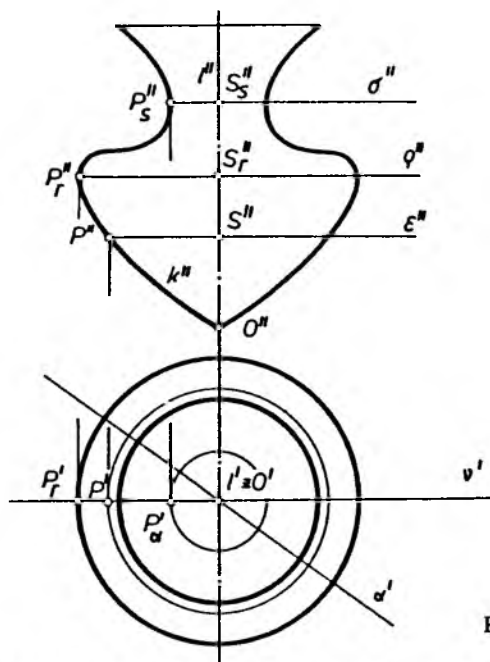


Rys. 11.11. Rzuty okręgu

11.2. Powierzchnie obrotowe

11.2.1. Tworzenie powierzchni obrotowych

W układzie odniesienia przyjmujemy pionową oś l , przez którą prowadzimy czołową płaszczyznę v , oraz przyjmujemy dowolną krzywą k leżącą w płaszczyźnie v (rys. 11.12).



Rys. 11.12. Tworzenie powierzchni obrotowych

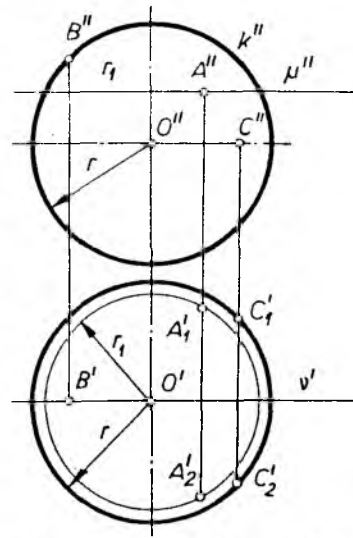
Następnie dokonujemy obrotu krzywej k dookoła osi l o kąt pełny 360° . Każdy punkt P krzywej k zakreśli na płaszczyźnie obrotu okrąg o środku S leżącym na osi l . Krzywa k zakreśli powierzchnię obrotową.

Okręgi zakreślone przez punkty P nazywamy równoleżnikami powierzchni obrotowej. Równoleżnik największy o promieniu r , zakreślony przez punkt P_r , nazywamy równikiem, a najmniejszy o promieniu r_s , zakreślony przez punkt P_s , nazywamy okręgiem szyjnym. Punkt O , w którym krzywa k przecina oś nazywamy biegunem. Krzywą k nazywamy tworzącą powierzchni obrotowej. Każda płaszczyzna przechodząca przez oś l przecina powierzchnię obrotową w jej południku. Wszystkie południki są przystające. Południk leżący w płaszczyźnie czołowej jest południkiem głównym oraz jest południkiem konturowym na rzutni pionowej.

11.2.2. Powierzchnia kuli

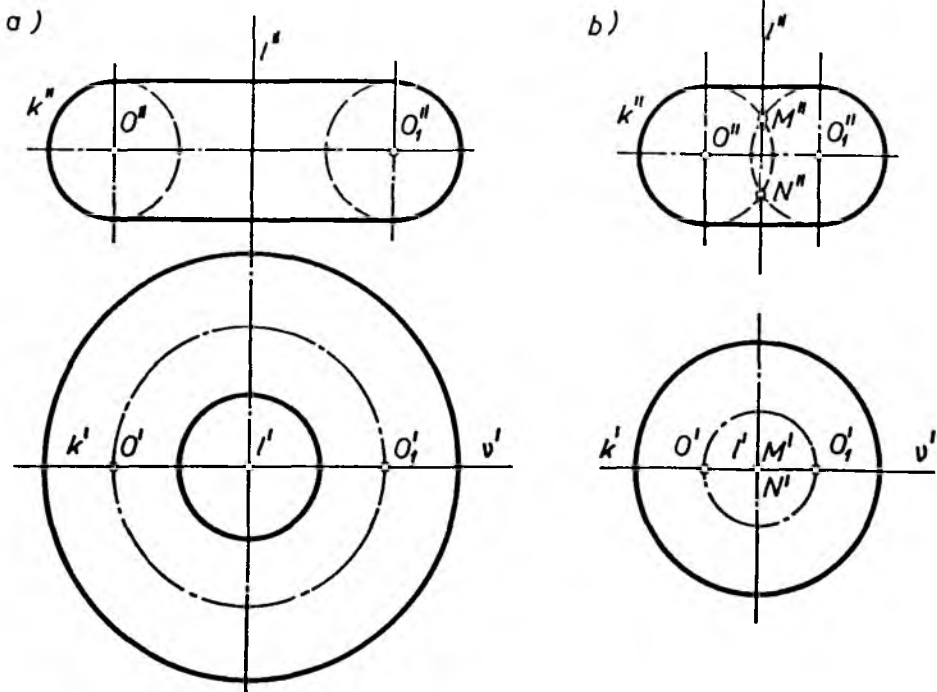
W układzie odniesienia przyjmujemy pionową oś l , przez którą prowadzimy czołową płaszczyznę v , oraz przyjmujemy w tej płaszczyźnie okrąg k o śro-

dku 0 leżącym na osi l . Przez obrót okręgu k dookoła osi l o kąt 180° otrzymujemy powierzchnię kuli. Oba rzuty powierzchni kuli są okręgami o promieniu r . Rzuty punktu leżącego na powierzchni kuli określamy, wyznaczając rzuty równoleżnika przechodzącego przez ten punkt. Dla przykładu wyznaczamy rzuty dowolnego punktu $A(A^I, A^{II})$ i dalších punktów $B, C, \dots$ (rys. 11.13). Każdemu punktowi kuli na rzucie pionowym odpowiadają rzuty poziome dwóch różnych punktów.

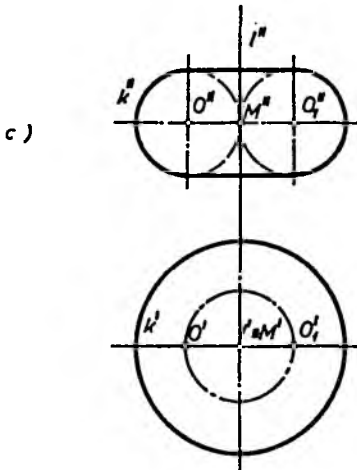


Rys. 11.13. Rzuty powierzchni kuli

11.2.3. Powierzchnia pierścieniowa (torus)



Rys. 11.14. Torus: a) zwykły, b) dwubiegunowy



Rys. 11.14. Torus c) jednobiegunowy

Powierzchnią pierścieniową albo torusem nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót okręgu dookoła osi leżącej na płaszczyźnie tego okręgu, nie przechodzącej przez jego środek. Wyróżniamy trzy rodzaje powierzchni pierścieniowych (rys. 11.14).

11.3. Przekroje powierzchni kuli

Każda płaszczyzna sieczna przecina powierzchnię kuli w okręgu. Przekroje powierzchni kuli płaszczyzną przedstawimy na przykładach.

Przykład 1.

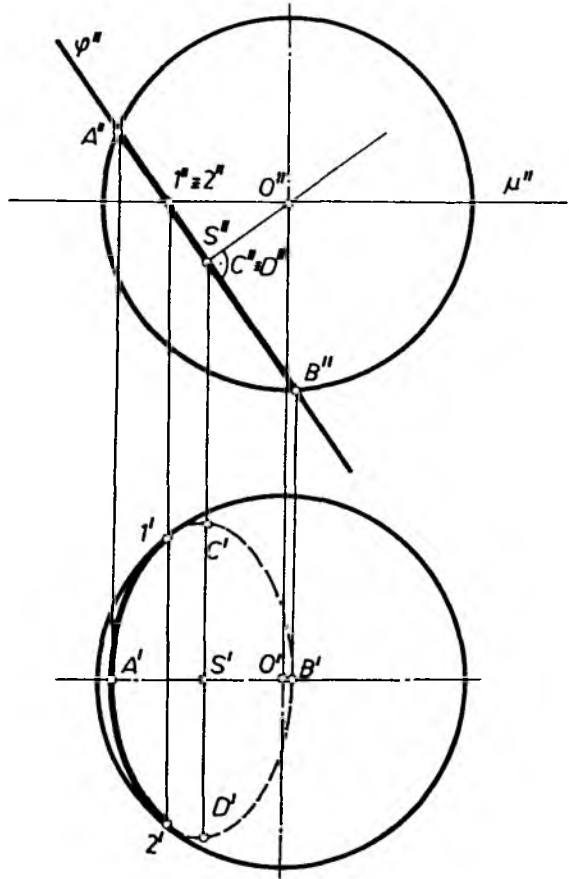
Wyznaczyć przekrój powierzchni kuli płaszczyzną φ pionowo-rzutującą. Płaszczyzna φ przecina powierzchnię kuli w okręgu, którego rzut poziomy jest elipsą (rys. 11.15).

Przykład 2.

Wyznaczyć przekrój kuli płaszczyzną dowolną $\alpha = pc$. Na rys. 11.16 podano przykładowe rozwiązanie przy pomocy transformacji układu odniesienia.

Płaszczyznę α sprowadzamy do położenia rzutującego wprowadzając $\pi_3 \perp p$. Na trzecim rzucie określono najpierw rzut transformowany powierzchni kuli i płaszczyzny. W ich przecięciu otrzymano rzut (na π_3) okręgu przekroju. Na podstawie tego rzutu określamy rzut poziomy okręgu, tj. elipsę. Do konstrukcji wystarczy nam określić osie $\overline{A^I B^I}$ i $\overline{C^I D^I}$ tej elipsy. W rzucie pionowym $\overline{A^{II} B^{II}}$ i $\overline{C^{II} D^{II}}$ są średnicami sprzężonymi i mogą posłużyć do określenia elipsy na π_2 . Następnie określamy widoczność. W tym celu wprowadzamy płaszczyznę poziomą μ i pionową ν , które dzielą kulę na części widoczne i niewidoczne. Krawędź $p_1 = \mu \cap \alpha$, która jest prostą poziomą, przecina na rzucie poziomym rzut okręgu przekroju w punktach 2^I i 3^I , dzieląc go tym samym na część widoczną

i niewidoczną. Która z nich jest widoczną, ustalamy poznanymi wcześniej metodami. Kolejno ustalamy widoczność powierzchni kuli względem płaszczyzny α .

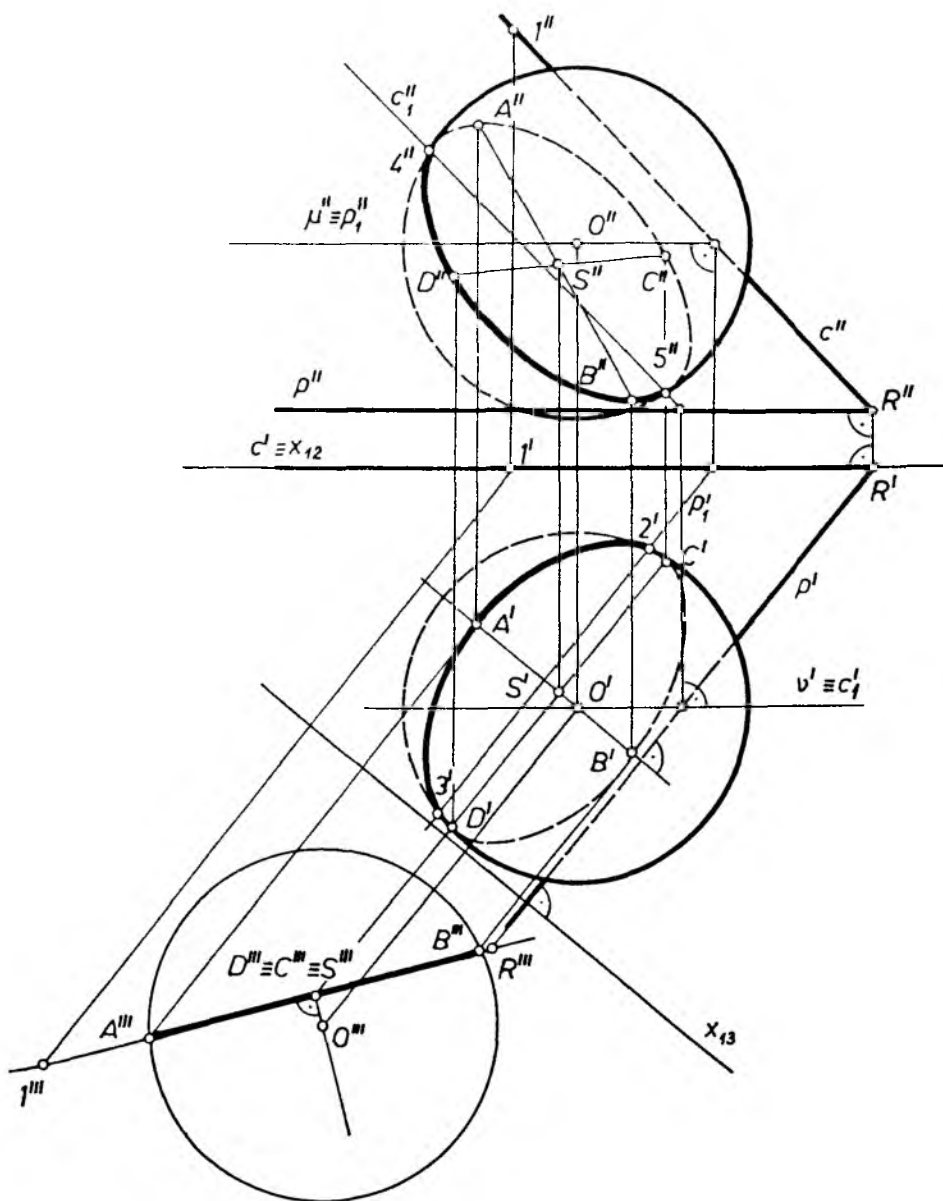


Rys. 11.15. Przekrój kuli płaszczyzną pionowo-rzutuującą

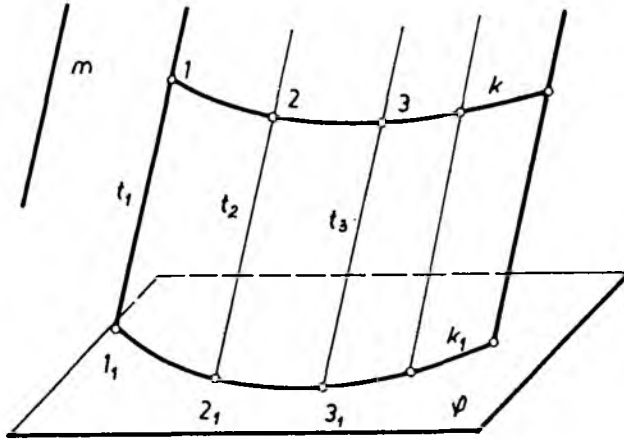
11.4. Powierzchnia walcowa. Przekroje i rozwinięcia powierzchni walcowej

11.4.1. Tworzenie powierzchni walcowej

Dana jest dowolna krzywa k i dowolna prosta m (rysunek 11.17). Przez punkty $1, 2, 3, \dots$ krzywej k prowadzimy proste $t_1, t_2, t_3, \dots$ równoległe do danej prostej m . Zbiór tych prostych tworzy powierzchnię walcową. Krzywą k nazywamy kierownicą, a poprowadzone proste równoległe tworzącymi powierzchni walcowej. Płaszczyzna φ nierównoległa do tworzącej powierzchni walcowej przecina je odpowiednio w punktach $1, 2, 3, \dots$ których zbiór tworzy krzywą k_1 zwaną przekrojem powierzchni walcowej. Przekrój powierzchni walcowej płaszczyzną prostopadłą do jej tworzących nazywamy przekrojem normalnym.



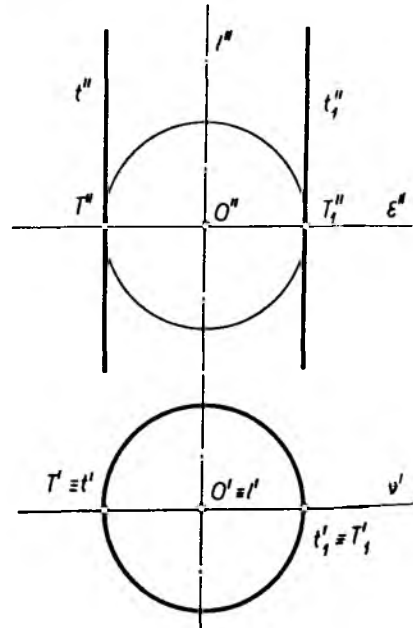
Rys. 11.16. Przekrój kuli płaszczyzną dowolną $\alpha = pc$



Rys. 11.17. Tworzenie powierzchni walcowej

11.4.2. Powierzchnia walcowa obrotowa

W układzie odniesienia przyjmujemy pionową oś l , przez którą prowadzimy czołową płaszczyznę v . W płaszczyźnie v przyjmujemy okrąg k , o środku O leżącym na osi oraz prostą t równoległą do osi l , styczną do okręgu k w punkcie T . Układ ten obracamy dookoła osi l o kąt 360° . Prosta zakresli powierzchnię walcową obrotową; okrąg k zakresli powierzchnię kuli styczną do powierzchni walcowej obrotowej (rys. 11.18). W przekroju, leżącym w płaszczyźnie ε prostopadłej do osi l , powierzchni walcowej jest okrąg.

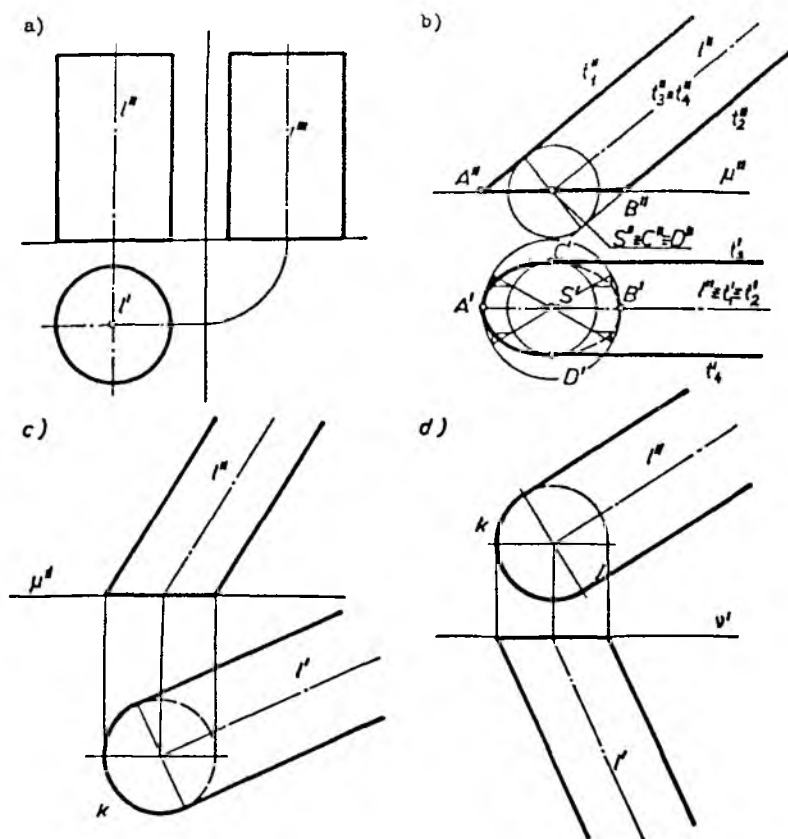


Rys. 11.18. Tworzenie powierzchni walcowej obrotowej

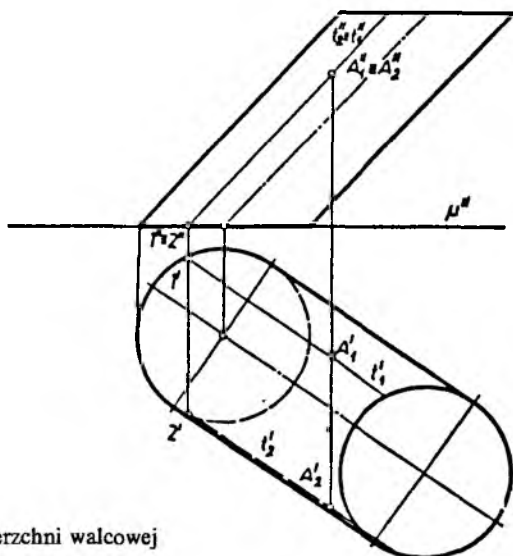
11.4.3. Rzuty powierzchni walcowej

Na rys. 11.19a, pokazano rzuty walca obrotowego w układzie trzech rzutni. Na rys. 11.19b, przedstawiono rzuty walca obrotowego o osi czołowej.

Z kolei rys. 11.19c i d przedstawiają powierzchnie walcowe eliptyczne, których kierownicą jest okrąg k leżący na płaszczyźnie poziomej μ lub pionowej v .



Rys. 11.19. Rzuty powierzchni walcowych: a) walca obrotowego w układzie trzech rzutni; b) walca obrotowego o osi czołowej; c) walca eliptycznego — kierownica (okrąg) leży na płaszczyźnie poziomej; d) walca eliptycznego — kierownica leży na płaszczyźnie pionowej



Rys. 11.20. Punkt na powierzchni walcowej

11.4.4. Punkt na powierzchni walcowej

Punkt leży na powierzchni walcowej, jeśli leży na tworzącej tej powierzchni.

Przez dany rzut pionowy punktu A_1 prowadzimy tworzącą t_1^{II} do przecięcia się z kierownicą k^{II} w punkcie 1^{II} . Prosta odnosząca poprowadzona z punktu 1^{II} przecina kierownicę k^I w punktach 1^I i 2^I . Zadanie ma więc dwa rozwiązania – rysunek 11.20.

11.4.5. Przekroje i rozwinięcia powierzchni walcowych

Jeśli kierownicą powierzchni walcowej obierzemy okrąg lub elipsę, to w przekroju otrzymamy elipsę, a w szczególnym przypadku okrąg.

Do konstrukcji elipsy otrzymanej w przekroju powierzchni walcowej wystarczy 5 dowolnych punktów przecięcia tworzących powierzchni walcowej i płaszczyzny przekroju. Staramy się jednak wybierać takie tworzące powierzchni walcowej, które pozwolą wyznaczyć w przecięciu z płaszczyzną przekroju końce osi elipsy, bądź średnic sprzężonych. Wystarczą nam wtedy do konstrukcji (przedstawionych wcześniej na rys. 11.4) 4 punkty. Bez korzystania z konstrukcji z rys. 11.4 możemy kolejne punkty krzywej wyznaczyć podobnie jak pierwsze cztery, jako punkty przebicia płaszczyzny przekroju kolejnymi tworzącymi. Omówimy kilka przykładów.

Przykład 1.

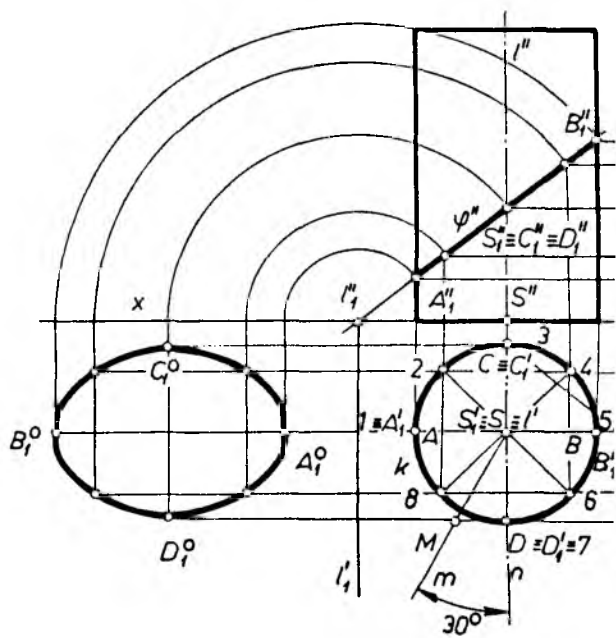
Wyznaczyć przekrój powierzchni walcowej obrotowej o osi pionowej i płaszczyzną pionowo-rzutującą φ . Znaleźć rzeczywistą wielkość przekroju oraz wyznaczyć rozwinięcie powierzchni walca z zaznaczeniem linii przekroju.

