

Zarys nowoczesnej teorii inwestycji finansowych

Tomasz Warowny



Zarys nowoczesnej teorii inwestycji finansowych

Zasada numer jeden: nigdy nie trać pieniędzy.

Zasada numer dwa: nigdy nie zapominaj o zasadzie numer jeden.

Warren Buffett

Rada Naukowa Wydawnictwa Politechniki Lubelskiej

Przewodnicząca:

Agnieszka RZEPKA

Dyrektor CINT:

Katarzyna WEINPER

Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej:

Magdalena CHOŁOJCZYK

Karolina FAMULSKA-CIESIELSKA

Jarosław GAJDA

Anna KOŁTUNOWSKA

Katarzyna PEŁKA-SMĘTEK

Anna STROJEK

Przedstawiciele Dyscyplin Naukowych Politechniki Lubelskiej:

Marzenna DUDZIŃSKA

Małgorzata FRANUS

Arkadiusz GOLA

Paweł KARCZMAREK

Beata KOWALSKA

Anna KUCZMASZEWSKA

Jarosław LATALSKI

Tomasz LIPECKI

Zbigniew ŁAGODOWSKI

Joanna PAWŁAT

Lucjan PAWŁOWSKI

Natalia PRZESMYCKA

Magdalena RZEMIENIAK

Mariusz ŚNIADKOWSKI

Przedstawiciele honorowi:

Zhihong CAO, Chiny

Miroslav GEJDOŠ, Słowacja

Karol HENSEL, Słowacja

Hrvoje KOZMAR, Chorwacja

Frantisek KRCMA, Czechy

Sergio Lujan MORA, Hiszpania

Dilbar MUKHAMEDOVA, Uzbekistan

Sirgii PAWŁOW, Ukraina

Natalia SAVINA, Ukraina

Natia SHENGELIA, Gruzja

Daniele ZULLI, Włochy

Zarys nowoczesnej teorii inwestycji finansowych

Tomasz Warowny



WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI
LUBELSKIEJ

Lublin 2024

RECENZENCI:

dr hab. **Radosław Miśkiewicz**, prof. US, Uniwersytet Szczeciński

dr hab. **Bożena Sowa**, prof. WSPiA, WSPiA Rzeszowska Szkoła Wyższa

AUTOR:

dr **Tomasz Warowny**, ORCID: 0000-0002-1500-9812

Politechnika Lubelska – ROR: <https://ror.org/024zjzd49>

Redaktor prowadzący: Karolina Famulska-Ciesielska

Korekta językowa: zespół redakcyjny

Skład i łamanie: Tomasz Warowny

Zdjęcie na okładce i stronie przedtytułowej pochodzi ze strony internetowej freepik.com

Publikacja wydana za zgodą **Rrektora Politechniki Lubelskiej**

ISBN: 978-83-7947-611-4 (wersja drukowana)

ISBN: 978-83-7947-612-1 (wersja elektroniczna)

DOI: 10.35784/9788379476121

Wydawca: Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
www.wpl.pollub.pl
ul. Nadbystrzycka 36C, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59



WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI
LUBELSKIEJ

Książka udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa – na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowe (CC BY-SA 4.0)

Nakład: 50 egz.

Spis treści

Wstęp	9
1 Stopa zwrotu z inwestycji i jej ryzyko	13
1.1 Stopa zwrotu	13
1.2 Średnie stopy zwrotu	16
1.3 Miary ryzyka	19
1.4 Zależności między stopami zwrotu i miarami ryzyka	27
2 Teorie portfelowe	33
2.1 Portfel dwuskładnikowy	36
2.2 Portfele wieloskładnikowe	62
3 Modele rynków kapitałowych	85
3.1 Model jednowskaźnikowy Sharpe'a	86
3.2 Model wyceny aktywów kapitałowych i jego modyfikacje	95
3.3 Model APT	105
3.4 Model Blacka–Littermana	111
3.5 Portfele optymalne według kryteriów bezpieczeństwa	116
3.6 Ocena wyników zarządzania portfelem	126
Podsumowanie	135

Dodatek matematyczny	139
Metoda mnożników Lagrange’a	139
Wzór Taylora i Maclaurina	140
Cytaty na temat	141
Spis rysunków	148
Bibliografia	149

Streszczenie

Zarys nowoczesnej teorii inwestycji finansowych

Jednym ze sposobów pomnażania majątku jest inwestowanie na rynkach finansowych. Daje ono możliwość osiągnięcia wyższych zysków niż tradycyjne oszczędzanie, umożliwia dywersyfikację portfeli, co często pozwala ograniczać ryzyko, chroni przed inflacją.

Podstawowymi wielkościami charakteryzującymi inwestycje są stopa zwrotu i ryzyko. W decyzjach inwestycyjnych zachodzi potrzeba precyzyjnego ich pomiaru. W rozdziale pierwszym przedstawiono różne rodzaje stóp zwrotu, zależności między nimi i niektóre metody pomiaru ryzyka.

Rozdział drugi poświęcono teorii portfeli inwestycyjnych. Pokazano w nim, w jaki sposób budować portfele uwzględniające oczekiwania inwestora co do stopy zwrotu i ryzyka. Szczególny nacisk położono na interpretacje geometryczne otrzymywanych wyników. Pozwalają one zilustrować zależności występujące między badanymi wielkościami, pokazują własności i sposoby konstrukcji zbiorów rozwiązań, ułatwiają interpretację wyników.

W rozdziale trzecim zaprezentowano różne modele rynków finansowych, są to: model jednowskaźnikowy, CAPM i jego modyfikacje, model Blacka–Littermana, APT. W powyższych teoriach przyjmuje się, że celem inwestora jest maksymalizacja oczekiwanej użyteczności inwestycji, która może być mierzona przy pomocy średniej i wariancji stopy zwrotu. W tym rozdziale przedstawiono także niektóre, inne kryteria budowy portfeli inwestycyjnych. Wynik każdej inwestycji powinien być zweryfikowany pod kątem osiągnięcia zamierzonych celów. Służą do tego różne wskaźniki, które zaprezentowano na końcu tej książki.

Słowa kluczowe: portfele inwestycyjne, stopa zwrotu, ryzyko, modele rynków finansowych

Abstract

The outline of modern investments theory

One way to grow wealth is by investing in financial markets. This approach offers the potential for higher returns compared to traditional savings, enables portfolio diversification, which often helps to reduce risk, and protects against inflation.

The primary measures characterizing investments are the rate of return and risk. Investment decisions require precise measurement of these factors. The first chapter presents various types of rates of return, the relationships between them, and some methods of risk measurement.

The second chapter is dedicated to the theory of investment portfolios. It demonstrates how to construct portfolios that consider an investor's expectations regarding return and risk. Special emphasis is placed on the geometric interpretations of the results. These interpretations illustrate the relationships between the studied variables, show the properties and construction methods of solution sets, and facilitate result interpretation.

The third chapter introduces various financial market models, including the single-index model, CAPM and its modifications, APT, and the Black-Litterman Model. These theories assume that the investor's goal is to maximize the expected utility of the investment, which can be measured using the mean and variance of the rate of return. This chapter also discusses some alternative criteria for constructing investment portfolios. The outcome of each investment should be verified against its intended objectives. Various indicators, presented at the end of this book, serve this purpose.

Keywords: investment portfolios, rate of return, risk, financial market models

Wstęp

Ludzie od zawsze dążyli do pomnażania swojego majątku. Jednym ze sposobów osiągnięcia tego celu jest inwestowanie. Inwestycja to proces lokowania zasobów w celu osiągnięcia określonych korzyści ekonomicznych. Inwestycje mogą przybierać różne formy, takie jak: zakup nieruchomości, dzieł sztuki, akcji przedsiębiorstw, obligacji lub innych aktywów, które mają potencjał generowania dochodów w przyszłości. Celem inwestycji jest zazwyczaj zwiększenie wartości majątku w dłuższej perspektywie czasowej. Pojęcie inwestycji jest różnie pojmowane przez ekonomistów. Oto kilka definicji:

„Inwestycja jest bieżącym zaangażowaniem kapitału na określony czas w celu uzyskania dochodów w przyszłości, które wynagrodzą inwestorowi czas, na jaki środki zostały ulokowane, spadek siły nabywczej pieniądza związany ze zjawiskiem inflacji oraz niepewność co do wysokości przyszłych zysków.” [70]

„Inwestycja jest w istocie bieżącym wyrzeczeniem dla przyszłych korzyści. Ale teraźniejszość jest względnie dobrze znana, natomiast przyszłość to tajemnica. Przeto inwestycja jest wyrzeczeniem się pewnego dla niepewnej korzyści.” [44] za [49]

„Według finansistów, inwestycje, to używanie pieniędzy dla zarobienia pieniędzy.” [75]

Powyższe definicje wskazują na podstawowe cechy inwestycji, jakimi są: potrzeba podziału środków finansowych na bieżącą konsumpcję i inwestycje, oczeki-

wane korzyści, czas oraz ryzyko. Jak napisano w [50]: „Decyzja o realizacji inwestycji powinna mieć u podstaw porównanie wielkości możliwej bieżącej konsumpcji z przyszłymi korzyściami z inwestycji.”

Każdy rodzaj inwestycji ma swoje unikalne cechy, ryzyko i potencjalne korzyści. Wybór odpowiedniego rodzaju inwestycji zależy od celów finansowych, tolerancji na ryzyko i strategii inwestycyjnej konkretnego inwestora.

Inwestycje finansowe obejmują inwestycje w instrumenty finansowe. Instrument finansowy to pewna forma pieniądza lub umowy między stronami, regulująca wzajemne zobowiązania oraz płatności, w wyniku której u jednej strony powstają aktywa, a u drugiej zobowiązania. Pośród instrumentów finansowych wyróżnia się papiery wartościowe. Jak zauważono w [136]: „Każdy papier wartościowy jest instrumentem finansowym, ale nie każdy instrument finansowy jest papierem wartościowym. Staje się nim dopiero wtedy, kiedy istnieje dla niego rozwinięty rynek, na którym może być swobodnie wymieniany.”

Papiery wartościowe są zatem zbywalnymi dokumentami, które dają ich posiadaczowi określone prawa majątkowe, takie jak: [49]

- nabycie prawa do współwłasności firmy,
- udzielenie kredytu rządowi, instytucji lub firmie.

Głównym celem tej książki jest przedstawienie czytelnikowi tzw. nowoczesnej teorii finansów, która została zapoczątkowana w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku pracami Harrego Markowitza na temat portfeli inwestycyjnych. Jak zauważono w [50], do połowy dwudziestego wieku, finanse pozostawały przedmiotem opisowym, akcentującym głównie aspekty prawne. W latach pięćdziesiątych stawały się powoli nauką analityczną wykorzystując metody ilościowe. Od tego czasu nastąpił szybki rozwój matematyki finansowej, której głównymi przedstawicielami, oprócz wspomnianego Markowitza, stali się, między innymi, William Sharpe, Myron Gordon, John Lintner, Fisher Black, Jack Treynor, Jan Mossin.

Ich prace zaowocowały różnymi teoriami rynków finansowych. W tej książce zaprezentowano tylko niektóre z nich. Głównym kryterium ich wyboru był zamiar pokazania, jak na przestrzeni kilkudziesięciu lat rozwijała się idea Markowitza. Szczególny nacisk autor położył na interpretacje geometryczne wyników prezentowanych zagadnień. Pozwalają one w lepszy sposób zilustrować zależności występujące między badanymi wielkościami, pokazują własności i sposoby konstrukcji zbiorów rozwiązań, ułatwiają interpretacje wyników.

Niniejsza książka składa się z trzech rozdziałów. Rozdział pierwszy poświęcony jest metodom pomiaru dwóch podstawowych wielkości charakteryzujących każdą inwestycję, czyli stopie zwrotu i ryzyku. Ponieważ w decyzjach inwestycyjnych zachodzi potrzeba precyzyjnego pomiaru stóp zwrotu, przedstawiono różne ich rodzaje, własności i zależności występujące między nimi. Z każdą inwestycją związane jest pewne ryzyko. W tym rozdziale zaprezentowano różne metody pomiaru ryzyka stopy zwrotu. Pomiar ryzyka jest kluczowy dla zapewnienia odpowiedniej ochrony kapitału oraz osiągnięcia określonych celów inwestycyjnych.

Rozdział drugi poświęcony jest teorii portfelowej, często nazywanej od nazwiska jej prekursora teorią Markowitza. Pokazano w nim, jak do portfeli inwestycyjnych dobierać papiery wartościowe, aby osiągać pożądane korzyści przy jak najmniejszym ryzyku. Umiejętna dywersyfikacja portfela sprawia, że nawet w przypadku słabszych wyników w jednym segmencie portfela, inne aktywa będą nadal generować zyski lub zachowywać swoją wartość. Będzie to skutkowało ograniczeniem ewentualnych strat, jak również możliwością osiągnięcia ponadprzeciętnych zysków. Wykorzystano metody analityczne i geometryczne wyznaczania optymalnych portfeli, kładąc nacisk na metody geometryczne, nieczęsto spotykane w literaturze. Autorska, geometryczna metoda pokazuje, w jaki sposób wyznaczać optymalne portfele z podziałem kapitału na inwestycje i konsumpcję.

W rozdziale trzecim zaprezentowano kilka klasycznych modeli rynków kapitałowych, do których należą: model jednowskaźnikowy, *CAPM*, *APT*, model Blacka-

Littermana. Modele te są wykorzystywane zarówno przez inwestorów indywidualnych, jak i przez instytucje finansowe do oceny wartości aktywów, prognozowania ich cen czy oceny ryzyka. Ponadto, w rozdziale tym przedstawiono inne niż Markowitza kryteria budowy portfeli inwestycyjnych, są to kryteria Roya, Kataoki i Telsera. Omówiono także metody oceny zarządzania portfelem przy wykorzystaniu różnych wskaźników.

Autor pragnie zakończyć książkę cytatami znanych ludzi. Zaprezentowane słowa często padały na różnych, także nieoficjalnych spotkaniach, dlatego bardzo trudno jest zweryfikować ich źródła. Jednakże nie o czas i miejsce wypowiedzi tutaj chodzi, ale o słowa, które skłaniają do refleksji nie tylko na tematy finansowe.

Autor dziękuje Pani dr Agnieszce Surowiec za ogromną pomoc. Bez niej ta książka zapewne by nie powstała. Dziękuję także Panu mgr. Mateuszowi Warownemu za cenne uwagi.

Rozdział 1

Stopa zwrotu z inwestycji i jej ryzyko

1.1 Stopa zwrotu

Ocena efektywności inwestycji jest związana z pomiarem jej dochodowości oraz poniesionych na nią nakładów. Podstawową miarą wykorzystywaną do oceny tej efektywności jest stopa zwrotu. Jest ona definiowana jako wielkość dochodu z inwestycji przypadająca na jednostkę zainwestowanego kapitału, co zapiszemy jako

$$R = \frac{D}{K},$$

gdzie:

R – stopa zwrotu z inwestycji,

D – dochód,

K – koszt.

Przy tak zdefiniowanej stopie zwrotu zakłada się, że wielkości dochodów i kosztów są znane. Jest to zatem rachunek *ex post*. Z punktu widzenia przyszłych inwestycji konieczny jest rachunek *ex ante*, w którym szacuje się oczekiwaną efektywność

inwestycji, a stopa zwrotu jest wtedy zmienną losową. [101]

W tej książce będziemy rozważać głównie inwestycje w najbardziej rozpowszechnione na rynku finansowym ryzykowne papiery wartościowe, czyli akcje.

Założmy, że inwestor zakupił akcję po cenie p_p (nazwijmy ją wartością początkową) i po pewnym czasie sprzedał ją po cenie p_K . Założmy także, że w tym czasie zostały wypłacone dywidendy w łącznej wielkości d na jedną akcję. Wielkość $p_K + d$ jest przychodem z tej inwestycji i nazwijmy ją wartością końcową. Stopa zwrotu z tej inwestycji (pomijając podatki, koszty maklerskie itp.) wyraża się wzorem

$$r = \frac{p_K + d - p_p}{p_p}.$$

Aby oszacować stopę zwrotu, potrzebna jest wartość początkowa i wartość końcowa inwestycji. Wielkość ta często wyrażana jest w procentach, dlatego też nazywana jest stopą procentową. Jak zauważono w [50]: „Stopa procentowa [. . .] może być właściwie wyznaczona na podstawie dowolnego wzoru, w którym występuje wartość obecna oraz wartość przyszła [. . .]. W zależności od zastosowanego wzoru możemy otrzymywać różne wartości stopy zwrotu”. Poniższe rozważania będą dotyczyć sposobów definiowania stóp zwrotu, ich średnich wartości oraz zależności między nimi.

Tak jak wcześniej, założmy, że dla pewnego okresu, p_p jest początkową ceną akcji, a p_K ceną końcową. **Prostą stopą zmiany ceny akcji** dla tego okresu będziemy nazywać liczbę

$$r = \frac{p_K - p_p}{p_p} = \frac{p_K}{p_p} - 1.$$

Z powyższej definicji wynika, że zawsze jest $r \geq -1$. Jeżeli różnica cen akcji jest jedynym przychodem z inwestycji, to powyższa stopa zmiany jest jednocześnie **prostą stopą zwrotu**. Liczba $\frac{p_K}{p_p}$ nazywa się **zwrotem** z tej inwestycji.

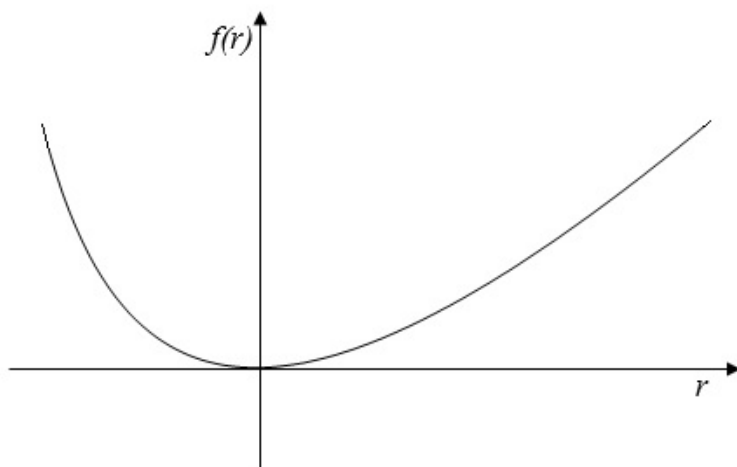
Logarytmiczną stopą zwrotu nazywamy liczbę

$$r_l = \ln \left(\frac{p_K}{p_p} \right).$$

Zależność pomiędzy logarytmiczną a prostą stopą zwrotu jest następująca:

$$r_l = \ln \left(\frac{p_K}{p_p} - 1 + 1 \right) = \ln (1 + r).$$

Na rysunku 1.1 przedstawiono wykres funkcji $f(r) = r - \ln(1 + r)$. Widać, że dla każdego $r \in (-1, +\infty)$ zachodzi $f(r) \geq 0$ i $f(r) = 0$ tylko dla $r = 0$.



Rysunek 1.1: Wykres funkcji $f(r) = r - \ln(1 + r)$

Źródło: opracowanie własne

Oznacza to, że logarytmiczna stopa zwrotu nigdy nie jest większa od prostej stopy zwrotu. Równość tych stóp zachodzi tylko wtedy, gdy dla rozważanego okresu początkowa i końcowa cena akcji są sobie równe.

1.2 Średnie stopy zwrotu

W literaturze dotyczącej finansów pojawiają się trzy rodzaje średnich stóp zwrotu: arytmetyczna, geometryczna i logarytmiczna. Są to trzy różne miary, często bardzo różniące się od siebie.

Załóżmy, jak poprzednio, że na początku pewnego przedziału czasowego cena akcji była równa p_p , a na końcu tego przedziału była równa p_K . Podzielmy ten przedział na n równych okresów. Niech $p_p = p_0$ i $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ będą cenami akcji na końcu każdego z okresów, przy czym $p_n = p_K$. Prosta stopa zwrotu dla każdego z okresów jest równa

$$r_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{p_{i-1}} = \frac{p_i}{p_{i-1}} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

co daje

$$p_i = p_{i-1}(1 + r_i).$$

Z powyższego otrzymujemy

$$p_n = p_0(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n).$$

Gdyby dla każdego okresu stopa zmiany była taka sama i równa r_G , byłoby spełnione równanie

$$p_0(1 + r_G)^n = p_0(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n).$$

Stąd

$$1 + r_G = \sqrt[n]{(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)}$$

lub równoważnie

$$(1 + r_G)^n = (1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n).$$

Otrzymujemy, że średni zwrot dla rozważanego przedziału czasowego jest równy średniej geometrycznej zwrotów z poszczególnych okresów.

Ponieważ $1 + r_i = \frac{p_i}{p_{i-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, to dostajemy

$$r_G = \sqrt[n]{\frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{p_n}{p_0}} - 1.$$

Średnia geometryczna liczona jest w oparciu o procent składany (okresowa kapitalizacja) i jej wartość zależy tylko od początkowej i końcowej wartości ceny akcji.

Niech $r_1, r_2, \dots, r_n$ będą prostymi stopami zwrotu. Średnią arytmetyczną tych stóp nazywamy liczbę

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i.$$

Średnią geometryczną tych stóp nazywamy liczbę

$$G = \sqrt[n]{(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} - 1. \quad (1.1)$$

Średnia geometryczna nigdy nie jest większa od średniej arytmetycznej. Równość zachodzi wtedy, gdy $r_1 = r_2 = \dots = r_n$.

Rozważając logarytmiczne stopy zwrotu mamy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{p_i}{p_{i-1}} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{p_n}{p_0} \right) = \frac{1}{n} \ln (1 + G).$$

Wielkość $\frac{1}{n} \ln (1 + G)$ nazywamy średnią logarytmiczną stóp zwrotu i oznaczać będziemy przez L . Średnia logarytmiczna liczona jest w oparciu o kapitalizację ciągłą.

Przykład 1.1. Rozważmy następujące dane:

p_i	r_i
25	
28	0,12
26	-0,07143
24	-0,0769
25	0,0417
29	0,16
27	-0,069
26	-0,037
26	0
22	-0,1538
23	0,0455
24	0,043
27	0,125

W tym przypadku $A = 0,01062$, $G = 0,00643$, $L = 0,00053$.

Rozważmy inne dane:

p_i	r_i
25	
28	0,12
35	0,25
24	-0,3143
25	0,0417
29	0,16
27	-0,069
26	-0,037
36	0,38462
22	-0,1538
23	0,0455
24	0,043
27	0,125

Teraz $A = 0,03009$, $G = 0,00643$, $L = 0,00053$.

Jak widać, średnia geometryczna i logarytmiczna nie zmieniły się, gdyż zależą one tylko od pierwszej i ostatniej wartości ceny. Średnia arytmetyczna zmieniła się, ponieważ uwzględnia ona wszystkie zmiany cen, jakie zaszły w rozważanych okresach. Im większe są różnice między stopami zwrotu, tym wartości tych średnich bardziej się od siebie różnią.

1.3 Miary ryzyka

Analiza inwestycji nie powinna opierać się tylko na ocenie jej stopy zwrotu. Bardzo często inwestycje obciążone są ryzykiem. To właśnie ryzyko jest kolejnym czynni-

kiem, który inwestor powinien brać pod uwagę przy podejmowaniu decyzji o realizacji inwestycji.

Według Słownika języka polskiego PWN, ryzyko to możliwość, że coś się nie uda lub też przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny. W języku potocznym ryzyko jest często utożsamiane z niepewnością, zagrożeniem lub jakąś stratą. Frank Hyneman Knight jako jeden z pierwszych podjął się zdefiniowania ryzyka. W swojej pracy z 1921 roku dokonał rozróżnienia między terminami ryzyka i niepewności. Knight określił ryzyko jako „mierzalną niepewność”. Według niego niepewność staje się ryzykiem w momencie zaistnienia możliwości pomiaru ([24], [71]). Wyróżnia się koncepcję negatywną (niesymetryczną) i neutralną (symetryczną) ryzyka [50]. W koncepcji negatywnej ryzyko jest interpretowane jako zagrożenie, a jego efektem jest szkoda lub strata. Jest to ujęcie typowe w teorii i praktyce ubezpieczeń. W finansach częściej jest stosowana koncepcja neutralna. Ryzyko jest tu interpretowane zarówno jako zagrożenie, jak i szansa. „Efektem wystąpienia ryzyka jest niezgodność wyniku działania z oczekiwanym, przy czym może to być zarówno wynik gorszy od spodziewanego, jak i lepszy od spodziewanego.” [50]

Istnieje wiele kryteriów podziału ryzyka oraz różne metody jego pomiaru (porównaj np. [4], [14], [40], [51]). W przypadku miar związanych z ryzykiem inwestycji finansowych można wyszczególnić trzy grupy:

- miary zmienności (rozproszenia),
- miary zagrożenia,
- miary wrażliwości.

Miary zmienności informują o tym, o ile osiągnięta stopa zwrotu różni się od oczekiwanej. Im większe ryzyko, tym większa jest zmienność stopy zwrotu. Miary zmienności dzielą się na miary bezwzględne, takie jak: wariancja, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne czy odchylenie ćwiartkowe oraz miary względne, do których zalicza się np. współczynnik asymetrii, współczynnik zmienności.

Miary zagrożenia uwzględniają tylko wyniki gorsze od oczekiwanego. Przykładem takich miar mogą być semiwariancja, semiodchylenie standardowe. Uwzględniają one tylko odchylenia poniżej wartości oczekiwanej. Używane są również różnego rodzaju poziomy bezpieczeństwa definiowane jako prawdopodobieństwo tego, że stopa zwrotu będzie niższa od wymaganej przez inwestora, np. Value at Risk.

Miary wrażliwości badają wpływ różnych czynników ryzyka na stopę zwrotu z inwestycji, koncentrując się na przyczynach ryzyka, a nie na jego skutkach. Przykładem takiej miary jest współczynnik beta akcji¹.

Założmy, że R jest zmienną losową określoną na pewnej przestrzeni probabilistycznej, opisującą zmienność stopy zwrotu z inwestycji w akcje pewnej spółki. Wariancję tej zmiennej losowej definiujemy jako

$$\text{var}(R) = E(R - E(R))^2$$

lub równoważnie

$$\text{var}(R) = E(R^2) - [E(R)]^2,$$

gdzie E jest symbolem wartości oczekiwanej.

Odchyleniem standardowym nazywamy pierwiastek kwadratowy z wariancji, czyli

$$\sigma(R) = \sqrt{\text{var}(R)}.$$

Wartość odchylenia standardowego informuje o ile, średnio, wartości zmiennej losowej różnią się od jej wartości oczekiwanej.

Semiwariancję zmiennej losowej R definiujemy jako

$$\text{svar}(R) = E d^2,$$

gdzie

$$d = \begin{cases} R - E(R), & \text{gdy } R - E(R) < 0, \\ 0, & \text{gdy } R - E(R) \geq 0. \end{cases}$$

¹ Współczynnik beta akcji jest miarą zmienności stopy zwrotu z inwestycji w akcje w zależności od stopy zwrotu z indeksu rynku. Więcej o tym współczynniku jest w podrozdziale 3.1 i dalszych.

Semiodychleniem standardowym nazywamy pierwiastek kwadratowy z semiwariancji, czyli

$$s\sigma(R) = \sqrt{svar(R)}.$$

Semiwariancja i semiodychlenie standardowe są miarami ryzyka, które jest traktowane jako zagrożenie, czyli uwzględniają tylko wyniki gorsze od oczekiwanych.

Założmy, że zmienne losowe R_1 i R_2 określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej opisują zmienności stóp zwrotu dla akcji dwóch spółek. Kowariancja tych dwóch zmiennych losowych jest definiowana wzorem

$$\text{cov}(R_1, R_2) = E[(R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2))].$$

Współczynnik korelacji zmiennych losowych R_1 i R_2 wyraża się wzorem

$$\rho(R_1, R_2) = \frac{\text{cov}(R_1, R_2)}{\sigma(R_1)\sigma(R_2)}.$$

Współczynnik korelacji określa siłę i kierunek zależności liniowej między dwiema zmiennymi. Przyjmuje on wartości z przedziału $[-1, 1]$. Im wartość bezwzględna współczynnika korelacji jest bliższa jedności, tym zależność jest silniejsza. Dodatnia wartość współczynnika korelacji oznacza, że trend zmian jest taki, iż wraz ze wzrostem wartości jednej zmiennej rosną też wartości drugiej zmiennej. Ujemna wartość współczynnika korelacji oznacza, że wraz ze wzrostem wartości jednej zmiennej maleją wartości drugiej zmiennej.

Parametry rozkładu stopy zwrotu R często nie są znane. Zachodzi wtedy potrzeba estymowania parametrów rozkładu tej zmiennej losowej. Niech $r_1, r_2, \dots, r_n$ będzie próbą losową, czyli historycznymi (np. dziennymi, tygodniowymi itp.) wartościami stóp zwrotu z inwestycji w akcje pewnej spółki (nazwijmy ją A). Estymatorem zgodnym, nieobciążonym i najefektywniejszym wartości oczekiwanej jest

liczba

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i.$$

Estymatorem nieobciążonym wariancji jest liczba

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{R})^2.$$

Założmy, że $r_{1,1}, r_{2,1}, \dots, r_{n,1}$ są historycznymi, pochodzącymi z tych samych okresów wartościami stóp zwrotu dla akcji innej spółki (nazwijmy ją B). Nieobciążonym estymatorem kowariancji stóp zwrotu spółek A i B jest liczba

$$\text{cov}_{AB} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{R}) (r_{i,1} - \bar{R}_1),$$

gdzie

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{i,1}.$$

Więcej o estymatorach można przeczytać np. w [74], [111].

Jedną z najczęściej stosowanych miar zagrożenia jest **wartość narażona na ryzyko** (ang. *value at risk*, VaR). Uznaje się, że główną rolę w jej upowszechnieniu odegrał na początku lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku bank J.P. Morgan. W 1994 roku J. P. Morgan stworzył oparty na VaR system RiskMetricsTM [91], który został w internecie podany do publicznej wiadomości. Spotkał się on z głośnym odzewem i niedługo potem stał się standardowym miernikiem ryzyka w instytucjach finansowych [45]. W najbardziej ogólnej formie VaR mierzy potencjalną stratę wartości ryzykownych aktywów dla danego przedziału ufności w określonym czasie.

Założmy, że V oznacza zmianę wartości inwestycji w pewnym okresie, a $VaR_\alpha(V)$ oznacza stratę tej wartości, która nie powinna zostać przekroczona w tym okresie z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $(1-\alpha)$. Wtedy $VaR_\alpha(V)$

jest definiowana jako [78]:

$$VaR_{\alpha}(V) = \inf \{x \in R : P(V < -x) \leq \alpha\}.$$

Wartość narażona na ryzyko mierzy największą oczekiwaną stratę wartości inwestycji, jaką można ponieść w danym okresie przy danym poziomie istotności. Metody obliczania VaR można zaliczyć do następujących klas:

- parametryczne,
- nieparametryczne,
- symulacyjne,
- analityczne.

W modelach parametrycznych czynione są pewne założenia co do klasy rozkładów, do jakich należą zwroty z czynników ryzyka, a następnie estymuje się nieznane parametry tych rozkładów. W modelach nieparametrycznych nie określa się *a priori* rozkładu. W modelach symulacyjnych wykorzystuje się pewien zestaw scenariuszy. Dla każdego z nich wylicza się VaR i uśrednia wyniki. Generowanie scenariuszy może następować np. w drodze losowania (metoda Monte Carlo) lub na podstawie danych historycznych (metoda historycznej symulacji). W modelach analitycznych wykorzystuje się fakt, że przy pewnych założeniach istnieją określone formuły definiujące VaR . Do analitycznego wyliczenia VaR potrzebna jest wtedy znajomość np. rozkładów czynników ryzyka, wielkości pozycji w portfelu, zależności między czynnikami ryzyka itp. [3]. Definicja VaR jest bardzo prosta, natomiast metody jej wyznaczania często są dość skomplikowane i czasochłonne. Więcej o VaR i metodach jej wyznaczania można przeczytać, np. w [3], [24], [45], [54], [58], [59], [60], [95].

VaR ma liczne zalety, spośród których jako najważniejsze wymienia się [1], [58], [59], [60], [121]:

- jest łatwa do interpretowania, gdyż jest wyrażana jedną liczbą,

- jest bardzo wystandaryzowaną miarą dającą możliwość porównywania ryzyka różnych portfeli inwestycyjnych, całych instytucji czy rynków,
- może być wykorzystana do pomiaru różnych rodzajów ryzyka: rynkowego, operacyjnego, kredytowego, a także ryzyka inwestycji czy stopy procentowej.

