POLITECHNIKA LUBELSKA

Я.М. Чабанюк, А.В. Нікітін, У.Т. Хімка

Асимптотичні властивості еволюційних систем з марковськими переключеннями з використанням апроксимаційних схем

MONOGRAFIE

Lublin 2018

Асимптотичні властивості еволюційних систем з марковськими переключеннями з використанням апроксимаційних схем

Monografie – Politechnika Lubelska

10 LAT

2008-2018

Wydziału Podstaw Techniki

Politechnika Lubelska
Wydział Podstaw Techniki
ul. Nadbystrzycka 38
20-618 Lublin

Я.М. Чабанюк, А.В. Нікітін, У.Т. Хімка

Асимптотичні властивості еволюційних систем з марковськими переключеннями з використанням апроксимаційних схем

Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
Lublin 2018

Recenzenci:
prof. dr hab. Bohdan Kopytko, Politechnika Częstochowska

Publikacja wydana za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

ISBN: 978-83-7947-326-7

Wydawca: Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej
www.biblioteka.pollub.pl/wydawnictwa
ul. Nadbystrzycka 36C, 20-618 Lublin
tel. (81) 538-46-59

Druk: TOP Agencja Reklamowa Agnieszka Łuczak
www.agencjatop.pl

Elektroniczna wersja książki dostępna w Bibliotece Cyfrowej PL www.bc.pollub.pl
Nakład: 60 egz.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

N – множина всіх натуральних чисел;
R – множина всіх дійсних чисел;
(Ω, F, P) – ймовірнісний простір;
(Ω, F_t, F, P) – фільтрований ймовірнісний простір;
$(X, \boldsymbol{X})$ – фазовий вимірний простір;
$\boldsymbol{B}(X)$ – банаховий простір дійснозначних обмежених функцій з супремум нормою;
τ_n – моменти відновлення;
$\tilde{\nu}(dt, du)$ – центрована пуассонова міра;
$x_n, n \geq 0,$ – вкладений ланцюг Маркова;
$x(t), t \geq 0$ – марковський процес;
$P(x, B), B \in \boldsymbol{X},$ – перехідні ймовірності ланцюга Маркова;
$G_x(t)$ – функція розподілу часу θ_x перебування в стані x;
$\rho(B)$ – стаціонарний розподіл ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$;
$\pi(B)$ – стаціонарний розподіл марковського процесу $x(t)$;
$\boldsymbol{P}$ – оператор, породжений стохастичним ядром $P(x, B)$;
Q – генератор марковського процесу $x(t), t \geq 0$;
R_0 – потенціал генератора Q;
N_Q – нуль-простір оператора Q;
R_Q – область значень оператора Q;
$B(X) = N_Q \oplus R_Q$;
$\mu(t)$ – дійснозначний мартингал;
$< \mu(t) >$ – характеристика $\mu(t)$;
$C^k(X)$ – простір k разів неперервно диференційованих обмежених на X функцій;
$\equiv$ – рівність за означенням;
$a \wedge B$ – менше з чисел a та b;
$E[\cdot]$ – математичне сподівання $[\cdot]$;
$o(\varepsilon)$ – числова функція: $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0, \varepsilon \to 0$
$O(\varepsilon)$ – числова функція: $O(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0$
СДР – стохастичне диференціальне рівняння;
СДРР – стохастичне диференціально-різницеве рівняння;
ВЛМ – вкладений ланцюг Маркова;
МП – марковський процес;
ІПЗ – імпульсний процес збурень;
ПСА – процедура стохастичної апроксимації;
СМП – стрибковий марковський процес;
ЛМ – ланцюг Маркова;
ФПС – фазовий простір станів.

ВСТУП

Системний аналіз спрямований на розв'язання складних проблем, які представляються у вигляді цілеспрямованих систем. Складну систему слід розглядати і як єдине ціле і як таку, що складається з частин. При цьому багато якісних властивостей системи, які не спостерігаються в її окремих компонентах, виникають саме внаслідок взаємодії цих складових. Теорія складних систем спирається на методи системного аналізу як на прикладну наукову методологію, що складається, зокрема, з математичних методів, алгоритмічних програмних та обчислювальних засобів, що забезпечують формування цілісних знань про досліджуваний об'єкт як про сукупність взаємопов'язаних процесів різної природи для подальшого прийняття рішень щодо його розвитку та поведінки з урахуванням конфліктуючих критеріїв, наявності факторів ризику та недостовірної інформації [14]. Метою застосування системного аналізу є підвищення ступеню обгрунтованості рішення, що приймається. Завдяки застосуванню методів системного аналізу, теорія складних систем постійно розвивається і сприяє розробці методів структурування, моделювання, стійкості, аналізу та синтезу детермінованих і стохастичних систем в задачах функціонального аналізу, теорії ймовірностей та випадкових процесів, математичних проблем інших дисциплін, зокрема, біології, соціології, екології, економіки та медицини. Основною причиною, що об'єднує ці найрізноманітніші математичні та природничі науки в єдину дисципліну є близькість та спорідненість законів та методів дослідження колективної поведінки таких складних систем.

Математичні задачі для теорії складних систем, стосуються розробки математично обґрунтованих методів спрощення систем (див., наприклад [23]), які можуть бути занадто складними навіть для комп'ютерного аналізу. При цьому спрощена система має бути такою, щоб по-перше її локальні характеристики визначались достатньо простими функціоналами від локальних характеристик вихідної системи, а по-друге щоб спрощену модель можна було б якісно аналізувати математичними методами і при цьому її глобальні характеристики були ефективним наближенням відповідних характеристик оригінальної системи.

Типовими прикладами складних систем є стохастичні диференціальні рівняння, які зокрема моделюються із застосуванням випадкових еволюцій та випадкових процесів. Розглянуті у монографії стохастичні еволюційні системи з неперервним та імпульсним впливом описують різноманітні моделі в теорії систем обслуговування, а саме мережеві структури, виробничі системи, застосовуються при моделюванні систем поширення інформації та протидії інформаційним впливам, процесів народження-загибелі в екологічних та біологічних системах, а також в моделях статистичної фізики та квантової механіки. Стохастичні еволюційні системи моделюють задачі, що виникають в теорії надійності, теорії керування, фінансовій математиці тощо.

У монографії проведено системний аналіз асимптотичних властивостей еволюційних моделей, які описані стохастичними диференціальними рівняннями, вони розглянуті та досліджені з різних точок зору, із застосуванням кількох апроксимаційних схем. А саме, проаналізовано питання побудови граничного генератора та асимптотичної дисипативності еволюційних систем в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві; проаналізовано умови слабкої збіжності дифузійного процесу переносу з марковськими переключеннями та керуванням з точкою рівноваги функції критерію якості, для якої побудована процедура стохастичної апроксимації в схемі серій.

Розвиток теорії випадкових еволюцій починається в кінці 60-х років XX сторіччя, імовірно, з роботи Р. Грієго та Р. Херша. Вони ввели поняття випадкової еволюції в статті [90]. Прикладні застосування подібної моделі випливають з робіт Р.З. Хасьмінського [35, 36], які стимулювалися проблемами стійкості стохастичних систем.

В 60-70-х роках задачі, пов'язані з теорією випадкових еволюцій активно досліджуються американськими математиками Р. Хершем, М. Пінським, Г. Папаніколау, Т. Куртцем , Р. Грієго, Л. Горостізею [70, 71, 90–95, 106, 107, 120-129], та ін. Зокрема, Д. Струк, С. Варадан запропонували мартингальний підхід для доведення граничних теорем [138] із використанням методів, подібних до розв'язання проблеми сингулярного збурення.

Ефективним засобом доведення граничних теорем в теорії випадкових еволюцій є розроблена В.С. Королюком і А.Ф. Турбіним теорія фазового укрупнення складних систем [23]. Основна ідея фазового укрупнення систем полягає у побудові укрупненої системи, яка спрощено описує вихідну, при цьому з достатньою точністю характеризує поведінку такої реальної системи. Процес побудови укрупненої системи здійнюється так: фазовий простір реальної системи розщеплюється на неперетинні класи. Потім стани кожного класу укрупнюються (склеюються, об'єднуються) в один стан. І нарешті, в новому укрупненому фазовому просторі будується укрупнена система, функціонування якої спрощено, але в певному сенсі досить точно описує функціонування вихідної реальної системи.

Й.І. Гіхман та А.В. Скороход [10, 11, 33, 136, 137] розробили теорію стохастичних диференціальних рівнянь та їх асимптотичного аналізу, В.Є. Шапіро і В.М. Логінов [41] дослідили кілька важливих задач теорії динамічних систем, описуваних стохастичними диференціальними рівняннями. Проблему стійкості динамічних систем при випадковому збуренні їх параметрів досліджували Р.З. Хасьмінський [35], Є.Ф. Царьков [37], В.С. Королюк [30]. В.С. Королюк і А.В. Свіщук також розвивали теорію напівмарковських випадкових еволюцій, спираючись на теорію мартингалів. Багато застосувань процесів з перемиканнями до аналізу мережевих систем можна знайти в роботах В.В. Анісімова [47].

Методи дослідження асимптотичних властивостей, які використовуються у монографії, описано в роботі В.С. Королюка та Н. Лімніоса [7]. В монографії ці методи застосовуються, в основному, до моделей в схемах усереднення та дифузійної апроксимації. При цьому на зростаючих інтервалах часу схема усереднення демонструє детерміновану усереднену поведінку системи, а схема дифузійної апроксимації – стохастичні флуктуації навколо детермінованої усередненої траєкторії. Ці дві схеми відрізняються нормуванням перемикаючого процесу, а саме, у випадку схеми усереднення розглядається прискорення часу параметром ε^{-1}, натомість у випадку дифузійної апроксимації – параметром ε^{-2}. Важливим елементом алгоритму є припущення про ергодичність перемикаючого процесу.

В монографії В.С. Королюка та Н. Лімніоса [7] розглянуто також кілька моделей для стохастичних еволюцій з урахуванням імпульсних впливів в схемах пуассонової апроксимації і апроксимації Леві.

У нашій монографії також представлено інший важливий напрямок досліджень, а саме,дослідження дисипативності випадкових еволюцій в умовах апроксимації Леві та Пуассона.

Дисипативність як властивість детермінованих систем та систем з випадковими збуреннями широко розглядалася в літературі. Поняття дисипативної системи запозичене з фізики – це система, яка втрачає частину енергії, отриманої іззовні. В роботі [36] подається означення дисипативності детермінованої системи виду

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t),$$

де X — $n-$вимірний вектор, а вектор-функція F визначена, неперервна, періодична з періодом ω і задовольняє умові єдиності розв'язків вихідної системи при всіх X, t.

Р.З. Хасмінським було встановлено умови дисипативності детермінованої системи, яка задається розв'язком диференціального рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t),$$

де $F(x,t)$ — вимірна за Борелем функція змінних (x,t) при $(x,t) \in E$, для якої мають місце умови при будь-якому $R > 0$

$\mid F(x,t) \mid \leq M_R(t)$,

$\mid F(x_2,t) - F(x_1,t) \mid \leq B_R(t) \mid x_2 - x_1 \mid$,

при $x_2, x_1 \in U_R$, де $M_R(t) \in \mathbf{J}$ та $B_R(t) \in \mathbf{J}$.

А саме, система дисипативна, якщо існує невід'ємна функція Ляпунова $V(x,t) \in \mathbf{C}$ на E, яка задовольняє умовам

$$V_R = \inf_{(x,t)\in \overline{U}_R \times I} V(x,t) \to \infty, \qquad R \to \infty,$$

$$\frac{d^0V}{dt} < -cV, \qquad (c = const > 0).$$

Згодом властивість дисипативності почала вивчатися для процесів з випадковими елементами. В роботах Хасьмінського Р.З. [35], [36] розглянуто лінійні системи з випадковою складовою. Умови дисипативності таких систем встановлюються з використанням властивостей невід'ємної функції Ляпунова зрізаної системи.

У більш загальному випадку, система

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t, \xi(t, \omega))$$

називається дисипативною, якщо випадкові величини $|X(t, \omega)|$ обмежені за ймовірністю рівномірно по $t \geq t_0$ та рівномірно по $x_0(\omega)$ з виконанням умови $P\{|x_0(\omega)| < k\} = 1$ при деякому $k < \infty$. Тут $X(t, \omega)$ – випадковий процес, визначений і неперервний з імовірністю одиниця при всіх $t \geq t_0$, який задовольняє рівнянню

$$X(t, \omega) - x_0(\omega) = \int_{t_0}^{t} G(X(s, \omega), s, \xi(s, \omega))ds.$$

У монографії проведено аналіз асимптотичної дисипативності стохастичних диференціальних рівнянь з імпульсними впливами в умовах некласичних схем апроксимацій – Леві та Пуассона.

Ще одним важлим напрямком даного дослідження є встановлення умов слабкої збіжності дифузійного процесу переносу з марковськими переключеннями та керуванням з точкою рівноваги функції критерію якості, для якої побудована процедура стохастичної апроксимації в схемі серій. Також за даних умов будується нормований процес та встановлюється його асимптотичну нормальність у вигляді процесу Орнштейна-Уленбека у випадку, коли процес переносу змінюється під впливом марковського переключення по траєкторії нової еволюції зі стану, в якому вона була у момент переключення.

Розв'язання проблеми асимптотичних властивостей нормованого керування з марковськими переключеннями в умовах процедури стохастичної апроксимації э ще одним важливим напрямком досліджень монографії. Процедура стохастичної апроксимації була введена в роботі Робінса-Монро і досліджена у монографії Невельсона та Хасьмінського [1]. У 1952 році Кіфер і Вольфовіц, взявши за основу ідею стохастичної апроксимації Робінса-Монро, розглянули задачу про знаходження максимуму невідомої функції. Задача полягає у знаходженні точки максимуму x_0 функції $f(x)$, тобто, у розв'язанні рівняння $f'(x) = 0$. У цьому випадку застосувати процедуру Робінса-Монро неможливо, бо, оскільки похибки вимірювання функції $f(x)$ у різних точках незалежні, то при спробі обчислення похідної $f'(x)$ за результатами вимірювання похибка стає нескінченно великою. Ідея методу Кіфера-Вольфовіца полягає в тому, щоб обчислювати наближені значення похідної, покладаючи для приросту аргументу $\Delta x = 2c(t) \to 0$ при $t \to \infty$ та одночасно "вповільнювати"рух $X(t)$ до x_0, роблячи параметр a залежним від часу. При цьому функція $a = a(t)$ повинна бути вибрана таким чином, щоб, по-перше, послідовність $X(t)$ не зупинилась надто рано, а, по-друге, щоб погасити вплив випадкових перешкод. У монографії продовжено цей напрямок досліджень і вивчено питання побудови нормованого керування з єдиною точкою рівноваги критерію якості дифузійного процесу переносу в умовах процедури стохастичної апроксимації. Подібна постановка задачі є абсолютно новою і дозволяє отримувати деякі суттєві узагальнення.

Вклад співавторів монографії розподілено так:

- Розділ 1: підрозділи 1.1 та 1.2 написані Чабанюком Я.М., підрозділ 1.3 – Нікітіним А.В., підрозділ 1.4 – Нікітіним А.В. та Хімкою У.Т;
- Розділ 2: підрозділи 2.1, 2.3, 2.4 та 2.6 написані Нікітіним А.В., підрозділи 2.2 та 2.5 – Нікітіним А.В. та Чабанюком Я.М.;
- Розділи 3 та 4 написані Чабанюком Я.М.;
- Розділ 5 написаний Хімкою У.Т.

Автори вдячні докторові фізико-математичних наук Самойленку І.В. за консультації та цінні поради при написанні розділу 2.

РОЗДІЛ I
СТІЙКІСТЬ ТА КЕРУВАННЯ У СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМАХ З ВИКОРИСТАННЯМ СХЕМ УСЕРЕДНЕННЯ ТА ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

1.1. Стійкість стохастичних систем в схемі усереднення

В цьому підрозділі аналіз стійкості динамічної системи з напівмарковськими перемиканнями реалізується з використанням компенсуючого оператора напівмарковського процесу. Проблема стійкості напівмарковської стохастичної системи фактично зводиться до аналогічної проблеми з марковськими перемиканнями.

Вихідна динамічна автономна система з напівмарковськими перемиканнями у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon > 0$ задається еволюційним диференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t)/dt = C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)), u^\varepsilon(0) = u_0, \tag{1.1}$$

в евклідовому просторі $R^d : u^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon_k(t); k = \overline{1,d})$. Швидкості динамічної системи задані вектором-функцією $C(u,x) = (C_k(u,x), k = \overline{1,d})$, і задовольняють умовам існування глобальних розв'язків детермінованих систем

$$\frac{du^\varepsilon_x(t)}{dt} = C(u^\varepsilon_x(t), x), x \in X, \tag{1.2}$$

залежить від фазового стану $x \in X$, де x - напівмарковський процес у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$. Усереднена динамічна система визначається розв'язком еволюційного детермінованого рівняння

$$d\widehat{u}(t)/dt = C(\widehat{u}(t)), \widehat{u}(t) = u_0. \tag{1.3}$$

Усереднена швидкість задається рівністю

$$C(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x). \tag{1.4}$$

Задача полягає в тому, щоб в умовах стійкості усередненої системи (1.3) встановити додаткові умови, що забезпечують стійкість вихідної стохастичної системи (1.1) при достатньо малих значеннях параметра серії $\varepsilon > 0$.

Теорема 1.1.1. *Припустимо, що для усередненої динамічної системи (1.3)-(1.4) існує функція Ляпунова $V(u), u \in R^d$, для якої виконуються такі умови:*

$C1$: *умова експоненційної стійкості*

$$C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0;$$

додаткові умови

$C2 : |C(u,x)V'(u)| \leq c_1 V(u);$

$C3 : |C(u,x)[C(u,x)V'(u)]'| \leq c_2 V(u);$

$C4$: *функції розподілу* $G_x(t), t \geq 0, x \in X$, *часів перебування в станах напівмарковського процесу* $x(t), t \geq 0$, *задовольняють умові Крамера, рівномірно по* $x \in X$,

$$\sup_{x \in X} \int\limits_0^{\infty} e^{ht} \overline{G}_x(t) dt \leq H < +\infty, h > 0,$$

$C5$: *а також мають місце оцінки:*

$$0 < \underline{m} \leq g(x) \leq \overline{m} < +\infty.$$

Тоді для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 – *достатньо мале, розв'язок еволюційного рівняння (1.1) при всіх початкових умовах* $|u^{\varepsilon}(0)| \leq u^*$, u^* – *достатньо малому, є асимптотично стійким із ймовірністю одиниця:*

$$P\{\lim_{t \to \infty} \|u^{\varepsilon}(t)\| = 0\} = 1. \tag{1.5}$$

При випадкових початкових даних виконується умова $|Eu^{\varepsilon}(0)| \leq u^*$, u^* – достатньо мале.

Розширений процес марковського відновлення (ПМВ) задається послідовністю

$$u_n^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}), x_n^{\varepsilon} = x(\tau_n^{\varepsilon}), \tau_n^{\varepsilon} = \varepsilon \tau_n, n \geq 0. \tag{1.6}$$

Означення 1.1.1. *Компенсуючий оператор розширеного ПМВ (1.6) визначається співвідношенням*

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon} \varphi(u,x) := \varepsilon^{-1} q(x) E[\varphi(u_{n+1}^{\varepsilon}, x_{n+1}^{\varepsilon},) - \varphi(u,x)|$$

$$u_n^{\varepsilon} = u, x_n^{\varepsilon} = x, \tau_n^{\varepsilon} = t] \tag{1.7}$$

Нехай сукупність напівгруп $\boldsymbol{C}_t(x), t \geq 0, x \in X$, породжується супроводжуючою системою (1.2), тобто визначається генератором

$$\boldsymbol{C}(x)\varphi(u) = C(u,x)\varphi'(u). \tag{1.8}$$

Лема 1.1.1. *Компенсуючий оператор розширеного ПМВ (1.6) має аналітичне представлення*

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon} \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} q(x) [\int\limits_0^{\infty} G_x(ds) \boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x) \int\limits_X P(x,dy) \varphi(u,y) - \varphi(u,x)].$$

Доведення. Обчислимо спочатку умовне математичне сподівання, використовуючи напівгрупи $\boldsymbol{C}_t(x)$. Оскільки напівгрупи $\boldsymbol{C}_t(x)$ на банаховому просторі $C(R^d)$ неперервних дійснозначних функцій $\varphi(u), u \in R^d$, з супремум нормою визначаються співвідношенням

$$\boldsymbol{C}_{t'}(x) := \varphi(u(t+t')),$$

то при $t' = \theta_x^\varepsilon = \varepsilon\theta_x$, маємо

$$\boldsymbol{C}_{\theta_x^\varepsilon}(x)\varphi(u) = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon),$$

тобто

$$\boldsymbol{C}_{\varepsilon\theta_x}(x)\varphi(u) = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon).$$

Враховуючи останнє, для умовного математичного сподівання маємо

$$E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon)|u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] = E_{u,x,t}\boldsymbol{C}_{\varepsilon\theta_x}(x)\varphi(u).$$

Враховуючи представлення напівмарковського ядра

$$Q(x, dy, dt) = G_x(dt)P(x, dy),$$

остаточно отримуємо

$$E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon)|u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] =$$

$$= E_{u,x,t}\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) =$$

$$= \int_0^\infty G_x(ds)\boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x)\int_X P(x, dy)\varphi(u, y).$$

Підставляючи останнє представлення в (1.7), отримуємо твердження леми.

Лема 1.1.2. *Компенсуючий оператор на тест-функціях* $\varphi(u, x) \in C^2(R^d \times X)$ *має асимптотичні представлення*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon\varphi(u, x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u, x) + \theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x), \tag{1.8}$$

а також

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon\varphi(u, x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u, x) + \boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{P}\varphi(u, x) + \varepsilon\theta(x)\varphi(u, x), \tag{1.9}$$

де

$$Q\varphi(\cdot, x) = q(x)[\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I}]\varphi(\cdot, x), x \in X, \boldsymbol{P}\varphi(\cdot, x) = \int_X P(x, dy)\varphi(\cdot, y).$$

Залишкові оператори $\theta^\varepsilon(x)$ *і* θ_1^ε *мають представлення*

$$\theta(x)\varphi(u,x) = q(x)\boldsymbol{C}^2(x)\,\boldsymbol{C}_2^{\varepsilon}(x)\boldsymbol{P}\varphi(u,\cdot),$$

$$\theta_1^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) = q(x)\boldsymbol{C}(x)\,\boldsymbol{C}_1^{\varepsilon}(x)\boldsymbol{P}\varphi(u,\cdot), \tag{1.10}$$

де

$$\boldsymbol{C}_2^{\varepsilon}(x)\varphi(u) := \int_0^{\infty} \overline{G}_x^{(2)}(s)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x)\varphi(u)ds,$$

$$\boldsymbol{C}_1^{\varepsilon}(x) = \int_0^{\infty} \overline{G}_x(s)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x)ds,$$

$$\overline{G}_x^{(2)}(s) := \int_s^{\infty} \overline{G}_x(t)dt.$$

Доведення базується на наступному представленні напівгруп

$$\boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x) = \boldsymbol{I} + \varepsilon s\boldsymbol{C}(x) + \varepsilon^2\boldsymbol{C}^2(x)\,\boldsymbol{T}_s^{\varepsilon}(x) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}(x)\int_0^{\varepsilon^2 s} \boldsymbol{C}_v(x)dv,$$

де

$$\boldsymbol{T}_s^{\varepsilon}(x) = \int_0^{s} (s-v)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon v}(x)dv.$$

Зауважимо, що для обчислення залишкових операторів використовуємо співвідношення:

$$\boldsymbol{C}_2^{\varepsilon}(x) = \int_0^{\infty} G_x(ds)\,\boldsymbol{C}_s^{\varepsilon}(x) = \int_0^{\infty} \overline{G}_x^{(2)}(s)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x)ds,$$

$$\boldsymbol{C}_1^{\varepsilon}(x) = \int_0^{\infty} \overline{G}_x(s)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x)ds.$$

Зауважимо також, що

$$\int_0^{\infty} \overline{G}_x^{(2)}(s)ds = g_2(x)/2, g_2(x) := E\theta_x^2 = \int_0^{\infty} t^2 G_x(dt).$$

Розглянемо збурену функцію Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u,x) = V(u) + \varepsilon V_1(u,x), \tag{1.11}$$

де $V(u), u \in R^d$, є функція Ляпунова для усередненої системи (1.3), що задовольняє умови $C1 - C3$ теореми.

Збурення $V_1(u,x), u \in R^d, x \in X$, визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення для оператора

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + \boldsymbol{C}(x)\varphi(u,x). \tag{1.12}$$

Згідно з розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (1.12) визначається співвідношеннями

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{C}V(u) + \varepsilon \boldsymbol{C}(x) V_1(u,x),$$

$$\boldsymbol{C}V(u) = C(u)V'(u),$$

$$V_1(u,x) = R_0 \widetilde{\boldsymbol{C}}(x) V(u),$$

де $\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) := \boldsymbol{C}(x) - \boldsymbol{C}$, а оператор $\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (Q+\Pi)^{-1}$, є потенціалом оператора Q. Відомо, що за умови $C4$ теореми, оператор $\boldsymbol{R}_0$ є обмеженим.

Лема 1.1.3. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для компенсуючого оператора (1.9) на збуреній функції Ляпунова (1.11) визначається співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{C}V(u) + \varepsilon\theta_0^\varepsilon(x)V(u). \tag{1.13}$$

Залишковий оператор має вигляд:

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = q(x)[\boldsymbol{C}^2(x)\boldsymbol{C}_2^\varepsilon(x) + \boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{C}_1^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}R_0\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)]V(u). \tag{1.14}$$

Доведення. Використаємо два представлення генератора $\boldsymbol{L}^\varepsilon$ з леми 1.1.2, ввівши позначення для (1.9)

$$\boldsymbol{L}_{(0)}^\varepsilon := \varepsilon^{-1}Q + \theta_1^\varepsilon(x),$$

а також для (1.10)

$$\boldsymbol{L}_{(1)}^\varepsilon := \varepsilon^{-1}Q + \boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon\theta^\varepsilon(x).$$

На збуреній функції Ляпунова (1.11) генератора $\boldsymbol{L}^\varepsilon$ представимо в вигляді

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \varepsilon \boldsymbol{L}_{(0)}^\varepsilon V_1(u,x) + \boldsymbol{L}_{(1)}^\varepsilon V(u).$$

Оскільки

$$\varepsilon \boldsymbol{L}_{(0)}^\varepsilon V_1(u,x) = QV_1(u,x) + \varepsilon\theta_1^\varepsilon(x)V_1(u,x),$$

а

$$\boldsymbol{L}_{(1)}^\varepsilon V(u) = \varepsilon^{-1}QV(u) + \boldsymbol{C}(x)V(u) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)V(u),$$

то

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-1}QV(u) + QV_1(u,x) + \boldsymbol{C}(x)V(u) + \varepsilon[\theta^\varepsilon(x)V(u) + \theta_1^\varepsilon(x)V_1(u,x)].$$

Враховуючи представлення залишкових операторів $\theta^\varepsilon(x)$ і θ_1^ε, а також збурення $V_1(u,x)$ в формі (1.12), отримуємо зображення залишкового члена в вигляді (1.14).

Зауважимо, що в умовах $C1$ – $C5$ теореми, справджується нерівність

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) \le -cV(u), \tag{1.15}$$

Для доведення нерівності (1.15) спочатку оцінюємо залишковий оператор (1.14), використовуючи умови $C2$ – $C3$ теореми

$$|\theta_0^\varepsilon(x)V(u)| \le c_0 V(u), \tag{1.16}$$

а також оцінюємо збурення $V_1(u,x)$:

$$|V_1(u,x)| \le c_1 V(u). \tag{1.17}$$

Згідно з умовою експоненційної стійкості $C1$, перший член в (1.13) задовольняє нерівність

$$\boldsymbol{C}V(u) = C(u)V'(u) \le -c_0 V(u), c_0 > 0. \tag{1.18}$$

Поєднучи оцінки (1.16), (1.17) та (1.18), отримаємо (1.15) при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо малому, при деякому значенні $c > 0$.

Умова $C2$ теореми забезпечує оцінку півгруп $\boldsymbol{C}_t(x)$, що породжується оператором (1.8)

$$|\boldsymbol{C}_t(x)V(u)| \le e^{bt}V(u). \tag{1.19}$$

А також мають місце нерівності (див. (1.11), (1.16), (1.17))

$$0 \le b_1 V^\varepsilon(u,x) \le V(u) \le b_2 V^\varepsilon(u,x), 0 < b_1 < b_2.$$

Лема 1.1.4. *Розширений ПМВ (1.6) характеризується мартингалом*

$$\mu_{n+1}^\varepsilon = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1}\boldsymbol{L}^\varepsilon \varphi(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon), n \ge 0. \tag{1.20}$$

Доведення. Мартингальна властивість послідовності $(\mu_{n+1}^\varepsilon, n \ge 0)$ слідує з однорідності компенсуючого оператора:

$$E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon)|F_n^\varepsilon] =$$

$$= E[\varphi(u_1^\varepsilon, x_1^\varepsilon, \tau_1^\varepsilon) - \varphi(u_0^\varepsilon, x_0^\varepsilon, \tau_0^\varepsilon)|F_0^\varepsilon].$$

Тут σ-алгебр $F_n^\varepsilon := \sigma\{u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon; 0 \le k \le n\}, n \ge 0$, породжується розширеним ПМВ.

Для скорочення запису, позначимо

$$\Phi^\varepsilon(t) := \varphi(u^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), x^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), \tau^\varepsilon(t)),$$

$$\varPhi_+^\varepsilon(t) := \varphi(u^\varepsilon(\tau_+^\varepsilon(t)), x^\varepsilon(\tau_+^\varepsilon(t)), \tau_+^\varepsilon(t)),$$

де $\tau^\varepsilon(t) := \tau^\varepsilon_{\nu^\varepsilon(t)}$, $\tau_+^\varepsilon(t) := \tau^\varepsilon_{\nu_+^\varepsilon(t)}$, $\nu_+^\varepsilon(t) := \nu^\varepsilon(t) + 1$, $\nu^\varepsilon(t) := \nu(\varepsilon t)$.

Зауважимо, що $\nu_+^\varepsilon(t)$ є марковським моментом для потоку F_n^ε.

Надалі використовуємо мартингальну властивість процесу з неперервним часом

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varPhi_+^\varepsilon(t) - \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \boldsymbol{L}^\varepsilon \varPhi^\varepsilon(s)ds. \tag{1.21}$$

Зауважимо, що

$$\zeta^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = \mu_{n+1}^\varepsilon, n \geq 0,$$

а також

$$\zeta^\varepsilon(t) = \zeta^\varepsilon(\tau_+^\varepsilon(t)), \tau^\varepsilon(t) < t < \tau_+^\varepsilon(t).$$

Наступна лема має ключове значення при доведенні стійкості динамічної системи.

Лема 1.1.5. *При будь-якому фіксованому дійсному значенні параметра $c \in R$, процес*

$$\zeta_c^\varepsilon(t) = e^{c\tau_+^\varepsilon(t)}\varPhi_+^\varepsilon(t) - \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} [ce^{cs}\varPhi_+^\varepsilon(s) + e^{c\tau^\varepsilon(s)}\boldsymbol{L}^\varepsilon\varPhi^\varepsilon(s)]ds \tag{1.22}$$

має мартингальну властивість:

$$E[\zeta_c^\varepsilon(t) - \zeta_c^\varepsilon(s)|F_s^\varepsilon] = 0, 0 \leq s < t,$$

відносно потоку σ - алгебр

$$F_s^\varepsilon := \{\sigma(u^\varepsilon(l)), x^\varepsilon(l), \tau^\varepsilon(l); 0 \leq l \leq s\}.$$

Доведення. Процес (1.22) можна подати в такій еквівалентній формі:

$$\zeta_c^\varepsilon(t) = e^{c\tau_+^\varepsilon(t)}\zeta^\varepsilon(t) - \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} ce^{cs}\zeta^\varepsilon(s)ds, \tag{1.23}$$

де процес $\zeta^\varepsilon(t), t \geq 0$, задається формулою (1.21).

Зауважимо, що мартингальна властивість процесу (1.23) слідує з того, що процес стрибковий і приймає значення

$$\zeta_c^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = e^{c\tau_{n+1}^\varepsilon}\mu_{n+1}^\varepsilon - \sum_{k=0}^{n}[e^{c\tau_{k+1}^\varepsilon} - e^{c\tau_k^\varepsilon}]\mu_{k+1}^\varepsilon, \tag{1.24}$$

або, інакше

$$\zeta_c^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = \mu_0 + \sum_{k=0}^{n} e^{c\tau_k^\varepsilon}[\mu_{k+1}^\varepsilon - \mu_k^\varepsilon], n \geq 0. \tag{1.25}$$

Для доведення еквівалентності представлень (1.22) та (1.23), обчислимо подвійний інтеграл

$$I^\varepsilon(t) = \int\limits_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} ce^{cs} ds \int\limits_0^{\tau_+^\varepsilon(s)} \boldsymbol{L}^\varepsilon \varPhi^\varepsilon(v) dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu^\varepsilon(t)} \int\limits_{\tau_k^\varepsilon}^{\tau_{k+1}^\varepsilon} ce^{cs} ds \int\limits_0^{\tau_{k+1}^\varepsilon} \boldsymbol{L}^\varepsilon \varPhi^\varepsilon(v) dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu^\varepsilon(t)} (e^{c\tau_{k+1}^\varepsilon} - e^{c\tau_k^\varepsilon}) \sum_{r=0}^{k} \varepsilon\theta_{r+1} \boldsymbol{L}^\varepsilon \varPhi^\varepsilon(\tau_r^\varepsilon) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\nu^\varepsilon(t)} \theta_{r+1} \boldsymbol{L}^\varepsilon \varPhi^\varepsilon(\tau_r^\varepsilon)(e^{c\tau_{r+1}^\varepsilon} - e^{c\tau_r^\varepsilon}).$$

Остаточно маємо

$$I^\varepsilon(t) = e^{c\tau_+^\varepsilon(t)} \int\limits_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \boldsymbol{L}^\varepsilon \varPhi^\varepsilon(s) ds - \int\limits_0^{\tau_{k+1}^\varepsilon} e^{c\tau^\varepsilon(s)} \boldsymbol{L}^\varepsilon \varPhi^\varepsilon(s) ds.$$

Отже представлення (1.22) отримаємо з (1.21) та (1.23).