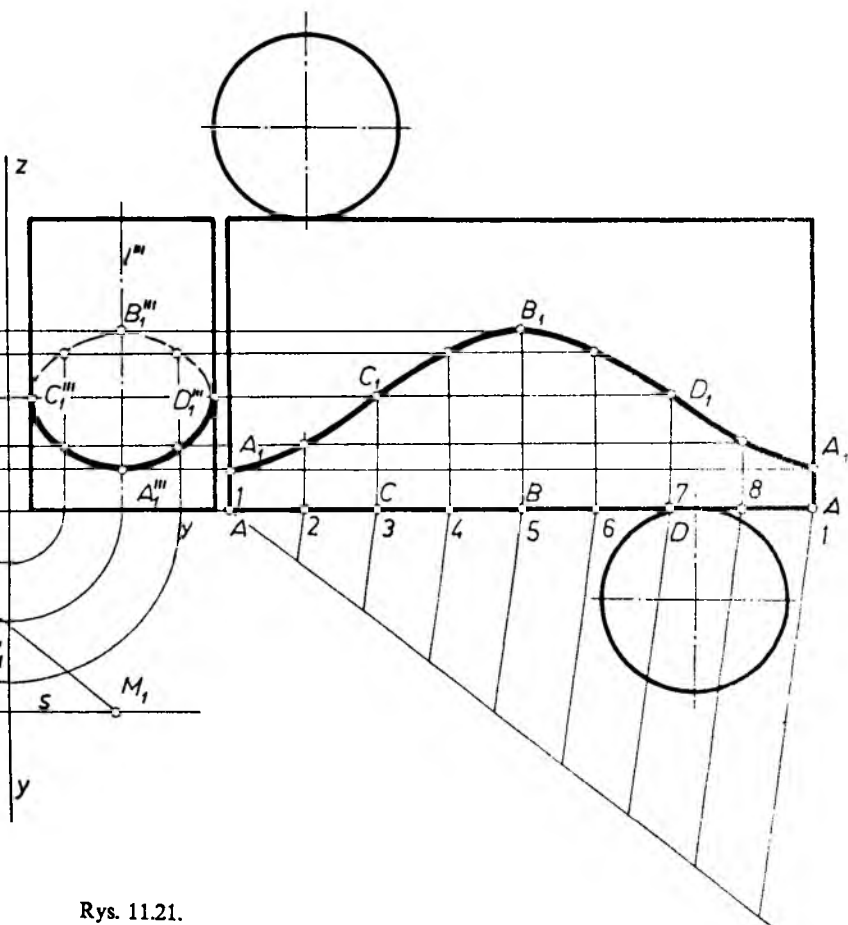
Rozwiązanie podano na rys. 11.21. Naturalną wielkość przekroju, którego rzut pionowy jest odcinkiem, poziomy okręgiem, a boczny elipsą, określono wykonując kład płaszczyzny przekroju dookoła prostej celowej $l = h\varphi = \pi_1 \cap \varphi$.

Rozwinięcie walca obrotowego jest prostokątem o długości równej obwodowi podstawy (koła) $2\pi r$ i wysokości równej wysokości walca. Długość rozwinięcia na rysunku wyznaczono konstrukcyjnie w następujący sposób. W płaszczyźnie podstawy przez środek okręgu k poprowadzono prostą m pod kątem 30° do osi n oraz styczną s do okręgu k w punkcie $P = k \cap n$. Z punktu przecięcia $M = s \cap m$ na prostej s w kierunku punktu P odmierzone odcinek MM_1 o długości $3r$.

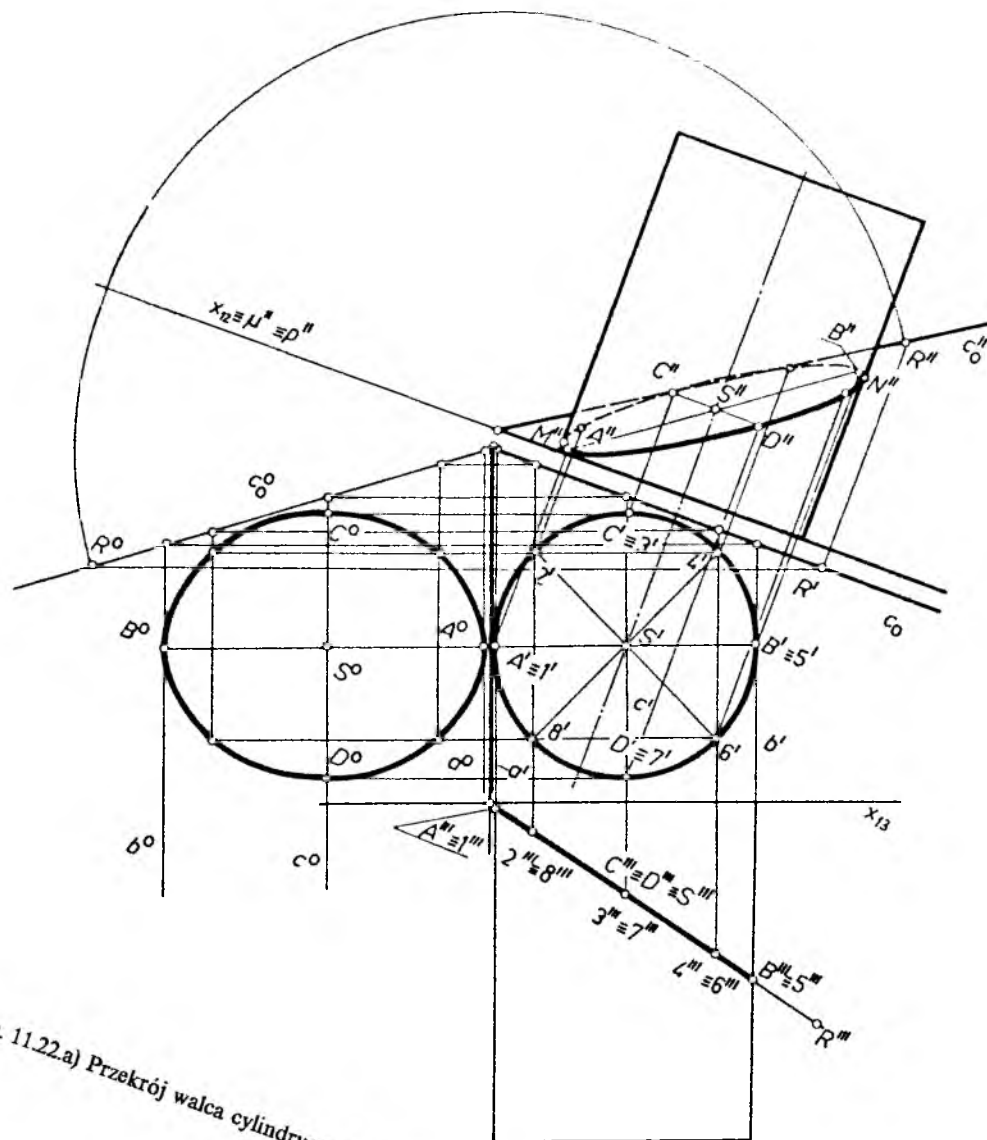
Ponieważ długość $\overline{CM_1} \approx \pi r$, podwojona długość odcinka $\overline{CM_1}$ będzie długością rozwinięcia.

Punkty przekroju przenosimy na rozwinięcie w następujący sposób: obwód okręgu i długość rozwinięcia dzielimy na jednakową ilość części, przykładowo na 8 – do podziału odcinka zastosowano twierdzenie Talesa. Na każdej z tworzących przechodzących przez punkty wyznaczone na drodze podziału 1,2,3,...8, odmierzone względem płaszczyzny podstawy wysokość odpowiedniego punktu





Rys. 11.21.



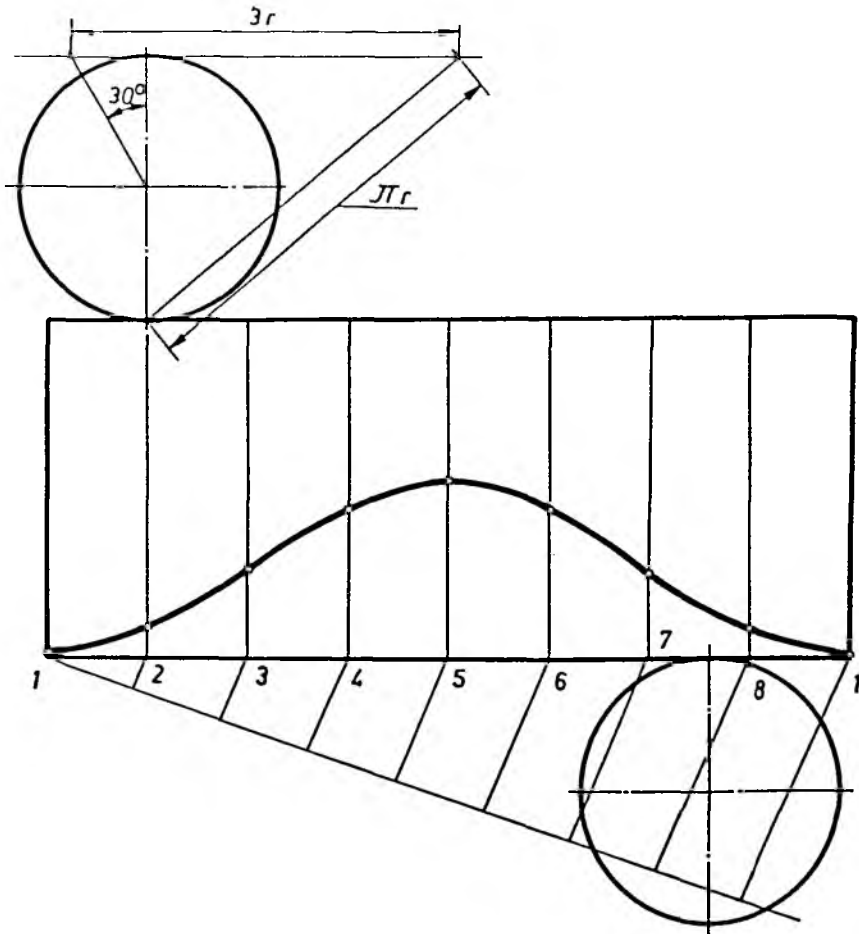
Rys. 11.22.a) Przekrój walca cylindrycznego płaszczyzną dowolną $\alpha = pc$

przekroju (najlepiej na rzucie pionowym) i przeniesiono ją na odpowiednią tworzącą zaznaczoną na rozwinięciu. W ten sposób wyznaczone punkty połączono krzywą i otrzymano na rozwinięciu linię przekroju.

Przykład 2.

Wyznaczyć przekrój powierzchni walcowej obrotowej o osi pionowej i płaszczyzną dowolną $\varphi = \text{pc}$, znaleźć rzeczywistą wielkość przekroju oraz wyznaczyć rozwinięcie powierzchni walca z zaznaczeniem linii przekroju. Rozwiązanie podano na rys. 11.22.

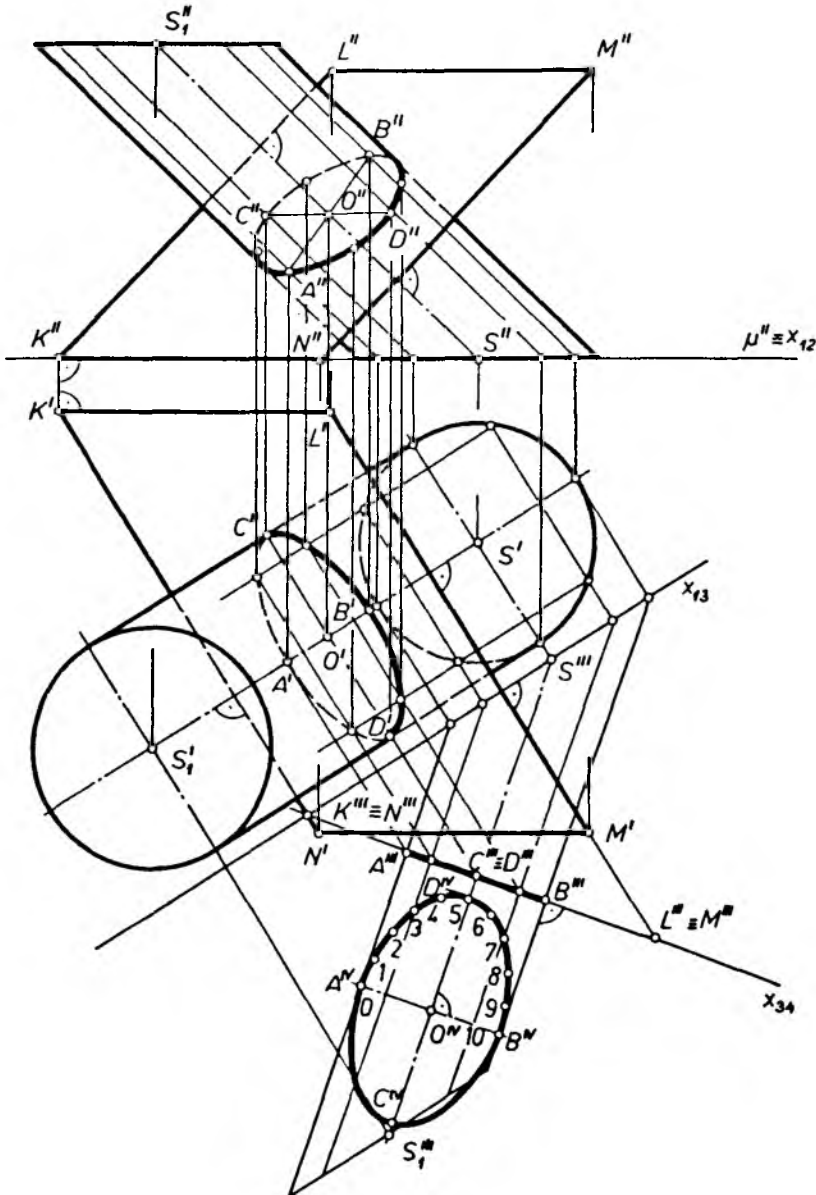
Przy pomocy transformacji układu odniesienia płaszczyznę przekroju sprowadzono w położenie rzutujące. Dalszy przebieg rozwiązania analogicznie jak w poprzednim przykładzie.



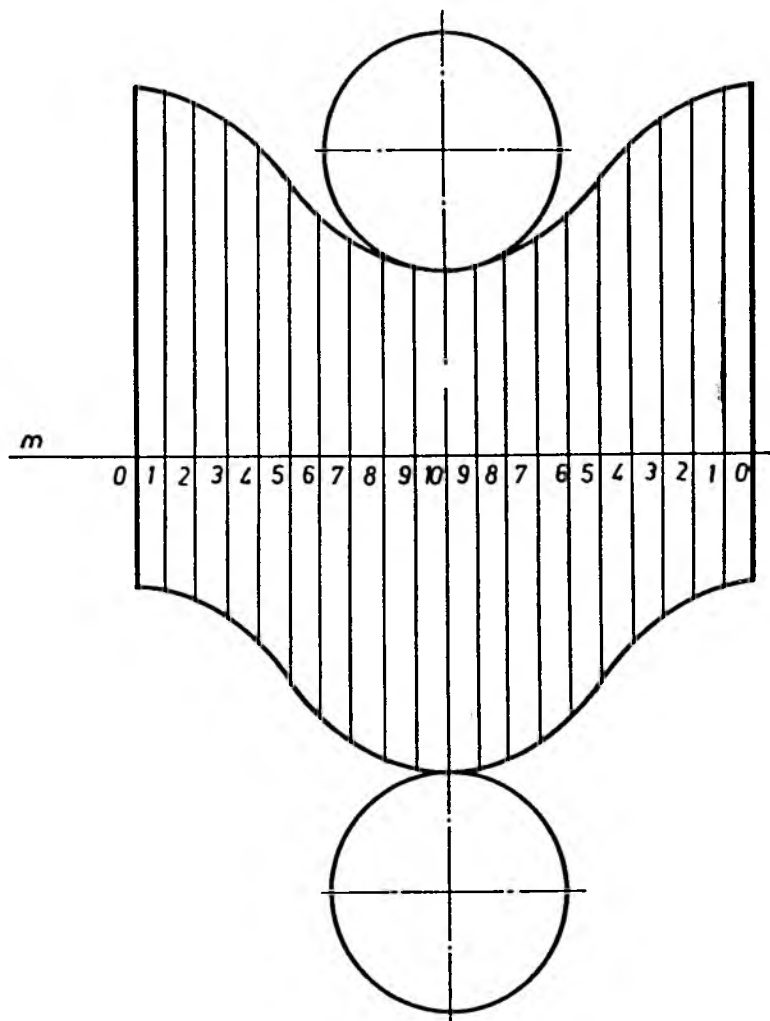
Rys. 11.22b. Rozwinięcie walca cylindrycznego z zaznaczeniem linii przekroju

Przykład 3.

Wyznaczyć przekrój normalnej powierzchni walcowej eliptycznej o kierownicy kołowej leżącej na płaszczyźnie poziomej, płaszczyzną $\varphi = KLMN$. Znaleźć rzeczywistą wielkość przekroju oraz wyznaczyć rozwinięcie powierzchni walca z zaznaczeniem linii przekroju. Rozwiązanie podano na rys. 11.23.



Rys. 11.23a) Przekrój normalny walca eliptycznego



Rys. 11.23b) Rozwinięcie walca eliptycznego

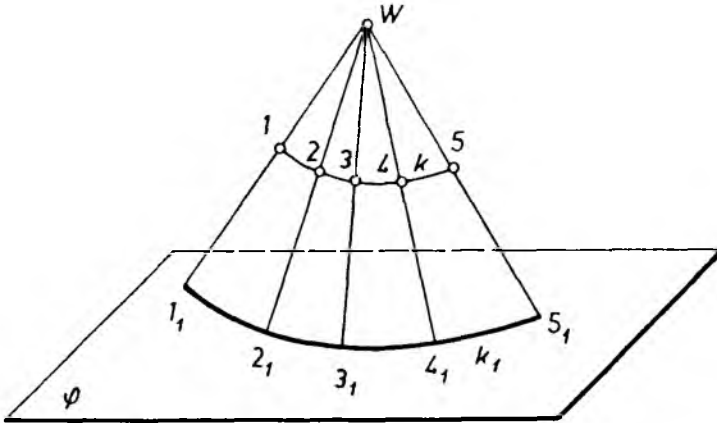
Najpierw wyznaczamy płaszczyznę normalną (prostopadłą do osi walca) określoną równoległobokiem KLMN. Przez transformację układu odniesienia płaszczyznę φ sprowadzamy w położenie rzutujące i wyznaczamy na wszystkich rzutniach rzuty przekroju. Następnie stosując transformację wyznaczamy naturalną wielkość przekroju. Przekrój dzielimy na wiele części punktami 1^{IV} , 2^{IV} , 3^{IV} (przykładowo 20 – na rysunku połowę przekroju podzielono na 10 części), a następnie rozwijamy obwód przekroju odmierzając na prostej m kolejno odcinki 12, 23, 34 ... Przez zaznaczone punkty 1,2,3... prostopadłe do prostej m prowadzimy tworzące i zaznaczamy na nich końce odcinków tworzących,

odmierzając długości odpowiednich odcinków (na trzecim rzucie), na jakie podzieliła tworzące płaszczyzna przekroju. Tak zaznaczone punkty łączymy krzywą i otrzymujemy rozwinięcie powierzchni bocznej walca. Po uzupełnieniu tego rozwinięcia o 2 koła o promieniu r równemu promieniowi podstawy otrzymujemy, rozwinięcie powierzchni całej bryły.

11.5. Powierzchnia stożkowa. Przekroje i rozwinięcia powierzchni stożkowej

11.5.1. Tworzenie powierzchni stożkowej

Dana jest dowolna krzywa k i punkt W . Przez punkty 1,2,3... krzywej k i punkt W prowadzimy proste $t_1, t_2, t_3...$. Zbiór tych prostych tworzy powierzchnię stożkową.



Rys. 11.24. Tworzenie powierzchni stożkowej

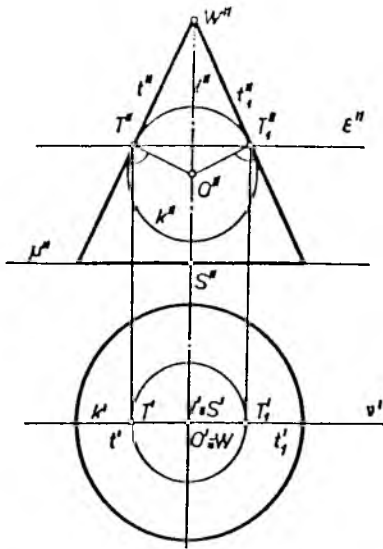
Krzywa k jest kierownicą, punkt W wierzchołkiem, a poprowadzone proste $t_1, t_2...$ są tworzącymi powierzchni stożkowej. Płaszczyzna φ nie przechodząca przez wierzchołek W powierzchni stożkowej przecina tworzące odpowiednio w punktach 1,2,3... , których zbiór tworzy krzywą k_1 , zwaną przekrojem powierzchni stożkowej (rys. 11.24).

11.5.2. Powierzchnia stożkowa obrotowa

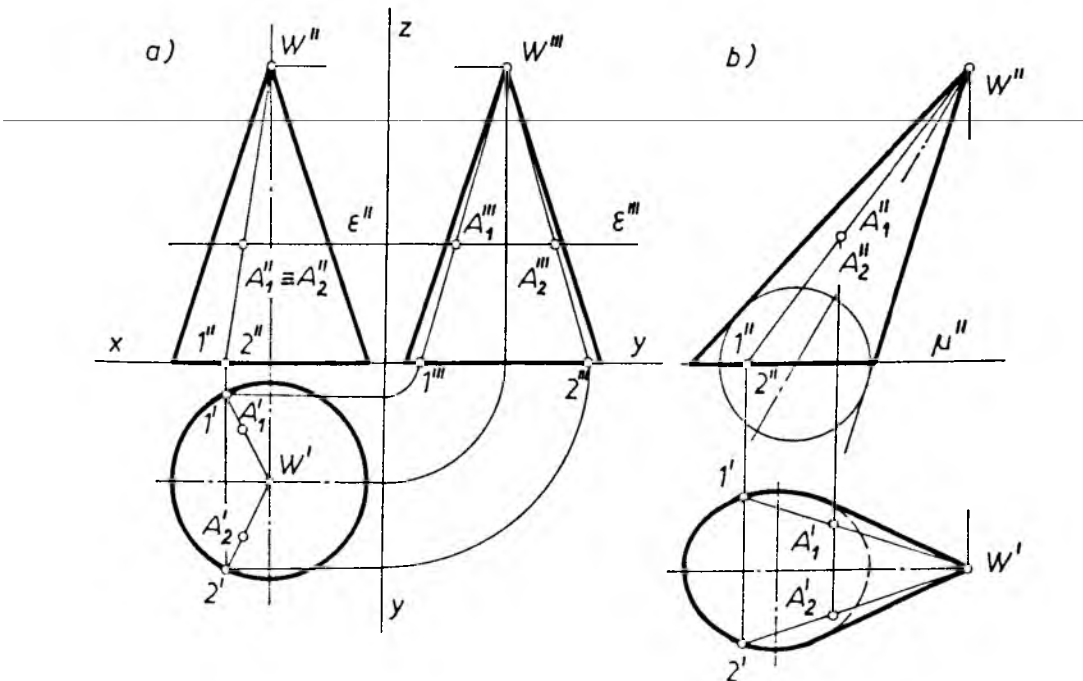
W układzie odniesienia (rys. 11.25) przyjmujemy pionową oś l , przez którą prowadzimy czołową płaszczyznę v . W płaszczyźnie v przyjmujemy okrąg k , o środku O leżącym na osi; przyjmujemy punkt W leżący na osi l oraz prowadzimy przez punkt W prostą t styczną do okręgu k w punkcie T . Układ ten obracamy dookoła osi l o kąt 360° . Prosta t zakreśli powierzchnię stożkową obrotową; okrąg k zakreśli powierzchnię kuli styczną do powierzchni stożkowej w okręgu leżącym w płaszczyźnie ε , prostopadłej do osi l powierzchni stożkowej.

11.5.3. Rzuty powierzchni stożkowej. Punkty na powierzchni stożkowej

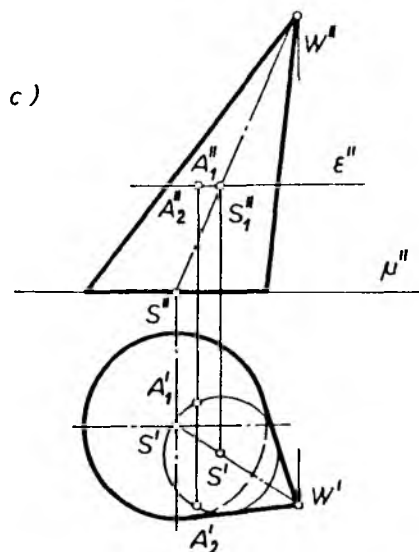
Na rys. 11.26 podano rzuty różnych powierzchni stożkowych oraz sposób określenia brakującego rzutu punktu powierzchni stożkowej.