Jako wady wartości narażonej najczęściej wymieniane są [24], [45]:

- nie informuje ona o stratach, jakie mogą być poniesione po przekroczeniu wartości zagrożonej. Na przykład VaR równa 10 milionów złotych przy 95% przedziale ufności wskazuje, że prawdopodobieństwo straty ponad 10 milionów wynosi tylko 0,05, ale nie mówi, ile można stracić. Może to być 10 milionów, jak i 100 milionów.
- nie jest subaddytywna, tzn., że nie musi zachodzić

$$VaR_{\alpha}(V_1 + V_2) \leq VaR_{\alpha}(V_1) + VaR_{\alpha}(V_2),$$

- w zależności od wybranej metody prognozy VaR mogą się znacznie różnić.

Zapiszmy teraz VaR jako

$$P(V_T \leq V_0 - VaR) = \alpha,$$

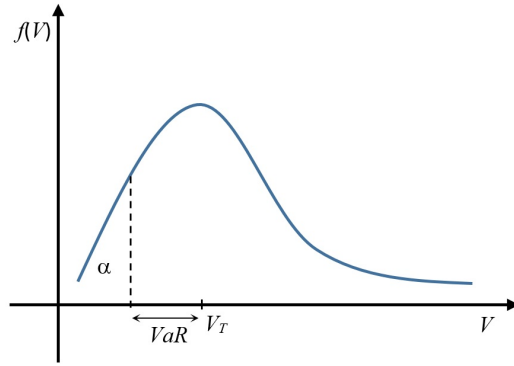
gdzie:

V_0 – wartość początkowa inwestycji,

V_T – wartość końcowa inwestycji,

$1 - \alpha$ – poziom ufności.

Jeżeli założymy, że $f(V)$ jest funkcją gęstości rozkładu zmian wartości inwestycji, to graficzną interpretację VaR pokazuje rysunek 1.2, [114]. Zaznaczona jest wartość inwestycji w chwili T oraz VaR , która jest odległością między punktem V_T a kwantylem rozkładu.



Rysunek 1.2: Wartość narażona na ryzyko

Źródło: [114]

Założmy, że dla rozważanego okresu stopa zwrotu z inwestycji

$$R = \frac{V_T - V_0}{V_0}$$

ma rozkład $N(m, \sigma)$, wtedy

$$\begin{aligned} P\left(R \leq -\frac{VaR}{V_0}\right) &= \alpha, \\ P\left(\frac{R - m}{\sigma} \leq \frac{-\frac{VaR}{V_0} - m}{\sigma}\right) &= \alpha, \\ F\left(\frac{-\frac{VaR}{V_0} - m}{\sigma}\right) &= \alpha, \end{aligned}$$

gdzie F jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Otrzymujemy

$$Var = V_0 \left(\sigma F^{-1}(1 - \alpha) - m \right),$$

gdzie F^{-1} jest funkcją odwrotną do dystrybucji standardowego rozkładu normalnego.

Przykład 1.2. Załóżmy, że $V_0 = 1000$ zł i $R \sim N(0,05; 0,1)$. Przyjmijmy $\alpha = 0,05$. Wtedy

$$VaR = 1000 \cdot (0,1 \cdot 1,645 - 0,05) = 114,5.$$

Z prawdopodobieństwem równym 0,95 największa strata z tej inwestycji wynosi 114,5 zł.

1.4 Zależności między stopami zwrotu i miarami ryzyka

Wykorzystywanie różnego rodzaju średnich do pomiarów stóp zwrotu budzi wiele kontrowersji co do ich stosowania. W procesach decyzyjnych konieczny jest przecież odpowiedni, jak najdokładniejszy pomiar zwrotów. W wielu publikacjach omówiono zalety i wady stosowania różnych średnich oraz zależności między nimi. Wydaje się jednak, że kontrowersje dotyczące stosowania różnych średnich nie ustały [140].

Przedstawimy kilka zależności występujących między średnimi [140], [142]. Ze wzoru (1.1) mamy:

$$\ln(1 + G)^n = n \ln(1 + G) = \ln[(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n)] = \sum_{i=1}^n \ln(1 + r_i),$$

czyli

$$\ln(1 + G) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + r_i). \quad (1.2)$$

Rozwińmy w szereg Taylora (patrz dodatek matematyczny) funkcję $\ln(1 + r_i)$ w otoczeniu średniej arytmetycznej A . Otrzymujemy n równań, które wstawimy

do równania (1.2).

$$\begin{aligned}
\ln(1 + r_i) &= \ln(1 + A) + (r_i - A) \frac{\partial \ln(1 + r_i)}{\partial r_i}(A) + \\
&+ \frac{(r_i - A)^2}{2!} \frac{\partial^2 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^2}(A) + \frac{(r_i - A)^3}{3!} \frac{\partial^3 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^3}(A) + \\
&+ \frac{(r_i - A)^4}{4!} \frac{\partial^4 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^4}(A) + \dots .
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\ln(1 + G) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + r_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + A) + \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - A) \frac{\partial \ln(1 + r_i)}{\partial r_i}(A) + \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^2}{2!} \frac{\partial^2 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^2}(A) + \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^3}{3!} \frac{\partial^3 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^3}(A) + \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^4}{4!} \frac{\partial^4 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^4}(A) + \dots .
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Rozważmy poszczególne składniki występujące po prawej stronie równania (1.4).

Pierwszy z nich jest równy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + A) = n \frac{1}{n} \ln(1 + A) = \ln(1 + A).$$

Drugi składnik przekształcimy następująco:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - A) \frac{\partial \ln(1 + r_i)}{\partial r_i}(A) = \frac{1}{1 + A} \cdot \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i - A \right) = 0.$$

Kolejny składnik jest równy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^2}{2!} \frac{\partial^2 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^2}(A) = \\ & = -\frac{1}{(1 + A)^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^2}{2!} = -\frac{1}{2(1 + A)^2} v, \end{aligned}$$

gdzie v oznacza wariancję.

Przekształcając następny składnik, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^3}{3!} \frac{\partial^3 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^3}(A) = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{(1 + A)^3} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^3}{3!} \right) = \\ & = \frac{1}{3(1 + A)^3} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - A)^3 = \frac{1}{3(1 + A)^3} M_3 = \frac{S \cdot v^{\frac{3}{2}}}{3(1 + A)^3}, \end{aligned}$$

gdzie M_3 jest trzecim momentem centralnym, a S jest współczynnikiem skośności rozkładu zdefiniowanym jako

$$S = \frac{M_3}{v^{\frac{3}{2}}}.$$

Kolejny składnik, który występuje we wzorze (1.4), jest równy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^4}{4!} \frac{\partial^4 \ln(1 + r_i)}{\partial r_i^4}(A) = \frac{1}{n} \left(-\frac{6}{(1 + A)^4} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - A)^4}{4!} \right) = \\ & = -\frac{1}{4(1 + A)^4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - A)^4 = -\frac{1}{4(1 + A)^4} M_4 = -\frac{K \cdot v^2}{4(1 + A)^4}, \end{aligned}$$

gdzie M_4 jest czwartym momentem centralnym, K jest kurtozą zdefiniowaną jako

$$K = \frac{M_4}{v^2}.$$

Z powyższego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \ln(1 + G) & \approx \ln(1 + A) - \frac{v}{2(1 + A)^2} + \frac{S \cdot v^{\frac{3}{2}}}{3(1 + A)^3} - \frac{K \cdot v^2}{4(1 + A)^4} = \\ & = \ln(1 + A) - v \left(\frac{1}{2(1 + A)^2} - \frac{S \cdot v^{\frac{1}{2}}}{3(1 + A)^3} + \frac{K \cdot v}{4(1 + A)^4} \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$G \approx \frac{1 + A}{\exp \left(v \left(\frac{1}{2(1+A)^2} - \frac{S \cdot v^{\frac{1}{2}}}{3(1+A)^3} + \frac{K \cdot v}{4(1+A)^4} \right) \right)} - 1. \quad (1.5)$$

W szczególności dla rozkładu normalnego, gdzie $S = 0$ i $K = 3$, dostajemy

$$G \approx \frac{1 + A}{\exp \left(v \left(\frac{1}{2(1+A)^2} + \frac{3v}{4(1+A)^4} \right) \right)} - 1. \quad (1.6)$$

Ze wzorów (1.5) i (1.6) widać, że geometryczna stopa zwrotu jest arytmetyczną stopą zwrotu skorygowaną o pewne współczynniki zmienności występujące w mianownikach ułamków.

Z rozwinięcia funkcji $\ln(1 + x)$ w szereg Maclaurina, czyli

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad -1 < x < 1,$$

wstawiając za x średnią G i rozwijając w szereg Maclaurina każdy składnik z prawej strony równania (1.2), mamy

$$\begin{aligned} G - \frac{G^2}{2} + \frac{G^3}{3} - \frac{G^4}{4} + \frac{G^5}{5} - \dots = \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(r_i - \frac{r_i^2}{2} + \frac{r_i^3}{3} - \frac{r_i^4}{4} + \frac{r_i^5}{5} - \dots \right). \end{aligned}$$

Zostawiając po obu stronach powyższego równania tylko po dwa pierwsze składniki, otrzymujemy

$$G - \frac{G^2}{2} \approx \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{2n}.$$

Ponieważ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = A$ i $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2 = M_2$ jest drugim momentem rozkładu, więc

$$G - \frac{G^2}{2} \approx A - \frac{M_2}{2}$$

lub inaczej

$$G \approx A - \frac{M_2 - G^2}{2}.$$

Mamy

$$G \approx A - \frac{v + A^2 - G^2}{2}, \quad (1.7)$$

gdzie

$$v = E(R^2) - [E(R)]^2 = M_2 - A^2$$

jest wariancją rozkładu arytmetycznej stopy zwrotu R . Łatwo wykazać, że dla $v > 0$ równanie zmiennej G postaci

$$G = A - \frac{v + A^2 - G^2}{2}$$

ma dwa rozwiązania:

$$G_1 = 1 - \sqrt{(A - 1)^2 + v}, \quad G_2 = 1 + \sqrt{(A - 1)^2 + v}.$$

Ponieważ zawsze jest $G \leq A$, na podstawie równania (1.7) przyjmuje się

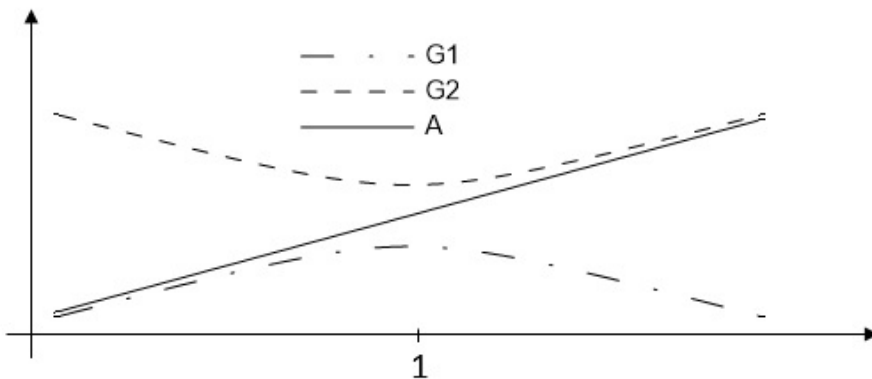
$$G \approx 1 - \sqrt{(A - 1)^2 + v}. \quad (1.8)$$

Jednakże na rysunku 1.3 widać, że dla $A < 1$ lepszym przybliżeniem średniej A jest G_1 . Gdy $A > 1$, lepszym przybliżeniem średniej A jest G_2 . Fakt ten ma znaczenie w przypadku różnych zapisów liczb, np. $A = 0,12$; $v = 0,05$ lub $A = 12$ (w domyśle procenty), $v = 5$. W otoczeniu jedynki ani G_1 , ani G_2 nie są wartościami dostatecznie bliskimi średniej A . Zakładając, że $A^2 = G^2$, otrzymujemy z równania (1.7)

$$G \approx A - \frac{v}{2}. \quad (1.9)$$

Wartość przyszłej stopy zwrotu z inwestycji ma znaczący wpływ na decyzje dotyczące alokacji aktywów. Stopę tę należy postrzegać jako zmienną losową,

najczęściej o nieznanym rozkładzie. Wymusza to zastosowanie metod statystycznych do szacowania parametrów tego rozkładu. Klasycznymi parametrami rozkładów są wartość oczekiwana i wariancja. Powyższe zależności 1.5 – 1.9 uwzględniają także skośność i kurtozę, które są momentami centralnymi, odpowiednio trzeciego i czwartego rzędu. Jak zauważono w [140], między różnie szacowanymi wartościami stopy zwrotu mogą występować znaczne rozbieżności, szczególnie w przypadku aktywów o wysokiej zmienności. Badania nie pokazały, który ze wzorów jest najlepszym szacowaniem, tym niemniej wydaje się, że powyższe zależności mogą być przydatne przy określaniu przyszłych stóp zwrotu. Więcej o stopach zwrotu i zależnościach między nimi można przeczytać np. w [17], [47], [56].



Rysunek 1.3: Wykresy funkcji $G1$, $G2$, A

Źródło: opracowanie własne

Rozdział 2

Teorie portfelowe

Portfel inwestycyjny to zbiór aktywów inwestora, będących formą lokowania kapitału. W skład portfela mogą wchodzić aktywa finansowe, np. akcje, obligacje, bony skarbowe, jak również tzw. aktywa realne, czyli fizyczny majątek inwestora, np. nieruchomości, dzieła sztuki. Budując portfel, inwestor musi odpowiedzieć sobie na pytania, jakie są jego oczekiwania co do stopy zwrotu z inwestycji i jakie ryzyko jest skłonny zaakceptować. Należy brać pod uwagę oczekiwane stopy zwrotu z inwestycji, ich ryzyko oraz powiązania występujące między tymi stopami zwrotu. Ponadto, jak zauważono w [141]: „Inwestor może mieć także określone wymagania w zakresie płynności, horyzontu inwestycyjnego, opodatkowania, wynikające z przepisów prawnych i regulacyjnych, determinowane unikalnymi okolicznościami. Wyodróżnione czynniki stanowią ograniczenia inwestycyjne i wpływają na wybór składu portfela.”

Jak zaznaczyliśmy we wstępie, będziemy rozważać tylko portfele składające się z aktywów finansowych, przede wszystkim z akcji, które są najbardziej rozpowszechnionymi papierami wartościowymi na rynkach finansowych.

Za prekursora teorii portfelowej uznawany jest Harry Markowitz, który w 1952 roku opublikował w czasopiśmie „The Journal of Finance” artykuł pt. „Port-

folio selection” [87]. Swoją teorię rozwinął później w pracy pt. “Portfolio selection. Efficient diversification of investments” z 1959 roku [88]. Markowitz pokazał, że poprzez umiejętną dywersyfikację składników portfeli inwestycyjnych można uzyskać większe oczekiwane stopy zwrotu i mniejsze ryzyko, niż gdyby rozważać każdy walor z osobna. Podkreślił, że jeżeli inwestorzy są w stanie określić oczekiwane stopy zwrotu walorów, ich ryzyko i wzajemne powiązania, to są w stanie wyznaczać tzw. portfele efektywne.

Portfelem efektywnym nazywamy taki, dla którego nie istnieje inny portfel mający taką samą oczekiwaną stopę zwrotu i mniejsze ryzyko lub taki, dla którego nie istnieje inny portfel mający takie samo ryzyko i większą oczekiwaną stopę zwrotu.

Markowitz oparł swoją teorię na następujących założeniach dotyczących zachowań inwestorów [87], [88], [103], [116]:

- inwestor podejmuje decyzje w oparciu o przewidywany zwrot i ryzyko,
- inwestor stara się maksymalizować użyteczność zasobu w pewnym przedziale czasu,
- inwestor przy pomocy zmienności oczekiwanych stóp zwrotu jest w stanie ocenić ryzyko portfela,
- przy określonej stopie zwrotu inwestor zawsze wybierze mniejsze ryzyko, natomiast przy określonym poziomie ryzyka wybierze inwestycję charakteryzującą się wyższym zwrotem. Oznacza to, że inwestorzy postępują racjonalnie,
- nie ma kosztów transakcji oraz podatków,
- wszystkie aktywa są doskonale podzielne, co oznacza, że udziały wartościowe aktywów w portfelu mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Ujemne lub większe od jedności udziały aktywów w portfelu oznaczają, że portfel został zbudowany przy zastosowaniu krótkiej sprzedaży. Krótka sprzedaż

akcji (ang. *short-selling*) polega na zbyciu aktywów, które nie są własnością sprzedającego [64]. Inwestor pożycza od innego uczestnika rynku akcje spółki, sprzedaje je na rynku i inwestuje uzyskane środki np. w akcje innej spółki. Po ustalonym czasie inwestor musi odkupić na rynku akcje, które wcześniej sprzedał i oddać je pożyczkodawcy. Jeżeli w tym czasie ceny pożyczonych akcji spadły, to inwestor zrealizuje zysk będący różnicą między ceną sprzedaży akcji i ceną ich zakupu. Jednocześnie musi ponieść koszty prowizji maklerskich od kupna i sprzedaży. Teoretycznie, krótka sprzedaż umożliwia budowę portfeli mających dowolnie dużą (także i dowolnie małą) oczekiwaną stopę zwrotu. Jak widać, daje ona dodatkowe możliwości inwestycji, jednak podlega pewnym ograniczeniom. Rynek krótkiej sprzedaży akcji jest zdominowany przez dużych inwestorów instytucjonalnych, którzy mają długi horyzont inwestycyjny. Są to głównie fundusze emerytalne i fundusze inwestycyjne. „Krótka sprzedaż na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie na razie nie cieszy się dużym zainteresowaniem wśród inwestorów indywidualnych. Wynika to m.in. z ograniczonej oferty dla nich. Można jednak znaleźć propozycje domów maklerskich, np. w jednym z nich inwestor indywidualny może pożyczyć akcje, by dokonać krótkiej sprzedaży, ale musi zwrócić je tego samego dnia przed zakończeniem sesji giełdowej. Biuro maklerskie wskazuje spółki, które podlegają krótkiej sprzedaży – w większości są to spółki z indeksu WIG20, by dzięki dużej płynności akcji inwestor nie miał problemu z ich odkupieniem na giełdzie. Jednocześnie, by zagrać na krótko, inwestor musi zablokować na swoim rachunku maklerskim określoną procentowo ilość środków finansowych (np. 20% wartości transakcji) na poczet późniejszego odkupu akcji – jeżeli bowiem on sam nie odkupi akcji przed zamknięciem notowań, zrobi to za niego biuro maklerskie.” [137] Więcej o krótkiej sprzedaży można przeczytać w [133].

2.1 Portfel dwuskładnikowy

Inwestorzy mają możliwość budowy wielu portfeli, w skład których mogą wchodzić różne aktywa finansowe o różnych udziałach. Przy założeniu doskonałej podzielności aktywów, takich portfeli teoretycznie jest nieskończenie wiele. Według teorii portfelowej, dla ustalonego rodzaju aktywów, tylko jeden z portfeli osiąga najmniejsze ryzyko przy danej stopie zwrotu. Istnieje też wiele portfeli o zadanym ryzyku, ale tylko jeden z nich charakteryzuje się maksymalną oczekiwaną stopą zwrotu. Takie portfele nazywają się portfelami efektywnymi. W tym rozdziale zostaną przedstawione metody wyznaczania portfeli efektywnych stanowiących tzw. zbiory efektywne. Rozważania zaczniemy od portfeli składających się z dwóch rodzajów aktywów, gdyż w ich przypadku są bardzo przejrzyste poszczególne etapy budowy i interpretacje wyników. Zostanie pokazane, że postać zbioru efektywnego zależy nie tylko od rodzajów aktywów portfela, ale także od dostępności na rynku krótkiej sprzedaży akcji oraz możliwości inwestora dotyczących udzielania i zaciągania pożyczek.

Przyjmijmy następujące założenia:

1. W skład portfela wchodzi dwa ryzykowne papiery wartościowe, np. akcje dwóch spółek giełdowych, których udziały wartościowe¹ w tym portfelu są równe w_1 i w_2 , gdzie $w_1 + w_2 = 1$.
2. Zmienność stopy zwrotu z inwestycji w akcje pierwszej spółki reprezentuje zmienna losowa R_1 o wartości oczekiwanej r_1 i wariancji σ_1^2 . Zmienność stopy zwrotu z inwestycji w akcje drugiej spółki reprezentuje zmienna losowa R_2 o wartości oczekiwanej r_2 i wariancji σ_2^2 . Przyjmijmy, że $r_1 \neq r_2$ i $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Kowariancję stóp zwrotu R_1 i R_2 oznaczmy ν .

¹ Przykładowo, jeżeli w skład portfela wchodzi 100 akcji pierwszej spółki po 20 zł każda i 30 akcji drugiej spółki po 40 zł każda, to ich udziały wartościowe są odpowiednio równe: $w_1 = \frac{100 \cdot 20}{100 \cdot 20 + 30 \cdot 40} = 0,625$ i $w_2 = \frac{30 \cdot 40}{100 \cdot 20 + 30 \cdot 40} = 0,375$.

Przy powyższych założeniach oczekiwana stopa zwrotu z portfela (r_p) wyraża się wzorem

$$r_p = E(w_1 R_1 + w_2 R_2) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) = w_1 r_1 + w_2 r_2, \quad (2.1)$$

zaś wariancja stopy zwrotu portfela wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= (w_1 R_1 + w_2 R_2 - w_1 r_1 - w_2 r_2)^2 = \\ &= E(w_1 R_1 - w_1 r_1)^2 + E(w_2 R_2 - w_2 r_2)^2 \\ &\quad + 2E(w_1 R_1 - w_1 r_1)(w_2 R_2 - w_2 r_2) = \\ &= w_1^2 E(R_1 - r_1)^2 + w_2^2 E(R_2 - r_2)^2 \\ &\quad + 2w_1 w_2 E(R_1 - r_1)(R_2 - r_2) = \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \nu \end{aligned} \quad (2.2)$$

lub

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho,$$

gdzie

$$\rho = \frac{\nu}{\sigma_1 \sigma_2}$$

jest współczynnikiem korelacji stóp zwrotu R_1 i R_2 .

Odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela wyraża się wzorem

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho}. \quad (2.3)$$

Podstawiając do równania (2.1) $w_2 = 1 - w_1$ otrzymujemy

$$r_p(w_1) = w_1 r_1 + (1 - w_1) r_2 = (r_1 - r_2) w_1 + r_2.$$

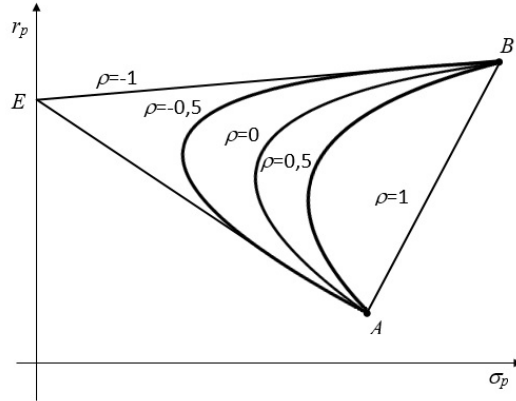
Ze wzoru (2.1) i zależności $w_1 + w_2 = 1$ mamy

$$w_1(r_p) = \frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{i} \quad w_2(r_p) = 1 - \frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2} = \frac{r_1 - r_p}{r_1 - r_2}.$$

Po podstawieniu $w_1(r_p)$ i $w_2(r_p)$ do (2.3) otrzymujemy

$$\sigma_p(r_p) = \sqrt{\left(\frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{r_1 - r_p}{r_1 - r_2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{(r_p - r_2)(r_1 - r_p)}{(r_1 - r_2)^2}}.$$

Funkcja $\sigma_p(r_p)$ jest przedziałami różnowartościowa. W związku z tym na każdym przedziale można wyznaczyć funkcję do niej odwrotną $r_p(\sigma_p)$. Na rysunku 2.1 przedstawiono różne, przykładowe wykresy funkcji $r_p(\sigma_p)$ w zależności od wartości współczynnika korelacji stóp zwrotu. Punkt A reprezentuje portfel składający się tylko z akcji pierwszej spółki. Punkt B reprezentuje portfel składający się tylko z akcji drugiej spółki.



Rysunek 2.1: Zbiory portfeli dla różnych wartości współczynników korelacji

Źródło: [53]

Rozważmy dwa szczególne przypadki postaci funkcji $r_p(\sigma_p)$.

Dla $\rho = 1$ mamy

$$\begin{aligned} \sigma_p(r_p) &= \sqrt{\left(\frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{r_1 - r_p}{r_1 - r_2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \frac{(r_p - r_2)(r_1 - r_p)}{(r_1 - r_2)^2}} = \\ &= \frac{(r_p - r_2)\sigma_1 + (r_1 - r_p)\sigma_2}{r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

Jest to funkcja liniowa. Funkcja odwrotna $r_p(\sigma_p)$ też jest funkcją liniową. Na rysunku 2.1 jej wykresem jest odcinek AB .

Dla $\rho = -1$ mamy

$$\begin{aligned}\sigma_p(r_p) &= \sqrt{\left(\frac{r_p - r_2}{r_1 - r_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{r_1 - r_p}{r_1 - r_2}\right)^2 \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \frac{(r_p - r_2)(r_1 - r_p)}{(r_1 - r_2)^2}} = \\ &= \left| \frac{(r_p - r_2)\sigma_1 - (r_1 - r_p)\sigma_2}{r_1 - r_2} \right|.\end{aligned}$$

To właśnie wartość bezwzględna sprawia, że wykresem funkcji $r_p(\sigma_p)$ jest na rysunku 2.1 łamana $AE B$.

Gdy $|\rho| \neq 1$ to geometryczną zależność oczekiwanej stopy zwrotu od ryzyka można też wyrazić następującym równaniem hiperboli [73]:

$$\frac{\sigma_p^2}{a^2} - \frac{(r_p - c)^2}{b^2} = 1,$$

gdzie:

$$\begin{aligned}a^2 &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}, \\ b^2 &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (r_2 - r_1)^2 (1 - \rho^2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho)^2}, \\ c &= \frac{r_2\sigma_1^2 + r_1\sigma_2^2 - (r_1 + r_2)\sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}.\end{aligned}$$

Jak widać na rysunku 2.1, w każdym przypadku istnieje taki portfel, który charakteryzuje się minimalnym ryzykiem. Aby go wyznaczyć, należy rozwiązać poniższe zadanie.

Zadanie 1²

$$\min (\sigma_p^2(w_1, w_2)) = \min (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho),$$

przy warunku

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Wyznaczając $w_2 = 1 - w_1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(w_1) &= w_1^2 \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1) \sigma_1 \sigma_2 \rho = \\ &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho) w_1^2 + 2(\sigma_1 \sigma_2 \rho - \sigma_2^2) w_1 + \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Ponieważ warunek $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho > 0$ jest spełniony³, więc istnieje minimum funkcji $\sigma_p^2(w_1)$ dla

$$w_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}.$$

Tym samym, funkcja $\sigma_p^2(w_1, w_2)$ osiąga przy warunku $w_1 + w_2 = 1$ minimum w punkcie

$$w_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}, w_2^* = 1 - w_1^* = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho} \quad (2.4)$$

i ta wartość minimalna jest równa

$$\sigma_p^2(w_1^*, w_2^*) = \frac{(\sigma_2^2 - \nu)^2 \sigma_1^2 + (\sigma_1^2 - \nu)^2 \sigma_2^2 + 2\nu (\sigma_1^2 - \nu) (\sigma_2^2 - \nu)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu)^2}. \quad (2.5)$$

Zauważmy, że portfel o minimalnym ryzyku w pewnych przypadkach uzyskuje się

² W literaturze często spotyka się zadanie polegające na minimalizacji odchylenia standardowego, a nie wariancja. Dla wyznaczenia składu optymalnego portfela nie ma to znaczenia. Wynika to z faktu, że jeżeli funkcja $f(x)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie i w x_0 osiąga minimum (maksimum) lokalne, to funkcja $\sqrt{f(x)}$ także w x_0 osiąga minimum (maksimum) lokalne.

³ $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho \geq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 > 0$, gdy $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

przy zastosowaniu krótkiej sprzedaży. Dzieje się tak, gdy $\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho < 0$ albo, gdy $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho < 0$, a więc wtedy, gdy

$$\rho > \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2)}{\min(\sigma_1, \sigma_2)}. \quad (2.6)$$

Oczekiwana stopa zwrotu portfela o minimalnym ryzyku jest równa

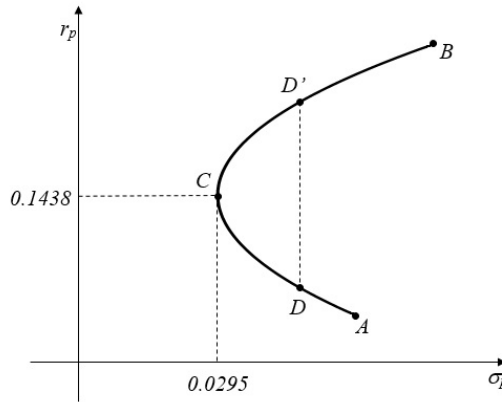
$$\begin{aligned} r_p(w_1^*, w_2^*) &= \frac{(\sigma_2^2 - \nu)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu} r_1 + \frac{(\sigma_1^2 - \nu)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu} r_2 \\ &= \frac{\sigma_1^2 r_2 + \sigma_2^2 r_1 - \nu(r_1 + r_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Przykład 2.1. W skład portfela wchodzi akcje dwóch spółek A i B . Niech dla spółki A będzie: $r_1 = 0,12$; $\sigma_1 = 0,04$; dla spółki B będzie: $r_2 = 0,2$; $\sigma_2 = 0,07$; niech $\rho = -0,3$. Podstawiając te dane do wzorów (2.1), otrzymujemy, że portfel o minimalnym ryzyku ma skład

$$w_1^* = \frac{0,07^2 + 0,04 \cdot 0,07 \cdot 0,3}{0,04^2 + 0,07^2 + 2 \cdot 0,04 \cdot 0,07 \cdot 0,3} = 0,702, \quad w_2^* = 1 - w_1 = 0,298.$$

Minimalne ryzyko portfela mierzone wariancją stopy zwrotu jest wtedy, na podstawie wzoru (2.5), równe $\sigma_p^2(0,702; 0,298) = 0,00087$, a odchylenie standardowe ma wartość $\sigma_p = \sqrt{0,00087} = 0,0295$. Oczekiwana stopa zwrotu tego portfela, na podstawie wzoru (2.7), jest równa $r_p = 0,1438$. Portfel ten na rysunku 2.2 reprezentuje punkt C . Jednocześnie punkt A reprezentuje portfel składający się tylko z akcji spółki A , a punkt B reprezentuje portfel składający się tylko z akcji spółki B . Jak widać, dywersyfikacja sprawiła, że otrzymaliśmy portfel charakteryzujący się mniejszym ryzykiem niż każdy jego składnik z osobna. Krzywa CB na rysunku 2.2 reprezentuje portfele efektywne, gdyż dla każdego z nich nie istnieje inny portfel mający taką samą oczekiwaną stopę zwrotu i mniejsze ryzyko lub nie istnieje inny portfel mający takie samo ryzyko i większą oczekiwaną stopę zwrotu. Na krzywej AC znajdują się portfele nieefektywne. Przykładowo, dla portfela D istnieje portfel D' , który charakteryzuje się takim samym ryzykiem, ale większą oczekiwaną

stopą zwrotu. Racjonalnie postępujący inwestorzy nie będą wybierać portfeli z krzywej AC .



Rysunek 2.2: Portfel o minimalnym ryzyku

Źródło: opracowanie własne

Portfel o minimalnym ryzyku przy zadanej stopie zwrotu

Oczekiwana stopa zwrotu portfela o minimalnym ryzyku nie musi być satysfakcjonująca dla inwestorów. Niektórzy z nich mogą być w stanie zaakceptować większe ryzyko dla większej oczekiwanej stopy zwrotu. Załóżmy, że inwestor szuka portfela, który charakteryzuje się minimalnym ryzykiem i oczekiwaną stopą zwrotu nie mniejszą niż ustalona przez niego wartość z . Zagadnienie to opisuje poniższe zadanie.