Розглянемо тепер процес

$$\eta^\varepsilon(t) = \int\limits_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} [e^{cs} c V_+^\varepsilon(s) + e^{c\tau^\varepsilon(t)} \boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(s)] ds. \tag{1.26}$$

Лема 1.1.6. *При достатньо малих значеннях параметра c, для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ - достатньо мале, в умовах теореми, процес $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$, задовольняє умову*

$$E[\eta^\varepsilon(t) - \eta^\varepsilon(s) | F_s^\varepsilon] \leq 0, 0 \leq s < t. \tag{1.27}$$

Доведення. Оскільки процес (1.26) стрибковий, достаньо розглянути умовне сподівання в моменти марковського відновлення:

$$\eta_{n+1}^\varepsilon := \eta^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = \int\limits_0^{\tau_{n+1}^\varepsilon} [e^{cs} c V_+^\varepsilon(s) + e^{c\tau^\varepsilon(s)} \boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(s)] ds, \tag{1.28}$$

або, інакше

$$\eta_{n+1}^{\varepsilon} = \sum_{k=0}^{n} e^{c\tau_k^{\varepsilon}} \alpha_{k+1}^{\varepsilon}, \tag{1.29}$$

де

$$\alpha_{k+1}^{\varepsilon} = \beta_{k+1}^{\varepsilon} + \varepsilon\gamma_{k+1}^{\varepsilon}, \tag{1.30}$$

$$\beta_{k+1}^{\varepsilon} = (e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)V_{k+1}^{\varepsilon},$$

$$\gamma_{k+1}^{\varepsilon} = \varepsilon\theta_{k+1}\boldsymbol{L}^{\varepsilon}V_k^{\varepsilon},$$

а $V_n^{\varepsilon} := V^{\varepsilon}(u_n^{\varepsilon}, x_n^{\varepsilon}, \tau_n^{\varepsilon})$.

Для оцінки умовного сподівання першого доданку в (1.30) використаємо оцінку напівгрупи (див. (1.19)) $\boldsymbol{C}_t(x)$, що породжується генератором (1.8),

$$|\boldsymbol{C}_t(x)V(u)| \leq e^{bt}V(u), b > 0.$$

Отже, маємо

$$E[\beta_{k+1}^{\varepsilon}|F_k^{\varepsilon}] = E[(e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)V_{k+1}^{\varepsilon}|F_k^{\varepsilon}] =$$

$$= E[(e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)\boldsymbol{C}_{\varepsilon}\theta_{k+1}(x_k)V_k^{\varepsilon}|F_k^{\varepsilon}] \leq$$

$$\leq E[(e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)e^{\varepsilon c\theta_{k+1}}|F_k^{\varepsilon}]V_k^{\varepsilon} =$$

$$= E[(e^{\varepsilon(c+b)\theta_{k+1}} - e^{\varepsilon b\theta_{k+1}})|F_k^{\varepsilon}]V_k^{\varepsilon} =$$

$$= \varepsilon[b(g_k^{\varepsilon}(b+c) - g_k^{\varepsilon}(b)) + cg_k^{\varepsilon}(b+c)]V_k^{\varepsilon}.$$

Враховуючи, що

$$g_k^{\varepsilon}(c) = \int_0^{\infty} \overline{G}_k(t)e^{\varepsilon ct}dt,$$

та умову $C4$ теореми, маємо оцінку

$$m_k \leq g_k^{\varepsilon}(c) \leq m_k(1 + \delta_{\varepsilon})$$

де $\delta_{\varepsilon} \leq \delta_0$, δ_0 - достатньо мале при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо малому.

Отже, остаточно маємо оцінку

$$E[\beta_{k+1}^{\varepsilon}|F_k^{\varepsilon}] \leq \varepsilon[b\delta_{\varepsilon} + cm_k(1 + \delta_{\varepsilon})]V_k^{\varepsilon} < \varepsilon\delta_0 V_k^{\varepsilon},$$

при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ - достатньо малому та δ_0 - достатньо малому.

Умовне сподівання другого члена в (1.30) оцінюється згідно з нерівністю (1.18) та умови

$$E[\gamma_{k+1}^{\varepsilon}|F_k^{\varepsilon}] = m_k\boldsymbol{L}^{\varepsilon}V_k^{\varepsilon} \leq -c_0 m_k V_k^{\varepsilon} \leq -c_0\underline{m}V_k^{\varepsilon}.$$

Остаточно маємо оцінку

$$E[\alpha^{\varepsilon}_{k+1}|F^{\varepsilon}_{k}] \leq -\varepsilon[c_0\underline{m} - \delta_0]V^{\varepsilon}_{k} \leq -\varepsilon c_0 V^{\varepsilon}_{k}, c_0 > 0,$$

якщо $\delta_0 < c_0\underline{m}$.

Доведення теореми 1.1.1. Перш за все з леми 1.1.6 випливає, що послідовність

$$w^{\varepsilon}_{n+1} = e^{c\tau^{\varepsilon}_{n+1}}V^{\varepsilon}_{n+1}, V^{\varepsilon}_{n+1} := V^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}_{n+1}, x^{\varepsilon}_{n+1}, \tau^{\varepsilon}_{n+1}),$$

є супермартингалом:

$$E[w^{\varepsilon}_{n+1}|F^{\varepsilon}_{n}] \leq w^{\varepsilon}_{n}, n \geq 0. \tag{1.31}$$

Дійсно, згідно з лемою 1.1.5, маємо (див. (1.22) та (1.28)-(1.29))

$$w^{\varepsilon}_{n+1} = \zeta^{\varepsilon}_{c}(\tau^{\varepsilon}_{n}) + \zeta^{\varepsilon}_{n+1}.$$

Мартингальна властивість послідовності (1.25) та умова (1.27) забезпечують умову (1.31):

$$E[w^{\varepsilon}_{n+1}|F^{\varepsilon}_{n}] = E[\zeta^{\varepsilon}_{c}(\tau^{\varepsilon}_{n}) + \zeta^{\varepsilon}_{n+1}|F^{\varepsilon}_{n}] =$$

$$= w^{\varepsilon}_{n} + E[\zeta^{\varepsilon}_{c}(\tau^{\varepsilon}_{n}) - \zeta^{\varepsilon}_{c}(\tau^{\varepsilon}_{n+1})|F^{\varepsilon}_{n}] + E[\zeta^{\varepsilon}_{n+1} - \zeta^{\varepsilon}_{n}|F^{\varepsilon}_{n}] \leq w^{\varepsilon}_{n}.$$

Регулярність ПМВ означає, що

$$\tau^{\varepsilon}_{n} \Rightarrow \infty, n \to \infty,$$

з ймовірністю 1. Отже, для події $A^{\varepsilon}_{T,n} = \{\tau^{\varepsilon}_{n} > T\}$ має місце оцінка ймовірності

$$P\{A^{\varepsilon}_{T,n}\} \geq 1 - \mathit{\Delta}, n \geq N_T,$$

для будь-якого $\mathit{\Delta} > 0$.

Введемо позначення

$$a^{\varepsilon}_{n} := e^{c(\tau^{\varepsilon}_{n} - T)}, n \geq 0.$$

На події $A^{\varepsilon}_{T,n}$, маємо $a^{\varepsilon}_{n} \geq 1, n \geq 0$.

Тепер оцінюємо ймовірність

$$P\{e^{cT}\sup_{n \geq N_T} V(u^{\varepsilon}_{n}) > \delta \bigcap A^{\varepsilon}_{T,n}\} \leq P\{e^{cT}\sup_{n \geq N_T} a^{\varepsilon}_{n} V(u^{\varepsilon}_{n}) > \delta \bigcap A^{\varepsilon}_{T,n}\} \leq$$

$$\leq P\{\sup_{n \geq N_T} e^{c\tau^{\varepsilon}_{n}} V(u^{\varepsilon}_{n}) > \delta \bigcap A^{\varepsilon}_{T,n}\}.$$

Враховуючи (1.4), маємо

$$P\{e^{cT}\sup_{n \geq N_T} V(u^{\varepsilon}_{n}) > \delta \bigcap A^{\varepsilon}_{T,n}\} \leq P\{\sup_{n \geq N_T} w^{\varepsilon}_{n} > \delta \bigcap A^{\varepsilon}_{T,n}\}.$$

Супермартингальна властивість (1.31) дає наступну оцінку для ймовірності

$$P\{e^{cT}\sup_{n \geq N_T} V(u^{\varepsilon}_{n}) > \delta \bigcap A^{\varepsilon}_{T,n}\} \leq V(u)/\delta_2,$$

тут $\delta_2 = \delta b_2/b_1$.

Далі маємо

$$P\{e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta\} = P\{e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta \bigcap A_{T,n}^\varepsilon\} +$$

$$+ P\{e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta \bigcap \overline{A}_{T,n}^\varepsilon\} \leq V(u)/\delta_2 + \mathit{\Delta} \leq 2\mathit{\Delta} \qquad (1.32)$$

при $|u| \leq u_0$ -достатньо мале.

Співвідношення

$$\{e^{cT} \sup_{n\geq N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta\} \subset \{\lim_{n\to\infty} V(u_n^\varepsilon) = 0\} = \{\lim_{n\to\infty} \|u_n^\varepsilon\| = 0\}$$

завершують доведення збіжності

$$P\{\lim_{n\to\infty} \|u_n^\varepsilon\| = 0\} = 1. \qquad (1.33)$$

Твердження теореми 1.1.5 є наслідком (1.32) та оцінки (1.18) для напівгрупи, що породжує стохастичну систему $u^\varepsilon(t)$. Дійсно, з умови $C5$ теореми випливає така оцінка

$$P\{\max_{1\leq n\leq \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n > \delta\} \leq C\mathit{\Delta}(\varepsilon), \qquad (1.34)$$

де $\mathit{\Delta}(\varepsilon) \to 0$ коли $\varepsilon \to 0$.

Розглянемо представлення

$$V_T^\varepsilon := \sup_{0\leq t\leq T} V(u^\varepsilon(t)) =$$

$$= \sup_{1\leq n\leq \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} [\sup_{0\leq s\leq \theta_n} |\boldsymbol{C}_{\varepsilon s}(x_{n-1}^\varepsilon) V_{n-1}^\varepsilon|].$$

Враховуючи оцінку (1.19) для напівгрупи, маємо нерівність

$$V_T^\varepsilon \leq \sup_{1\leq n\leq \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} e^{\varepsilon c_1 \theta_n} V_{n-1}^\varepsilon =: \overline{V}_T^\varepsilon \qquad (1.35)$$

Отже справедлива оцінка

$$P\{\sup_{0\leq t\leq T} V(u^\varepsilon(t)) > \delta\} \leq P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta\}. \qquad (1.36)$$

Для оцінки правої частини (1.36), використовуємо співвідношення

$$P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta\} = P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \bigcap_{1\leq n\leq \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \max \theta_n > T/\varepsilon\} +$$

$$+ P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \bigcap_{1\leq n\leq \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \max \theta_n \leq T/\varepsilon\}. \qquad (1.37)$$

Перший доданок з (1.37) має оцінку, з врахуванням (1.35) та (1.32),

$$P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \bigcap \max_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n \le T/\varepsilon\} \le$$

$$\le P\{e^{c_1 T} \sup_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} V_{n-1}^\varepsilon > \delta\} \le 2\Delta.$$

Другий доданок оцінюємо з урахуванням (1.34)

$$P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \bigcap \max_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n > T/\varepsilon\} \le C\Delta(\varepsilon),$$

З останніх двох оцінок маємо (див. (1.36) та (1.37))

$$P\{\sup_{1\le t\le T} V(u^\varepsilon(t)) > \delta\} \le 2\Delta + C\Delta(\varepsilon)$$

- достатньо мале.

Далі модельна Королюка призводить до результату теореми 1.1.1.

1.2. Стійкість стохастичних систем в схемі дифузійної апроксимації

Аналіз стійкості динамічної системи в схемі дифузійної апроксимації з напівмарковськими переключеннями розглядається у більш загальній формі і реалізується з використанням компенсуючого оператора напівмарковського процесу. Асимптотичне представлення компенсуючого оператора, що побудоване в даному параграфі, фактично зводить проблему стійкості системи з напівмарковськими переключеннями до аналогічної проблеми з марковськими переключеннями.

Динамічна система в напівмарковському середовищі в умовах дифузійної апроксимації задається еволюційним диференціальним рівнянням

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-1} C_1(u^\varepsilon(t), x(\frac{t}{\varepsilon^2})) + C_0(u^\varepsilon(t), x(\frac{t}{\varepsilon^2})), \tag{1.38}$$

$$u^\varepsilon(0) = u_0,$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр, а $u^\varepsilon(t) = (u_k^\varepsilon(t), k = \overline{1,d})$.

Швидкості $C_k(u,x) =(C_{ki}(u,x) ; i = \overline{1,d})$, $k = 1,0, u \in R^d, x \in X$, задовольняють умовам , що забезпечують існування глобальних розв'язків детермінованих систем при кожному $\varepsilon > 0$:

$$\frac{du_x^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-1} C_1(u_x^\varepsilon(t), x) + C_0(u_x^\varepsilon(t), x), x \in X. \tag{1.39}$$

Тут $x(t), t > 0$, - напівмарковський процес (НМП) у стандартному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$, що породжується процесом марковського відновлення $x_n, \tau_n, n \ge 0$, Стійкість стохастичної системи (1.38) розглядається в умовах стійкості усередненої системи, яка при умові балансу

$$\int_X \pi(dx)C_1(u,x) \equiv 0, u \in R^d,$$

визначається розв'язком стохастичної системи

$$\begin{cases} du(t) = C_0(u(t))dt + d\zeta(t) \\ d\zeta(t) = a(u(t))dt + \sigma(u(t))dw(t). \end{cases} \tag{1.40}$$

Усереднення здійснюється за стаціонарним розподілом $\pi(dx)$:

$$C_0(u) := \int_X \pi(dx)C_0(u,x).$$

Дифузійний процес $\zeta(t)$, $t \geq 0$, визначається вектор-функцією зсуву

$$a(u) = a_1(u) + a_2(u),$$

де

$$a_1(u) = \int_X \pi(dx)C_1(u,x)R_0C_1'(u,x),$$

$$a_2(u) = \frac{1}{2}q\int_X \rho(dx)\mu(x)C_1(u,x)C_1'(u,x), \tag{1.41}$$

та матрицею дисперсії $\sigma(u)$, що визначається співвідношеннями:

$$B(u) = \sigma(u)\sigma^*(u),$$

при умові позитивної визначеності матриці

$$B(u) = B_0(u) + B_1(u), \tag{1.42}$$

де

$$B_0(u) = 2\int_X \pi(dx)C_1(u,x)R_0C_1(u,x),$$

$$B_1(u) = q\int_X \rho(dx)\mu(x)C_1^2(u,x). \tag{1.43}$$

В (1.41) та (1.42)

$$\mu(x) = g_2(x) - 2g^2(x), g_2(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)ds,$$

а $\bar{G}_x^{(2)}(t) := \int\limits_t^\infty \bar{G}_x(s)ds$.

Для показникових функцій розподілу з інтенсивністю $q(x) = g^{-1}(x)$ маємо $\mu(x)$ =0. Отже члени $a_2(u)$ зсуву та $B_1(u)$ дисперсії характеризують немарковість переключаючого процесу.

Генератор стохастичної системи (1.40) визначається на тест-функціях $\varphi(u) \in C^2(R^d)$ співвідношенням:

$$\mathbf{L}\varphi(u) = C(u)\varphi'(u) + \frac{1}{2}Sp[B(u)\varphi''(u)], \tag{1.44}$$

де

$$C(u) = C_0(u) + a(u). \tag{1.45}$$

Задача полягає в тому, щоб при умовах збіжності стохастичної системи (1.38) до усередненої системи (1.40) при $\varepsilon \to 0$ встановити додаткові умови, що забезпечують стійкість вихідної системи (1.38) при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо мале.

Стійкість системи (1.38) розглядається в умовах експоненційної стійкості усередненої системи (1.40)

$$\frac{d\widetilde{u}(t)}{dt} = C_0(\widetilde{u}(t)).$$

Теорема 1.2.1. *Нехай для усередненої стохастичної системи (1.40), що визначається генератором (1.44), існує функція Ляпунова $V(u)$, $u \in R^d$, для якої виконується умова експоненційної стійкості:*

$C1 : C_0(u)V'(u) \le -c_0V(u),\ c_0 > 0,$

а також виконуються наступні додаткові умови при $k, r, l = 0, 1$:

$C2 :\mid C_k(u, x)V'(u) \mid \le c_1V(u),\ c_1 > 0,$

$\mid C_k(u, x)R_0[C_r(u, x)V'(u)]' \mid \le c_2V(u),\ c_2 > 0,$

$\mid C_k(u, x)R_0[C_r(u, x)R_0[C_l(u, x)V'(u)]']' \mid \le c_3V(u),\ c_3 > 0,$

$C3 :$ *Функції розподілу $G_x(t)$, $t \ge 0$, $x \in X$, задовольняють умові Крамера, рівномірно по $x \in X$: $\sup\limits_{x\in X} \int\limits_0^\infty e^{ht}\overline{G}_x(t)dt \le H < +\infty, h > 0$, а також мають місце оцінки:*

$$0 < \underline{m} \le g(x) \le \overline{m} \le +\infty.$$

Тоді для всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$ – достатньо малому, розв'язок еволюційного рівняння (1.38), при всіх початкових умовах $\mid u^\varepsilon(0) \mid \le u^*$, u^* – достатньо малому, є асимптотично стійким з ймовірністю 1:

$$P\{\lim_{t\to\infty} \| u^\varepsilon(t) \| = 0\} = 1.$$

Розширений процес марковського відновлення (РПМВ) задається послідовністю

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2\tau_n, n \geq 0. \tag{1.46}$$

Компенсуючий оператор РПМВ (1.46) визначається співвідношенням:

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-2}q(x)[E\{\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon)u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t\} -$$

$$-\varphi(u,x,t)]. \tag{1.47}$$

Розглянемо сукупність напівгруп $\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)$, $t \geq 0, x \in X$, що породжується супроводжуючою системою (1.39) та визначається генератором

$$\boldsymbol{C}^\varepsilon(x)\varphi(u) = C^\varepsilon(u,x)\varphi'(u), \tag{1.48}$$

де

$$C^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-1}C_1(u,x) + C_0(u,x),$$

а також розглянемо оператор $\boldsymbol{C}_\varepsilon(x)$, що має вигляд

$$\boldsymbol{C}_\varepsilon(x) := \varepsilon\boldsymbol{C}^\varepsilon(x) = \boldsymbol{C}_1(x) + \varepsilon\boldsymbol{C}_0(x), \tag{1.49}$$

складові, якого визначаються за формулами:

$$\boldsymbol{C}_1(x)\varphi(u) := C_1(u,x)\varphi'(u), \boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(u,x)\varphi'(u).$$

Лема 1.2.1. *Компенсуючий оператор (1.47) РПМВ (1.46) на тест-функціях $\varphi(u,x)$ має вигляд:*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}q(x)[\int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon(x)\int_X P(x,dy)\varphi(u,y) - \varphi(u,x)]. \tag{1.50}$$

Доведення. Оскільки

$$E\varphi(u_1^\varepsilon, x_1^\varepsilon) = E\,\boldsymbol{C}_{\theta_x}^\varepsilon(x)\varphi(u,x_1^\varepsilon) = \int_0^\infty G_x(ds)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon(x)\int_X P(x,dy)\varphi(u,y),$$

то з (1.47) маємо (1.50)

Лема 1.2.2. *Компенсуючий оператор (1.50) на тест-функціях $\varphi(u,\cdot) \in C^3(R^d)$, допускає асимптотичні представлення:*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}\theta_0^\varepsilon(x)\varphi(u,x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} Q_1(x)\varphi(u,x) + \theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u,x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} Q_1(x)\varphi(u,x) + Q_2(x)\varphi(u,x) + \varepsilon\theta_2^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \qquad (1.51)$$

де оператори $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ визначаються співвідношеннями:

$$Q_1(x)\varphi(u,x) = \boldsymbol{C}_1(x)\boldsymbol{P}\varphi(u,x),$$

$$Q_2(x)\varphi(u,x) = [\ \boldsymbol{C}_0(x) + \mu_2(x)\boldsymbol{C}_1^2(x)]\boldsymbol{P}\varphi(u,x),$$

$$\mu_2(x) = \frac{g_2(x)}{2g(x)},$$

а залишкові члени в представленні (1.51) мають вигляд

$$\theta_0^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = q(x)\boldsymbol{C}_\varepsilon(x)\boldsymbol{G}_1^\varepsilon(x)\ \ \boldsymbol{P}\varphi(u,x), \qquad (1.52)$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = q(x)[\boldsymbol{C}_\varepsilon^2(x)\boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x) + \boldsymbol{C}_0(x)]\ \ \boldsymbol{P}\varphi(u,x), \qquad (1.53)$$

$$\theta_2^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = q(x)[\boldsymbol{C}_\varepsilon^3(x)\ \ \boldsymbol{G}_3^\varepsilon(x) + \frac{m_2(x)}{2}\boldsymbol{C}_2^\varepsilon(x)]\boldsymbol{P}\varphi(u,x). \qquad (1.54)$$

Тут оператори $\boldsymbol{G}_k^\varepsilon(x)$, $k = \overline{1,3}$, визначаються рекурсією

$$\boldsymbol{G}_k^\varepsilon(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x^{(k)}(s)ds\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon(x),$$

де $\overline{G}_x^{(1)}(s) = \overline{G}_x(s)$, а $\boldsymbol{C}_2^\varepsilon(x) = \boldsymbol{C}_0(x)[2\boldsymbol{C}_1(x) + \varepsilon\boldsymbol{C}_0(x)]$.

Доведення. Спочатку використаємо очевидне представлення

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon = \varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-2}\boldsymbol{L}_1^\varepsilon(x), \qquad (1.55)$$

де

$$\boldsymbol{L}_1^\varepsilon(x) := q(x)[\boldsymbol{G}_\varepsilon(x) - I]\boldsymbol{P}, \qquad (1.56)$$

та в правій частині (1.56)

$$\boldsymbol{G}_\varepsilon(x) := \int_0^\infty G_x(ds)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon(x). \qquad (1.57)$$

Далі інтегрування частинами та рівняння для напівгрупи

$$d\boldsymbol{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon(x) = \varepsilon^2\boldsymbol{C}^\varepsilon(x)\boldsymbol{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon(x)ds,$$

з урахуванням умови $C3$ теореми дають для (1.57) таке представлення:

$$\boldsymbol{G}_\varepsilon(x) - I = \varepsilon^2\ \ \boldsymbol{C}^\varepsilon(x)\boldsymbol{G}_1^\varepsilon(x), \qquad (1.58)$$

де

$$\boldsymbol{G}_1^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s) ds C^\varepsilon_{\varepsilon^2 s}(x). \tag{1.59}$$

Аналогічно з (1.59) маємо

$$\boldsymbol{G}_1^\varepsilon(x) = g(x) I + \varepsilon^2 \boldsymbol{C}^\epsilon(x) \boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x), \tag{1.60}$$

де

$$\boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x) := \int\limits_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s) ds C^\varepsilon_{\varepsilon^2 s}(x), \tag{1.60}$$

а також з (1.61)

$$\boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x) = \frac{g_2(x)}{2} I + \varepsilon^2 \boldsymbol{C}^\epsilon(x) \boldsymbol{G}_3^\varepsilon(x), \tag{1.62}$$

де

$$\boldsymbol{G}_3^\varepsilon(x) := \int\limits_0^\infty \overline{G}_x^{(3)}(s) ds C^\varepsilon_{\varepsilon^2 s}(x),$$

і

$$\overline{G}_x^{(3)}(s) := \int\limits_s^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s) ds.$$

Об'єднуючи (1.59), (1.61) та (1.62), маємо

$$\boldsymbol{G}_\varepsilon(x) - I = \varepsilon^2 g(x) \boldsymbol{C}^\epsilon(x) + \varepsilon^4 g_2(x) [\boldsymbol{C}^\epsilon(x)]^2 + \varepsilon^6 [\boldsymbol{C}^\epsilon(x)]^3 \boldsymbol{G}_3^\varepsilon(x). \tag{1.63}$$

Тепер, враховуючи (1.48) та (1.49), остаточно з (1.63) маємо

$$\boldsymbol{G}_\varepsilon(x) - I = \varepsilon g(x) \boldsymbol{C}_1(x) + \varepsilon^2 [g(x) \boldsymbol{C}_0(x) + g_2(x) \boldsymbol{C}_1^2(x)] + \varepsilon^3 \theta_3^\varepsilon(x), \tag{1.64}$$

де залишковий член має представлення

$$\theta_3^\varepsilon(x) = g_2(x)(2 \boldsymbol{C}_1(x) \boldsymbol{C}_0(x) + \varepsilon \boldsymbol{C}_0^2(x)) + \boldsymbol{C}_\varepsilon^3(x) \boldsymbol{G}_3^\varepsilon(x). \tag{1.65}$$

Об'єднуючи (1.56), (1.57), (1.64) і (1.65) отримаємо всі три асимптотичні представлення (1.51).

Доведення теореми 1.2.2 базується на використанні розв'язку проблеми сингулярного збурення (РПСЗ) для компенсуючого оператора, поданного в останньому асимптотичному представлені (1.51).

Введемо збурену функцію Ляпунова

$$V^\varepsilon(u, x) = V(u) + \varepsilon V_1(u, x) + \varepsilon^2 V_2(u, x), \tag{1.66}$$

де $V(u)$ є функцією Ляпунова для граничної дифузії (1.40).

Лема 1.2.3. *На збуреній функції Ляпунова (1.66) компенсуючий оператор (1.50) допускає представлення*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{L}V(u) + \varepsilon\theta_L^\varepsilon(x)V(u).$$

Тут $\boldsymbol{L}$ є генератором граничної дифузії (1.40), а залишковий оператор $\theta_L^\varepsilon(x)$ визначається співвідношенням

$$\theta_L^\varepsilon(x)V(u) = \theta_2^\varepsilon(x)V(u) + \theta_1^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}V_1(u,x) + \theta_0^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}V_2(u,x). \quad (1.67)$$

Збурення функції Ляпунова мають представлення

$$V_1(u,x) = R_0Q_1(x)V(u), \quad (1.68)$$

$$V_2(u,x) = R_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)V(u), \quad (1.69)$$

де

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}(x) := \boldsymbol{L}(x) - \boldsymbol{L}, \quad (1.70)$$

$$\boldsymbol{L}(x) := Q_2(x) + Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0Q_1(x).$$

Доведення. Розглянемо зрізаний оператор до КО (1.51), а саме

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1(x) + Q_2(x).$$

Для оператора $\boldsymbol{L}_0^\varepsilon$ на функціях (1.66) отримуємо представлення

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) =$$

$$= \varepsilon^{-2}QV(u) + \varepsilon^{-1}[QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u)] +$$

$$+ [QV_2(u,x) + Q_1(x)V_1(u,x) + Q_2(x)V(u)] + \varepsilon\theta_{L0}^\varepsilon(x)V(u).$$

РПСЗ для такого розкладу дає представлення (1.68), (1.69) збурень функції Ляпунова (1.66), а також граничний оператор $\boldsymbol{L}$, що обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{L}\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}Q_2(x)\mathit{\Pi} + \mathit{\Pi}Q_1(x)R_0Q_1(x)\mathit{\Pi}.$$

Позначимо кожне з представлень КО (1.51) через

$$\boldsymbol{L}_{(0)}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}\theta_0^\varepsilon(x),$$

$$\boldsymbol{L}_{(1)}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1(x) + \theta_1^\varepsilon(x),$$

$$\boldsymbol{L}_{(2)}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1(x) + Q_2(x) + \varepsilon\theta_2^\varepsilon(x).$$

Тоді КО $\boldsymbol{L}^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$ має розклад

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^2\boldsymbol{L}_{(0)}^\varepsilon V_2(u,x) + \varepsilon\boldsymbol{L}_{(1)}^\varepsilon V_1(u,x) + \boldsymbol{L}_{(2)}^\varepsilon V(u).$$

Оскільки

$$\varepsilon^2 \boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{(0)} V_2(u,x) = QV_2(u,x) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}_0(x)V_2(u,x),$$

$$\varepsilon \boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{(1)} V_1(u,x) = \varepsilon^{-1} QV_1(u,x) + Q_1(x)V_1(u,x) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}_1(x)V_1(u,x),$$

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{(2)} V(u) = \varepsilon^{-2} QV(u) + \varepsilon^{-1}Q_1(x)V(u) + Q_2(x)V(u) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}_2(x)V(u),$$

то

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} QV(u) + \varepsilon^{-1}[QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u)] +$$

$$+[QV_2(u,x) + Q_1(x)V_1(u,x) + Q_2(x)V(u)] + \varepsilon\theta^{\varepsilon}_L(x)V(u),$$

де залишковий оператор $\theta^{\varepsilon}_L(x)$ має представлення (1.67). Лему доведено.

Таким чином, граничний оператор, що визначає усереднену дифузію (1.40), задається рівністю (1.44)

$$\boldsymbol{L}\varphi(u) = C(u)\varphi'(u) + \frac{1}{2} Sp[B(u)\varphi''(u)],$$

де $C(u)$ і $B(u)$ обчислюються за формулами відповідно (1.45) і (1.42).

Враховуючи представлення (1.68), (1.69) збурюючих функцій

$$V_k(u,x),\ k = 1,2,$$

та вираз (1.67) для залишкового оператора $\theta^{\varepsilon}_L(x)$, маємо наступне представлення залишкового оператора на функціях Ляпунова $V(u)$:

$$\theta^{\varepsilon}_L(x)V(u) = [\theta^{\varepsilon}_2(x) + \theta^{\varepsilon}_1(x)\boldsymbol{P}R_0Q_1(x) + \theta^{\varepsilon}_0(x)\boldsymbol{P}R_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)]V(u).$$

Враховуючи вирази (1.52)–(1.54) для залишкових операторів

$$\theta^{\varepsilon}_k(x),\ k = 0,1,2$$

, ...,

(1.70)

$\widetilde{\boldsymbol{L}}(x)$ заключаємо, що у залишковому операторі $\theta^{\varepsilon}_L(x)$ діють оператори диференціювання по змінній $u \in R^d$ не вище третього порядку. Крім того з умов теореми випливає, що оператори $\boldsymbol{G}^{\varepsilon}_k(x), k = 1,2,3,$ та потенціал R_0 є обмеженими в просторі функцій $V(u) \in C^3(R^d)$. Отже має місце

Зауважимо, що в умовах теореми 1.2.2 має місце оцінка

$$|\theta^{\varepsilon}_L(x)V(u)| \le c_L V(u).$$

В умовах Теореми 1.2.2 $C1$–$C3$ при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 – достатньо мале ($\varepsilon_0 \le c/c_L$) має місце ключова нерівність

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) \le -cV(u), c > 0. \tag{1.71}$$

Доведення Теореми 1.2.2.

Завершення доведення теореми 1.2.2 реалізується за схемою доведення теореми 1.2.1. Представлення (1.68),(1.69) функцій збурення $V_k(u,x), k = 1,2$, та умови $C2$ теореми дають таку двосторонню оцінку для збуреної функції Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$

$$0 < (1-\varepsilon c)V(u) \leq V^\varepsilon(u,x) \leq (1+\varepsilon c)V(u). \tag{1.72}$$

Мартингальна характеризація процесу $\eta^\varepsilon(t) := V^\varepsilon(u^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), x(t/\varepsilon^2))$, де $\tau^\varepsilon(t) = \tau^\varepsilon_{\nu(t)}$, та ключова нерівність (1.71) характеризують процес $\eta^\varepsilon(t)$, як невід'ємний супермартингал. Отже існує з ймовірністю одиниця невід'ємна границя v^ε :

$$P\{\lim_{t\to\infty} V^\varepsilon(u^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), x(t/\varepsilon^2)) = v^\varepsilon\} = 1.$$

При цьому випадкова величина v^ε має скінчене математичне сподівання, оскільки

$$EV^\varepsilon(u^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), x(t/\varepsilon^2)) \leq V^\varepsilon(u,x) \leq (1+\varepsilon c)V(u).$$

Враховуючи додаткову властивість функції Ляпунова

$$V(u) \to \infty, u \to \infty, \tag{1.73}$$

заключаємо, що $P\{v^\varepsilon < \infty\} = 1$. Знову ж таки ключова нерівність (2.71) та оцінка (2.72) дають

$$P\{\lim_{t\to\infty} V(u^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)) = 0\} = 1,$$

тобто

$$P\{\lim_{n\to\infty} u^\varepsilon(\tau_n) = 0\} = 1.$$

Нарешті позитивність функції Ляпунова $V(u)$ >0, при $u \neq 0$, властивість (1.73) та регулярність напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, приводять до твердження теореми.