Rys. 11.25. Tworzenie stożka obrotowego



Rys. 11.26. Stożki: a) obrotowy; b) obrotowy o osi czołowej



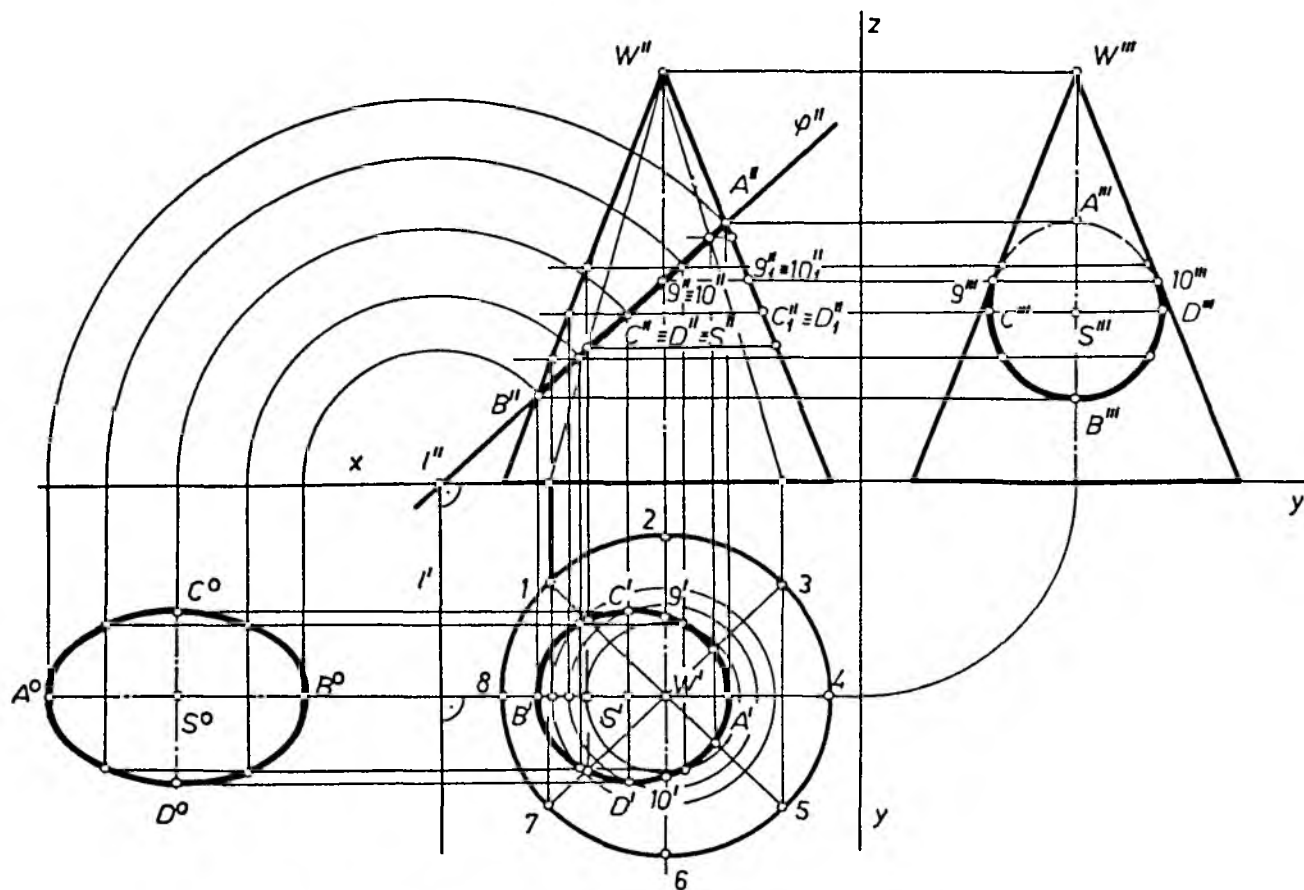
Rys. 11.26c). Stożek eliptyczny

Jeśli mamy np. rzut pionowy punktu A stożka obrotowego (rys. 11.26a) to prowadzimy najpierw t'' tworzącej t zawierającej punkt A, a następnie wyznaczamy t' rzut poziomy tworzącej t . W przecięciu odnoszącej wystawionej z A'' i t' znajdujemy A' – na rysunku pokazano dwa rozwiązania A'_1 i A'_2 . Rzuty punktów innych powierzchni stożkowych kreślimy analogicznie, wyznaczając najpierw rzuty przynależnej tworzącej.

Możemy też postępować inaczej. Mianowicie, jeśli punkt przynależy do okręgu zawartego w powierzchni stożkowej, przy czym okrąg jest równoległy do jednej z rzutni π_1 lub π_2 , to wyznaczamy najpierw rzuty tego okręgu przynależnego do punktu, a następnie bez trudu określimy brakujący rzut punktu prowadząc jego odnoszącą (rys. 11.26c).

11.5.4. Przekroje i rozwinięcia powierzchni stożkowej

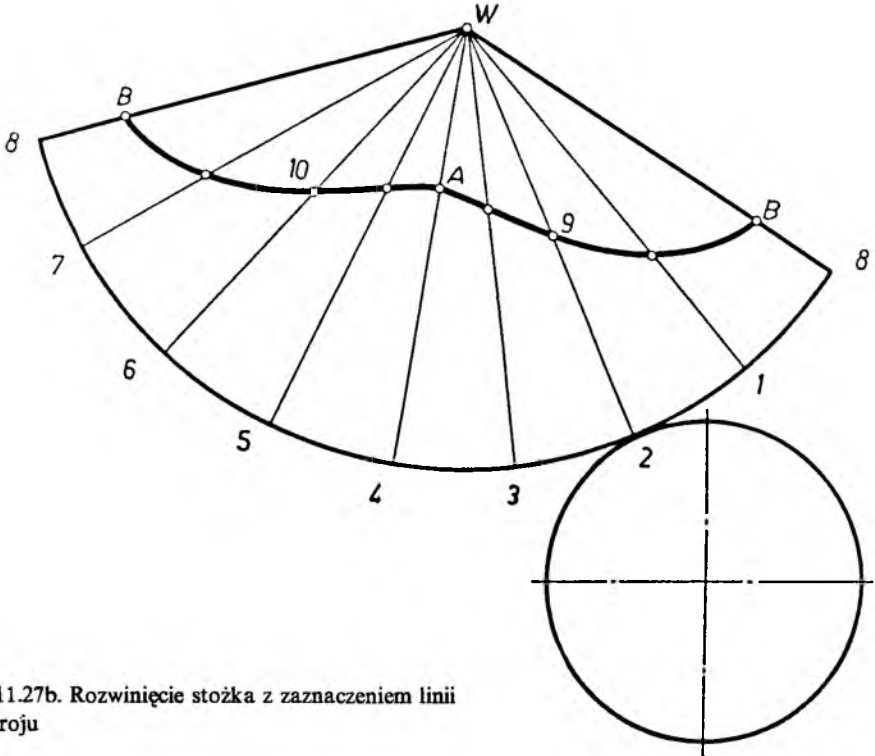
Przekrojami powierzchni stożkowych obrotowych oraz nieobrotowych, których kierownicami są okręgi lub krzywe stożkowe, płaszczyznami nie przechodzącymi przez wierzchołek powierzchni stożkowej są krzywe stożkowe: elipsy, parabole lub hiperbole, a w szczególnym przypadku okręgi. Przekroje i rozwinięcia powierzchni stożkowych rozpatrzmy na przykładach. Figurę przekroju powierzchni stożkowej określamy analogicznie jak i przekrój powierzchni walcowej. Minimalną ilość punktów potrzebnych do konstrukcji krzywej znajdujemy w przecięciu płaszczyzny przekroju i tworzących powierzchni stożkowej. Stosowanie konstrukcji krzywych stożkowych opisanych na początku rozdziału nie jest konieczne – dostateczną ilość punktów potrzebnych do dokładnej konstrukcji możemy wyznaczyć także jako punkty przecięcia płaszczyzny przekroju kolejnymi tworzącymi.



Rys. 11.27.a) Elipsa w przekroju stożka płaszczyzną rzutującą

Przykład 1

Wyznaczyć przekrój powierzchni stożkowej obrotowej o kierownicy leżącej na rzutni poziomej, płaszczyzną poziomo-rzutującą φ . Znaleźć rzeczywistą wielkość przekroju oraz wyznaczyć rozwinięcie powierzchni z zaznaczeniem linii przekroju. Rozwiązanie podano na rys. 11.27.



Rys. 11.27b. Rozwinięcie stożka z zaznaczeniem linii przekroju

Znalezienie przekroju nie nastęrcza kłopotów – konstrukcję rozpoczynamy od rzutu pionowego, na którym rzutem przekroju stożka jest odcinek, następnie określamy rzut poziomy i boczny przekroju. Naturalną wielkość przekroju określamy poprzez kład płaszczyzny.

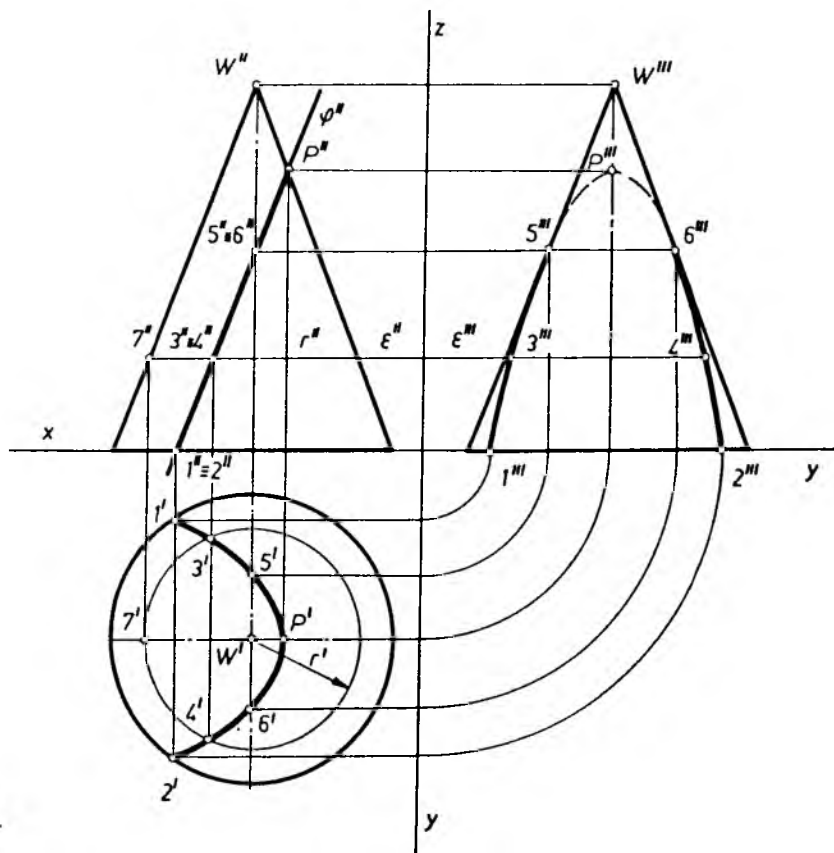
Rozwinięciem powierzchni stożka jest wycinek koła o promieniu równym tworzącej t i kącie ω , który ustalamy z zależności:

$$\frac{\omega}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{2\pi t} \Rightarrow \omega = 360^\circ \frac{r}{t}.$$

W celu naniesienia na rozwinięcie linii przekroju dzielimy kierownicę na określoną liczbę części, np. 8. Punkty podziału 1,2,3,...8 наносimy na rozwinięcie i prowadzimy tworzące wyznaczone przez te punkty. Na tych tworzących oznaczamy kolejno punkty przekroju, odczytując ich odległość od wierzchołka na rzucie pionowym na tworzącej konturowej.

Przykład 2.

Powierzchnię stożkową obrotową przeciąć w paraboli płaszczyzną pionowo-rzutującą. Rozwiązanie podano na rys. 11.28.



Rys. 11.28.

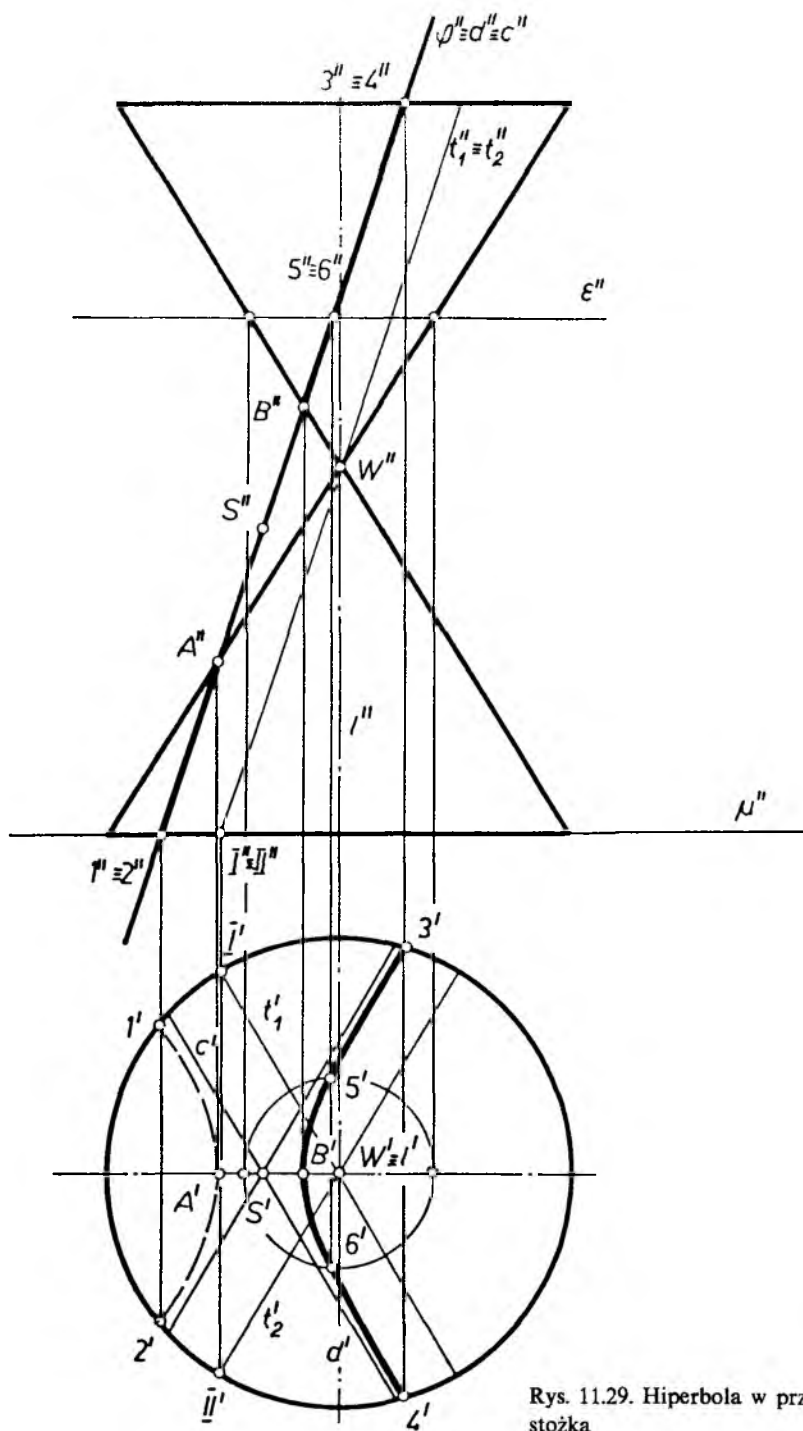
Przykład 3

Powierzchnię stożkową obrotową przeciąć w hiperboli płaszczyzną pionowo-rzutującą. Rozwiązanie podano na rys. 11.29.

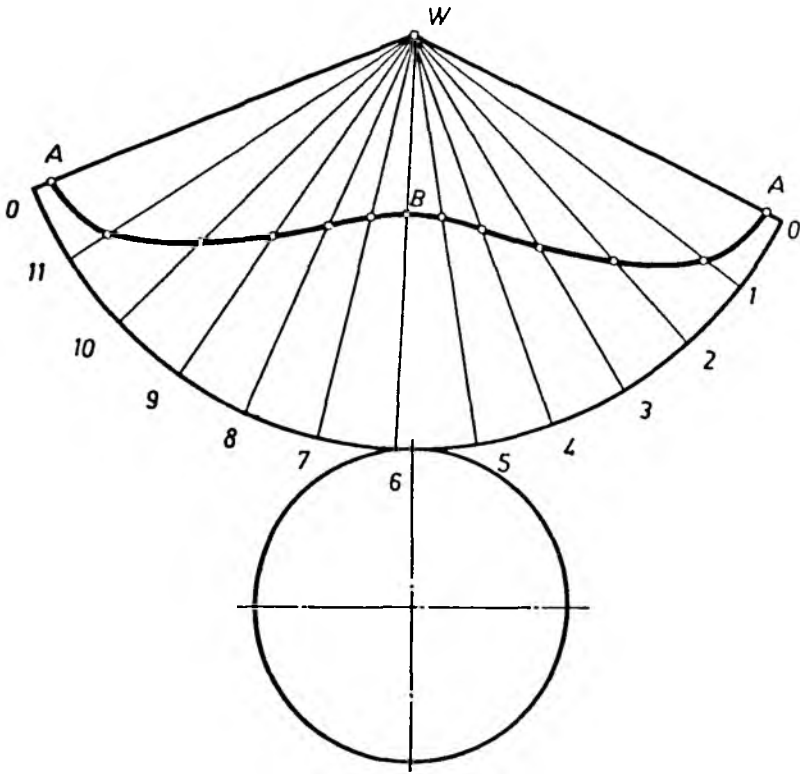
Przykład 4

Powierzchnię stożkową obrotową o osi pionowej l przeciąć płaszczyzną równoległoboku KLMN, wyznaczyć przekrój, rzeczywistą wielkość przekroju oraz narysować rozwinięcie powierzchni stożka z zaznaczeniem linii przekroju. Rozwiązanie podano na rys. 11.30.

Sprowadzamy płaszczyznę w położenie rzutujące przez transformację układu odniesienia i dalej rozwiązujemy jak przykład 1.



Rys. 11.29. Hiperbola w przekroju stożka



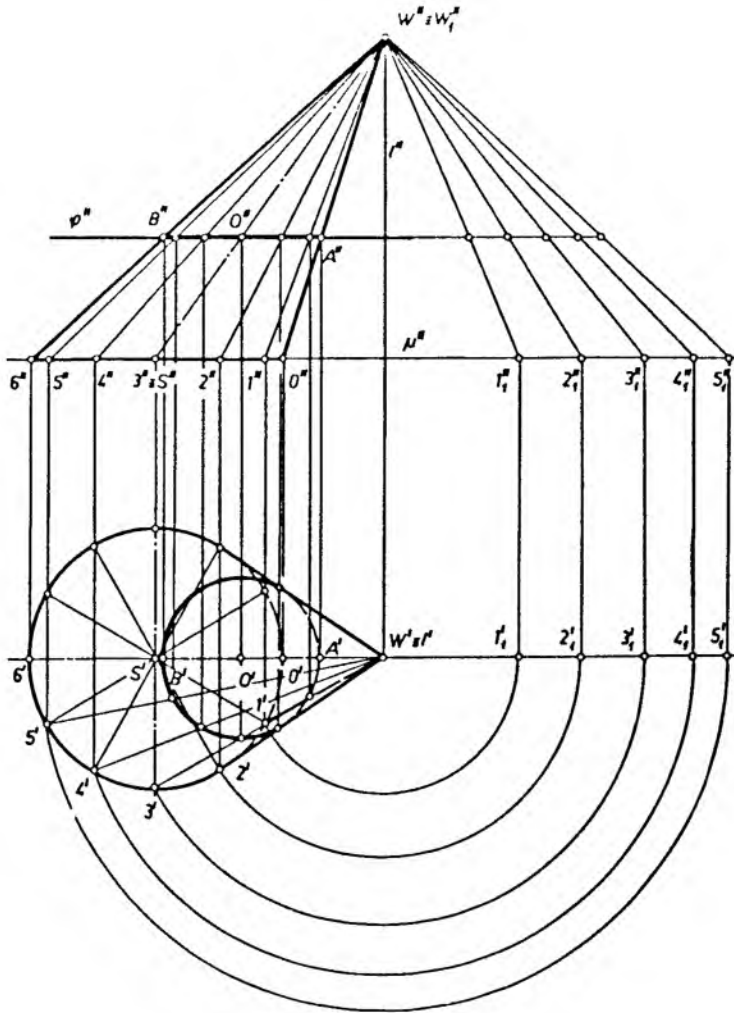
Rys. 11.30.b) Rozwinięcie stożka z zaznaczeniem linii przekroju

Przykład 5

Wyznaczyć przekrój płaszczyzną poziomą powierzchni stożkowej nieobrotowej o kołowej kierownicy, leżącej na płaszczyźnie poziomej oraz narysować rozwinięcie powierzchni stożka. Rozwiązanie podano na rys. 11.31.

Przekrojem stożka płaszczyzną poziomą jest okrąg, jego określenie nie sprawia kłopotu. W celu znalezienia rozwinięcia dzielimy kierownicę na pewną ilość jednakowych części (przykładowo 12) punktami 0,1,2,...6 – wykorzystując symetrię wystarczy połowę kierownicy podzielić na 6 części. Znajdujemy poprzez obrót dookoła prostej pionowej l do położenia czołowego rzeczywistą długość tworzących zawierających punkty 0,1,2,...6.

Konstrukcję rozwinięcia rozpoczynamy od tworzącej $\overline{W6}$. Następnie z zaznaczonego punktu W zataczamy łuk o promieniu $\overline{W^{II}5^{II}}_1$ (w rzeczywistej wielko-

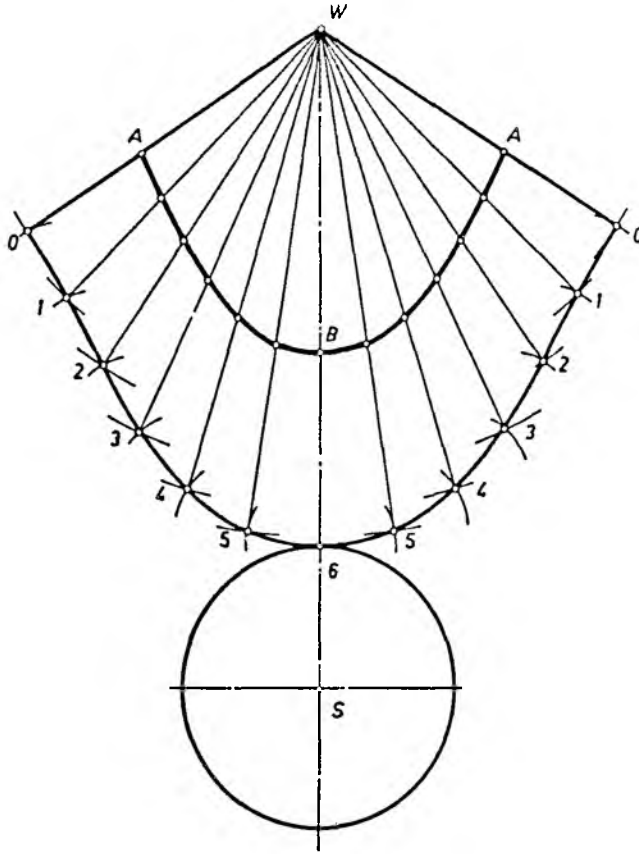


Rys. 11.31.a. Przekrój stożka eliptycznego

ci), a z punktu 6 łuk o promieniu $\overline{6-5}$ — odmierzony z rzutu poziomego. Łuki przetną się w punkcie 5 rozwinięcia, określając w ten sposób jego położenie. Analogicznie określamy punkt 4 — zataczając łuki z punktów W i 5 — i kolejno 3,2,1,0. Symetrycznie względem W6 konstruujemy drugą część rozwinięcia. Punkty przekroju nanosimy tak jak w poprzednich przykładach. Konstrukcja jest tym dokładniejsza im gęściej podzielimy kierownicę.

Przykład 6

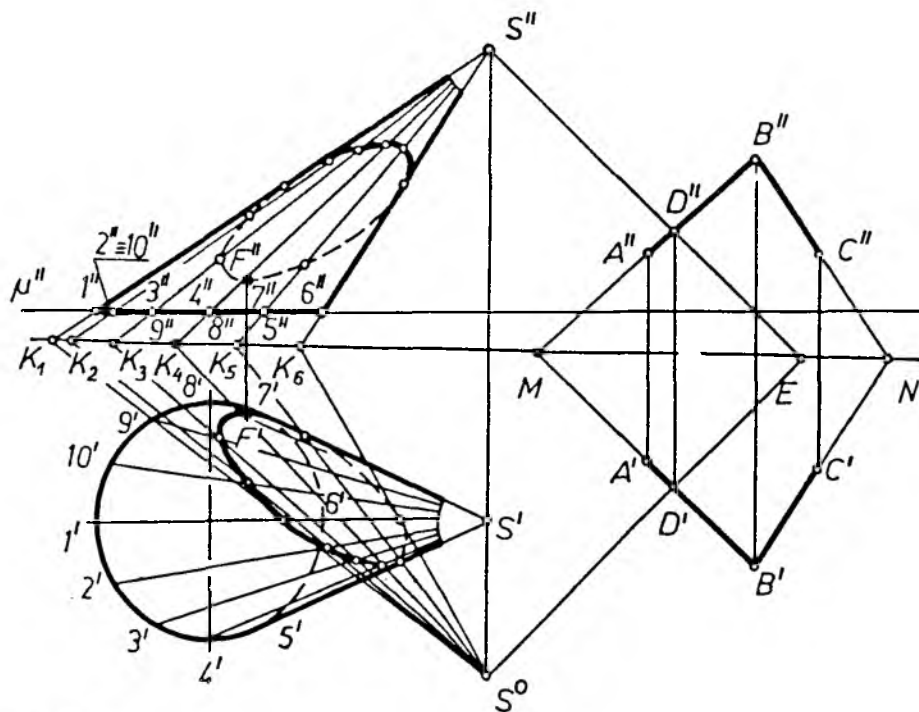
Wyznaczyć linię przekroju powierzchni stożkowej płaszczyzną $\varphi = ABC$ w położeniu ogólnym. Rozwiązanie podano na rys. 11.32.



Rys. 11.31.b Rozwinięcie stożka eliptycznego z zaznaczeniem linii przekroju

Zadanie rozwiązano stosując powinowactwo osiowe. Między rzutami na π_1 i π_2 płaszczyzny przekroju zachodzą związki powinowactwa osiowego o kierunku równoległym do odnoszących. Punkt przecięcia rzutu pionowego z poziomym prostej AB , $M = A^{II}B^{II} \cap A^I B^I$ oraz punkt $N = B^{II}C^{II} \cap B^I C^I$ określają oś powinowactwa (rys. 11.32). Na rzutni pionowej określamy rzuty pionowe tworzących $S_1, S_2, S_3 \dots S_{10}$ oraz na rzutni poziomej ich rzuty poziome (rys. 11.32). Prowadzimy pomocniczą dowolną prostą $S^{II}D^{II}$ i określamy powinowatą jej prostą $D^I E$. W przecięciu $D^I E$ i odnoszącej z S^{II} znajdujemy powinowaty punktowi S^{II} punkt S° . Określamy też powinowate rzutom pionowym tworzących $S_1, S_2, S_3, \dots$ proste $S^\circ K_1, S^\circ K_2, S^\circ K_3, \dots S^\circ K_{10}$, gdzie $K_1, K_2, \dots$ punkty przecięcia osi powinowactwa rzutami pionowymi tworzącymi.