Zadanie 2

$$\min (\sigma_p^2(w_1, w_2)) = \min (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho),$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1, \\ w_1 r_1 + w_2 r_2 &\geq z. \end{aligned}$$

Oczekiwaną stopę zwrotu portfela o minimalnym ryzyku określoną wzorem (2.7) oznaczmy z_m . Na rysunku 2.3 widać, że dopóki $z \leq z_m$, to rozwiązaniem tego zagadnienia jest portfel o minimalnym ryzyku. Dla $z > z_m$ rozwiązaniem będzie portfel E i wtedy też warunek $w_1 r_1 + w_2 r_2 \geq z$ można zastąpić warunkiem $w_1 r_1 + w_2 r_2 = z$. Jeżeli $r_1 \neq r_2$, to układ równań

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_1 r_1 + w_2 r_2 = z \end{cases}$$

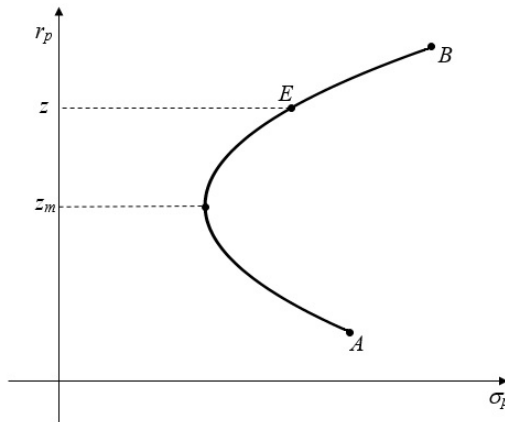
ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci:

$$w_1 = \frac{r_2 - z}{r_2 - r_1}, \quad w_2 = \frac{z - r_1}{r_2 - r_1}. \quad (2.8)$$

Portfel o oczekiwanej stopie zwrotu równej z i minimalnym ryzyku ma skład określony wzorem (2.8) i to minimalne ryzyko jest równe

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{r_2 - z}{r_2 - r_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{z - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho \frac{(r_2 - z)(z - r_1)}{(r_2 - r_1)^2}. \quad (2.9)$$

Zauważmy, że gdy $z > \max(r_1, r_2)$, to portfel o oczekiwanej stopie zwrotu równej z i minimalnym ryzyku uzyskuje się przy zastosowaniu krótkiej sprzedaży.



Rysunek 2.3: Portfel o minimalnym ryzyku przy zadanej stopie zwrotu

Źródło: opracowanie własne

Przykład 2.2. Niech, tak jak w poprzednim przykładzie, w skład portfela wchodzi akcje dwóch spółek A i B . Dla spółki A przyjmijmy: $r_1 = 0,12$ i $\sigma_1 = 0,04$; dla spółki B przyjmijmy: $r_2 = 0,2$ i $\sigma_2 = 0,07$; niech $\rho = -0,3$. Wymagana przez inwestora stopa zwrotu niech będzie równa $z = 0,18$.

Na podstawie wzoru (2.8) portfel, który ma oczekiwaną stopę zwrotu równą $0,18$ i minimalne ryzyko ma skład

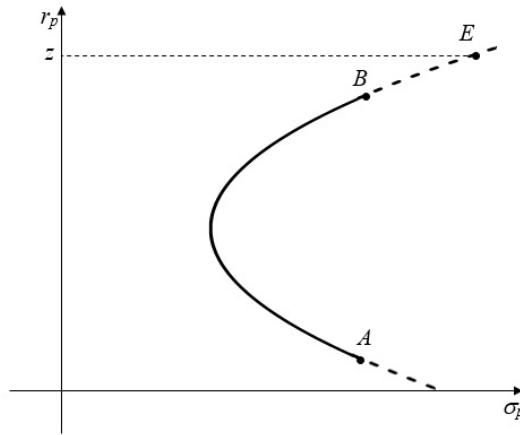
$$w_1 = \frac{0,2 - 0,18}{0,2 - 0,12} = 0,25; w_2 = 1 - w_1 = 0,75.$$

To minimalne ryzyko mierzone wariancją stopy zwrotu portfela jest równe (patrz wzór (2.9)) $\sigma_p^2 = 0,00254$. Odchylenie standardowe stopy zwrotu tego portfela jest równe $\sigma_p = 0,0504$.

Niech teraz wymagana przez inwestora stopa zwrotu portfela będzie równa $z = 0,22$. Wtedy, po podstawieniu do wzoru (2.8), otrzymujemy, że portfel o minimalnym ryzyku ma skład

$$w_1 = \frac{0,2 - 0,22}{0,2 - 0,12} = -0,25; w_2 = 1 - w_1 = 1,25.$$

Na rysunku 2.4 portfel ten reprezentuje punkt E . Krzywa o początku w punkcie B oznaczona przerywaną linią reprezentuje portfele efektywne otrzymywane poprzez krótką sprzedaż akcji spółki A . Korzystając z krótkiej sprzedaży, można teoretycznie wyznaczyć portfel efektywny mający dowolnie dużą oczekiwaną stopę zwrotu. Na rysunku 2.4 zaznaczono także linią przerywaną krzywą o początku w punkcie A , która reprezentuje portfele otrzymywane poprzez krótką sprzedaż akcji spółki B . Nie są to jednak portfele efektywne.



Rysunek 2.4: Portfel o minimalnym ryzyku przy zastosowaniu krótkiej sprzedaży

Źródło: opracowanie własne

W naszych dotychczasowych rozważaniach skupiliśmy się tylko na metodach dywersyfikacji portfela. Nie braliśmy pod uwagę tak ważnego aspektu planowania finansowego, jakim jest podział kapitału na inwestycję i konsumpcję. Tym zagadnieniem zajmiemy się obecnie.

Podział kapitału na konsumpcję i inwestycję

Załóżmy, że inwestor dysponuje pewnym kapitałem, który na ustalony okres chce przeznaczyć na zakup akcji do dwuskładnikowego portfela oraz na konsumpcję. Dokona zatem podziału kapitału na następujące trzy części:

- w_1 – część przeznaczona na zakup akcji pierwszej spółki (spółka A),
- w_2 – część przeznaczona na zakup akcji drugiej spółki (spółka B),
- w_3 – część przeznaczona na konsumpcję,

gdzie

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1.$$

Możemy przyjąć, że inwestor chce zbudować trzyskładnikowy portfel, w skład którego wchodzi:

- akcje spółki A , dla której oczekiwana stopa zwrotu jest równa r_1 z wariancją równą σ_1^2 ,
- akcje spółki B , dla której oczekiwana stopa zwrotu jest równa r_2 z wariancją równą σ_2^2 ,
- walor pozbawiony ryzyka (konsumpcja) z oczekiwaną stopą zwrotu równą zero i zerową wariancją.

Niech $r_1 \neq r_2$ i $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Kowariancję i współczynnik korelacji stóp zwrotu akcji oznaczmy odpowiednio ν i ρ . Inwestor chce, aby oczekiwana stopa zwrotu zbudowanego przez niego portfela była co najmniej z przy jak najmniejszym ryzyku. Obecnie ograniczymy się do przypadku $|\rho| < 1$. Problem decyzyjny opiszemy następująco:

$$\min (\sigma_p^2(w_1, w_2)) = \min (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \nu),$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 1, \\ w_1 r_1 + w_2 r_2 &\geq z. \end{aligned}$$

Równość $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ zastąpmy nierównością $w_1 + w_2 \leq 1$ i otrzymujemy poniższe zadanie.

Zadanie 3

$$\min (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \nu),$$

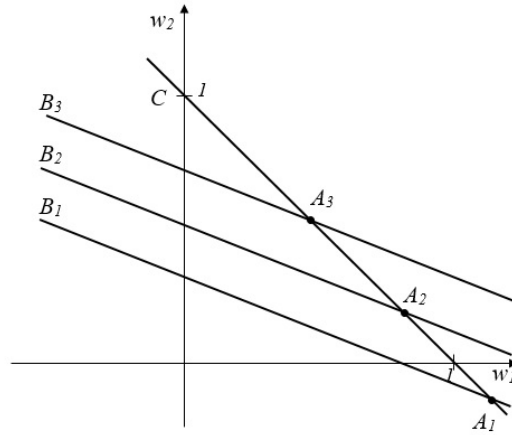
przy warunkach:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\leq 1, \\ w_1 r_1 + w_2 r_2 &\geq z. \end{aligned}$$

Na płaszczyźnie (w_1, w_2) zbiór wyznaczony przez powyższe warunki, który nazywać będziemy zbiorem dopuszczalnych rozwiązań, jest kątem. Jeżeli przyjmiemy, że jest to kąt skierowany dodatnio, to jego początkowym ramieniem jest półprosta o równaniu $w_1 + w_2 = 1$, a końcowym ramieniem jest półprosta o równaniu $w_1 r_1 + w_2 r_2 = z$. Wierzchołek kąta ma współrzędne

$$w_1 = \frac{z - r_2}{r_1 - r_2}, \quad w_2 = \frac{r_1 - z}{r_1 - r_2}.$$

Na rysunku 2.5 pokazano przykładowe zbiory dopuszczalnych rozwiązań dla różnych wartości z . Jeżeli założymy, że $z_1 < z_2 < z_3$, to kąt CA_1B_1 odpowiada z_1 , kąt CA_2B_2 odpowiada z_2 , kąt CA_3B_3 odpowiada z_3 i przykładowo, wierzchołek A_1 ma współrzędne $\left(\frac{z_1 - r_2}{r_1 - r_2}, \frac{r_1 - z_1}{r_1 - r_2}\right)$.



Rysunek 2.5: Przykładowe zbiory dopuszczalnych rozwiązań przy różnych wartościach oczekiwanych stóp zwrotu

Źródło: opracowanie własne

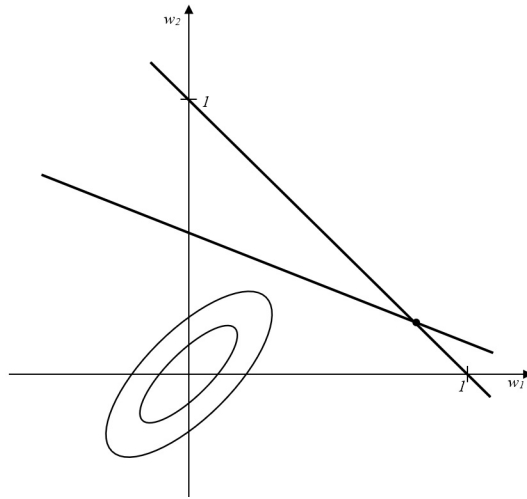
Oznaczmy

$$w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \nu = q. \quad (2.10)$$

Jeżeli $\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \nu^2 > 0$, to równanie (2.10) określa rodzinę elips (porównaj [61], [99]) o środku w punkcie $(0,0)$ różniących się wartością parametru skalującego q . Zauważmy, że, gdy $|\rho| < 1$, to nierówność $\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \nu^2 > 0$ jest zawsze prawdziwa, bo

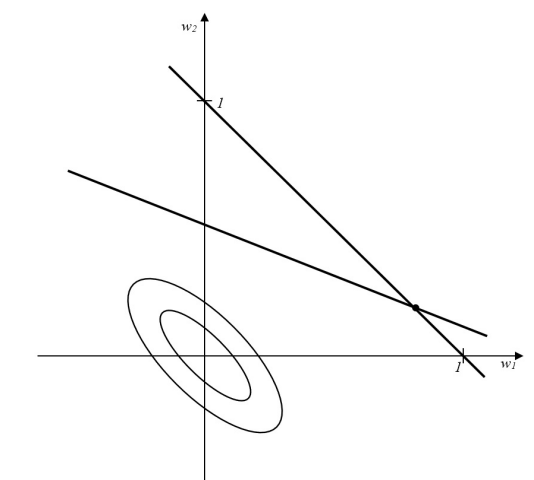
$$\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \nu^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \sigma_2^2 \rho^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) > 0.$$

Na rysunkach 2.6, 2.7, 2.8 pokazano przykładowe elipsy dla różnych wartości parametru q , przy czym na rysunku 2.6 jest $\nu < 0$, na rysunku 2.7 jest $\nu > 0$, na rysunku 2.8 jest $\nu = 0$.



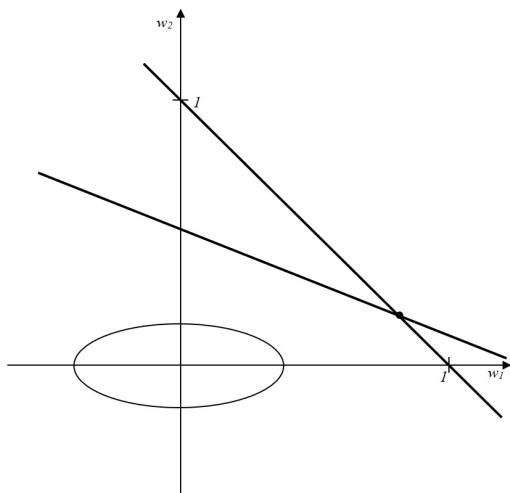
Rysunek 2.6: Przykładowe elipsy dla wartości $\nu < 0$

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 2.7: Przykładowe elipsy dla wartości $\nu > 0$

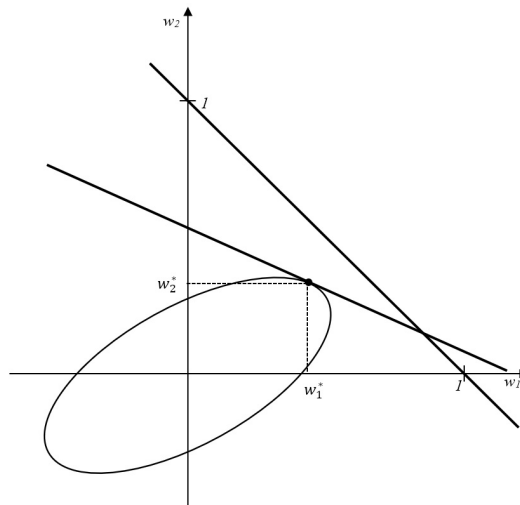
Źródło: opracowanie własne



Rysunek 2.8: Przykładowa elipsa dla wartości $\nu = 0$

Źródło: opracowanie własne

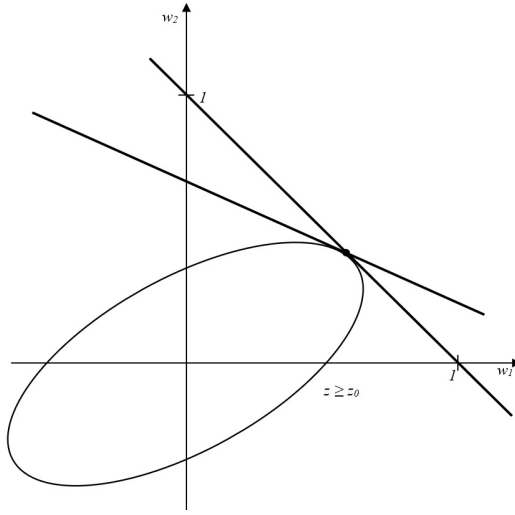
Minimalizacja funkcji $\sigma_p^2(w_1, w_2)$ przy zadanych warunkach sprowadza się do znalezienia takiej elipsy z tej rodziny, która ma co najmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem dopuszczalnych rozwiązań i najmniejszą wartość parametru q . Taka elipsa będzie styczną do zbioru dopuszczalnych rozwiązań. Ilustruje to rysunek 2.9. Na rysunku tym widać, że dla dostatecznie małych wartości z ten punkt styczności nie należy do prostej o równaniu $w_1 + w_2 = 1$, ale znajduje się pod tą prostą, czyli jego współrzędne spełniają warunek $w_1 + w_2 < 1$. Wtedy też oczekiwana stopa zwrotu portfela będzie równa z i jednocześnie wielkość konsumpcji nie będzie zerowa.



Rysunek 2.9: Geometryczna interpretacja portfela z niezerową konsumpcją

Źródło: opracowanie własne

Wraz ze wzrostem wartości z elipsa stanie się styczną do wierzchołka zbioru dopuszczalnych rozwiązań i wtedy konsumpcja będzie już zerowa (patrz rysunek 2.10).



Rysunek 2.10: Geometryczna interpretacja portfela z zerową konsumpcją

Źródło: opracowanie własne

Aby wyznaczyć punkt styczności, rozważmy układ równań

$$\begin{cases} w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \nu = q \\ w_1 r_1 + w_2 r_2 = z \end{cases}$$

i wyznaczmy taką wartość q , aby miał on dokładnie jedno rozwiązanie. Podstawiając $w_2 = \frac{z - w_1 r_1}{r_2}$ i wstawiając do równania pierwszego, otrzymujemy równanie

$$w_1^2 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2) + 2w_1 z (\nu r_2 - \sigma_2^2 r_1) + \sigma_2^2 z^2 - q r_2^2 = 0. \quad (2.11)$$

Jeżeli $|\rho| < 1$, to $\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2 > 0$, bo

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2 = \\ & = \sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 r_1 r_2 > \sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 r_1 r_2 = \\ & = (\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Aby równanie 2.11 miało dokładnie jedno rozwiązanie, musi zachodzić

$$\Delta = 4z^2 (\nu r_2 - \sigma_2^2 r_1)^2 - 4 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2) (\sigma_2^2 z^2 - q r_2^2) = 0,$$

a to oznacza

$$(\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2) (\sigma_2^2 z^2 - q r_2^2) = z^2 (\nu r_2 - \sigma_2^2 r_1)^2.$$

Stąd

$$q = \frac{\sigma_2^2 z^2 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2) - z^2 (\nu r_2 - \sigma_2^2 r_1)^2}{r_2^2 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2)}. \quad (2.12)$$

Wtedy (obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli) udziały akcji w portfelu są równe

$$w_1 = \frac{z(\sigma_2^2 r_1 - \nu r_2)}{\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{z - \frac{r_1 z (\sigma_2^2 r_1 - \nu r_2)}{\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2}}{r_2} = \\ &= \frac{z (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2) - r_1 z (\sigma_2^2 r_1 - \nu r_2)}{r_2 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$w_3 = 1 - w_1 - w_2. \quad (2.15)$$

Wartość q jest wariancją stopy zwrotu trzyskładnikowego portfela przy zadanej wartości z . Gdy elipsa stanie się styczną do wierzchołka zbioru dopuszczalnych rozwiązań, to jak już wiemy, wartość konsumpcji będzie zerowa. Stanie się tak, gdy z będzie miało wartość nie mniejszą niż z_0 , którą to wyznaczymy, rozwiązując równanie

$$\frac{z_0 (\sigma_2^2 r_1 - \nu r_2)}{\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2} = \frac{z_0 - r_2}{r_1 - r_2}.$$

Otrzymujemy

$$z_0 = \frac{r_2 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2)}{\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2 - (\sigma_2^2 r_1 - \nu r_2) (r_1 - r_2)}. \quad (2.16)$$

W dwuskładnikowym portfelu składającym się tylko z akcji udziały wartościowe będą równe

$$v_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2}, \quad v_2 = \frac{w_2}{w_1 + w_2}.$$

Na podstawie wzorów (2.13) i (2.14) można pokazać, że v_1 i v_2 są wartościami stałymi, co oznacza, że portfel dwuskładnikowy, złożony z samych akcji o udziałach (v_1, v_2) , zawsze będzie miał taką samą oczekiwaną stopę zwrotu równą

$$v_1 r_1 + v_2 r_2 = z_0$$

i stałe ryzyko równe

$$\frac{\sigma_2^2 z_0^2 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2) - z_0^2 (\nu r_2 - \sigma_2^2 r_1)^2}{r_2^2 (\sigma_1^2 r_2^2 + \sigma_2^2 r_1^2 - 2\nu r_1 r_2)}, \quad (2.17)$$

którą to wartość otrzymujemy po podstawieniu z_0 do wzoru (2.12).

Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że dopóki jest $z < z_0$, to inwestor powinien dokonywać podziału kapitału na konsumpcję i portfel akcji o stałych udziałach. Jeżeli część kapitału przeznaczoną na kupno portfela oznaczymy przez w_p , to ze wzoru $w_p z_0 = z$ otrzymamy, że część przeznaczona na konsumpcję będzie równa

$$w_3 = 1 - \frac{z}{z_0}.$$

Do tego zagadnienia powrócimy jeszcze przy okazji omawiania portfeli z walorem wolnym od ryzyka.

Przykład 2.3. Inwestor dysponuje kapitałem 1000 zł. W skład portfela będą wchodzić akcje dwóch spółek A i B . Dla spółki A jest: $r_1 = 0,12$; $\sigma_1 = 0,04$; dla spółki

B jest: $r_2 = 0,2$; $\sigma_2 = 0,07$; niech $\rho = -0,3$. Inwestor wymaga, aby portfel zwiększył swoją wartość o co najmniej 130 zł, czyli $z = 0,13$. Ze wzoru (2.16) otrzymujemy $z_0 = 0,1486$. Ze wzorów (2.13)-(2.15) mamy

$$\begin{cases} w_1 = 0,562 \\ w_2 = 0,3128 \\ w_3 = 0,1252. \end{cases}$$

Inwestor musi zakupić akcje spółki A za 562 zł, akcje spółki B za 321,8 zł. Na konsumpcję zostanie wtedy 125,2 zł, którą to wartość otrzymujemy wyliczając $1000 \left(1 - \frac{0,13}{0,1486}\right)$.

Teraz zajmiemy się szczegółowo przypadkiem $|\rho| = 1$.

Dla $\rho = 1$ zadanie 3 przyjmuje postać (minimalizowane jest odchylenie standardowe)

$$\min (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2),$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \quad \text{lub} \quad w_1 + w_2 \leq 1, \\ w_1r_1 + w_2r_2 &= z. \end{aligned}$$

Wyznaczając $w_2 = \frac{z - w_1r_1}{r_2}$, otrzymujemy, że należy zminimalizować funkcję liniową zmiennej w_1 postaci

$$f_1(w_1) = \frac{\sigma_1r_2 - \sigma_2r_1}{r_2}w_1 + \frac{z\sigma_2}{r_2}, \quad w_1 \in [0,1].$$

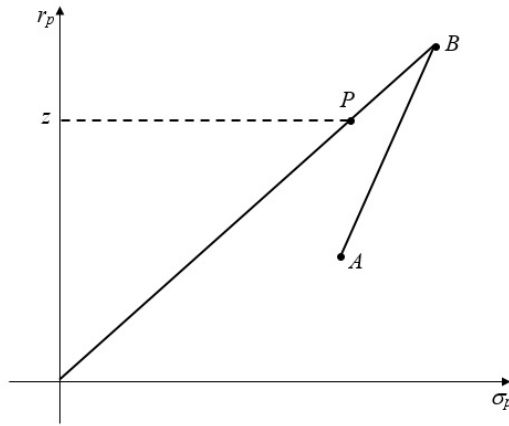
Kluczowa dla rozwiązania jest wartość współczynnika kierunkowego w powyższym równaniu.

Gdy $\sigma_1r_2 - \sigma_2r_1 > 0$, czyli $\frac{\sigma_1}{r_1} > \frac{\sigma_2}{r_2}$, to funkcja f_1 jest rosnąca i osiąga minimum dla $w_1 = 0$. Wtedy otrzymujemy $w_2 = \frac{z}{r_2}$ i $w_3 = 1 - \frac{z}{r_2}$. Jeżeli inwestor ustali z mniejsze od r_2 , to wtedy będzie $w_3 > 0$, co oznacza niezerową konsumpcję.

Jak widzimy, w tym przypadku wystarczy, że inwestor zakupi akcje tylko drugiej spółki. Oczekiwana stopa zwrotu portfela i jej odchylenie standardowe są wtedy odpowiednio równe $r_p = w_2 r_2$ i $\sigma_p = w_2 \sigma_2$. Daje to liniową zależność

$$r_p = \frac{r_2}{\sigma_2} \sigma_p.$$

Powyższą sytuację ilustruje rysunek 2.11, na którym punkt P reprezentuje portfel składający się tylko z akcji spółki B , mający oczekiwaną stopę zwrotu równą z i minimalne ryzyko.



Rysunek 2.11: Portfel efektywny przy współczynniku korelacji równym jeden, przypadek $\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1 > 0$

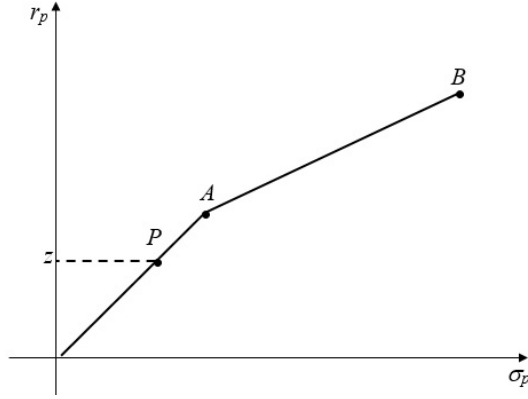
Źródło: opracowanie własne

Gdy $\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1 < 0$, czyli $\frac{\sigma_1}{r_1} < \frac{\sigma_2}{r_2}$, to rozważmy funkcję

$$f_2(w_2) = \frac{\sigma_2 r_1 - \sigma_1 r_2}{r_1} w_2 + \frac{z \sigma_1}{r_1}, \quad w_2 \in [0, 1].$$

Funkcja f_2 jest rosnąca i osiąga minimum dla $w_2 = 0$. Wtedy otrzymujemy $w_1 = \frac{z}{r_1}$ i $w_3 = 1 - \frac{z}{r_1}$. Jeżeli inwestor ustali z mniejsze od r_1 , to będzie $w_3 > 0$.

Powyższą sytuację ilustruje rysunek 2.12.



Rysunek 2.12: Portfel efektywny przy współczynniku korelacji równym jeden, przypadek $\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1 < 0$

Źródło: opracowanie własne

Dla $\rho = -1$ odchylenie standardowe dane jest wzorem

$$|w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2|$$

i zeruje się ono dla $w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ i $w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$. Wtedy też oczekiwana stopa zwrotu portfela jest równa

$$z_0 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} r_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} r_2.$$

Dla każdej wartości $\eta \in (0,1)$, dla argumentów $\eta w_1 = \eta \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ i $\eta w_2 = \eta \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$ odchylenie standardowe także się zeruje i oczekiwana stopa zwrotu jest wtedy równa ηz_0 . Jeżeli inwestor ustali wymagane z spełniające warunek $z < z_0$, to na konsumpcję będzie mógł przeznaczyć $w_3 = 1 - \eta w_1 - \eta w_2$.

Portfel z instrumentem wolnym od ryzyka

Na rynkach finansowych istnieje wiele instrumentów wolnych od ryzyka. Zalicza się do nich np. bony skarbowe i obligacje skarbowe, gdyż przyjmuje się założenie, że Skarb Państwa jest zawsze wypłacalny i nie grozi mu upadłość.

Założmy, że inwestor chce zbudować portfel składający się z akcji dwóch spółek, dla których oczekiwane stopy zwrotu są równe r_1 i r_2 , z wariancjami tych stóp równymi odpowiednio σ_1^2 i σ_2^2 . Współczynnik korelacji tych stóp zwrotu jest równy ρ . Stopa zwrotu waloru wolnego od ryzyka jest równa r_f z wariancją równą zero. Także zerowe są współczynniki korelacji stóp zwrotu akcji i waloru wolnego od ryzyka. Udziały tych aktywów w portfelu oznaczmy $(w_1, w_2, w_f)^T$. Celem inwestora jest zbudowanie portfela, którego oczekiwana stopa zwrotu będzie równa z przy minimalnym ryzyku. Prowadzi to do poniższego zadania.

Zadanie 4

$$\min (w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho),$$

przy warunkach:

$$w_1 + w_2 + w_f = 1,$$

$$w_1r_1 + w_2r_2 + w_fr_f = z.$$

Podstawmy $w_f = 1 - w_1 - w_2$ i rozważmy funkcję Lagrange'a (patrz dodatek matematyczny)

$$\begin{aligned} L(w_1, w_2, \lambda) = & w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho + \\ & + \lambda (w_1r_1 + w_2r_2 + (1 - w_1 - w_2)r_f - z). \end{aligned}$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do zera:

$$\frac{\partial L(w_1, w_2, \lambda)}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_1\sigma_2\rho + \lambda(r_1 - r_f) = 0,$$

$$\frac{\partial L(w_1, w_2, \lambda)}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho + \lambda(r_2 - r_f) = 0,$$

$$\frac{\partial L(w_1, w_2, \lambda)}{\partial \lambda} = w_1(r_1 - r_f) + w_2(r_2 - r_f) - z + r_f = 0,$$

co możemy w postaci macierzowej zapisać jako

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_1\sigma_2\rho & r_1 - r_f \\ 2\sigma_1\sigma_2\rho & 2\sigma_2^2 & r_2 - r_f \\ r_1 - r_f & r_2 - r_f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z - r_f \end{pmatrix}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_1\sigma_2\rho & r_1 - r_f \\ 2\sigma_1\sigma_2\rho & 2\sigma_2^2 & r_2 - r_f \\ r_1 - r_f & r_2 - r_f & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z - r_f \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Przykład 2.4. W skład portfela wchodzi akcje dwóch spółek A i B . Dla spółki A jest: $r_1 = 0,12$; $\sigma_1 = 0,04$; dla spółki B jest: $r_2 = 0,2$; $\sigma_2 = 0,07$; niech $\rho = -0,3$ i $r_f = 0,05$. Załóżmy, że inwestor ustalił $z = 0,13$. Podstawiając te dane do wzoru 2.18, otrzymamy

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4832 \\ 0,3078 \\ -0,0147 \end{pmatrix}.$$

Portfel charakteryzujący się oczekiwaną stopą zwrotu równą $0,13$ i minimalnym ryzykiem ma udziały

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4832 \\ 0,3078 \\ 0,209 \end{pmatrix}.$$

Kontynuując ten przykład, załóżmy teraz, że $r_f = 0$. Jest to przypadek tylko teoretyczny, gdyż trudno znaleźć na rynku pożyczkodawcę, który nie zażąda wynagro-

dzenia za korzystanie z jego kapitału. Wzór 2.18 przyjmie wtedy postać

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_1\sigma_2\rho & r_1 \\ 2\sigma_1\sigma_2\rho & 2\sigma_2^2 & r_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Podstawiając dane do wzoru 2.19, otrzymamy

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,561985 \\ 0,312809 \\ -0,01061 \end{pmatrix}.$$

Wtedy też $w_f = 0,1252$. Jest to wynik zgodny z tym uzyskanym w przykładzie 2.3.

Można wykazać, że udziały w portfelu akcji tych dwóch spółek wyliczone ze wzoru (2.19) będą takie same jak te, określone wzorami (2.13) oraz (2.14). Jak wiadać, rozważany wcześniej problem podziału kapitału na konsumpcję i inwestycję można zastąpić problemem dywersyfikacji portfela z walorem wolnym od ryzyka, przyjmując, że konsumpcja jest walorem pozbawionym ryzyka z zerową stopą procentową.

Do wyznaczenia efektywnego portfela z walorem wolnym od ryzyka można też podejść w inny sposób. Załóżmy, że inwestor posiada portfel złożony tylko z akcji, którego oczekiwana stopa zwrotu jest równa r_s z odchyleniem standardowym σ_s , oznaczmy ten portfel S . Na rynku istnieje walor wolny od ryzyka ze stopą zwrotu równą r_f . Inwestor utworzył nowy portfel składający się z portfela S i waloru wolnego od ryzyka o udziałach równych odpowiednio w i $1 - w$, ten portfel oznaczmy P . Dopuszczamy krótką sprzedaż akcji, czyli $w \in R$. Tak utworzony nowy portfel możemy potraktować jako portfel dwuskładnikowy. Jego oczekiwana stopa zwrotu jest równa

$$r_p = wr_s + (1 - w)r_f \quad (2.20)$$

z odchyleniem standardowym

$$\sigma_p = w\sigma_s. \quad (2.21)$$

Wyznaczając w ze wzoru (2.21) i wstawiając do wzoru (2.20), otrzymujemy, że zależność r_p od σ_p jest liniowa, określona wzorem

$$r_p = \frac{r_s - r_f}{\sigma_s} \sigma_p + r_f.$$

Dla wymaganej przez inwestora stopy zwrotu portfela P równej z mamy

$$w r_s + (1 - w) r_f = z,$$

stąd

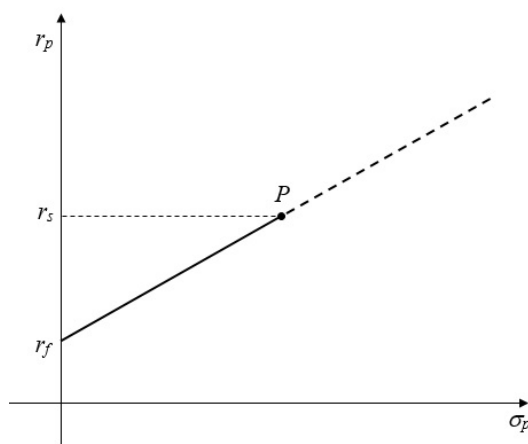
$$w = \frac{z - r_f}{r_s - r_f},$$

$$\sigma_p = \frac{z - r_f}{r_s - r_f} \sigma_s.$$

Przykład 2.5. Dany jest portfel złożony tylko z akcji, gdzie $r_s = 0,1$, $\sigma_s = 0,04$. Stopa wolna od ryzyka jest równa $r_f = 0,05$. Tabela pokazuje, jakie są udziały portfela S w portfelu P oraz wartości odchylenia standardowego dla różnych wartości wymaganej przez inwestora stopy zwrotu z .

z	w	σ_s	$1 - w$
0,05	0	0	1
0,06	0,2	0,008	0,8
0,07	0,4	0,016	0,6
0,08	0,6	0,024	0,4
0,09	0,8	0,032	0,2
0,1	1	0,04	0
0,11	1,2	0,048	-0,2
0,12	1,4	0,056	-0,4

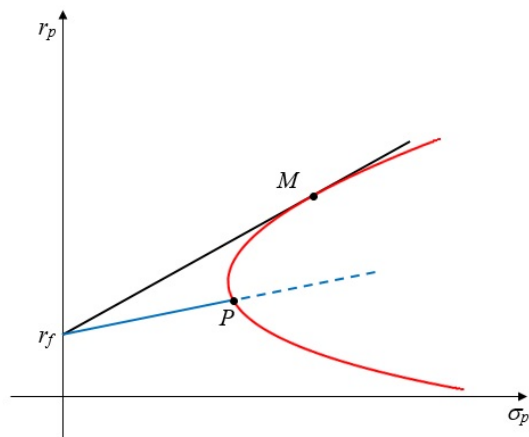
Zbiór wszystkich możliwych portfeli P przedstawia rysunek 2.13. Jak widać, aby portfel P miał oczekiwaną stopę zwrotu większą od r_s , należy budować go poprzez zaciągnięcie pożyczki ze stopą r_f . Takie portfele na rysunku 2.13 reprezentuje linia przerywana.