1.3. Асимптотика стохастичного дифузійного процесу переносу з точкою рівноваги критерію якості

Нехай процес переносу $y(t) \in \mathbf{R}^d$ визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$dy(t) = a(y(t), x(t))dt + \sigma(y(t), x(t), u(t))dW(t), \tag{1.74}$$

де $x(t)$, $t > 0$ – рівномірно ергодичний марковський процес у вимірному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, визначений генератором

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)] \tag{1.75}$$

на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум-нормою

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

Генератор $\mathbf{Q}$ є зведено-оборотним на $B(X)$ з проектором

$$\Pi\varphi(x) := \int_X \pi(dx)\varphi(x),$$

де $\pi(B)$, $(B \in X)$ – стаціонарний розподіл марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, який визначається зі співвідношень

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

де $p(dx)$ – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова x_n, $n \geq 0$ і потенціалом R_0 марковської напівгрупи

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}.$$

Функції $a(y,x) = (a_k(y,x), k = \overline{1,d})$, $\sigma(y,x,u) = (\sigma_k(y,x,u), k = \overline{1,d})$, $y \in \mathbf{R}^d$, $x \in X$, задовольняють умовам існування глобального розв'язку еволюційних рівнянь

$$dy_x(t) = a(y_x(t), x(t))dt + \sigma(y_x(t), x(t), u_x(t))dW(t),\ x \in X \tag{1.76}$$

для кожного фіксованого значення x марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, на інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ перебування процесу $x(t)$, $t \geq 0$, у стані $x \in X$.

Нехай критерій якості процесу переносу (1.74) визначається функцією $G(y,x,u)$, $y \in \mathbf{R}^d$, яка має єдину точку рівноваги u_x^* на інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, що випливає з умови $G(y_x, x, u_x) = 0$, чи у загальному представленні (1.74) керування $u(t)$ визначається умовою

$$G(y(t), x(t), u(t)) = 0. \tag{1.77}$$

Зауважимо, що розв'язок стохастичного рівняння (1.74) на інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ при невипадковому керуванні $u(t)$ утворює марковський процес.

Для визначення асимптотичних властивостей розв'язку задачі (1.74), (1.77) у схемі серій з малим параметром $\varepsilon > 0$, розглянемо стохастичне рівняння

$$dy^\varepsilon(t) = a(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))dt + \sigma(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), u^\varepsilon(t))dW(t), \tag{1.78}$$

та процедуру стохастичної апроксимації

$$du^\varepsilon(t) = \alpha(t)G(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), u^\varepsilon(t))dt \tag{1.79}$$

зі спільними початковими умовами

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ u(0) = u_0. \tag{1.80}$$

Теорема 1.3.1. *Нехай* $a(y,x) \in C(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$, $\sigma(y,x,u) \in C(\mathbf{R}^d, X, \mathbf{R}^d)$, $G(y,x,u) \in C(\mathbf{R}^d, X, \mathbf{R}^d)$

Тоді для довільного ε *справджується слабка збіжність*

$$(y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \Rightarrow (\hat{y}^\varepsilon(t), \hat{u}^\varepsilon(t)), \tag{1.81}$$

де $\varepsilon < \varepsilon_0$ *достатньо мале та граничний процес* $(\hat{y}^\varepsilon(t), \hat{u}^\varepsilon(t))$ *визначений генератором*

$$L\varphi(y,u) = A(y,u)\varphi(y,u) + \frac{1}{2}B(y,u)\varphi(y,x) \tag{1.82}$$

з представленням на тест-функціях $\varphi(y,u) \in C^{3,2}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$

$$A(y,u) = a(y)\varphi'_y(y,u) + \alpha(t)G(y,u)\varphi'_u(y,u), \tag{1.83}$$

де $a(y) = \int\limits_X a(y,x)\pi(dx)$, $G(y,u) = \int\limits_X G(y,x,u)\pi(dx)$, $B(u,y) = \hat{\sigma}^2(y,u)\varphi''_{yy}(y,u)$, $\hat{\sigma}^2(y,u) = \int\limits_X \sigma^2(y,x,u)\pi(dx)$.

Наслідок 1.3.1. Граничний процес керування $(\hat{y}^\varepsilon(t), \hat{u}^\varepsilon(t))$ опишемо рівняннями

$$d\hat{y}(t) = a(\hat{y}(t))dt + \sigma(\hat{y}(t), \hat{u}(t))dW(t), \tag{1.84}$$

$$d\hat{u}(t) = \alpha(t)G(\hat{y}(t), \hat{u}(t))dt. \tag{1.85}$$

Наслідок 1.3.2. Нехай розглядається процес переносу, який описаний у схемі серій стохастичнгим диференціальним рівнянням

$$dy^\varepsilon(t) = a(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), u^\varepsilon(t))dt + \sigma(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), u^\varepsilon(t))dW(t) \tag{1.86}$$

з керуванням $u^\varepsilon(t)$, яке визначене рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = \alpha(t)G(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), u^\varepsilon(t))dt$$

та складовими $a(y,x,u)$, $G(y,x,u)$, $\sigma(y,x,u) \in C(\mathbf{R}^d, X, \mathbf{R}^d)$.

Тоді справедливою є слабка збіжність

$$(y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \Rightarrow (\hat{y}^\varepsilon(t), \hat{u}^\varepsilon(t)),$$

де граничний процес визначений на тест-функціях $\varphi(y,x,u) \in C^{3,0,3}(\mathbf{R}^d, X, \mathbf{R}^d)$ генератором (1.82), де

$$A(y,u)\varphi(y,u) = a(y,u)\varphi'_y(y,x) + G(y,u)\varphi'_u(y,u),$$

$$a(y,u) = \int\limits_X a(y,x,u)\pi(dx).$$

Для початку встановимо декілька властивостей генератора трьохкомпонентного марковського процесу $y_t^\varepsilon = y_t^\varepsilon(t)$, $x_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon(t)$, $u_t^\varepsilon = u_t^\varepsilon(t)$, який визначається співвідношенням

$$L^\varepsilon(y,x)\varphi(y,x,u) =$$

$$= \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta}\mathbf{E}[\varphi(y_{t+\Delta t}^\varepsilon, x_{t+\Delta t}^\varepsilon, u_{t+\Delta t}^\varepsilon) - \varphi(y,x,u)|y_t^\varepsilon = y; x_t^\varepsilon = x, u_t^\varepsilon = u].$$

Введемо позначення умовного математичного сподівання з відповідними розкладами приростів:

$$\mathbf{E}_{y,x,u}\varphi(y+\Delta y, x_{t+\Delta t}^\varepsilon, u+\Delta u) =$$

$$= \mathbf{E}[\varphi(y+\Delta y, x_{t+\Delta t}^\varepsilon, u+\Delta u)|y_t^\varepsilon = y, x_t^\varepsilon = x, u_t^\varepsilon = u].$$

Оскільки

$$\mathbf{E}_{y,x,u}\varphi(y+\Delta y, x_{t+\Delta t}^\varepsilon, u+\Delta u) =$$

$$= \mathbf{E}_{y,x,u}\varphi\left(y + \int\limits_t^{t+\Delta t} a(y^\varepsilon(s),x)ds + \int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s), x, u+\Delta u\right)\times$$

$$\times I(\theta > \varepsilon^{-1}\Delta) + \mathbf{E}_{y,x,u}\varphi(u + \int\limits_t^{t+\Delta t} a(y^\varepsilon(s), x_{t+\Delta t}^\varepsilon)ds +$$

$$+ \int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s), x_{t+\Delta}^\varepsilon, u^\varepsilon(s))dW(s), x_{t+\Delta t}^\varepsilon, u+\Delta u) I(\theta < \varepsilon^{-1}\Delta) + o(\Delta), \quad (1.86)$$

де θ – час перебування марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, у стані x, то

$$I(\theta > \varepsilon^{-1}\Delta) = 1 - \varepsilon^{-1}q(x)\Delta + o(\Delta),$$

$$I(\theta <= \varepsilon^{-1}\Delta) = \varepsilon^{-1}q(x)\Delta + o(\Delta).$$

Для першого доданку в (1.86) маємо

$$\varphi(y + \int\limits_t^{t+\Delta t} a(y^\varepsilon(s),x)ds + \int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s), x, u+\Delta u) =$$

$$= \varphi(v + \int\limits_t^{t+\Delta}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s), x, u+\Delta u),$$

де $v = y + \int\limits_t^{t+\Delta t} a(y^\varepsilon(s),x)ds$.

Для останнього представлення тест-функції з урахуванням $\pm\varphi(v,x,u+\Delta u)$ маємо

$$\varphi(v+\int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s),x,u+\Delta u)=$$

$$=\varphi'_y(v,x,u+\Delta u)\int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(v,x,u+\Delta u)[\int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s)]^2+\varphi(v,x,u+\Delta u)+o(\Delta). \quad (1.87)$$

Оскільки

$$\varphi'_y(v,x,u+\Delta u)=\varphi'_y(v,x,u)+\varphi''_{uy}(v,x,u)\Delta u+o(\Delta)=$$

$$=\varphi'_y(v,x,u)+\varphi''_{uy}(v,x,u)\alpha(t)G(y,x,u)\Delta u+o(\Delta),$$

$$\varphi''_{yy}(v,x,u+\Delta u)=\varphi''_{yy}(v,x,u)+\varphi'''_{yyu}(v,x,u)\alpha(t)G(y,x,u)\Delta u+o(\Delta),$$

то для (1.87) отримаємо

$$\varphi(v+\int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s),x,u+\Delta u)=$$

$$=\varphi(v,x,u)+\varphi'_u(v,x,u)\alpha(t)G(y,x,u)\Delta u+o(\Delta)+$$

$$+\varphi'_y(v,x,u)\int\limits_t^{t+\Delta t}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s)+$$

$$+\alpha(t)\varphi''_{yu}(v,x,u)G(y,x,u)\int\limits_t^{t+\Delta}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s)\Delta+o(\Delta)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(v,x,u)[\int\limits_t^{t+\Delta}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s)]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha(t)\varphi'''_{yyu}(v,x,u)[\int\limits_t^{t+\Delta}\sigma(y^\varepsilon(s),x,u^\varepsilon(s))dW(s)]^2G(y,x,u)\Delta+o(\Delta). \quad (1.88)$$

Враховуючи представлення змінної v і неперервну диференційовність тест-функцій φ, маємо

$$\varphi(v,x,u)=\varphi(y+\int\limits_t^{t+\Delta}a(y^\varepsilon(s),x)ds,x)=\varphi(y,x,u)+\varphi'_y(y,x,u)a(y,x)\Delta+o(\Delta).$$

Аналогічні представлення мають усі складові зі змінною v у (1.88). Тому згідно (1.88) отримаємо

$$\varphi(v + \int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))dW(s), x, u + \Delta u) =$$

$$= \varphi(y, x, u) + \varphi'_y(y, x, u)a(y, x)\Delta + o(\Delta) + \alpha(t)\varphi'_u(y, x, u)G(y, x, u)\Delta +$$

$$+ o(\Delta) + \varphi'_y(y, x, u)a(y, x) \int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))dW(s)\Delta + o(\Delta) +$$

$$+ \alpha(t)\varphi''_{yu}(y, x, u)G(y, x, u) \int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))dW(s)\Delta + o(\Delta) +$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi''_{yy}(v, x, u)[\int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))dW(s)]^2 + o(\Delta) +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha(t)\varphi'''_{yyu}(v, x, u)[\int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))dW(s)]^2 G(y, x, u)\Delta + o(\Delta).$$

Оскільки для умовного математичного сподівання справедливими є співвідношення

$$\mathbf{E}_{u,x,y} \int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))dW(s) = 0,$$

$$\mathbf{E}_{u,x,y}[\int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))dW(s)] = \sigma^2(y, x, u)\Delta + o(\Delta),$$

отримаємо

$$E_{u,x,y}[\varphi(y + \Delta y, x^\varepsilon_{t+\Delta}, u + \Delta u)] =$$

$$= \varphi(y, x, u) + [\varphi'_y(y, x, u)a(y, x) + \alpha(t)\varphi'_u(y, x, u)G(y, x, u)]\Delta +$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y, x, u)\sigma^2(y, x, u)\Delta - \varepsilon^{-1}q(x)E_{y,x,u}\varphi(y, x, u)\Delta +$$

$$+ \varepsilon^{-1}q(x)E_{y,x,u}\varphi(y, x^\varepsilon_{t+\Delta}, u)\Delta + o(\Delta).$$

Таким чином, для генератора $L^\varepsilon(y, x)$ маємо

$$L^\varepsilon(y, x)\varphi(y, x, u) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\varepsilon^{-1}q(x)E_{y,x,u}[\varphi(y, x^\varepsilon_{t+\Delta}, u) - \varphi(y, x, u)] +$$

$$+\varphi'_y(y,x,u)a(y,x)+\alpha(t)\varphi'(u)(y,x,u)G(y,x,u)+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,u)\sigma^2(y,x,u)=$$

$$=\varepsilon^{-1}Q\varphi(y,x,u)++\varphi'_y(y,x,u)a(y,x)+\alpha(t)\varphi'(u)(y,x,u)G(y,x,u)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,u)\sigma^2(y,x,u).$$

Міркування, наведені вище, сформулюємо у вигляді твердження.

Лема 1.3.1. *Генератор трьохкомпонентного марковського процесу*

$$y_t^\varepsilon := y^\varepsilon(t),\ x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon),\ u_t^\varepsilon := u^\varepsilon(t),\ t\geq 0,$$

на тест-функціях $\varphi(y,x,u)\in C^{3,0,2}(\mathbf{R}^d,X,\mathbf{R}^d)$ *має представлення*

$$L^\varepsilon(y,x)\varphi(y,x,u)=\varepsilon^{-1}Q\varphi(y,x,u)+L(x)\varphi(y,x,u), \tag{1.89}$$

де

$$L(x)\varphi(y,x,u)=\varphi'_y(y,x,u)a(y,x)+\alpha(t)\varphi'_u(y,x,u)G(y,x,u)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,u).$$

Лема 1.3.2. *Розв'язання проблеми сингулярного збурення для генератора (1.89) на тест-функціях* $\varphi^\varepsilon(y,x,u)=\varphi(y,x)+\varepsilon\varphi_1(y,x,u)$ *визначає граничний генератор*

$$L\varphi(y,u)=L_y\varphi(y,u)+L_u\varphi(y,u),$$

де

$$L_y\varphi(y,u)=a(y)\varphi'_y(y,u)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,u)\varphi''_{yy},$$

$$L_u\varphi(y,u)=\alpha(t)G(y,u)\varphi'_u(y,u),$$

$$a(y)=\int_X a(y,x)\pi(dx),$$

$$G(y,u)=\int_X G(y,x,u)\pi(dx),$$

$$\sigma^2(y,u)=\int_X \sigma^2(y,x,u)\pi(dx)$$

Доведення. Розглянемо представлення

$$L^\varepsilon(y,x)\varphi(y,x,u)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,u)+\mathbf{Q}\varphi_1(y,x,u)+L(x)\varphi(y,u)+\varepsilon L(x)\varphi_1(y,x,u),$$

де

$$L(x)=\varphi'_y(y,u)a(y,x)+\alpha(t)G(y,x,u)\varphi'_u(y,u)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,u),$$

із залишковим членом у вигляді $\theta(x) = L(x)\varphi_1(y,x,u) = \theta_y(x) + \theta_u(x)$.

Вираз $\varphi_1(y,x,u)$ запишемо

$$\varphi_1(y,x,u) = R[L - L(x)]\varphi(y,u) = R_0\tilde{L}(x)\varphi(y,u),$$

де

$$\tilde{L}(x) = \tilde{a}(y,x)\varphi'_y(y,u) + \alpha(t)\tilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,u),$$

$$\tilde{a}(y,x) = a(y) - a(y,x),$$
$$\tilde{G}(y,x,u) = G(y,u) - G(y,x,u),$$
$$\tilde{\sigma}^2(y,x,u) = \sigma^2(y,u) - \sigma^2(y,x,u).$$

Таким чином, для залишкових членів $\theta_y(x)$ і $\theta_u(x)$ маємо

$$\theta_y(x) = a(y,x)R_0[\tilde{a}(y,x)\varphi'_y(y,u)]'_y + \frac{1}{2}a(y,x)R_0[\tilde{\sigma}^2(y,x,u)\varphi''_{yy}]'_y +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)R_0[\tilde{a}(y,x)\varphi'_y(y,u)]''_{yu} +$$

$$+\frac{1}{4}\sigma^2(y,x,u)R_0[\tilde{\sigma}^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,u)]''_{yu},$$

$$\theta_u(x) = \alpha(t)a(y,x)R_0[\tilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u)]'_u +$$

$$+\alpha(t)G(y,x,u)R_0[\tilde{a}(y,x)\varphi'_y(y,u)]'_u +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha(t)G(y,x,u)R_0[\tilde{\sigma}^2(y,x,u)\varphi''_{yu}(y,u)]'_u +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha(t)\sigma^2(y,x,u)R_0[\tilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u)]''_{yy} +$$

$$+\alpha^2(t)G(y,x,u)R_0[\tilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u)]'_u.$$

Згідно модельної теореми Королюка [3] $L_y\varphi(y,u)$ визначає граничний дифузійний процес, який задовольняє рівнянню

$$d\hat{y}(t) = a(\hat{y})dt + \sigma(\hat{y},\hat{u})dW(t)$$

з керуванням

$$d\hat{u} = \alpha(t)G(\hat{y},\hat{u}(t))dt.$$

Доведення теореми 1.3.1. Твердження теореми випливає з модельної теореми Королюка [3] та результату леми 1.3.2.

Теорема 1.3.2 *Нехай функція Ляпунова $V(y,u)$ усередненої системи*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(y,u)$$

така, що задовольняє наступним умовам:

$$Y1: \ G(y,u)V'(y,u) - cV(y,u),$$

$$Y2: \ |a(y,x)R_0[\tilde{G}(y,x,u)V'_u(y,u)]'_y| \le c_1 V(y,u),$$

$$|G(y,x,u)R_0[\tilde{a}(y,x)V'_y(y,u)]'_u| \le c_2 V(y,u),$$

$$|G(y,x,u)R_0[\tilde{\sigma}^2(y,x,u)V''_{yu}(y,u)]'_u| \le c_3 V(y,u),$$

$$|\sigma^2(y,x,u)R_0[\tilde{G}(y,x,u)V'_u(y,u)]''_{yy}| \le c_4 V(y,u),$$

$$|G(y,x,u)R_0[\tilde{G}(y,x,u)V'_u(y,u)]'_u| \le c_5(1+V(y,u)).$$

Нехай далі, функція $\alpha(t)$ така, що

$$\int\limits_0^\infty \alpha(t)dt = \infty, \ \int\limits_0^\infty \alpha^2(t)dt < \infty.$$

Тоді для $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 – досить мале, справедливою є збіжність

$$P \lim_{t\to\infty} u(t) = u^* = 1.$$

Доведення. Розглянемо генератор граничного керування

$$L_u^\varepsilon V(y,u) = L_u V(y,u) + \varepsilon\theta_u(x),$$

для якого з умов $Y1$, $Y2$ отримаємо оцінку

$$L_u^\varepsilon V(y,u) \le c\alpha(t)V(y,u) + c^*\alpha^2(t)(1+V(y,u)),$$

з якої і випливає твердження теореми 1.3.2.

Асимптотичне значення керування u^* дає можливість розглянути флуктуації відхилень керування $u(t)$від u^*, а також встановити його головні характеристики.

1.4. Асимптотика нормованого керування з марковськими переключеннями

У цьому підрозділі розглянемо випадок, коли процес переносу як випадкова еволюція змінюється під впливом марковського переключення по траєкторії нової еволюції зі стану, в якому вона була в момент переключення, як початкового.

Нехай процес переносу $y(t)^2 \in \mathbf{R}^d$ визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$dy^\varepsilon(t) = a(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))dt + \sigma(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), u^\varepsilon(t))dW(t), \quad (1.90)$$

де $x(t)$, $t > 0$ – рівномірно ергодичний марковський процес у вимірному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, визначений генератором (1.75) на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум-нормою

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

Генератор $\mathbf{Q}$ є зведено-оборотним на $B(X)$ з проектором

$$\Pi\varphi(x) := \int_X \pi(dx)\varphi(x),$$

де $\pi(B)$, $(B \in X)$ – стаціонарний розподіл марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, який визначається зі співвідношень

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

де $p(dx)$ – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова x_n, $n \geq 0$ і потенціалом R_0 марковської напівгрупи

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}.$$

Як і в п.1.3., функції $a(y,x) = (a_k(y,x), k = \overline{1,d})$, $\sigma(y,x,u) = (\sigma_k(y,x,u), k = \overline{1,d})$, $y \in \mathbf{R}^d$, $x \in X$, задовольняють умовам існування глобального розв'язку еволюційних рівнянь

$$dy_x(t) = a(y_x(t), x(t))dt + \sigma(y_x(t), x(t), u_x(t))dW(t),\ x \in X$$

для кожного фіксованого значення x марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, на інтервалі $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ перебування процесу $x(t)$, $t \geq 0$, у стані $x \in X$.

Нехай в загальному представленні (1.90) керування $u(t)$ визначається умовою

$$du^\varepsilon(t) = \alpha(t)G(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), u^\varepsilon(t)) = 0, \tag{1.91}$$

де умови на функцію $\alpha(t)$ мають вигляд

$$\int_0^\infty \alpha(t)dt = \infty,\ \int_0^\infty \alpha^2(t)dt < \infty. \tag{1.92}$$

Зокрема, умови (1.92) виконуються при $\alpha(t) = \frac{\alpha}{t}$, що і буде використовуватись далі.

Зауважимо, що умови (1.92) забезпечують збіжність керування $u^\varepsilon(t)$ до точки рівноваги критерію якості керування, тобто до точки u^*, що визначається з умови

$$G(y,u^*) = 0,\ G(y,u) = \int\limits_X \pi(dx)G(y,x,u).$$

Нормоване керування має вигляд

$$v^\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{t}}{\varepsilon}u^\varepsilon(t), \tag{1.93}$$

а умова балансу записується так

$$\varPi G(y,x,0) = \int\limits_X \pi(dx)G(y,x,0) = 0.$$

Теорема 1.4.1. *При умовах збіжності (1.92) задачі (1.90), (1.91) та додаткових умовах*

$$D1:\ \sigma_v^2(y) = 2\int\limits_X \pi(dx)G(y,x,0)\mathbf{R}_0G(y,x,0) > 0$$

$$D2:\ \alpha g < -\frac{1}{2},\ g(y) = \int\limits_X \pi(dx)G'_v(y,x,0)$$

має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t),\ \varepsilon \to 0$$

у кожному скінченному інтервалі $(0 < t_0 < t < T)$.

Граничний процес $\zeta(t),\ t > 0$ *є процесом Орнштейна-Уленбека, що визначаєтьcя генератором*

$$\mathbf{L}_v\varphi(y,v) = v(\alpha g(y) + \frac{1}{2})\varphi'_v(y,v) + \frac{1}{2}\alpha^2\hat{\sigma}^2_\nu(y)\varphi''_{vv}(y,v).$$

Встановимо декілька допоміжних властивостей процесу переносу $y^\varepsilon(t)$ та нормованого керування $v^\varepsilon(t)$.

Лема 1.4.1. *Процеси* $y^\varepsilon(t)$ *та* $v^\varepsilon(t)$ *є розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь*

$$dy^\varepsilon(t) = a(y^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon)dt + \sigma(y^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v^\varepsilon(t))dW(t), \tag{1.94}$$

$$dv^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v^\varepsilon(t))dt + \frac{v^\varepsilon(t)}{2t}dt, \tag{1.95}$$

$$x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^2).$$

Доведення. З (1.93) маємо

$$u^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} v^\varepsilon(t).$$

Тому, враховуючи (1.91), отримаємо (1.94) та (1.95).

Лема 1.4.2. *Генератор трикомпонентного марковського процесу*

$$y_t^\varepsilon := y^\varepsilon(t),\ x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2),\ u_t^\varepsilon := u^\varepsilon(t),\ t \geq 0, \tag{1.96}$$

має вигляд

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v) + \mathbf{V}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v), \tag{1.97}$$

де

$$\mathbf{V}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v) = [\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}v}) + \frac{v}{2t}]\varphi'_v(y,x,v) +$$

$$+\varphi'_y(y,x,v)a(y,x) + \frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,v)\sigma^2(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v).$$

Доведення. Для побудови генератора процесу (1.96), обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(y_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon, v_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(y,x,v)|_{y^\varepsilon(t)=y, x^\varepsilon(t)=x, v^\varepsilon(t)=v}] =$$

$$= E[\varphi(y+\Delta y^\varepsilon, x, v+\Delta v^\varepsilon) - \varphi(y,x,v)]I(\theta > \varepsilon^{-2}\Delta) +$$

$$+E[\varphi(y+\Delta y^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon, v+\Delta v^\varepsilon) - \varphi(y,x,v)]I(\theta < \varepsilon^{-2}\Delta), \tag{1.98}$$

де θ – час перебування марковського процесу $x(t),\ t > 0$, у стані x.

Врахуємо надалі представлення

$$I(\theta \geq \varepsilon^{-2}\Delta) = 1 - \varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta),$$

$$I(\theta < \varepsilon^{-2}\Delta) = \varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta)$$

З (1.94) маємо

$$y_{t+\Delta}^\varepsilon = y + \Delta y^\varepsilon = y + \int_t^{t+\Delta} a(y^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon)ds +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v^\varepsilon(s))dW(s) = \bar{y} + \int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v^\varepsilon(s))dW(s),$$

де

$$\bar{y} = y + \int\limits_t^{t+\Delta} a(y^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon)ds.$$

Розглянемо

$$\varphi(y + \Delta y^\varepsilon, x, v + \Delta v^\varepsilon) = \varphi(\bar{y} + \int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}})v^\varepsilon(s))dW(s), x, v + \Delta v^\varepsilon) =$$

$$= \varphi(\bar{y}, x, v + \Delta v^\varepsilon) + \varphi'_y(\bar{y}, x, v + \Delta v^\varepsilon) \int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}})v^\varepsilon(s))dW(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(\bar{y}, x, v + \Delta v^\varepsilon)[\int\limits_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}})v^\varepsilon(s))dW(s)]^2 + o(\Delta).$$

Враховуючи (1.95), маємо представлення

$$\varphi'_y(\bar{y}, x, v + \Delta v^\varepsilon) = \varphi'_y(\bar{y}, x, v) +$$

$$+\varphi''_{yy}(\bar{y}, x, v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y, x, v) + \frac{v}{t}]\Delta + o(\Delta),$$

а також

$$\varphi(\bar{y}, x, v + \Delta v^\varepsilon) = \varphi(y, x, v + \Delta v^\varepsilon) +$$

$$+\varphi'_y(y, x, v + \Delta v^\varepsilon)a(y, x)\Delta + o(\Delta) =$$

$$= \varphi(y, x, v) + \varphi'_v(y, x, v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y, x, v) + \frac{v}{t}]\Delta +$$

$$+\varphi'_y(y, x, v)a(y, x)\Delta + o(\Delta).$$

Так само отримуємо

$$\varphi'_y(\bar{y}, x, v + \Delta v^\varepsilon) = \varphi'_y(y, x, v) +$$

$$+\varphi''_{yv}(y, x, v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y, x, v) + \frac{v}{t}]\Delta +$$

$$+\varphi''_{yy}(y, x, v)a(y, x)\Delta + o(\Delta).$$

А також

$$\varphi''_{yv}(\bar{y}, x, v + \Delta v^\varepsilon) = \varphi''_{yy}(y, x, v) +$$

$$+\varphi'''_{yyv}(y, x, v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y, x, \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}u) + \frac{v}{t}]\Delta +$$

$$+\varphi^{IV}_{yyyy}(y, x, v)a(y, x)\Delta + o(\Delta).$$

Враховуючи останню рівність, маємо

$$\varphi(y+\Delta y^\varepsilon,x,v+\Delta v^\varepsilon)=\varphi(y,x,v)+\varphi'_v(y,x,v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v)+\frac{v}{2t}]\Delta+$$

$$+\varphi'_y(y,x,v)a(y,x)\Delta+$$

$$+[\varphi'_y(y,x,v+\varphi''_{yv}(y,x,v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v)+\frac{v}{2t}]\Delta+$$

$$+\varphi''_{yv}(y,x,v)a(y,x)\Delta]\int\limits_t^{t+\Delta}\sigma(y^\varepsilon(s),x_s^\varepsilon,\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}))dW(s)+$$

$$+\frac{1}{2}[\varphi''_{yy}(y,x,v)+\varphi'''_{yyv}(y,x,v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v)+\frac{v}{2t}]\Delta+$$

$$+\varphi^{IV}_{yyyy}(y,x,v)a(y,x)\Delta]\int\limits_t^{t+\Delta}\sigma(y^\varepsilon(s),x_s^\varepsilon,\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}}))dW(s)]^2+o(\Delta).$$

Це дає можливість для першого доданку з (1.98) отримати

$$E_{y,x,v}[\varphi(y+\Delta y^\varepsilon,x,v+\Delta v^\varepsilon)-\varphi(y,x,v)](1-\varepsilon^{-2}q(x)\Delta+o(\Delta))=$$

$$=\varphi'_v(y,x,v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v)+\frac{v}{2t}]\Delta+$$

$$+\varphi'_y(y,x,v)a(y,x)\Delta+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,v)\sigma^2(y^\varepsilon(s),x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v)\Delta+o(\Delta).$$

Так само для другого доданку з (1.98) маємо

$$E_{y,x,v}[\varphi(y+\Delta y^\varepsilon,x_{t+\Delta}^\varepsilon,v+\Delta v^\varepsilon)-\varphi(y,x,v)][\varepsilon^{-2}q(x)\Delta+o(\Delta)]=$$

$$=\varepsilon^{-2}q(x)E_{y,x,v}[\varphi(y,x_{t+\Delta}^\varepsilon,v)-\varphi(y,x,v)]+o(\Delta).$$

Таким чином, для генератора процесу (1.96), згідно означення, маємо

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v):=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{y,x,v}[\varphi(y+\Delta y^\varepsilon,x_{t+\Delta}^\varepsilon,v+\Delta v^\varepsilon)-\varphi(y,x,v)]=$$

$$=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y,x,v)+\mathbf{V}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v),$$

де

$$\mathbf{V}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v)=\varphi'_v(y,x,v)[\varepsilon^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{t}}G(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v)+\frac{v}{2t}]+$$

$$+\varphi'_v(y,x,v)a(x,y)+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(y,x,v)\sigma^2(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v).$$

Лема 1.4.3. *Генератор* $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ *на тест-функціях* $\varphi(y,x,v)\in C^{3,0,3}(R,X,R)$ *має асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y,x,v) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{G}_0(y,x)\varphi(y,x,v) +$$

$$+\frac{1}{t}\mathbf{V}(y,x)\varphi(y,x,v) + \mathbf{A}(y,x)\varphi(y,x,v) + o(\varepsilon), \tag{1.99}$$

де

$$\mathbf{G}_0(y,x)\varphi(y,x,v) = \alpha G(y,x,0)\varphi'_v(y,x,v),$$

$$\mathbf{V}(y,x)\varphi(y,x,v) = v(\alpha G'_v(y,x,0) + \frac{1}{2})\varphi'_v(y,x,v),$$

$$\mathbf{A}(y,x)\varphi(y,x,v) = +a(y,x)\varphi'_v(y,x,v) + \frac{1}{2}\sigma^2(y,x,0)\varphi''_{yy}(y,x,v).$$

Доведення. Враховуючи розклади

$$G(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v) = G(y,x,0) + G'_v(y,x,0)\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v + o(\varepsilon),$$

$$\sigma^2(y,x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}v) = \sigma^2(y,x,0) + o(\varepsilon),$$

і з (1.97) отримуємо (1.99).

Розглянемо збурену тест-функцію

$$\varphi_t^\varepsilon(y,x,v) = \varphi(y,v) + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(y,x,v) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi(y,x,v).$$

Лема 1.4.4. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного генератора*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(y,x,v) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y,x,v) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{G}_0(y,x)\varphi(y,x,v) +$$

$$+\frac{1}{t}\mathbf{V}(y,x)\varphi(y,x,v) + \mathbf{A}(y,x)\varphi(y,x,v) \tag{1.100}$$

на тест-функціях $\varphi_t^\varepsilon(y,x,v)$ з $\varphi(x,y) \in C^{3,3}(R\times R)$ має вигляд

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi_t^\varepsilon(y,x,v) = \frac{1}{t}\mathbf{L}\varphi(y,v) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(y,v), \tag{1.101}$$

де граничний генератор $\mathbf{L}$ *визначається співвідношенням*

$$\mathbf{L}\varphi(y,v) = v(\alpha g(y) + \frac{1}{2})\varphi'_v(y,v) + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_v^2(y)\varphi''_{vv}(y,v) +$$

$$+t\hat{a}(y)\varphi'_y(y,v) + \frac{t}{2}\hat{\sigma}_y^2(y)\varphi''_{yy}(y,v) \tag{1.102}$$

де

$$\hat{a}(y) = \int\limits_X \pi(dx)a(y,x), \ \hat{\sigma}_y^2(y) = \int\limits_X \pi(dx)\sigma^2(y,x,0).$$

Доведення. Згідно зі схемою розв'язання проблеми сингулярного збурення, обчислюємо значення генератора (1.100) на збуреній функції $\varphi_t^\varepsilon(y,x,v)$:

$$\mathbf{L}_{t_0}^\varepsilon(x)\varphi_t^\varepsilon(y,x,v) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(y,v) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}[\mathbf{Q}\varphi_1(y,x,v)+$$

$$+\mathbf{G}_0(y,x)\varphi(y,v)] + \frac{1}{t}\mathbf{Q}\varphi_2(y,x,v) + \frac{1}{t}\mathbf{G}_0(y,x)\varphi_1(y,x,v)+$$

$$+\frac{1}{t}(\mathbf{V}(y,x) + t\mathbf{A}(y,x))\varphi(y,v) + \varepsilon\theta_\varepsilon(x)\varphi,$$

де

$$\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(y,v) = \mathbf{A}(y,x)\varphi_1(y,x,v) + \frac{1}{t^{3/2}}\mathbf{G}_0(y,x)\varphi_2(y,x,v) + \varepsilon\frac{1}{t^2}\mathbf{V}(y,x)\varphi_2(y,x,v)+$$

$$+\varepsilon\mathbf{A}(y,x)\varphi_2(y,x,v).$$

Оскільки $\mathbf{Q}\varphi(y,v) = 0$, то для функції $\varphi_1(y,x,v)$ маємо рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(y,x,v) + \mathbf{G}_0(y,x)\varphi_1(y,v) = 0,$$

яке має розв'язок

$$\varphi_1(y,x,v) = \mathbf{R}_0\mathbf{G}_0(y,x)\varphi(y,v) =$$
$$= \alpha\mathbf{R}_0 G(y,x,0)\varphi_v'(y,v),$$

враховуючи виконання умови балансу.