W przecięciu prostych $S^\circ K_1$ z S^{I1} , $S^\circ K_2$ z S^{I2} ... otrzymamy punkty przekroju, przykładano punkt F^I . Łącząc je otrzymamy linię przekroju. Jej rzut pionowy określamy bez trudu.



Rys. 11.32.

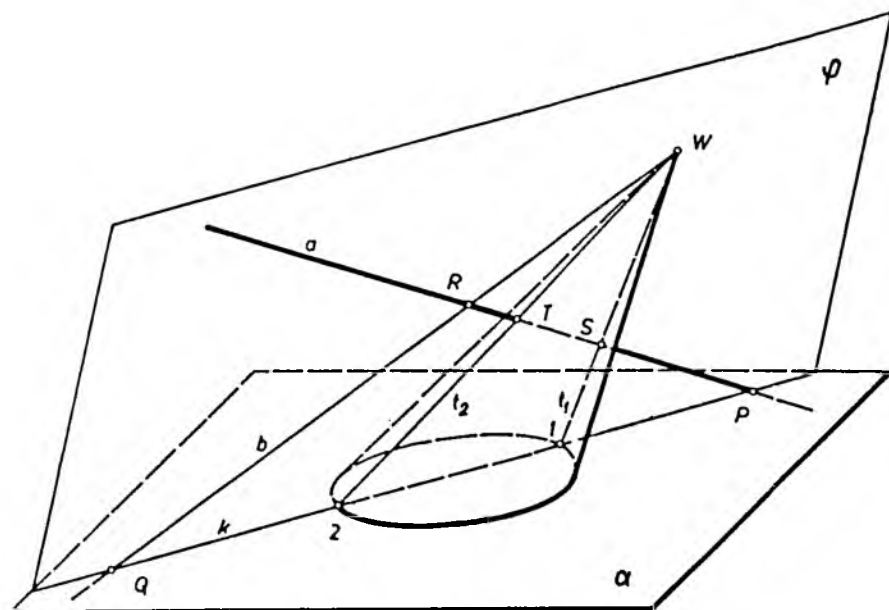
11.6. Punkty przebiecia powierzchni prostą

Podobnie jak przy wyznaczaniu punktów przebiecia wielościanu prostą, w celu wyznaczenia punktów przebiecia powierzchni prostą, prowadzimy przez tę prostą pomocniczą płaszczyznę tnącą i wyznaczamy przekrój powierzchni. Punkty przebiecia leżą na przecięciu się przekroju z prostą (rys. 11.33 i 11.35). Zagadnienie to rozpatrzymy na przykładach.

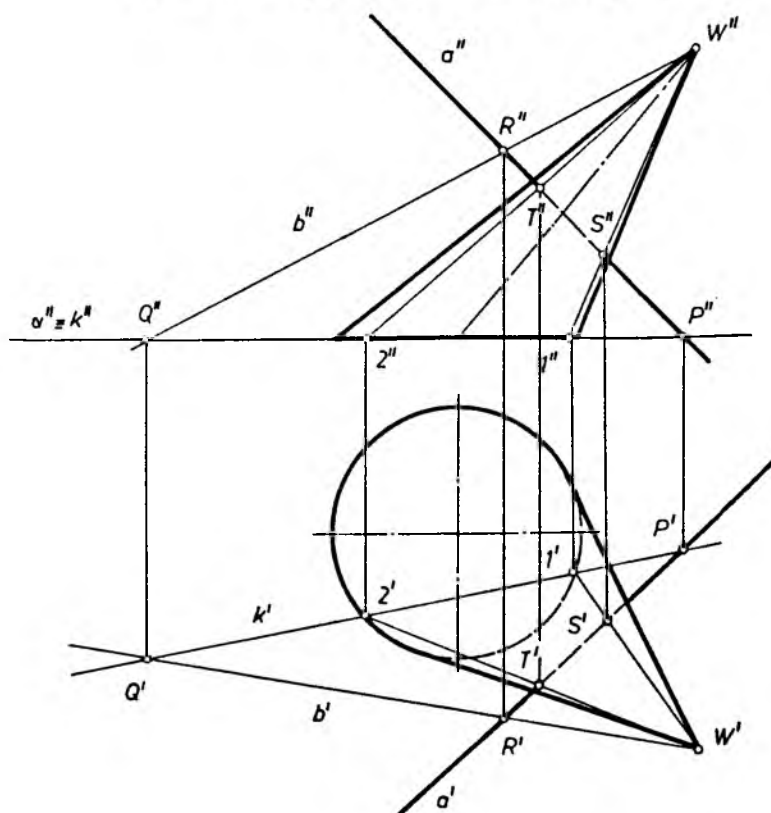
Przykład 1

Dana jest powierzchnia walcowa (rys. 11.34), której kierownica jest ustawiona na płaszczyźnie poziomej α oraz dana jest prosta a . Wyznaczyć punkty przebiecia danej powierzchni walcowej prostą a .

Na prostej a obieramy dowolny punkt R i prowadzimy przez niego prostą b równoległą do tworzących powierzchni walca (rys. 11.34). Proste a i b określają płaszczyznę tnącą φ . Znajdujemy krawędź k płaszczyzny φ z płaszczyzną α przez wyznaczenie punktów przebiecia P i Q (rys. 11.34). Krawędź k przecina kierownicę w punktach 1 i 2, przez które prowadzimy tworzące t_1 i t_2 . Na przecięciu się tych tworzących z prostą a mamy punkty przebiecia S i T .



Rys. 11.35. Punkty przebiecia powierzchni stożka prostą

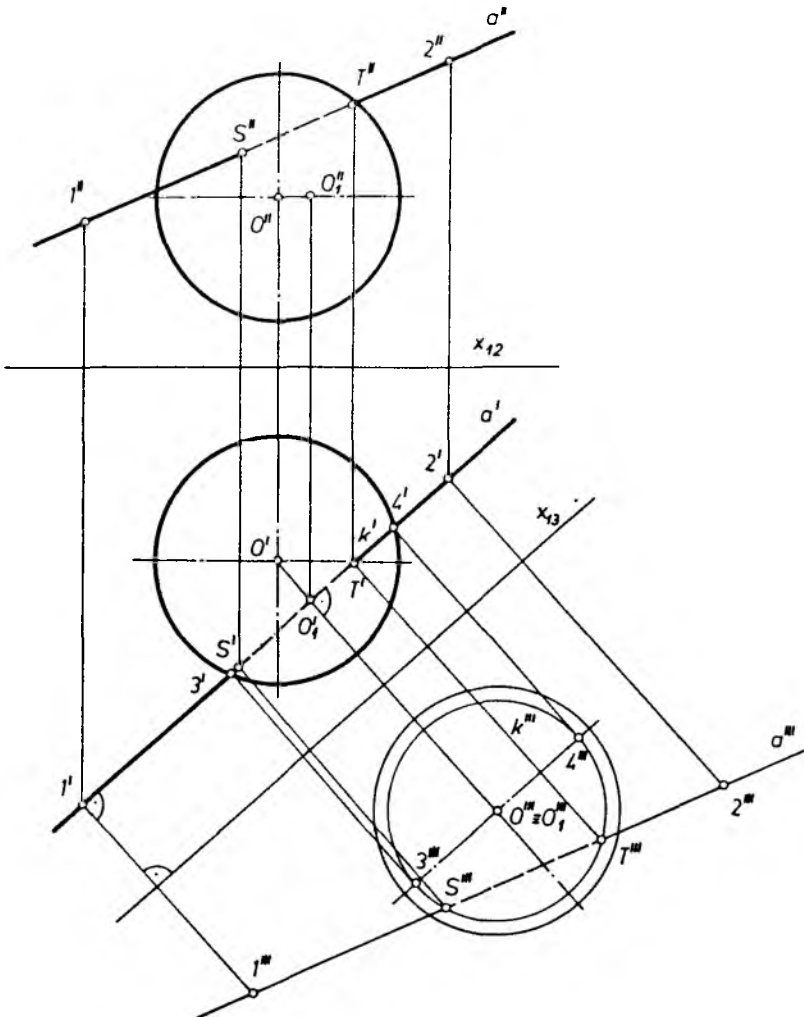


Rys. 11.36

Przykład 2

Dana jest powierzchnia stożkowa, której kierownica ustawiona jest na poziomej płaszczyźnie α oraz dana jest prosta a . Wyznaczyć punkty przebiecia powierzchni stożkowej prostą a (rozwiązanie na rys. 11.36).

Na prostej a obieramy dowolny punkt R i prowadzimy przez niego i przez wierzchołek W powierzchni stożkowej prostą b . Proste a i b określają płaszczyznę tnącą φ . Znajdujemy jej krawędź z płaszczyzną α , która przecina kierownicę w punktach 1 i 2. Przez punkty te prowadzimy tworzące t_1 i t_2 , które przecinają prostą a w szukanych punktach przebiecia S i T .



Rys. 11.37. Punkty przebiecia powierzchni kuli prostą

Przykład 3

Dana jest powierzchnia kuli oraz dana jest prosta a . Wyznaczyć punkty przebiecia powierzchni kuli prostą (rozwiązanie na rys. 11.37).

Przez prostą a prowadzimy φ płaszczyznę poziomo-rzutującą, która przecina powierzchnię kuli w okręgu k . Następnie wprowadzamy trzecią rzutnię π_3 równoległą do płaszczyzny φ . Punkty przebiecia S i T znajdujemy w trzecim rzucie oraz przenosimy je do rzutu poziomego i pionowego..

11.7. Przenikanie powierzchni

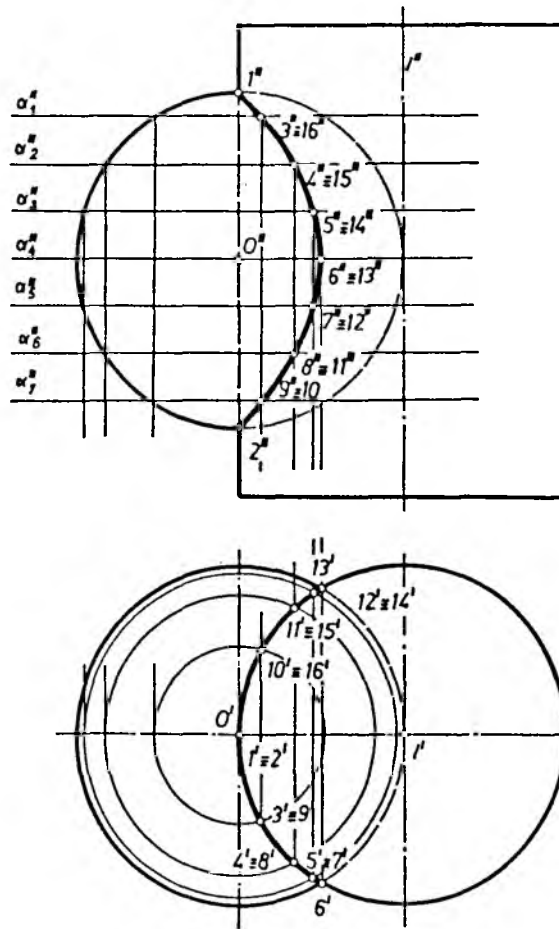
Zbiór punktów wspólnych dwóch przenikających się powierzchni nazywamy linią przenikania tych powierzchni, która jest linią przestrzenną. Przenikanie może być niezupełne lub zupełne, w tym drugim przypadku linia przenikania rozpada się na dwie części.

Dla wykreślenia linii przenikania powierzchni wyznaczamy pewną skończoną liczbę punktów linii przenikania, które następnie odpowiednio łączymy. Punkty linii przenikania dwóch powierzchni wyznaczamy za pośrednictwem pomocniczych płaszczyzn tnących, tak prowadzonych, aby przekroje obu powierzchni były łatwe do wykreślenia w rzutach, a więc aby to były proste lub okręgi. W przypadku przenikania się powierzchni obrotowych, których osie się przecinają i są równoległe do rzutni można też zastosować metodę kul współśrodkowych.

Metoda wyznaczania linii przenikania dowolnych powierzchni π_a i π_b (w szczególnym przypadku powierzchni obrotowych) przy pomocy pomocniczych powierzchni π_i (w szczególności płaszczyzn, sfer) polega na tym, że prowadzimy kolejne pomocnicze powierzchnie π_i ($\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$), które przecinają π_a i π_b odpowiednio w krzywych $k_{a,i}$ ($k_{a,1}, k_{a,2}, \dots$) i $k_{b,i}$ ($k_{b,1}, k_{b,2}, \dots$) przecinających się parami w punktach (niekoniecznie jednym) $P_{i,j}$ gdzie i — numer powierzchni tnącej, a j — kolejny punkt otrzymany w przecięciu się jednej pary krzywych $k_{a,i}$ i $k_{b,i}$. Punkty $P_{i,j}$ należąc jednocześnie do $k_{a,i}$ i $k_{b,i}$, a tym samym jednocześnie do π_a i π_b wyznaczają linię przenikania powierzchni π_a i π_b .

W celu ułatwienia łączenia punktów linii przenikania możemy zastosować schematy przenikania, takie same jak dla wielościanów zamiast krawędzi bocznych (graniastopuła lub ostrostopuła) biorąc tworzące powierzchni obrotowych wykorzystane do wyznaczania punktów linii przenikania. Punkty naniesione na schemat (siatkę) łączymy według zasady: łączymy punkty jednego oczka i tylko po przekątnej.

Wykreślanie linii przenikania powierzchni przedstawiamy na przykładach rozpoczynając od przypadków najprostszych.



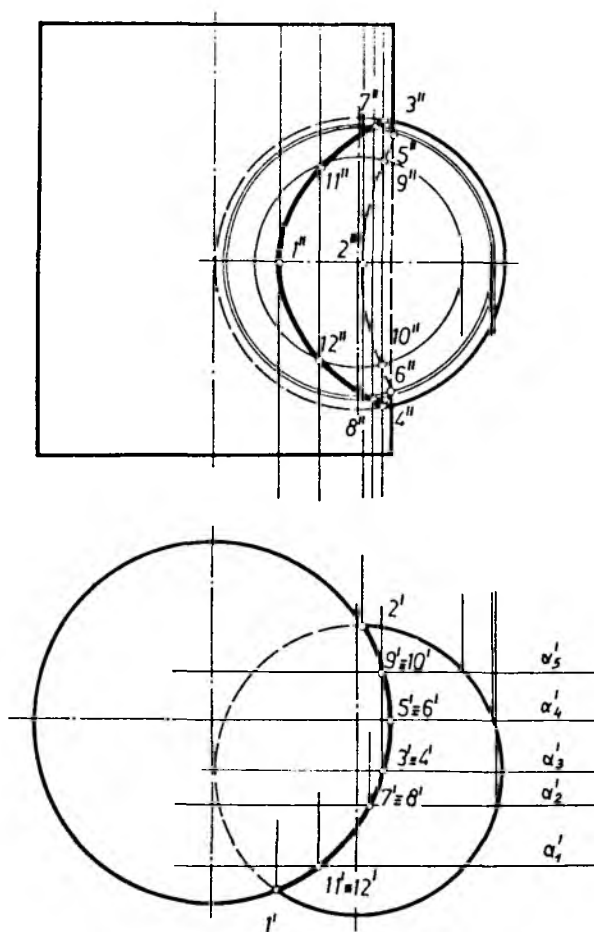
Rys. 11.38a. Przenikanie powierzchni kuli i walca (płaszczyzna $\beta = OI$ czołowa)

Przykład 1.

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni kuli z powierzchnią walca obrotowego o osi pionowej (dwa przypadki – rysunek 11.38). W obu przypadkach dla wyznaczenia punktów linii przenikania możemy poprowadzić pomocnicze płaszczyzny, poziome (przypadek a) bądź płaszczyzny czołowe (przypadek b). Wyznaczenie punktów linii przenikania oraz ich łączenie jest widoczne z rysunków. Zauważmy, że punkty 1, 2, 3 i 4 w przypadku a oraz punkty 1 i 2 w przypadku b wyznaczy się natychmiast, bez prowadzenia pomocniczych płaszczyzn.

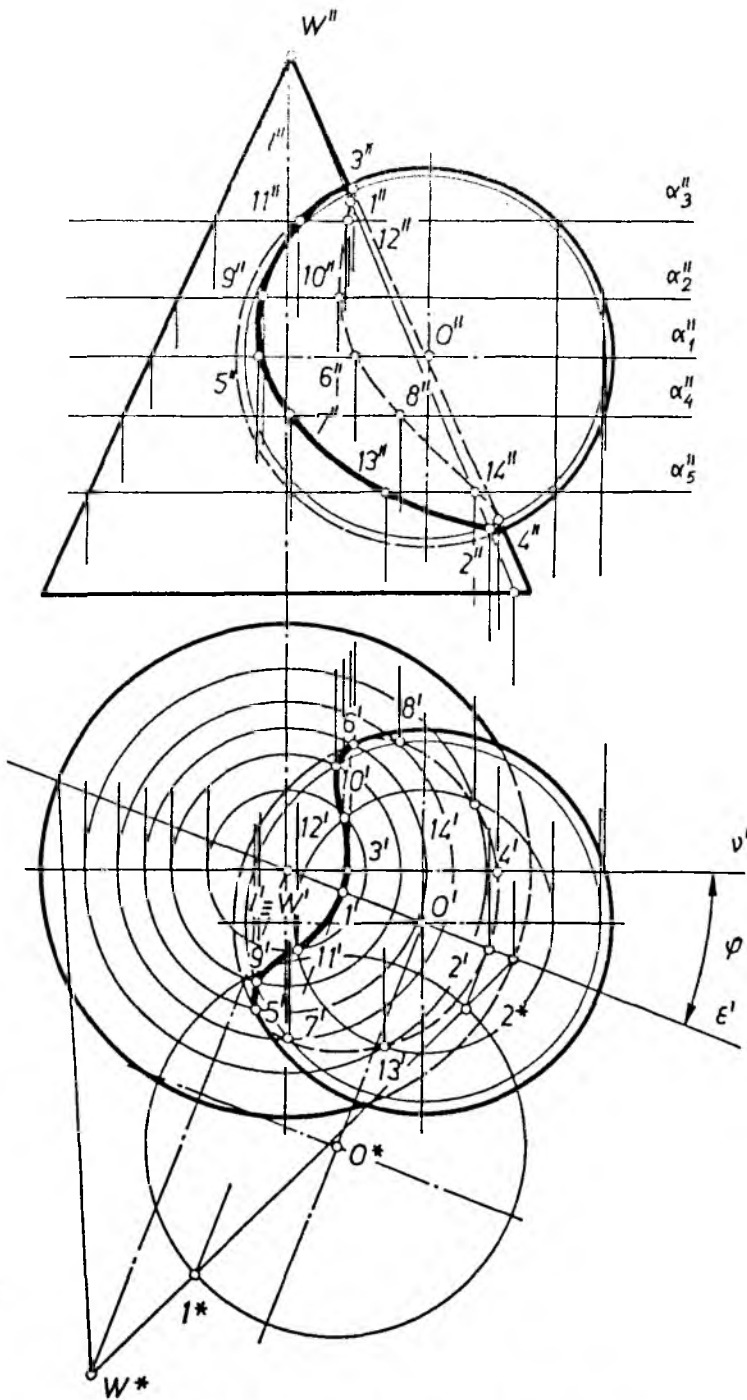
Przykład 2

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni kuli z powierzchnią stożka obrotowego o osi pionowej.



Rys. 11.38b. Przenikanie powierzchni kuli i walca

Dla wyznaczenia punktów linii przenikania (rys. 11.39) prowadzimy pomocnicze płaszczyzny poziome. Punkty 1 i 2, najwyższy i najniższy linii przenikania możemy wyznaczyć trzema sposobami: metodą kładu płaszczyzny przechodzącej przez oś powierzchni stożka i środek powierzchni kuli, jak pokazano na rysunku, metodą obrotu powierzchni kuli dokoła osi i powierzchni stożka do płaszczyzny czołowej v (o kąt φ) oraz metoda transformacji. Punkty 3 i 4 wyznaczamy za pośrednictwem pomocniczej płaszczyzny czołowej v , która przecina powierzchnię stożka w tworzących konturowych. Punkty 5 i 6, leżące w płaszczyźnie poziomej α przechodzącej przez środek powierzchni kuli, oddzielają widoczną część linii przenikania od części niewidocznej w rzucie poziomym. Wyznaczenie dalszych punktów linii przenikania oraz ich łączenie jest widoczne z rysunku.



Rys. 11.39. Przenikanie powierzchni stożka i kuli

Przykład 3

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni stożka obrotowego o osi pionowej, z powierzchnią walca obrotowego o osi poziomej (dwa przypadki). Rozwiązanie podano na rys. 11.40a i 11.40b. W obu przypadkach punkty linii przenikania wyznaczamy za pomocą pomocniczych płaszczyzn poziomych, które powierzchnię stożka przecinają w okręgach, a powierzchnię stożka przecinają w okręgach, a powierzchnię walca w tworzących. W przypadku a) punkty 1 i 2 wyznaczamy natychmiast bez dodatkowych płaszczyzn, a dla przypadku b) prowadzimy dodatkowo płaszczyznę czołową σ , za pomocą której wyznaczamy punkty 7,8,9 i 10 oraz wykonujemy kład płaszczyzny $\varepsilon \perp x$ dla wyznaczenia punktów 11 i 12.

Przykład 4

Wyznaczyć linię przenikania dwóch powierzchni walcowych obrotowych (trzy przypadki – rys. 11.41a,b,c).

a) powierzchnie stykają się w jednym punkcie (1) leżącym na płaszczyźnie czołowej α stycznej do obu tych powierzchni, (rys. 11.41a).

Dla wyznaczenia punktów linii przenikania prowadzimy płaszczyzny czołowe tnące obie powierzchnie walcowe w tworzących. Punkt 1, w którym linia przenikania przecina się ze sobą jest punktem podwójnym.

b) osie obu powierzchni l i m przecinają się w punkcie R (rys. 11.41b).

Punkty linii przenikania wyznaczamy prowadząc płaszczyzny poziomo-rzutujące, przenikające powierzchnie w tworzących. Przenikanie jest zupełne.

c) osie obu powierzchni l i m nie przecinają się (rys. 11.41c). Punkty linii przenikania leżą na tworzących powierzchni, przy czym posługujemy się kładem k^* poziomym przekroju normalnego k powierzchni.

Przykład 5

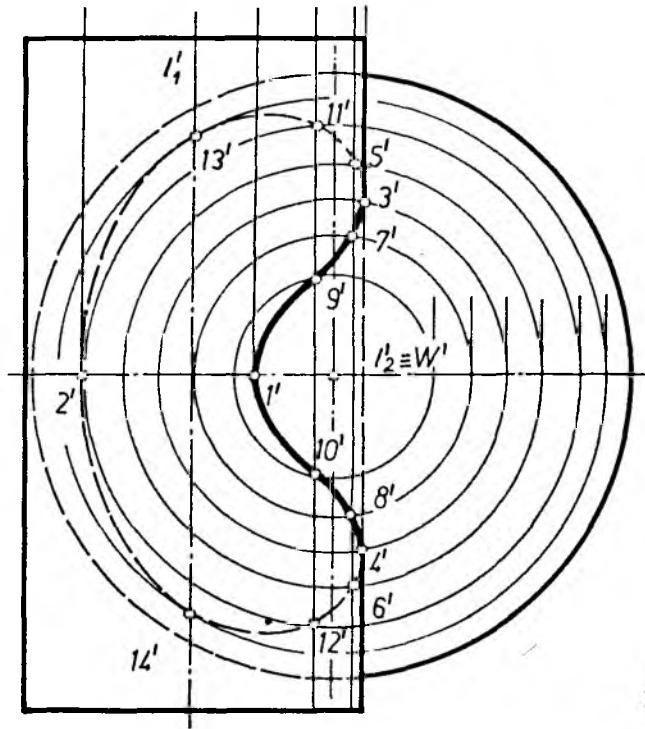
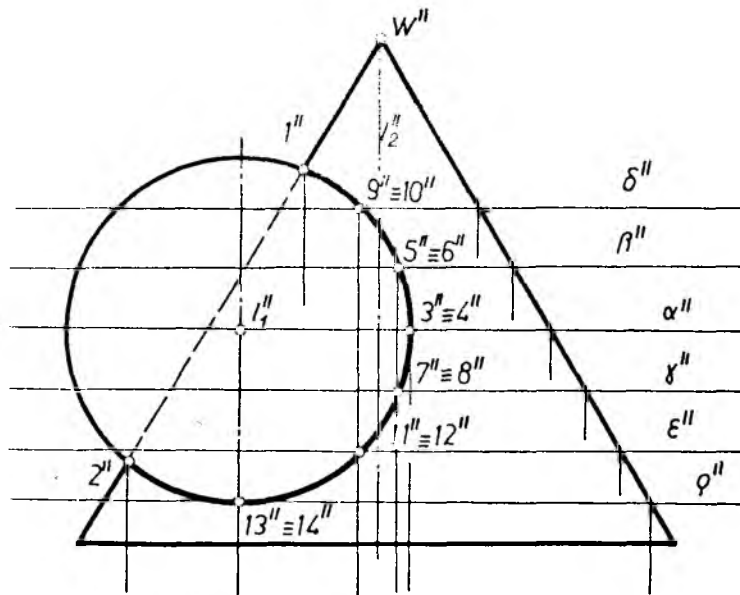
Wyznaczyć linię przenikania powierzchni pierścieniowej i powierzchni walcowej obrotowej (dwa przypadki, rys. 11.42).

a) osie obu powierzchni są pionowe (rys. 11.42a).