Rysunek 2.13: Zbiór portfeli zawierających ustalony portfel akcji i walor wolny od ryzyka

Źródło: opracowanie własne

Teoretycznie portfel S może być dowolny. Dla ustalenia uwagi założmy, że jest on jednym z portfeli efektywnych. Na rysunku 2.14 znajduje się zbiór efektywnych portfeli złożonych tylko z akcji (czerwona linia) oraz niebieska linia z rysunku 2.13. Widać, że racjonalnie postępujący inwestor powinien aktywnie wolne od ryzyka dołączać do portfela akcji, który jest reprezentowany przez punkt M .



Rysunek 2.14: Zbiór efektywnych portfeli zawierających portfel rynkowy i walor wolny od ryzyka

Źródło: opracowanie własne

Portfel M często nazywany jest portfelem rynkowym i ma on ogromne znaczenie w modelowaniu rynków finansowych, o czym będzie mowa później.

2.2 Portfele wieloskładnikowe

Rozważania dotyczące portfeli dwuskładnikowych można w prosty sposób uogólnić na portfele składające się z więcej niż dwóch rodzajów aktywów. W tym przypadku, podobnie wyglądają zbiory dopuszczalnych i efektywnych portfeli w układzie współrzędnych ryzyko-zysk, ale potrzebna jest analiza większej liczby danych. Jak w przypadku portfeli dwuskładnikowych, kryterium optymalizacji polega na minimalizacji wariancji stopy zwrotu portfela, która jest formą kwadratową, przy założeniu, że funkcja liniowa oczekiwanej stopy zwrotu osiągnie założoną wartość.

Niech

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} R_1(\omega) \\ R_2(\omega) \\ \vdots \\ R_n(\omega) \end{pmatrix}$$

będzie n -wymiarowym wektorem losowym, określonym na zadanej przestrzeni probabilistycznej, reprezentującym przyszłe stopy zwrotu z inwestycji w akcje n spółek. Niech r będzie n -wymiarowym wektorem wartości oczekiwanych tych stóp zwrotu, tzn.

$$r = \begin{pmatrix} ER_1(\omega) \\ ER_2(\omega) \\ \vdots \\ ER_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Niech Σ będzie macierzą wariancji i kowariancji tych stóp zwrotu, czyli

$$\begin{aligned} \Sigma &= E(R(\omega) - r)(R(\omega) - r)^T = \\ &= \begin{pmatrix} \text{var}(R_1) & \text{cov}(R_1, R_2) & \dots & \text{cov}(R_1, R_n) \\ \text{cov}(R_2, R_1) & \text{var}(R_2) & \dots & \text{cov}(R_2, R_n) \\ \dots & & & \\ \text{cov}(R_n, R_1) & \text{cov}(R_n, R_2) & \dots & \text{var}(R_n) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdzie

$$\text{cov}(R_i, R_j) = E[(R_i(\omega) - r_i)(R_j(\omega) - r_j)], \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Macierz Σ jest symetryczna i dodatnio określona.

Niech

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

będzie wektorem udziałów wartościowych akcji w portfelu.

Wartość oczekiwana stopy zwrotu portfela, oznaczmy ją r_p , dana jest wzorem

$$\begin{aligned} r_p &= E(w_1 R_1(\omega) + w_2 R_2(\omega) + \dots + w_n R_n(\omega)) = \\ &= w_1 E R_1(\omega) + w_2 E R_2(\omega) + \dots + w_n E R_n(\omega) = \langle w, r \rangle. \end{aligned}$$

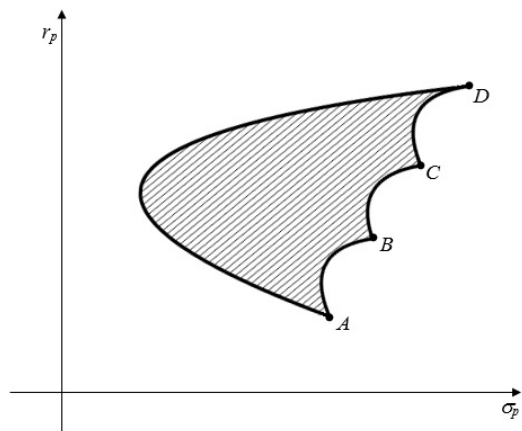
Wariancja stopy zwrotu portfela, oznaczmy ją σ_p^2 , dana jest wzorem

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(w_1, w_2, \dots, w_n) &= \\ &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \text{var}(R_1) & \text{cov}(R_1, R_2) & \dots & \text{cov}(R_1, R_n) \\ \text{cov}(R_2, R_1) & \text{var}(R_2) & \dots & \text{cov}(R_2, R_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(R_n, R_1) & \text{cov}(R_n, R_2) & \dots & \text{var}(R_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \\ &= w^T \Sigma w. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Odchylenie standardowe σ_p stopy zwrotu portfela wyraża się wzorem

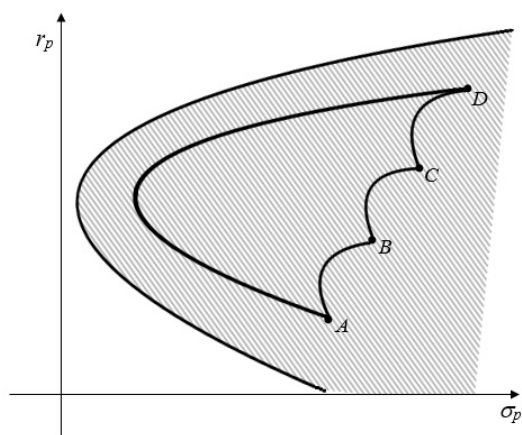
$$\sigma_p(w_1, w_2, \dots, w_n) = \sqrt{w^T \Sigma w}. \tag{2.24}$$

Przykładowo, na rysunku 2.15 pokazano, jak w układzie (σ_p, r_p) może wyglądać zbiór wszystkich dostępnych dla inwestora portfeli czterech spółek bez stosowania krótkiej sprzedaży. Na rysunku 2.16 jest zbiór wszystkich dostępnych dla inwestora portfeli tych spółek z możliwością stosowania krótkiej sprzedaży.



Rysunek 2.15: Zbiór wszystkich portfeli czteroskładnikowych bez możliwości krótkiej sprzedaży

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 2.16: Zbiór wszystkich portfeli czteroskładnikowych z możliwością stosowania krótkiej sprzedaży

Źródło: opracowanie własne

Poniżej omówimy metody budowy portfeli wieloskładnikowych przy różnych kryteriach dotyczących ryzyka i stopy zwrotu tych portfeli.

Portfel o minimalnym ryzyku

Wyznaczenie takiego portfela polega na rozwiązaniu następującego zadania:

Zadanie 5

$$\min w^T \Sigma w, \quad (2.25)$$

przy warunku

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (2.26)$$

Zakładamy, że dopuszczalna jest krótka sprzedaż akcji. Tworzymy funkcję Lagrange'a postaci

$$L(w, \lambda) = w^T \Sigma w + \lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right).$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma w + \lambda I = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = w^T I - 1 = 0 \end{cases},$$

gdzie I jest n -wymiarowym wektorem składającym się z samych jedynek. Powyższy układ równań zapisujemy w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma & I \\ I^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie Θ jest n -wymiarowym wektorem składającym się z samych zer. Otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} w \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Sigma & I \\ I^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Theta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Ponieważ macierz Σ jest dodatnio określona, więc funkcja L osiąga minimum lokalne.

Przykład 2.6. Rozważmy portfel składający się z akcji trzech spółek. Oczekiwane stopy zwrotu i odchylenia standardowe tych stóp niech będą równe odpowiednio: $r_1 = 0,12, \sigma_1 = 0,02, r_2 = 0,15, \sigma_2 = 0,03, r_3 = 0,2, \sigma_3 = 0,04$. Niech współczynniki korelacji stóp zwrotu będą równe: $\rho(R_1, R_2) = -0,1, \rho(R_1, R_3) = 0,2, \rho(R_2, R_3) = -0,6$. Z powyższego mamy

$$\text{var}(R_1) = 0,0004, \quad \text{var}(R_2) = 0,0009, \quad \text{var}(R_3) = 0,0016.$$

Wiedząc, że $\text{cov}(R_i, R_j) = \sigma_i \sigma_j \rho(R_i, R_j)$, otrzymujemy:

$$\text{cov}(R_1, R_2) = -0,00006, \quad \text{cov}(R_1, R_3) = 0,00016, \quad \text{cov}(R_2, R_3) = -0,00072.$$

Macierz wariancji i kowariancji ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,0004 & -0,00006 & 0,00016 \\ -0,00006 & 0,0009 & -0,00072 \\ 0,00016 & -0,00072 & 0,0016 \end{pmatrix}.$$

Ze wzoru (2.27) mamy

$$\begin{pmatrix} w \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0008 & -0,00012 & 0,00032 & 1 \\ -0,00012 & 0,0018 & -0,00144 & 1 \\ 0,00032 & -0,00144 & 0,0032 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,362846 \\ 0,395437 \\ 0,241716 \\ -0,00032 \end{pmatrix}.$$

Udziały w portfelu charakteryzującym się minimalnym ryzykiem są równe

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,362846 \\ 0,395437 \\ 0,241716 \end{pmatrix}.$$

Oczekiwana stopa zwrotu i odchylenie standardowe tej stopy tak skonstruowanego portfela są odpowiednio równe:

$$r_p = \langle w, r \rangle = 0,362846 \cdot 0,1 + 0,395437 \cdot 0,15 + 0,241716 \cdot 0,2 = 0,1512,$$

$$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w} = 0,012653.$$

Dla redukcji ryzyka portfela najważniejszą rzeczą nie jest liczba składników portfela, ale kowariancje ich stóp zwrotu. Rozważmy portfel składający się z n aktywów, których udziały są jednakowe, tzn. $w_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wariancja stopy zwrotu portfela dana jest wtedy wzorem

$$\sigma_p^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(R_i) + \frac{n-1}{n^2} \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ i < j}} \text{cov}(R_i, R_j) = \frac{1}{n} \overline{\text{var}} + \frac{n-1}{n} \overline{\text{cov}},$$

gdzie $\overline{\text{var}}$ oznacza średnią arytmetyczną wariancji stóp zwrotu składników portfela, a $\overline{\text{cov}}$ oznacza średnią arytmetyczną kowariancji tych stóp. Ponadto zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \overline{\text{var}} + \frac{n-1}{n} \overline{\text{cov}} \right) = \overline{\text{cov}}.$$

„Z powyższego wzoru wynika, że w miarę zwiększania liczby składników portfela wariancja portfela zależy w coraz mniejszym stopniu od wariancji (czyli ryzyka) pojedynczych akcji, a w coraz większym stopniu od kowariancji (czyli powiązania) par składników.” [50]

Inwestor może być skłonny ponieść większe ryzyko dla osiągnięcia większej stopy zwrotu niż ta, którą ma portfel o minimalnym ryzyku. Pojawia się wtedy zagadnienie wyboru portfela o minimalnym ryzyku przy zadanej stopie zwrotu.

Portfel o minimalnym ryzyku przy zadanej stopie zwrotu

Niech z będzie minimalną wymaganą przez inwestora oczekiwaną stopą zwrotu portfela. Załóżmy, że z jest większe od stopy zwrotu portfela o minimalnym ryzyku. Rozważmy zadanie:

Zadanie 6

$$\min w^T \Sigma w,$$

przy warunkach⁴:

$$\begin{aligned} \langle w, r \rangle &= z, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1. \end{aligned}$$

Tworzymy funkcję Lagrange'a postaci

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = w^T \Sigma w + \lambda_1 (\langle w, r \rangle - z) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum to

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma w + \lambda_1 r + \lambda_2 I = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \langle w, r \rangle - z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0 \end{cases},$$

gdzie I jest n -wymiarowym wektorem składającym się z samych jedynek. W zapisie macierzowym mamy

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma & r & I \\ r^T & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

⁴ Z wcześniejszych rozważań wynika, że rozwiązanie zadania przy warunku $\langle w, r \rangle \geq z$ będzie takie samo, jak przy warunku $\langle w, r \rangle = z$.

gdzie Θ jest n -wymiarowym wektorem składającym się z samych zer. Otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Sigma & r & i \\ r^T & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Theta \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Ponieważ macierz Σ jest dodatnio określona, to funkcja L osiąga minimum lokalne.

Przykład 2.7. Rozważmy portfel trzyskładnikowy, taki jak w poprzednim przykładzie. Inwestor chce zbudować portfel charakteryzujący się minimalnym ryzykiem przy oczekiwanej stopie zwrotu równej 0,17. Mamy

$$\min w^T \Sigma w,$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} \langle w, r \rangle &= 0,17, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1. \end{aligned}$$

Ze wzoru (2.28) mamy

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0008 & -0,00012 & 0,00032 & 0,12 & 1 \\ -0,00012 & 0,0018 & -0,00144 & 0,15 & 1 \\ 0,00032 & -0,00144 & 0,0032 & 0,2 & 1 \\ 0,12 & 0,15 & 0,2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,17 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Udziały w tym portfelu są równe

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04962 \\ 0,520609 \\ 0,429772 \end{pmatrix}.$$

Ponadto ryzyko stopy zwrotu mierzone odchyleniem standardowym ma wartość $\sqrt{w^T \Sigma w} = 0,014899$ i jak zakładano $\langle w, r \rangle = 0,17$.

Udziały składników portfela o zadanej oczekiwanej stopie zwrotu i minimalnym ryzyku można też wyznaczyć ze wzoru [138]

$$w = \Sigma^{-1} (\alpha_1 r + \alpha_2 I),$$

gdzie:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} z & b \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & z \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}},$$

$$a = r^T \Sigma^{-1} r,$$

$$b = I^T \Sigma^{-1} r,$$

$$c = I^T \Sigma^{-1} I.$$

Portfel wieloskładnikowy z uwzględnieniem instrumentu wolnego od ryzyka

Założmy, że portfel składa się z akcji n spółek i instrumentu wolnego od ryzyka. Zdefiniujmy jak poprzednio:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} - \text{wektor udziałów akcji w portfelu},$$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} - \text{wektor oczekiwanych stop zwrotu akcji}.$$

Ponadto oznaczmy:

w_f – udział w portfelu instrumentu wolnego od ryzyka,

r_f – stopa wolna od ryzyka.

Wtedy wektor udziałów akcji i instrumentu wolnego od ryzyka w portfelu ma postać

$$w_p = \begin{pmatrix} w \\ w_f \end{pmatrix} \in R^{n+1},$$

a wektor oczekiwanych stóp zwrotu tego portfela jest postaci

$$w_p = \begin{pmatrix} r \\ r_f \end{pmatrix} \in R^{n+1}.$$

Wariancja stopy zwrotu tego portfela określona jest wzorem

$$\sigma_p^2 = (w_p^T \Sigma_1 w_p),$$

gdzie

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i Σ jest macierzą wariancji i kowariancji stóp zwrotu akcji, jak we wzorze (2.23).

Na początku poszukajmy portfela, który charakteryzuje się minimalnym ryzykiem i oczekiwaną stopą zwrotu równą zadanej wartości z .

Zadanie 7

$$\min w_p^T \Sigma_1 w_p,$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} \langle w_p, r_p \rangle &= z, \\ w_p^T I &= 1. \end{aligned}$$

Dopuszczamy krótką sprzedaż akcji, jak również możliwość udzielania i zaciągania pożyczki po tej samej cenie (stopie wolnej od ryzyka).

Tworzymy funkcję Lagrange'a postaci

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) = w_p^T \Sigma_1 w_p + \lambda_1 (\langle w_p, r_p \rangle - z) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n w_i + w_f - 1 \right).$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum to:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_p} = 2\Sigma_1 w_p + \lambda_1 r_p + \lambda_2 I = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \langle w_p, r_p \rangle - z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_p^T I - 1 = 0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

gdzie I jest $(n+1)$ -wymiarowym wektorem składającym się z samych jedynek.

Zapis macierzowy wzoru (2.29) jest następujący:

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma_1 & r_p & i \\ r_p^T & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_p \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie Θ jest $(n+1)$ -wymiarowym wektorem składającym się z samych zer. Udziały akcji i waloru wolnego od ryzyka w portfelu otrzymujemy ze wzoru

$$\begin{pmatrix} w_p \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ w_f \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Sigma_1 & r_p & i \\ r_p^T & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Theta \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Ponieważ macierz Σ jest dodatnio określona, więc funkcja L osiąga minimum lokalne. W układzie współrzędnych (σ, r) punkt odpowiadający portfelowi o powyższym składzie leży na półprostej o początku w punkcie $(0, r_f)$ i stycznej do zbioru

efektywnych portfeli. Punkt styczności odpowiada portfelowi składającemu się tylko z akcji. Jak już wspominaliśmy, nazywany jest on portfelem rynkowym i jego udziały (oznaczymy je $w_{M,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$) wynoszą

$$w_{M,i} = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (2.31)$$

Udziały te można też wyznaczyć ze wzoru (patrz [50])

$$\begin{pmatrix} w_{M,1} \\ w_{M,2} \\ \vdots \\ w_{M,n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Sigma^{-1} W_f} \Sigma^{-1} W_f, \quad (2.32)$$

gdzie

$$W_f = \begin{pmatrix} r_1 - r_f \\ r_2 - r_f \\ \vdots \\ r_n - r_f \end{pmatrix}.$$

Przykład 2.8. Rozważmy portfel składający się z akcji trzech spółek i waloru wolnego od ryzyka ze stopą zwrotu równą $r_f = 0,05$. Dla akcji oczekiwane stopy zwrotu i odchylenia standardowe tych stóp są równe odpowiednio: $r_1 = 0,12$, $\sigma_1 = 0,02$, $r_2 = 0,15$, $\sigma_2 = 0,03$, $r_3 = 0,2$, $\sigma_3 = 0,04$. Współczynniki korelacji stóp zwrotu są równe: $\rho(R_1, R_2) = -0,1$, $\rho(R_1, R_3) = 0,2$, $\rho(R_2, R_3) = -0,6$. Niech wymagana stopa zwrotu będzie równa $z = 0,15$.

Z powyższego otrzymujemy:

$$\text{var}(R_1) = 0,0004;$$

$$\text{var}(R_2) = 0,0009;$$

$$\text{var}(R_3) = 0,0016,$$

ponadto

$$\text{cov}(R_1, R_2) = -0,00006;$$

$$\text{cov}(R_1, R_3) = 0,00016;$$

$$\text{cov}(R_2, R_3) = -0,00072.$$

Macierz Σ_1 ma postać

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0,0004 & -0,00006 & 0,00016 & 0 \\ -0,00006 & 0,0009 & -0,00072 & 0 \\ 0,00016 & -0,00072 & 0,0016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podstawiając powyższe dane do wzoru (2.32), otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_f \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0008 & -0,00012 & 0,00032 & 0 & 0,12 & 1 \\ -0,00012 & 0,0018 & -0,00144 & 0 & 0,15 & 1 \\ 0,00032 & -0,00144 & 0,0032 & 0 & 0,2 & 1 \\ 0,12 & 0,15 & 0,2 & 0,05 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,15 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,192621 \\ 0,413289 \\ 0,301251 \\ 0,092839 \\ -0,00287 \\ 0,000144 \end{pmatrix}.$$

Portfel o minimalnym ryzyku z oczekiwaną stopą zwrotu $z = 0,15$ ma udziały

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,192621 \\ 0,413289 \\ 0,301251 \\ 0,092839 \end{pmatrix}.$$

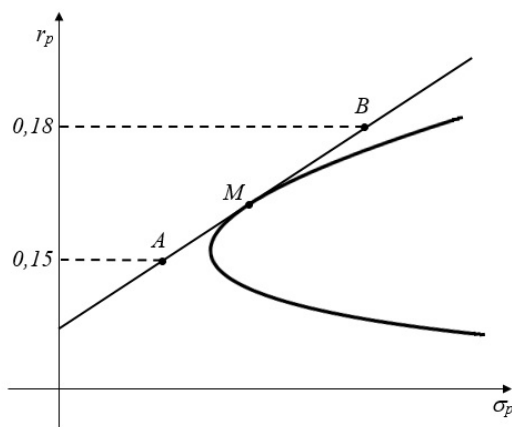
Wariancja stopy zwrotu tego portfela jest równa

$$\sigma_p^2 = \begin{pmatrix} 0,192621 \\ 0,413289 \\ 0,301251 \\ 0,092839 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0,0004 & -0,00006 & 0,00016 & 0 \\ -0,00006 & 0,0009 & -0,00072 & 0 \\ 0,00016 & -0,00072 & 0,0016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,192621 \\ 0,413289 \\ 0,301251 \\ 0,092839 \end{pmatrix} = 0,0001.$$

Odchylenie standardowe tej stopy jest równe

$$\sigma_p = \sqrt{0,0001435} = 0,0119792.$$

Na rysunku 2.17 temu portfelowi odpowiada punkt *A*.



Rysunek 2.17: Portfele efektywne przy różnych wartościach oczekiwanych stóp zwrotu i niezerowej stopie wolnej od ryzyka

Źródło: opracowanie własne

Portfel rynkowy ma, wyliczone ze wzoru (2.31) lub wzoru (2.32), udziały równe

$$\begin{pmatrix} w_{M,1} \\ w_{M,2} \\ w_{M,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,212334 \\ 0,455585 \\ 0,332081 \end{pmatrix}.$$

Na rysunku 2.17 portfelowi rynkowemu odpowiada punkt M . Portfel ten ma oczekiwaną stopę zwrotu równą

$$\begin{pmatrix} 0,212334 & 0,455585 & 0,332081 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,15 \\ 0,2 \end{pmatrix} = 0,160234$$

i odchylenie standardowe tej stopy równe

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 0,212334 \\ 0,455585 \\ 0,332081 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0,0004 & -0,00006 & 0,00016 & 0 \\ -0,00006 & 0,0009 & -0,00072 & 0 \\ 0,00016 & -0,00072 & 0,0016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,212334 \\ 0,455585 \\ 0,332081 \end{pmatrix}} = 0,013205$$

Gdy wymagana oczekiwana stopa zwrotu jest równa $z = 0,18$, otrzymujemy, że portfel o minimalnym ryzyku ma udziały

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,250408 \\ 0,537275 \\ 0,391626 \\ -0,17931 \end{pmatrix}$$

z odchyleniem standardowym stopy zwrotu tego portfela równym $\sigma_p = 0,015573$. Taki portfel otrzymuje się poprzez zaciągnięcie pożyczki z pięcioprocentową stopą. Na rysunku 2.17 odpowiada mu punkt B .

Przykład 2.9. Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka jest równa $r_f = 0$. Korzystając ze wzoru (2.32), otrzymujemy, że skład portfela rynkowego wyraża się jako

$$\begin{pmatrix} w_{M,1} \\ w_{M,2} \\ \vdots \\ w_{M,n} \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Sigma^{-1} r} \Sigma^{-1} r,$$

gdzie

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Na rysunku 2.18 portfelowi rynkowemu odpowiada punkt M . Zobaczmy, jak będzie wyglądał skład optymalnego portfela przy różnych wartościach wymaganej stopy zwrotu z .

Dla $z = 0,15$ otrzymujemy ze wzoru (2.30) skład portfela

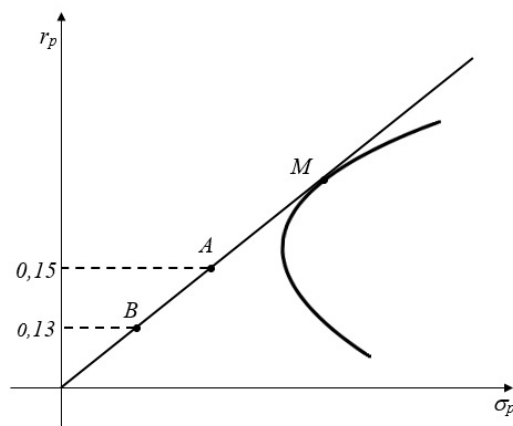
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,4156 \\ 0,2883 \\ 0,0461 \end{pmatrix}$$

i $w_1 + w_2 + w_3 = 0,9539$. Na rysunku 2.18 temu portfelowi odpowiada punkt A .

Dla $z = 0,13$ otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2167 \\ 0,3602 \\ 0,2498 \\ 0,1733 \end{pmatrix}$$

i $w_1 + w_2 + w_3 = 0,8267$. Na rysunku 2.18 temu portfelowi odpowiada punkt B .



Rysunek 2.18: Portfele efektywne przy różnych wartościach oczekiwanych stóp zwrotu i zerowej stopie wolnej od ryzyka

Źródło: opracowanie własne

Przykład ten pokazuje, że dla osiągnięcia wymaganej stopy zwrotu nie zawsze jest potrzeba przeznaczania całości dostępnego kapitału na kupno portfela, ale jego część można przeznaczyć na inne cele, np. na konsumpcję. Przypadek taki był opisany wcześniej dla portfela dwuskładnikowego. Warto jeszcze podkreślić, że gdy na rynku dozwolona jest bez żadnych ograniczeń krótka sprzedaż akcji, to kombinacje liniowe portfeli efektywnych także są portfelami efektywnymi [42].

Linia rynku kapitałowego

Rozważmy portfel składający się z akcji wszystkich spółek dostępnych na danym rynku z udziałami takimi jak na rynku. Jest to portfel rynkowy. Załóżmy, że oczekiwana stopa zwrotu dla portfela rynkowego jest równa r_M z odchyleniem standardowym σ_M . Załóżmy też, że na rynku istnieje instrument finansowy pozbawiony ryzyka ze stopą zwrotu równą r_f . Jak już wiemy, racjonalnie postępujący inwestor, tworząc portfel dwuskładnikowy składający się z portfela rynkowego i aktywu wol-

nego od ryzyka, będzie wybierał portfele odpowiadające punktom znajdującym się na półprostej o początku w punkcie $(0, r_f)$ i stycznej do zbioru efektywnych portfeli w punkcie odpowiadającym portfelowi rynkowemu, czyli (σ_M, r_M) . Półprosta ta ma równanie

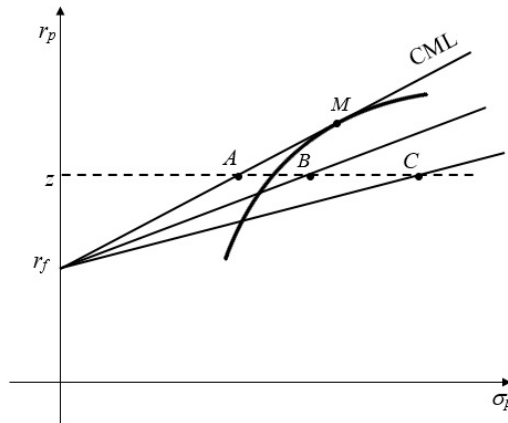
$$r = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \sigma + r_f \quad (2.33)$$

i nazywana jest **linią rynku kapitałowego** (ang. *capital market line, CML*).

Inwestor dążący do minimalizacji ryzyka przy zadanej oczekiwanej stopie zwrotu wybierze portfel na linii *CML* (na rysunku 2.19 punkt *A*). Każdy portfel utworzony z aktywów wolnych od ryzyka i innego portfela niż rynkowy będzie przy zadanej stopie z charakteryzował się większym ryzykiem (na rysunku 2.19 punkty *B, C*). Ze wzoru (2.33) wynika, że oczekiwana stopa zwrotu każdego portfela z linii *CML* jest sumą stopy wolnej od ryzyka i pewnej nadwyżki $\frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \sigma$, która jest traktowana jako premia za ryzyko. Jak zauważono w [50]: „Można zatem uznać, że stopa zwrotu z portfela efektywnego jest sumą dwóch cen, którymi są: cena czasu i cena ryzyka. Cena czasu to właśnie stopa wolna od ryzyka – jest to bowiem nagroda dla inwestora, który nie ryzykuje, ale wyrzeka się bieżącej konsumpcji, odkładając ją na przyszłość. Inwestorzy, którzy ryzykują otrzymują dodatkową nagrodę, która jest ceną ryzyka. Jest to iloczyn ponoszonego ryzyka (odchylenie standardowe portfela efektywnego) i ceny jednostki ryzyka (ułamek $\frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$).” Licznik tego ułamka, który jest różnicą między oczekiwaną stopą zwrotu portfela rynkowego a stopą wolną od ryzyka nazywany jest rynkową premią za ryzyko. Ułamek $\frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$ interpretujemy także jako ryzyko portfela przypadające na jednostkę ryzyka ponoszonego na rynku.

Rozważmy jeszcze raz rysunek 2.19. Tworząc portfele na lewo od punktu *M*, inwestor jest pożyczkodawcą kupującym, np. obligacje. Na prawo od punktu *M* inwestor jest pożyczkobiorcą i dodatkową gotówkę przeznacza na zakup portfela rynkowego. Linia *CML* uwzględnia założenie, że stopa wolna od ryzyka jest taka sama, zarówno w przypadku, gdy inwestor udziela pożyczki, jak i w przypadku, gdy inwestor zaciąga pożyczkę. Przeważnie tak nie jest, np. oprocentowanie obligacji

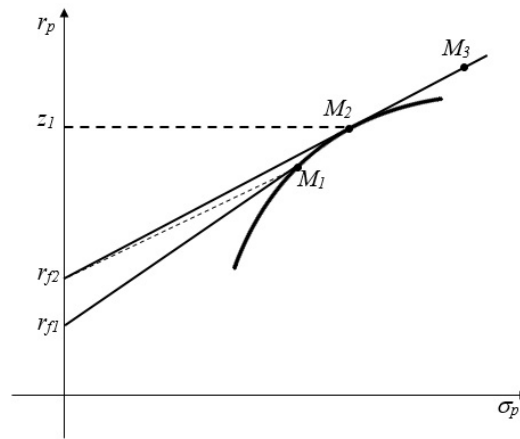
jest dużo mniejsze niż oprocentowanie kredytu. Rozważmy szczegółowo tę sytuację, którą zilustruje rysunek 2.20.



Rysunek 2.19: Linia CML

Źródło: opracowanie własne

Niech r_{f1} będzie stopą zwrotu, przy której inwestor udziela pożyczki i buduje portfele składające się z walorów pozbawionych ryzyka i akcji. Zgodnie z tym co mówiliśmy wcześniej, wraz ze wzrostem wymaganej stopy zwrotu udziały walorów pozbawionych ryzyka w portfelu będą malały, aż osiągnięty zostanie punkt M_1 , który odpowiada portfelowi rynkowemu składającemu się tylko z akcji. Dalsze zwiększanie wymaganej stopy zwrotu wymusza na inwestorze zaciąganie pożyczki, ale już po wyższej stopie r_{f2} . Półprosta $r_{f2}M_1$ nie zawiera portfeli efektywnych. Efektywne portfele reprezentuje łuk M_1M_2 , gdzie M_2 jest portfelem rynkowym przy stopie wolnej od ryzyka r_{f2} . Zwiększanie wymaganej stopy zwrotu powyżej wartości z_1 , będącej oczekiwaną stopą zwrotu portfela M_2 , sprawia, że portfel efektywny będzie zawierał papiery dłużne oprocentowane r_{f2} , np. M_3 .