Переходимо до рівняння для функції $\varphi_2(y,x,v)$б а саме

$$\mathbf{Q}\varphi_2(y,v,x) + \mathbf{G}_0(y,x)\varphi_1(y,v,x) + (\mathbf{V}(y,v) + t\mathbf{A}(y,v)\varphi = \mathbf{L}\varphi(y,v), \quad (1.103)$$

де граничний оператор $\mathbf{L}$ визначається з умови розв'язності рівняння (1.102)

$$\mathbf{L} = \varPi\mathbf{G}_0(y,x)\mathbf{R}_0\mathbf{G}_0(y,x) + \varPi\mathbf{V}(y,x) + t\varPi\mathbf{A}(y,x). \quad (1.104)$$

Обчислення правої частини (1.104) дає (1.102).

Рівняння (1.103) має представлення

$$\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{L}(y,x)\varphi(y,x) = \mathbf{L}\varphi(y,x),$$

де

$$\mathbf{L}(y,x) = \mathbf{G}_0(y,x) + \mathbf{R}_0\mathbf{G}_0(y,x) + (\mathbf{V}(y,x) + t\mathbf{A}(y,x)).$$

З останнього представлення та з урахуванням (1.102) маємо

$$\varphi_2(y,x,v) = \mathbf{R}_0\tilde{L}(y,x)\varphi(y,v),$$

де $\tilde{L}(y,x) = \mathbf{L}(y,x) - \mathbf{L}$.

Доведення теореми 1.4.1. Враховуючи гладкість складових системи (1.90), представлень функцій φ_1 та φ_2, отримаємо обмеженість залишкового члена

$$|\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(y,v)| < M, \ M > 0. \tag{1.105}$$

Збіжність процесів $y^\varepsilon(t)$ та $v^\varepsilon(t)$ до процесів $\xi(t)$ та $\zeta(t)$ слідує з (1.101) та (1.105) згідно модельної теореми Королюка [3]. Тут генератор процесу $\xi(t)$ має вигляд

$$\mathbf{L}_y\varphi(y,v) = t\hat{a}(y)\varphi'_y(y,v) + \frac{t}{2}\hat{\sigma}_y^2(y)\varphi''_{yy}(y,v).$$

Генератор граничного процесу $\zeta(t)$ має вигляд (1.102) та є генератором процесу Орнштейна-Уленбека

РОЗДІЛ 2
АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ ТА МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ В УМОВАХ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ ТА ПУАССОНА

2.1. Диференціальні рівняння зі стохастично малими добавками в умовах апроксимації Леві

Розглянемо стохастичну еволюційну систему в ергодичному марковському середовищі, задану стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^\varepsilon(t),\ \ u^\varepsilon(t) \in \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Тут $x(t)$ – рівномірно ергодичний марковський процес у стандартному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, визначений з допомогою генератора

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум-нормою $\|\varphi\| = \max_{x\in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x,B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\rho(B)$, $B \in \mathbf{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$ марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$ можна визначити зі співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ \ q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Визначимо R_0 як потенціальний оператор для генератора $\mathbf{Q}$, який визначається рівністю

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)1(x)$ – проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi :\ \ \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, у схемі апроксимації Леві задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon^2)), \tag{2.2}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, визначається генераторами

$$\Gamma^\epsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R (\varphi(w+v) - \varphi(w))\Gamma^\varepsilon(dv,x),\ \ x \in X \tag{2.3}$$

та задовольняє умовам апроксимації Леві

L1. Апроксимація середніх

$$\int_R v\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2(a_2(x)+\theta_a(x)),\ \theta_a(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

та

$$\int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(b(x)+\theta_b(x)),\ \theta_b(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

L2. Умова на функцію розподілу

$$\int_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon^2(\Gamma_g(x)+\theta_g(x)),\ \theta_g(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

для всіх $g(v)\in C^3(R)$ (простір дійснозначних обмежених функцій таких, що $g(v)/|v|^2 \to 0,\ |v|\to 0$). Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v)\in C^3(R)$ і визначаються співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv,x),\ g(v)\in C^3(R);$$

L3. Рівномірна квадратична інтегровність

$$\lim_{c\to\infty}\int_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x) = 0;$$

Нехай виконується умова балансу

$$\hat{a}_1 := \int_X \pi(dx)a_1(x) = 0. \tag{2.4}$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 2.1.1. *При виконанні умови балансу (2.4) та умов L1 – L3 має місце слабка збіжність*

$$\eta^\varepsilon(t)\to\eta^0(t),\ \varepsilon\to 0$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором

$$\Gamma\varphi(w) = \hat{a}_2\varphi'(w) + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(w) + \int_R[\varphi(w+v)-\varphi(w)]\hat{\Gamma}_0(dv),$$

де

$$\hat{a} = \int_X \pi(dx)(a_2(x)-a_0(x)),$$

$$\sigma^2 = \int\limits_X \pi(dx)(b(x) - b_0(x)) + 2\int\limits_X \pi(dx)a_1(x)R_0a_1(x),$$

$$a_0(x) = \int\limits_R v\Gamma_0(dv, x),$$

$$b_0(x) = \int\limits_R v^2\Gamma_0(dv, x),$$

$$\hat{\Gamma}_0(v) = \int\limits_X \pi(dx)\Gamma_0(v, x)$$

і є процесом Леві, яки має три складові: детермінований зсув, дифузійну складову та пуассонівську стрибкову частину.

Доведення. Для безпосереднього доведення теореми 2.1.1, встановимо деякі допоміжні твердження.

Лема 2.1.1. *Генератори процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(\mathbf{R})$ при виконанні умов апроксимації Леві L1 – L3 допускають асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w), \tag{2.5}$$

де

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = a_1(x)\varphi'(w),$$

$$\Gamma_2(x)\varphi(w) = (a_2(x) - a_0(x))\varphi'(x) + \frac{1}{2}(b(x) - b_0(x))\varphi''(x)+$$

$$+\int\limits_R [\varphi(w + v) - \varphi(v)]\Gamma_0(dv, x).$$

Доведення леми 2.1.1. Використовуючи розклад функції $\varphi(w)$ у ряд Тейлора, здійснимо перетворення генератора (2.3):

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int\limits_R (\varphi(w + v) - \varphi(v))\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\int\limits_R (\varphi(w + v) - \varphi(v) - v\varphi'(v) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\int\limits_R (v\varphi'(w)\Gamma^\varepsilon(dv, x) + \frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-2}\int\limits_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \int\limits_R (\varphi(u + v) - \varphi(v) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma_0(dv, x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(w)+a_2(x)\varphi'(w)+$$
$$+\frac{1}{2}(b(x)-b_0(x))\varphi''(w)+$$
$$+\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(v))\Gamma_0(dv,x)+\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов L1–L3 (зауважимо також, що функція $\varphi(w+v)-\varphi(w)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\in C^3(\mathbf{R})$, оскільки вона обмежена на підставі обмеженості $\varphi(w)$ разом з її похідними, та виконується співвідношення

$$[\varphi(w+v)-\varphi(w)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)]/|v^2|\to 0$$

при $v\to 0$.

Пам'ятаючи, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w)=o(\varepsilon^2)$, $\varphi(w)\in C^3(\mathbf{R})$, отримаємо представлення (2.5).

Доведення леми 2.1.1 завершене.

Лема 2.1.2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2))$, $t\geq 0$ *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x)$$
$$+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x)+\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \tag{2.6}$$

де оператор $\mathbf{\Gamma}_1(x)$, $\mathbf{\Gamma}_2(x)$ *визначені у лемі 2.1.1, а залишковий член* $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)\|\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$, $\varphi(w,\cdot)\in C^3(\mathbf{R})$.

Доведення. Твердження леми стає очевидним, якщо використати визначення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$.

Зрізаний оператор має структуру

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x)+$$
$$+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x). \tag{2.7}$$

Лема 2.1.3. *При виконанні умови балансу (2.4), розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.7) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x)=\varphi(w)+\varepsilon\varphi_1(w,x)+\varepsilon^2\varphi_2(w,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x)=\Gamma\varphi(w)+\varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{2.8}$$

де залишковий член $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ *рівномірно обмежений по* x.

Граничний оператор визначається співвідношенням

$$\mathit{\Gamma} = \mathit{\Pi}\mathbf{\Gamma}_1(X)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\mathit{\Pi} + \mathit{\Pi}\mathbf{\Gamma}_2(x)\mathit{\Pi}. \tag{2.9}$$

Доведення. Для виконання рівності (2.8) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа були однаковими. Обчислимо

$$\mathit{\Gamma}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w)+$$
$$+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)]+$$
$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_2(w,x)]+$$
$$+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_1(w,x)]+$$
$$+\varepsilon^2\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_2(w,x).$$

Перший доданок дає
$$\mathbf{Q}\varphi(w) = 0 \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_{\mathbf{Q}}.$$

Звідси бачимо, що $\varphi(w)$ не залежить від x.

Умова балансу (2.4) є умовою розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = 0.$$

Тому
$$\varphi_1(w,x) = R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w). \tag{2.10}$$

Рівняння
$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w)$$
з урахуванням (2.10), можна звести до вигляду

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w).$$

Умова розв'язності останнього рівняння дасть граничний оператор у вигляді (2.9). Тоді
$$\varphi_2(w,x) = R_0[\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x) + \mathbf{\Gamma}_2(x) - \mathbf{\Gamma}]\varphi(w). \tag{2.11}$$

Використавши (2.10) та (2.11), решту членів розкладу можна записати так

$$\varepsilon[\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_1(w,x)] + \varepsilon^2\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x) =$$
$$= \varepsilon[[\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0[\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x) + \mathbf{\Gamma}_2(x) - \mathit{\Gamma}] + \mathbf{\Gamma}_2(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x)]+$$
$$+\varepsilon\mathbf{\Gamma}_2(x)R_0[\mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)-$$
$$-\mathbf{\Gamma}]]\varphi(w) = \varepsilon\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(w).$$

Обмеженість $\theta_{\eta}^{\varepsilon}(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\mathbf{\Gamma}_1$, $\mathbf{\Gamma}_2$ і R_0.

Лему 2.1.3 доведено.

Завершення доведення теореми 2.1.1 реалізується з допомогою леми 2.1.3 та теореми 6.3 з [7].

Далі розглянемо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (2.1).

Теорема 2.1.2. *При виконанні умови балансу та умов апроксимації Леві L1 – L3 справедливою є слабка збіжність*

$$u^{\varepsilon}(t) \to \hat{u}(t), \ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\hat{u}(t)$ визначається генератором

$$\mathbf{L}\varphi(w) = \hat{C}(u)\varphi'(w) + \mathbf{\Gamma}\varphi(w), \tag{2.12}$$

де $\hat{C}(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x)$.

Зауваження 2.1.1. Слабка збіжність процесів $u^{\varepsilon}(t) \to \hat{u}(t)$, $\varepsilon \to 0$, буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності дограничної сукупності процесів $u^{\varepsilon}(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів з незалежними приростами у схемі апроксимації Леві були доведені, зокрема, у [7].

Зауваження 2.1.2. Граничний процес $\hat{u}(t)$ задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\hat{u}_d(t) = [\hat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}_2]dt + \sigma dW(t) + \int\limits_R v\tilde{\nu}(dt, dv),$$

де $\mathbf{E}\tilde{\nu}(dt, dv) = dt\tilde{\Gamma}_0(dv)$.

Зауваження 2.1.3. Граничний процес $\hat{u}(t)$ має три складові. Детермінований зсув визначається розв'язком диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t) = [\hat{C}(\hat{u}_d(t)) + \hat{a}_2]dt, \tag{2.13}$$

де додатковий доданок $\hat{a}_2$ виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованого часу t/ε^2, $\varepsilon \to 0$ дуже малих стрибків порядку ε^2, які відбуваються з імовірністю, близькою до одиниці.

Друга, дифузійна складова, визначається параметром σ та виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованого часу t/ε^2, $\varepsilon \to 0$ малих стрибків порядку ε, які також відбуваються з імовірністю, близькою до одиниці.

Третя складова відображає рідкісні великі стрибки, що відбуваються з імовірністю, близькою до нуля, і визначаються через усереднену міру стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$ генератором

$$\Gamma_j\varphi(w) = \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(w)]\tilde{\Gamma}_0(dv).$$

Доведення теореми 2.1.2.

Встановимо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 2.1.4. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))$, $t \geq 0$, *має представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)+$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(w,x) + \theta^\varepsilon_w\varphi(w,x), \tag{2.14}$$

де $\Gamma^\varepsilon(x)$ *– генератор сукупності ІПЗ (2.3),*

$$\mathbf{C}(x)\varphi(w,x) = C(u,x)\varphi'_w(w,x).$$

Залишковий член $\|\theta^\varepsilon_w\varphi(w,x)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється за схемою, запропонованою в [7].

Лема 2.1.5. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$, *у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x)+$$

$$+\Gamma_2(x)\varphi(w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(w,x) + \hat{\theta}^\varepsilon_w\varphi(w,x), \tag{2.15}$$

де

$$\hat{\theta}^\varepsilon_w(x) = \gamma^\varepsilon + \theta^\varepsilon_w(x),$$

$\mathbf{\Gamma}_1(x)$ *та* $\mathbf{\Gamma}_2(x)$ *визначені у лемі 1.*

Залишковий член

$$\|\hat{\theta}^\varepsilon_w\varphi(w,x)\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється з допомогою представлення оператора (2.5) та результатів леми 2.1.4.

Зрізаний оператор має вигляд

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)\varphi = \varepsilon^2\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi + \mathbf{C}(x)\varphi. \tag{2.16}$$

Лема 2.1.6. *При виконанні умови балансу (2.4) розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.16) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi(w,x)$$

здійснюється зі співвідношення

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^2\theta^\varepsilon_w(x)\varphi(w), \tag{2.17}$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon_w(x)$ *рівномірно обмежений по* x

Граничний оператор $\mathbf{L}$ *задається формулою*

$$\mathbf{L} = \Pi[\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)R_0\mathbf{\Gamma}_1(x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)]\Pi. \tag{2.18}$$

Доведення. Для виконання рівності (2.17) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва та справа були рівними. З цією метою обчислимо:

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}(x)\varphi(w)+$$
$$+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)]+$$
$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_1(w,x)]+$$
$$+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_1(w,x)) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(w,x)]+$$
$$+\varepsilon^2[\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_2(w,x)].$$

Оскільки

$$\mathbf{Q}\varphi(w) \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_Q,$$

то очевидно, що $\varphi(w)$ не залежить від x.

Умова балансу (2.4) є умовою розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \mathit{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = 0.$$

Тому,

$$\varphi_1(w,x) = R_0\mathit{\Gamma}_1(x)\varphi(w).$$

Останнє рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathit{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x)+$$
$$+\mathit{\Gamma}_2(x)\varphi(w) + \mathbf{C}(x)\varphi(w) = \mathbf{L}\varphi(w).$$

Перепишемо його у вигляді

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) = [\mathbf{L} - \mathit{\Gamma}_1(x)R_0\mathit{\Gamma}_1(x) - \mathit{\Gamma}_2(x) - \mathbf{C}(x)]\varphi(w).$$

Умова розв'язності останнього рівняння і дає граничний оператор $\mathbf{L}$ у вигляді (2.18).

Завершення доведення теореми здійснюється за тією ж схемою, що і доведення теореми 6.3 в [7].

2.2. Асимптотична дисипативність випадкових процесів з імпульсним збуренням у схемі апроксимації Леві

Ми розглянемо питання, як поведінка граничного процесу залежить від дограничного нормування стохастичної еволюційної системи в ергодичному марковському середовищі. Дослідимо умови асимптотичної дисипативності дограничної системи в умовах апроксимації Леві

Розглянемо систему (2.1) і вважатимемо виконаними припущення підрозділу 2.1.

Теорема 2.2.1. *Нехай існує функція Ляпунова* $V(u) \in C^3(R^d)$ *системи*

$$\frac{du}{dt} = \alpha(u), \tag{2.19}$$

де $\alpha(u) = \hat{C}(u) + \hat{a}$*, яка задовольняє умовам*
C1: $|\Gamma_u^1(x)R_0\hat{L}V(u)| < M_1V(u),\ M_1 > 0$*;*
C2: $|\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)| < M_2V(u),\ M_2 > 0$*;*
C3: $|\Gamma_u^1(x)R_0(C)(x)V(u)| < M_3V(u),\ M_3 > 0$*;*
C4: $|\mathbf{C}(x)R_0\hat{L}V(u)| < M_4V(u),\ M_4 > 0$*;*
C5: $|\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)| < M_5V(u),\ M_5 > 0$*;*
C6: $|\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)| < M_6V(u),\ M_6 > 0.$

Нехай також виконуються нерівності

$$\alpha(u)V'(u) < -c_1V(u), \tag{2.20}$$

$$\sup_{u\in R^d} \|\sigma(u)\| < c_2(x), \tag{2.21}$$

$$|\int_X v^2\Gamma_0(dv, x)| < c_3(x), \tag{2.22}$$

де $c_1 > 0,\ c_2 > 0,$

$$\hat{c}_3 = \int_X \pi(dx)c_3(x) > 0.$$

Тоді система (2.1) асимптотично дисипативна.

Перед безпосереднім доведенням теореми наведемо низку допоміжних тверджень.

Лема 2.2.1. *Генератор трикомпонентного марковського процесу* $u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon : 2, \eta^\varepsilon(t, x)),\ t \geq 0$*, можна представити у вигляді*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x) + \Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) +$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x), \tag{2.23}$$

де $\Gamma_w^\varepsilon(x)$ *– генератор сукупності процесів з незалежними приростами (2.3), що діє по змінній* w*, а* $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ *– еквівалентний попередньому генератор сукупності процесів з незалежними приростами (2.3), що діє по змінній* u*.*

Доведення. Генератор марковського процесу на збуреній тест-функції визначається зі співвідношення

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) -$$

$$-\varphi(u, w, x)|u^\varepsilon(t) = u,\ \eta^\varepsilon(t) = w,\ x(t/\varepsilon^2) = x].$$

Додамо та віднімемо в умовному математичному сподіванні $\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)$

$$E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) -$$

$$-\varphi(u,w,x)|u^\varepsilon(t)=u,\ \eta^\varepsilon(t)=w,\ x(t/\varepsilon^2)=x]=$$

$$=E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta},w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})]-$$

$$=E[\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,w,x)].$$

Розклад $u^\varepsilon_{t+\Delta}$ має вигляд

$$u^\varepsilon_{t+\Delta}=u+C(u,x)\Delta+\Delta w+o(\Delta).$$

Отриманий вираз підставимо у перший доданок умовного математичного сподівання

$$E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta},w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(u+C(u,x)\Delta+\Delta w+o(\Delta),w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-$$

$$-\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(z+\Delta z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})],$$

де

$$z=u+C(u,x)\Delta+o(\Delta).$$

Додамо і віднімемо $\varphi(z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})$ в отриманому виразі

$$E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta},w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(z+\Delta w,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})]+$$

$$+E[\varphi(z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})].$$

Оскільки генератор $\Gamma^\varepsilon_u(x)$ має вигляд

$$\Gamma^\varepsilon_u(x)\varphi(u,w,x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(E[\varphi(u+\Delta u,w,x)-\varphi(u,w,x)]),$$

то для границі першого доданку отримаємо

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z+\Delta w,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})]=$$

$$=\Gamma^\varepsilon_u(x)\varphi(u,w,x)$$

Розкладемо $\varphi(z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})$ за формулою Тейлора

$$\varphi(u+C(u,x)\Delta+o(\Delta),w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})=$$

$$=\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})+\varphi',w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta+o(\Delta))+o(\Delta).$$

Підставивши у вираз $E[\varphi(z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})]$, отриманий розклад, отримаємо

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z,w^\varepsilon_{t+\Delta},x^\varepsilon_{t+\Delta})-$$

$$-\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) + \varphi'(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) +$$

$$+ o(\Delta) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi'(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta)] =$$

$$= C(u,x)\varphi'(u,w,x).$$

Так само, зі співвідношення для генератора $\Gamma^\varepsilon_w(x)$ та очевидного співвідношення для генератора марковського процесу

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)] = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x),$$

отримуємо

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}), x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}), x^\varepsilon_{t+\Delta}) -$$

$$-\varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta}))] + \varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta})) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}), x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta})] +$$

$$+ \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \Gamma^\varepsilon_w(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x),$$

звідки і бачимо, що $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ має вигляд (2.23).

Лема 2.2.2. *Генератор (2.23) допускає асимптотичний розклад*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) +$$

$$+\Gamma^1_u(x)\varphi(u,w,x) + C(u)\varphi(u,w,x) +$$

$$+\Gamma^1_w(x)\varphi(u,w,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)$$

де

$$C(x)\varphi(u) = C(u,x)\varphi'(u),$$

а залишковий член

$$\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)\| \to 0, \ \varepsilon \to 0,$$

$\varphi(u,w,\cdot) \in C^3((R))$.

Зрізаний генератор

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x)+$$
$$+\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w,x) + C(x)\varphi(u,w,x)+$$
$$+\mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w,x). \tag{2.24}$$

Лема 2.2.3. *Розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного генератора (2.24) на збуреній тест-функції*

$$\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x) \tag{2.25}$$

визначається рівністю

$$L_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \hat{L}\varphi(u,w) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(u,w),$$

де

$$\theta^\varepsilon(x) = \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)-$$
$$-\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)+$$
$$+\mathbf{C}(x)R_0\hat{L} - \mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)-$$
$$-\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x) - \mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)+$$
$$+\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\hat{L} - \mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)-$$
$$-\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x).$$

Доведення. Підставимо (2.25) в (2.24).

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}[\varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+$$
$$+\mathit{\Gamma}_u^1(x)[\varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+$$
$$+\mathbf{C}(x)[\varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+$$
$$+\mathit{\Gamma}_w^1[\varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x)] =$$
$$= \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w) + [\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) + \mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w)+$$
$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u,v) + \mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w)]+$$
$$+\varepsilon[\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x)+$$
$$+\mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)].$$

Для існування граничного генератора $\hat{L}\varphi(u,w)$ необхідно, щоб при $\varepsilon \to 0$ виконувалась умова

$$\mathbf{Q}\varphi(u,w) = 0,$$

тобто функція належала нуль-простору оператора $\mathbf{Q}$.

Тоді

$$\hat{L}\varphi(u,w) = \mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) + \mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w)+$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u,w) + \mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w),$$

звідки

$$\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) = [\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)]\varphi(u,w).$$

З умови розв'язності для останнього рівняння маємо

$$\mathit{\Pi}\mathbf{Q}\mathit{\Pi}\varphi_1(u,w,x) = 0 = \mathit{\Pi}[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) -$$

$$-\mathit{\Gamma}_w^1(x)]\mathit{\Pi}\varphi(u,w).$$

Таким чином,

$$\hat{L}\varphi(u,w) = \mathit{\Pi}\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w) + \mathit{\Pi}\mathbf{C}(x)\varphi(u,w) +$$

$$+\mathit{\Pi}\mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w),$$

а

$$\varphi_1(u,w,x) = R_0[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)]\varphi(u,w).$$

Звідси отримаємо розклад для останнього доданку

$$\varepsilon[\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)] =$$

$$= \varepsilon[\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)] +$$

$$+\mathbf{C}[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)] +$$

$$+\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)]]\varphi(u,w).$$

Доведення теореми 2.2.1. На підставі виконання умов теореми С1–С6, має місце обмеженість залишкового члена (2.26)

$$\|\theta^\varepsilon(x)V(u)\| =$$

$$= |\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\hat{L}V(u) - \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)V(u) -$$

$$-\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)V(u) +$$

$$+\mathbf{C}(x)R_0\hat{L}V(u) - \mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)V(u) -$$

$$-\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)V(u) +$$

$$+\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\hat{L}V(u) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)V(u) -$$

$$-\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)V(u)| \le$$

$$\le M_1V(u) + M_2V(u) + M_3V(u) + M_4V(u) + M_5V(u) + M_6V(u),$$

звідки,

$$\|\theta^\varepsilon(x)V(u)\| \le MV(u), \tag{2.27}$$

де $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6$.

З твердження леми 2.2.3, виразу (2.27) та виконання умов модельної теореми Королюка, маємо слабку збіжність

$$(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t)) \Rightarrow (u(t), \eta(t)),\ \varepsilon \to 0.$$

Нехай тепер $\frac{d^{(2.1)}V(u)}{du}$ – похідна функції Ляпунова, обчислена уздовж траєкторії системи (2.1). Оскільки функція Ляпунова повинна задовольняти умову Ліпшиця

$$|V(u_2) - V(u_1)| < K|u_2 - u_1|,$$

де K є сталою величиною, то виконується таке співвідношення

$$\frac{d^{(2.1)}V(u)}{du} \leq \frac{dV(u)}{du} + K[\|\sigma(u)\| \cdot |dW(t)| +$$

$$+ \int\limits_R v^2 \tilde{\varGamma}_0(dv)|dt|],$$

де $\frac{dV(u)}{du}$ – похідна функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії детермінованої системи (2.19),

$$\tilde{\varGamma}_0(dv) = \int\limits_X \pi(dx)\varGamma_0(dv, x).$$

Згідно умов (2.20)–(2.22) теореми, отримаємо

$$\frac{d^{(2.1)}V(u)}{du} \leq -c_1 V(u) + K[c_2|dW(t)| + C|dt|].$$

Отже, з використанням леми 1.7 [35]

$$V(u) \leq V(u_0)\exp -c_1 t + Kc_2 \int\limits_0^t \exp -c_1(t-s)d|w(s)|ds + K\hat{c}_3|dt|.$$

Звідси та леми 1.9 [35] випливає оцінка

$$P|u(t)| > R \leq \frac{V(u)}{\inf\limits_{u \in R^d} V(u)},\ R \to \infty,$$

Отже, система (2.1) є дисипативною,більш того, з виконання умов модельної граничної теореми Королюка [3] та дисипативності граничного процесу слідує, що система (2.1) є асимптотично дисипативною.

2.3. Подвійне укрупнення фазового простору для диференціальних рівнянь зі стохастично малими добавками в умовах апроксимації Леві

При аналізі складних систем часто виникають труднощі, які полягають у значному ускладненні фазового простору системи. Це може призвести до практичної неможливості наглядного представлення моделі. Актуальна проблема сучасної теорії систем - це розвиток математично обґрунтованих методів побудови спрощених моделей, аналіз яких не викликає значних труднощів, в яких характеристики можуть бути прийняті за відповідні характеристики реальних моделей. Ідеї вивчення властивостей складних систем на основі дослідження властивостей їх частин з подальшим переходом до загальної системи, є основою багатьох методів системного аналізу. Вперше алгоритм фазового укрупнення станів системи запропонували і і описали у роботі [23] Королюк В.С. та Турбін А.Ф. Аналіз укрупненої системи значно спрощується, але, разом з тим, при вдалому розщепленні фазового простору, основні характеристики спрощеної системи можуть досить точно відображати відповідні характеристики вихідної. У свою чергу, близькість реальної і укрупненої систем означає і близькість глобальних характеристик, що визначаються на зростаючих інтервалах часу. Важливою властивістю алгоритмів фазового укрупнення є можливість побудови ієрархії укрупнених систем. У цьому підрозділі ми рощглянемо випадок, коли збурення системи визначаються процесом Леві у схемі апроксимації. Нас цікавитиме насамперед, подвійне фазове укрупнення простору станів таких еволюційних моделей.

Розглянемо стохастичну еволюційну систему в ергодичному марковському середовищі, задану стохастичним дифференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t), x^{t/\varepsilon^3})dt + d\eta^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t) \in R, \tag{2.28}$$

де марковський процес $x^\varepsilon(t), t \geq 0$ визначається на стандартному фазовому просторі (E, E) з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k,\ E_k \cap E_{k'} = \emptyset,\ k \neq k'$$

у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - \exp\{-q(x)t\}],\ x \in E,\ B \in E,\ t \geq 0.$$

Нехай також виконуються умови:

МЕ1: Ядро, що описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$ має наступне представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається так

$$P(x, E_k) = 1_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_k, \\ 0, & x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова x_n, $n \geq 0$ на класах E_k, $1 \leq k \leq N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умові

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності

$$P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1.$$

ME2: Асоційований марковський процес $x^0(t)$, $t \geq 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів E_k, $1 \leq k \leq N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx)$, $1 \leq k \leq N$, які задовольняють співвідношенню:

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k \rho_k(dx), \ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x).$$

ME3: Усереднені імовірності виходу

$$\hat{p}_k := q(x) \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E/E_k) > 0, \ 1 \leq k \leq N.$$

Таким чином, збурююче ядро $P_1(x, B)$ визначає перехідні імовірності між класами E_k, $1 \leq k \leq N$. Отже, рівність

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B)$$

означає, що вкладений ланцюг Маркова x_n^ε, $n \geq 0$ проводить великий проміжок часу в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими ймовірностями $\varepsilon P_1(x, E/E_k)$.

За умов ME1 – ME3 має місце слабка збіжність [3]

$$\nu(x^\varepsilon(t)) \Rightarrow \hat{x}(t), \ \varepsilon \to 0, \ \nu(x) = k \in \hat{E} = \{1, ..., N\}, \ x \in E_k, \ 1 \leq k \leq N.$$

Граничний марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ на укрупненому фазовому просторі $\hat{E} = \{1, ..., N\}$ визначається генеруючою матрицею

$$\hat{Q}_1 = (\hat{q}_{kr}, \ 1 \leq k, r \leq N),$$

де

$$\hat{q}_{kr} = \hat{q}_k \hat{p}_{kr},\ k \neq r,\ \hat{q}_k = q_k \hat{p}_k,\ 1 \leq k \leq N,$$

$$\hat{p}_{kr} = p_{kr}/\hat{p}_k,\ p_{kr} = \int\limits_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_r),\ 1 \leq k, r \leq N,\ k \neq r,$$

$$\hat{p}_k = -\int\limits_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_k).$$

ME4: Укрупнений марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ є ергодичним, зі стаціонарним розподілом $\hat{\pi} = (\pi_k,\ k \in \hat{E})$.

Таким чином, оператор Q^ε можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1,\ Q_1(x) = q(x) \int\limits_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Узагальнення такого підходу можна знайти у [8], де оператор $Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1$

$$Q(x) = q(x) \int\limits_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],\ Q_1(x) = q_1(x) \int\limits_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π – проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції визначається так:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\varphi}_k 1_k(x),\ \hat{\varphi}_k := \int\limits_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(dx).$$

Зведений оператор $\hat{Q}_1$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\hat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\hat{\Pi}$ – проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\hat{Q}_1$:

$$\hat{\Pi}\hat{\varphi} := q(x) \sum_{k \in E} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_k.$$

Потенціальна матриця $\hat{R}_0 = [\hat{R}^0_{kj};\ 1 \leq k, l \leq N]$ визначається співвідношеннями

$$\hat{Q}_1 \hat{R}_0 = \hat{R}_0 \hat{Q}_1 = \hat{\Pi} - E.$$

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, у схемі апроксимації Леві задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon^2)), \tag{2.29}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, визначається генераторами

$$\Gamma^\epsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R(\varphi(w+v) - \varphi(w))\Gamma^\varepsilon(dv,x),\ x \in X \tag{2.30}$$

та задовольняє умовам апроксимації Леві

L1. Апроксимація середніх

$$\int_R v\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2(a_2(x) + \theta_a(x)),\ \theta_a(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

та

$$\int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(b(x) + \theta_b(x)),\ \theta_b(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

L2. Умова на функцію розподілу

$$\int_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon^2(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)),\ \theta_g(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

для всіх $g(v) \in C^3(R)$ (простір дійснозначних обмежених функцій таких, що $g(v)/|v|^2 \to 0$, $|v| \to 0$). Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v) \in C^3(R)$ і визначаються співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv,x),\ g(v) \in C^3(R);$$

L3. Рівномірна квадратична інтегровність

$$\lim_{c\to\infty}\int_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x) = 0;$$

Нехай виконується умова балансу

$$\hat{a}_1 := \int_X \pi(dx)a_1(x) = 0. \tag{2.31}$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 2.3.1. *При виконанні умови балансу (2.31) та умов апроксимації Леві L1 – L3 має місце слабка збіжність*

$$\eta^\varepsilon(t) \to \eta^0(t),\ \varepsilon \to 0$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ *визначається генератором*

$$\hat{\hat{\Gamma}}\varphi(w) = \hat{\hat{a}}_2\varphi'(w) + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(w) + \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(w)]\hat{\hat{\Gamma}}_0(dv),$$

де

$$\hat{\hat{a}} = \int\limits_X \pi(dx)(a_2(x) - a_0(x)),$$

$$\sigma^2 = \int\limits_X \pi(dx)(b(x) - b_0(x)) + 2\int\limits_X \pi(dx)a_1(x)R_0a_1(x),$$

$$a_0(x) = \int\limits_R v\Gamma_0(dv, x),$$

$$b_0(x) = \int\limits_R v^2\Gamma_0(dv, x),$$

$$\hat{\Gamma}_0(v) = \int\limits_X \pi(dx)\Gamma_0(v, x)$$

і є процесом Леві, яки має три складові: детермінований зсув, дифузійну складову та пуассонівську стрибкову частину.