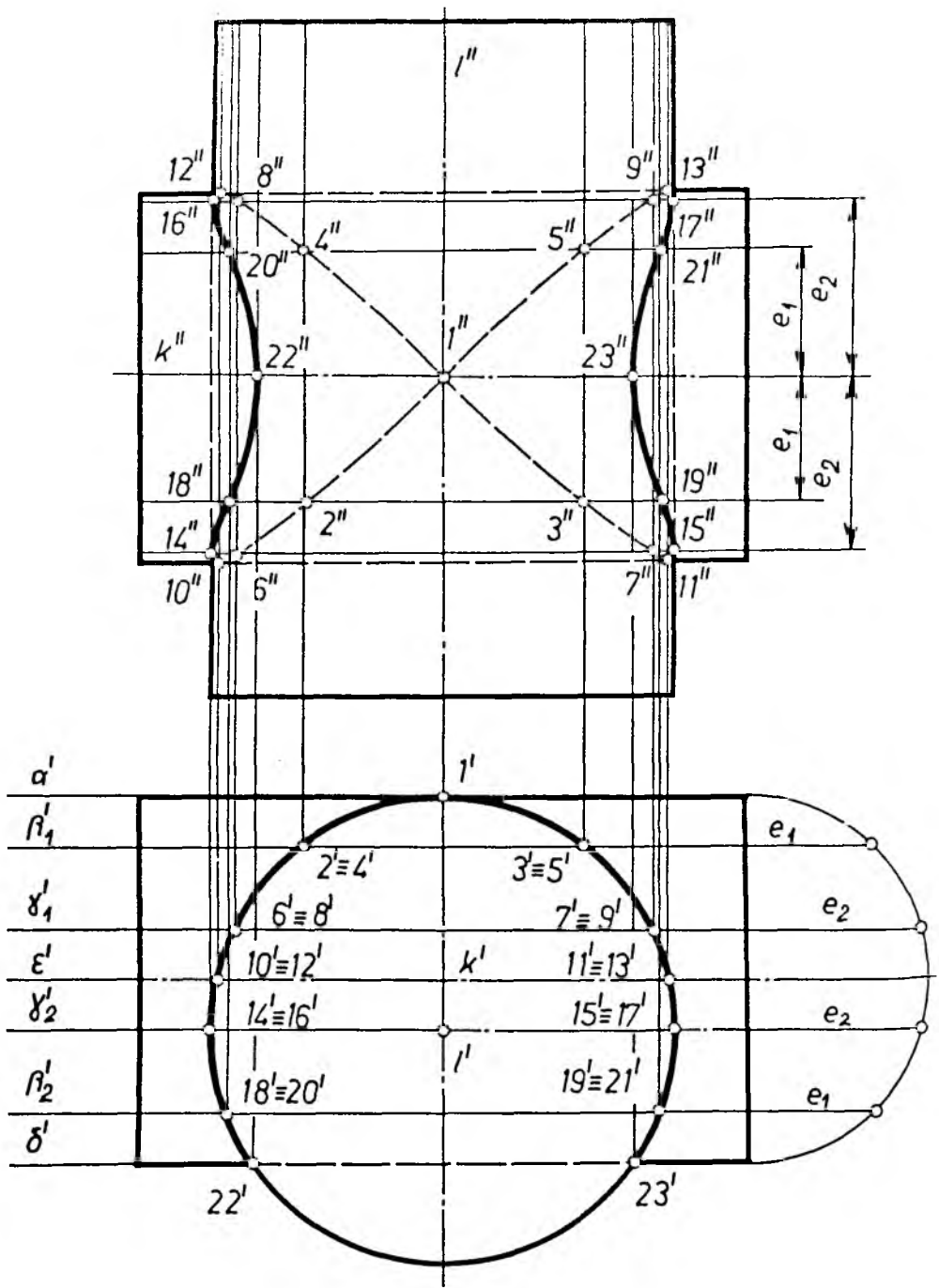
Punkty linii przenikania wyznaczamy za pośrednictwem równoleżników powierzchni pierścieniowej i tworzących powierzchni walcowej.

b) osie obu powierzchni są wchrowate (rys. 11.42b).

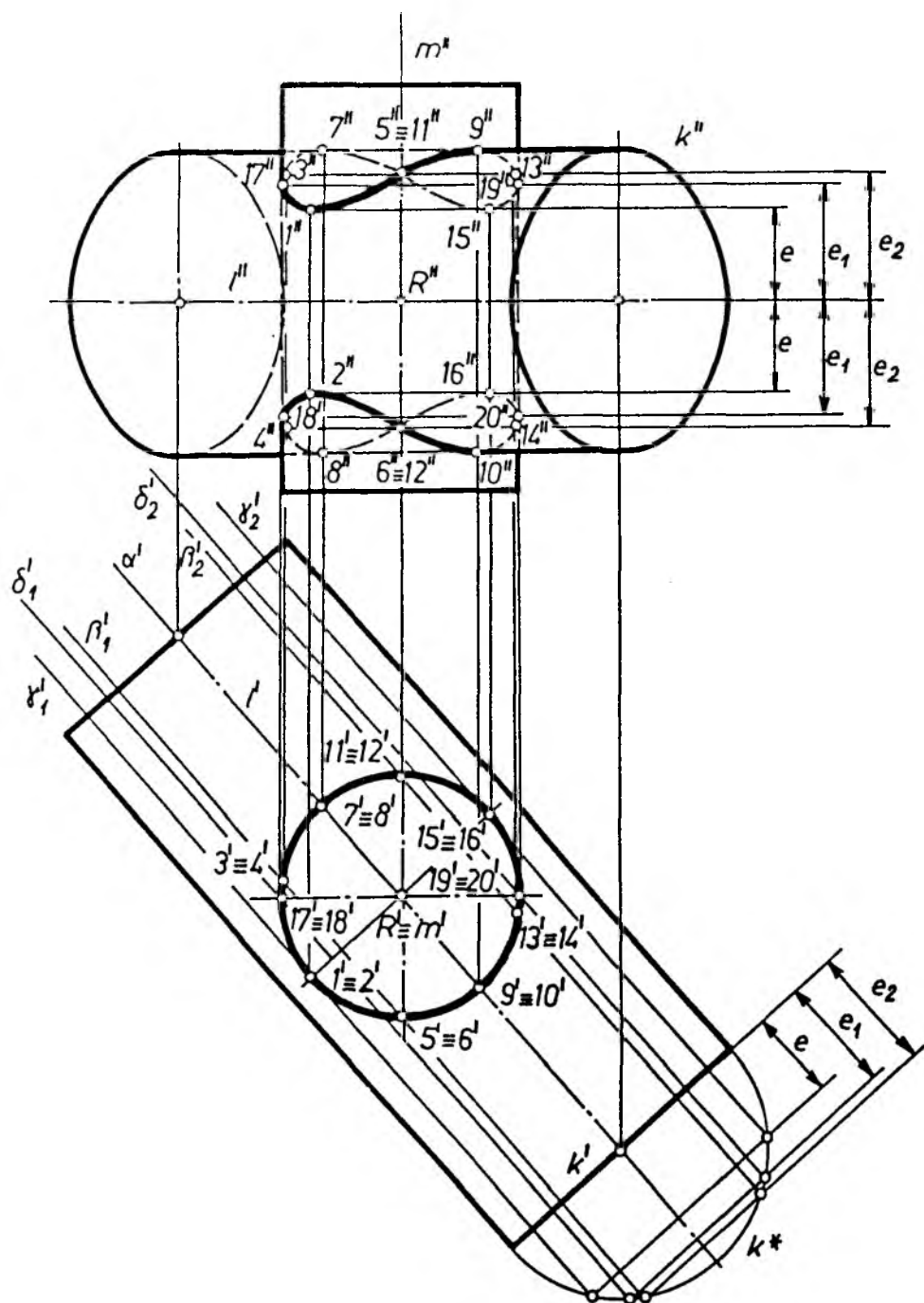
Punkty linii przenikania wyznaczamy, prowadząc pomocnicze płaszczyzny czołowe, przecinające powierzchnię pierścieniową w równoleżnikach, a powierzchnię walcową w tworzących, przy czym posługujemy się kładem k^* poziomym (na płaszczyźnie ε) przekroju normalnego k powierzchni walcowej.



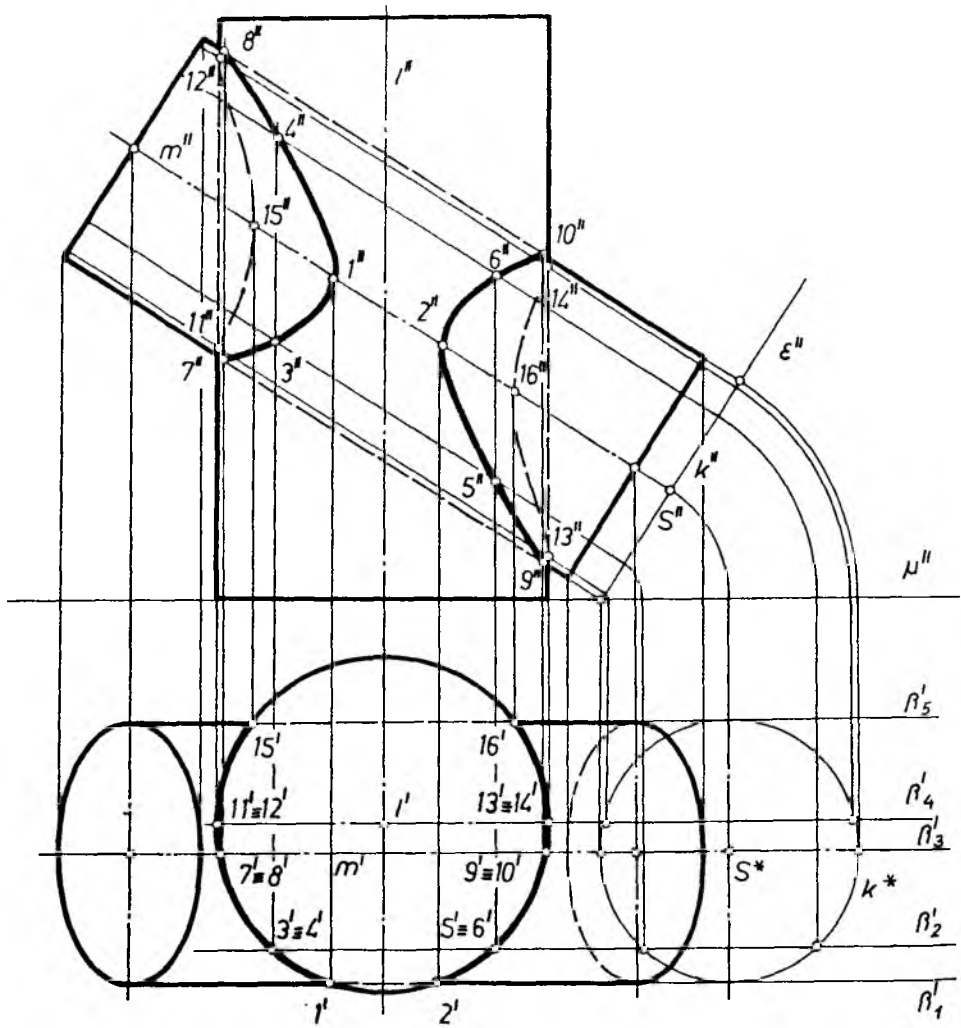
Rys. 11.40.a)



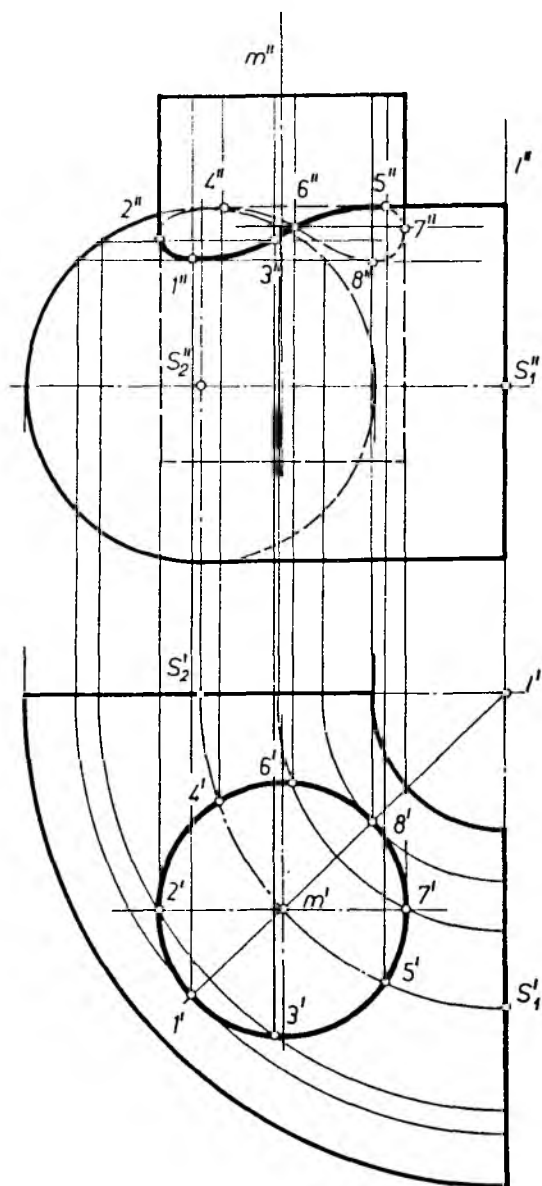
Rys. 11.41.a)



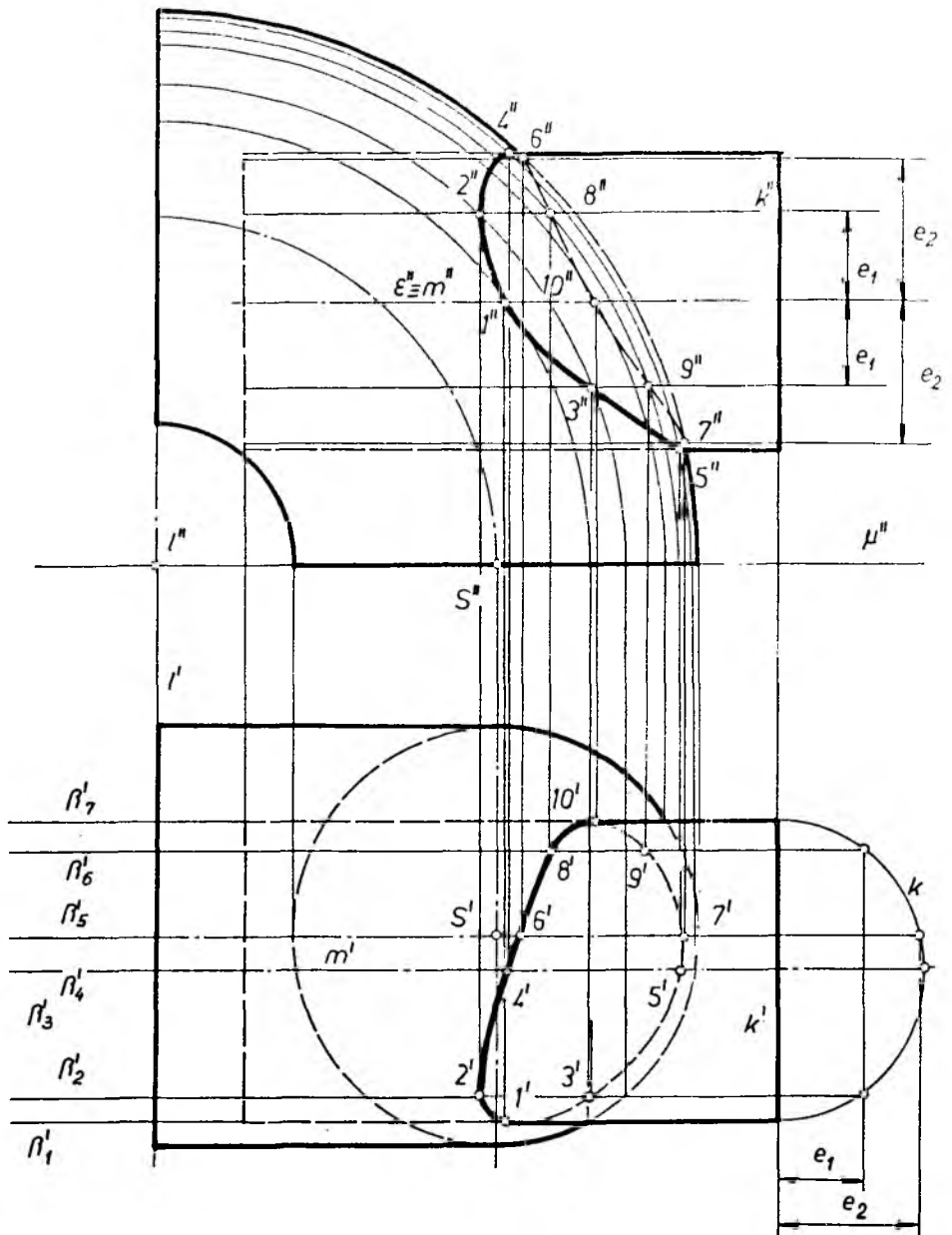
Rys. 11.41.b)



Rys. 11.41.c)



Rys. 11.42.a)

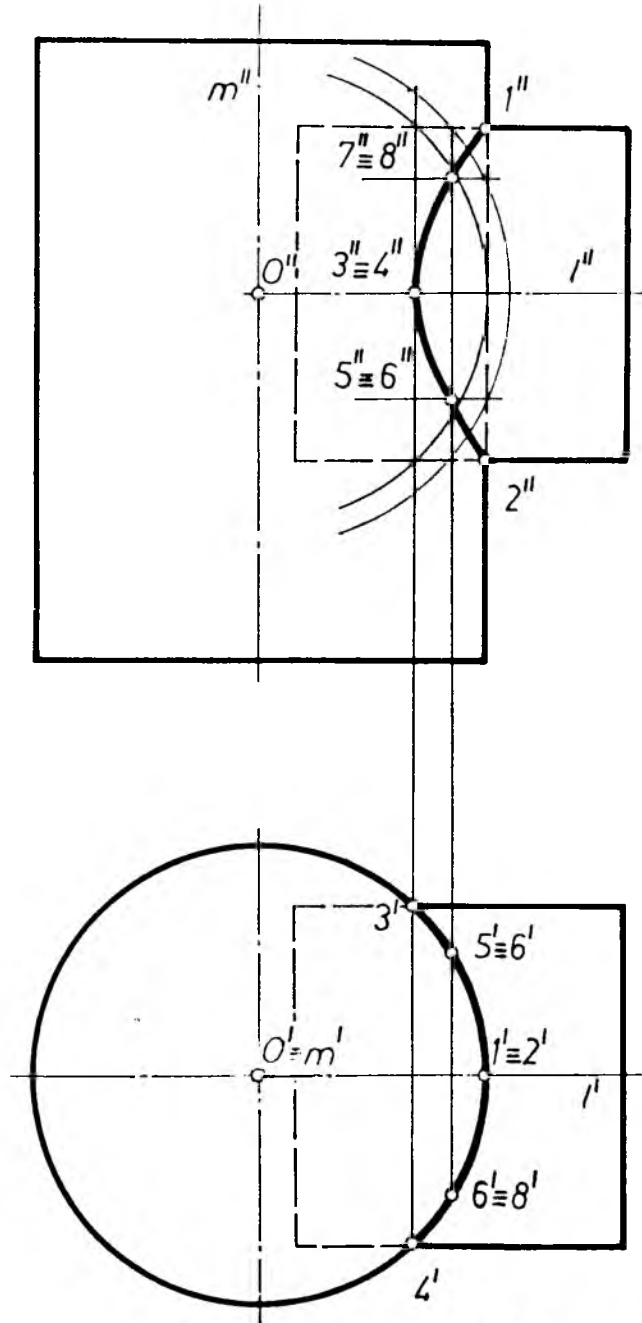


Rys. 11.42.b)

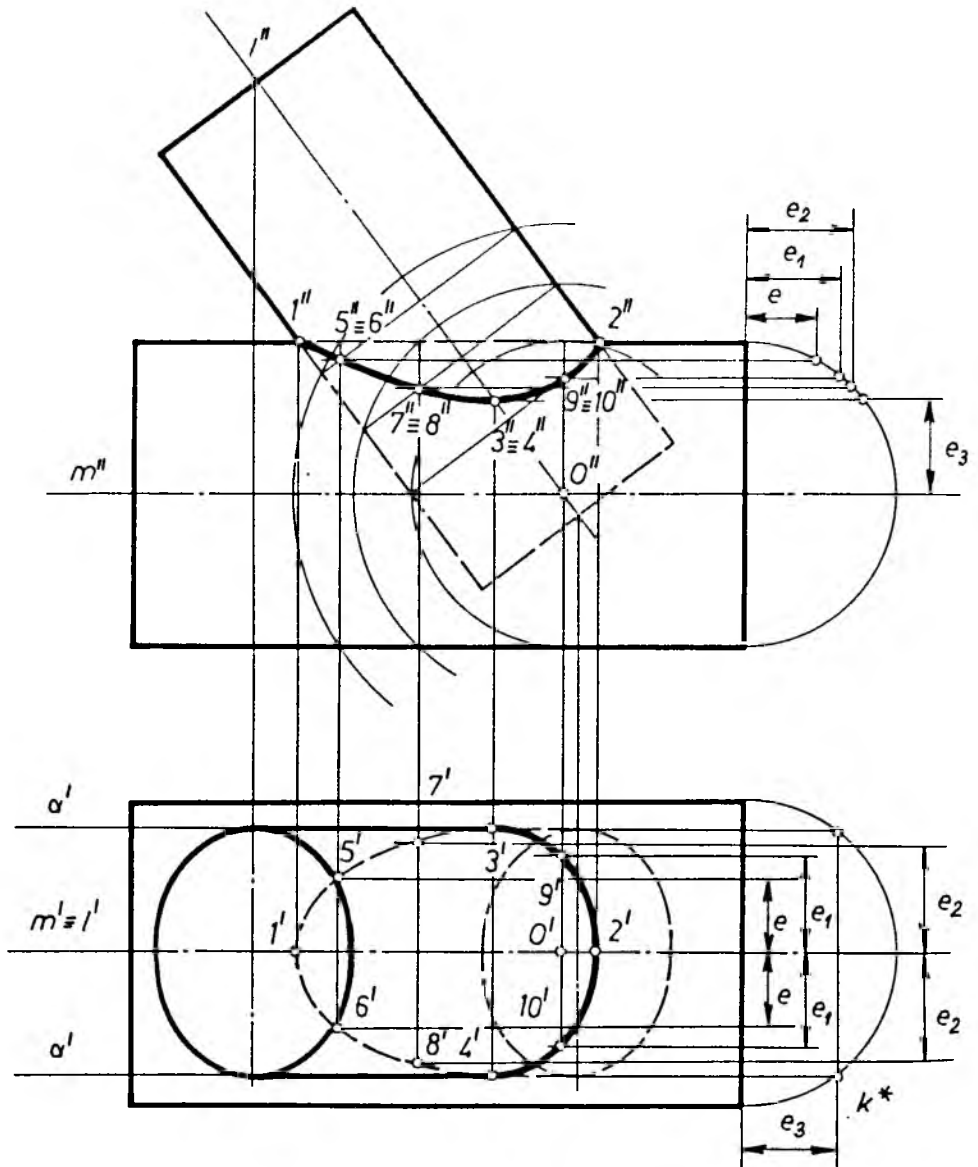
Przykład 6

Wyznaczyć linię przenikania dwóch powierzchni walcowych obrotowych, których osie się przecinają i leżą w płaszczyźnie równoległej do rzutni (dwa przypadki — rys. 11.43).

W obu przypadkach stosujemy metodą kul współśrodkowych o środku w punkcie O przecięcia się osi. Kule przecinają się z powierzchniami walcowymi w okręgach, których rzuty pionowe są odcinkami. Punkty wspólne okręgów są punktami linii przenikania. Punkty 1 i 2 wyznaczamy natychmiast z rzutu pionowego, natomiast punkty 3 i 4 (w przypadku b) za pomocą dodatkowej płaszczyzny czołowej α i kładu poziomego k^* przekroju normalnego powierzchni walcowej poziomej.