Rysunek 2.20: Linia CML przy różnych stopach dla pożyczkodawcy i pożyczkobiorcy

Źródło: opracowanie własne

Powyższe teorie doczekały się pewnej krytyki (porównaj [48], [66], [83], [90], [107], [124]). Głównym zarzutem jest to, że wymagają złożonej i czasochłonnej analizy. Rzeczywiście, powyższe teorie portfelowe wymagają analizy dużej ilości danych. Gdyby inwestor rozważał akcje n spółek, to musiałby wyznaczyć n wartości oczekiwanych stóp zwrotu, n wariancji tych stóp oraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kowariancji. Wszystkich możliwych, co najmniej dwuskładnikowych portfeli byłoby $2^n - (n+1)$. Przykładowo, dla $n = 10$ mamy 10 stóp zwrotu i wariancji, 45 kowariancji oraz 1013 możliwych, co najmniej dwuskładnikowych portfeli. Jednakże, obecnie przy zastosowaniu odpowiedniego sprzętu i oprogramowania znalezienie odpowiedniego rozwiązania jest znacznie prostsze niż kiedyś. Podkreśla się także, że do oszacowania przyszłych stóp zwrotu i odchyłeń standardowych wykorzystuje się tylko dane historyczne i w związku z tym nie ma żadnej gwarancji, że parametry modeli będą stabilne w czasie i okażą się adekwatne w przyszłości. Parametry modeli są też bardzo wrażliwe na wybór okresów, z których pochodzą dane. Często dla danych pochodzących z różnych, nawet niewiele przesuniętych w czasie okresów otrzymamy

wano krańcowo różne składy portfeli. Wszystko to sprawiło, że zaczęto poszukiwać innych, mniej złożonych modeli. Należy do nich między innymi model jednowskaźnikowy, którego twórcą jest William Sharpe. „Model ten powstał jako uproszczenie teorii modeli Markowitza, dzisiaj jednak jest traktowany jako punkt wyjścia do najbardziej popularnego modelu rynku kapitałowego – *CAPM*.” [50]

Rozdział 3

Modele rynków kapitałowych

W literaturze, np. [50], [76], podkreśla się, że prace Markowitza w zakresie portfeli inwestycyjnych były przełomowym krokiem w dziedzinie finansów. To właśnie Markowitz jako pierwszy stwierdził, że wielkość stopy zwrotu nie powinna być jedynym kryterium decyzji inwestycyjnych. Równie ważne jest ryzyko i decyzja o realizacji inwestycji powinna zależeć od relacji stopy zwrotu i ryzyka. Pewnym uproszczeniem klasycznej teorii Markowitza jest model jednowskaźnikowy Sharpe'a (1963). Jest to model regresji liniowej, opisujący zmienność stóp zwrotu akcji przy pomocy zmienności jednego wskaźnika opisującego zachowania rynku. Teorie Markowitza i Sharpe'a służą do wyznaczania optymalnych portfeli inwestycyjnych pojedynczym inwestorom. W tym kontekście pojawiło się pytanie, jak będą na rynku kształtować się stopy zwrotu instrumentów finansowych w wyniku ich działań. W odpowiedzi na to pytanie powstał model równowagi aktywów kapitałowych CAPM (Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966)). Opisuje on związek między systematycznym ryzykiem inwestycyjnym a oczekiwanym zwrotem. Opiera się on na relacji między współczynnikiem beta aktywów, stopą wolną od ryzyka i premią za ryzyko. Liczne próby weryfikacji modeli jednoczynnikowych pokazały, że w wielu przypadkach jeden czynnik nie wystarczał do wyjaśnienia zmienności

stóp zwrotu. Dało to początek modelom wielowskaźnikowym, którym jest, między innymi, model arbitrażu cenowego *APT* (Ross (1976)), w którym stopy zwrotu akcji zależą od kilku czynników ryzyka. Model ten uwzględnia fakt, że akcje mogą w różny sposób reagować na różne czynniki ekonomiczne, a zatem wpływ każdego z nich musi być rozpatrywany osobno. Na *CAPM* i teorii portfelowej Markowitza bazuje model Blacka–Littermana opracowany pod koniec dwudziestego wieku przez Fischera Blacka i Roberta Littermana we współpracy z firmą inwestycyjną Goldman Sachs. Model ten rozszerza model Markowitza uwzględniając poglądy inwestorów, którzy chcą wykorzystać swoją wiedzę na temat rynków finansowych i bieżących trendów w gospodarce do konstrukcji swoich portfeli.

Każdy z wymienionych modeli w pewnym stopniu opiera się na teorii portfelowej. Ukazują one, w jaki sposób następował rozwój idei Markowitza i to było głównym powodem ich wyboru do tej książki.

3.1 Model jednowskaźnikowy Sharpe’a

W modelu jednowskaźnikowym Sharpe’a zakłada się, że wszyscy inwestorzy mają takie same oczekiwania co do stopy zwrotu i ryzyka¹ oraz jednakowy horyzont inwestycji. Podstawowym założeniem w tym modelu jest to, że kształtowanie się stóp zwrotu z inwestycji w akcje zależy od pewnego czynnika (nazywanego wskaźnikiem rynku) charakteryzującego rynek akcji. Czynnikiem tym jest stopa zwrotu portfela rynkowego, często utożsamiana ze stopą zwrotu indeksu giełdowego.

Postać modelu jest następująca:

$$R = \alpha + \beta \cdot R_M + \varepsilon, \quad (3.1)$$

gdzie:

R – zmienna losowa reprezentująca zmienność stopy zwrotu z inwestycji w akcje,

¹ Inaczej mówiąc, wszyscy inwestorzy, dokonując oszacowań stóp zwrotu, wariancji i kowariancji, otrzymują takie same wyniki.

R_M – zmienna losowa reprezentująca zmienność stopy zwrotu wskaźnika rynku,
 α, β – współczynniki równania,
 ε – składnik losowy.

Równanie (3.1) może być wyznaczone dla akcji pojedynczej spółki lub dla portfela akcji. Jest ono nazywane **linią charakterystyczną papieru wartościowego** (ang. *characteristic line*). Zmienna losowa ε reprezentuje wpływ na stopę zwrotu akcji wszystkich czynników niezwiązanych ze wskaźnikiem rynku. Zakłada się, że ε ma wartość oczekiwaną równą zero i stałą wariancję σ^2 oraz $\text{cov}(R_M, \varepsilon) = 0$ (kowariancja składnika losowego i wskaźnika rynku jest zerowa). Z powyższych założeń wynika, że wartość oczekiwana stopy zwrotu R jest równa

$$\begin{aligned} E(R) &= E(\alpha + \beta \cdot R_M + \varepsilon) = E(\alpha) + E(\beta R_M) + E(\varepsilon) = \\ &= \alpha + \beta \cdot E(R_M). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wariancja stopy zwrotu $\sigma^2(R)$ jest równa

$$\sigma^2(R) = \beta^2 \sigma_M^2 + \sigma^2, \quad (3.3)$$

bo

$$\begin{aligned} \sigma^2(R) &= E\left((R - E(R))^2\right) = \\ &= E\left((\alpha + \beta \cdot R_M + \varepsilon - (\alpha + \beta \cdot E(R_M)))^2\right) = \\ &= E\left((\beta \cdot R_M + \varepsilon - \beta \cdot E(R_M))^2\right) = \\ &= E\left((\beta (R_M - E(R_M)) + \varepsilon)^2\right) = \\ &= \beta^2 E(R_M - E(R_M))^2 + 2\beta E((R_M - E(R_M))\varepsilon) + E\varepsilon^2 = \\ &= \beta^2 E(R_M - E(R_M))^2 + \\ &+ 2\beta E(R_M - E(R_M)(\varepsilon - 0)) + E(\varepsilon - 0)^2 = \\ &= \beta^2 E(R_M - E(R_M))^2 + \\ &+ 2\beta E(R_M - E(R_M)(\varepsilon - E(\varepsilon)) + E(\varepsilon - E(\varepsilon))^2 = \\ &= \beta^2 \sigma_M^2 + 2\beta \text{cov}(R_M, \varepsilon) + \sigma^2 = \beta^2 \sigma_M^2 + \sigma^2, \end{aligned}$$

gdzie σ_M^2 jest wariancją stopy zwrotu wskaźnika rynku.

Równanie (3.2) jest funkcją liniową ze współczynnikami α i β . W teorii finansów kluczową rolę odgrywa współczynnik kierunkowy tej funkcji, zwany po prostu **współczynnikiem beta akcji** (lub portfela). Z własności funkcji liniowej wiadomo, że jej współczynnik kierunkowy informuje, o ile jednostek zmieni się wartość funkcji, gdy wartość argumentu zmieni się o jednostkę. Stąd współczynnik beta akcji wskazuje, o ile jednostek zmieni się w przybliżeniu stopa zwrotu akcji, gdy stopa zwrotu wskaźnika rynku zmieni się o jednostkę. Omówmy kilka szczególnych przypadków wartości współczynnika beta [50].

1. $\beta > 1$ oznacza, że stopa zwrotu akcji rośnie (maleje) szybciej niż rośnie (maleje) stopa zwrotu wskaźnika rynku. Taka akcja nazywana jest agresywną.
2. $\beta = 1$ oznacza, że stopa zwrotu akcji rośnie (maleje) o tyle samo jednostek co stopa zwrotu wskaźnika rynku.
3. $0 < \beta < 1$ oznacza, że stopa zwrotu akcji rośnie (maleje) wolniej niż rośnie (maleje) stopa zwrotu wskaźnika rynku. Taka akcja nazywana jest defensywną.
4. $\beta = 0$ oznacza, że stopa zwrotu akcji nie zmienia się, gdy zmienia się stopa zwrotu wskaźnika rynku. Taka sytuacja jest charakterystyczna m.in. dla walorów wolnych od ryzyka.
5. $-1 < \beta < 0$ oznacza, że stopa zwrotu akcji rośnie (maleje) wolniej niż maleje (rośnie) stopa zwrotu wskaźnika rynku.
6. $\beta < -1$ oznacza, że stopa zwrotu akcji rośnie (maleje) szybciej niż maleje (rośnie) stopa zwrotu wskaźnika rynku.

Ujemna wartość współczynnika beta oznacza, że stopa zwrotu danej akcji lub portfela reaguje odwrotnie na zmiany rynkowe niż przeciętna akcja na rynku. Jak zauważono w [50]: „W praktyce spotyka się stosunkowo niewiele akcji o ujemnych wartościach współczynnika beta”.

Gdy nie są znane rozkłady stóp zwrotu, to współczynniki α i β szacuje się na podstawie historycznych stóp zwrotu, wykorzystując, np. klasyczną metodę najmniejszych kwadratów. Wtedy estymator współczynnika beta ma postać [85], [96], [126]

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^n (r_{M,j} - \bar{r}_{M,j}) (r_j - \bar{r}_j)}{\sum_{j=1}^n (r_{M,j} - \bar{r}_{M,j})^2} = \frac{\text{cov}(R_M, R)}{\sigma_M^2}, \quad (3.4)$$

gdzie:

$\hat{\beta}$ – estymator współczynnika beta,

r_j – historyczne wartości stóp zwrotu akcji,

$r_{M,j}$ – historyczne wartości stóp zwrotu wskaźnika rynku,

$\bar{r}_j$ – wartość przeciętna historycznych stóp zwrotu akcji,

$\bar{r}_{M,j}$ – wartość przeciętna historycznych stóp zwrotu wskaźnika rynku,

$\text{cov}(R_M, R)$ – kowariancja stóp zwrotu wskaźnika rynku i akcji,

σ_M – odchylenie standardowe stopy zwrotu wskaźnika rynku.

Estymator parametru α wyraża się wtedy wzorem

$$\hat{\alpha} = \bar{r}_j - \hat{\beta} \cdot \bar{r}_{M,j}.$$

Standardowe błędy szacunku parametrów modelu określają wzory:

$$S(\alpha) = \frac{S_e}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (r_{M,j} - \bar{r}_{M,j})^2}},$$

$$S(\beta) = S_e \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n r_{M,j}^2}{n \sum_{j=1}^n (r_{M,j} - \bar{r}_{M,j})^2}},$$

gdzie S_e jest oceną odchylenia standardowego składnika losowego ε zgodnie ze wzorem

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n e_j^2}{n - 2}},$$

gdzie

$$e_j = r_j - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}r_{M,j}).$$

Przy założeniach poczynionych dla modelu (3.1), na podstawie twierdzenia Gaussa–Markowa [41] wiadomo, że estymatory $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ mają najmniejszą wariancję spośród wszystkich liniowych i nieobciążonych estymatorów parametrów α i β .

Do oceny dopasowania modelu do danych empirycznych można posłużyć się współczynnikiem zbieżności, który wyraża się wzorem

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{j=1}^n e_j^2}{\sum_{j=1}^n (r_j - \bar{r}_j)^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2(R)}.$$

Wartość współczynnika zbieżności jest z przedziału $[0,1]$. Informuje ona, jaka część całkowitej zmienności zmiennej R nie jest wyjaśniana przez model. Im wartość ta jest bliższa zeru, tym model jest lepiej dopasowany do danych empirycznych. Wartość $1 - \varphi^2$ nazywana jest współczynnikiem determinacji i jest oznaczana $\mathcal{R}^2$.

Dla portfela akcji współczynnik beta wyznacza się ze wzoru

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i,$$

gdzie:

β_p – współczynnik beta portfela,

w_i – udział akcji i -tej spółki w portfelu,

β_i – współczynnik beta akcji i -tej spółki,

n – liczba spółek w portfelu.

Jak napisano w [94]: „Zwykle przy estymacji współczynników beta wybiera się tygodniowe lub miesięczne podokresy historyczne dla pięcioletniego okresu historycznego. Zauważmy, że przy tym podejściu przykładamy jednakową wagę do wszystkich podokresów historycznych. Jeżeli jednak chcielibyśmy większą wagę przykładać do podokresów historycznych mniej odległych w czasie, to możemy zastosować estymator historycznego współczynnika beta uzyskany za pomocą tzw. wygładzania wykładniczego”. Wygląda ono następująco. Niech $\delta \in (0,1)$ będzie ustalone.

Rozważmy okres T i niech $t = 0, 1, 2, \dots, T$ będą podokresami tego okresu. Zdefiniujmy wagi jako

$$u_t = \frac{\delta^{T-t}}{\delta^T + \delta^{T-1} + \dots + \delta + 1}.$$

Wtedy współczynnik beta portfela jest definiowany jako

$$\beta_p = \frac{\sum_{t=0}^T u_t (r_t - f_p) (r_{t,M} - f_M)}{\sum_{t=0}^T u_t (r_{t,M} - f_M)^2},$$

gdzie:

r_t – stopa zwrotu portfela z okresu t ,

$r_{t,M}$ – stopa zwrotu wskaźnika rynku z okresu t ,

$$f_p = \sum_{t=0}^T u_t r_t,$$

$$f_M = \sum_{t=0}^T u_t r_{t,M}.$$

Powróćmy jeszcze do wzoru (3.3). Wynika z niego, że całkowite ryzyko akcji lub portfela jest sumą dwóch składników. Pierwszy składnik $(\beta^2 \sigma_M^2)$ nazywany jest ryzykiem systematycznym lub ryzykiem rynkowym. Zależy on od ryzyka wskaźnika rynku oraz od współczynnika beta, który odzwierciedla powiązanie stopy zwrotu akcji (portfela) ze stopą zwrotu wskaźnika rynku. Drugi składnik (σ^2) , będący wariancją składnika losowego, nazywany jest ryzykiem specyficznym lub niesystematycznym.

Jak wiadomo z wcześniejszych rozważań, dywersyfikacja portfela może prowadzić do znacznej redukcji jego ryzyka, jednak ryzyko to nie może być w całości wyeliminowane. Umiejętna dywersyfikacja portfela prowadzi do wyeliminowania lub znacznego ograniczenia ryzyka specyficznego, dlatego nazywa się ono także ryzykiem dywersyfikowalnym. Dywersyfikacja portfela nie doprowadzi do wyeliminowania ryzyka systematycznego, które z tego powodu nazywane jest też ryzykiem niedywersyfikowalnym.

Wzór (3.3) możemy zapisać jako

$$\frac{\beta^2 \sigma_M^2}{\sigma^2(R)} = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2(R)} = \mathcal{R}^2.$$

Współczynnik determinacji wskazuje jaki jest udział ryzyka rynkowego w całkowitym ryzyku portfela. Pożądane jest, aby udział ten był jak największy, przez co $\mathcal{R}^2$ może być traktowany jako stopień dywersyfikacji portfela [129].

W literaturze finansów zwraca się uwagę na wiele aspektów związanych z wyznaczaniem wartości współczynnika beta [26], [34], [55], [79], [84], [117], [145], [146], [131]. Podkreśla się, że, szacując ten współczynnik nie wykorzystuje się nowych informacji, które płyną z rynku, ale bierze pod uwagę tylko dane historyczne, po czym zakłada się, że stopy zwrotu będą bardzo podobnie zachowywać się w przyszłości, czyli, że współczynnik będzie stabilny, co nie musi być prawdą. Ważną sprawą jest wybór indeksu giełdowego dla wybranych do analizy spółek, gdyż w praktyce nie ma indeksów zbliżonych do portfela rynkowego. Każdy indeks uwzględnia tylko pewien podzbiór papierów wartościowych. Prowadzone były badania, które miały dać odpowiedź na pytanie, czy współczynnik beta powinien być rozważany w kontekście wyróżniania rynków byka i niedźwiedzia czy też rynków wschodzących i rozwiniętych. Na oszacowanie beta duży wpływ ma wybór interwałów, dla jakich mają być wyznaczone stopy zwrotu. Teoria nie określa, czy zwroty powinny być mierzone codziennie, co tydzień, co miesiąc, co kwartał czy co rok. Zauważono, że przy wykorzystywaniu różnych przedziałów czasowych do obliczania bety wystąpiły znaczne różnice w oszacowaniach. Występowanie tych różnic w zależności od przyjętego okresu notowań akcji zostało nazwane efektem interwału (ang. *interval effect*). Niektórzy zwracają uwagę, że współczynnik beta jest przydatny przede wszystkim przy określaniu krótkoterminowego ryzyka. W przypadku inwestycji długoterminowych współczynnik beta jest mniej istotny, ponieważ beta danego instrumentu finansowego w dłuższych okresach może charakteryzować się dużą zmiennością z uwagi na to, że wiele spółek dywersyfikuje swoją dzia-

łałość, zwiększa swoje aktywa, zmienia strukturę kapitału itp. W związku z powyższym powstało wiele tzw. dostosowanych (skorygowanych) współczynników beta. Należą do nich, między innymi, beta odlewarowane, Blume’a i Vasicka.

Beta odlewarowana zaproponowana przez Damodarana [134] ma za zadanie uwzględnienie zmian kursu giełdowego spółki wynikających ze zmian struktury jej kapitału, przede wszystkim poprzez zaciągnięcie zobowiązań finansowych. Po przez zaciągnięcie takich zobowiązań zwiększa się ryzyko posiadania jej akcji spowodowane tzw. dźwignią finansową. Odlewarowany współczynnik beta jest mnożony przez stosunek zobowiązań do kapitału własnego przy uwzględnieniu efektu tarczy podatkowej. Jego definicja jest następująca:

$$\beta_o = \frac{\beta}{1 + (1 - T) \frac{D}{K}},$$

gdzie:

β – beta zwykła (lewarowana), nazywana też betą surową,

β_o – beta odlewarowana,

D – łączne zobowiązania finansowe spółki (dług),

K – kapitał własny,

T – realna stopa podatku dochodowego płaconego przez spółkę.

Przykład 3.1. Przykład pochodzi z ogólnodostępnego fragmentu raportu z 2019 r. [144]. Oszacowane dla każdej spółki wskaźniki zostały poddane agregacji w odpowiednich grupach branżowych. Jako portfel rynkowy przyjęto notowania indeksu *WIG*. Oszacowanie obejmuje stopę zwrotu na koniec każdego miesiąca w okresie ostatnich 5 lat, chyba że okres notowań spółki jest krótszy. Z analizy wykluczono obserwacje nietypowe, skrajnie odbiegające od przeciętnych. Oszacowany w ten sposób wskaźnik beta surowy (β) odlewarowano przy pomocy średniego, 5-letniego (lub krótszego, w zależności od okresu notowań) wskaźnika struktury kapitału (D/K), liczonego jako relacja zadłużenia odsetkowego (D) i kapitalizacji

rynkowej (K), z uwzględnieniem nominalnej 19% stopy podatkowej (T). Współczynniki beta spółek notowanych na *GPW* w Warszawie z sektora „wyposażenie domu” przedstawiono w tabeli poniżej.

Spółka	β beta surowa	β_o beta odlewarowana
AMICA	0,766	0,644
DECORA	0,895	0,718
FORTE	1,212	0,83
FERRO	1,023	0,816
LENA	0,629	0,622
LENTEX	0,402	0,335
MAXCOM	1,423	1,269

Skorygowany współczynnik beta Blume’a został zaproponowany przez profesora uniwersytetu w Pensylwanii Marshalla Blume’a w 1975 roku w artykule pt. „Betas and Their Regression Tendencies” [18]. Według Blume’a istnieje tendencja do dążenia współczynnika beta w czasie do średniej wartości tego współczynnika z wcześniejszych okresów i wartość ta z czasem dąży do jedności. Obserwacje Blume’a wydają się uzasadnione, gdyż w wielu przypadkach firmy mają tendencje do coraz większej dywersyfikacji swojej działalności i zwiększania liczby aktywów. Powoduje to, że z biegiem czasu wartości ich współczynników beta mają coraz mniejsze wahania i dążą do średniej wartości [132]. Sposób wyznaczania współczynnika beta Blume’a jest następujący. Dla rozważanej akcji należy wyznaczyć współczynniki $\beta_{1,j}$ (np. tygodniowe) w ustalonym okresie przeszłym (zaleca się kilkuletni). Dla kolejnego przeszłego okresu, dla tej samej akcji wyznacza się współczynniki $\beta_{2,j}$ (także tygodniowe) i tworzy się równanie regresji liniowej postaci

$$\beta_2 = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_1 + \varepsilon.$$

Po wyestymowaniu parametrów otrzymuje się

$$\beta_2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \beta_1, \quad (3.5)$$

gdzie $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1$ są estymatorami parametrów, odpowiednio γ_0, γ_1 . Na podstawie wzoru (3.5) wylicza się $\hat{\beta}_2$ dla bieżącego okresu. Prognoza współczynnika β rozważanej akcji na nadchodzący okres ma wtedy postać

$$\beta = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\beta}_2.$$

Oldrich Vasicek [122] zaproponował, aby do skorygowanej wartości współczynnika beta wykorzystać wartość średnią tego współczynnika wyliczoną dla przeszłych okresów i jego estymator otrzymany na podstawie regresji liniowej dla tychże okresów. Wtedy **skorygowane beta Vasicka** będzie średnią ważoną tych dwóch wartości z wagami wyrażonymi przy pomocy wariancji średniej i wariancji estymatora. Można to zapisać jako

$$\beta_2 = \frac{\sigma_{\beta_1}^2}{\sigma_{\bar{\beta}}^2 + \sigma_{\beta_1}^2} \bar{\beta} + \frac{\sigma_{\bar{\beta}}^2}{\sigma_{\bar{\beta}}^2 + \sigma_{\beta_1}^2} \beta_1,$$

gdzie:

β_2 – skorygowane beta Vasicka,

$\bar{\beta}$ – wartość średnia współczynnika beta,

β_1 – estymator beta,

$\sigma_{\bar{\beta}}^2$ – wariancja średniej,

$\sigma_{\beta_1}^2$ – wariancja estymatora.

Więcej o beta Vasicka można przeczytać w [25], [38], [36], [122], [125].

3.2 Model wyceny aktywów kapitałowych i jego modyfikacje

Model wyceny aktywów kapitałowych *CAPM* (ang. *capital asset pricing model*) został opracowany niezależnie przez Williama Sharpe'a, Johna Lintnera, Jacka Treyn-

nora i Jana Mossina [81], [93], [109], [143] w oparciu o wcześniejsze prace Markowitza dotyczące dywersyfikacji portfeli [87], [88]. Założenia modelu *CAPM* (porównaj np. [50], [80], [143]) są następujące:

1. Inwestorzy dokonują wyboru pomiędzy poszczególnymi portfelami na podstawie ich oczekiwanej stopy zwrotu i wariancji.
2. Inwestorzy niechętnie podejmują ryzyko i maksymalizują użyteczność majątku, podejmując decyzje dotyczące tego samego okresu, i ich oczekiwania w stosunku do rozkładu stóp zwrotu z poszczególnych papierów wartościowych są takie same.
3. Istnieje stopa wolna od ryzyka, przy której można udzielać i zaciągać pożyczki w nieograniczonych kwotach.
4. Wszystkie informacje są bezpłatne i natychmiast dostępne dla wszystkich inwestorów.
5. Pojedynczy inwestorzy nie mogą wpływać na ceny akcji.
6. Pomijane są koszty transakcji i podatki.
7. Wszystkie aktywa są doskonale podzielne i mogą być bez przeszkód kupowane i sprzedawane na rynku.

Założmy, że zbudowano portfel składający się z pewnego portfela, (oznacmy go A) i portfela rynkowego (oznacmy go M). Niech r_p będzie oczekiwaną stopą zwrotu tak zbudowanego portfela i w niech będzie udziałem portfela A . Wtedy

$$r_p = w \cdot r + (1 - w)r_M, \quad (3.6)$$

gdzie:

r – oczekiwana stopa zwrotu portfela A ,

r_M – oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego.

Odchylenie standardowe tak zbudowanego portfela jest równe

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\text{cov}(A, M)}, \quad (3.7)$$

gdzie:

σ^2 – wariancja stopy zwrotu portfela A ,

σ_M^2 – wariancja stopy zwrotu portfela rynkowego,

$\text{cov}(A, M)$ – kowariancja stóp zwrotu portfela A i portfela rynkowego M .

Poniższe obliczenia (porównaj [50], [80]) doprowadzą do równania linii rynku papierów wartościowych. Równanie to będzie zależnością oczekiwanej stopy zwrotu portfela od współczynnika β tego portfela.

Rozważmy funkcję $r_p(\sigma_p(w))$. Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej mamy

$$\frac{\partial r_p(\sigma_p(w))}{\partial w} = \frac{\partial r_p(\sigma_p)}{\partial \sigma_p} \cdot \frac{\partial \sigma_p(w)}{\partial w}$$

lub, używając skróconego zapisu,

$$\frac{\partial r_p}{\partial \sigma_p} = \frac{\frac{\partial r_p}{\partial w}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial w}}.$$

Ze wzoru (3.6) mamy

$$\frac{\partial r_p}{\partial w} = r - r_M.$$

Na podstawie wzoru (3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_p}{\partial w} &= \frac{2w\sigma^2 - 2(1-w)\sigma_M^2 + (2-4w)\text{cov}(A, M)}{2\sqrt{w^2\sigma^2 + (1-w)^2\sigma_M^2 + 2w(1-w)\text{cov}(A, M)}} = \\ &= \frac{w\sigma^2 - (1-w)\sigma_M^2 + (1-2w)\text{cov}(A, M)}{\sqrt{w^2\sigma^2 + (1-w)^2\sigma_M^2 + 2w(1-w)\text{cov}(A, M)}}. \end{aligned}$$

Racjonalnie postępujący inwestor (dążący do minimalizacji ryzyka przy zadanej oczekiwanej stopie zwrotu) będzie wybierał tylko te portfele, które leżą na linii CML (patrz wzór 2.33). Współczynnik kierunkowy linii CML jest równy $\frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$. Do linii CML należy też portfel rynkowy, dla którego $w = 0$. Uwzględniając te fakty,

otrzymujemy z jednej strony

$$\frac{\partial r_p}{\partial \sigma_p} = \frac{\frac{\partial r_p}{\partial w}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial w}} = \frac{r - r_M}{\frac{-\sigma_M^2 + \text{cov}(A, M)}{\sqrt{\sigma_M^2}}} = \frac{(r - r_M)\sigma_M}{\text{cov}(A, M) - \sigma_M^2},$$

a z drugiej strony

$$\frac{\partial r_p}{\partial \sigma_p} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}.$$

Po przyrównaniu i uwzględnieniu, że $\beta = \frac{\text{cov}(A, M)}{\sigma_M^2}$, otrzymujemy

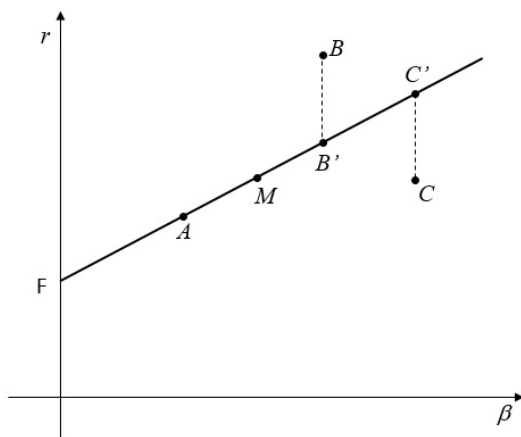
$$r = (r_M - r_f)\beta + r_f. \quad (3.8)$$

Wzór 3.8 jest równaniem prostej, która nazywa się **linią rynku papierów wartościowych** (ang. *security market line*, *SML*). Wzór ten określa zależność stopy zwrotu portfela od współczynnika beta tego portfela, czyli tylko od ryzyka systematycznego.

„Równanie *SML* jest równaniem rynku w stanie równowagi – tak kształtuje się rynek, gdy inwestorzy kierują się zasadami teorii portfela. Jest to jednocześnie równanie wyceny, tzn. w warunkach równowagi stopa zwrotu akcji (lub portfela) powinna wynosić właśnie tyle, ile wynika z tego równania.” [50] Rysunek 3.1 przedstawia linię *SML*. Punkt *F* odpowiada instrumentowi wolnemu od ryzyka, punkt *M* reprezentuje portfel rynkowy. Zamieszczono także portfele *A*, *B*, *C*, *B'*, *C'* (porównaj [50]). Każdy z tych portfeli charakteryzuje się stopą zwrotu, której może oczekiwać inwestor, inwestując w ten portfel. Oczekiwana stopa zwrotu portfela *B* jest inna niż ta, która wynika z równania *SML*, tzn. inna niż ta, którą w warunkach równowagi osiąga się z portfela o takim samym współczynniku beta. Podobnie dzieje się z portfelem *C*. Portfele leżące powyżej *SML*, tak jak *B*, są portfelami **niedowartościowanymi**. Ich oczekiwane stopy zwrotu są większe niż stopa zwrotu, jaką zyskuje się z portfela o takim samym współczynniku beta w warunkach równowagi. Portfel *B* jest atrakcyjny dla inwestorów, więc będą starali się go kupić. Będzie to powodowało wzrost popytu na ten portfel, a więc i wzrost jego ceny, co doprowadzi do spadku wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Taka sytuacja będzie

miała miejsce do momentu, aż portfel B osiągnie pozycję B' na linii SML . Portfele leżące poniżej SML , tak jak C , są portfelami **przewartościowanymi**. Ich oczekiwane stopy zwrotu są mniejsze niż stopa zwrotu, jaką zyskuje się z portfela o takim samym współczynniku beta w warunkach równowagi. Portfel C nie jest atrakcyjny dla inwestorów, więc będą starali się go sprzedać. Będzie to powodowało wzrost podaży na ten portfel, a więc i spadek jego ceny, co doprowadzi do wzrostu wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Taka sytuacja będzie miała miejsce do momentu, aż portfel C osiągnie pozycję C' na linii SML .

Portfel A , który znajduje się na linii SML jest portfelem dobrze wycenionym. Oznacza to, że jego oczekiwana stopa zwrotu jest równa stopie zwrotu wynikającej z SML .



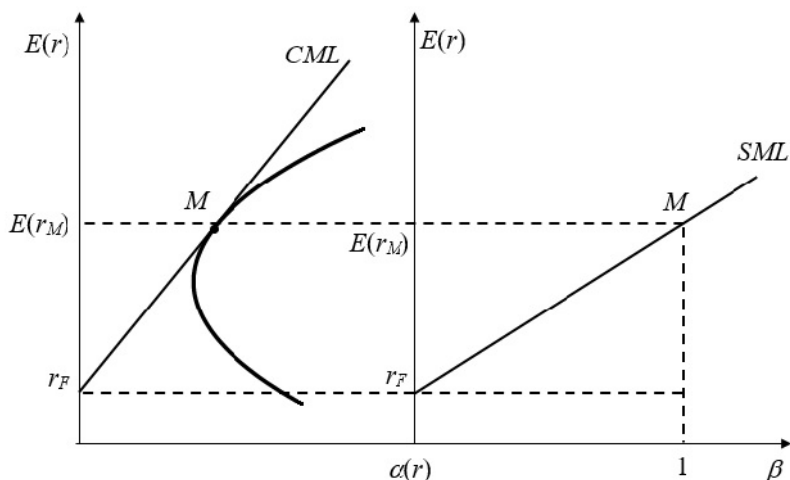
Rysunek 3.1: Linia SML

Źródło: [50]

Podstawą modelu $CAPM$ są dwie zależności:

- linia rynku kapitałowego CML (patrz wzór (2.33)),
- linia rynku papierów wartościowych SML (patrz wzór (3.8)).

CML jest równaniem zależności dochodu od ryzyka całkowitego mierzonego odchyleniem standardowym zachodzącym dla portfeli efektywnych. *SML* jest równaniem zależności dochodu od ryzyka systematycznego mierzonego współczynnikiem beta zachodzącym dla portfeli dobrze wycenionych [50]. Ilustruje to rysunek 3.2.



Rysunek 3.2: Linia SML oraz CML

Źródło: [50]

Rozważmy różnicę pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu portfela a stopą zwrotu wynikającą z modelu *CAPM*, która nazywana jest współczynnikiem alfa i ma postać

$$\alpha = r - [(r_M - r_f) \beta + r_f] .$$

Jeżeli portfel jest dobrze wyceniony, to różnica ta jest równa zero, jeżeli portfel jest niedowartościowany, to różnica ta jest większa od zera, a jeżeli portfel jest przewartościowany, to różnica jest ujemna.