Доведення. Для безпосереднього доведення теореми 2.3.1, встановимо деякі допоміжні твердження.

Лема 2.3.1. *Генератори процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(\mathbf{R})$ при виконанні умов апроксимації Леві L1–L3 допускають асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w), \tag{2.32}$$

де

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = a_1(x)\varphi'(w),$$

$$\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = (a_2(x) - a_0(x))\varphi'(x) + \frac{1}{2}(b(x) - b_0(x))\varphi''(x) +$$

$$+ \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(v)]\Gamma_0(dv, x).$$

Доведення леми 2.3.1. Використовуючи розклад функції $\varphi(w)$ у ряд Тейлора, здійснимо перетворення генератора (2.30):

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v))\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(v) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x) +$$

$$+\varepsilon^{-2}\int\limits_R (v\varphi'(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x)+\frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-2}\int\limits_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x)=$$

$$=\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(v)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma_0(dv,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(w)+a_2(x)\varphi'(w)+$$

$$+\frac{1}{2}(b(x)-b_0(x))\varphi''(w)+$$

$$+\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(v))\Gamma_0(dv,x)+\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов L1–L3 (зауважимо також, що функція $\varphi(w+v)-\varphi(w)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\in C^3(\mathbf{R})$, оскільки вона обмежена на підставі обмеженості $\varphi(w)$ разом з її похідними, та виконується співвідношення

$$[\varphi(w+v)-\varphi(w)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)]/|v^2|\to 0$$

при $v\to 0$.

Пам'ятаючи, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w)=o(\varepsilon^2)$, $\varphi(w)\in C^3(\mathbf{R})$, отримаємо представлення (2.32).

Доведення леми 2.3.1 завершене.

Лема 2.3.2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2))$, $t\geq 0$ *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x)$$

$$+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x)+\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \tag{2.33}$$

де оператор $\mathbf{\Gamma}_1(x)$, $\mathbf{\Gamma}_2(x)$ *визначені у лемі 1, а залишковий член*

$$\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)\|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, $\varphi(w,\cdot)\in C^3(\mathbf{R})$.

Доведення. Твердження леми стає очевидним, якщо використати визначення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$.

Зрізаний оператор має структуру

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x)+$$

$$+\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x). \tag{2.34}$$

Лема 2.3.3. *При виконанні умов балансу (2.31) розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.34) на тест-функціях*

$$\varphi(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x) + \varepsilon\varphi_3(u,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,x) = \hat{\hat{\Gamma}}\varphi(u) + \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(u), \tag{2.35}$$

де залишковий член рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор визначається формулою

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_2\hat{\Pi}. \tag{2.36}$$

Доведення. Обчислимо

$$(\varepsilon^{-3}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}_1 + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_2)(\varphi(u) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon\varphi_3) =$$

$$= \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-2}(\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi) + \varepsilon^{-1}(\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi) +$$
$$+ (\mathbf{Q}\varphi_3 + \mathbf{Q}_1\varphi_2 + \mathbf{\Gamma}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_2\varphi) + o(\varepsilon).$$

Звідси отримуємо чотири співвідношення:
I. $\mathbf{Q}\varphi = 0$;
II. $\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi = 0$;
III. $\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_1\varphi = 0$;
IV. $\mathbf{Q}\varphi_3 + \mathbf{Q}_1\varphi_2 + \mathbf{\Gamma}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_2\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi$.

Встановимо тепер вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З I випливає, що $\varphi \in N_Q$;

З II, оскільки $\varphi \in N_Q$, з умови розв'язності матимемо

$$\Pi\mathbf{Q}_1\Pi\varphi = 0.$$

Введемо позначення

$$\Pi\mathbf{Q}_1 = \hat{Q}_1, \ \ \Pi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$

Розглянемо III: з умови розв'язності для $\mathbf{Q}$ матимемо

$$\Pi\mathbf{Q}_1\Pi\varphi_1 + \Pi\Gamma_1\Pi\varphi = 0, \tag{2.37}$$

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_1\hat{\varphi} = 0.$$

З умови балансу (2.31) бачимо, що $\hat{\Gamma}_1\hat{\varphi} \in R_Q$, отже, розв'язок

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\varphi},$$

де $\hat{R}_0$ – зведено-оборотний до $\hat{Q}_1$.

Перейдемо до IV: з умови розв'язності для $\mathbf{Q}$ отримаємо

$$\Pi\mathbf{Q}_2\Pi\varphi_2 + \Pi\mathbf{\Gamma}_1\Pi\varphi_1 + \Pi\mathbf{\Gamma}_2\Pi\varphi = \Pi\hat{\hat{L}}\Pi\varphi, \tag{2.38}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_1\hat{\varphi}_2 + \hat{\Gamma}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_2\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

Памятаючи, що $\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\varphi}$, матимемо

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_2 + \hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_2\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

У свою чергу, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$

$$\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi}\varphi + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_2\hat{\Pi}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}},$$

звідки

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_2\hat{\Pi},$$

$$\hat{\varphi}_2 = \hat{R}_0[\hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 - \hat{\hat{L}}]\hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_3 = R_0[\mathbf{Q}_1\varphi_2 + \mathbf{\Gamma}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_2\varphi - \hat{\hat{L}}\varphi].$$

Обмеженість $\theta^{\varepsilon}_{\eta}(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\mathbf{\Gamma}_1$, $\mathbf{\Gamma}_2$ та R_0.

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням теореми 6.3 з [7].

Розглянемо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (2.28)

Теорема 2.3.2. *При виконанні умови балансу (2.31) справедлива слабка збіжність*

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t)),\ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $(\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t))$ *визначається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(u,w) = \hat{\hat{C}}(u)\varphi'_u(u,w) + \hat{\hat{\Gamma}}^{u}\varphi(u,\cdot) + \hat{\hat{\Gamma}}^{w}\varphi(\cdot,w) \tag{2.39}$$

де

$$\hat{\hat{C}}(u) = \Pi C(x) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x);$$

а генератори $\hat{\hat{\Gamma}}^{u}$ *та* $\hat{\hat{\Gamma}}^{w}$ *визначені в теоремі 2.3.1 та мають однакову структуру, але діють по різним змінним.*

Зауваження 2.3.1. Слабка збіжність процесів $u^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \hat{\hat{u}}(t)$, $\varepsilon \to 0$, буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності допграничної сукупності процесів $u^{\varepsilon}(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів з незалежними приростами в схемі апроксимації Леві було доведено, зокрема в [7].

Зауваження 2.3.2. Граничний процес буде задаватися стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\hat{u}(t) = [\hat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}_2]dt + \sigma dW(t) + \int_R v\tilde{\nu}(dt, dv),$$

де $E\tilde{\nu}(dt, dv) = dt\tilde{\Gamma}_0(dv)$.

Зауваження 2.3.3. Граничний процес $\hat{u}(t)$ має три складові. Детермінований зсув визначається розв'язком диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t) = [\hat{C}(\hat{u}_d(t)) + \hat{a}_2]dt, \tag{2.40}$$

де додатковий доданок $\hat{a}_2$ виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованого часу t/ε^3, $\varepsilon \to 0$ дуже малих стрибків порядку ε^3, які відбуваються з імовірністю, близькою до 1.

Друга, дифузійна складова, визначається параметром σ та виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованиго часу t/ε^3, $\varepsilon \to 0$ малих стрибків порядку ε , які також відбуваються з імовірністю, близькою до 1.

Третя складова відображає рідкісні великі стрибки, що відбуваються з імовірністю, близькою до 0, і визначаються через усереднену міру стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$ генератором

$$\Gamma_j\varphi(w) = \int_R [\varphi(w + v) - \varphi(w)]\tilde{\Gamma}_0(dv).$$

Доведення теореми 2.3.2.

Лема 2.3.4. *Генератор трикомпонентного марковського процесу* $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t/\varepsilon^3))$, $t \geq 0$, *має представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-3}Q^\varepsilon\varphi(u, w, x) + \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, \cdot, x) + \Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(\cdot, w, x) +$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \theta_w^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x), \tag{2.41}$$

де $\Gamma_\cdot^\varepsilon(x)$ *– генератор сукупності ІПЗ (2.30),*

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) = C(u, x)\varphi'_u(u, w, x).$$

Залишковий член $\|\theta_w^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення леми можна знайти в [7].

Лема 2.3.5. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ *у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}^\varepsilon\varphi(u, w, x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1^u(x)\varphi(u, w, x) + \Gamma_2^u(x)\varphi(u, w, x) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\Gamma_1^w(x)\varphi(u, w, x) + \Gamma_2^w(x)\varphi(u, w, x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \hat{\theta}_w^\varepsilon\varphi(u, w, x), \tag{2.42}$$

де

$$\hat{\theta}_w^\varepsilon(x) = \gamma^\varepsilon + \theta_w^\varepsilon(x),$$

$\varGamma_1^{\cdot}(x)$ та $\varGamma_2^{\cdot}(x)$ визначені у лемі 2.3.1.

Залишковий член $\|\hat{\theta}_w^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється з допомогою представлення оператора (2.32) та результатів леми 2.3.4.

Зрізаний оператор має вигляд:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}^{\varepsilon}\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\varGamma_1^u(x)\varphi(u,w,x) + \varGamma_2^u(x)\varphi(u,w,x) +$$
$$+\varepsilon^{-1}\varGamma_1^w(x)\varphi(u,w,x) + \varGamma_2^w(x)\varphi(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) \qquad (2.43)$$

Лема 2.3.6. *При виконанні умови балансу (2.31) розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.43) на тест-функціях*

$$\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(w,x) + \varepsilon^3\varphi_3(w,x)$$

здійснюється зі співвідношення

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^3\theta_w^{\varepsilon}(x)\varphi(w), \qquad (2.44)$$

де залишковий член $\theta_w^{\varepsilon}(x)$ рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ задається формулою

$$\mathbf{L} = \varPi[\hat{\hat{C}} + \hat{\hat{\varGamma}}_1^u \hat{R}_0 \hat{\hat{\varGamma}}_1^u + \hat{\hat{\varGamma}}_2^u + \hat{\hat{\varGamma}}_1^w \hat{R}_0 \hat{\hat{\varGamma}}_1^w + \hat{\hat{\varGamma}}_2^w]\varPi. \qquad (2.45)$$

Доведення. Для виконання рівності (2.44) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва та справа були рівними. З цією метою обчислимо:

$$(\varepsilon^{-3}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}_2 + \varepsilon^{-1}\varGamma_1^u + \varGamma_2^u + \varepsilon^{-1}\varGamma_1^w + \varGamma_2^w + \mathbf{C})(\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3) =$$
$$= \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-2}(\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi) + \varepsilon^{-1}(\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \varGamma_1^u\varphi + \varGamma_1^w\varphi) +$$
$$+(\mathbf{Q}\varphi_3 + \mathbf{Q}_1\varphi_2 + \varGamma_1^u\varphi_1 + \varGamma_1^w\varphi_1 + \varGamma_2^u\varphi + \varGamma_2^w\varphi + \mathbf{C}\varphi) + o(\varepsilon).$$

Знову ж таки, отримаємо чотири співвідношення:

I. $\mathbf{Q}\varphi = 0$;

II. $\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi = 0$;

III. $\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \varGamma_1^u\varphi + \varGamma_1^w\varphi = 0$;

IV. $\mathbf{Q}\varphi_3 + \mathbf{Q}_1\varphi_2 + \varGamma_1^u\varphi_1 + \varGamma_1^w\varphi_1 + \varGamma_2^u\varphi + \varGamma_2^w\varphi + \mathbf{C}\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi$.

Встановимо вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З I випливає, що $\varphi \in N_Q$;

З II, оскільки $\varphi \in N_Q$, з умови розв'язності матимемо

$$\varPi Q_1 \varPi\varphi = 0.$$

Введемо позначення

$$\varPi Q_1 = \hat{Q}_1, \;\; \varPi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді
$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$
звідки
$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$
Розглянемо III: з умови розв'язності для Q матимемо
$$\varPi\mathbf{Q}_1\varPi\varphi_1 + \varPi\varGamma_1\varPi\varphi = 0,$$
$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\varGamma}_1^u\varphi + \hat{\varGamma}_1^w\hat{\varphi} = 0.$$
З умови балансу (2.31) бачимо, що $\hat{\varGamma}_1^u\hat{\varphi}$, $\hat{\varGamma}_1^u\hat{\varphi} \in N_Q$, отже, розв'язок
$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0[\hat{\varGamma}_1^u + \hat{\varGamma}_1^w]\hat{\varphi},$$
де $\hat{R}_0$ – зведено-оборотний до $\hat{Q}_1$.

Перейдемо до IV: з умови розв'язності для $\mathbf{Q}$ отримаємо
$$\varPi\mathbf{Q}_2\varPi\varphi_2 + \varPi\varGamma_1^u\varPi\varphi_1 + \varPi\varGamma_2^u\varPi\varphi + \varPi\varGamma_1^w\varPi\varphi_1 +$$
$$+\varPi\varGamma_2^w\varPi\varphi + \varPi\mathbf{C}\varPi\varphi = \varPi\hat{\hat{L}}\varPi\varphi,$$
$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_2 + \hat{\varGamma}_1^u\hat{\varphi}_1 + \hat{\varGamma}_1^w\hat{\varphi}_1 + \hat{\varGamma}_2^u\hat{\varphi} + \hat{\varGamma}_2^w\hat{\varphi} + \hat{C}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$
Памятаючи, що $\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^u\hat{\varphi} + \hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^w\hat{\varphi}$, матимемо
$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_2 + \hat{\varGamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^u\hat{\varphi} + \hat{\varGamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^w\hat{\varphi} +$$
$$+\hat{\varGamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^u\hat{\varphi} + \hat{\varGamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^w\hat{\varphi} + \hat{\varGamma}_2^u\hat{\varphi} + \hat{\varGamma}_2^w\hat{\varphi} + \hat{C}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$
У свою чергу, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$
$$\hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^u\varPi\hat{\varphi} + \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^w\varPi\hat{\varphi} + \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^u\varPi\hat{\varphi} +$$
$$+\hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1^w\varPi\hat{\varphi} + \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_2^u\varPi\hat{\varphi} + \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_2^w\varPi\hat{\varphi} + \hat{\varPi}\hat{C}\hat{\varPi}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}}.$$
звідки
$$\hat{\hat{L}} = \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1\hat{\varPi} + \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_2\hat{\varPi} + \hat{\varPi}\hat{C}\hat{\varPi},$$
$$\hat{\varphi}_2 = \hat{R}_0[\hat{\hat{L}} - \hat{\varGamma}_1\hat{R}_0\hat{\varGamma}_1 - \hat{\varGamma}_2 - \hat{C}]\hat{\varphi},$$
$$\hat{\varphi}_3 = \hat{R}_0[\hat{\hat{L}} + Q_1\varphi_2 + \varGamma_1\varphi_1 + \hat{\varGamma}_2\varphi + \mathbf{C}\varphi].$$
Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\hat{\varGamma}_1$, $\hat{\varGamma}_2$, та R_0.

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 2.3.3 і теореми 6.3. з [7].

2.4. Диференціальні рівняння зі стохастично малими добавками в умовах пуассонової апроксимації

Стохастична еволюційна система в ергодичному марковському середовищі задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))dt + d\eta^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t) \in \mathbf{R}, \tag{2.46}$$

де $x(t)$ – рівномірно ергодичний марковський процес у стандартному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, який визначається генератором

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум-нормою $\|\varphi\| = \max\limits_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\rho(B)$, $B \in \mathbf{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$ марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, визначається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int\limits_X \pi(dx)q(x).$$

Позначимо R_0 потенціальний оператор генератора $\mathbf{Q}$, який визначається рівністю

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int\limits_X \pi(dy)\varphi(y)1(x)$ – проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : \ \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, у схемі апроксимації Пуассона задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon)), \tag{2.47}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, визначається генераторами

$$\Gamma^\epsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1} \int\limits_R (\varphi(w + v) - \varphi(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x),\ x \in X \tag{2.48}$$

та задовольняє умовам пуассонової апроксимації

P1. Апроксимація середніх

$$\int_R v\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(a(x)+\theta_a(x)),\ \theta_a(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

та

$$\int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(b(x)+\theta_b(x)),\ \theta_b(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

P2. Умова на функцію розподілу

$$\int_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(\Gamma_g(x)+\theta_g(x)),\ \theta_g(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

для всіх $g(v)\in C^3(R)$ (простір дійснозначних обмежених функцій таких, що $g(v)/|v|^2 \to 0,\ |v|\to 0$). Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v)\in C^3(R)$ і визначаються співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv,x),\ g(v)\in C^3(R);$$

P3. Рівномірна квадратична інтегровність

$$\lim_{c\to\infty}\int_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x) = 0;$$

P4. Відсутність дифузійної складової

$$b(x) = \int_R v^2\Gamma_0(dv,x).$$

Введемо позначення

$$\Gamma_1(x) = a(x)\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v)-\varphi(v)-v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv,x).$$

Встановимо асимптотичні властивості збуреного процесу.

Теорема 2.4.1. *При виконанні умов пуассонової апроксимації P1 – P4 справедливою є слабка збіжність $\eta^\varepsilon(t)\to\eta^0(t)$, $\varepsilon\to 0$. Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором*

$$\Gamma\varphi(w) = \Pi\Gamma_1(x)\varphi(w) =$$

$$= \tilde{a}\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v)-v\varphi'(w)]\tilde{\Gamma}_0(dv),$$

де $\tilde{a} = \int\limits_X \pi(dx)a(x)$, $\tilde{\Gamma}_0(v) = \int\limits_X \pi(dx)\Gamma_0(v,x)$ *і є процесом з незалежними приростами, яки має пуассонову стрибкову складову та детермінований зсув.*

Доведення. Перед безпосереднім доведенням теореми 2.4.1, встановимо деякі допоміжні твердження.

Лема 2.4.1. *Генератори процесів з незалежними приростами* $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, *на тест-функціях* $\varphi(w) \in C^3(\mathbf{R})$ *при виконанні умов пуассонової апроксимації P1–P4 допускають асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \Gamma_1(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{2.49}$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w) +$$
$$+ \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv,x),$$

а залишковий член $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varphi(w,\cdot) \in C^3(\mathbf{R})$

Доведення леми 2.4.1. Скориставшись розкладом функції $\Gamma_1(x)\varphi(w)$ у ряд Тейлора, здійснимо перетворення генератора (2.48):

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v))\Gamma^\varepsilon(dv,x) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(v) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma^\varepsilon(dv,x) +$$

$$+ \varepsilon^{-1}\int\limits_R (v\varphi'(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x) + \frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-1}\int\limits_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x) =$$

$$= \int\limits_R (\varphi(u+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma_0(dv,x) +$$

$$+ a(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b(x)\varphi''(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) =$$

$$= \int\limits_R (\varphi(u+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w))\Gamma_0(dv,x) +$$

$$+ a(x)\varphi'(w) + \gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов P1, P2. Зауважимо також, що функція $\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w) \in C^3(\mathbf{R})$, оскільки вона обмежена на підставі обмеженості $\varphi(w)$ та її похідних, та $[\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w)]/|v^2| \to 0,\ v \to 0)$, а остання рівність випливає з умови P4.

З урахуванням того, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w) = o(\varepsilon^2)$, $\varphi(w) \in C^3(\mathbf{R})$, отримаємо представлення (2.49).

Доведення леми 2.4.1 завершене.

Лема 2.4.2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon))$ *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \tag{2.50}$$

де оператор $\Gamma_1(x)$ *визначений у лемі 2.4.1, а залишковий член* $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ $\varphi(w,\cdot) \in C^3(\mathbf{R})$.

Доведення. Твердження леми стане очевидним, якщо використати визначення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів $\eta^\varepsilon(t)$ і $x(t/\varepsilon)$.

Зрізаний оператор має вигляд

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w,x). \tag{2.51}$$

Лема 2.4.3. *Розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.51) на тест-функціях* $\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x)$ *реалізується співвідношенням*

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \Gamma\varphi(w) + \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{2.52}$$

де залишковий член $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ *є рівномірно обмеженим по* x.

Залишковий оператор визначається формулою

$$\Gamma = \Pi\Gamma_1(X)\Pi \tag{2.53}$$

Доведення. Для виконання рівності (2.52) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа були однаковими. Обчислимо

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w) + [\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w)]+$$

$$+\varepsilon\Gamma_1(x)\varphi_1(w,x),$$

$$\mathbf{Q}\varphi(w) = 0 \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_{\mathbf{Q}}.$$

Тут бачимо, що $\varphi(w)$ не залежить від x.

Розглянемо рівняння, яке визначає граничний оператор $\Gamma(x)$:

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w) = \Gamma(x)\varphi(w).$$

Перепишемо його у вигляді

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) = [\Gamma(x) - \Gamma_1(x)\varphi(w)]\varphi(w).$$

Умови розв'язності для останнього рівняння і дає граничний оператор у вигляді (2.53). Тоді

$$\varphi_1(w,x) = R_0[\Gamma_1(x) - \Gamma]\varphi(w) \tag{2.54}$$

Використавши (2.54), решту членів розкладу можна звести до вигляду

$$\varepsilon\Gamma_1(x)\varphi_1(w,x) = \varepsilon[\Gamma_1(x)R_0[\Gamma_1(x) - \Gamma]]\varphi(w) = \varepsilon\theta^{\varepsilon}_{\eta}(x)\varphi(w).$$

Обмеженість $\theta^{\varepsilon}_{\eta}(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\Gamma_1(x)$ і R_0.

Лему 2.4.3 доведено.

Завершення доведення теореми 2.4.1 реалізується з допомогою леми 2.4.3 та теореми 6.3 з [7].

Розглянемо тепер асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (2.46).

Теорема 2.4.2. *При виконанні умов пуассонової апроксимації P1 – P4, справедливою є слабка збіжність $u^{\varepsilon}(t) \to \hat{u}(t)$, $\varepsilon \to 0$. Граничний процес $\hat{u}(t)$ визначається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(w) = \hat{C}(u)\varphi'(w) + \Gamma\varphi(w), \tag{2.55}$$

де $\hat{C}(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x)$.

Зауваження 2.4.1. Граничний процес $\hat{u}(t)$ має дві складові. Перша з них – детермінований зсув визначається як розв'язок диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t) = [\hat{C}(\hat{u}_d(t)) + \tilde{a}]dt, \tag{2.56}$$

де додатковий доданок $\tilde{a}$ виникає за рахунок накопичення з ростом нормованого часу t/ε, $t \to 0$ малих стрибків імпульсного процесу, які відбуваються з імовірністю, близькою до одиниці. Друга складова є великими стрибками, які виникають рідко, з імовірністю, близькою до нуля, які задаються через усереднену міру стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$ генератором

$$\Gamma_j\varphi(w) = \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\tilde{\Gamma}_0(dv).$$

Зауваження 2.4.2. Граничний процес $\hat{u}(t)$ буде чисто детермінованим і визначається з рівняння (2.56) у випадку, коли усереднена міра стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$ рівна нулю. Наприклад, коли всі моменти порядку три і вище у сукупності процесів з незалежними приростами $\eta^{\varepsilon}(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, рівні нулю, чи при виконанні умови балансу

$$\tilde{\Gamma}_0(v) = \Pi\Gamma_0(v,x) = \int\limits_X \pi(dx)\Gamma_0(v,x) = 0.$$

Доведення теореми 2.4.2.

Встановимо спочатку низку допоміжних тверджень.

Лема 2.4.4. *Генератор двокомпонентного марковського процесу $u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon)$, $t \geq 0$, має представлення*

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x)+$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(w,x) + \theta^{\varepsilon}_{w}\varphi(w,x), \tag{2.57}$$

де $\Gamma^{\varepsilon}(x)$ – генератор сукупності процесів з незалежними приростами (2.48),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(w,x) = C(u,x)\varphi'_{w}(w,x)$$

Залишковий член $\|\theta^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(w,x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 2.1.4.

Лема 2.4.5. *Генератор $\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)$ допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+$$

$$+\Gamma_1\varphi(w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(w,x) + \hat{\theta}^{\varepsilon}_{w}\varphi(w,x), \tag{2.58}$$

де $\hat{\theta}^{\varepsilon}_{w}\varphi(w,x) = \gamma^{\varepsilon} + \theta^{\varepsilon}_{w}\varphi(w,x)$, а $\Gamma_1(x)$ визначений у лемі 2.4.4.

Залишковий член $\|\hat{\theta}^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(w,x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється з використанням представлення оператора (2.50) та результатів леми 2.4.4.

Зрізаний оператор має вигляд

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}_{0}(x)\varphi = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi + \Gamma_1(x)\varphi + \mathbf{C}(x)\varphi. \tag{2.59}$$

Лема 2.4.6. *Розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.59) на тест функціях $\varepsilon^{(}w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x)$ здійснюється співвідношенням*

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}_{0}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(w), \tag{2.60}$$

де залишковий член $\theta^{\varepsilon}_{w}(x)$ є рівномірно обмеженим по x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ визначається формулою

$$\mathbf{L} = \Pi[C(x) + \Gamma_1(x)]\Pi. \tag{2.61}$$

Доведення. Для виконання рівності (2.60) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа були однаковими. Для цього обчислимо

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}_{0}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}(x)\varphi(u,w)+$$

$$+[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w) + C(x)\varphi(w)] + \varepsilon\Gamma_1(x)\varphi_1(w,x).$$

Оскільки

$$\mathbf{Q}\varphi(w) = 0 \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_Q,$$

то, очевидно, $\varphi(w)$ не залежить від x.

Рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w) + \mathbf{C}(x)\varphi(w) = \mathbf{L}\varphi(w)$$

перепишемо у вигляді

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) = [\mathbf{L} - \Gamma_1(x) - \mathbf{C}(x)]\varphi(w).$$

Умову розв'язності останнього рівняння і дає граничний оператор $\mathbf{L}$ у вигляді (2.61).

Завершення доведення теореми здійснюється за схемою теореми 6.3. у [7].

2.5. Асимптотична дисипативність випадкових процесів з імпульсним збуренням у схемі пуассонової апроксимації

У цьому підрозділі ми вивчимо питання, як поведінка граничного процесу залежить від дограничного нормування стохастичної еволюційної системи в ергодичному марковському середовищі. Дослідимо умови асимптотичної дисипативності дограничної системи в умовах пуассонової апроксимації

Розглянемо систему (2.46) і вважатимемо виконаними припущення підрозділу 2.4.

Теорема 2.5.1. *Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$ системи*

$$\frac{du}{dt} = \alpha(u), \tag{2.62}$$

де $\alpha(u) = \hat{C}(u) + \hat{a}$, яка задовольняє умовам
C1: $|\Gamma_u^1(x)R_0\hat{L}V(u)| < M_1V(u)$, $M_1 > 0$;
C2: $|\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)| < M_2V(u)$, $M_2 > 0$;
C3: $|\Gamma_u^1(x)R_0(C)(x)V(u)| < M_3V(u)$, $M_3 > 0$;
C4: $|\mathbf{C}(x)R_0\hat{L}V(u)| < M_4V(u)$, $M_4 > 0$;
C5: $|\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)| < M_5V(u)$, $M_5 > 0$;
C6: $|\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)| < M_6V(u)$, $M_6 > 0$.

Нехай також виконуються нерівності

$$\alpha(u)V'(u) < -c_1V(u), \tag{2.63}$$

$$|\int_X v^2\Gamma_0(dv,x)| < c_3(x), \tag{2.64}$$

де $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ і $\hat{c}_3 = \int_X \pi(dx)c_3(x) > 0$.

Тоді система (2.46) асимптотично дисипативна.

Перед безпосереднім доведенням теореми встановимо декілька допоміжних тверджень.

Лема 2.5.1. *Генератор трьохкомпонентного марковського процесу $u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon, \eta^\varepsilon(t,x))$, $t \geq 0$, має представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) + \Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) +$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) + \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x), \tag{2.65}$$

де $\Gamma_w^\varepsilon(x)$ – генератор сукупності процесів з незалежними приростами (2.49), що діє по змінній w, а $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ – еквівалентний попередньому генератор сукупності процесів з незалежними приростами (2.49), що діє по змінній u.

Доведення. Генератор марковського процесу на збуреній тест-функції визначається зі співвідношення

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta}, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) -$$

$$-\varphi(u,w,x)|u^\varepsilon(t) = u,\ \eta^\varepsilon(t) = w,\ x(t/\varepsilon) = x].$$

Додамо і віднімемо в умовному математичному сподіванні $\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})$:

$$E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta}, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)|u^\varepsilon(t) = u, \eta^\varepsilon(t) = w, x(t/\varepsilon) = x] =$$

$$= E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta}, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] -$$

$$= E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)].$$

Розклад $u^\varepsilon_{t+\Delta}$ має вигляд

$$u^\varepsilon_{t+\Delta} = u + C(u,x)\Delta + \Delta w + o(\Delta).$$

Отриманий вираз підставимо у перший доданок умовного математичного сподівання

$$E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta}, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + \Delta w + o(\Delta), w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) -$$

$$-\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= E[\varphi(z + \Delta z, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})],$$

де

$$z = u + C(u,x)\Delta + o(\Delta).$$

Додамо і віднімемо $\varphi(z, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})$ в отриманому виразі

$$E[\varphi(u^\varepsilon_{t+\Delta}, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= E[\varphi(z + \Delta w, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(z, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] +$$

$$+E[\varphi(z, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})].$$

Оскільки генератор $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ має вигляд

$$\Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(E[\varphi(u + \Delta u, w, x) - \varphi(u,w,x)]),$$

для границі першого доданку отримаємо

$$\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(z+\varDelta w, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})]=$$

$$=\varGamma^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u,w,x)$$

Розкладемо $\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})$ за формулою Тейлора

$$\varphi(u+C(u,x)\varDelta+o(\varDelta), w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})=$$

$$=\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})+\varphi', w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})(C(u,x)\varDelta+o(\varDelta))+o(\varDelta).$$

Підставивши у вираз $E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})]$ отриманий розклад, будемо мати

$$\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})]=$$

$$=\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u+C(u,x)\varDelta+o(\varDelta), w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-$$

$$-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})]=$$

$$=\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})+$$

$$+\varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})(C(u,x)\varDelta+o(\varDelta))+$$

$$+o(\varDelta)-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})]=$$

$$=\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})(C(u,x)\varDelta+o(\varDelta))+o(\varDelta)]=$$

$$=C(u,x)\varphi'(u,w,x).$$

Так само, зі співвідношення для генератора $\varGamma^{\varepsilon}_{w}(x)$ та очевидного співвідношення для генератора марковського процесу

$$=\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(w, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(w,x)]=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x),$$

маємо

$$\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}), x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(u,w,x)]=$$

$$=\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}), x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(u,w, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta}))+$$

$$+\varphi(u,w, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta}))-\varphi(u,w,x)]=$$

$$=\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\varDelta}), x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(u,w, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})]+$$

$$+\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u,w, x^{\varepsilon}_{t+\varDelta})-\varphi(u,w,x)]=$$

$$=\varGamma^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(u,w,x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x),$$

звідки і бачимо, що $\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)$ має вигляд (4.20).

Лема 2.5.2. *Генератор (2.65) допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x)+$$

$$+\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w,x)+C(u)\varphi(u,w,x)+\mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w,x)+\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w,x)$$

де

$$C(u)\varphi(u)=C(u,x)\varphi'(u),$$

а залишковий член

$$\|\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)\|\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

$\varphi(u,w,\cdot)\in C^3((R))$.

Зрізаний генератор

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x)+$$

$$+\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w,x)+C(u)\varphi(u,w,x)+\mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w,x). \tag{2.66}$$

Лема 2.5.3. *Розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного генератора (2.66) на збуреній тест-функції*

$$\varphi^{\varepsilon}(u,w,x)=\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x) \tag{2.67}$$

визначаеться рівністю

$$L_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u,w,x)=\hat{L}\varphi(u,w)+\varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w),$$

де

$$\begin{gathered}\theta^{\varepsilon}(x)=\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\hat{L}-\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)-\\-\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)-\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)+\\+\mathbf{C}(x)R_0\hat{L}-\mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)-\\-\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)-\mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)+\\+\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\hat{L}-\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)-\\-\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x)-\mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x).\end{gathered}$$

Доведення. Підставимо (2.67) в (2.66).

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\\+\mathit{\Gamma}_u^1(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\\+\mathbf{C}(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\\+\mathit{\Gamma}_w^1[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]=\end{gathered}$$

$$= \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w) + [\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) + \mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w) +$$
$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(u,v) + \mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w)] +$$
$$+ \varepsilon[\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)].$$

Для існування граничного генератора $\hat{L}\varphi(u,w)$ необхідно, щоб при $\varepsilon \to 0$ виконувалась умова

$$\mathbf{Q}\varphi(u,w) = 0,$$

тобто функція належала нуль-простору оператора $\mathbf{Q}$.