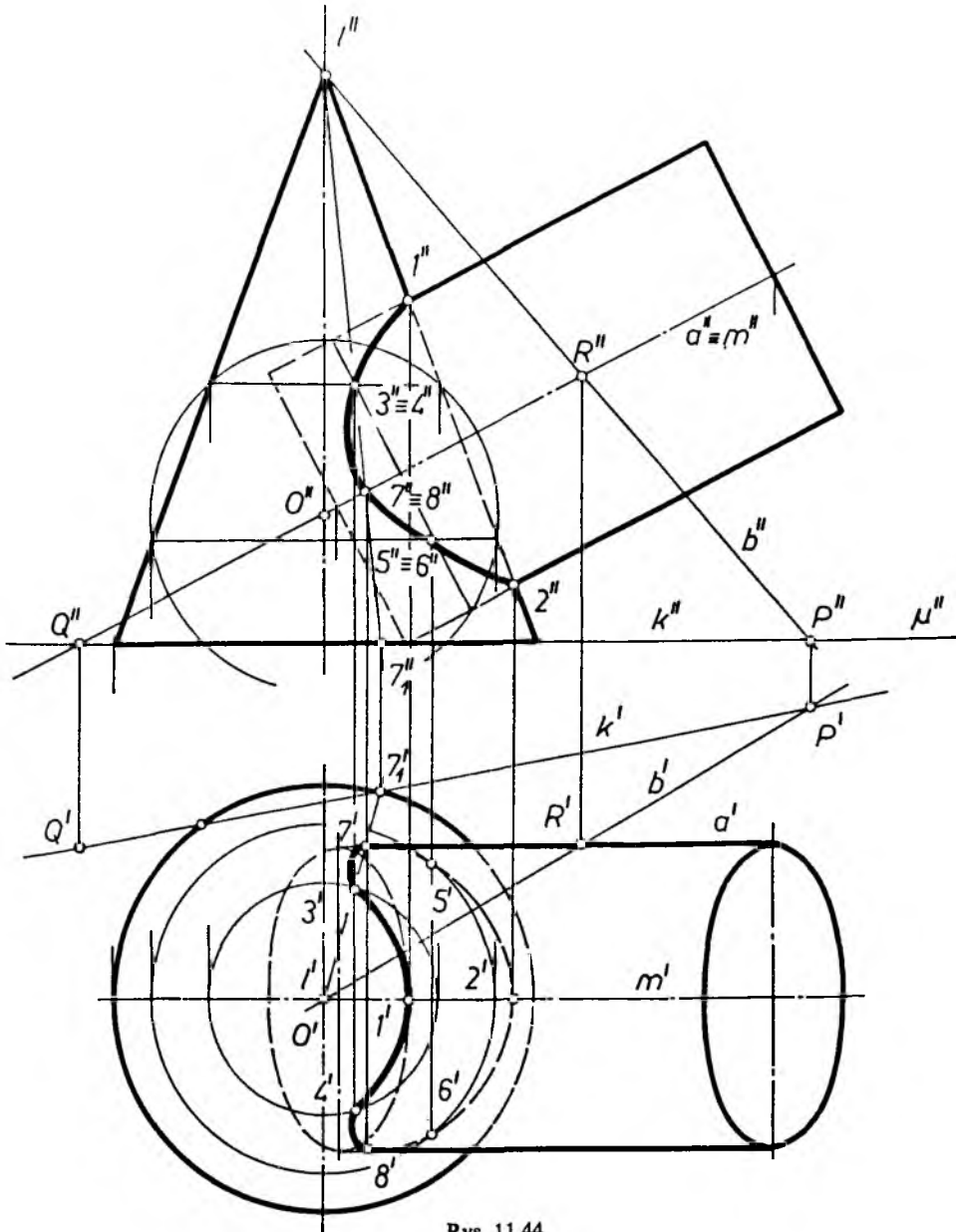
Rys. 11.43a. Przenikanie powierzchni dwóch walców o przecinających się pod kątem prostym osiach



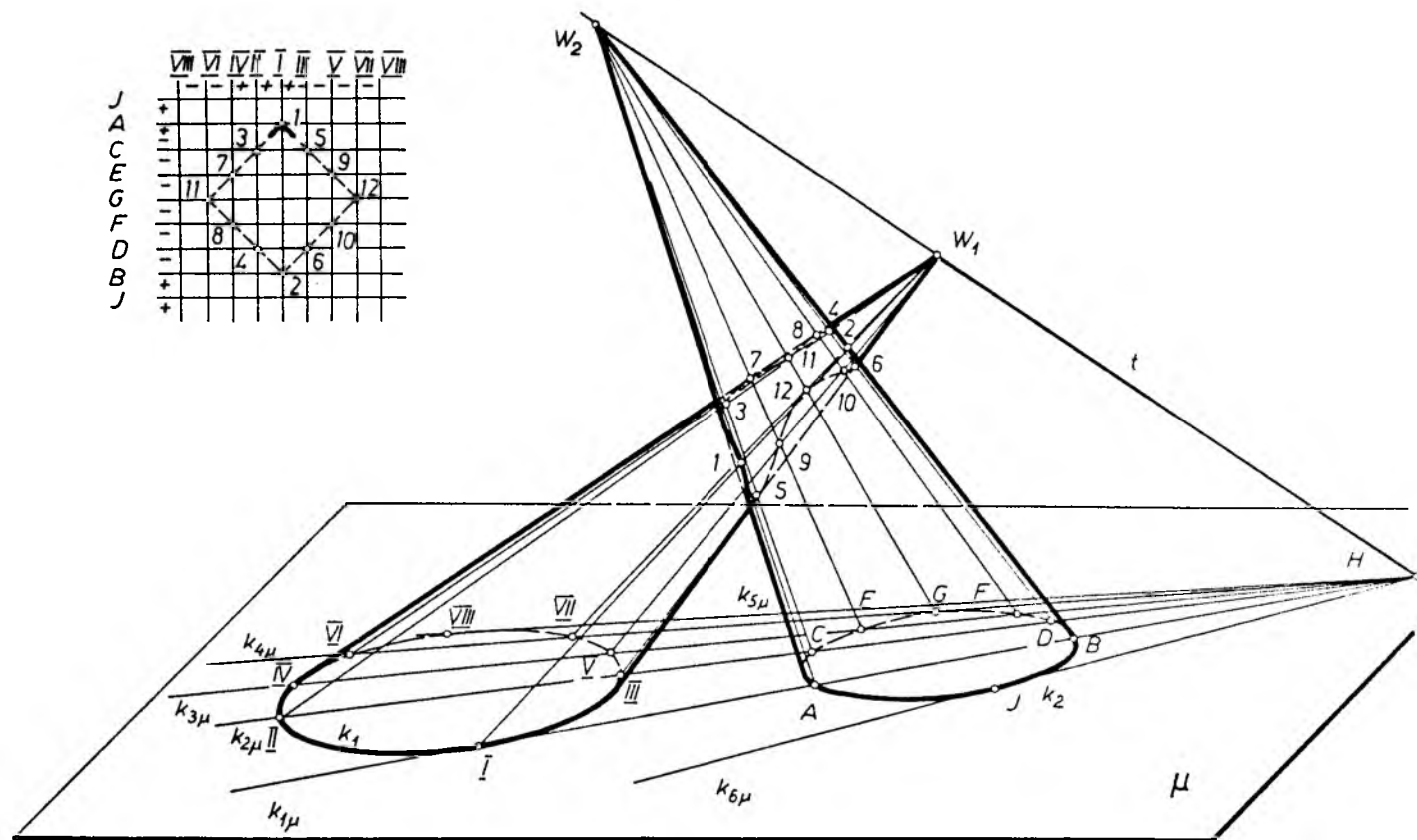
Rys. 11.43.b) Przenikanie powierzchni dwóch walców o przecinających się osiach — kąt między osiami różny od prostego

Przykład 7

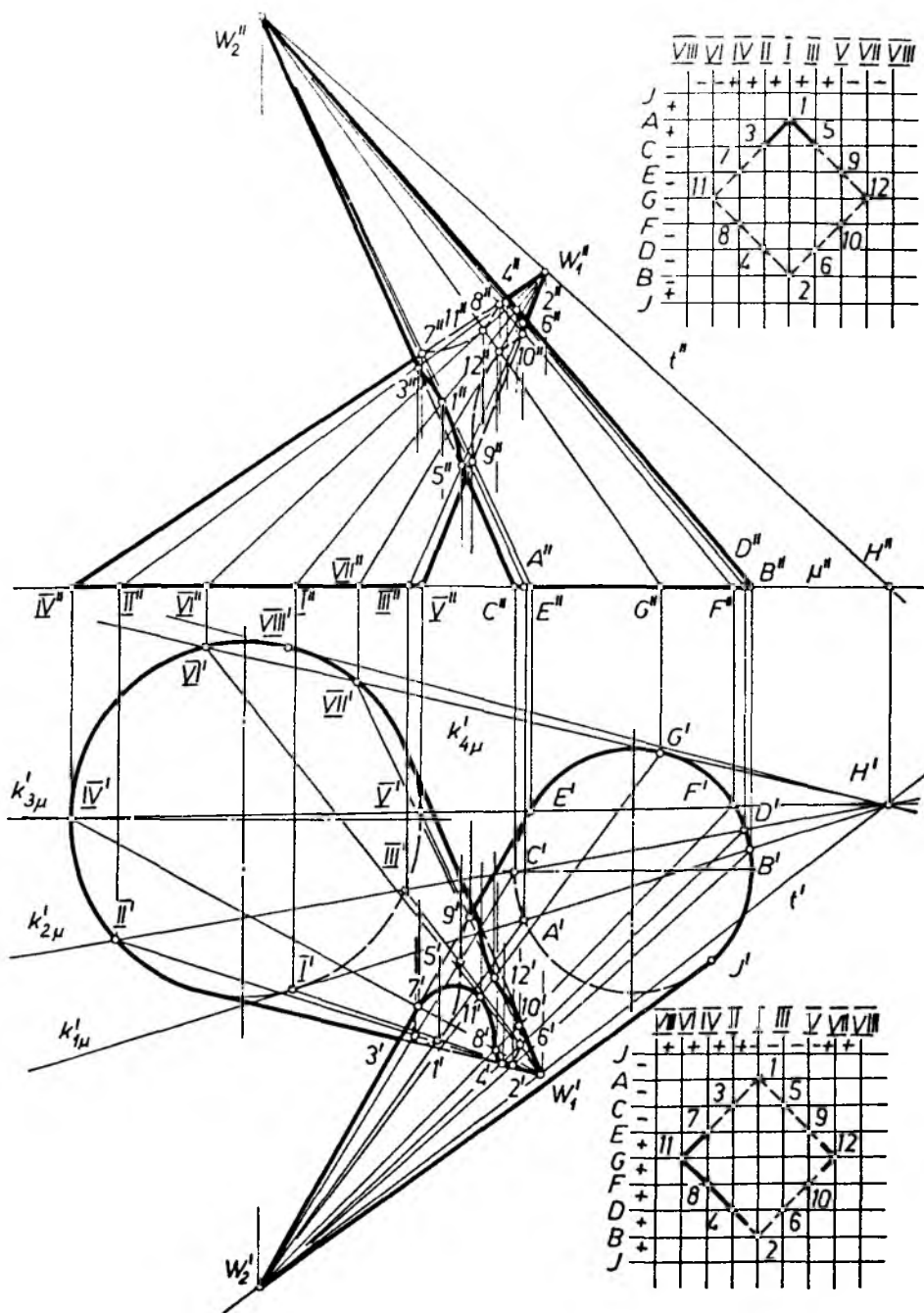
Wyznaczyć linię przenikania powierzchni stożkowej obrotowej i walcowej obrotowej, których osie przecinają się i leżą w płaszczyźnie czołowej. Rozwiązanie podano na rys. 11.44.



Rys. 11.44.



Rys. 11.45.



Rys. 11.46.

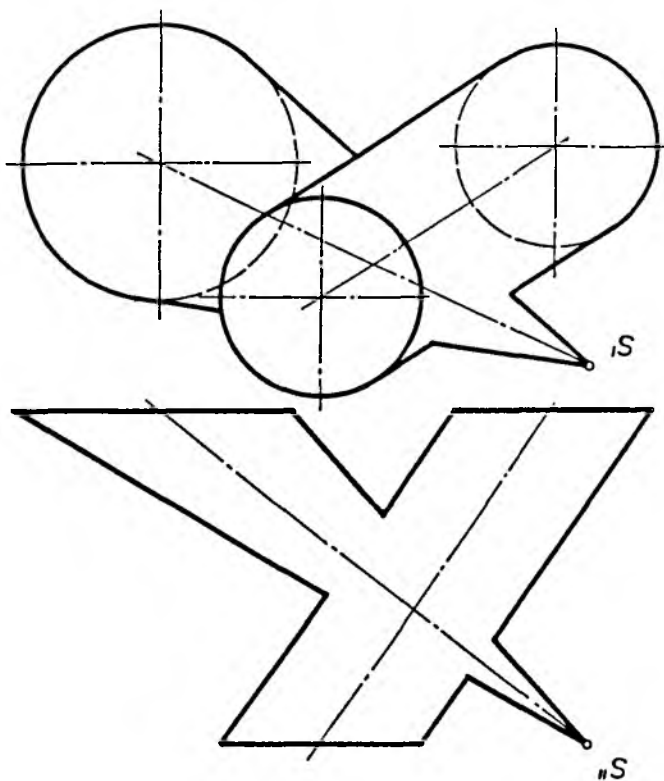
Punkty linii przenikania wyznaczamy metodą kul współśrodkowych o środku w punkcie O przecięcia się osi. Punkty 1 i 2 wyznaczamy natychmiast z rzutu pionowego.

Przykład 8

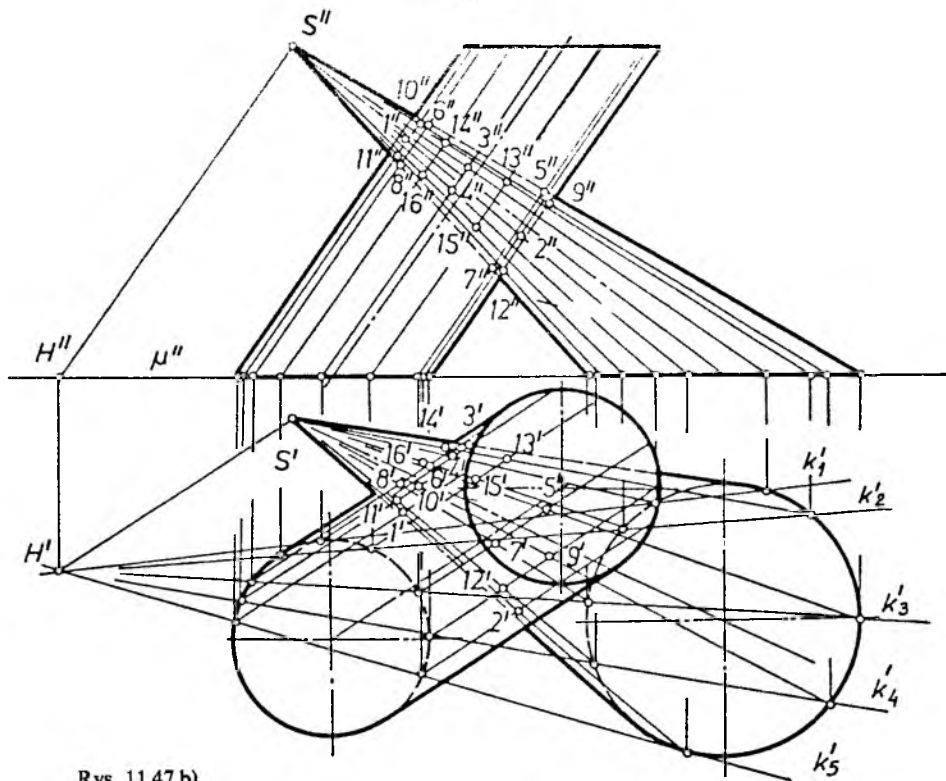
Wyznaczyć linię przenikania dwóch powierzchni stożkowych nieobrotowych.

Dane dwie powierzchnie stożkowe o wierzchołkach W_1 i W_2 ustawione są kierownicami k_1 i k_2 na płaszczyźnie μ . Rozwiązanie pokazano na rysunku poglądowym (rys. 11.45) i w rzutach prostokątnych (rys. 11.46). Przez wierzchołki obu powierzchni prowadzimy prostą t (rys. 11.46) i znajdujemy jej punkt przebiecia z płaszczyzną μ . Każda płaszczyzna przechodząca przez prostą t przecina dane powierzchnie w tworzących. Wobec tego dla wyznaczenia punktów linii przenikania prowadzimy pomocnicze płaszczyzny tnące przechodzące przez prostą t – kolejno α , β , γ , δ . Weźmy dla przykładu pod uwagę płaszczyznę γ , która przecina płaszczyznę μ w krawędzi $k_{3\mu}$ krawędź ta przecina kierownicę k_1 w punktach IV i V, a kierownicę k_2 w punktach E i F. Łączymy otrzymane punkty tworzącymi z wierzchołkami, a w przecięciu się ich otrzymujemy punkty linii przenikania 7, 8, 9 i 10. Sporządzamy schematy przenikania, odpowiednio łączymy punkty linii przenikania na schematach, a następnie na rysunkach, uwzględniając widoczność linii.

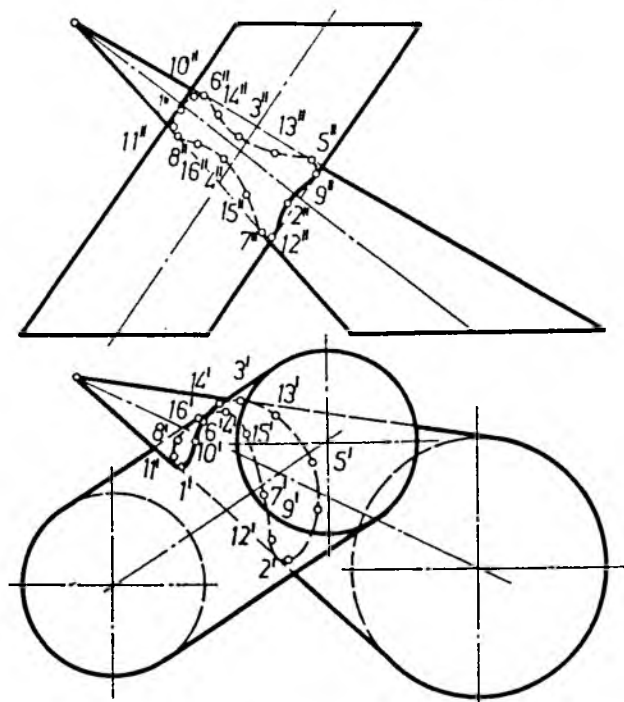
Zasady łączenia punktów na schemacie takie same jak dla wielościanów.



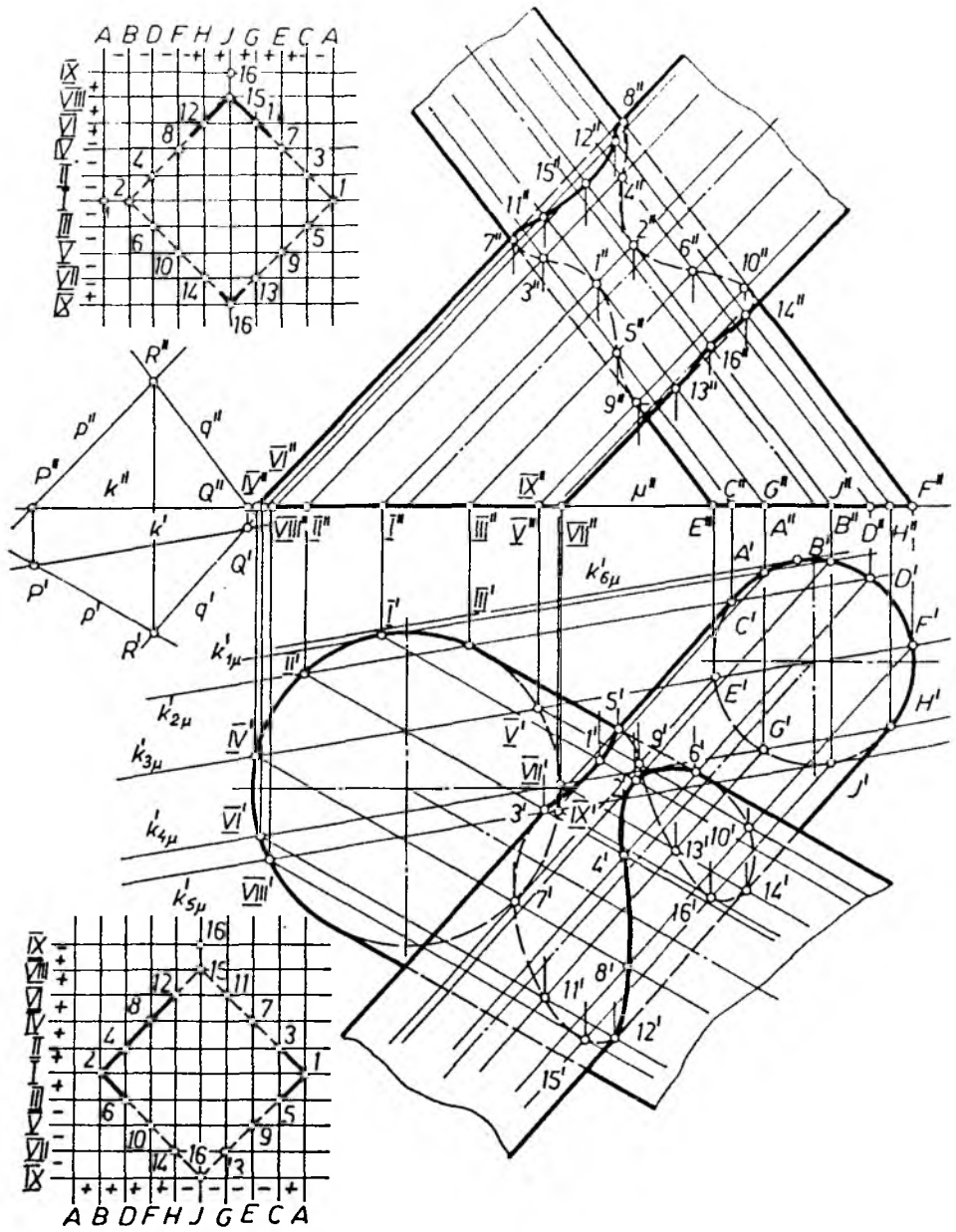
Rys. 11.47a.



Rys. 11.47.b)



Rys. 11.47.c)



Rys. 11.48.

Przykład 9

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni walca z powierzchnią stożkową (rys. 11.47a).

Przez wierzchołek powierzchni stożkowej prowadzimy prostą t równoległą do tworzących powierzchni walcowej. Znajdujemy jej punkt przebiecia z płaszczyzną μ , na której ustawione są kierownice obu powierzchni. Przez prostą t prowadzimy kolejno płaszczyzny α_i , które przecinają płaszczyznę μ w krawędziach $k_1, k_2, k_3, \dots$. Znajdujemy punkty przecięcia krawędzi z kierownicami, prowadzimy tworzące oraz wyznaczamy punkty linii przenikania w przecięciu odpowiednich współpłaszczyznowych tworzących. Wyznaczone punkty linii przenikania pokazano na rys. 11.47b. Następnie łączymy punkty linii przenikania – w razie potrzeby można posłużyć się schematem przenikania.

Na rys. 11.47c pokazano linię przenikania.

Przykład 10.

Wyznaczyć linię przenikania dwóch powierzchni walcowych nieobrotowych. Rozwiązanie podano na rys. 11.48.

Dane powierzchnie walcowe ustawione są kierownicami na płaszczyźnie poziomej μ . Dla wyznaczenia punktów linii przenikania prowadzimy pomocnicze płaszczyzny tnące, równoległe do tworzących obu powierzchni walcowych. Dla wyznaczenia ustawienia tych płaszczyzn prowadzimy tzw. płaszczyznę kierowniczą φ równoległą do tworzących obu powierzchni. W tym celu obieramy dowolny punkt P w przestrzeni, prowadzimy przez niego proste p i q równoległe do tworzących obu powierzchni i wyznaczamy jej krawędź k z płaszczyzną μ . Następnie prowadzimy pomocnicze płaszczyzny tnące $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, znajdujemy ich krawędzie $k_1, k_2, k_3, \dots$ z płaszczyzną μ . Znajdujemy dalej punkty przecięcia krawędzi z kierownicami, prowadzimy przez te punkty tworzące oraz wyznaczamy punkty linii przenikania. Sporządzamy schematy przenikania, odpowiednio łączymy punkty linii przenikania na schematach, a następnie na rysunku, uwzględniając widoczność linii.

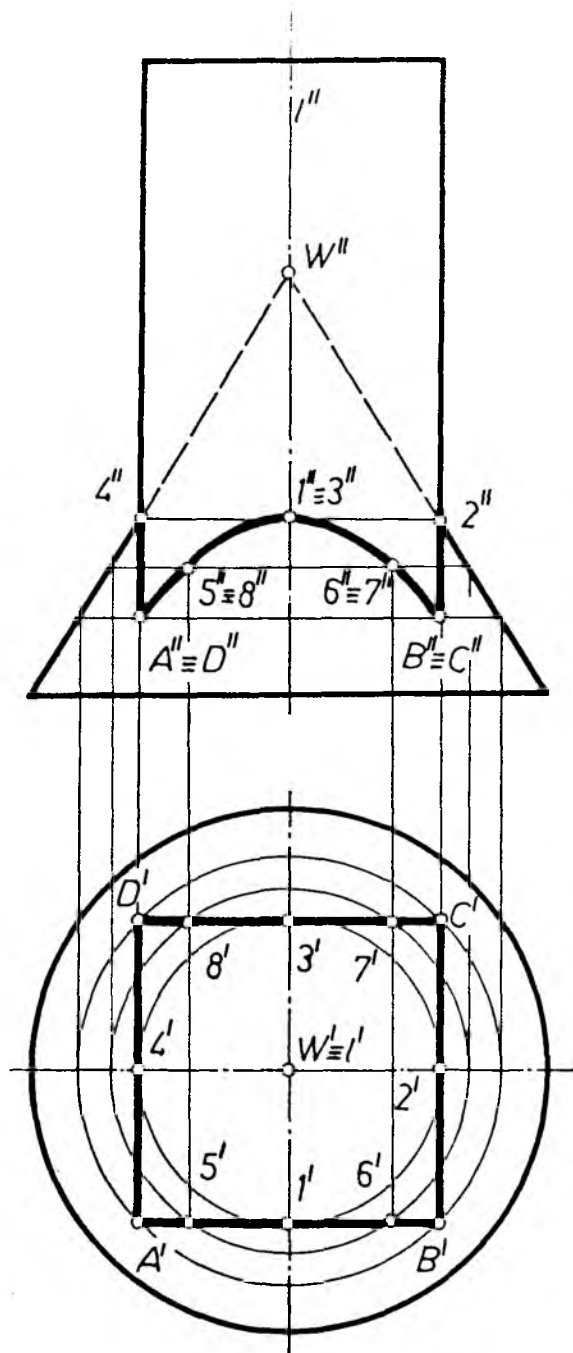
11.8. Przenikanie powierzchni z wielościanami

Zbiór punktów wspólnych powierzchni i ścian wielościanu nazywamy linią przenikania tej powierzchni z wielościanem. Linia przenikania powierzchni z wielościanem składa się z szeregu odcinków linii krzywych płaskich, przecinających się na krawędziach wielościanu w punktach, w których te krawędzie przebijają powierzchnię.