Przykład 3.2. Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka wynosi $r_f = 0,05$. Oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego wynosi $r_M = 0,13$ z odchyleniem standardowym

$\sigma_M = 0,04$. Dla tych danych otrzymujemy, że równanie *CML* (patrz wzór 2.33) ma postać

$$r = 0,05 + 2\sigma.$$

Założmy, że inwestor posiada portfel, którego oczekiwana stopa zwrotu wynosi $r_p = 0,14$ z odchyleniem standardowym $\sigma_p = 0,03$. Ponadto współczynnik korelacji stopy zwrotu tego portfela ze stopą zwrotu portfela rynkowego jest równy $\rho = 0,7$. Wstawiając do równania *CML* (2.33) wartość σ_p , otrzymujemy

$$r = 0,05 + 2 \cdot 0,03 = 0,11.$$

Oznacza to, że rozważany portfel nie jest efektywny.

Aby stwierdzić, czy portfel ten jest dobrze wyceniony, najpierw obliczmy wartość współczynnika beta tego portfela (patrz wzór (3.4)):

$$\beta_p = \frac{\rho\sigma_p}{\sigma_M} = \frac{0,07 \cdot 0,03}{0,04} = 0,525.$$

Dane wartości wstawiamy do równania *SML* (3.8):

$$r = (r_M - r_f)\beta + r_f = (0,13 - 0,05) \cdot 0,525 + 0,05 = 0,092.$$

Ponieważ oczekiwana stopa zwrotu portfela jest większa niż ta wyznaczona z *SML*, jest on portfelem niedowartościowanym.

Przedstawiona powyżej analiza prowadzi do wniosku, że wszyscy inwestorzy będą dążyć do posiadania portfeli składających się z tych samych aktywów, a mianowicie z portfela rynkowego. Gdyby tak było w rzeczywistości, to rynek by nie istniał, gdyż inwestorzy nie mieliby potrzeby handlować ze sobą. Jak zauważono w [45]: „W praktyce różni inwestorzy mają różne poglądy na atrakcyjność akcji oraz innych ryzykownych instrumentów inwestycyjnych. Właśnie dlatego handlują ze sobą i to właśnie w drodze tych transakcji kształtują się ceny rynkowe.”

U podstaw tego, że analizy doprowadziły do wniosków niepokrywających się z rzeczywistością leżą założenia poczynione na początku tego podrozdziału, przede wszystkim: [45]

1. Założono, że inwestorzy dokonują wyboru portfeli wyłącznie na podstawie ich oczekiwanej stopy zwrotu i wariancji, a więc koncentrują się tylko na drugich momentach centralnych rozkładów stóp zwrotu. Tymczasem rozkłady charakteryzują się także pewną kurtozą i skośnością. To właśnie one sprawiają, że rozkłady mają często „grube ogony” oraz, że bardziej prawdopodobne są wysokie zwroty, a mniej prawdopodobne te niskie lub odwrotnie. Większość inwestorów obawia się wystąpienia dużych strat, więc będą wymagać większej oczekiwanej stopy zwrotu w przypadku wystąpienia leptokurtozy lub prawostronnej asymetrii rozkładu stóp zwrotu.
2. Założono, że horyzont inwestycji dla wszystkich jest taki sam, co nie jest prawdą. Inne preferencje co do wyboru aktywów finansowych mogą mieć inwestorzy długookresowi, a inne ci, którzy inwestują na bardzo krótki czas.
3. Założono, że wszyscy uczestnicy rynku mogą nieograniczenie pożyczać i udzielać pożyczek przy tej samej stopie procentowej. Tymczasem często w tych przypadkach występują różnice, np. między dużymi instytucjami finansowymi a inwestorami indywidualnymi.
4. Nie jest także prawdą, że wszystkie informacje o rynku są bezpłatne i natychmiast dostępne dla wszystkich.
5. Założono, że pojedynczy inwestorzy nie mogą wpływać na ceny akcji. Tymczasem, gdyby ktoś chciał jednorazowo zbyć kilkadziesiąt tysięcy akcji jakiejś spółki, na pewno wpłynęłoby to na jej cenę.
6. W analizie pomija się koszty transakcji i podatki. Tymczasem nie wszyscy uczestnicy rynku podlegają takim samym stawkom podatkowym i takim samym regulacjom prawnym. W praktyce, konsekwencje podatkowe są ważnym czynnikiem przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych.

7. Aktywa nie są doskonale podzielne i nie jest tak, że mogą być bez przeszkód kupowane i sprzedawane na rynku. Inwestorzy mogą nie mieć możliwości zakupu portfela o optymalnych dla nich udziałach, np. z powodu ograniczonej w danym momencie liczby akcji w ofercie sprzedaży.

Przedstawiony powyżej model doczekał się wielu modyfikacji, np. zero-beta *CAPM* czy international *CAPM*, z tego powodu często nazywany jest on klasycznym *CAPM*.

Model zero-beta CAPM

Jednym z założeń klasycznego modelu *CAPM* (porównaj [9], [50], [80]) jest to, że istnieje stopa wolna od ryzyka, dla której współczynnik beta jest równy zero i przy której można udzielać i zaciągać pożyczki w nieograniczonych kwotach. W praktyce taka sytuacja nie jest możliwa. Fisher Black [9],[80] zaproponował nieco odmienną postać modelu *CAPM*, który uwzględnia założenie, że na rynku nie istnieje stopa wolna od ryzyka, ale istnieje portfel, którego współczynnik beta jest równy zero. Postać modelu zero-beta *CAPM* jest następująca:

$$r = (r_M - z) \beta + z,$$

gdzie:

r – oczekiwana stopa zwrotu portfela,

r_M – oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego,

z – oczekiwana stopa zwrotu portfela, którego współczynnik beta jest równy zero.

Oczywiste jest, że stopa zwrotu portfela rynkowego i stopa zwrotu portfela ze współczynnikiem beta równym zero nie są skorelowane. „W praktyce zazwyczaj oczekiwana stopa zwrotu portfela akcji o współczynniku beta równym zero jest wyższa niż stopa wolna od ryzyka. Dlatego też linia *SML* wyznaczona w tym modelu ma wyższy wyraz wolny i niższy współczynnik kierunkowy (mniejsze nachylenie) niż klasyczna linia *CAPM*.” [50]

Model ICAPM

Model *ICAPM* (ang. *international CAPM*) dodatkowo uwzględnia ryzyko kursów walut w przypadku, gdy dywersyfikacja portfela polega na zakupie i sprzedaży aktywów w różnych walutach. W *ICAPM* portfelem rynkowym jest portfel globalny. Inwestorzy, oprócz wynagrodzenia za zmianę wartości pieniądza w czasie oraz premii za podjęcie decyzji o podejmowaniu ryzyka rynkowego, są również nagradzani za podjęcie inwestycji w innej walucie i tym samym narażenie się na ryzyko wynikające z wahań kursów walut.

Model *ICAPM* w postaci ogólnej można przedstawić następująco [50], [52], [113], [30]:

$$r = r_f + \beta_w (r_w - r_{f,w}) + \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot RP_i,$$

gdzie:

r – oczekiwana stopa zwrotu akcji lub portfela,

r_f – stopa wolna od ryzyka na rynku kraju inwestora,

β_w – współczynnik beta odnoszący się do ryzyka związanego z globalnym portfelem rynkowym,

r_w – oczekiwana stopa zwrotu globalnego portfela rynkowego,

$r_{f,w}$ – stopa wolna od ryzyka dla rynku globalnego,

β_i – współczynnik wrażliwości stopy zwrotu aktywów na zmiany kursu i -tej waluty,

RP_i – premia za ryzyko kursowe i -tej waluty.

W literaturze (np. [6], [20], [30], [33]) można spotkać różne rozwinięcia tego modelu uwzględniające, np. różne sposoby pomiaru wrażliwości stopy zwrotu na zmiany kursowe, zmienność w czasie współczynników beta czy też różne sposoby segmentacji rynku globalnego, np. na rynki rozwinięte i rynki wschodzące.

Model GCAPM

Model *GCAPM* (ang. *global CAPM*) to termin zwykle używany do określenia uproszczonej formy *ICAPM* bez wyraźnego czynnika ryzyka walutowego. *GCAPM* ma taką samą strukturę jak tradycyjny *CAPM*, ale indeks rynku lokalnego zastąpiony jest indeksem rynku globalnego. Postać tego modelu jest następująca [29], [30]:

$$r_{i,G} - r_f = \beta_{i,G} (r_G - r_f), \quad (3.9)$$

gdzie:

$r_{i,G}$ – oczekiwana stopa zwrotu i -tego waloru (akcji, portfela),

r_f – stopa zwrotu pozbawiona ryzyka dla rynku w walucie którego następuje wycena,

$\beta_{i,G}$ – współczynnik beta i -tego waloru względem indeksu rynku globalnego,

r_G – oczekiwana stopa zwrotu z portfela (indeksu) globalnego.

W literaturze finansowej (np. [29]) spotyka się określenie, że w równaniu (3.9) wszystkie stopy zwrotu są niezabezpieczone. Oznacza to, przykładowo, że jeśli wybierze się dolar amerykański jako walutę wyceny, to zwrot w dolarach amerykańskich dla akcji niewycenianych w dolarze amerykańskim obejmuje zarówno zwrot aktywu w jego walucie lokalnej, jak i zmianę wartości tej waluty względem dolara amerykańskiego.

3.3 Model APT

Autorem modelu *APT* (ang. *arbitrage pricing theory*) jest Stephen Ross [105]. Założeniem tego modelu jest tzw. prawo jednej ceny, które mówi, że na dwóch różnych rynkach ten sam instrument finansowy ma taką samą cenę. W przeciwnym wypadku pojawiłby się arbitraż, czyli możliwość uzyskania dodatkowych korzyści bez ponoszenia dodatkowych kosztów (patrz [19], [21], [26], [31], [50], [98]).

Inwestorzy mogliby kupować instrument finansowy na jednym rynku po niższej cenie i natychmiast sprzedawać go na drugim rynku po cenie wyższej. Na rynku, gdzie cena jest niższa nastąpiłby wzrost popytu, a tym samym wzrost ceny waloru. Na rynku, gdzie cena jest wyższa nastąpiłby wzrost podaży, co skutkowałoby obniżką ceny waloru. Taka sytuacja trwałaby do momentu, aż nastąpiłoby wyrównanie cen. „Prawo jednej ceny można przedstawić też w nieco innej wersji, mianowicie: dwa instrumenty finansowe o takim samym ryzyku powinny przynosić w efekcie taką samą stopę dochodu (zwrotu).” [50]

Kolejnym założeniem modelu *APT* jest to, że zmienność stopy zwrotu instrumentu finansowego, np. akcji, opisuje tzw. model wieloczynnikowy postaci

$$r_i = \alpha + \beta_{1i}F_1 + \beta_{2i}F_2 + \dots + \beta_{ki}F_k + \varepsilon_i, \quad (3.10)$$

gdzie:

k – liczba czynników modelu,

r_i – stopa zwrotu i -tej akcji,

F_j – stopa zwrotu j -tego czynnika, $j = 1, 2, \dots, k$,

β_{ji} – współczynnik wrażliwości stopy zwrotu i -tej akcji względem stopy zwrotu j -tego czynnika,

α – wyraz wolny równania,

ε_i – składnik losowy, dla którego zakłada się, że ma zerową wartość oczekiwaną.

Równanie (3.10) jest liniową zależnością stopy zwrotu akcji od stóp zwrotu pewnych czynników. Model nie określa, jakie to powinny być czynniki, ale należy dobrać takie, aby ich zmienność miała jak największy wpływ na zmienność stopy zwrotu akcji. Można to uczynić stosując jedną z wielu opisanych w literaturze (np. [96], [112]) metod doboru zmiennych do modelu regresji liniowej z wieloma zmiennymi objaśniającymi. Współczynnik wrażliwości β_{ji} wskazuje, o ile w przybliżeniu zmieni się stopa zwrotu i -tej akcji, gdy stopa zwrotu j -tego czynnika zmieni się o jednostkę, a stopy zwrotu pozostałych czynników pozostaną bez zmian. Zakłada się, że stopy

zwrotu czynników modelu są parami niezależne, czyli

$$\forall_{\substack{l, j = 1, 2, \dots, k \\ l \neq j}} \text{cov}(F_l, F_j) = 0$$

oraz

$$\forall_{\substack{i, j \\ i \neq j}} E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0,$$

$$\forall_{j = 1, 2, \dots, k} E[\varepsilon_i (F_j - E(F_j))] = 0.$$

Składnik losowy ε_i reprezentuje wpływ na stopę zwrotu i -tej akcji czynników nieuwzględnionych w modelu. Na podstawie wzoru (3.10) mamy

$$E(r_i) = \alpha_i + E\left(\sum_{j=1}^k \beta_{ji} F_j\right). \quad (3.11)$$

Odejmując stronami (3.11) od (3.10), otrzymujemy

$$r_i = E(r_i) + \sum_{j=1}^k \beta_{ji} (F_j - E(F_j)) + \varepsilon_i. \quad (3.12)$$

Dla portfela składającego się z akcji n spółek zachodzi następująca zależność:

$$\beta_{pj} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_{ji},$$

gdzie:

β_{pj} – współczynnik wrażliwości stopy zwrotu portfela względem j -tego czynnika,

w_i – udział akcji i -tej spółki w portfelu,

β_{ji} – współczynnik wrażliwości stopy zwrotu akcji i -tej spółki względem j -tego czynnika.

Przy konstrukcji modelu *APT* wychodzi się od następujących założeń:

1. Portfel arbitrażowy nie wymaga ponoszenia żadnych nakładów, czyli

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0, \quad (3.13)$$

gdzie n jest liczbą spółek w portfelu. W praktyce taki portfel może być utworzony przy zastosowaniu krótkiej sprzedaży.

2. Portfel arbitrażowy nie ma ryzyka związanego z działaniem każdego z rozpatrywanych czynników, co można zapisać jako

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_{ji} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.14)$$

3. Portfel arbitrażowy jest „prawie” wolny od ryzyka niesystematycznego, czyli

$$\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i \approx 0,$$

co można rozumieć, że $\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i$ dąży według prawdopodobieństwa do zera.

Na podstawie (3.12) stopa zwrotu portfela arbitrażowego dana jest wzorem

$$\begin{aligned} r_p &= \sum_{i=1}^n w_i r_i = \sum_{i=1}^n w_i \left[E(r_i) + \sum_{j=1}^k \beta_{ji} (F_j - E(F_j)) + \varepsilon_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n w_i E(r_i) + \sum_{j=1}^k (F_j - E(F_j)) \sum_{i=1}^n w_i \beta_{ji} + \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Ponieważ obowiązują założenia 2 i 3, to

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i).$$

Portfel arbitrażowy jest portfelem o zerowych nakładach i zerowym ryzyku. Z założenia prawa jednej ceny i działania arbitrażu wynika, że portfel ten daje stopę zwrotu równą zero, co oznacza

$$\sum_{i=1}^n w_i E(r_i) = 0. \quad (3.15)$$

Dla dostatecznie dużej liczby akcji układ złożony z równań (3.13) – (3.15)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i E(r_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i \beta_{ji} = 0 \end{cases}$$

jest układem równań liniowo zależnych. Oznacza to, że istnieją takie niezerowe współczynniki λ_j , że

$$E(r_i) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^k \lambda_j \beta_{ji}. \quad (3.16)$$

Równanie (3.16) jest jedną z postaci modelu *APT*. Dotyczy ono dowolnej akcji lub portfela na rynku. Równanie to określa, ile powinna wynosić oczekiwana stopa zwrotu akcji (lub portfela) w warunkach równowagi. Jeżeli stopa zwrotu spodziewana przez inwestorów jest równa tej wyliczonej ze wzoru (3.16), to akcja jest dobrze wyceniona, jeżeli jest większa, to akcja jest niedowartościowana, jeżeli jest mniejsza, to akcja jest przewartościowana.

Współczynniki λ_j równania (3.16) można otrzymać stosując regresję liniową. Najpierw należy oszacować parametry β_{ji} w równaniu (3.10), a potem, korzystając z tych oszacowań, należy wyestymować parametry λ_j równania (3.16). Ze wzoru (3.12) można wywnioskować, że wyraz wolny modelu (3.16) interpretowany jest jako stopa wolna od ryzyka. Parametry λ_j interpretuje się jako premie za ryzyko z tytułu działania każdego z czynników. Jak napisano w [50], najprostszym sposobem wyznaczenia parametrów modelu *APT* jest wykorzystanie równania (3.16) w odniesieniu do konkretnych portfeli lub akcji. Należy rozważyć $k+1$ portfeli o następujących charakterystykach:

$$\begin{array}{llll} \beta_{11} = 1 & \beta_{21} = 0 & \dots & \beta_{k1} = 0 \\ \beta_{12} = 0 & \beta_{22} = 1 & \dots & \beta_{k2} = 0 \\ \dots & & & \\ \beta_{1k} = 0 & \beta_{2k} = 0 & \dots & \beta_{kk} = 1 \\ \beta_{1,k+1} = 0 & \beta_{2,k+1} = 0 & \dots & \beta_{k,k+1} = 0 \end{array}$$

Każdy z pierwszych k portfeli ma jednostkową wrażliwość na jeden czynnik ryzyka i jest niewrażliwy na pozostałe czynniki. Ostatni portfel jest niewrażliwy na wszystkie czynniki ryzyka, co oznacza, że jest wolny od ryzyka. Z powyższego otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} E(r_1) = \lambda_0 + \lambda_1, \\ E(r_2) = \lambda_0 + \lambda_2, \\ \dots\dots\dots \\ E(r_k) = \lambda_0 + \lambda_k, \\ E(r_{k+1}) = \lambda_0. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu dostajemy wartości parametrów modelu *APT*.

Przykład 3.3. Do konstrukcji portfela wybrano trzy instrumenty finansowe. Rozważmy dwuczynnikowy model *APT*. Stopa zwrotu akcji spółki pierwszej ma jednostkową wrażliwość na czynnik pierwszy i brak wrażliwości na czynnik drugi. Oczekiwana stopa zwrotu dla tej akcji jest równa 0,1. Stopa zwrotu akcji spółki drugiej ma brak wrażliwości na czynnik pierwszy i jednostkową wrażliwość na czynnik drugi. Oczekiwana stopa zwrotu dla tej akcji jest równa 0,15. Stopa wolna od ryzyka dla instrumentu niewrażliwego na obydwa czynniki jest równa 0,03.

Ze wzoru (3.16) mamy

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 0,1; \\ \lambda_0 + \lambda_2 = 0,15; \\ \lambda_0 = 0,03. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy model *APT* następującej postaci:

$$E(r) = 0,03 + 0,07\beta_1 + 0,12\beta_2.$$

„Model *APT* ma u podstaw zdecydowanie mniej założeń niż *CAPM* i z tego powodu uważany jest za lepszy przy porównaniach teoretycznych. Jednak jego praktyczne zastosowanie jest dość trudne, dlatego też w praktyce zdecydowanie częściej

stosowany jest *CAPM*.” [50] W literaturze pojawiają się opinie, że *APT* lepiej opisuje zależność pomiędzy stopą zwrotu a zmiennymi ekonomicznymi, ponieważ, będąc modelem wieloczynnikowym, uwzględnia więcej zmiennych. Każdy z czynników jest odrębnym źródłem ryzyka systematycznego. „W teorii arbitrażu cenowego ryzyko niesystematyczne (a więc podlegające dywersyfikacji) jest ryzykiem niepowiązanym z oddziaływaniem tych czynników.” [45] Główne trudności pojawiające się przy zastosowaniach *APT* to wyszczególnienie rodzaju czynników wpływających na wysokość stóp zwrotu oraz liczby tych czynników, jak również oszacowania współczynników wrażliwości.

3.4 Model Blacka–Littermana

Model Blacka–Littermana został opracowany na początku lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku przez Roberta Littermana i Fischera Blacka przy współpracy z firmą inwestycyjną Goldman Sachs [10], [11], [12]. Jest to dość skomplikowany model, dlatego tylko pokrótce przedstawimy jego założenia i wnioski. Model zakłada, że istnieją dwa źródła informacji o przyszłych stopach zwrotu – model równowagi rynkowej oraz opinie ekspertów. Wychodząc od rozkładów stóp zwrotu, które implikuje model *CAPM* jako *a priori*, a następnie dodając opinie ekspertów, uzyskuje się nowy rozkład *a posteriori* stóp zwrotu (patrz np. [10], [11], [12], [135], [139]).

Rozważmy portfel składający się z n rodzajów aktywów z udziałami $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$. Niech $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ będzie wektorem losowym stóp zwrotu tych aktywów. Zakłada się, że $R \sim N(\mu, \Sigma)$, gdzie macierz kowariancji jest szacowana na podstawie obserwacji przeszłych stóp zwrotu. Ponadto wektor wartości oczekiwanych μ traktowany jest jako wektor losowy o rozkładzie normalnym, czyli

$$\mu \sim N(\pi, \tau\Sigma),$$

gdzie τ reprezentuje błąd estymacji parametrów wektora μ .

Przedstawimy teraz poszczególne etapy procedury Blacka-Littermana. W pierwszym etapie zakłada się, że inwestorzy, na podstawie swoich oczekiwań co do przyszłych stóp zwrotu, dokonują wyboru portfela zgodnie z kryterium

$$\max \left(w^T \pi - \frac{1}{2} \lambda w^T \Sigma w \right), \quad (3.17)$$

gdzie λ jest współczynnikiem awersji inwestora do ryzyka. Jego wartość może być subiektywnym wyborem badacza, można też, korzystając z modelu równowagi rynku obliczyć go jako [8], [119]

$$\lambda = \frac{E(r) - r_f}{\sigma^2},$$

gdzie:

$E(r)$ – oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego,

r_f – stopa zwrotu z inwestycji wolnej od ryzyka,

σ^2 – wariancja stopy zwrotu portfela rynkowego.

W tym kontekście współczynnik awersji do ryzyka jest premią za ryzyko przypadającą na jednostkę ryzyka rynkowego.

Obliczając pochodne cząstkowe po w we wzorze 3.17 i przyrównując je do zera, otrzymujemy

$$\pi - 2\lambda \Sigma w = 0,$$

czyli

$$\pi = 2\lambda \Sigma w.$$

Drugi etap procedury Blacka-Littermana dotyczy określenia parametrów rozkładu opinii eksperckiej sformułowanej dla wartości oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela. Zakłada się, że spełnione jest następujące równanie:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon,$$

gdzie:

$P - (k \times n)$ - wymiarowa macierz reprezentująca opinie eksperckie dotyczące stóp zwrotu składowych portfela,

$Q - k$ -wymiarowy wektor oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela powiązanych z opiniami opisanymi macierzą P ,

$\varepsilon - k$ -wymiarowy wektor losowy reprezentujący błędy opinii eksperckiej.

Zakłada się, że składowe wektora ε są niezależne i $\varepsilon \sim N(0; \Omega)$, gdzie Ω jest macierzą diagonalną wariancji składowych wektora ε postaci

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \omega_k \end{pmatrix}$$

gdzie $\omega_1, \dots, \omega_k$ reprezentują poziomy niepewności opinii eksperckich.

Oto przykład pokazujący, jak mogą być wyznaczone macierze P i Q . Załóżmy, że w skład portfela wchodzi trzy instrumenty (A, B i C), a eksperci mają dwa poglądy na temat rynku. Pierwsza opinia mówi, że instrument A będzie miał stopę zwrotu o q_1 procent większą niż instrument B i o q_1 procent większą niż instrument C . Druga opinia mówi, że instrument B będzie miał stopę zwrotu o q_2 procent większą niż instrument C . Macierze P i Q będą miały wówczas następujące postacie:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Dowodzi się (patrz np. [108]), że przy powyższych założeniach i oznaczeniach rozkład *a posteriori* wektora wartości oczekiwanej μ ma postać

$$\mu \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{\mu, BL}),$$

gdzie:

$$\mu_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1},$$

$$\Sigma_{\mu,BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P \right]^{-1}.$$

Aby otrzymać rozkład stóp zwrotu R składowych portfela, przedstawia się ten wektor w postaci

$$R = \mu + Z,$$

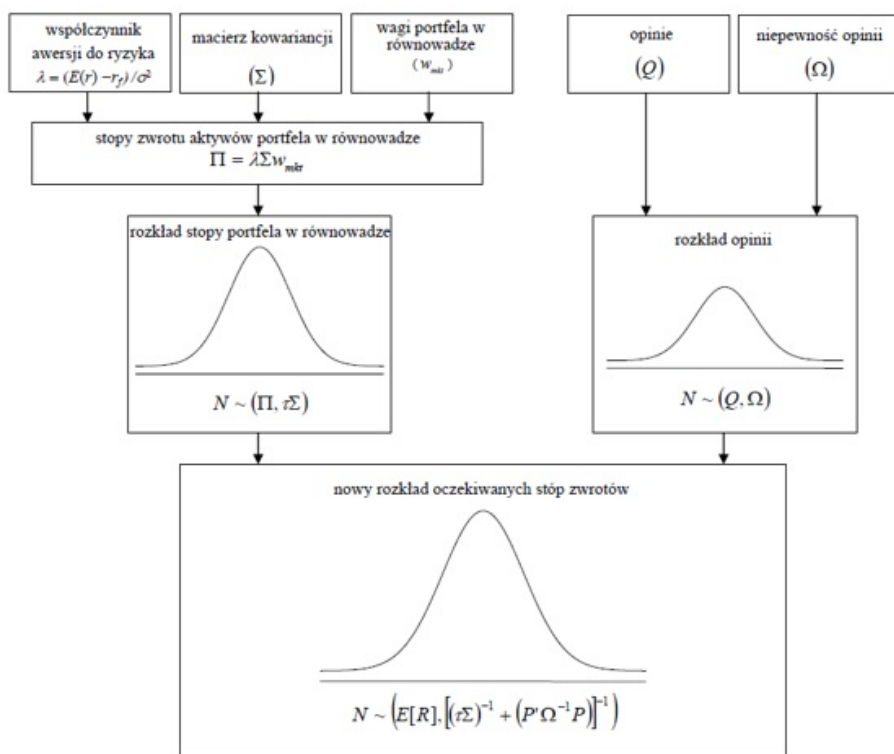
gdzie $Z \sim N(0, \Sigma)$ oraz wektory losowe μ i Z są niezależne. Wówczas dla wektora stóp zwrotu portfela R_{BL} , otrzymanego zgodnie z procedurą Blacka–Littermana, otrzymuje się, że

$$R_{BL} \sim N(\mu_{BL}, \Sigma_{BL}),$$

gdzie

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + \Sigma_{\mu,BL}.$$

Przedstawione powyżej poszczególne etapy procedury Blacka–Littermana obrazuje rysunek 3.3 (porównaj [135]).



Rysunek 3.3: Poszczególne etapy procedury Blacka-Littermana

Źródło: [135]

Model Blacka-Littermana jest szeroko stosowanym modelem alokacji aktywów finansowych. Wykorzystuje podejście bayesowskie² do oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa oczekiwanych stóp zwrotu. Opiera się na modelu równowagi CAPM, a następnie łączy go z subiektywnymi poglądami inwestorów na temat zwrotów z aktywów. Zastosowania modelu dla różnych rynków finansowych pokazały, że portfele skonstruowane tą metodą są bardziej stabilne i lepiej zdywersyfikowane

² O metodologii bayesowskiej można przeczytać, np. w [7], [39], [77], [110].

niż te skonstruowane przy użyciu klasycznego podejścia opartego na zależności średnia-wariancja. W rezultacie model ten zyskał duże uznanie wśród praktyków. Amerykański bank inwestycyjny Goldman Sachs regularnie publikuje zalecenia dotyczące alokacji aktywów w oparciu o model Blacka–Littermana i wydaje raporty opisujące doświadczenia firmy w zakresie korzystania z tego modelu (Goldman Sachs Funds SICAV - An undertaking for collective investment organised under the laws of the Grand Duchy of Luxembourg (société d'investissement à capital variable)). Jak zauważono, np. w [8], model ten ma jednak swoje wady. Po pierwsze, pozwala inwestorom określać swoje poglądy tylko na temat zwrotów z aktywów, ale nie na temat ich zmienności lub dynamiki rynku. Po drugie, model opiera się na podejściu średniej–wariancji do alokacji portfela. W wiele pracach sugeruje się, że wariancja może nie być odpowiednią miarą ryzyka. W konsekwencji powstały liczne modyfikacje tego modelu wykorzystujące, np. wartość zagrożoną (VaR) lub warunkową wartość zagrożoną ($CVaR$) (porównaj [8], [32], [37], [119], [147]).

Klasyczna wersja modelu Blacka–Littermana obejmuje jeden okres analizy i zakłada, że horyzont prognoz ekspertów pokrywa się z horyzontem inwestora. Próbą obejścia tych założeń jest np. [130], gdzie rozważane jest uogólnienie dla wielu okresów, w których horyzont poglądów ekspertów może różnić się od horyzontu inwestora dynamicznie zarządzającego swoim portfelem. Rozważane są rozkłady warunkowe stóp zwrotów, gdzie procesem zmiany cen akcji jest geometryczny ruch Browna.

3.5 Portfele optymalne według kryteriów bezpieczeństwa

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że celem inwestora jest maksymalizacja oczekiwanej użyteczności inwestycji, która może być mierzona przy pomocy średniej i wariancji stopy zwrotu z portfela. W tym rozdziale przedstawiono niektóre, inne kryteria budowy portfeli inwestycyjnych. Jak zauważono w [50]: „Kry-

teriów jest wiele, ale w większości u ich podstaw leżą dwie charakterystyki, tzn. dochód i ryzyko, przy czym mogą one być mierzone na różne sposoby.” Kryteriami omówionymi poniżej będą kryteria bezpieczeństwa portfela. ([2], [31], [50], [67], [82], [102], [106], [118]) Istnieją inwestorzy, np. fundusze emerytalne czy fundusze gwarancyjne, którzy przede wszystkim koncentrują się na niekorzystnych wynikach inwestycji i chcą ograniczyć prawdopodobieństwo uzyskania niskich stóp zwrotu. Ich głównym celem jest uzyskiwanie w miarę stałych dochodów, możliwie większych niż te, które dają inwestycje pozbawione ryzyka. Ta grupa inwestorów, przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych, często kieruje się kryteriami Roya, Kataoki, czy Telsera. Kryteria bezpieczeństwa charakteryzują się tym, że u podstaw decyzji inwestora związanych z budową portfela jest minimalizacja prawdopodobieństwa poniesienia określonych strat.

Niech w skład portfela wchodzi akcje n spółek, których udziały określa następujący wektor:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Niech wektor losowy

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}$$

reprezentuje zmienność stóp zwrotu z inwestycji w akcje tych spółek. Oznaczmy przez R_p zmienną losową reprezentującą zmienność stopy zwrotu portfela określoną wzorem

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i.$$

Oznaczmy $E(R_p) = r_p$ i niech σ_p będzie odchyleniem standardowym stopy zwrotu tego portfela.

Według **kryterium Roya** najlepszym portfelem jest ten, dla którego prawdopodobieństwo uzyskania stopy zwrotu poniżej ustalonego poziomu jest najmniejsze. Kryterium to polega na wyznaczeniu portfela, dla którego spełniony jest warunek

$$\min_{\sum_{i=1}^n w_i=1} P(R_p < \alpha), \quad (3.18)$$

gdzie α jest minimalną stopą zwrotu portfela, jaką pragnie uzyskać inwestor.