Тоді

$$\hat{L}\varphi(u,w) = \mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) + \mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w) +$$
$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(u,w) + \mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w),$$

звідки маємо

$$\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) = [\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)]\varphi(u,w).$$

З умови розв'язності для останнього рівняння маємо

$$\mathit{\Pi}\mathbf{Q}\mathit{\Pi}\varphi_1(u,w,x) = 0 = \mathit{\Pi}[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)]\mathit{\Pi}\varphi(u,w).$$

Таким чином,

$$\hat{L}\varphi(u,w) = \mathit{\Pi}\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi(u,w) + \mathit{\Pi}\mathbf{C}(x)\varphi(u,w) + \mathit{\Pi}\mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi(u,w),$$

а

$$\varphi_1(u,w,x) = R_0[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)]\varphi(u,w).$$

Звідси отримаємо, що останній доданок

$$\varepsilon[\mathit{\Gamma}_u^1(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathit{\Gamma}_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)] =$$
$$= \varepsilon[\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)] +$$
$$+ \mathbf{C}[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)] +$$
$$+ \mathit{\Gamma}_w^1(x)R_0[\hat{L} - \mathit{\Gamma}_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \mathit{\Gamma}_w^1(x)]]\varphi(u,w).$$

Доведення теореми 2.5.1. На підставі виконання умов теореми C1–C6, має місце обмеженість залишкового члена (2.68)

$$\|\theta^{\varepsilon}(x)V(u)\| =$$
$$= |\mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\hat{L}V(u) - \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)V(u) -$$
$$- \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \mathit{\Gamma}_u^1(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)V(u) +$$
$$+ \mathbf{C}(x)R_0\hat{L}V(u) - \mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_u^1(x)V(u) -$$
$$- \mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \mathbf{C}(x)R_0\mathit{\Gamma}_w^1(x)V(u) +$$

$$+\Gamma_w^1(x)R_0\hat{L}V(u)-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)-$$

$$-\Gamma_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_w^1(x)V(u)|\leq$$

$$\leq M_1V(u)+M_2V(u)+M_3V(u)+M_4V(u)+M_5V(u)+M_6V(u),$$

звідки,

$$\|\theta^\varepsilon(x)V(u)\|\leq MV(u), \tag{2.69}$$

де $M=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5+M_6$.

З твердження леми 2.5.3, виразу (2.69) та виконання умов модельної теореми Королюка [3], маємо слабку збіжність

$$(u^\varepsilon(t),\eta^\varepsilon(t))\Rightarrow(u(t),\eta(t)),\ \varepsilon\to 0.$$

Нехай тепер $\frac{d^{(1)}V(u)}{du}$ – похідна функції Ляпунова, обчислена уздовж траекторії системи (2.46). Оскільки функція Лпунова повинна задовольняти умову Ліпшиця

$$|V(u_2)-V(u_1)|<K|u_2-u_1|,$$

де K є сталою величиною, то виконується таке співвідношення

$$\frac{d^(2.46)V(u)}{du}\leq\frac{dV(u)}{du}+K[\hat{a}+\int\limits_R v^2\Gamma_0(dv)]dt,$$

де $\frac{dV(u)}{du}$ – похідна функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії детермінованої системи (2.62),

$$\Gamma_0(dv)=\int\limits_X\pi(dx)\Gamma_0(dv,x).$$

Згідно умов (2.63) і (2.64) теореми, отримаємо

$$\frac{d^{(2.46)}V(u)}{du}\leq -c_1V(u)+K[c_2+\hat{c}_3]|dt|.$$

Отже,

$$V(u)\leq V(u_0)\exp -c_1t+K[c_2+\hat{c}_3]\int\limits_0^t\exp -c_1(t-s)ds.$$

Звідси випливає оцінка

$$P|u(t)|>R\leq\frac{V(u)}{\inf\limits_{u\in R^d}V(u)},\ R\to\infty,$$

а значить, система (2.46) є дисипативною.

На завершення, зауважимо, що з виконання умов модельної граничної теореми Королюка [3] і дисипативності граничного процесу випливає, що система (2.46) є асимптотично дисипативною.

2.6. Подвійне укрупнення фазового простору для диференціальних рівнянь зі стохастично малими добавками в умовах пуассонової апроксимації

У цьому підрозділі буде розглянуто випадок, коли збурення системи визначаються стрибкоподібним процесом у пуассоновій схемі апроксимації. Нас цікавитиме насамперед, подвійне фазове укрупнення простору станів таких еволюційних моделей.

Розглянемо стохастичну еволюційну систему в ергодичному марковському середовищі, задану стохастичним дифференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t), x^{t/\varepsilon^2})dt + d\eta^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t) \in R, \tag{2.70}$$

де марковський процес $x^\varepsilon(t), t \geq 0$ визначається на стандартному фазовому просторі (E, E) з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k,\ E_k \cap E_{k'} = \emptyset,\ k \neq k'$$

у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - \exp\{-q(x)t\}],\ x \in E,\ B \in E,\ t \geq 0.$$

Нехай також виконуються умови:

ME1: Ядро, яке описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$, має наступне представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається зі співвідношення

$$P(x, E_k) = 1_k(x) = \begin{cases} 1,\ x \in E_k, \\ 0,\ x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова x_n, $n \geq 0$ на класах E_k, $1 \leq k \leq N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умові

$$P_1(x, E) = 0,$$

що випливає з рівності

$$P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1.$$

ME2: Асоційований марковський процес $x^0(t)$, $t \geq 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів E_k, $1 \leq k \leq N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx)$, $1 \leq k \leq N$, які визначаються зі співвідношення:

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k \rho_k(dx), \ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx) q(x),$$

де $\rho(dx)$ – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова.

ME3: Усереднені імовірності виходу

$$\hat{p}_k := q(x) \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E/E_k) > 0, \ 1 \leq k \leq N.$$

Отже, збурююче ядро $P_1(x,B)$ визначає перехідні імовірності між класами E_k, $1 \leq k \leq N$. Таким чином, рівність

$$P^\varepsilon(x,B) = P(x,B) + \varepsilon P_1(x,B)$$

означає, що вкладений ланцюг Маркова x_n^ε, $n \geq 0$ проводить великий проміжок часу в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими ймовірностями $\varepsilon P_1(x, E/E_k)$.

За умов ME1-ME3 має місце слабка збіжність [112]

$$\nu(x^\varepsilon(t)) \Rightarrow \hat{x}(t), \ \varepsilon \to 0, \ \nu(x) = k \in \hat{E} = \{1, ..., N\}, \ x \in E_k, \ 1 \leq k \leq N.$$

Граничний марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ на укрупненому фазовому просторі $\hat{E} = \{1, ..., N\}$ визначається генеруючою матрицею

$$\hat{Q}_1 = (\hat{q}_{kr}, \ 1 \leq k, r \leq N),$$

де

$$\hat{q}_{kr} = \hat{q}_k \hat{p}_{kr}, \ k \neq r, \ \hat{q}_k = q_k \hat{p}_k, \ 1 \leq k \leq N,$$

$$\hat{p}_{kr} = p_{kr}/\hat{p}_k, \ p_{kr} = \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_r), \ 1 \leq k, r \leq N, \ k \neq r,$$

$$\hat{p}_k = -\int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_k).$$

ME4: Укрупнений марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ є ергодичним, зі стаціонарним розподілом $\hat{\pi} = (\pi_k, \ k \in \hat{E})$.

Таким чином, оператор Q^ε можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = \mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{Q}_1, \ \mathbf{Q}_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Узагальнення такого підходу можна знайти у [165], де оператор $Q^\varepsilon = \mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{Q}_1$

$$\mathbf{Q}(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \ \mathbf{Q}_1(x) = q_1(x) \int_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π – проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\mathbf{Q}$. Його дія на тест-функції визначається так:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\varphi}_k 1_k(x), \ \hat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(dx).$$

Зведений оператор $\hat{Q}_1$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\hat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\hat{\Pi}$ – проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\hat{Q}_1$:

$$\hat{\Pi}\hat{\varphi} := q(x) \sum_{k \in E} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_k.$$

Потенціальна матриця $\hat{R}_0 = [\hat{R}^0_{kj}; \ 1 \le k, l \le N]$ визначається співвідношеннями

$$\hat{Q}_1 \hat{R}_0 = \hat{R}_0 \hat{Q}_1 = \hat{\Pi} - E.$$

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, у пуассоновій схемі апроксимації задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon^3)), \tag{2.71}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \ge 0$, $x \in X$, визначається генераторами

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int_R (\varphi(w + v) - \varphi(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x), \ x \in X \tag{2.72}$$

та задовольняє умовам пуассонової апроксимації [112]

P1. Апроксимація середніх

$$\int_R v\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(a(x) + \theta_a(x)),\ \theta_a(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

та

$$\int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(b(x) + \theta_b(x)),\ \theta_b(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

P2. Умова на функцію розподілу

$$\int_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)),\ \theta_g(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

для всіх $g(v) \in C^2(R)$ (простір дійснозначних обмежених функцій таких, що $g(v)/|v|^2 \to 0$, $|v| \to 0$). Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v) \in C^2(R)$ та визначаються співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv,x),\ g(v) \in C^2(R);$$

P3. Рівномірна квадратична інтегровність

$$\sup \lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x) = 0;$$

P4. Відсутність дифузійної складової

$$b(x) = \int_R v^2\Gamma_0(dv,x).$$

Введемо позначення:

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv,x).$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 2.6.1. *При виконанні умов пуассонової апроксимації P1 – P4 має місце слабка збіжність*

$$\eta^\varepsilon(t) \to \eta^0(t),\ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ *визначається генератором*

$$\hat{\hat{\Gamma}}\varphi(w) = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = \hat{\hat{a}}\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w)]\hat{\hat{\Gamma}}_0(dv),$$

де

$$\hat{\hat{a}} = \sum_{k\in\hat{E}} \hat{\pi}_k \int\limits_{\hat{E}_k} \pi(dx)(a_(x)),$$

$$\hat{\hat{\Gamma}}_0(v) = \sum_{k\in\hat{E}} \hat{\pi}_k \int\limits_{\hat{E}_k} \pi(dx)\Gamma_0(v,x)$$

і є процесом з незалежними приростами, який має детермінований зсув та пуассонову стрибкову частину.

Доведення. Перед безпосереднім доведенням теореми 2.6.1, встановимо деякі допоміжні твердження.

Лема 2.6.1. *Генератори процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, на тест-функціях $\varphi(w) \in C^2(\mathbf{R})$ при виконанні умов пуассонової апроксимації P1–P4 допускають асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{2.73}$$

де

$$\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w) + \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv,x),$$

а залишковий член $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\varphi(w,\cdot) \in C^2(R)$.

Доведення леми 2.6.1. Використовуючи розклад функції $\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w)$ у ряд Тейлора, здійснимо перетворення генератора (2.72):

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v))\Gamma^\varepsilon(dv,x) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(v) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma^\varepsilon(dv,x) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int\limits_R (v\varphi'(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x) + \frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-1}\int\limits_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x) =$$

$$= \int\limits_R (\varphi(u+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma_0(dv,x) +$$

$$+a(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b(x)\varphi''(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) =$$

$$= \int\limits_R (\varphi(u+v) - \varphi(v) - \varphi'(w))\Gamma_0(dv,x) + a(x)\varphi'(w) + \gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов P1–P4 (зауважимо також, що функція

$$\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w) \in C^2(\mathbf{R}),$$

оскільки вона обмежена на підставі обмеженості $\varphi(w)$ разом з її похідними, та виконується співвідношення

$$[\varphi(w+v)-\varphi(w)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)]/|v^2| \to 0$$

при $v \to 0$.

Пам'ятаючи, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w) = o(\varepsilon^2)$, $\varphi(w) \in C^2(R)$, отримаємо представлення (2.73).

Доведення леми 2.6.1 завершене.

Лема 2.6.2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2))$, $t \geq 0$ *має вигляд*

$$\hat{\varGamma}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}^\varepsilon\varphi(u,w,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x), \tag{2.74}$$

де оператор $\mathbf{\Gamma}_1(x)$ *визначений у лемі 2.6.1, а залишковий член*

$$\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, $\varphi(u,w,\cdot) \in C^2(R)$.

Доведення. Твердження леми стає очевидним, якщо використати визначення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$.

Зрізаний оператор має структуру

$$L^\varepsilon\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) + \mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w,x). \tag{2.75}$$

Лема 2.6.3. *Розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.75) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,w,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\varGamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,x) = \hat{\hat{L}}\varphi(u) + \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(u), \tag{2.76}$$

де залишковий член рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор визначається формулою

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1\hat{\varPi} \tag{2.77}$$

Доведення. Обчислимо

$$(\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{\Gamma}_1)(\varphi(u) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-1}(\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi) + (\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_1\varphi) + o(\varepsilon).$$

Звідси отримуємо три співвідношення:

$$\mathbf{Q}\varphi = 0; \tag{2.78}$$

$$\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi = 0; \tag{2.79}$$

$$\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_1\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi. \tag{2.80}$$

Встановимо вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З (2.78) випливає, що $\varphi \in N_Q$;

З (2.79), оскільки $\varphi \in N_Q$, з умови розв'язності матимемо

$$\varPi\mathbf{Q}_1\varPi\varphi = 0.$$

Введемо позначення

$$\varPi\mathbf{Q}_1 = \hat{Q}_1, \ \varPi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$

Розглянемо (2.80). З умови розв'язності для $\mathbf{Q}$ матимемо

$$\varPi\mathbf{Q}_1\varPi\varphi_1 + \varPi\mathbf{\Gamma}_1\varPi\varphi = \varPi\hat{\hat{L}}\varPi\varphi,$$

звідки

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\varGamma}_1\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

У свою чергу, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$

$$\hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1\hat{\varPi}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}},$$

звідки

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\varPi}\hat{\varGamma}_1\hat{\varPi},$$

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0[\hat{\varGamma}_1 - \hat{\hat{L}}]\hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_2 = R_0[\mathbf{Q}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_1\varphi - \hat{\hat{L}}\varphi].$$

Обмеженість $\theta^{\varepsilon}_{\eta}(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\mathbf{\Gamma}_1$ та R_0.

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 2.6.3 і теореми 6.3 з [7].

Далі вивчимо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (2.70)

Теорема 2.6.2. *При виконанні умов P1–P4 справедлива слабка збіжність*

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t)), \ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $(\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t))$ визначається генератором

$$\mathbf{L}\varphi(u,w) = \hat{\hat{C}}(u)\varphi'_u(u,w) + \hat{\hat{\varGamma}}^w\varphi(\cdot,w), \tag{2.81}$$

де

$$\hat{\hat{C}}(u) = \varPi\mathbf{C}(x) = \sum_{k\in\hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx)C(u,x);$$

а генератор $\hat{\hat{\varGamma}}^w$ визначений в теоремі 2.6.1, але діє по змінній w.

Зауваження 2.6.1. Слабка збіжність процесів $u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{\hat{u}}(t)$, $\varepsilon \to 0$, буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності допграничної сукупності процесів $u^\varepsilon(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів з незалежними приростами в схемі апроксимації Леві було доведено, зокрема в [119].

Доведення теореми 2.6.2.

Лема 2.6.4. *Генератор трикомпонентного марковського процесу $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t/\varepsilon^3))$, $t \geq 0$, має представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-2}Q^\varepsilon\varphi(u,w,x) + \varepsilon\varGamma^\varepsilon_u(x)\varphi(u,\cdot,x) + \varGamma^\varepsilon_w(x)\varphi(\cdot,w,x) +$$
$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) + \theta^\varepsilon_w(x)\varphi(u,w,x), \tag{3.82}$$

де $\varGamma^\varepsilon_\cdot(x)$ – генератор сукупності ІПЗ (3.82),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) = C(u,x)\varphi'_u(u,w,x).$$

Залишковий член $\|\theta^\varepsilon_w(x)\varphi(u,w,x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення леми можна знайти в [7].

Лема 2.6.5. *Генератор $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-2}Q^\varepsilon\varphi(u,w,x) + \varepsilon\mathbf{\Gamma}^u_1(x)\varphi(u,w,x) +$$
$$+\mathbf{\Gamma}^w_1(x)\varphi(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) + \hat{\theta}^\varepsilon_w\varphi(u,w,x), \tag{2.83}$$

де

$$\hat{\theta}^\varepsilon_w(x) = \gamma^\varepsilon + \theta^\varepsilon_w(x),$$

$\varGamma^\cdot_1(x)$ та $\varGamma^\cdot_2(x)$ визначені у лемі 1. Залишковий член $\|\hat{\theta}^\varepsilon_w(x)\varphi(u,w,x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється з допомогою представлення оператора (3.73) та результатів леми 2.6.4.

Зрізаний оператор має вигляд:

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)\varphi = \varepsilon^{-2}Q^\varepsilon\varphi + \mathbf{\Gamma}^w_1(x)\varphi + \mathbf{C}(x)\varphi \tag{2.84}$$

Лема 2.6.6. *Розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (2.84) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(w,x)$$

здійснюється зі співвідношення

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^3\theta_w^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{2.85}$$

де залишковий член $\theta_w^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ *задається формулою*

$$\mathbf{L} = \hat{\hat{C}} + \hat{\hat{\mathit{\Gamma}}}_1^w. \tag{2.86}$$

Доведення. Для виконання рівності (2.85) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва та справа були рівними. З цією метою обчислимо:

$$(\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{\Gamma}_1^w + \mathbf{C})(\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-1}(\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi) + (\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_1^w\varphi + \mathbf{C}\varphi) + o(\varepsilon).$$

Знову ж таки, отримаємо три співвідношення:

$$\mathbf{Q}\varphi = 0; \tag{2.87}$$

$$\mathbf{Q}\varphi_1 + \mathbf{Q}_1\varphi = 0; \tag{2.88}$$

$$\mathbf{Q}\varphi_2 + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_1^w\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi. \tag{2.89}$$

Встановимо вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З (2.87) випливає, що $\varphi \in N_Q$.

З (2.88), оскільки $\varphi \in N_Q$, з умови розв'язності матимемо

$$\mathit{\Pi}\mathbf{Q}_1\mathit{\Pi}\varphi = 0.$$

Введемо позначення

$$\mathit{\Pi}\mathbf{Q}_1 = \hat{Q}_1,\ \ \mathit{\Pi}\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$

Розглянемо (2.89). З умови розв'язності для $\mathbf{Q}$ матимемо

$$\mathit{\Pi}\mathbf{Q}_1\mathit{\Pi}\varphi_1 + \mathit{\Pi}\mathit{\Gamma}_1^w\mathit{\Pi}\varphi + \mathit{\Pi}\mathbf{C}\mathit{\Pi}\varphi = \mathit{\Pi}\hat{\hat{L}}\mathit{\Pi}\varphi. \tag{2.90}$$

Далі

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_1^w\hat{\varphi} + \hat{C}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

У свою чергу, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$

$$\hat{\Pi}\hat{C}\hat{\Pi}\hat{\varphi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{\Pi}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}},$$

звідки

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{C}\hat{\Pi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{\Pi},$$

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0[\hat{\hat{L}} - \hat{\Gamma}_1^w\varphi_1 - \hat{C}]\hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_2 = \hat{R}_0[\hat{\hat{L}}\varphi + \mathbf{Q}_1\varphi_1 + \mathbf{\Gamma}_1^w\varphi + \mathbf{C}\varphi].$$

Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\hat{\Gamma}_1$ та R_0.

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 2.6.3 і теореми 6.3. з [7].

РОЗДІЛ 3
ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ТА АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ У МАРКОВСЬКОМУ ТА НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

3.1. Процедура стохастичної апроксимації в марковському середовищі

3.1.1. Стрибкова ПСА в схемі усереднення.

Стрибкова ПСА в марковському середовищі в схемі серій задається співвідношенням (покладемо $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, \tag{3.1}$$

де функція регресії $C(u,x) = (C_k(u,x), k = \overline{1,d})$, $u \in R^d, x \in X$, задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du^x(t)/dt = C(u^x(t), x), x \in X.$$

Зовнішнє середовище описується рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t), t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ з генератором Q і потенціалом до нього R_0.

В ПСА (3.1) нормуюча послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значеннями керуючої функції $a(t), t \geq 0$,

$$a_n^\varepsilon := a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon\tau_n, n \geq 0,$$

де $\tau_n, n \geq 0$, - моменти відновлення вкладеного ланцюга Маркова

$$x_n := x(\tau_n), n \geq 0,$$

з лічильним процесом $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0$.

В ПСА (3.1) мають місце вкладеності

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, n \geq 0. \tag{3.2}$$

Збіжність ПСА (3.1) розглядається в умовах експоненціальної стійкості усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), C(u) = q\int_X \rho(dx)C(u,x), \tag{3.3}$$

де $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$, – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова x_n, $n \geq 0$,.

Теорема 3.1.1. *Нехай функція Ляпунова* $V(u) \in C^3(R^d)$, $u \in R^d$, *усередненої системи (3.3) така, що*

$C1$: *забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (3.3)*

$$C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0;$$

$C2$: *для* $\overline{C}(u) := \max_{x \in X} C(u,x)$ *мають місце оцінки*

$$\left|\overline{C}(u)V'(u)\right| \leq c_1(1 + V(u)), c_1 > 0,$$

$$\left|\overline{C}(u)[\overline{C}(u)V'(u)]'\right| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,$$

$$\left|\overline{C}(u)\overline{C}(u)[\overline{C}(u)V'(u)]''\right| \leq c_3(1 + V(u)), c_3 > 0.$$

Нарешті нормуюча функція $a(t)$ *монотонно спадна, додатна та задовольняє умовам:*

$$C3 : \int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді при кожному позитивному $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 *- достатньо мале, ПСА (3.1) збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки рівноваги усередненої еволюційної системи (3.3):*

$$P\{\lim_{t \to \infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

Розглянемо двокомпонентний марковський процес

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon), t \geq 0. \tag{3.4}$$

Лема 3.1.1. *Марковський процес (3.4) визначається генератором*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} q(x)\, \boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \tag{3.5}$$

де

$$\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \int_X P(x,dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u,x), y) - \varphi(u,y). \tag{3.6}$$

Доведення. Генератор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ марковського процесу (3.4) визначається співвідношенням

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1}\{E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x] - \varphi(u,x)\} = \boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x). \tag{3.7}$$

Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x] =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon_{t+\varDelta})][I(\theta_x \le \varepsilon^{-1}\varDelta) + I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\varDelta)] =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon_{t+\varDelta})]I(\theta_x \le \varepsilon^{-1}\varDelta) +$$

$$+ E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon_{t+\varDelta})]I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\varDelta). \tag{3.8}$$

Оскільки $I(\theta_x \le \varepsilon^{-1}\varDelta) = 1 - e^{-\varepsilon^{-1}q(x)\varDelta} = \varepsilon^{-1}q(x)\varDelta + o(\varDelta)$, то для першого доданку в (3.8) маємо

$$E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon_{t+\varDelta})]I(\theta_x \le \varepsilon^{-1}\varDelta) =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u + \varDelta u^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\varDelta})]\varepsilon^{-1}q(x)\varDelta + o(\varDelta), \tag{3.9}$$

де прирости еволюцій $\varDelta u^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t+\varDelta) - u^\varepsilon(t)$ визначаються процедурою (3.1) в позначеннях математичного сподівання (3.8) співвідношенням

$$\varDelta u^\varepsilon(t) = \varepsilon a(t) C(u,x).$$

З того, що $I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\varDelta) = e^{-\varepsilon^{-1}q(x)\varDelta} = 1 - \varepsilon^{-1}q(x)\varDelta + o(\varDelta)$ для другого доданку з (3.8) отримуємо

$$E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon_{t+\varDelta})]I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\varDelta) =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u + \varDelta u^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\varDelta})][1 - \varepsilon^{-1}q(x)\varDelta + o(\varDelta)].$$

Оскільки при $\varDelta \to 0$ для останнього виразу $\varDelta u^\varepsilon(t) \to 0$, і $x^\varepsilon_{t+\varDelta} \to x$, то в результаті маємо

$$E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon_{t+\varDelta})]I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\varDelta) =$$

$$= \varphi(u,x)[1 - \varepsilon^{-1}q(x)\varDelta] + o(\varDelta). \tag{3.10}$$

Таким чином, враховуючи (3.9) та (3.10), з (3.8) маємо

$$E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon_{t+\varDelta})] =$$

$$= \varphi(u,x) - \varepsilon^{-1}q(x)\varphi(u,x)\varDelta +$$

$$+ \varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x}\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u,x), y)\varDelta + o(\varDelta), \tag{3.11}$$

з правомірною заміною $x^\varepsilon_{t+\varDelta}$ на $y \in X$.

Результат (3.11) використаємо в (3.7) при знаходженні генератора $\boldsymbol{L}^\varepsilon_t$ в послідовності перетворень

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_t \varphi(u,x) = \lim_{\varDelta \to 0} \varDelta^{-1}[\varphi(u,x) - \varepsilon^{-1}q(x)\varphi(u,x)\varDelta +$$

$$+ \varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x}\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u,x), y)\varDelta - \varphi(u,x) + o(\varDelta) =$$

$$= \varepsilon^{-1}q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u,x), y) - \varphi(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(u, y) - \varphi(u, x)] +$$

$$+\varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y) - \varphi(u, y)].$$

Тобто отримуємо (3.5). Лему доведено.

Наслідок 3.1.1. *На тест-функціях $\varphi(u, \cdot) \in C^2(R^d)$, генератор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ має асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-1} Q \varphi(u, x) + a(t) Q_1(x) \varphi(u, x) +$$

$$+\varepsilon a^2(t) \theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x), \tag{3.12}$$

де

$$Q_1(x) \varphi(u, x) = C(u, x) Q_0 \varphi'_u(u, x), \tag{3.13}$$

$$\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x) = \frac{1}{2} C^2(u, x) Q_0 \varphi''_u(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1, \tag{3.14}$$

і

$$Q_0 \varphi(x) := q(x) \boldsymbol{P} \varphi(x),$$

$$\boldsymbol{P} \varphi(x) := \int\limits_X P(x, dy) \varphi(y).$$

Доведення. Використаємо гладкість функцій $\varphi(u, x)$ при обчисленні оператора $\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)$ з представлення (3.6):

$$\boldsymbol{C}_t^\varepsilon \varphi(u, x) = \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y) - \varphi(u, y)] =$$

$$= \int\limits_X P(x, dy)[\varepsilon a(t) C(u, x) \varphi'_u(u, y) + \varepsilon^2 a^2(t) \frac{1}{2} C^2(u, x) \varphi''_u(\theta u, y)], 0 \leq \theta \leq 1.$$

Звідки і маємо представлення (3.12).

В (3.12) залишковий член $\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x)$ такий, що

$$\|\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x)\| \leq C, C > 0,$$

тобто

$$\varepsilon a^2(t) \|\theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x)\| \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{3.15}$$

Це випливає з (3.14) і гладкості функцій $\varphi(u, x)$.

Розв'яжемо проблему сингулярного збурення для оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u, x) = V(u) + \varepsilon a(t) V_1(u, x), \tag{3.16}$$

де $V(u)$ - функція Ляпунова для усередненої системи (3.3).

Лема 3.1.2. *Генератор* $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ *на збуреній функції Ляпунова* $V^\varepsilon(u,x)$ *такій, що* $V(u) \in C^3(R^d)$, *має асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.17}$$

де

$$\theta_L^\varepsilon(x)V(u) = \theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \theta_1^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.18}$$

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = C(u,x)[[q(x)R_0 - I]\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u)+$$
$$+\Pi\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u)+$$
$$+[q(x)R_0 - I]\widetilde{C}(u,x)V''(u)]\varphi''_u(\theta u,y)], 0 \le \theta \le 1, \tag{3.19}$$

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u,x)q(x)V''(\theta u), 0 \le \theta \le 1. \tag{3.20}$$

Доведення. Спочатку розв'яжемо проблему сингулярного збурення для зрізаного до $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ оператора, а саме

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + a(t)Q_1(x).$$

Розклад оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$ на функціях $V^\varepsilon(u,x)$ подамо в вигляді

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = [\varepsilon^{-1}Q + \varepsilon a(t)Q_1(x)][V(u) + a(t)V_1(u,x)] =$$
$$= \varepsilon^{-1}QV(u)a(t)[QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u)] + \varepsilon a^2(t)Q_1(x)V_1(u,x).$$

З умови розв'язності останнього розкладу маємо

$$QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u) = \widehat{Q}_1V(u), \tag{3.21}$$

де

$$\widehat{Q}_1\Pi = \Pi Q_1(x)\Pi. \tag{3.22}$$

Обчислимо праву частину (3.22). З представлення (3.13) маємо

$$\Pi Q_1(x)\Pi V(u) = \Pi C(u,x)Q_0\Pi V'(u) =$$
$$= \Pi C(u,x)q(x)\boldsymbol{P}\Pi V'(u) =$$
$$= \Pi C(u,x)q(x)V'(u) =$$
$$= \int_X \pi(dx)q(x)C(u,x)V'(u) =$$
$$= q\int_X \rho(dx)C(u,x)V'(u) =$$
$$= C(u)V'(u).$$

Таким чином з (3.21) отримуємо

$$QV_1(u,x) = (\widehat{Q}_1 - Q_1(x))V(u).$$

Враховуючи властивість потенціалу R_0 з останнього маємо розв'язок

$$V_1(u,x) = R_0\widetilde{Q}_1(x)V(u), \tag{3.23}$$

де

$$\widetilde{Q}_1(x) = Q_1(x) - \widehat{Q}_1. \tag{3.24}$$

Порахуємо праву частину (7.24) враховуючи (7.13) та (3.22)

$$[Q_1(x) - \widehat{Q}_1]V(u) = [C(u,x)Q_0 - C(u)]V'(u) =$$

$$[C(u,x)q(x)\boldsymbol{P} - C(u)]V'(u) = [C(u,x)q(x) - C(u)]V'(u).$$

Отже для збурення $V_1(u,x)$ функції Ляпунова $V(u)$ з (3.23) отримуємо представлення

$$V_1(u,x) = R_0\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u), \tag{3.25}$$

де

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u) = \widetilde{C}(u,x)V'(u),$$

$$\widetilde{C}(u,x) = C(u,x)q(x) - C(u).$$

Використаємо (3.25) для обчислення співмножника

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) := Q_1(x)V_1(u,x)$$

розкладу оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$ на функціях $V^\varepsilon(u,x)$.

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = C(u,x)Q_0[R_0\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u)]' =$$

$$= C(u,x)q(x)\boldsymbol{P}R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]' =$$

$$= C(u,x)q(x)\boldsymbol{P}R_0[\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)]. \tag{3.26}$$

Враховуючи, що $q(x)\boldsymbol{P}R_0 = q(x)R_0 + \Pi - I$ продовжимо обчислення в (7.26)

$$\begin{aligned}
&\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = C(u,x)[q(x)R_0 + \Pi - I][\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)] = \\
&= C(u,x)[q(x)R_0\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + q(x)R_0\widetilde{C}(u,x)V''(u)] + \\
&+C(u,x)[\Pi\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \Pi\widetilde{C}(u,x)V''(u)] - \\
&-C(u,x)[\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)] = \\
&= C(u,x)[[q(x)R_0 - I]\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \Pi\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \\
&+[q(x)R_0 - I]\widetilde{C}(u,x)V''(u).
\end{aligned}$$

Таким чином маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u), \tag{3.27}$$

де $\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u)$ має зображення (3.19).

Зауважимо, що з гладкості функцій $C(u,x), V(u)$, і обмеженості оператора R_0 з (3.19) отримуємо обмеженість

$$\|\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u)\| < C, C > 0, x \in X. \tag{3.28}$$

Повертаючись до повного зображення генератора $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$, представимо його в вигляді

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} = \boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon} + \varepsilon a^2(t)\theta_1^{\varepsilon}(x).$$

Отже на функціях (3.16) маємо розклад

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = \boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}[V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x)] +$$

$$+\varepsilon a^2(t)\theta_1^{\varepsilon}(x)[V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x)], \tag{3.29}$$

де $V_1(u,x)$ обчислюється за формулою (7.25).

Враховуючи (3.27) з (3.29) маємо

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u) +$$

$$+\varepsilon a^2(t)\theta_1^{\varepsilon}(x)V(u) + \varepsilon^2 a^3(t)\theta_1^{\varepsilon}(x)R_0\widetilde{C}(u,x)V'(u). \tag{3.30}$$

Порахуємо останні два доданки в (3.30).

$$\theta_1^{\varepsilon}(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u,x)q(x)V''(\theta u), 0 \le \theta \le 1.$$

$$\theta_1^{\varepsilon}(x)R_0\widetilde{C}(u,x)V'(u) = \frac{1}{2}C^2(u,x)Q_0R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]''_u|_{u=\theta u}.$$

З гладкості функцій $C(u,x), V(u)$ а також з обмеженості операторів R_0 і Q_0 отримуємо

$$\|\theta_1^{\varepsilon}(x)R_0\widetilde{C}(u,x)V'(u)\| \le M, M > 0, x \in X.$$

Останнє дає змогу знехтувати відповідним доданком в розкладі (3.30) в зв'язку з другим порядком малості величини ε.

В результаті з (3.30) отримуємо (3.17). Лему доведено.

Доведення теореми проведемо в декілька етапів. Спочатку встановимо ключову нерівність.

Лема 3.1.3. *Генератор* $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ *на збуреній функції Ляпунова (3.16) в умовах теореми допускає оцінку*

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) \le -\delta a(t)V(u), \delta > 0. \tag{3.31}$$

Доведення. Використовуючи оцінки C2 для залишкового члена $\theta_L^{\varepsilon}(x)V(u)$, умову C1 експоненційної стійкості системи (3.3), а також монотонність та обмеженість нормуючої функції $a(t)$, маємо

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u) \leq$$

$$\leq -a(t)(\delta^* - \varepsilon c)V(u) \leq -a(t)\delta V(u), \delta > 0. \tag{3.32}$$

Остання нерівність має місце при всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, де ε_0 таке, що $\varepsilon_0 < \delta^*/c$.