Przenikanie powierzchni z wielościanami przedstawianymi na przykładach.

Przykład 1.

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni stożkowej obrotowej z powierzchnią graniastosłupa czworokątnego prawidłowego.

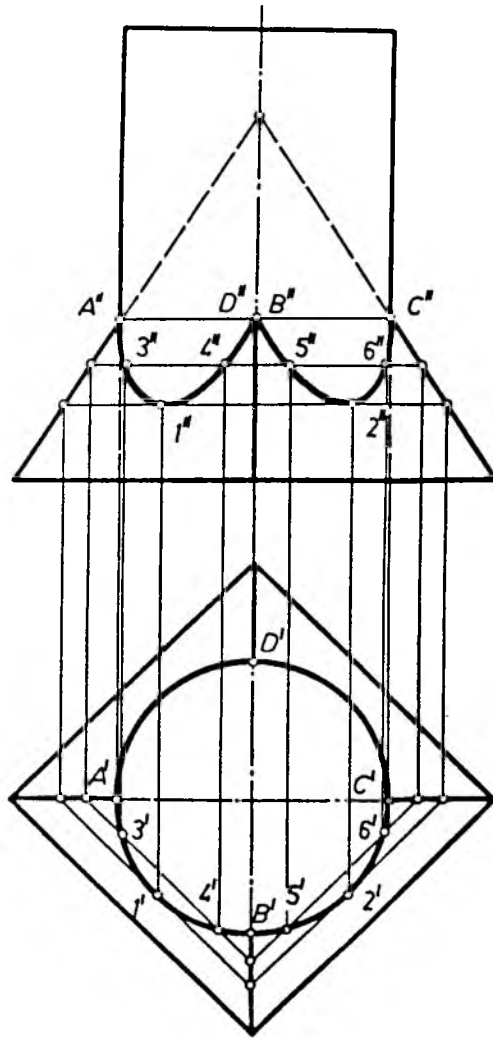


Rys. 11.49. Przenikanie stożka i graniastopuła prawidłowego czworokątnego

Punkty linii przenikania wyznaczamy za pomocą równoleżników powierzchni stożkowej. Linia przenikania składa się z czterech łukowych odcinków, czterech hiperbol (rys. 11.49).

Przykład 2

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni walcowej obrotowej z czworokątnym ostrosłupem prawidłowym. Punkty linii przenikania wyznaczamy za pomocą prostych poziomych obranych na pobocznicy ostrosłupa. Linia przenikania składa się z czterech łukowych odcinków, czterech elips (rys. 11.50).

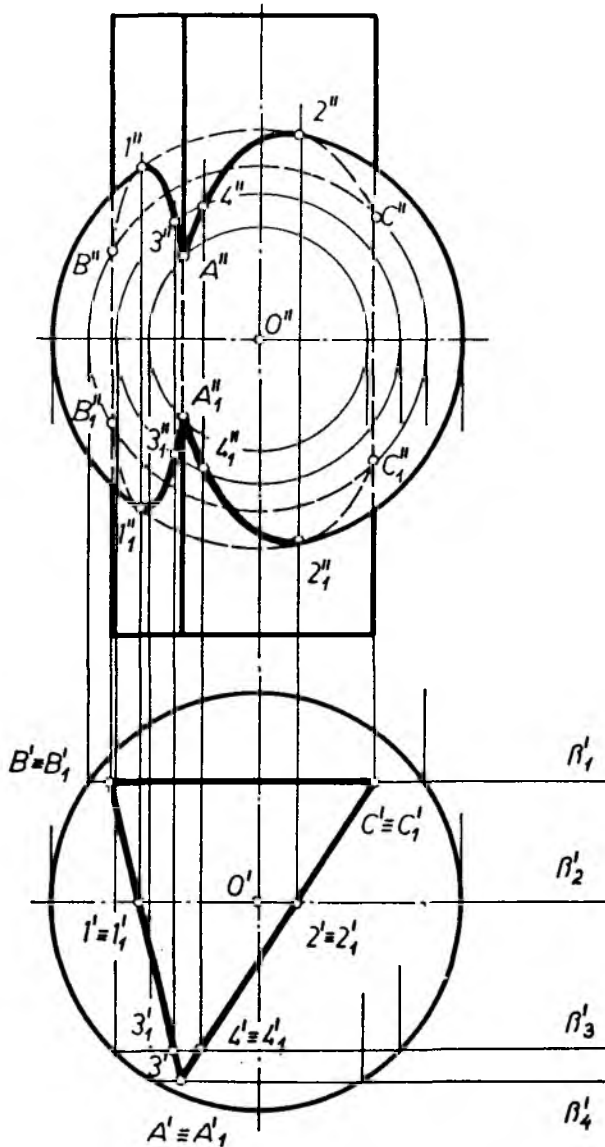


Rys. 11.50. Przenikanie walca z ostrosłupem prawidłowym czworokątnym

Przykład 3

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni kuli z poboczną graniastosłupa trójkątnego prostego. Rozwiązanie podano na rys. 11.51.

Punkty linii przenikania wyznaczamy za pomocą pomocniczych płaszczyzn czołowych. Linia przenikania składa się z dwóch krzywych przestrzennych, przy czym każda z nich jest utworzona z trzech odcinków łukowych, trzech różnych okręgów.

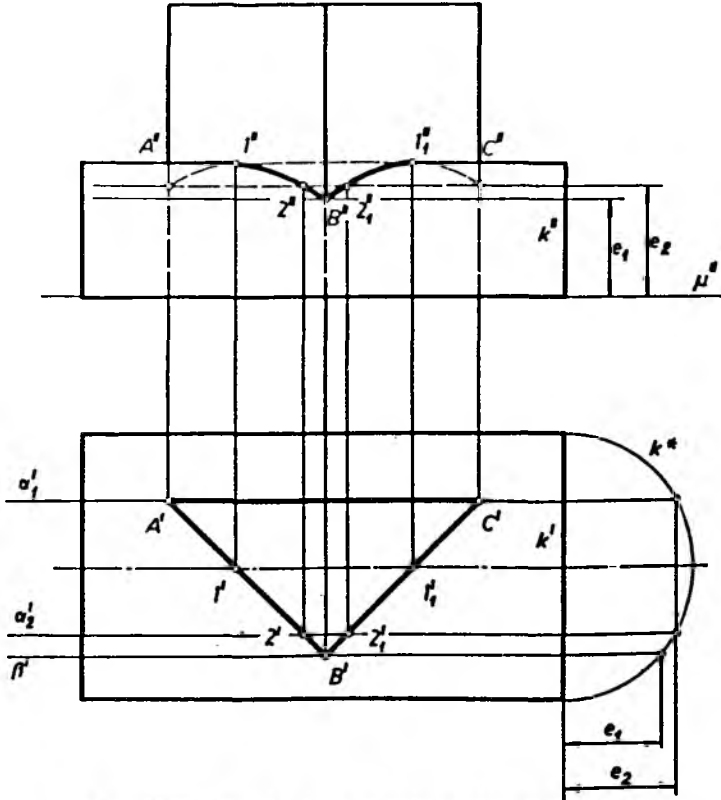


Rys. 11.51. Przenikanie powierzchni kuli i graniastosłupa trójkątnego prostego

Przykład 4

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni walcowej obrotowej z powierzchnią graniastosłupa trójkątnego prostego. Rozwiązanie podano na rys. 11.52.

Punkty linii przenikania wyznaczamy za pośrednictwem płaszczyzn czołowych i kładu poziomego przekroju normalnego powierzchni walcowej. Linia przenikania składa się z dwóch odcinków łukowych (dwóch jednakowych elips) i z odcinka prostej.

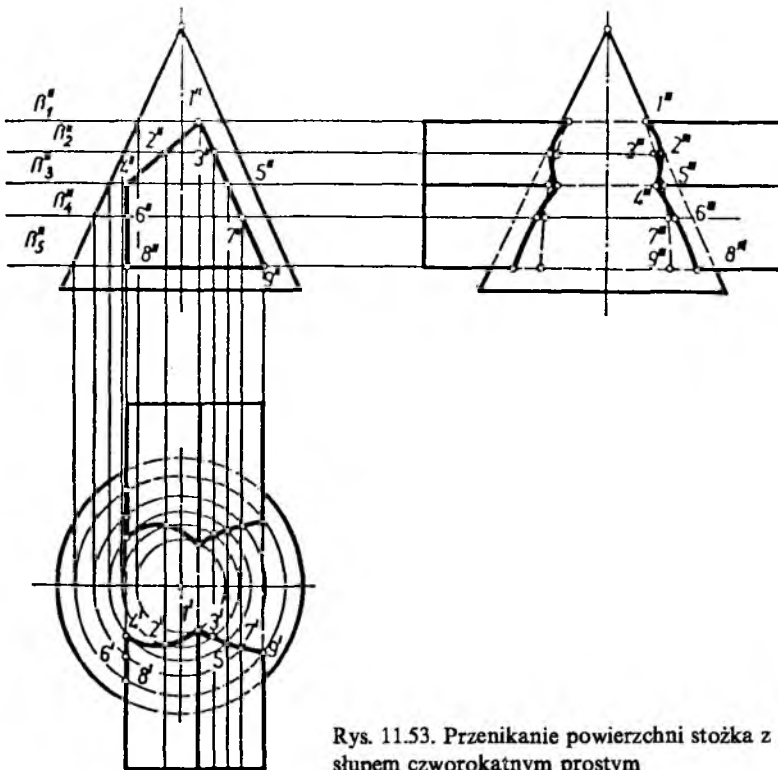


Rys. 11.52. Przenikanie powierzchni walcowej obrotowej z powierzchnią graniastosłupa trójkątnego prostego

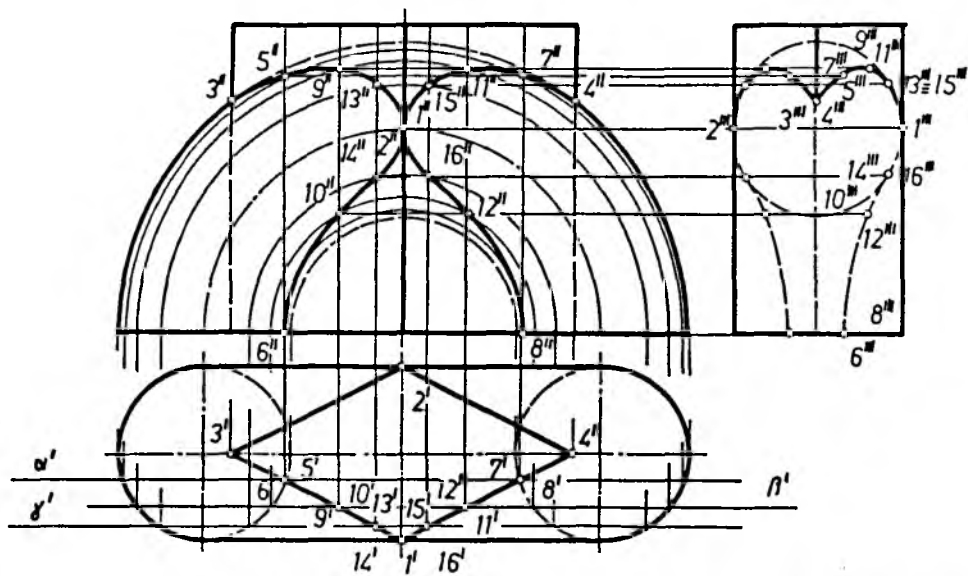
Przykład 5

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni stożka obrotowego z graniastosłupem czworokątnym prostym. Rozwiązanie podano na rys. 11.53.

Punkty figur przenikania wyznaczamy na pośrednictwem płaszczyzn poziomych. Linię przenikania stanowią dwie symetryczne gałęzie, z których każda składa się z czterech następujących odcinków: okręgu, elipsy, paraboli i hiperboli.



Rys. 11.53. Przenikanie powierzchni stożka z graniastostupem czworokątnym prostym



Rys. 11.54. Przenikanie powierzchni pierścieniowej z graniastostupem prostym czworokątnym

Przykład 6

Wyznaczyć linię przenikania powierzchni pierścieniowej z graniastosłupem prostym. Rozwiązanie podano na rys. 11.54.

Punkty 1, 2, 3 i 4 linii przenikania wyznaczamy natychmiast. Dolne punkty wyznaczamy za pośrednictwem płaszczyzn czołowych, które przecinają powierzchnię pierścieniową w okręgach.

Rozdział XII

AKSONOMETRIA

12.1. Rzut aksonometryczny

Aksonometrią lub rzutem aksonometrycznym nazywamy metodą wykreślenia rzutu utworu geometrycznego (na ogół przestrzennego), ustawionego w prostokątnym układzie odniesienia, na rzutni aksonometrycznej, w danym kierunku rzutowania.

Dany jest prostokątny układ odniesienia (rys. 12.1) złożony z trzech rzutni π_1, π_2, π_3 o początku O i osiach x, y, z, oraz dana jest w tym układzie płaszczyzna π_a dowolnie ustawiona, przecinająca osie x,y,z w punktach X,Y,Z.

Płaszczyznę π_a nazywamy rzutnią aksonometryczną oraz trójkąt XYZ – trójkątem śladów aksonometrycznych, którego boki (ślady) oznaczamy literami a,b,c.

Przyjmujemy kierunek rzutowania $k \parallel \pi_a$. Wyznaczamy rzut początku układu O na rzutnię π_a , w kierunku rzutowania k; rzut punktu O na rzutnię π_a nazywamy środkiem aksonometrii i oznaczamy O^a . Łączymy środek aksonometrii O^a z punktami X,Y,Z i otrzymane proste oznaczamy x^a, y^a, z^a ; proste te są rzutami osi x,y,z na rzutnię π_a w kierunku k ($k_1 \parallel k$) i nazywamy je osiami aksonometrycznymi. Na podstawie właściwości rzutu równoległego, aksonometrie prostych równoległych do osi układu współrzędnych są prostymi równoległymi do osi aksonometrycznych.

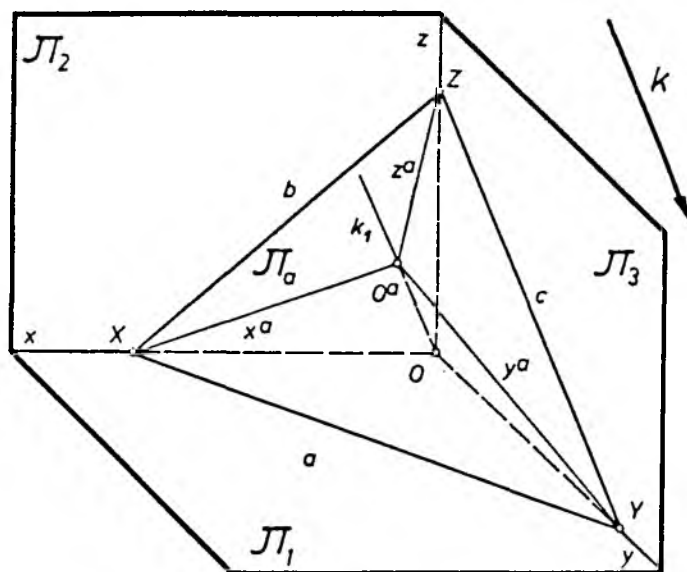
Rozróżniamy dwa rodzaje aksonometrii:

- 1) aksonometrię prostokątną gdy $k \perp \pi_a$,
- 2) aksonometrię ukośnokątną gdy $k \not\perp \pi_a$.

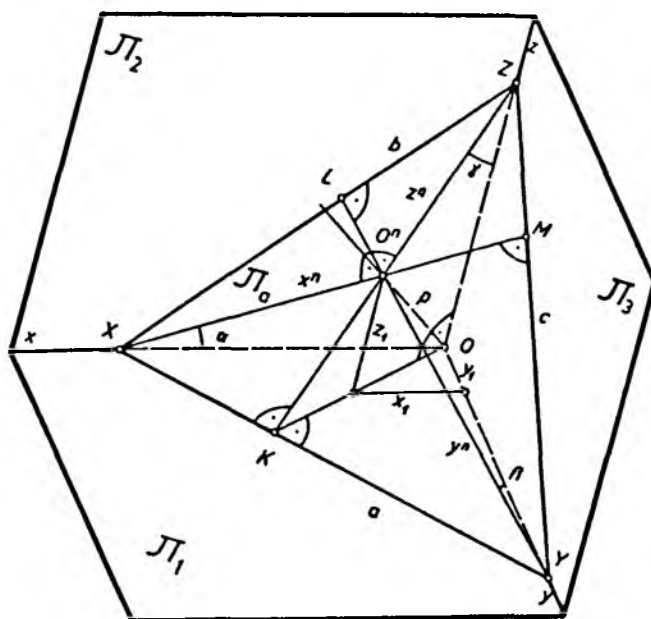
12.2. Aksonometria prostokątna

12.2.1. Określenie aksonometrii prostokątnej

Jeżeli rzutnia aksonometryczna nie jest równoległa do żadnej z osi x,y,z układu prostokątnego, a kierunek rzutowania jest prostopadły do rzutni aksonometrycznej $k \perp \pi_a$, to otrzymujemy aksonometrię prostokątną (rys. 12.2).



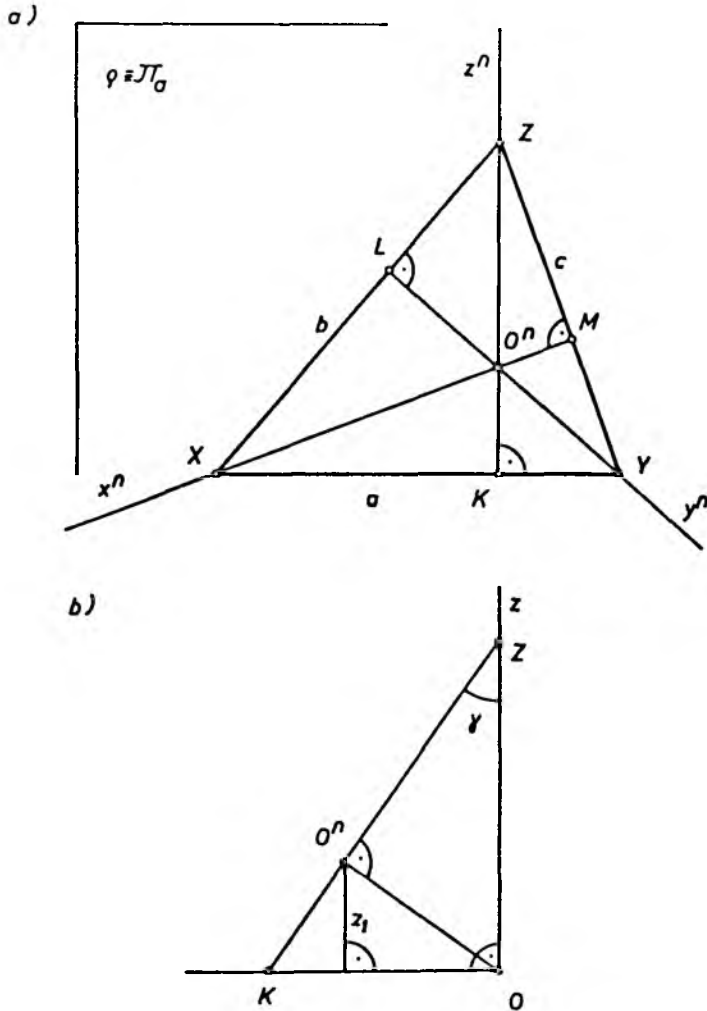
Rys. 12.1. Trójkąt śladów aksonometrycznych



Rys. 12.2. Aksometria prostokątna

Wówczas środek aksonometrii oznaczamy O'' i nazywamy środkiem aksonometrii prostokątnej, osie aksonometrii prostokątnej oznaczamy x'' , y'' , z'' i nazywamy osiami aksonometrii prostokątnej.

12.2.2. Twierdzenia aksonometrii prostokątnej



Rys. 12.3.

Oznaczamy odpowiednio przez K, L, M punkty przecięcia osi aksonometrycznych z bokami a, b, c , trójkąta śladów aksonometrycznych (rys. 12.2).

Oś z'' prostopadła do π_1 jest też prostopadła do prostej a ; rzutem prostokątnym prostych prostopadłych $z'' \perp a$ na rzutni π_a (z których a jest równoległa do rzutni, bo na niej leży) są dwie proste prostopadłe $z'' \perp a$; analogicznie $y'' \perp b$, $x'' \perp c$. Zatem:

Twierdzenie 1: Osie aksonometrii prostokątnej są prostymi, na których leżą wysokości trójkąta śladów aksonometrycznych.

W trójkącie prostokątnym ZOK punkt O'' leży wewnątrz odcinków $\overline{XM}$, $\overline{YL}$. Wobec tego:

Twierdzenie 2: W aksonometrii prostokątnej trójkąt śladów aksonometrycznych jest trójkątem ostrokątnym.

Oba twierdzenia ilustruje rys. 12.3a i b.

Oznaczamy przez: α, β, γ kąty między osiami x, y, z i rzutnią aksonometryczną π_a , tzn. kąty między osiami x, y, z i osiami aksonometrycznymi x'', y'' i z'' .

Jeżeli oznaczmy przez x_1, y_1, z_1 współrzędne punktu O'' , to

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = p^2 ;$$

gdzie

$$p = \rho(0,0'') ,$$

dalej mamy:

$$x_1 = p \sin \alpha ,$$

$$y_1 = p \sin \beta ,$$

$$z_1 = p \sin \gamma ,$$

i po podstawieniu:

$$(p \sin \alpha)^2 + (p \sin \beta)^2 + (p \sin \gamma)^2 = p^2 \quad | : p^2 ,$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 ,$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha; \quad \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta; \quad \sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma .$$

Po uporządkowaniu otrzymamy:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2 .$$

Ten związek między kątami α, β, γ nazywamy równaniem charakterystycznym aksonometrii prostokątnej.

12.2.3. Skrócenia sksonometryczne

Na osiach x, y, z odmierzymy od punktu O trzy równe odcinki e . Długości rzutów tych odcinków (na rzutnię π_a) leżących na osiach x'', y'', z'' są następujące (rys. 12.4):

$$e_x = e \cos \alpha ,$$

$$e_y = e \cos \beta ,$$

$$e_z = e \cos \gamma .$$

$$e_x : e_y : e_z = S_x : S_y : S_z$$

nazywamy stosunkiem skróceń aksonometrycznych.

Z równania charakterystycznego $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2$ mamy:

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2 e^2 ,$$

stąd

$$e = \sqrt{\frac{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}{2}} .$$

Ponieważ zawsze jest $S_x, S_y, S_z < 1$ (gdyż $\alpha, \beta, \gamma > 0$) więc z warunku

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2 ,$$

mamy

$$S_x^2 + S_y^2 = 2 - S_z^2 > 1 > S_z^2 ,$$

zatem:

$$S_x^2 + S_y^2 > S_z^2 ,$$

$$S_y^2 + S_z^2 > S_x^2 ,$$

$$S_z^2 + S_x^2 > S_y^2 ,$$

$$e_x^2 + e_y^2 > e_z^2 ,$$

$$e_y^2 + e_z^2 > e_x^2 ,$$

$$e_z^2 + e_x^2 > e_y^2 .$$

12.2.4. Rodzaje aksonometrii prostokątnej

Izometria — aksonometria jednomiarowa

Jeżeli rzutnia aksonometryczna jest tak przyjęta, że osie aksonometryczne x'', y'', z'' , tworzą jednakowe kąty z osiami x, y, z , układu prostokątnego, to występuje równość skróceń aksonometrycznych $S_x = S_y = S_z$. Wówczas trójkąt śladów aksonometrycznych jest trójkątem równobocznym, kąty między osiami aksonometrycznymi są jednakowe i wynoszą 120° . Wielkość skrócenia aksonometrycznego

$$S = S_x = S_y = S_z$$

określamy z równania charakterystycznego

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2 .$$

Otrzymujemy:

$$3S^2 = 2$$

i dalej

$$S = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82.$$

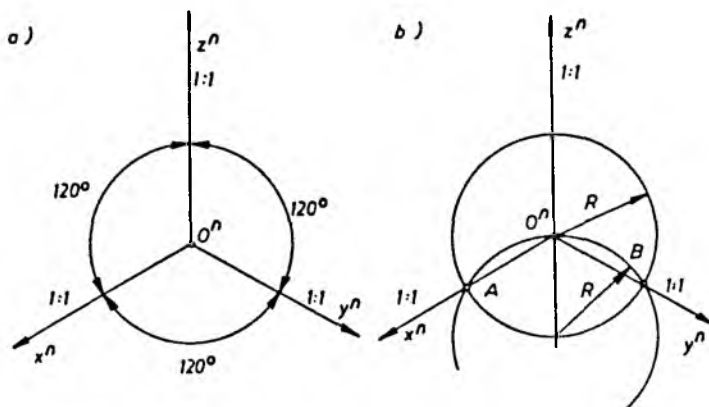
W praktyce przyjmujemy:

$$S_x = S_y = S_z = 1.$$

Stosunek skróceń aksonometrycznych:

$$S_x : S_y : S_z = 1 : 1 : 1.$$

Układ osi aksonometrycznych pokazuje rys. 12.5.