Założmy, że na rynku nie ma instrumentu wolnego od ryzyka. Warunek (3.18) jest równoważny warunkowi

$$\min_{\sum_{i=1}^n w_i=1} P\left(\frac{R_p - r_p}{\sigma_p} < \frac{\alpha - r_p}{\sigma_p}\right). \quad (3.19)$$

Niech F będzie dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej $\frac{R_p - r_p}{\sigma_p}$, wtedy wzór (3.19) ma postać

$$\min_{\sum_{i=1}^n w_i=1} F\left(\frac{\alpha - r_p}{\sigma_p}\right).$$

Minimalizacja wartości dystrybuanty sprowadza się do minimalizacji jej argumentu $\frac{\alpha - r_p}{\sigma_p}$ lub równoważnie maksymalizacji argumentu $\frac{r_p - \alpha}{\sigma_p}$. Oznaczmy

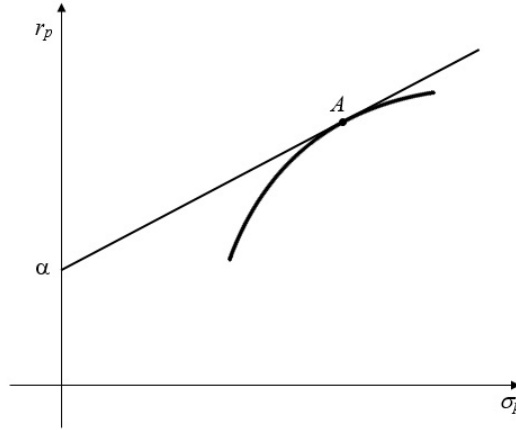
$$c = \frac{r_p - \alpha}{\sigma_p},$$

czyli

$$r_p = c\sigma_p + \alpha. \quad (3.20)$$

W układzie współrzędnych (r_p, σ_p) równanie (3.20) określa prostą zawierającą punkt o współrzędnych $(0, \alpha)$. Szukamy takiego portfela, dla którego c jest maksymalne i jednocześnie takiego, który należy do zbioru portfeli efektywnych. Zatem, z rodziny prostych określonych wzorem (3.20) szukamy takiej, która ma największy

współczynnik kierunkowy i przynajmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem efektywnych portfeli. Portfel ten reprezentuje punkt A na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4: Portfel optymalny według kryterium Roya

Źródło: opracowanie własne

Zauważmy, że wyznaczenie składu tego portfela jest równoważne zagadnieniu wyznaczenia portfela rynkowego przy stopie wolnej od ryzyka równej α . W tym celu wystarczy zapisać wzór (2.32) jako

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Sigma^{-1} W_\alpha} \Sigma^{-1} W_\alpha, \quad (3.21)$$

gdzie Σ jest macierzą wariancji i kowariancji stóp zwrotu akcji wchodzących w skład

portfela oraz

$$W_\alpha = \begin{pmatrix} r_1 - \alpha \\ r_2 - \alpha \\ \vdots \\ r_n - \alpha \end{pmatrix}.$$

Przykład 3.4. W skład portfela wchodzi akcje dwóch spółek. Dla pierwszej z nich jest $r_1 = 0,1$ i $\sigma_1 = 0,03$, dla drugiej jest $r_2 = 0,15$ i $\sigma_2 = 0,05$ oraz współczynnik korelacji stóp zwrotu $\rho = -0,3$. Ustalmy $\alpha = 0,08$. Wtedy macierz Σ ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,0009 & -0,00045 \\ -0,00045 & 0,0025 \end{pmatrix}.$$

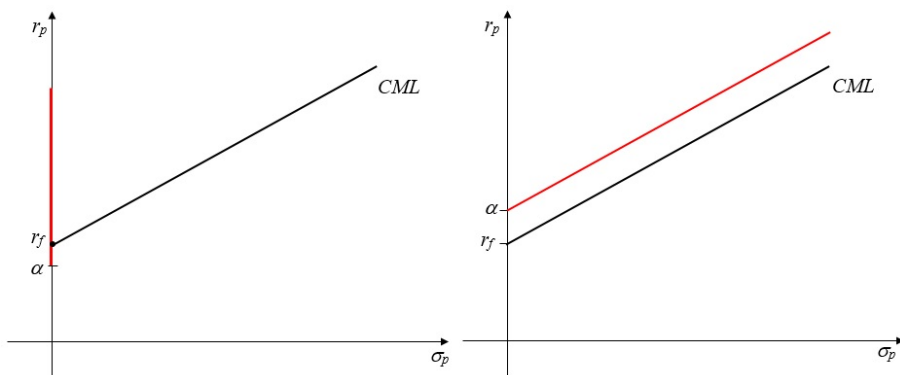
Po wyznaczeniu Σ^{-1} i wstawieniu danych do wzoru (3.21) otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,531 \\ 0,469 \end{pmatrix}.$$

Ze wszystkich portfeli składających się z akcji powyższych dwóch spółek, dla portfela o powyższym składzie jest minimalne prawdopodobieństwo tego, że stopa zwrotu będzie mniejsza od 0,08. Portfel ten ma oczekiwaną stopę zwrotu $r_p = 0,123$ z odchyleniem standardowym tej stopy $\sigma_p = 0,0241$.

Jeżeli na rynku jest instrument wolny od ryzyka ze stopą zwrotu równą r_f , to z rodziny prostych określonych wzorem (3.20) szukamy takiej, która ma największy współczynnik kierunkowy c i przynajmniej jeden punkt wspólny z linią CML . Należy wyróżnić dwa przypadki:

1. $\alpha \leq r_f$, to optymalnym jest portfel zawierający tylko instrument wolny od ryzyka (patrz rysunek 3.5 po lewej),
2. $\alpha > r_f$, to wartość c będzie tym większa, im będzie bliższa współczynnikowi kierunkowemu linii CML , ale wtedy będzie zachodzić $\sigma_p \rightarrow +\infty$ (patrz rysunek 3.5, po prawej).



Rysunek 3.5: Portfele optymalne według kryterium Roya z uwzględnieniem stopy wolnej od ryzyka

Źródło: opracowanie własne

Kryterium Telsera polega na maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu portfela pod warunkiem, że prawdopodobieństwo stopy zwrotu nie większej od określonej wartości jest mniejsze od ustalonej liczby. Oznacza to, że przy tym kryterium inwestor określa zarówno minimalny poziom zagrożenia, jak i maksymalny poziom zagrożenia. Portfel nazywamy optymalnym według tego kryterium, jeżeli jest rozwiązaniem problemu decyzyjnego

$$\begin{cases} \max_{\sum_{i=1}^n w_i=1} E(R_p) \\ P(R_p < \alpha) \leq \varepsilon \end{cases}, \quad (3.22)$$

gdzie α i ε są ustalone.

Niech r_p i σ_p oznaczają, jak poprzednio, oczekiwaną stopę zwrotu portfela i odchylenie standardowe tej stopy. Nierówność z (3.22) przekształcamy do postaci

$$P\left(\frac{R_p - r_p}{\sigma_p} < \frac{\alpha - r_p}{\sigma_p}\right) \leq \varepsilon,$$

co jest równoważne nierówności

$$F\left(\frac{\alpha - r_p}{\sigma_p}\right) \leq \varepsilon.$$

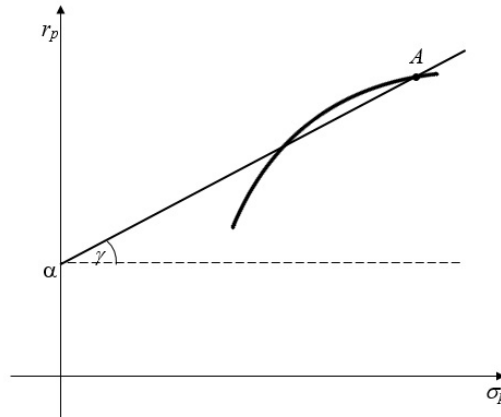
Jeżeli dystrybuanta F rozkładu zmiennej losowej $\frac{R_p - r_p}{\sigma_p}$ jest rosnąca, to otrzymujemy

$$\frac{\alpha - r_p}{\sigma_p} \leq F^{-1}(\varepsilon).$$

Po przekształceniu mamy

$$r_p \geq -\sigma_p F^{-1}(\varepsilon) + \alpha.$$

Portfel spełniający kryterium Telsera znajduje się na przecięciu prostej o równaniu $r_p = -\sigma_p F^{-1}(\varepsilon) + \alpha$ i krzywej zawierającej efektywne portfele. Ponieważ wartość r_p jest maksymalizowana, więc na rysunku 3.6 portfelowi temu odpowiada punkt A , gdzie $\tan \gamma = F^{-1}(\varepsilon)$.



Rysunek 3.6: Portfel optymalny według kryterium Telsera

Źródło: opracowanie własne

Przykład 3.5. W skład portfela wchodzi akcje dwóch spółek o udziałach w_1 i $1 - w_1$. Załóżmy, że stopy zwrotu z inwestycji w akcje tych spółek R_1 i R_2 mają rozkłady normalne, z parametrami równymi odpowiednio: $r_1 = 0,1$; $\sigma_1 = 0,03$; $r_2 = 0,15$; $\sigma_2 = 0,05$. Niech współczynnik korelacji stóp zwrotu ma wartość

$\rho = -0,3$. Z powyższego wynika, że stopa zwrotu portfela R_p także ma rozkład normalny, a zmienna losowa $\frac{R_p - r_p}{\sigma_p}$ ma standardowy rozkład normalny. Ustalmy $\alpha = 0,06$; $\varepsilon = 0,01$. Ponieważ $F^{-1}(\varepsilon) = -2,326$, więc portfel spełniający kryterium Telsera znajduje się na prostej o równaniu

$$r_p = 2,326\sigma_p + 0,06.$$

Z powyższych danych otrzymujemy

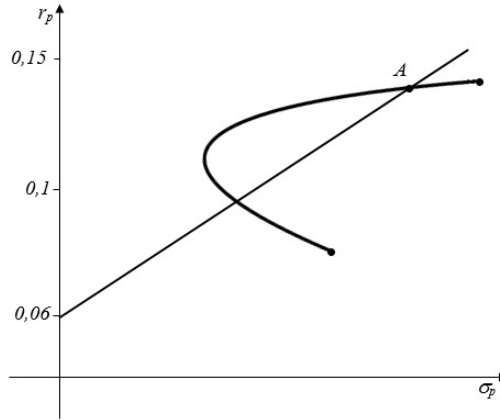
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} w_1 & 1 - w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,15 \end{pmatrix} = \\ & = 2,326 \sqrt{\begin{pmatrix} w_1 & 1 - w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0009 & -0,00045 \\ -0,00045 & 0,0025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ 1 - w_1 \end{pmatrix}} + 0,06. \end{aligned}$$

Powyższe równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania $w_1 = 0,76$ lub $w_1 = 0,344$. Dla $w_1 = 0,76$ otrzymujemy $r_p = 0,112$, dla $w_2 = 0,344$ otrzymujemy $r_p = 0,133$, a więc portfel spełniający kryterium Telsera ma skład $w_1 = 0,344$, $w_2 = 1 - 0,344 = 0,636$. Odchylenie standardowe stopy zwrotu tego portfela ma wartość $\sigma_p = 0,0313$. Na rysunku 3.7 portfel ten reprezentuje punkt A .

Jeżeli na rynku jest instrument wolny od ryzyka ze stopą zwrotu równą r_f , to portfele efektywne znajdują się na linii CML . Portfel spełniający kryterium Telsera znajduje się na przecięciu prostej o równaniu $r_p = -\sigma_p F^{-1}(\varepsilon) + \alpha$ i linii CML . Taki punkt istnieje w dwóch przypadkach:

1. $\alpha < r_f$ i współczynnik kierunkowy $-F^{-1}(\varepsilon)$ jest większy niż współczynnik kierunkowy linii CML ,
2. $\alpha > r_f$ i współczynnik kierunkowy $-F^{-1}(\varepsilon)$ jest mniejszy niż współczynnik kierunkowy linii CML .

Jak widać, portfele optymalne według kryterium Telsera nie zawsze muszą istnieć.



Rysunek 3.7: Geometryczna interpretacja rozwiązania z przykładu 3.5

Źródło: opracowanie własne

Kryterium Kataoki polega na maksymalizacji dolnego ograniczenia dla oczekiwanej stopy zwrotu portfela pod warunkiem, że prawdopodobieństwo uzyskania stopy zwrotu nie większej niż to ograniczenie nie przekracza ustalonej wcześniej wartości. Portfel optymalny według tego kryterium spełnia następujące warunki:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ P(R_p < \alpha) \leq \varepsilon \end{cases},$$

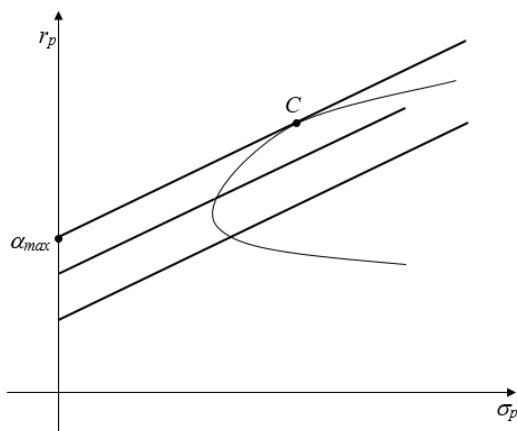
gdzie α i ε są ustalone.

Tak jak przy kryterium Telsera, otrzymujemy, że portfel spełniający kryterium Kataoki znajduje się na prostej o równaniu $r_p = -\sigma_p F^{-1}(\varepsilon) + \alpha$. Geometrycznie oznacza to, że szukamy prostej, która ma współczynnik kierunkowy równy $-F^{-1}(\varepsilon)$, największy wyraz wolny i przynajmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem portfeli efektywnych. Rysunek 3.8 pokazuje, że będzie to prosta styczna i portfel spełniający kryterium Kataoki reprezentuje punkt C .

Przykład 3.6. Załóżmy, że w skład portfela wchodzi akcje dwóch spółek, dla których stopy zwrotu mają rozkłady normalne z parametrami odpowiednio: $r_1 = 0,1$; $\sigma_1 = 0,03$ i $r_2 = 0,15$; $\sigma_2 = 0,05$. Współczynnik korelacji stóp zwrotu ma wartość $\rho = -0,3$. Ustalmy $\varepsilon = 0,05$, wtedy $F^{-1}(\varepsilon) = -1,645$. Zadanie ma postać:

$$\alpha_{\max} = \max_{w_1} \left[\begin{pmatrix} w_1 & 1 - w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,15 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. -1,645 \sqrt{\begin{pmatrix} w_1 & 1 - w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0009 & -0,00045 \\ -0,00045 & 0,0025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ 1 - w_1 \end{pmatrix}} \right]$$

i jego rozwiązaniem jest $\alpha_{\max} = 0,0677$ dla udziałów $w_1 = 0,57$; $w_2 = 0,43$; $r_p = 0,121$ i $\sigma_p = 0,0231$. Portfel ten na rysunku 3.8 reprezentuje punkt C .



Rysunek 3.8: Portfel optymalny według kryterium Kataoki

Źródło: opracowanie własne

Jeżeli na rynku jest instrument wolny od ryzyka ze stopą zwrotu równą r_f , to należy rozważyć dwa przypadki:

1. jeżeli współczynnik kierunkowy $-F^{-1}(\varepsilon)$ jest większy niż współczynnik kierunkowy linii *CML*, to $\alpha_{\max} = r_f$,
2. jeżeli współczynnik kierunkowy $-F^{-1}(\varepsilon)$ jest mniejszy niż współczynnik kierunkowy linii *CML*, to $\alpha_{\max} \rightarrow +\infty$.

Portfele optymalne według powyższych kryteriów mogą znacznie się różnić ze względu na różne podejścia do stopy zwrotu i ryzyka. O zastosowaniach tych kryteriów i porównaniach wyników dla różnych rynków i sektorów można przeczytać np. w [86], [82], [92].

3.6 Ocena wyników zarządzania portfelem

W literaturze finansowej często podkreśla się, że ocena wyników zarządzania portfelem nie jest łatwa i często daje niejednoznaczne wyniki. Ocena ta polega między innymi na porównaniu wyników ocenianego portfela z wynikami innych portfeli. Porównania tego można dokonać według różnych kryteriów, np. porównuje się stopy zwrotu portfeli o tym samym poziomie ryzyka, czy też porównaniu stopy zwrotu portfela z pewnym standardowym wskaźnikiem, tzw. benchmarkiem, którym mogą być indeksy rynku, indeksy konkretnego sektora, stopa wolna od ryzyka, stopa inflacji. Wiele miar służących do oceny wyników zarządzania portfelem bazuje na porównaniu stopy zwrotu portfela z ryzykiem, jakie było ponoszone w trakcie zarządzania. Taka miara nazywana jest stopą zwrotu skorygowaną o ryzyko [50]. Przedstawimy teraz kilka wskaźników będących takimi miarami.

Wskaźnik Sharpe’a (porównaj [50], [109]) definiowany jest wzorem

$$W_s = \frac{r_p - r_f}{\sigma}, \quad (3.23)$$

gdzie:

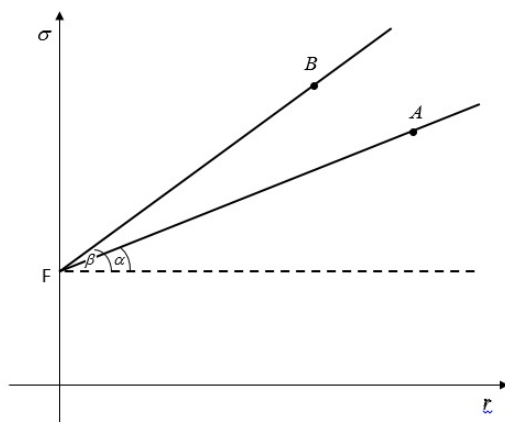
W_s – wskaźnik Sharpe’a,

r_p – przeciętna stopa zwrotu portfela w rozważanym okresie,

r_f – przeciętna stopa zwrotu wolna od ryzyka w rozważanym okresie,

σ – odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela w rozważanym okresie.

Wskaźnik Sharpe’a jest ilorazem premii za ryzyko osiągniętej przez dany portfel i ryzyka całkowitego, mierzonego odchyleniem standardowym stopy zwrotu tego portfela. Rozważmy rysunek 3.9.



Rysunek 3.9: Interpretacja wskaźnika Sharpe’a

Źródło: opracowanie własne

Załóżmy, że dla portfela A zrealizowała się stopa zwrotu r_A z odchyleniem standardowym σ_A . Na rysunku 3.9, w układzie (σ, r) zaznaczono punkt A oraz punkt F odpowiadający aktywowi wolnemu od ryzyka. Wartość wskaźnika Sharpe’a dla

tego portfela jest tangensem kąta nachylenia prostej AF do osi σ . Mamy

$$\frac{r_A - r_f}{\sigma_A} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Im większa wartość tangensa, a tym samym, im większa wartość wskaźnika, tym większa efektywność zarządzania portfelem. Na rysunku 3.9 widać, że większą efektywność ma portfel B niż A , bo $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$.

Modyfikacją wskaźnika Sharpe'a jest **wskaźnik Sortino** określony wzorem (porównaj [72], [97])

$$V_s = \frac{r_p - r_f}{s\sigma_p},$$

gdzie:

V_s – wskaźnik Sortino,

r_p – przeciętna stopa zwrotu portfela w rozważanym okresie,

r_f – przeciętna stopa wolna od ryzyka w rozważanym okresie,

$s\sigma_p$ – semiodchylenie standardowe stopy zwrotu portfela w rozważanym okresie,

które uwzględnia odchylenia stopy zwrotu tylko te, które są poniżej przeciętnej.

We wskaźniku Sharpe'a na wartość ryzyka ma wpływ zarówno ta sytuacja, w której inwestor osiągnie straty, jak i sytuacja, w której osiągnie on ponadprzeciętnie zyski. Wskaźnik Sortino uwzględnia fakt, że inwestorzy często odbierają dodatnie odchylenia stóp zwrotu jako zjawisko pozytywne, nie traktując tego jako ryzyko inwestycyjne. W związku z tym, zamiast odchylenia standardowego, w tym wskaźniku występuje semiodchylenie standardowe.

Wskaźnik Israelsena (zwany też wskaźnikiem Sharpe'a–Israelsena lub wskaźnikiem Sharpe'a na rynku bessy) (patrz [43], [46], [65], [89]) definiowany jest jako

$$W_J = \frac{r_p - r_f}{\sigma^{\frac{r_p - r_f}{|r_p - r_f|}}},$$

gdzie:

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{var}(R_p - r_f)},$$

R_p – zmienna losowa reprezentująca zmienność stopy zwrotu portfela,

r_f – stopa wolna od ryzyka.

σ jest odchyleniem standardowym, ale nie stopy zwrotu portfela, lecz różnicy stopy zwrotu portfela i stopy wolnej od ryzyka. Potęga w mianowniku sprawia, że wskaźnik Sharpe’a jest niejako poprawiany w przypadku, gdy różnica stopy zwrotu portfela i stopy wolnej od ryzyka jest ujemna.

Wskaźnik Peziera i White’a (patrz [43]) został zaproponowany w takiej postaci, aby uwzględnić ewentualną lewostronną asymetrię rozkładu stóp zwrotu oraz koncentrację tego rozkładu. Wskaźnik ten ma postać

$$W_{PW} = W_S \left(1 + \frac{A_S}{6} W_S - \frac{K-3}{24} W_S^2 \right),$$

gdzie:

W_{PW} – wskaźnik Peziera i White’a,

W_S – wskaźnik Sharpe’a zdefiniowany wzorem (3.23),

A_S – współczynnik skośności,

K – kurtoza.

Dla rozkładu normalnego wskaźnik Peziera i White’a jest równy wskaźnikowi Sharpe’a.

Wskaźnik Treynora jest definiowany wzorem (porównaj [15], [50])

$$W_T = \frac{r_p - r_f}{\beta},$$

gdzie:

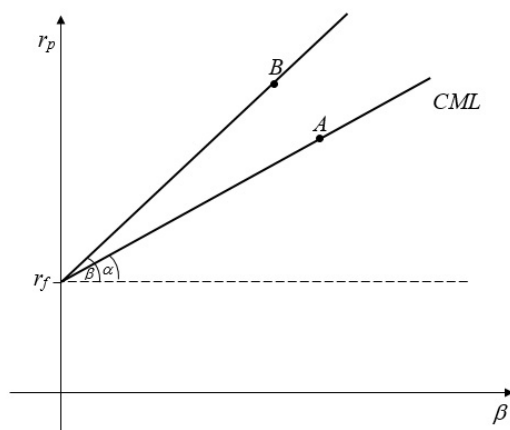
W_T – wskaźnik Treynora,

β – współczynnik beta portfela,

r_p – przeciętna stopa zwrotu portfela w rozważanym okresie,

r_f – przeciętna stopa wolna od ryzyka w rozważanym okresie.

Wskaźnik Treynora jest ilorazem premii za ryzyko osiągniętej przez dany portfel i ryzyka systematycznego, mierzonego współczynnikiem beta portfela. Im większa wartość tego wskaźnika, tym większa efektywność zarządzania portfelem. Na rysunku 3.10 przedstawiona jest graficzna interpretacja wskaźnika Treynora. Portfel *B* ma większą efektywność niż portfel *A*, gdyż $\text{tg}\beta > \text{tg}\alpha$.



Rysunek 3.10: Interpretacja wskaźnika Treynora

Źródło: opracowanie własne

Wskaźnik Jensena (zwany też wskaźnikiem alfa Jensena) wyraża się wzorem (porównaj [14], [50])

$$\alpha = r - [\beta(r_M - r_f) + r_f],$$

gdzie:

α – wartość wskaźnika alfa Jensena,

β – współczynnik beta portfela,

r – przeciętna stopa zwrotu portfela w rozważanym okresie,

r_f – przeciętna stopa wolna od ryzyka w rozważanym okresie,

r_M – przeciętna stopa zwrotu portfela rynkowego w rozważanym okresie.

Wskaźnik Jensena jest różnicą między stopą zwrotu portfela, a stopą zwrotu wynikającą z linii *SML* wyznaczonej dla przeciętnych wartości rynkowych [50]. Dodatnia wartość wskaźnika Jensena oznacza, że dany portfel uzyskał lepszy rezultat niż rynek. Im większa wartość tego wskaźnika, tym większa jest nadwyżka stopy zwrotu portfela w porównaniu z indeksem rynku. Ujemna wartość oznacza, że portfel znajduje się poniżej linii *SML*, czyli był gorzej zarządzany niż przeciętnie i nie jest efektywny.

Wskaźnik Omega definiowany jest jako

$$\Omega(\tau) = \frac{\int_{\tau}^{+\infty} [1 - F(x)] dx}{\int_{-\infty}^{\tau} F(x) dx},$$

gdzie:

F – skumulowany rozkład stóp zwrotu portfela,

τ – tzw. wartość progowa stopy zwrotu.

Stopy zwrotu portfela większe niż τ są uważane za zyski, podczas gdy stopy zwrotu mniejsze niż τ są uważane za straty. Wybór wartości τ pozostawia się inwestorowi. Zazwyczaj przyjmuje się, że jest ona równa stopie wolnej od ryzyka. Geometryczną interpretację wartości tego wskaźnika przedstawia rysunek 3.11. Wartość Omega jest stosunkiem pola obszaru *BCD* do pola obszaru *ABE*. Obszar *BCD* na prawo od wartości progowej τ i powyżej wykresu dystrybuanty reprezentuje tzw. potencjał wzrostowy. Obszar *ABE* na lewo od wartości progowej τ i poniżej wykresu dystrybuanty reprezentuje tzw. potencjał spadkowy (ryzyko), (porównaj [63]). Dla portfela, im większa wartość wskaźnika Omega, tym większe prawdopodobieństwo, że jego stopa zwrotu przekroczy wartość progową τ . Ze względu na swoją konstrukcję, wskaźnik ten uwzględnia nie tylko pierwszy i drugi moment centralny rozkładu, ale także skośność i kurtozę.

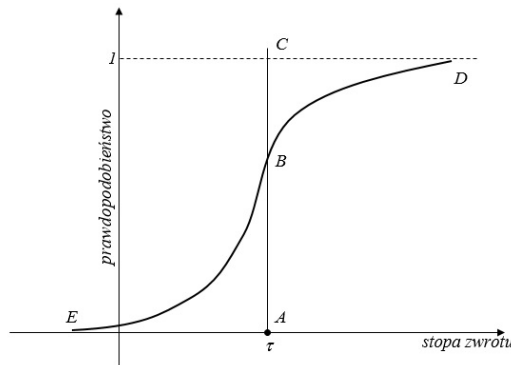
Załóżmy, że w skład portfela wchodzi akcje n spółek o udziałach

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Niech r_t będzie wektorem realizacji stóp zwrotu tych akcji z okresów $t = 1, \dots, T$.

Wtedy wskaźnik Omega portfela określa się jako

$$\Omega_p(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^T \max(w^T r_t - \tau, 0)}{\sum_{t=1}^T \max(\tau - w^T r_t; 0)}.$$



Rysunek 3.11: Interpretacja wskaźnika Omega

Źródło: [68]

Ocena efektywności podejmowanych decyzji pozwala na weryfikację ich skuteczności, pozwala na identyfikację ewentualnych problemów i dostosowanie strategii inwestycyjnych do zmian zachodzących na rynku. Zaprezentowane metody oceny wyników zarządzania portfelem opierają się na jednym kryterium (parametrze). Wskaźniki te bazują na wartościach stóp zwrotu i ryzyka, porównując je

z wynikami wybranego benchmarku, jednakże różnią się od siebie, przede wszystkim, pod względem definicji ryzyka. Przykładowo, wskaźnik Sharpe'a jest wielkością premii za ryzyko, przypadającej na jednostkę ryzyka całkowitego, mierzonego odchyleniem standardowym. Wskaźnik Treynora uwzględnia tylko ryzyko systematyczne, wyrażone za pomocą parametru beta. Wskaźnik Jensena jest różnicą pomiędzy zrealizowaną stopą zwrotu z portfela a teoretyczną stopą zwrotu wynikającą z modelu *CAPM*.

Dokonując oceny na podstawie tych wskaźników, należy zwrócić uwagę na pewne elementy, które mogą mieć istotny wpływ na właściwą interpretację wyników. Wskaźniki te zawierają w swoich formułach stopę zwrotu z portfela rynkowego, a więc są zależne od wyboru właściwego indeksu rynku. Bardzo ważny jest też wybór stopy wolnej od ryzyka. Jak zauważono w [89], przy wysokiej inflacji i deficycie budżetowym zdarza się, że stopa zwrotu z papierów skarbowych zawiera w sobie premię za ryzyko. Wysoka wartość stopy zwrotu wolnej od ryzyka może spowodować, że premia za ryzyko będzie niska lub ujemna. Skutkiem tego wartości analizowanych wskaźników mogą być niższe od rynkowych.

Jakkolwiek każdy z tych wskaźników daje pewną ocenę dotyczącą zarządzania portfelem, to żaden z nich nie może być jedynym kryterium oceny kompetencji zarządzającego. Inwestorzy, zarówno indywidualni, jak i instytucjonalni, mogą podlegać ograniczeniom wynikającym z przepisów prawnych i regulacyjnych, np. dotyczących płynności finansowej, opodatkowania, horyzontu inwestycyjnego, ograniczania ryzyka (co dotyczy np. funduszy inwestycyjnych). Przykładowo, w Polsce Otwarte Fundusze Emerytalne mają ograniczony prawem poziom zaangażowania w akcje. Te i inne ograniczenia mają często istotny wpływ na wybór składu portfela. Oznacza to, że nie powinno się porównywać portfeli, których skład jest oparty na selekcji różnych klas aktywów. Zwroty i ryzyko portfeli akcyjnych będą inne niż te z portfeli obligacji, instrumentów rynku pieniężnego czy instrumentów pochodnych (patrz [63], [68], [100]).

Podsumowanie

Prace Harrego Markowitza z początku lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku traktujące o teorii portfeli dały nowe podejście do finansów. Były na tyle przełomowe, że okrzyknięto je początkiem nowoczesnej teorii finansów. Markowitz jako pierwszy postulował, aby inwestycje finansowe traktować w kategorii ryzyko-zysk. Pokazał, że poprzez umiejętną dywersyfikację składników portfeli można uzyskiwać większe oczekiwane stopy zwrotu i mniejsze ryzyko, niż gdyby rozważać każdy walor z osobna. Zwrócił uwagę na to, że ryzyko portfela zależy nie tylko od zmienności cen składających się nań akcji, ale też od wzajemnych relacji między nimi. Oczekiwana stopa zwrotu i jej ryzyko są podstawowymi wielkościami charakteryzującymi inwestycje, dlatego bardzo ważne jest, ze względu na przyszłe wyniki, ich odpowiednie oszacowanie. O różnych rodzajach stóp zwrotu, zależnościach między nimi i różnych metodach szacowania ryzyka napisano w rozdziale pierwszym tej książki.

Teorii portfeli inwestycyjnych poświęcony jest rozdział drugi. Przedstawiono w nim metody dywersyfikacji dających portfele efektywne. Pokazane, że postać zbioru efektywnego zależy od dostępności na rynku krótkiej sprzedaży akcji oraz możliwości inwestora dotyczących udzielania i zaciągania pożyczek. Szczególny nacisk położono na interpretacje geometryczne otrzymywanych wyników. Pozwalają one zilustrować zależności występujące między badanymi wielkościami, pokazując własności i sposoby konstrukcji zbiorów rozwiązań, ułatwiając interpretację wyników.

Markowitz stworzył narzędzie pozwalające budować portfele efektywne. Konsekwencją tego stało się pytanie, jak będzie zachowywał się rynek, gdy wszyscy inwestorzy będą stosować to narzędzie? Próba odpowiedzi na to pytanie zaowocowała licznymi teoriami opisującymi zachowania inwestorów. W rozdziale trzecim przedstawiono niektóre z nich, a mianowicie: model jednowskaźnikowy Sharpe'a, model równowagi aktywów kapitałowych *CAPM*, model arbitrażu cenowego *APT*. Od końca dwudziestego wieku szczególną popularność wśród inwestorów zyskał model Blacka-Littermana, który łączy idee modelu wyceny aktywów kapitałowych i modelu optymalizacji średniej-wariancji z uwzględnieniem opinii inwestorów, co do przyszłych stóp zwrotu. Wybierając do tej książki właśnie te modele, autor chciał pokazać, w jaki sposób na przestrzeni kilkudziesięciu lat rozwijała się myśl Harrego Markowitza. Rozdział trzeci zawiera także krótki podrozdział opisujący, inne niż podejście Markowitza, kryteria budowy portfeli inwestycyjnych. Są to kryteria bezpieczeństwa Roya, Kataoki i Telsera, charakteryzujące się tym, że u podstaw decyzji inwestorów budujących portfele leży potrzeba minimalizacji prawdopodobieństwa poniesienia określonych strat.

Wynik każdej inwestycji powinien być zweryfikowany pod kątem osiągnięcia zamierzonych celów. Porównania tego można dokonać według różnych kryteriów, np. porównuje się stopy zwrotu portfeli o tym samym poziomie ryzyka, czy też porównuje się stopy zwrotu portfela z pewnym standardowym wskaźnikiem, np. indeksem rynku, indeksem konkretnego sektora, stopą inflacji. Do tego porównania służą różne wskaźniki. W rozdziale trzecim zostały przedstawione niektóre z nich: Sharpe'a, Sortino, Israelsena, Peziera i White'a, Treynora, Jensena, Omega. Ocena efektywności podejmowanych decyzji pozwala na weryfikację ich skuteczności, pozwala na identyfikację ewentualnych problemów i dostosowanie strategii inwestycyjnych do zmian zachodzących na rynku.

Nie jest możliwe, aby w jednym opracowaniu zawrzeć pełny zakres wiedzy na temat inwestycji finansowych. Jest to dynamicznie rozwijająca się dziedzina nauki, w której na bieżąco pojawiają się nowe teorie i podejścia badawcze. Zdaniem autora, do ważniejszych należą teorie portfelowe, które wykorzystują analizę bayesowską i uwzględniają Var i CVar (ang. conditional value at risk) jako miary ryzyka ([13, 104, 119]).

Nie można też nie wspomnieć o inżynierii finansowej, której burzliwy rozwój obserwuje się w ciągu ostatnich lat. Korzysta ona z analizy stochastycznej rozwiniętej w ramach teorii procesów stochastycznych. Daje ona nowe możliwości w obszarze zarządzania ryzykiem, uwzględniając w inwestycjach instrumenty pochodne (kontrakty terminowe, opcje), dając inwestorom możliwość tworzenia portfeli dostosowanych do ich potrzeb w zakresie zwrotów i ryzyka ([53, 54, 120, 127]).