По-друге, явний вигляд збурення (3.24), а також умова C2 теореми , дають оцінку збуреної функції Ляпунова

$$0 < (1 - \varepsilon a(t)c)V(u) \leq V^\varepsilon(u,x) \leq (1 + \varepsilon a(t)c)V(u).$$

По-третє, встановимо, що процес

$$V_n^\varepsilon := V^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), n \geq 0, \tag{3.33}$$

є невід'ємним супермартингалом. Для цього зауважимо, що розширений процес марковського відновлення (3.7) породжує на тест-функціях $\varphi(u,x), u \in R^d, x \in X$, мартингал

$$\mu_{n+1} = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u_0, x_0) - \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon \varphi(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), \tag{3.34}$$

відносно потоку σ-алгебр $F_n^\varepsilon = \sigma\{u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon, 0 \leq k \leq n\}, n \geq 0$. Дійсно, в позначенні $\varphi_n^\varepsilon := \varphi(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon)$ маємо

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n \,|F_n^\varepsilon] = E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] - E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon\theta_{n+1}\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon]. \tag{3.35}$$

Враховуючи означення компенсуючого оператора (3.8) обчислимо другий доданок в (3.35):

$$E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon\theta_{n+1} \ \boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon] = \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon = \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\varepsilon^{-1} q(x_n^\varepsilon) E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] =$$

$$= E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon].$$

Таким чином з (3.35) маємо мартингальну властивість для (3.34):

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n \,|F_n^\varepsilon] = 0, n \geq 0. \tag{3.36}$$

Використаємо (3.36) для доведення наступної леми.

Розглянемо в (3.34) замість довільної тест-функції $\varphi(u,x), u \in R^d, x \in X$, збурену функцію Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$.

Лема 3.1.4. *Процес (3.33) є невід'ємним супермартингалом.*

Доведення. Використаємо мартингальну характеризацію процесу (7.33), а саме, справедливість представлення

$$E[V_{n+1}^\varepsilon \,|F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon E[\sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} \ \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon] + \mu_n^\varepsilon, \tag{3.37}$$

оскільки з (3.36) маємо $E[\mu_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = \mu_n^\varepsilon$. Підставимо в (3.37) замість μ_n^ε його значення з (3.34):

$$E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon + \varepsilon [\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon] +$$

$$+ V_n^\varepsilon - V_0^\varepsilon - \varepsilon [\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon].$$

Звідки маємо $E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = V_n^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon$, і разом з ключовою нерівністю (3.31) отримуємо $E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] \geq V_n^\varepsilon, n \geq 0$, що і доводить лему.

Використання оцінок (3.31) та (3.32), а також леми 3.1.4 завершує доведення теореми 3.1.1.

3.1.2. Стрибкова ПСА в схемі дифузійної апроксимації.

Розглянемо стрибкову ПСА, що визначається співвідношенням (вважаємо, що $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) := 0$):

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} a_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, \tag{3.38}$$

де $\nu(t) := \max\{n, \tau \leq t\}$- лічильний процес моментів стрибків $\tau_n, n \geq 1$, марковського процесу $x(t), t \geq 0$.

Отже $x_n = x(\tau_n), n \geq 1$, вкладений ланцюг Маркова, а $u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n), n \geq 1$, - дискретна ПСА, що розглядається в евклідовому просторі R^d в такому вигляді :

$$u_{n+1}^\varepsilon - u_n^\varepsilon = \varepsilon a_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), n \geq 0,$$

де функція $a(t)$ породжує послідовність $a_n = a(\tau_n), n \geq 1$, і послідовність точок $u_n^\varepsilon \in R^d$ така, що

$$\lim_{n \to \infty} u_n^\varepsilon = u_0$$

майже всюди, для достатньо малих $\varepsilon > 0$.

Функція регресії

$$C^\varepsilon(u, x) = C_0(u, x) + \varepsilon^{-1} C(u, x) \tag{3.39}$$

залежить від станів зовнішнього середовища $x \in X$, зміна яких задається ергодичним ланцюгом Маркова x_n,$n \geq 0$, з ймовірностями переходу

$$P(x, B) = P\{x_{n+1} \in B / x_n = x\}, x \in X, B \in \boldsymbol{X}, \tag{3.40}$$

$\varepsilon > 0$ - малий параметр серії, а $(X, \boldsymbol{X})$ - фазовий простір станів марковського процесу $x(t), t \geq 0$.

Надалі вивчається збіжність ПСА (7.41) зі збуреною функцією регресії (7.39) в умовах балансу на збурюючу функцію регресії

$$\int_X \rho(dx)C_0(u,x) = 0. \tag{3.45}$$

Усереднена ПСА в умовах балансу (3.45) визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du(t) = a(t)C(u(t))dt + a^2(t)d\zeta(t), \tag{3.47}$$

де

$$d\zeta(t) = b(u(t))dt + \frac{1}{2}SpB((u(t))dw_t \tag{3.48}$$

дифузійний процес зі зсувом $b(u)$ та коваріаційною матрицею $B(u)$, w_t – вінерівський процес, а усереднена функція регресії $C(u)$ визначається формулою

$$C(u) = q\int_X \rho(dx)C(u,x). \tag{3.49}$$

Коефіцієнти збурюючого дифузійного процесу $\zeta(t), t \geq 0$, зсув $b(u)$ та коваріаційна матриця $B(u)$, визначаються співвідношеннями

$$b(u) = q\int_X \rho(dx)b(u,x), \tag{3.50}$$

$$B(u) = q\int_X \rho(dx)B(u,x), \tag{3.51}$$

де

$$b(u,x) := C_0(u,x)R_0q(x)C_0'(u,x); \tag{3.52}$$

$$B(u,x) := 2C_0(u,x)R_0q(x)C_0(u,x) - C_0^2(u,x). \tag{3.53}$$

Для того щоб сформулювати основний результат, введемо мажоранти для суми функції регресії $C(u,x)$, та її збурення $C_0(u,x)$

$$\overline{C}(u) := \max_{x\in X}(|C(u,x)| + |C_0(u,x)|) \tag{3.54}$$

та допоміжні функції

$$w_k(u) := \overline{C}(u)w_{k-1}'(u), \quad k = 1,2,3,4,5; \tag{3.55}$$

$$w_0(u) := \overline{C}(u)V'(u), \tag{3.56}$$

де $V(u)$ - функція Ляпунова для усередненої динамічної системи

$$du(t)/dt = C(u(t)). \tag{3.57}$$

Збіжність ПСА (3.41) формулюється в умовах рівномірної експоненційної стійкості розв'язку $u(t)$ системи (3.57), тобто для (3.57) існує єдина точка рівноваги u_0, така що $C(u_0) = 0$, до якої збігаються траєкторії усередненої динамічної системи (3.57).

Теорема 3.1.2. *Нехай існує функція Ляпунова $V(u)$ для усередненої динамічної системи (3.57), така, що має обмежені похідні до п'ятого порядку включно та задовольняє умови:*

$$C1 : C(u)V'(u) \leq -cV(u);$$

$$C2 : w_k(u) \leq c_k(1 + V(u)), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Крім того, функції регресії $C(u, x)$ і $C_0(u, x)$ ПСА (3.41) також мають перші чотири похідні по u , обмежені рівномірно по $x \in X$, а функція $C_0(u, x)$ задовольняє умову балансу (3.57).

Нормуюча функція $a(t) > 0$ вибрана так, що виконуються умови

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \quad \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді стрибкова ПСА (3.41), а також усереднена ПСА (3.47), (3.48), збігається до точки рівноваги динамічної системи (3.57) з ймовірністю 1.

Доведення теореми базується на використанні розв'язку проблеми сингулярного збурення звідного оборотного оператора Q, що визначає ергодичний марковський процес.

Лема 3.1.5. *Двокомпонентний процес $u^\varepsilon(t)$, $x^\varepsilon(t) = x(t/\varepsilon^2), t \geq 0$ є марковським процесом, що визначається генератором*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon = \varepsilon^{-2}[Q + \boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)]. \tag{3.60}$$

Тут

$$\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t)C^\varepsilon(u, x), y) - \varphi(u, y)]. \tag{3.61}$$

Доведення. Для побудови генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ будемо використовувати означення генератора марковського процесу.

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) := \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t + \Delta), x^\varepsilon(t + \Delta)) - \varphi(u, x)]. \tag{3.62}$$

Розглянемо умовне математичне сподівання $E_{u,x}$, враховуючи (3.38), а також те, що $x^\varepsilon(t) = x(t/\varepsilon^2)$:

$$E_{u,x}\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon(t+\varDelta)) =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), x^\varepsilon(t+\varDelta))I(\theta_x \le \varepsilon^{-2}\varDelta) + \varphi(u, x^\varepsilon(t))I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\varDelta)],$$

де θ_x - час перебування в стані x.

Оскільки

$$I(\theta_x \le \varepsilon^{-2}\varDelta) = 1 - e^{-\varepsilon^{-2}\varDelta q(x)}, \quad I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\varDelta) = e^{-\varepsilon^{-2}\varDelta q(x)},$$

де $q(x)$ - інтенсивність часу перебування в стані x, то

$$E_{u,x}\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x^\varepsilon(t+\varDelta)) =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), x^\varepsilon(t+\varDelta))(1 - e^{-\varepsilon^{-2}\varDelta q(x)}) +$$
$$+ \varphi(u, x^\varepsilon(t))e^{-\varepsilon^{-2}\varDelta q(x)}] =$$
$$= E_{u,x}[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), x^\varepsilon(t+\varDelta))\varepsilon^{-2}\varDelta q(x) + o_1(\varDelta^2) +$$
$$+ \varphi(u,x) - \varphi(u,x)\varepsilon^{-2}\varDelta q(x) + o_2(\varDelta^2)] =$$
$$= \varepsilon^{-2}\varDelta q(x)E_{u,x}[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), x^\varepsilon(t+\varDelta)) - \varphi(u,x)] + o(\varDelta^2).$$

Розглянемо перший доданок в останньому виразі. Оскільки

$$\varepsilon^{-2}\varDelta q(x)E_{u,x}[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), x^\varepsilon(t+\varDelta)) - \varphi(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-2}\varDelta q(x)\int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), y) - \varphi(u,x)],$$

то, згідно з (3.62), для генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ маємо

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) = q(x)\varepsilon^{-2}\int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), y) - \varphi(u,x)].$$

Щоб виділити генератор марковського процесу Q , зробимо перетворення.

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_X [P(x,dy)\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), y) - P(x,dy)\varphi(u,y) +$$

$$+ P(x,dy)\varphi(u,y) - Q(x,dy)\varphi(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_X [P(x,dy)[\varphi(u,y) - \varphi(u,x)] +$$

$$+ \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x), y) - \varphi(u,y)].$$

Або в операторній формі маємо (3.62).

Лема 3.1.6. *Генератор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на тричі неперервно диференційованих по u функціях $\varphi(u,x)$ має представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}a(t)Q_1(x)\varphi(u,x)+$$

$$+a(t)Q_{21}(x)\varphi(u,x) + \frac{1}{2}a^2(t)Q_{22}(x)\varphi(u,x)+$$

$$+\varepsilon a^2(t)\boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \tag{3.63}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(u,x) = C_0(u,x)Q_0\varphi'(u,x), \tag{3.64}$$

$$Q_{21}(x)\varphi(u,x) = C(u,x)Q_0\varphi'(u,x), \tag{3.64$'$}$$

$$Q_{22}(x)\varphi(u,x) = C_0^2(u,x)Q_0\varphi''(u,x), \tag{3.65}$$

$$\boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = G_1(x)\varphi(u,x) + a(t)G_2(x)\varphi(u,x) + \varepsilon G_3(x)\varphi(u,x), \tag{3.66}$$

$$G_1(x)\varphi(u,x) = C(u,x)C_0(u,x)Q_0\varphi''(u,x), \tag{3.67}$$

$$G_2(x)\varphi(u,x) = \frac{1}{6}C_0^3(u,x)Q_0\varphi'''(u,x), \tag{3.68}$$

$$G_3(x)\varphi(u,x) = \frac{1}{2}C^2(u,x)Q_0\varphi'''(u,x), \tag{3.69}$$

$$Q_0 = q(x)\boldsymbol{P}.$$

Доведення. Розкладемо підінтегральну функцію з (3.61) в ряд Тейлора по змінній u.

$$\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x),y) - \varphi(u,y) =$$

$$= \varphi(u+\varepsilon a(t)C_0(u,x) + \varepsilon^2 a(t)C(u,x),y) - \varphi(u,y) =$$

$$= \varphi(u+\varepsilon a(t)C_0(u,x),y) + \varepsilon^2 a(t)C(u,x)\varphi'(u+\varepsilon a(t)C_0(u,x),y)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^4 a^2(t)C^2(u,x)\varphi''(\tilde{u},y) - \varphi(u,y). \tag{3.73}$$

В (3.73) і далі $\tilde{u}$ - відповідна середня точка залишкового члену розкладу в ряд Тейлора.

Оскільки

$$\varphi(u+\varepsilon a(t)C_0(u,x),y) = \varphi(u,y) + \varepsilon a(t)C_0(u,x)\varphi'(u,y)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2 a^2(t)C_0^2(u,x)\varphi''(u,y) + \frac{1}{6}\varepsilon^3 a^3(t)C_0^3(u,x)\varphi_u'''(\tilde{u},y),$$

а

$$\varphi'(u+\varepsilon a(t)C_0(u,x),y) = \varphi'(u,y) + \varepsilon a(t)C_0(u,x)\varphi''(\tilde{u},y),$$

то з (3.73) маємо

$$\varphi(u+\varepsilon a(t)C^\varepsilon(u,x),y)-\varphi(u,y)=\varepsilon a(t)C_0(u,x)\varphi'(u,y)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2a^2(t)C_0^2(u,x)\varphi''(u,y)+\varepsilon^2a(t)C(u,x)\varphi'(u,y)+$$

$$+\varepsilon^3a^2(t)C(u,x)C_0(u,x)\varphi''(\tilde u,y)+\frac{1}{6}\varepsilon^3a^3(t)C_0^3(u,x)\varphi'''(\tilde u,y)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^4a^2(t)C^2(u,x)\varphi''(\tilde u,y).$$

Тоді оператор $\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)$, згідно з (3.61), на функціях $\varphi(u,x)$ має вигляд

$$\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)=\varepsilon a(t)q(x)C_0(u,x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi'(u,y)+$$

$$+\varepsilon^2[a(t)q(x)C(u,x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi'(u,y)+$$

$$+\frac{1}{2}a^2(t)q(x)C_0^2(u,x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi''(u,y)]+$$

$$+\varepsilon^3[a^2(t)C(u,x)C_0(u,x)q(x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi''(u,y)+$$

$$+\frac{1}{6}a^3(t)C_0^3(u,x)q(x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi'''(u,y)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon a^2(t)C^2(u,x)q(x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi''(u,y)].$$

Згідно з позначеннями (3.64)–(3.69), маємо (3.63).

У випадку, коли функція $\varphi(u,x)$ залежить тільки від змінної u, з (3.64)–(3.69) будемо мати:

$$Q_1(x)\varphi(u)=q(x)C_0(u,x)\varphi'(u), \tag{3.70}$$

$$Q_{21}(x)\varphi(u)=q(x)C(u,x)\varphi'(u), \tag{3.71}$$

$$Q_{22}(x)\varphi(u)=q(x)C_0^2(u,x)\varphi''(u), \tag{3.71$'$}$$

$$\mathbf{G}_t^\varepsilon(x)\varphi(u)=q(x)[C(u,x)C_0(u,x)\varphi''(u)+\frac{1}{6}a(t)C_0^3(u,x)\varphi'''(u)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2C^2(u,x)\varphi''(u)]. \tag{3.72}$$

Використовуючи розв'язок проблеми сингулярного збурення в умовах балансу, дістаємо асимптотичне представлення оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u,x)=V(u)+\varepsilon a(t)V_1(u,x)+\varepsilon^2a(t)V_2(u,x). \tag{3.74}$$

Лема 3.1.7. *На функціях (3.74), таких, що $V(u) \in C^5(R^d)$, генератор (3.63) має асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0 V(u) + \varepsilon a^2(t)\boldsymbol{H}_t^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.75}$$

де

$$\boldsymbol{L}_0 V(u) = b(u)V'(u) + \frac{1}{2}Sp[B(u)V''(u)], \tag{3.76}$$

а залишковий член $\boldsymbol{H}_t^\varepsilon(x)V(u)$ обмежений.

Доведення. Доведення проведемо за два кроки.

Крок перший. Розглянемо розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора до (3.63), а саме

$$\boldsymbol{L}_{t0}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}a(t)Q_1(x)\varphi(u,x) + a(x)Q_{21}(x)\varphi(u,x) +$$
$$+\frac{1}{2}a^2(t)Q_{22}(x)\varphi(u,x). \tag{3.77}$$

Представлення оператора $\boldsymbol{L}_{t0}$ на функціях (3.74) має вигляд

$$\boldsymbol{L}_{t0}V^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-2}QV(u) +$$
$$+\varepsilon^{-1}[QV_1(u,x) + a(t)Q_1(x)V(u)] +$$
$$+QV_2(u,x) + a(t)Q_1(x)V_1(u,x) + a(t)Q_{21}(x)V(u) + \frac{1}{2}a^2(t)Q_{22}(x)V(u) +$$
$$+\varepsilon\theta_{t0}^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.78}$$

де

$$\theta_{t0}^\varepsilon(x)V(u) = a(t)Q_1(x)V_2(u,x) + a(t)Q_{21}(x)V_1(u,x) +$$
$$+\frac{1}{2}a^2(t)Q_{22}(x)V_1(u,x) +$$
$$+\varepsilon a(t)Q_{21}(x)V_2(u,x) + \varepsilon\frac{1}{2}a^2(t)Q_{22}(x)V_2(u,x). \tag{3.79}$$

Виділимо умови розв'язності розкладу (3.78).

$$QV(u) = 0, \tag{3.80}$$

$$QV_1(u,x) + a(t)Q_1(x)V(u) = 0, \tag{3.81}$$

$$QV_2(u,x) + a(t)Q_1(x)V_1(u,x) + a(t)Q_{21}(x)V(u) +$$
$$+\frac{1}{2}a^2(t)Q_{22}(x)V(u) = \boldsymbol{L}_t V(u). \tag{3.82}$$

Оскільки функція $V(u)$ не залежить від змінної x, тобто належить простору N_Q нулів оператора Q, то умова (3.80) виконується.

З умови балансу та представлення (3.70) отримуємо

$$\varPi Q_1(x)V(u) = \varPi q(x)C_0(u,x)V'(u) =$$

$$= V'(u)\int\limits_X \pi(dx)q(x)C_0(u,x) = qV'(u)\int\limits_X \rho(dx)C_0(u,x) = 0.$$

Останнє дає можливість зобразити розв'язок рівняння (3.81) в вигляді

$$V_1(u,x) = R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u), \tag{3.83}$$

де

$$\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) := q(x)C_0(u,x)V'(u). \tag{3.84}$$

З (3.82) отримуємо представлення

$$QV_2(u,x) + \boldsymbol{L}_t(x)V(u) = \boldsymbol{L}_tV(u), \tag{3.85}$$

де

$$\boldsymbol{L}_t(x)V(u) = a(t)Q_1(x)V_1(u,x) + a(t)Q_{21}(x)V(u) + \frac{1}{2}a^2(t)Q_{22}(x)V(u). \tag{3.86}$$

Враховуючи (3.70) та (3.83) обчислимо перший доданок в (3.86).

$$Q_1(x)V_1(u,x) = C_0(u,x)Q_0a(t)R_0[\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)]' =$$

$$= a(t)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)\boldsymbol{P}R_0[\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)]. \tag{3.87}$$

Тут використаємо представлення

$$\boldsymbol{P}R_0 = R_0 + g(x)[\varPi - I].$$

Отже, враховуючи (3.84), для (3.87) маємо

$$\boldsymbol{P}R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) = [R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) + g(x)\varPi\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) - g(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)]V(u). \tag{3.88}$$

З умови балансу (3.45) маємо

$$\varPi\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) = \varPi q(x)\boldsymbol{C}_0(x) =$$

$$= \int\limits_X \pi(dx)q(x)C_0(u,x) = q\int\limits_X \rho(dx)C_0(u,x) = 0.$$

Враховуючи останнє і (3.88), з (3.87) отримуємо

$$Q_1(x)V_1(u,x) = a(t)[\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) - \boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)]V(u). \tag{3.89}$$

Для другого доданку з (3.86) використаємо (3.71):

$$Q_{21}(x)V(u) = C(u,x)q(x)V'(u) = \boldsymbol{C}(x)V(u), \tag{3.90}$$

де
$$\boldsymbol{C}(x)V(u) := q(x)C(u,x)V'(u).$$

Для третього доданку використаємо (3.72):
$$Q_{22}(x)V(u) = q(x)C_0^2(u,x)V''(u) = \boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u). \tag{3.91}$$

Представлення (3.89) та (3.91) для (3.86) дають
$$\boldsymbol{L}_t(x)V(u) = a(t)\boldsymbol{C}(x)V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0(x)V(u), \tag{3.92}$$

де
$$\boldsymbol{L}_0(x)V(u) = \overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) - \frac{1}{2}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x). \tag{3.93}$$

Усереднення оператора $\boldsymbol{L}_t(x)$ по стаціонарному розподілу $\pi(dx)$ дає представлення граничного оператора в втигляді $\boldsymbol{L}_t = \mathit{\Pi}\boldsymbol{L}_t(x)\mathit{\Pi}$, тобто
$$\boldsymbol{L}_tV(u) = a(t)\mathit{\Pi}\boldsymbol{C}(x)\mathit{\Pi}V(u) + a^2(t)\mathit{\Pi}\boldsymbol{L}_0(x)\mathit{\Pi}V(u). \tag{3.94}$$

Обчислення правої частини (3.94) дає для першого доданку
$$\mathit{\Pi}\boldsymbol{C}(x)\mathit{\Pi}V(u) = q\int_X \rho(dx)C(u,x)V'(u) = \boldsymbol{C}V(u), \tag{3.95}$$

де
$$\boldsymbol{C}V(u) := C(u)V'(u),$$

а для другого
$$\mathit{\Pi}\boldsymbol{L}_0(x)\mathit{\Pi}V(u) = \mathit{\Pi}\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) - \frac{1}{2}\mathit{\Pi}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u). \tag{3.96}$$

Для першого доданку (3.96) отримуємо
$$\mathit{\Pi}\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) =$$
$$= \mathit{\Pi}C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0'(u,x)V'(u) + \mathit{\Pi}C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0(u,x)V''(u).$$

Для другого доданку (3.96)
$$\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) = \mathit{\Pi}C_0(u,x)q(x)C_0(u,x)V''(u).$$

Отже для (3.96) маємо
$$\mathit{\Pi}\boldsymbol{L}_0(x)\mathit{\Pi}V(u) = \mathit{\Pi}C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0'(u,x)V'(u)+$$
$$+\frac{1}{2}[2\mathit{\Pi}C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0(u,x) - \mathit{\Pi}C_0(u,x)q(x)C_0(u,x)]V''(u).$$

Враховуючи (3.95) та останнє, для (3.94) отримуємо

$$\boldsymbol{L}_t V(u) = a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0 V(u), \tag{3.97}$$

де $\boldsymbol{L}_0 V(u)$ має вигляд (3.76).

Використаємо (3.97) для розв'язку рівняння (3.85), яке можна подати в вигляді

$$QV_2(u,x) = [\boldsymbol{L}_t - \boldsymbol{L}_t(x)]V(u).$$

Звідки

$$V_2(u,x) = R_0 \widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u), \tag{3.98}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x) := \boldsymbol{L}_t(x) - \boldsymbol{L}_t$.

Виділимо множник $a(t)$ в представленні (3.98). Для цього обчислимо центрований генератор $\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x)$, звертаючись до (3.92), (3.93) та (3.97)

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x) = a(t)\boldsymbol{C}(x)V(u)+$$

$$+a^2(t)\boldsymbol{L}_0(x)V(u) - a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0 V(u) =$$

$$= a(t)[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x)]V(u),$$

де

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) = \boldsymbol{C}(u) - C,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x) = \boldsymbol{L}_0(x) - \boldsymbol{L}_0.$$

Таким чином представлення (3.98) приймає вигляд

$$V_2(u,x) = R_0[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x)]V(u). \tag{3.99}$$

Використаємо представлення (3.83) та (3.99) для аналізу залишкового члена (3.79). Відзначимо відразу, що представлення (3.99) збурення функції Ляпунова $V(u)$ виражаються через першу, другу та третю похідні цієї функції, а також перші та другі похідні швидкостей $C(u,x)$ та $C_0(u,x)$. Аналогічний висновок маємо і для представлення (3.83).

Враховуючи (3.99) та (3.70), для першого доданку з (3.79) маємо представлення

$$a(t)Q_1(x)V_2(u,x) = a^2(t)\theta_1^{\varepsilon}(x)V(u), \tag{3.100}$$

де

$$\theta_1^{\varepsilon}(x)V(u) = \overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x)]V(u).$$

Для другого доданку з (3.79) використовуємо (3.83) та (3.71)

$$a(t)Q_{21}(x)V_1(u,x) = a^2(t)\theta_2^{\varepsilon}(x)V(u), \tag{3.101}$$

де

$$\theta_2^{\varepsilon}(x)V(u) = \overline{\boldsymbol{C}}(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u).$$

Для третього доданку використаємо (3.72) та (3.83)

$$a^2(t)Q_{22}(x)V_1(u,x) = a^3(t)\theta_3^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.102}$$

де

$$\theta_3^\varepsilon(x)V(u) = q(x)C^2(u,x)R_0[\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)]''.$$

Для четвертого доданку використаємо (3.71) та (3.99)

$$a(t)Q_{21}(x)V_2(u,x) = a^2(t)\theta_4^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.103}$$

де

$$\theta_4^\varepsilon(x)V(u) = \overline{\boldsymbol{C}}(x)R_0[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x)]V(u).$$

Для п'ятого доданку використаємо (3.72) та (3.99)

$$a^2(t)Q_{22}(x)V_2(u,x) = a^3(t)\theta_5^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.104}$$

де

$$\theta_5^\varepsilon(x)V(u) = q(x)C^2(u,x)R_0[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x)V(u)]''.$$

Враховуючи (3.100) – (3.104) залишковий член (3.79) подамо в вигляді

$$\theta_{t0}^\varepsilon(x)V(u) = a^2(t)\widehat{\theta}_{t0}^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.105}$$

де

$$\widehat{\theta}_{t0}^\varepsilon(x)V(u) = \theta_1^\varepsilon(x)V(u) + \theta_2^\varepsilon(x)V(u) +$$
$$+\frac{1}{2}a(t)\theta_3^\varepsilon(x)V(u) + \varepsilon\theta_4^\varepsilon(x)V(u) +$$
$$+\varepsilon\frac{1}{2}a(t)\theta_5^\varepsilon(x)V(u).$$

Таким чином, беручи до уваги (3.78), (3.82), (3.97) та (3.103) отримуємо асимптотичне представлення

$$\boldsymbol{L}_{t0}V^\varepsilon(u,x) = a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0V(u) + \varepsilon a^2(t)\widehat{\theta}_{t0}^\varepsilon(x)V(u).$$

Крок другий. Враховуючи зрізаний оператор $\boldsymbol{L}_{t0}$ в (3.77), для повного генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon = \boldsymbol{L}_{t0} + \varepsilon a^2(t)\boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x).$$

Отже проблема сингулярного збурення для генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на функціях $V^\varepsilon(u,x)$ має вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{L}_{t0}V^\varepsilon(u,x) + \varepsilon a^2(t)\boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon V_1(u,x) + \varepsilon^2 V_2(u,x)].$$

Застосовуючи представлення (3.103), з (3.105) отримуємо

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0V(u) + \varepsilon a^2(t)\boldsymbol{H}_t^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.106}$$

де

$$\boldsymbol{H}_t^{\varepsilon}(x)V(u) = \widehat{\theta}_{t0}^{\varepsilon}(x)V(u) + \boldsymbol{G}_t^{\varepsilon}(x)V(u) + \varepsilon a(t)\boldsymbol{G}_t^{\varepsilon}(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)+$$

$$+\varepsilon^2 a(t)\boldsymbol{G}_t^{\varepsilon}(x)R_0[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x)]V(u). \tag{3.107}$$

На завершення відзначимо, що з представлення (7.103), а також представлення (3.72) отримуємо обмеженість правої частини (3.107), тобто має місце

$$\| \boldsymbol{H}_t^{\varepsilon}(x)V(u) \| \leq M, M > 0.$$

Лема 3.1.8. *Для операторів $\boldsymbol{L}_0$ та $\boldsymbol{H}_t^{\varepsilon}$ представлення (3.75) мають місце оцінки*

$$|\boldsymbol{L}_0 V(u)| \leq c(1 + V(u)), \tag{3.107'}$$

$$|\boldsymbol{H}_t^{\varepsilon} V(u)| \leq c(1 + V(u)). \tag{3.107''}$$

Доведення. Використовуючи обмеженість потенціалу R_0, та обмеженість інтенсивності $q(x)$, будемо оцінювати доданки в (3.79) функціями $w_k(u)$, що визначаються рекурсіями (3.55)–(3.56). Перший та другий доданки в (3.79) мажоруються функціями $w_1(u)$ та $w_2(u)$. Отже, згідно з умовою 2) теореми при $k = 1, 2$, маємо оцінку (3.107').

Для встановлення оцінки (3.107") розглянемо представлення (3.107). Перший доданок мажорується функціями $w_1(u)$, $w_2(u)$ та $w_3(u)$. Отже згідно умови C2 теореми має місце оцінка

$$|\widehat{\theta}_{t0}^{\varepsilon}(x)V(u)| \leq c(1 + V(u)).$$

Другий доданок , згідно (3.72), мажорується функціями $w_1(u)$, $w_2(u)$ та $w_3(u)$, тому має місце оцінка

$$|\boldsymbol{G}_t^{\varepsilon}(x)V(u)| \leq c(1 + V(u)).$$

Для третього доданку використаємо додатково обмеженість функції $a(t)$, а також функцію $w_4(u)$, отримуючи

$$\varepsilon |a(t)\boldsymbol{G}_t^{\varepsilon}(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)| \leq c(1 + V(u)).$$

Використовуючи додатково функцію $w_4(u)$, для четвертого доданку маємо

$$\varepsilon^2 |a(t)\boldsymbol{G}_t^{\varepsilon}(x)R_0[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x)]V(u)| \leq c(1 + V(u)).$$

В результаті маємо (3.107").

Зауважимо, що в умовах теореми має місце оцінка

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon} V(u) \leq -\delta a(t)V(u), \delta > 0.$$

Доведення теореми. Оскільки для генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ встановлено оцінку (3.107), то для отримання результату теореми достатньо скористатись теоремою Невельсона-Хасьмінського [1].

Заключення. При дослідженні ПСА в марковському випадковому середовищі перш за все необхідно провести статистичний аналіз марковського середовища, а саме – знайти стаціонарний розподіл збурюючого марковського процесу, що визначає випадкове середовище. Використовуючи його, знайти усереднену функцію регресії $C(u)$, якою і визначається точка рівноваги ПСА.

3.2. Процедура стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі

3.2.1. ПСА в схемі усереднення.

Стрибкова процедура стохастичної апроксимації задається співвідношенням (покладемо $\sum\limits_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, \tag{3.108}$$

де функція регресії $C(u,x) = (C_k(u,x), k = \overline{1,d})$, $u \in R^d, x \in X$, задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)/dt = C(u_x(t), x), x \in X.$$

Напівмарковський процес $x(t), t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається напівмарковським ядром

$$Q(x, B, t) = P(x, B)G_x(t), x \in X, B \in \boldsymbol{X}, t \geq 0.$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначається перехідними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$,

$$P(x, B) := P\{x_{n+1} \in B \,|x_n = x\},$$

а $G_x(t)$, $x \in X$, $t \geq 0$, - функція розподілу часу перебування θ_x в стані $x \in X$:

$$G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \leq t | x_n = x\}.$$

В ПСА (3.108) нормуюча послідовність a_n^ε, $n \geq 0$, визначається значенням функції $a(t), t \geq 0$ через співвідношення:

$$a_n^\varepsilon := a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon \tau_n, n \geq 0, \tag{3.109}$$

де $\tau_n, n \geq 0$, - моменти марковського відновлення напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, з лічильним процесом $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0$.