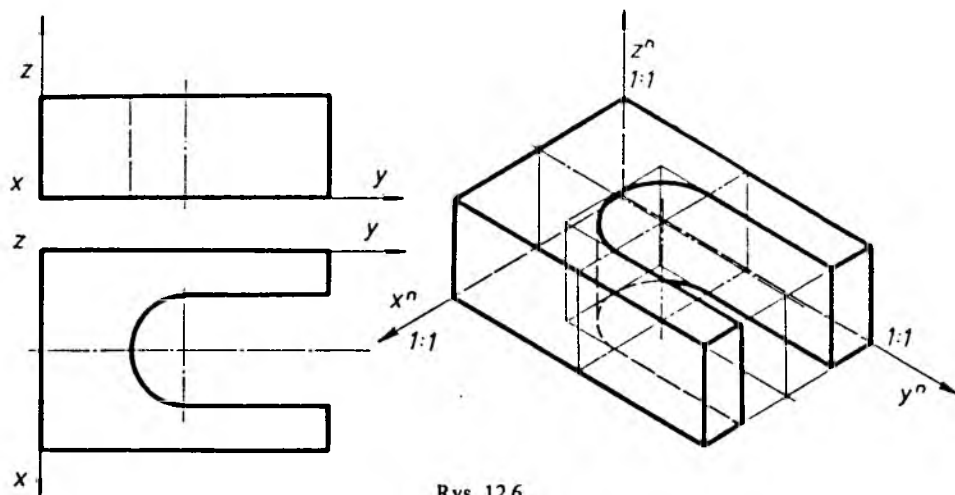
Rys. 12.5. Osie w izometrii: a) kąty między osiami, b) konstrukcja

Dla przykładu podajemy rzut aksonometryczny prostopadłościanu z wycięciem (rys. 12.6).

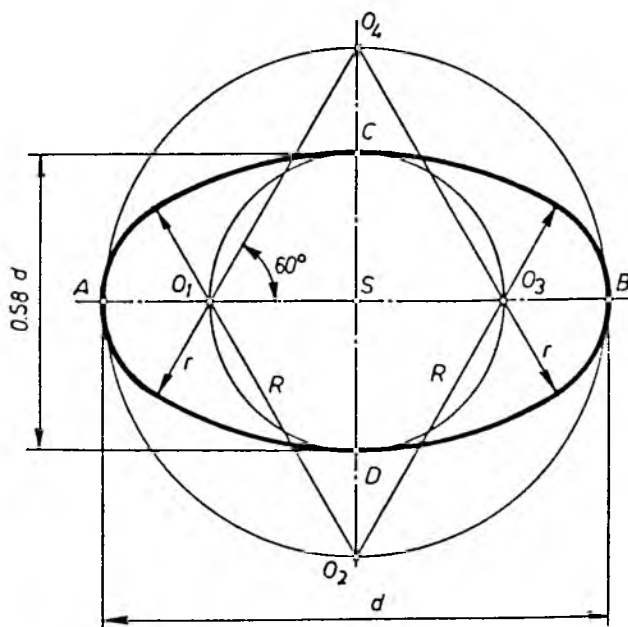
Na rys. 12.9 pokazano sposób rysowania aksonometrycznych rzutów okrętów leżących na ścianach sześciangu, przy czym osie aksonometryczne są równoległe do krawędzi sześciangu.

Rysowanie okręgu w izometrii. Aksonometrią prostokątną okręgu jest elipsa. Rys. 12.7 podaje powszechnie stosowany sposób wykreślania okręgu w izometrii jako owalu zastępującego elipsę, jeśli dane są jej osie AB i CD o stosunku długości równym $\sqrt{3}/3 \approx 0,58$, przy czym rysunek ten uwzględnia skrócenie aksonometryczne $S \approx 0,82$.

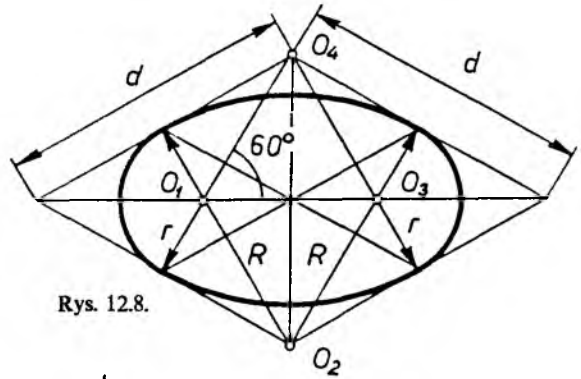
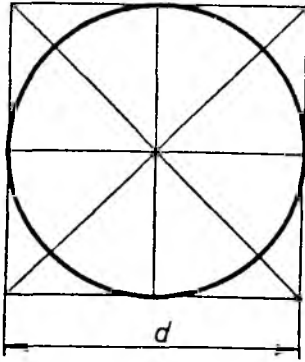
Następny rysunek — 12.8 pokazuje rysowanie okręgu w izometrii jako owalu, bez uwzględnienia skrócenia aksonometrycznego (czyli $S=1$).



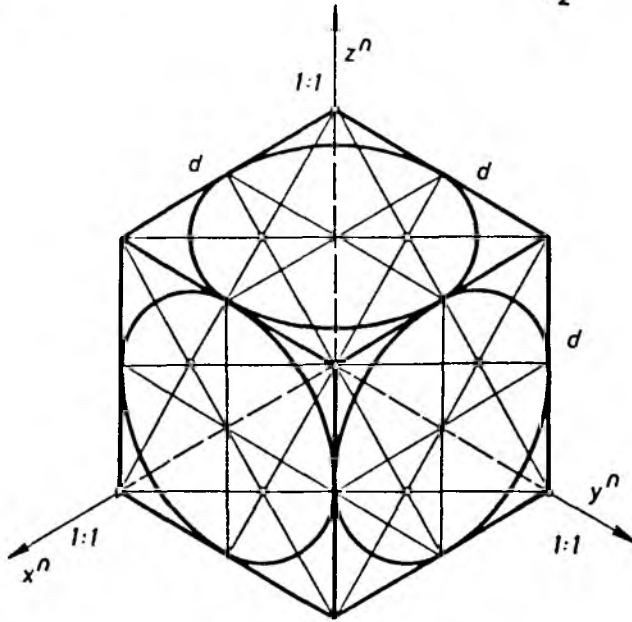
Rys. 12.6.



Rys. 12.7. Konstrukcj owalu w izometrii



Rys. 12.8.

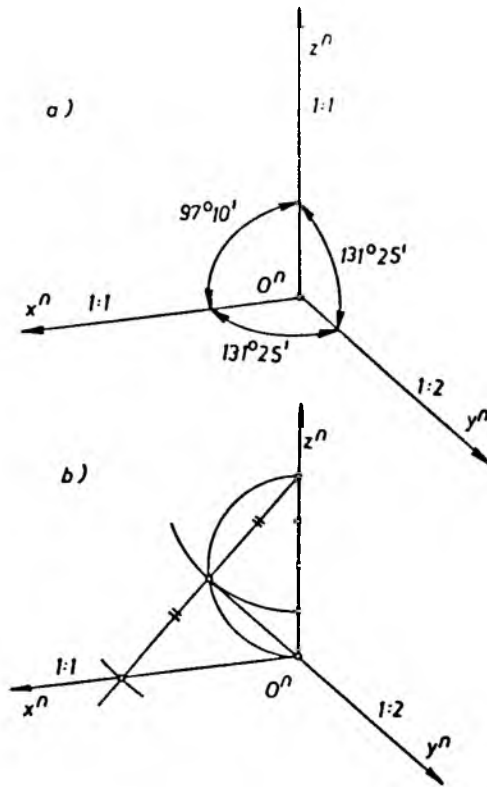


Rys. 12.9.

Dimetria (aksonometria dwumiarowa)

Aksonometrię prostokątną, w której równe są dwa skrócenia aksonometryczne, najczęściej $S_x = S_z$, nazywamy dimetrią czyli aksonometrią dwumiarową. Trójkąt śladów aksonometrycznych jest trójkątem równoramiennym. Zgodnie z zaleceniem polskiej normy stosuje się dimetrię określoną stosunkiem skróceń aksonometrycznych $S_x : S_y : S_z = 2 : 1 : 2$, stąd:

$$S_x = S_z = S_y = \frac{1}{2} S_x.$$



Rys. 12.10. Osie w dimetrii:
a) kąty między osiami;
b) konstrukcja

Ze wzoru

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2$$

mamy:

$$S_x^2 + \left(\frac{S_x}{2}\right)^2 + S_x^2 = 2,$$

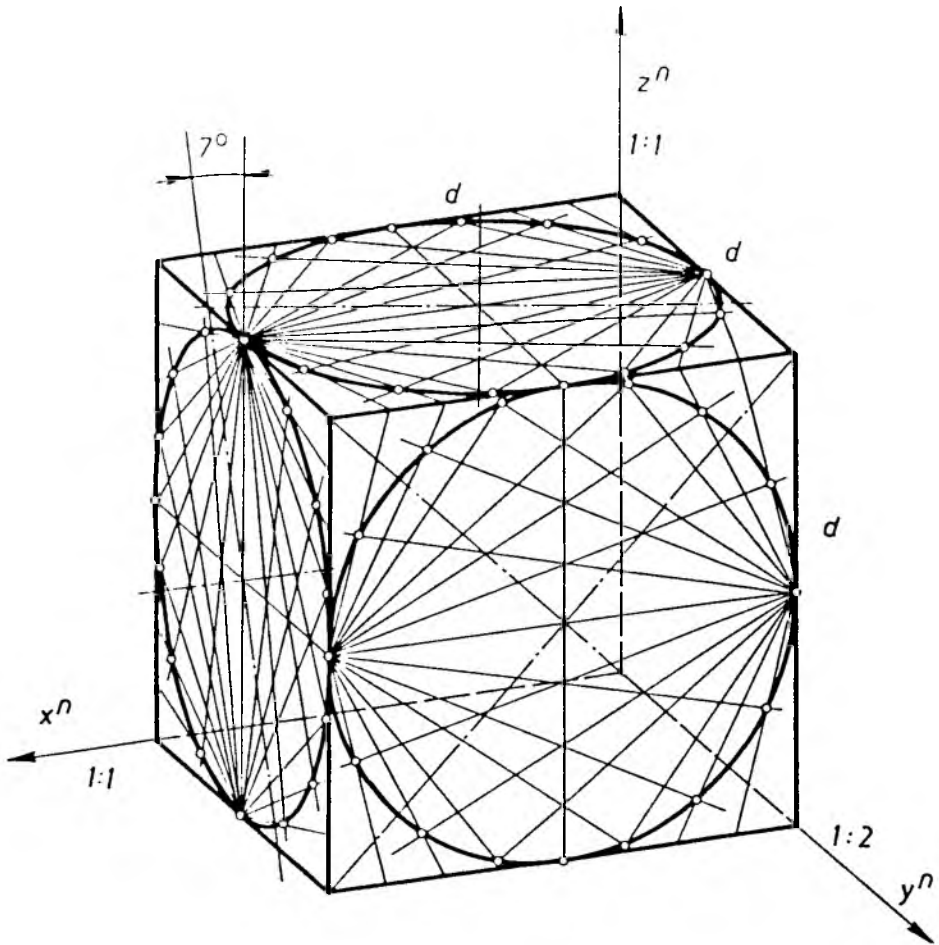
i dalej

$$\frac{9}{4} S_x^2 = 2,$$

$$S_x = S_z = \frac{2}{3} \sqrt{2} \approx 0.94, \quad S_y = \frac{1}{3} \sqrt{2} \approx 0.47.$$

W praktyce przyjmujemy:

$$S_x = S_z = 1, \quad S_y = 0,5$$



Rys. 12.11. Rysowanie okręgów w dimetrii

Układ osi aksonometrycznych podano na rys. 12.10a i ich konstrukcyjne wyznaczenie na rys. 12.10b.

Rzut aksonometryczny w dimetrii sześcianu z przynależnymi okręgami pokazano na rys. 12.11.

Anizometria (aksometria trójmiarowa, trimetryczna, anizometryczna)

Aksonometrię prostokątną, w której wszystkie skrócenia aksonometryczne są różne, nazywamy anizometrią: $S_x \neq S_y \neq S_z$ oraz $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

W praktyce nie ma zastosowania ze względu na trudniejszą konstrukcję od dwu- i jednomiarowej aksonometrii.

12.3. Aksonometria ukośnokątna

12.3.1. Określenie aksonometrii ukośnokątnej

Jeżeli kierunek rzutowania k nie jest prostopadły do rzutni aksonometrycznej π_a , to rzut ukośnokątny figury geometrycznej na rzutnię w kierunku k nazywamy aksonometrią ukośnokątną tej figury.

Rzuty ukośnokątne osi x, y, z na rzutnię aksonometryczną oznaczamy x'', y'', z'' , a środek aksonometrii O'' .

Równanie charakterystyczne aksonometrii ukośnokątnej ma postać:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi$$

lub

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi,$$

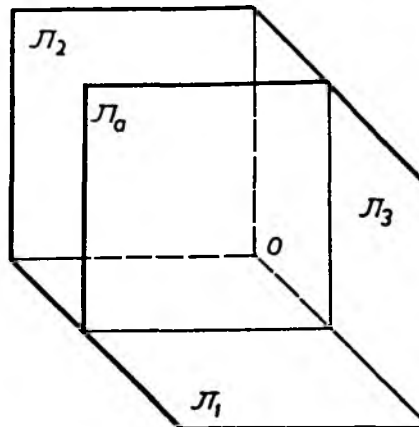
gdzie φ kąt nachylenia kierunku rzutowania k do rzutni aksonometrycznej π_a .
Gdy $\varphi = 90^\circ$ ($\operatorname{ctg} \varphi = 0$) otrzymamy oczywiście aksonometrię prostokątną.

W aksonometrii ukośnokątnej rzutnię aksonometryczną przyjmuje się zazwyczaj równoległą do jednej z rzutni układu prostokątnego.

12.3.2. Rodzaje aksonometrii ukośnokątnej

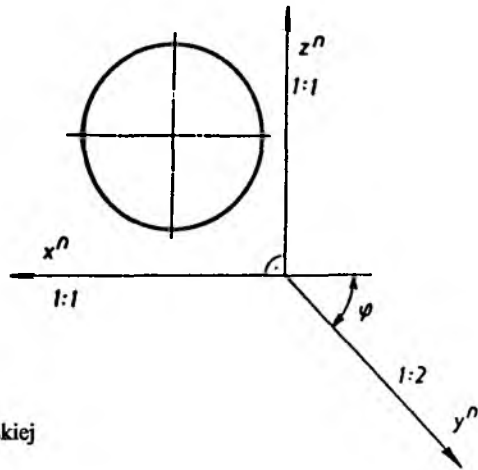
Rzut ukośny (dimetria ukośnokątna, aksonometria kawalerska)

Jeżeli π_a jest równoległa do π_2 to rzut ukośnokątny figury na rzutnię π_a nazywamy rzutem ukośnym (aksonometrią kawalerską lub dimetrią ukośnokątną) tej figury (rysunek 12.12).



Rys. 12.12. Aksonometria kawalerska

Osie x'' i z'' tworzą kąt prosty, a stosunek skróceń aksonometrycznych przyjmuje się zazwyczaj $S_x:S_y:S_z = 2:1:2$, oraz kąt $\varphi = 45^\circ$ (rys. 12.13).



Rys. 12.13. Okrąg w aksonometrii kawalerskiej

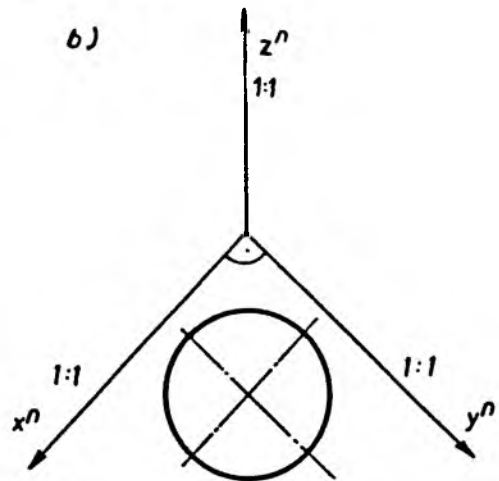
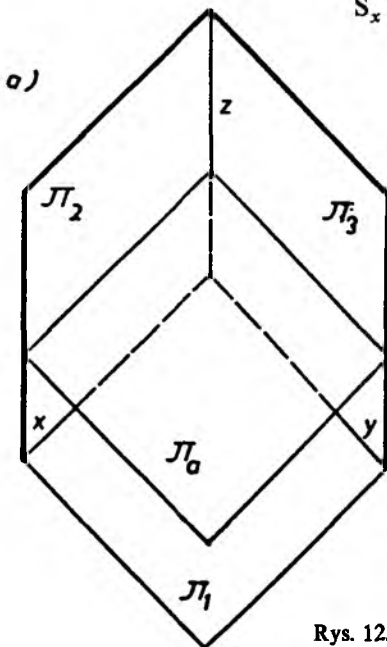
Figury płaskie leżące na płaszczyznach równoległych do π_a odwzorowują się bez zniekształceń, zatem np. okrąg odwzorowuje się jako okrąg itp.

Aksonometria wojskowa

Jeżeli $\pi_a \parallel \pi_1$ (rys. 12.14a) to rzut ukośnokątny figury na rzutnię π_a nazywamy aksonometrią wojskową tej figury. Układ osi aksonometrycznych jest podany na rys. 12.14b.

Osie x^n i y^n tworzą kąt prosty. Stosunki skróceń aksonometrycznych przyjmuje się:

$$S_x : S_y : S_z = 1 : 1 : 1$$



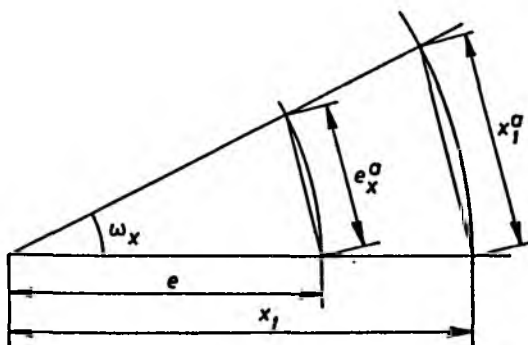
Rys. 12.14. Aksonometria wojskowa

Figury płaskie leżące na płaszczyznach równoległych do rzutni aksonometrycznej odwzorowują się bez zniekształceń, zatem na przykład okrąg odwzorowuje się jako okrąg.

12.4. Kąty proporcjonalności

Dla ułatwienia wykreślenia rzutu aksonometrycznego utworu geometrycznego konstruuje się tzw. kąty proporcjonalności. Istotne jest to dla skrótów aksonometrycznych różnych od 1.

Kąt proporcjonalności tworzy się na podstawie twierdzenia Talesa (rys. 12.15):



Rys. 12.15.

jeżeli

$$S_x = \frac{e_x^a}{e},$$

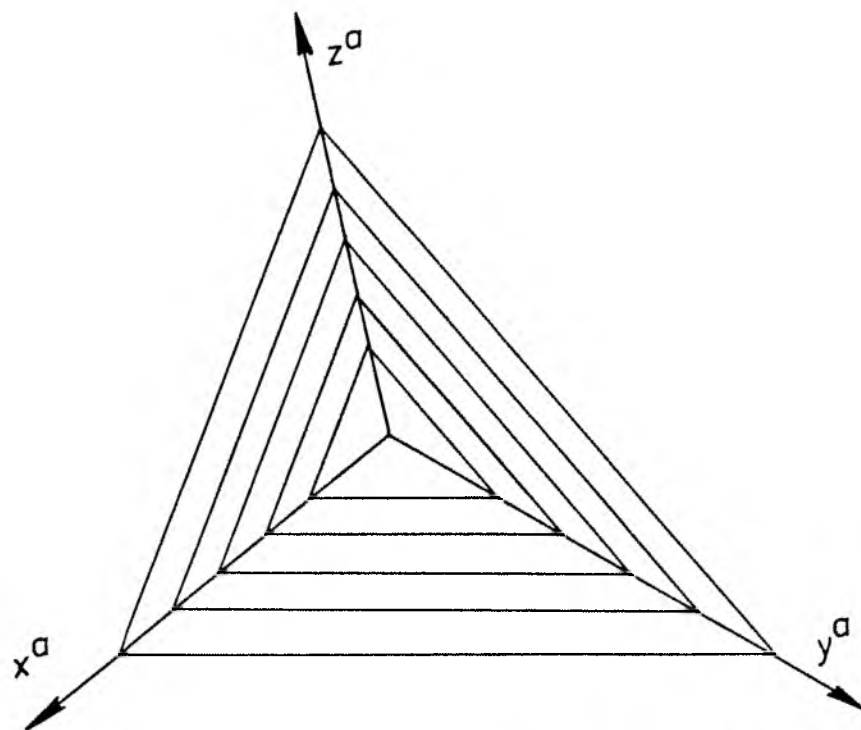
to również

$$S_x = \frac{x_1^a}{x_1}.$$

Podobnie tworzy się ω_y i ω_z .

12.5. Przekroje

Dla pokazania szczegółów wewnętrznej budowy przedmiotów można wykonywać w rzutach aksonometrycznych odpowiednie przekroje. Kierunki kreślowania pokazuje rys. 12.16.



Rys. 12.16. Kierunki kreskowania w aksonometrii

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$A, B, C, \dots$	– punkty
$a, b, c, \dots$	– proste
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	– płaszczyzny
$\omega, \dots$	– kąt obrotu
$\overline{AB}, \dots$	– odcinek o końcach A i B
$m \parallel n, \alpha \parallel \beta, m \parallel \alpha$	– elementy równoległe
$m \parallel n, \alpha \parallel \beta, m \parallel \alpha$	– elementy nierównoległe
$m \perp n, \alpha \perp \beta, m \perp \alpha$	– elementy prostopadłe
$m = AB$	– prosta określona punktami A i B
$\alpha = ABC, \dots$	– płaszczyzna określona punktami A, B i C
$\alpha = mA, \dots$	– płaszczyzna określona prostą m i punktem A
$\alpha = mn, \dots$	– płaszczyzna określona dwiema prostymi m i n
$A = m \cap n, \dots$	– punkt przecięcia prostych m i n
$A = m \cap \alpha, \dots$	– punkt przecięcia (przebiecia) prostej m i płaszczyzny α
$k = \alpha \cap \beta$	– krawędź przecięcia k dwu płaszczyzn α i β
$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots$	– płaszczyzny rzutów: pierwsza (pozioma), druga (pionowa), trzecia (boczna), czwarta...
$x, y, z, \dots$	– osie rzutów
x_{34}, x_{13}, x_{23}	– transformowane osie rzutów
$A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}$	– rzuty punktu A: pierwszy (poziomy), drugi (pionowy), trzeci, czwarty,...
$m^I, m^{II}, m^{III}, m^{IV}$	– rzuty prostej m: pierwszy (poziomy), drugi (pionowy), trzeci, czwarty,...
H_m, V_m, K_m	– ślady prostej m: poziomy, pionowy, boczny
$h_\alpha, v_\alpha, k_\alpha$	– ślady płaszczyzny: poziomy, pionowy, boczny
$\alpha = h_\alpha v_\alpha$	– płaszczyzna określona dwoma śladami h_α i v_α
$A^\circ, B^\circ, \dots, a^\circ, b^\circ$	– kłady punktów A, B, ... i prostych a, b, ... uzyskane przez obrót o skierowany kąt różny od 90°
O^n, O^u	– środek aksometryczny w aksometrii prostokątnej, ukośnokątnej
$x^n, y^n, z^n, x^u, y^u, z^u$	– osie aksometryczne w aksometrii prostokątnej, ukośnej
$\rho(A, B)$	– odległość punktu A od punktu B
$\rho(A, a)$	– odległość punktu A od prostej a
$\rho(A, \alpha)$	– odległość punktu A od płaszczyzny α

$\rho(a,b)$	— odległość prostej a od prostej b
$\rho(a,\alpha)$	— odległość prostej a od płaszczyzny α
$\rho(\alpha,\beta)$	— odległość płaszczyzny α od płaszczyzny β
$u(\pi_i, \pi_j)$	— układ rzutni π_i i π_j
$A \in a$	— punkt A i prosta a przynależna do siebie (punkt A zawiera się w prostej a)
$A \in \alpha$	— punkt A i płaszczyzna α przynależna do siebie (punkt A zawiera się w płaszczyźnie α)
$a \subset \alpha$	— prosta a i płaszczyzna α przynależne do siebie (prosta a zawiera się w płaszczyźnie α)
$A \equiv B, A^I \equiv B^I, n \equiv m,$ $n^{II} \equiv m^{II}$	— elementy pokrywające się (jednoczące się, przystające).

LITERATURA

1. Godik E.I., Samofałow M.I.: Atlas po projekcionnomu czerczeniu s poetapnym rieszeniem zadacz. Wiszcza szkoła, Kijew 1978.
2. Lewandowski Z.: Geometria wykreślna. PWN, Warszawa 1978.
3. Otto F., Otto E.: Podręcznik geometrii wykreślnej. PWN, Warszawa 1994.
4. Plamitzer A.: Geometria wykreślna. PWN, Warszawa 1994.
5. PN-75/M-01123 – Rysunek techniczny. Rzuty aksonometryczne.
6. Rachwał T.: Geometria wykreślna. PWN, Warszawa 1977.
7. Russkiewicz N.L.: Nacziertatielnaja geometrija. Wiszcza szkoła, Kijew 1978.