Wraz ze wzrostem mocy obliczeniowej komputerów oraz obniżeniem się kosztów przechowywania danych powstała możliwość analizy coraz większej ilości informacji. Pozwala to na wykorzystanie coraz bardziej zaawansowanych technologii informatycznych w procesie alokacji aktywów czy też wykorzystanie uczenia maszynowego w procesie zarządzania portfelem inwestycyjnym (porównaj, np. [28, 57, 69, 123]).

Klasyczna teoria ekonomii oparta jest na koncepcji racjonalnych wyborów dokonywanych przez konsumentów. Jednakże zauważono, że na decyzje ekonomiczne człowieka ma wpływ nie tylko rachunek ekonomiczny, ale również czynniki psychologiczne, w związku z tym te decyzje nie zawsze są racjonalne. Spostrzeżenie to dało początek tzw. finansom behawioralnym, które stały się jedną z najszybciej rozwijających się dziedzin współczesnych finansów. Do rozważań nad zachowaniami uczestników rynków włączają one zagadnienia psychologiczne, społeczne i antropologiczne. Finanse behawioralne są obszarem obecnych badań autora. Za interesowanych tym tematem odsyła się np. do [16, 23, 62, 128].

Dodatek matematyczny

Metoda mnożników Lagrange’a

Metoda mnożników Lagrange’a pozwala znaleźć ekstremum funkcji n zmiennych $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdy zmienne te są związane k warunkami dodatkowymi postaci:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \dots \quad \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

gdzie $k < n$.

Rozważmy funkcję Φ $n+k$ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ postaci:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \\ &+ \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym dla istnienia ekstremum funkcji Φ w punkcie $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ jest, aby w tym punkcie spełniony był poniższy układ $n+k$ równań z $n+k$ niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_k = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aby stwierdzić, czy rozwiązanie $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ układu równań (3.24) odpowiada minimum czy maksimum funkcji f , należy zbadać określoność macierzy pochodnych mieszanych w tym punkcie (patrz [5], [35]).

Wzór Taylora i Maclaurina

Niech f będzie funkcją rzeczywistą określoną na przedziale $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow R$, mającą na tym przedziale ciągle pochodne do rzędu $(n + 1)$ włącznie (na końcach przedziału zakłada się różniczkowalność prawo- lub lewostronną). Wtedy dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwy jest wzór

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \left(f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right) + R_n(a, x),$$

gdzie $f^{(k)}(a)$ oznacza pochodną rzędu k funkcji f w punkcie a , natomiast $R_n(a, x)$ nazywa się resztą Peano we wzorze Taylora, dla której spełniony jest warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(a, x)}{(x-a)^n} = 0.$$

W przypadku gdy $a = 0$, wzór Taylora nazywany jest wzorem Maclaurina.

Cytaty na temat

- Doznasz recesji i upadków na giełdzie. Jeśli nie rozumiesz, że to się wydarzy, to znaczy, że nie jesteś gotowy, nie poradzisz sobie dobrze na rynkach.

Peter Lynch

- Na giełdzie inwestorzy składają się na nagrodę dla najlepszych.

Mirosława Bieniawska-Toczyska

- Inwestowanie powinno być raczej jak oglądanie schnącej farby lub rosnącej trawy. Jeśli chcesz emocji, weź 800 dolarów i ruszaj do Las Vegas.

Paul Samuelson

- Inwestowanie jest jak wchodzenie po drabinie, każdy wie, jak się to robi, lecz nie każdy wie, gdzie ją przystawić.

Warren Buffett

- Czasami twoja najlepsza inwestycja to ta, do której nie doszło.

Donald Trump

- Jeśli nie możesz zobaczyć 50% spadku swojej inwestycji bez wpadania w panikę, nie inwestuj na giełdzie.

Warren Buffett

- Jeśli chodzi o inwestowanie, pesymizm jest twoim przyjacielem, a euforia twoim wrogiem.

Warren Buffett

- Wall Street to jedyne miejsce, do którego przyjeżdżają ludzie w Rolls-Royce'ach po poradę do tych, którzy dojeżdżają tam metrem.

Warren Buffett

- Cztery najbardziej niebezpieczne słowa w inwestowaniu to: tym razem będzie inaczej.

Sir John Templeton

- W inwestowaniu to, co jest wygodne, rzadko jest opłacalne.

Robert Arnott

- Zainwestuj w siebie. Twoja kariera jest motorem napędowym twojego bogactwa.

Paul Clitheroe

- Wielu inwestorów popełnia błąd kupując szczyty i sprzedając dolki, podczas gdy dokładnie odwrotna strategia jest prawidłowa, aby zwyciężyć w perspektywie długoterminowej.

John Paulson

- Inwestowanie jest jak poker. Należy grać tylko wtedy, gdy ma się dobre karty i wychodzić z gry, gdy są one słabe, tracąc swoją stawkę.

Gary Biefeldt

- Jeśli przed inwestycją dokładnie nie analizujesz spółek, masz takie same szanse na sukces, jakbyś w pokerze nie zaglądał do kart.

Peter Lynch

- Jeśli dywersyfikujesz, kontrolujesz ryzyko i grasz z trendem, to po prostu musi działać.

Larry Hite

- Bank to takie miejsce, gdzie pożyczasz ci się pieniądze, ale tylko wtedy, gdy udowodnisz, że ich nie potrzebujesz.

Bob Hope

- Kukurydza potrzebuje dużo deszczu, a karczochy nie. Jeśli po jednej stronie drogi posadzisz kukurydzę, a po drugiej karczochy, zawsze coś zbierzesz, niezależnie od tego, jaka będzie pogoda.

Robert A. Haugen

- Nie wkładaj wszystkich jajek do jednego koszyka.

przysłowie angielskie

- Szeroka dywersyfikacja jest konieczna wtedy, gdy inwestorzy nie wiedzą, co czynią.

Warren Buffett

- W inwestowaniu nie chodzi o pobicie innych w ich grze. Chodzi o kontrolowanie siebie we własnej grze.

Benjamin Graham

- Nikt by nie pamiętał o dobrym Samarytaninie, gdyby miał tylko dobre intencje. By przejść do historii, musiał mieć też pieniądze.

Margaret Thatcher

- Pieniądze są po to, aby je wydawać. A zatem oszczędzanie jest marnotrawstwem.

Oscar Wilde

- Jeśli chcesz przekonać się, ile są warte pieniądze, to spróbuj je od kogoś pożyczyć.

Benjamin Franklin

- Biedni i klasa średnia pracują na pieniądze. U bogatych to pieniądze pracują na swoich właścicieli.

Robert Kiyosaki

- Ludzie ratują wartość pieniądza, ale nie umieją ratować wartości życia.
kard. Stefan Wyszyński
- Posiadanie pieniędzy jest lepsze od ich braku, przynajmniej z powodów finansowych.
Woody Allen
- Nie zależy mi na tym, by zostać najbogatszym człowiekiem na cmentarzu. Pójdź spać, mogąc powiedzieć, że zrobiło się coś cudownego – to jest dla mnie ważne.
Steve Jobs
- Celem naszego życia nie powinno być posiadanie bogactw, lecz bogactwo bycia.
Erich Fromm
- Jest tylko jeden sposób, który pozwoli ci utrzymać bogactwo: wydawaj mniej, niż zarabiasz, a różnicę inwestuj.
Ayn Rand
- Jeżeli jesteś w stanie policzyć swoje pieniądze, to nie jesteś bogaty.
J. Paul Getty
- Człowiek jest biedny nie dlatego, że nie ma pieniędzy, ale dlatego, że nie pracuje.
Monteskiusz
- Lepiej jest się i godzinę pomyśleć o swoich pieniądzach, niż przez tydzień na nie pracować.
Andre Kostolany
- Pieniądze rosną na gałęziach drzewa upor i wytrzymałości.
przysłowie japońskie
- Pieniądze nie kupią ci przyjaciół, ale przynajmniej wrogów będziesz mieć z wyższej półki.
Spike Milligan

- Bogactwo jest jak woda morska: im więcej pijesz, tym większe masz pragnienie.

Arthur Schopenhauer

- Nad perły, złoto, drogie kamienie, najwięcej cenię czyste sumienie.

Leszek Wierzhowski

- Pieniądze są tylko środkiem do tego, by móc przestać o nich myśleć.

Louis Aragon

- Bogatym nie jest ten, kto posiada, lecz ten, kto daje.

Jan Paweł II

- Pieniądze nie mają żadnego znaczenia, ale dopiero wtedy, kiedy je masz.

Michał Wawrzyniak

- Pieniądze ułatwiają znoszenie ubóstwa.

Alfons Allais

- W państwie rządzonej dobrze wstyd być biednym. W państwie rządzonej źle wstyd być bogatym.

Konfucjusz

- Dopóty wspaniale jest mieć pieniądze, dopóki nie zagubi się mądrości dostrzegania rzeczy, których nie można za nie kupić.

Salvador Dali

- Niektórzy ludzie są tak biedni, że mają tylko pieniądze.

Bob Marley

Spis rysunków

1.1	Wykres funkcji $f(r) = r - \ln(1 + r)$	15
1.2	Wartość narażona na ryzyko	26
1.3	Wykresy funkcji $G1, G2, A$	32
2.1	Zbiory portfeli dla różnych wartości współczynników korelacji . . .	38
2.2	Portfel o minimalnym ryzyku	42
2.3	Portfel o minimalnym ryzyku przy zadanej stopie zwrotu	43
2.4	Portfel o minimalnym ryzyku przy zastosowaniu krótkiej sprzedaży	45
2.5	Przykładowe zbiory dopuszczalnych rozwiązań przy różnych war- tościach oczekiwanych stóp zwrotu	47
2.6	Przykładowe elipsy dla wartości $\nu < 0$	48
2.7	Przykładowe elipsy dla wartości $\nu > 0$	49
2.8	Przykładowa elipsa dla wartości $\nu = 0$	49
2.9	Geometryczna interpretacja portfela z niezerową konsumpcją . . .	50
2.10	Geometryczna interpretacja portfela z zerową konsumpcją	51
2.11	Portfel efektywny przy współczynniku korelacji równym jeden, przy- padek $\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1 > 0$	55
2.12	Portfel efektywny przy współczynniku korelacji równym jeden, przy- padek $\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1 < 0$	56

2.13	Zbiór portfeli zawierających ustalony portfel akcji i walor wolny od ryzyka	61
2.14	Zbiór efektywnych portfeli zawierających portfel rynkowy i walor wolny od ryzyka	62
2.15	Zbiór wszystkich portfeli czteroskładnikowych bez możliwości krótkiej sprzedaży	65
2.16	Zbiór wszystkich portfeli czteroskładnikowych z możliwością stosowania krótkiej sprzedaży	65
2.17	Portfele efektywne przy różnych wartościach oczekiwanych stóp zwrotu i niezerowej stopie wolnej od ryzyka	77
2.18	Portfele efektywne przy różnych wartościach oczekiwanych stóp zwrotu i zerowej stopie wolnej od ryzyka	80
2.19	Linia <i>CML</i>	82
2.20	Linia <i>CML</i> przy różnych stopach dla pożyczkodawcy i pożyczkobiorcy	83
3.1	Linia <i>SML</i>	99
3.2	Linia <i>SML</i> oraz <i>CML</i>	100
3.3	Poszczególne etapy procedury Blacka–Littermana	115
3.4	Portfel optymalny według kryterium Roya	119
3.5	Portfele optymalne według kryterium Roya z uwzględnieniem stopy wolnej od ryzyka	121
3.6	Portfel optymalny według kryterium Telsera	122
3.7	Geometryczna interpretacja rozwiązania z przykładu 3.5	124
3.8	Portfel optymalny według kryterium Kataoki	125
3.9	Interpretacja wskaźnika Sharpe’a	127
3.10	Interpretacja wskaźnika Treynora	130
3.11	Interpretacja wskaźnika Omega	132

Bibliografia

- [1] Alexander C., Value at Risk Models, Market Risk Analysis, Vol. IV, Wiley, Chichester 2008.
- [2] Amal M.A., Laksito G.S., Sulaiman I.M., The Implementation of Roy's Safety-First Criterion in Stock Portfolio Selection, International Journal of Mathematics, Statistics and Computing, Vol. 2(1), 2024.
- [3] Bałamut T., Metody estymacji Value at Risk, Materiały i Studia, nr 147, Narodowy Bank Polski, Warszawa 2002.
- [4] Banaszczyk-Soroka U. (red.), Rynek papierów wartościowych, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa 2016.
- [5] Banaś J., Podstawy matematyki dla ekonomistów, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2007.
- [6] Bellalah M., Dammak F.A., International Capital Asset Pricing Model: the Case of Asymmetric Information and Short-Sale, Annals of Operations Research, Vol. 281, 2019.
- [7] Berger J.O., Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York 1985.
- [8] Bertsimas D., Gupta V., Paschalidis I. Ch., Inverse Optimization: A New Perspective on the Black-Litterman Model, Operations Research, Vol. 60, No. 6, 2012.

- [9] Black F., Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing, *Journal of Business*, Vol. 45, No. 3, 1972.
- [10] Black F., Litterman R., Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equilibrium, *The Journal of Fixed Income*, 1, 1991.
- [11] Black F., Litterman R., Global Asset Allocation with Equities, Bonds and Currencies, Goldman Sachs and Company, New York 1991.
- [12] Black F., Litterman R., Global Portfolio Optimization, *Financial Analysts Journal*, Vol. 48(5), 1992.
- [13] Bodnar T., Lindholm M., Niklasson V., Thorsén E., Bayesian Portfolio Selection Using VaR and CVaR, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 427, 2022.
- [14] Borowski K., Miary ryzyka na rynku akcji i obligacji, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2014.
- [15] Borowski K., Miary efektywności zarządzania na rynkach finansowych, Wydawnictwo Difin, Warszawa 2015.
- [16] Borowski K., *Finanse behawioralne. Modele*, Wydawnictwo Difin 2014.
- [17] Booth D.G., Fama E.F., Diversification Returns and Asset Contributions, *Financial Analysts Journal*, Vol. 48(3), 1992.
- [18] Blume M.E., Betas and Their Regression Tendencies, *Journal of Finance*, Vol. 30(3), 1975.
- [19] Brigham E., Gapenski L., *Zarządzanie finansami*, PWE, Warszawa 2000.
- [20] Brusa F., Ramadorai T., Verdelhan A., *The International CAPM Redux*, Saïd Business School, 2015.
- [21] Czekaj J., *Rynki, instrumenty i instytucje finansowe*, PWN, Warszawa 2008.
- [22] Czekaj J., Owsiak S., *Finanse w rozwoju gospodarczym i społecznym*, PWE, Warszawa 2014.
- [23] Czerwonka M., *Finanse behawioralne, główne założenia i nowe wyzwania*, Oficyna Wydawnicza SGH, 2023

- [24] Damodaran A., Ryzyko strategiczne, Podstawy zarządzania ryzykiem, Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, Warszawa 2009.
- [25] Depta A., The use of Blume and Vasicek methods in the estimation of beta coefficient in the single-index model, *Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica*, Vol. 194, 2005.
- [26] Dębski W., Feder-Sempach E.M., Wójcik S., Stabilność parametru beta dla największych spółek z rynku polskiego, niemieckiego i francuskiego – analiza porównawcza; *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, VOL.LI 5*, Lublin 2017.
- [27] Dębski W., Rynek finansowy i jego mechanizmy. Podstawy teorii i praktyki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [28] Dixon M.F., Halperin I., Bilokon P., *Machine Learning in Finance*, Springer International Publishing, New York 2020.
- [29] Dolde W., Giaccotto C., Mishra D.R., O'Brien T.J., Foreign Exchange Exposure and Cost of Equity for US Companies: Local Versus Global CAPM, *Journal of Applied Finance (Formerly Financial Practice and Education)*, 21, 2015.
- [30] Ejara D., Krapl A., O'Brien T.J., Ruiz de Vargas S., Local, global, and international CAPM: for which countries does model choice matter?, *Journal of Investment Management*, Vol. 18, No. 2, 2020.
- [31] Elton E.J., Gruber M.J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.
- [32] Ernstsson H., Liljesvan M.B., *The Black-Litterman Asset Allocation Model. An Empirical Analysis of Its Practical Use*, KTH Royal Institute of Technology School of Engineering Sciences, Stockholm, Sweden 2021.
- [33] Fernandez V., The international CAPM and a waveletbased decomposition of Value at Risk, *NBER Working Paper Series*, 2006.
- [34] Feder-Sempach E., Efekt interwału w oszacowaniach współczynnika beta na podstawie akcji spółek z indeksu WIG20 i DAX w okresie 2005-2015 - analiza

- porównawcza, *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, 325, 2017.
- [35] Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 1, PWN, Warszawa 1985.
 - [36] Firman S., Hasbullah E., Hidayat Y., Subiyanto S., Estimation of Beta-Adjusted Parameters in Capital Asset Pricing Model under Non-Constant Volatility, *Journal of Physics Conference Series*, 1179(1), 2019.
 - [37] Fuhrer A., Thorsten H., Uncertainty in the Black–Litterman model: Empirical estimation of the equilibrium, *Journal of Empirical Finance*, 72(2), 2023.
 - [38] Gray S., Hall J., The Vasicek adjustment to beta estimates in the Capital Asset Pricing Model, SFG Consulting Neil Diamond and Robert Brooks, Monash University, 2013.
 - [39] Grzenda W., *Wstęp do statystyki bayesowskiej*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2012.
 - [40] Guzik K. (red.), *Ryzyko i rentowność inwestycji finansowych i rzeczowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Kraków 2013.
 - [41] Hansen B., *Econometrics*, University of Wisconsin, 2018.
 - [42] Haugen A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa 1996.
 - [43] van Heerden C., Establishing the risk denominator in a Sharpe ratio framework for share selection from a momentum investment strategy approach, *South African Journal of Economic and Management Sciences*, Vol. 23, No.1, Pretoria 2020.
 - [44] Hirshleifer J., Investment decision under uncertainty: Choice-theoretic approaches. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 79. No. 4, 1965.
 - [45] Hull J.C., *Zarządzanie ryzykiem instytucji finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2014.
 - [46] Israelsen C.L., A Refinement to the Sharpe Ratio and Information Ratio, *Journal of Asset Management*, Vol 5, 2005.

- [47] Jacquier E., Kane A., Marcus A., Geometric Mean or Arithmetic Mean: A Re-consideration, *Financial Analysts Journal*, 59, 2003.
- [48] Jagannathan R., Ma T., Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps, *Journal of Finance*, 58 (4), 2003.
- [49] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, PWN, Warszawa 1998.
- [50] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje – instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa 2005.
- [51] Jajuga K. (red.), *Zarządzanie ryzykiem*, PWN, Warszawa 2007.
- [52] Jajuga K., Równowaga rynku kapitałowego – pół wieku historii rodziny CAPM, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, nr 63, 2013.
- [53] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje –instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa 2015.
- [54] Jakubowski J., *Modelowanie rynków finansowych*, Wydawnictwo Script, Warszawa 2006.
- [55] Janas K., Porównanie metod kalkulacji współczynnika beta dla modelu CAPM, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego*, nr 855, *Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, nr 74, t. 1, 2015.
- [56] Jean W.H., Helms W.P., Geometric Mean Approximations, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18, No. 3, 1983.
- [57] Jiang Zhenlong, Ran Ji, Kuo-Chu Chang, A Machine Learning Integrated Portfolio Rebalance Framework with Risk- Aversion Adjustment. *Journal of Risk and Financial Management*, 13 (7), 2020.
- [58] Jorion P., *Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill, New York 2005.
- [59] Jorion P., *Value at Risk. The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, 2007.

- [60] Jorion P., *Financial Risk Manager Handbook*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2011.
- [61] Jurlewicz T., Skoczylas Z., *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2016.
- [62] Kahneman D., Tversky A., Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica*, Vol. 47, No. 2 , 1979.
- [63] Kapsos M., Zymler S., Christofides N., Rustem B., Optimizing the Omega Ratio using Linear Programming (PDF), *Journal of Computational Finance*, Vol. 17, No. 4, 2014.
- [64] Karczmarek T.T., *Zarządzanie ryzykiem. Ujęcie interdyscyplinarne*, Difin, Warszawa 2010.
- [65] Karpio A., Żebrowska-Suchodolska D., Efektywność inwestycyjna polskich funduszy emerytalnych przy zmianie benchmarku rynkowego, *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Lublin*, Vol. LI, 5, 2017.
- [66] Kaszuba B., Praktyczne problemy w teorii portfela, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, nr 174, 2011.
- [67] Kataoka S., A Stochastic Programming Model, *Econometrica*, Vol. 31, No. 1/2, 1963.
- [68] Keating C., Shadwick W.F., A Universal Performance Measure, *The Finance Development Centre*, London 2002.
- [69] Kim, Y., Enke D., A Dynamic Target Volatility Strategy for Asset Allocation Using Artificial Neural Networks. *The Engineering Economist* 63 (4), 2018.
- [70] Klein P.J., *Wstęp do analizy papierów wartościowych*, Liber, Warszawa 1999.
- [71] Knight F.H., *Risk, Uncertainty and Profit*, University of Illinois at Urbana-Champaign's Academy for Entrepreneurial Leadership Historical Research Reference in Entrepreneurship, 1921.

- [72] Kolbadi P., Ahmadinia H., Examining Sharp, Sortino and Sterling Ratios in Portfolio Management, Evidence from Tehran Stock Exchange, *International Journal of Business and Management*, 6(4), 2011.
- [73] Koszela G., Analiza geometryczna zależności między ryzykiem a zyskiem w dwuskładnikowym portfelu akcji, [w:] *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – II*, red. nauk.: B. Borkowski, A. Orłowski, SGGW, Warszawa 2001.
- [74] Kryszicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, część 2, statystyka matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [75] Kurowski L., *Ocena projektów gospodarczych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2004.
- [76] Lapina M., Orłowska M., Sakowski P., Wieteska D., *Teoria portfelowa Markowitza i modele czynnikowe w strategiach inwestycyjnych*, Wydawnictwo Naukowe ArchaeGraph, Łódź - Kielce 2021.
- [77] Lee M.D., Wagenmakers E.J., *Bayesian Modeling for Cognitive Science: A Practical Course*. Cambridge University Press, 2013.
- [78] Leippold M., Value-at-Risk and Other Risk Measures, 2015. Dostępny w SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2579256>.
- [79] Levy R.A., Beta Coefficient as Predictors of Return, *Financial Analysts Journal*, 30(1), 1974.
- [80] Levy H., Sarnat M., *Capital Investment Financial Decisions*, Fifth Edition, Prentice Hall, 1994.
- [81] Lintner J., The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1, 1965.

- [82] LI Fangbo, WU Huiling, Yao Haixiang, Multi-Period Telser's Safety-First Portfolio Selection Problem in a Defined Contribution Pension Plan, *Journal of Systems Science and Complexity*, Vol. 36, 2023.
- [83] Lisi F., Testing asymmetry in financial time series, *Quantitative Finance*, Vol. 7, 2007.
- [84] Lisicki B., Poziomy współczynnika beta spółek indeksu RESPECT oszacowane w warunkach zróżnicowanego podejścia do stopy zwrotu, *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, nr 382, 2019.
- [85] Maddala G.S., *Ekonometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.
- [86] Manurung A.H, Manurung A., Machdar N.M, Sijabat J., Stock Selection Using Semi-Variance and Beta to Construct Portfolio and Effect Macro-Variable on Portfolio Return, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, Vol 15, No.1, 2024.
- [87] Markowitz H., Portfolio selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7, 1952.
- [88] Markowitz H., Portfolio selection. Efficient diversification of investments, John Wiley & Sons, New York 1959.
- [89] Maselewska M., Ocena wskaźnikowa efektywności inwestowania w fundusze inwestycyjne o różnych strategiach w okresie bessy 2007, *Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania*, nr 10, 2008.
- [90] Michaud R.O., *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, Oxford University Press, New York 2008.
- [91] Morgan J.P., RiskMetricsTM – Technical Document, J.P.Morgan/Reuters, New York 1996.
- [92] Moh Alfı Amal , Grida Saktian Laksito, Ibrahim Mohammed Sulaiman, The Implementation of Roy's Safety-First Criterion in Stock Portfolio Selection, *International Journal of Mathematics, Statistics and Computing*, Vol. 2(1), 2024.

- [93] Mossin J., Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, 1966.
- [94] Mościbrodzka M., Żukowska J., Przydatność wybranych metod oceny papierów wartościowych, *Przedsiębiorstwo i Finanse*, nr 3, 2013.
- [95] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press 2005.
- [96] Nowak E., *Zarys metod ekonometrii. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011.
- [97] Ormaniec T., Możliwość osiągnięcia ponadprzeciętnych stóp zwrotu na podstawie informacji o sprzedaży oraz umorzeniach jednostek uczestnictwa w otwartych funduszach inwestycyjnych, *Studia i Prace Kolegium Zarządzania i Finansów, Szkoła Główna Handlowa*, nr 173, 2019.
- [98] Ostrowska E., *Portfel inwestycyjny klasyczny i alternatywny. Metody oceny*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2014.
- [99] Otto E., *Krzywe stożkowe*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1971.
- [100] Pekar J., Brezina I., Cickova Z., Reiff M., Portfolio Selection by Maximizing Omega Function using Differential Evolution, *Technology and Investment*, Vol. 4, No. 1B, 2013.
- [101] Pera K., Buła R., Mitrenga D., *Modele inwestycyjne*, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa 2014.
- [102] Prigent J.L., Toumi S., Portfolio Management with Safety Criteria in Complete Financial Markets, *International Journal of Business*, 10(3), 2005.
- [103] Reilly F.K., Brown K.C., *Analiza inwestycji i zarządzania portfelem*, PWE, Warszawa 2001.
- [104] Rockafellar R.T., Uryasev S., Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26(7), 2002.

- [105] Ross S.A., The arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, 1976.
- [106] Roy, A.D., Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica*, Vol. 20, No. 3, 1952.
- [107] Rzymowski W., Surowiec A., Practical aspects of Markowitz theory application for portfolio analysis, *Actual Problem of Economics*, No. 8(170), 2015.
- [108] Satchell S., Scowcroft A., A demystification of the Black–Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction, *Journal of Asset Management*, Vol. 1(2), 2000.
- [109] Sharpe W., Capital asset prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, 1964.
- [110] van de Schoot R., Depaoli S., King R., Kramer B., Märten K., Tadesse M.G., Vannucci M., Gelman A., Veen D., Willemsen J., Yau Ch., Bayesian statistics and modelling, *Nature Reviews Methods Primers*, Vol. 1(1), 2021.
- [111] Sobczyk M., *Statystyka matematyczna*, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa 2010.
- [112] Sobczyk M., *Ekonometria*, Wydawnictwo C.H.Beck, Warszawa 2013.
- [113] Solnik B., An Equilibrium Model of the International Capital Market, *Journal of Economic Theory*, Vol. 8(4), 1974.
- [114] Surowiec A., Warowny T., Covid-19 Death Risk Estimation Using VaR Method, *European Research Studies Journal*, vol. 24, Special Issue 2, 2021.
- [115] Stoilov T., Stoilova K., Vladimirov M., Application of modified Black–Litterman model for active portfolio management, *Expert Systems with Application*, Vol. 186, 2021.
- [116] Szrama M., *Instrumenty rynku finansowego*, Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa 2010.
- [117] Tarczyński W., Witkowska D., Kompa K., Współczynnik beta. Teoria i praktyka, Pielaszek Research, Warszawa 2013.

- [118] Telser L.G., Safety first and hedging, *Review of Economic Studies*, Vol. 23(1), 1955.
- [119] Teplova T., Mikova E., Munir Q., Pivnitskaya N., Black-Litterman model with copula-based views in mean-CVaR portfolio optimization framework with weight constraints, *Economic Change and Restructuring*, Vol. 56, 2022.
- [120] Tsay R., *Analysis of Financial Time Series*, Wiley & Sons, 2010.
- [121] Tymiński J., Teoretyczne i praktyczne aspekty koncepcji wartości zagrożonej, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, nr 51, 2012.
- [122] Vasicek O.A., A Note on Using Cross-Sectional Information in Bayesian Estimation of Security Betas, *Journal of Finance*, Vol. 28, No. 5, 1973.
- [123] Wang H., Zhou X.Y., Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection: A Reinforcement Learning Framework, *Mathematical Finance*, 30(4), 2020.
- [124] Wang Z., A shrinkage approach to model uncertainty and asset allocation, *The Review of Financial Studies*, Vol. 18, No. 2, 2005.
- [125] Welch I., Simpler better market betas, *National Bureau of Economic Research*, Working Paper No. 26105, 2019.
- [126] Welfe A., *Ekonometria*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2022.
- [127] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwo WNT, Warszawa 2022.
- [128] Zaleśkiewicz T., *Psychologia inwestora giełdowego: wprowadzenie do behawioralnych finansów*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2003.
- [129] Żukowski M., Optymalny dobór wag akcji w portfelu dzięki analizie premii za ryzyko specyficzne, *Współczesne Finanse. Teoria i Praktyka*, nr 1, 2017.

Strony internetowe

- [130] Abdelhakmi A., Lim A., A Multi-Period Black–Litterman Model, dostęp 11.06.2024, arXiv:2404.18822 [q-fin.PM], 29 Apr 2024.
- [131] Adjusted Beta, A historical beta adjusted to reflect the tendency of beta to be mean-reverting, CFI Team, dostęp 17.10.2023, <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/valuation/adjusted-beta/>.
- [132] Co to jest dostosowana beta?, Przewodniki finansowe, dostęp 17.09.2023, <https://pl.livingeconomyadvisors.com/2489-what-is-adjusted-beta>.
- [133] Czym jest sprzedaż krótka i na czym właściwie polega?, akcje.pl, dostęp 17.09.2023, <https://www.akcje.pl/sprzedaz-krotka>.
- [134] Damodaran A., Estimating Risk Parameters, Faculty Digital Archive, dostęp 20.09.2023, <https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/pdfiles/papers/beta.pdf>.
- [135] Idzorek T.M., Step-by-step guide to the Black–Litterman model, Incorporating user-specified confidence levels, 2004, dostęp 13.05.2024, <https://ssrn.com/abstract=3479867>.
- [136] Jaka jest różnica pomiędzy instrumentem finansowym a papierem wartościowym?, Polskie Doradztwo Majątkowe, dostęp 17.09.2023, <https://www.pdm.com.pl/pytanie-46-jaka-jest-roznica-pomiedzy-instrumentem-finansowym-a-papierem-wartosciowym/>.
- [137] Krótka sprzedaż akcji. Na czym polega?, TIM, Relacje inwestorskie, dostęp 17.09.2023, <https://www.timsa.pl/krotka-sprzedaz-akcji-na-czym-polega/>.
- [138] Mormul P., Baryło M., Analiza portfelowa i rynki kapitałowe, Uniwersytet Warszawski, Wersja internetowa wykładu, dostęp 22.05.2024, <http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=pk1>, 2012.
- [139] Meucci A., The Black–Litterman Approach: Original Model and Extensions, SSRN, dostęp 03.09.2023, <http://ssrn.com/abstract=1117574>.

- [140] Mindlin D., On the Relationship between Arithmetic and Geometric Returns (August 14, 2011), dostęp 15.04.2024, <https://ssrn.com/abstract=2083915>.
- [141] Ocena dochodu i ryzyka inwestycji, elementy zarządzania portfelem inwestycyjnym, Orlen w portfelu, dostęp 19.09.2023, <https://www.orlenwportfelu.pl/akademia/download/rozdzial-6-podstawowy.pdf>.
- [142] O relacji między arytmetyczną a geometryczną średnią stopą zwrotu, Geldowy Racjonalista, dostęp 17.09.2023, <https://gielowyracjonalista.blogspot.com/2015/09/o-relacji-miedzy-arytmetyczna.html>.
- [143] Treynor J.L., Jack Treynor's 'Toward a Theory of Market Value of Risky Assets', 1962, SSRN, dostęp 23.09.2023, <http://ssrn.com/abstract=628187>.
- [144] Wskaźnik-beta, FinancialCraft. Analitics & Accounting, dostęp 17.09.2023, <https://financialcraft.pl/wskaznik-beta/>.
- [145] Współczynnik beta – podział na spółki defensywne i ofensywne jest bardzo płynny, Stockbroker, dostęp 17.09.2023, <https://stockbroker.pl/wspolczynnik-beta-spolki-defensywne/>.
- [146] Współczynnik beta – obliczenie, interpretacja, wady, Poznaj rynek, dostęp 08.09.2023, <https://poznajrynek.pl/wspolczynnik-beta-obliczenie-interpretacja-wady/>.
- [147] Zhao F., Portfolio Construction Using Black-Litterman Model and Factors, dostęp 20.03.2024, arXiv:2311.04475v1 [q-fin.PM], 8 Nov 2023.