Разом з напівмарковським процесом $x(t), t \geq 0$, розглянемо супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t \geq 0$, що задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x)\int\limits_X P(x,dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right]. \qquad (3.110)$$

Разом з (3.109) має місце вкладеність дискретної ПСА $u_n^\varepsilon, n \geq 0$, в стрибкову ПСА (3.108)

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), n \geq 0. \qquad (3.111)$$

Збіжність ПСА (3.108) розглядається в умовах експоненційної стійкості усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), C(u) = q\int\limits_X \rho(dx)C(u,x). \qquad (3.112)$$

Надалі без зменшення загальності покладемо $u_0 = 0$, тобто має місце

$$C(0) = 0.$$

Теорема 3.2.1. *Нехай функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d), u \in R^d$, усередненої системи (3.112) така, що*

$C1$: *забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (3.112)*

$$C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0;$$

$C2$: *для $\overline{C}(u) := \max\limits_{x\in X} C(u,x)$ мають місце оцінки*

$$\left|\overline{C}(u)V'(u)\right| \leq c_1(1 + V(u)), c_1 > 0,$$

$$\left|\overline{C}(u)[\overline{C}(u)V'(u)]'\right| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,$$

$$\left|\overline{C}(u)\overline{C}(u)[\overline{C}(u)V'(u)]''\right| \leq c_3(1 + V(u)), c_3 > 0.$$

Нарешті нормуюча функція $a(t)$ монотонно спадна, обмежена та задовольняє умовам:

$$C3 : \int\limits_0^\infty a(t)dt = \infty, \int\limits_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді при кожному позитивному $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо мале, ПСА (3.108) збігається з ймовірністю 1 до единої точки рівноваги усередненої еволюційної системи (3.112):

$$P\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

Розглянемо для стрибкової ПСА (3.108) розширений процес марковського відновлення

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, n \geq 0. \qquad (3.114)$$

Компенсуючий оператор для процесу (3.114) визначається умовним математичним сподіванням

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x,t) := \varepsilon^{-1}q(x)E[\varphi(u_{n+1}^{\varepsilon},x_{n+1}^{\varepsilon},\tau_{n+1}^{\varepsilon})-$$

$$-\varphi(u,x,t)\,|u_n^{\varepsilon}=u,\ x_n^{\varepsilon}=x,\tau_n^{\varepsilon}=t]. \tag{3.115}$$

Лема 3.2.1. *Компенсуючий оператор (3.115) на тест-функціях $\varphi(u,x)$, $u\in R^d$, $x\in X$, має представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x) := \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x)+\varepsilon^{-1}q(x)\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x), \tag{3.116}$$

де

$$\boldsymbol{C}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)=\varphi(u+\varepsilon a(t)C(u,x),x)-\varphi(u,x), \tag{3.117}$$

а оператор $\boldsymbol{P}$ *визначається співвідношенням*

$$\boldsymbol{P}\varphi(\cdot,x) := \int\limits_X P(x,dy)\varphi(\cdot,y). \tag{3.118}$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(u_{n+1}^{\varepsilon},x_{n+1}^{\varepsilon})|u_n^{\varepsilon}=u,x_n^{\varepsilon}=x,\tau_n^{\varepsilon}=t]=E_{u,x,t}\varphi(u_{n+1}^{\varepsilon},x_{n+1}^{\varepsilon})=$$

$$=E_{u,x,t}\varphi(u_n^{\varepsilon}+\Delta u_{n+1}^{\varepsilon},x_{n+1}^{\varepsilon}), \tag{3.119}$$

де $\Delta u_{n+1}^{\varepsilon}:=u_{n+1}^{\varepsilon}-u_n^{\varepsilon}$. Для обчислення приросту $\Delta u_{n+1}^{\varepsilon}$ скористаємося представленнями, що випливають з (3.108) і (3.114), а саме

$$u_{n+1}^{\varepsilon}:=u^{\varepsilon}(\tau_{n+1}^{\varepsilon})=u+\varepsilon\sum_{k=0}^{n}a_k^{\varepsilon}C(u_k^{\varepsilon},x_k^{\varepsilon}),$$

$$u_n^{\varepsilon}:=u^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon})=u+\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}a_k^{\varepsilon}C(u_k^{\varepsilon},x_k^{\varepsilon}).$$

Враховуючи останнє маємо

$$\Delta u_{n+1}^{\varepsilon}=\varepsilon a_n^{\varepsilon}C(u_n^{\varepsilon},x_n^{\varepsilon}). \tag{3.120}$$

Підставляючи в (3.115) зображення (3.120) отримуємо

$$E_{u,x,t}\varphi(u_n^{\varepsilon}+\Delta u_{n+1}^{\varepsilon},x_{n+1}^{\varepsilon})=E_{u,x,t}\varphi(u+\varepsilon a(t)C(u,x),y),$$

де $y=x_{n+1}^{\varepsilon}$ значення процесу $x(t),t\geq 0$, в момент наступного стрибка (див. (3.111)).

Отже компенсуючий оператор (3.115), враховуючи останнє, має вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x) := \varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x,t}[\varphi(u+\varepsilon a(t)C(u,x),y)-\varphi(u,x)]=$$

$$= \varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y) - \varphi(u, x)].$$

Використовуючи доданок $\pm\varphi(u, y)$, з останньої рівності маємо

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(u, y) - \varphi(u, x)] +$$

$$+ \varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y) - \varphi(u, y)]. \tag{3.121}$$

Враховуючи означення генератора Q, з (3.121) отримуємо (3.116). Лему доведено.

Наслідок 3.2.1. На тест-функціях $\varphi(u, \cdot) \in C^3(R^d)$ при виконанні умов C2 Теореми компенсуючий оператор (3.116) має асимптотичне представлення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-1} Q \varphi(u, x) + a(t) Q_1(x) \varphi(u, x) + \varepsilon a^2(t) \theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x), \tag{3.122}$$

де

$$Q_1(x) \varphi(u, x) = C(u, x) Q_0(x) \varphi_u'(u, x), \tag{3.123}$$

і

$$Q_0 \varphi(u, x) = q(x) \mathbf{P} \varphi(u, x),$$

а залишковий член $\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = \frac{1}{2} C^2(u, x) Q_0 \varphi_u''(\theta u, x), 0 \le \theta \le 1$ такий, що

$$\varepsilon a^2(t) \left\| \theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x, t) \right\| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Для оператора $\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)$ з (3.118) згідно гладкості функції $\varphi(u, x)$ маємо розклад

$$\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(u, x) = \varepsilon a(t) C(u, x) \varphi_u'(u, x) + \theta_C^\varepsilon(x) \varphi(u, x), \tag{3.124}$$

де

$$\theta_C^\varepsilon(x) \varphi(u, x) = \varepsilon^2 a^2(t) \frac{1}{2} C^2(u, x) \varphi_u''(\theta u, x), 0 \le \theta \le 1.$$

Підставимо розклад (3.124) в (3.116) і проведемо ряд зрозумілих перетворень

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-1} Q \varphi(u, x) + \varepsilon^{-1} q(x) \varepsilon a(t) C(u, x) \boldsymbol{P} \varphi_u'(u, x) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} q(x) \varepsilon^2 a^2(t) \frac{1}{2} C^2(u, x) \boldsymbol{P} \varphi_u''(\theta u, x).$$

Таким чином маємо представлення (3.122) з залишковим членом $\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x)$. Згідно властивостей функцій $\varphi(u, x)$, $a(t)$ і $C(u, x)$ також отримуємо

$$\varepsilon a^2(t) \left\| \theta_1^\varepsilon(x) \varphi(u, x) \right\| \to 0, \varepsilon \to 0$$

, що і доводить наслідок.

Першим етапом доведення теореми є розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (3.122) на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u,x) = V(u) + \varepsilon a(t) V_1(u,x), \tag{3.125}$$

де $V(u)$ - функція Ляпунова для системи (3.112).

Лема 3.2.2. *Компенсуючий оператор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$, при виконанні умови C2 Теореми, на функціях $V^\varepsilon(u,x)$ таких, що $V(u) \in C^3(R^d)$, має асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x,t) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.126}$$

де

$$\theta_L^\varepsilon(x)V(u) = \theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \theta_1^\varepsilon(x)V(u),$$

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = C(u,x)Q_0R_0\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + C(u,x)[q(x)R_0 - I]\widetilde{C}(u,x)V''(u),$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u,x)q(x)V''(\theta u), 0 \le \theta \le 1,$$

$$\widetilde{C}(u,x) = q(x)C(u,x) - C(u).$$

Доведення. Спочатку розглянемо розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного до (3.122) оператора, а саме

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + a(t)Q_1(x),$$

Розклад оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$ на функції $V^\varepsilon(u,x)$ має вигляд

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = [\varepsilon^{-1}Q + a(t)Q_1(x)][V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-1}QV(u) + a(t)[QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u)] + \varepsilon a^2(t)Q_1(x)V_1(u,x). \tag{3.127}$$

З умови розв'язності розкладу (3.127) маємо

$$QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u) = \widehat{Q}_1V(u) \tag{3.128}$$

де

$$\widehat{Q}_1\Pi = \Pi Q_1(x)\Pi. \tag{3.129}$$

Обчислимо праву частину (3.129). З представлення (3.123) і дії проектора Π маємо

$$\Pi Q_1(x)\Pi = \Pi C(u,x)Q_0(x)\Pi = \Pi C(u,x)q(x)\boldsymbol{P}\Pi =$$

$$= \Pi q(x)C(u,x)\Pi = \int_X \pi(dx)q(x)C(u,x) =$$

$$= q\int_X \rho(dx)C(u,x) = C(u).$$

Таким чином, враховуючи обчислення похідної в (3.123), для правої частини (3.128) маємо

$$\widehat{Q}_1 V(u) = C(u)V'(u). \tag{3.130}$$

Отже з (3.128) отримуємо

$$QV_1(u,x) = a(t)(\widehat{Q}_1 - Q_1(x))V(u).$$

Враховуючи властивість потенціалу R_0 з останнього отримуємо розв'язок

$$V_1(u,x) = R_0\tilde{Q}_1(x)V(u), \tag{3.131}$$

де

$$\tilde{Q}_1(x) = Q_1(x) - \widehat{Q}_1. \tag{3.132}$$

Порахуємо праву частину (3.132), враховуючи (3.123) і (3.130),

$$Q_1(x) - \widehat{Q}_1 = [C(u,x)q(x)\boldsymbol{P} - C(u)] = \widetilde{C}(u,x).$$

Отже для збурення $V_1(u,x)$ функції Ляпунова $V(u)$ з (3.131) отримуємо представлення

$$V_1(u,x) = R_0\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u), \tag{3.133}$$

де

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u) = \tilde{C}(u,x)V'(u).$$

Використаємо (3.133) для обчислення останнього доданку в (3.127). Зауважимо, що для цього доданку можна розглядати співмножник $\theta_0^\varepsilon(x)$, тобто

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) := Q_1(x)V_1(u,x).$$

Враховуючи (3.123) і (3.133) проведемо обчислення для $\theta_0^\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned}\theta_0^\varepsilon(x)V(u) &= C(u,x)Q_0[R_0\widetilde{\mathbf{C}}(x)V(u)]' = \\ &= C(u,x)Q_0R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]' = \\ &= q(x)\boldsymbol{P}R_0[\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)].\end{aligned} \tag{3.134}$$

З того, що $q(x)\boldsymbol{P}R_0 = q(x)R_0 + \mathit{\Pi} - I$ маємо наступний розклад (3.134)

$$\begin{aligned}\theta_0^\varepsilon(x)V(u) &= q(x)\boldsymbol{P}R_0[\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)] = \\ &= [q(x)R_0 + \mathit{\Pi} - I][\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)] = \\ &= q(x)\boldsymbol{P}R_0\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + q(x)R_0\widetilde{C}(u,x)V''(u) + \\ &+ \mathit{\Pi}\widetilde{C}(u,x)V''(u) - \widetilde{C}(u,x)V''(u) = \\ &= q(x)\boldsymbol{P}R_0\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + [q(x)R_0 - I]\widetilde{C}(u,x)V''(u),\end{aligned}$$

оскільки

$$\varPi\widetilde{C}(u,x) = \varPi[q(x)C(u,x) - C(u)] =$$

$$= \int\limits_X \pi(dx)q(x)C(u,x) - C(u)\int\limits_X \pi(dx)\boldsymbol{1}(X) =$$

$$= q\int\limits_X \rho(dx)C(u,x) - C(u) = C(u) - C(u) = 0.$$

Таким чином маємо представлення залишкового члена $\theta_0^\varepsilon(x)V(u)$.

Остаточно права частина (3.127) дає представлення

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^\varepsilon(x)V(u). \tag{3.135}$$

Повертаючись до повного зображення компенсуючого оператора (3.122), представимо його в вигляді

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon = \ \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x).$$

Отже на функціях (3.125) маємо розклад

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = [\ \ \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)][V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x)], \tag{3.136}$$

де $V_1(u,x)$ обчислюється за формулою (3.133).

Враховуючи (3.135), перетворимо праву частину (3.136)

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x)] =$$

$$= a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^\varepsilon(x)V(u) +$$

$$+\varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)R_0\widetilde{C}(u,x)V'(u)]. \tag{3.137}$$

Проведемо обчислення останнього доданку з (3.137)

$$\varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)R_0\widetilde{C}(u,x)V'(u)] = \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)V(u) +$$

$$+\varepsilon^2 a^3(t)\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)].$$

Порахуємо праву частину в отриманому розкладі. Отже

$$\theta_1^\varepsilon(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u,x)q(x)V''(\theta u), 0 \le \theta \le 1.$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)] = \frac{1}{2}C^2(u,x)Q_0R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]''_u|_{u=\theta u}.$$

З умови C2 теореми і обмеженості операторів Q_0 і R_0 отримуємо

$$||\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]|| \le M, M > 0, x \in X.$$

Таким чином, враховуючи другий порядок малості величини ε, можемо знехтувати другим доданком в розкладі залишкового члена.

В результаті разом з (3.135) маємо (3.136). Лему доведено.

Доведення теореми проведемо в декілька етапів. Спочатку встановимо ключову нерівність.

Лема 3.2.3. *Компенсуючий оператор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова (3.135) в умовах теореми допускає оцінку*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) \leq -\delta a(t)V(u), \delta > 0. \tag{3.138}$$

Доведення. Використовуючи оцінки C2 для залишкового члена $\theta_L^\varepsilon(x)V(u)$, умову C1 експоненційної стійкості системи (3.112), а також монотонність та обмеженість нормуючої функції $a(t)$, маємо

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u) \leq$$

$$\leq -a(t)(\delta^* - \varepsilon c)V(u) \leq -a(t)\delta V(u), \delta > 0. \tag{3.139}$$

Остання нерівність має місце при всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, де ε_0 таке, що $\varepsilon_0 < \delta^*/c$.

По-друге, явний вигляд збурення (3.133), а також умова C2 теореми , дають оцінку збуреної функції Ляпунова

$$0 < (1 - \varepsilon a(t)c)V(u) \leq V^\varepsilon(u,x) \leq (1 + \varepsilon a(t)c)V(u).$$

По-третє, встановимо, що процес

$$V_n^\varepsilon := V^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), n \geq 0, \tag{3.140}$$

є невід'ємним супермартингалом. Для цього зауважимо, що розширений процес марковського відновлення (3.111) породжує на тест-функціях $\varphi(u,x)$, $u \in R^d$, $x \in X$, мартингал

$$\mu_{n+1} = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u_0, x_0) - \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon \varphi(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), \tag{3.141}$$

відносно потоку σ - алгебр $F_n^\varepsilon = \sigma\{u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon, 0 \leq k \leq n\}, n \geq 0$. Дійсно, в позначенні $\varphi_n^\varepsilon := \varphi(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon)$ маємо

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n \,| F_n^\varepsilon] = E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] - E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon\theta_{n+1}\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon]. \tag{3.142}$$

Враховуючи означення компенсуючого оператора (3.115) обчислимо другий доданок в (3.142):

$$E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon\theta_{n+1}\ \boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon] = \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon = \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\varepsilon^{-1}q(x_n^\varepsilon)E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] =$$

$$= E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon].$$

Таким чином з (3.142) маємо мартингальну властивість для (3.141):

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n \,| F_n^\varepsilon] = 0, n \geq 0. \tag{3.143}$$

Використаємо (3.143) для доведення наступної леми.

Лема 3.2.4. *Процес (3.140) є невід'ємним супермартингалом.*

Доведення. Розглянемо в (3.141) замість довільної тест-функції збурену функцію Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$ і використаємо мартингальну характеризацію процесу (3.141), а саме справедливість представлення

$$E[V_{n+1}^\varepsilon \,| F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon E[\sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} \ \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon] + \mu_n^\varepsilon, \tag{3.144}$$

оскільки з (3.143) маємо $E[\mu_{n+1}^\varepsilon \,| F_n^\varepsilon] = \mu_n^\varepsilon$. Підставимо в (3.144) замість μ_n^ε його значення з (3.141):

$$E[V_{n+1}^\varepsilon \,| F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon + \varepsilon[\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon] +$$

$$+ V_n^\varepsilon - V_0^\varepsilon - \varepsilon[\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon].$$

Звідки маємо $E[V_{n+1}^\varepsilon \,| F_n^\varepsilon] = V_n^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon$, і разом з ключовою нерівністю (3.138) отримуємо $E[V_{n+1}^\varepsilon \,| F_n^\varepsilon] \geq V_n^\varepsilon, n \geq 0$, що і доводить лему.

Використання оцінки (3.128), а також леми 3.2.4, завершує доведення теореми за схемою доведення теореми 3.1.1.

3.2.2. Стрибкова ПСА в схемі дифузійної апроксимації.

В даному пункті збіжність стрибкової ПСА в напівмарковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації досліджується з використанням асимптотичних властивостей компенсуючого оператора розширеного процесу марковського відновлення і розв'язку проблеми сингулярного збурення для нього.

Стрибкова процедура стохастичної апроксимації в схемі дифузійного наближення задається в такому вигляді (вважаємо, що $\sum\limits_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) := 0$):

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, t > 0. \tag{3.145}$$

Тут послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значенням функції $a(t)$, $t > 0$, через співвідношення:

$$a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2 \tau_n, n \geq 0, \tag{3.146}$$

де $\tau_n, n \geq 0$, - моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного напівмарковського процесу (НМП) $x(t), t \geq 0$, в стандартному фазовому просторі

$(X, \boldsymbol{X})$ з лічильним процесом

$$\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0.$$

В ПСА (3.145) разом з (3.146) мають місце співвідношення

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^2 \tau_n, n \geq 0. \tag{3.147}$$

Функція $C^\varepsilon(u, x)$ в ПСА (3.145) така, що

$$C^\varepsilon(u, x) := C(u, x) + \varepsilon^{-1} C_0(u, x), x \in X, \tag{3.148}$$

і задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)/dt = C^\varepsilon(u_x(t), x), x \in X.$$

Для збурення $C_0(u, x)$ функції регресії передбачається виконання умови балансу

УБ1: $\tilde{\Pi} C_0(u, x) := \int\limits_X \rho(dx) C_0(u, x) = 0,$

Збіжність стрибкової ПСА (3.148) розглядається в умовах експоненційної стійкості усередненої системи

$$du(t)/dt = C(u(t)), C(u) := q \int\limits_X \rho(dx) C(u, x). \tag{3.149}$$

Без зменшення загальності покладемо $u_0 = 0$, тобто має місце рівність

$$C(0) = 0. \tag{3.150}$$

Надалі оператор $\boldsymbol{P}$ визначається ядром $P(x, B), B \in X$,

$$\boldsymbol{P}\varphi(x) := \int\limits_X P(x, dy)\varphi(y), \tag{3.151}$$

а R_0– потенціал до оператора Q, такий, що $QR_0 = RQ_0 = \Pi - I$.

При цьому використовуються умови збіжності розв'язку еволюційного рівняння

$$du_0^\varepsilon(t) = [C(u_0^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)) + \varepsilon^{-1} C_0(u_0^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))]dt, \tag{3.152}$$

до розв'язку стохастичного диференціального рівняння

$$du_0(t) = C(u_0(t))dt + d\zeta(t),$$

$$d\zeta(t) = b(u_0(t))dt + \frac{1}{2} SpB(u_0(t)) dw_t.$$

Тут дифузійний процес $\zeta(t)$, $t \geq 0$, визначається функцією зсуву

$$b(u) = b_1(u) - b_2(u), \tag{3.153}$$

де

$$b_1(u) := \int_X \pi(dx)\overline{C}_0(u,x)R_0\overline{C}'_0(u,x),$$

$$b_2(u) := \frac{1}{2}q\int_X \rho(dx)C_0(u,x)C'_0(u,x),$$

$$\overline{C}_0(u,x) := q(x)C_0(u,x),$$

$$C'_0(u,x) := \frac{\partial C_0(u,x)}{\partial u} = \left\{C_0^{kr}(u,x) := \frac{\partial C_0^k(u,x)}{\partial u_r}; k, r = \overline{1,d}\right\},$$

та матрицею дифузії

$$B(u) = B_0(u) - B_1(u), \tag{3.154}$$

$$B_0(u) := 2\int_X \pi(dx)\overline{C}_0(u,x)R_0\overline{C}_0(u,x),$$

$$B_1(u) := q\int_X \rho(dx)C_0^T(u,x)C_0(u,x),$$

а w_t - стандартний вінерівський процес.

Теорема 3.2.2. *Нехай функція Ляпунова $V(u), u \in R^d$, усередненої системи (3.149) така, що*

$C1$: забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (3.150)

$$C(u)V'(u) \leq -c_0V(u), c_0 > 0;$$

$C2$: для $\overline{C}(u) := \max_{x\in X}(|C(u,x)| + |C_0(u,x)|)$ і $w_k(u) := \overline{C}(u)w'_{k-1}, k = \overline{1,5}$, мають місце обмеження

$$|w_k(u)| \leq c_k(1 + V(u)), c_k > 0, k = \overline{1,5}.$$

Нарешті нормуюча функція $a(t)$ монотонно спадна, обмежена та задовольняє умовам:

$$C3 : \int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді при кожному позитивному $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо мале, ПСА (3.145) збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки рівноваги усередненої еволюційної системи (3.145):

$$P\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

Для стрибкової ПСА (3.145) вкладеності (3.147) утворюють розширений процес марковського відновлення. Компенсуючий оператор для процесу (3.147) на тест-функціях $\varphi(u,x,t), u \in R^d, x \in X, t \geq 0$, визначається умовним математичним сподіванням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x,t) := \varepsilon^{-1} q(x) E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) -$$

$$-\varphi(u,x,t)\,|u_n^\varepsilon = u,\ x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t]. \tag{3.155}$$

Доведемо два загальних твердження.

Лема 3.2.5. *Компенсуючий оператор (3.155) розширеного процесу марковського відновлення (3.147) має аналітичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x) := \varepsilon^{-2} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-2} q(x) \boldsymbol{P} \boldsymbol{D}_t^\varepsilon(x) \varphi(u,x), \tag{3.156}$$

де оператор зсуву $\boldsymbol{D}_t^\varepsilon(x)$ такий, що

$$\boldsymbol{D}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) := \varphi(u + \varepsilon^2 a(t) C^\varepsilon(u,x), x) - \varphi(u,x), \tag{3.157}$$

а оператор $\boldsymbol{P}$ діє тільки по другій змінній.

Доведення. Спочатку, згідно (3.155), обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon)|u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] = E_{u,x,t}\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) =$$

$$= E_{u,x,t}\varphi(u_n^\varepsilon + \Delta u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon), \tag{3.158}$$

де $\Delta u_{n+1}^\varepsilon := u_{n+1}^\varepsilon - u_n^\varepsilon$. Для обчислення приросту $\Delta u_{n+1}^\varepsilon$ скористаємось представленнями, що випливають з (3.145) і (3.147), а саме

$$u_{n+1}^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) = u + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{n} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon),$$

$$u_n^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = u + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon).$$

Враховуючи останнє маємо

$$\Delta u_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon^2 a_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon). \tag{3.159}$$

Підставляючи в (3.158) зображення (3.159) отримуємо

$$E_{u,x,t}\varphi(u_n^\varepsilon + \Delta u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) = E_{u,x,t}\varphi(u + \varepsilon^2 a(t) C^\varepsilon(u,x), y),$$

де $y = x_{n+1}^\varepsilon$ значення процесу $x(t), t \geq 0$, в момент наступного стрибка.

Отже компенсуючий оператор (3.155), враховуючи останнє, має вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) := \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x,t}[\varphi(u+\varepsilon^2 a(t)C^\varepsilon(u,x),y)-\varphi(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u+\varepsilon^2 a(t)C^\varepsilon(u,x),y)-\varphi(u,x)].$$

Використовуючи доданок $\pm\varphi(u,y)$, з останньої рівності маємо

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u,y)-\varphi(u,x)]+$$

$$+\varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u+\varepsilon^2 a(t)C^\varepsilon(u,x),y)-\varphi(u,y)]. \tag{3.160}$$

Враховуючи (3.157), з (3.160) отримуємо (3.156).

Лема 3.2.6. *Компенсуючий оператор (3.156) розширеного процесу марковського відновлення (3.147) на тест-функціях $\varphi(u,\cdot)\in C^3(R^d)$ допускає асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x)+\varepsilon^{-1}a(t)Q_1(x)\varphi(u,x)+$$

$$+a(t)Q_2(x)\varphi(u,x)+\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \tag{3.161}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(u,x) = \boldsymbol{C}_0(x)Q_0\varphi(u,x), \tag{3.162}$$

$$Q_2(x)\varphi(u,x) = \boldsymbol{C}(x)Q_0\varphi(u,x)+\frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)Q_0\varphi(u,x), \tag{3.163}$$

$$\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u,x) := C_0(u,x)\varphi'_u(u,x),\ \boldsymbol{C}(x)\varphi(u,x) := C(u,x)\varphi'_u(u,x), \tag{3.164}$$

а оператор Q_0 має представлення

$$Q_0\varphi(x) = q(x)\boldsymbol{P}\varphi(x) = q(x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi(y). \tag{3.165}$$

Залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(u,x)$ такий, що

$$\|\ \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(u,x)\ \|\to 0, \varepsilon\to 0. \tag{3.166}$$

Доведення. Для оператора $\boldsymbol{D}_t^\varepsilon(x)$ з (3.157) згідно гладкості функцій $\varphi(u,x)$ маємо розклад

$$\boldsymbol{D}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^2 a(t)C^\varepsilon(u,x)\varphi'_u(u,x)+$$

$$+\varepsilon^4\frac{a^2(t)}{2}(C^\varepsilon(u,x))^2\varphi''_u(u,x)+\varepsilon^2\theta_D^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \tag{3.167}$$

де

$$\theta_D^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^4 a^3(t)\frac{1}{6}(C^\varepsilon(u,x))^3\varphi'''_u(\theta u,x), 0\le\theta\le 1. \tag{3.168}$$

Враховуючи (3.149) з останнього представлення маємо

$$\boldsymbol{D}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = [\varepsilon a(t)C_0(u,x) + \varepsilon^2 a(t)C(u,x)]\varphi'_u(u,x) +$$

$$+\varepsilon^2 \frac{a^2(t)}{2}(C_0(u,x))^2\varphi''_u(u,x) + \varepsilon^4 \frac{a^2(t)}{2}(C(u,x))^2\varphi''_u(u,x) +$$

$$+\varepsilon^2\theta_D^\varepsilon(x)\varphi(u,x). \tag{3.169}$$

Підставляючи (3.169) в (3.156) отримуємо (3.161), де залишковий член має вигляд

$$\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}q(x)\boldsymbol{P}[\varepsilon^4\frac{a^2(t)}{2}(C(u,x))^2\varphi''_u(u,x) + \varepsilon^2\theta_D^\varepsilon(x)\varphi(u,x)],$$

або, враховуючи (3.168) і (3.165)

$$\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^2\frac{a^2(t)}{2}(C(u,x))^2 Q_0\varphi''_u(u,x) +$$

$$+\varepsilon^4 a^3(t)\frac{1}{6}(C^\varepsilon(u,x))^3 Q_0\varphi'''_u(\theta u,x). \tag{3.170}$$

Враховуючи (3.149) і обмеженість множників в правій частині (3.170), крім ε, отримуємо властивість (3.166). Лему доведено.

Доведення теореми базується на асимптотичному представленні компенсуючого оператора (3.161) з використанням збуреної функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u,x) = V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x) + \varepsilon^2 a(t)V_2(u,x). \tag{3.171}$$

Лема 3.2.7. *Компенсуючий оператор (3.161) на функціях (3.171) має асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0 V(u) + \varepsilon a^2(t)H_L^\varepsilon(x,t)V(u), \tag{3.172}$$

де

$$\boldsymbol{L}_0 V(u) = b(u)V'(u) + \frac{1}{2}Sp[B(u)V''(u)]$$

а залишковий член $H_L^\varepsilon(x,t)V(u)$ обмежений.

Доведення. Для оператора (3.161) розглянемо зрізаний

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}a(t)Q_1(x)\varphi(u,x) + a(t)Q_2(x)\varphi(u,x). \tag{3.173}$$

Представлення оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$ на функціях (3.171) має вигляд

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) =$$

$$= [\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}a(t)Q_1(x) + a(t)Q_2(x)][V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x) + \varepsilon^2 a(t)V_2(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-2}QV(u) + \varepsilon^{-1}a(t)[QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u)] +$$

$$+QV_2(u,x)+a(t)Q_1(x)V_1(u,x)+a(t)Q_2V(u)(x)+\varepsilon\theta_0^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.174}$$

де

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u)=a(t)Q_1(x)V_2(u,x)+a(t)Q_2(x)V_1(u,x)+$$
$$+\varepsilon a(t)Q_2(x)V_2(u,x). \tag{3.175}$$

З умови розв'язності розкладу (3.174) отримуємо рівняння

$$QV(u)=0, \tag{3.176}$$

$$QV_1(u,x)+Q_1(x)V(u)=0, \tag{3.177}$$

$$QV_2(u,x)+a(t)Q_1(x)V_1(u,x)+a(t)Q_2(x)V(u)=\boldsymbol{L}_tV(u). \tag{3.178}$$

Рівняння (3.175) справджується, оскільки функція $V(u)$ не залежить від x, тобто функція $V(u)$ належить простору N_Q нулів оператора Q.

Умова балансу УБ1 визначає розв'язність рівняння (3.177), оскільки

$$\varPi Q_1(x)V(u)=\varPi\,\boldsymbol{C}_0(x)Q_0V(u)=\varPi C_0(u,x)q(x)\boldsymbol{P}V'(u)=$$

$$=V'(u)\int\limits_X\pi(dx)q(x)C_0(u,x)=qV'(u)\int\limits_X\rho(dx)C_0(u,x)=0.$$

Таким чином розв'язок рівняння (3.177) має вигляд

$$V_1(u,x)=R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u), \tag{3.179}$$

де $\overline{\boldsymbol{C}}_0(x):=q(x)\boldsymbol{C}_0(x)$.

Підставимо (3.179) в (3.178) і отримаємо

$$QV_2(u,x)+\boldsymbol{L}_t(x)V(u)=\boldsymbol{L}_tV(u), \tag{3.180}$$

де

$$\boldsymbol{L}_t(x)V(u)=a(t)Q_1(x)V_1(u,x)+a(t)Q_2(x)V(u). \tag{3.181}$$

Обчислимо праву частину (3.181). Для першого доданку, використовуючи (3.179), маємо

$$Q_1(x)V_1(u,x)=\boldsymbol{C}_0(x)Q_0a(t)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)=$$

$$=a(t)\boldsymbol{C}_0(x)q(x)\boldsymbol{P}R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u). \tag{3.182}$$

В (3.182) використаємо представлення

$$\boldsymbol{P}R_0=R_0+g(x)[\varPi-I].$$

Враховуючи, що $\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)=q(x)\boldsymbol{C}_0(x)$ маємо

$$\boldsymbol{P}R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)=[R_0+g(x)[\varPi-I]]\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)=$$

$$= [R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) + g(x)\Pi\,\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) - g(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)]V(u).$$

Оскільки

$$\Pi\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) = \Pi q(x)\,\boldsymbol{C}_0(x) = \int\limits_X C_0(u,x)\pi(dx)q(x) = q\int\limits_X \rho(dx)C_0(u,x) = 0,$$

то для 4-192 отримуємо

$$Q_1(x)V_1(u,x) = a(t)[\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) - \boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u)]. \tag{3.183}$$

Обчислимо другий доданок в (3.181).

$$Q_2(x)V(u) = \boldsymbol{C}(x)Q_0V(u) + \frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)Q_0V(u) =$$

$$= \overline{\boldsymbol{C}}(x)V(u) + \frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)q(x)V(u),$$

або

$$Q_2(x)V(u) = \overline{\boldsymbol{C}}(x)V(u) + \frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u). \tag{3.184}$$

Таким чином (3.183) і (3.184) для (3.181) дають представлення

$$\boldsymbol{L}_t(x)V(u) = a^2(t)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) -$$

$$-a^2(t)\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) + a(t)\overline{\boldsymbol{C}}(x)V(u) +$$

$$+\frac{a^2(t)}{2}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) = a(t)\overline{\boldsymbol{C}}(x)V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0(x)V(u), \tag{3.185}$$

де

$$\boldsymbol{L}_0(x) := \overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) - \frac{1}{2}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x). \tag{3.186}$$

Граничний оператор $\boldsymbol{L}_t$ для оператора (3.185) має вигляд $\boldsymbol{L}_t = \Pi\boldsymbol{L}_t(x)\Pi$. Таким чином маємо

$$\boldsymbol{L}_t := a(t)\Pi\overline{\boldsymbol{C}}(x)\Pi + a^2(t)\Pi\boldsymbol{L}_0(x)\Pi. \tag{3.187}$$

Порахуємо праву частину представлення (3.187). Для першого доданку маємо обчислення множника

$$\Pi\overline{\boldsymbol{C}}(x)\Pi V(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x)q(x)V'(u) =$$

$$= q\int\limits_X \rho(dx)C(u,x)V'(u) = \boldsymbol{C}V(u), \tag{3.188}$$

де $\boldsymbol{C}V(u) = C(u)V'(u)$.

Для другого доданку, використовуючи (3.186), розглянемо множник

$$\varPi \boldsymbol{L}_0(x)\varPi V(u) = \varPi \overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) - \frac{1}{2}\varPi\,\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) =$$

$$= \varPi\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0C_0(u,x)q(x)V'(u) - \frac{1}{2}\varPi\,\boldsymbol{C}_0(x)C_0(u,x)q(x)V'(u) =$$

$$= \varPi C_0(u,x)q(x)R_0[C_0(u,x)q(x)V'(u)]' - \frac{1}{2}\varPi C_0(u,x)[C_0(u,x)q(x)V'(u)]' =$$

$$= \varPi C_0(u,x)q(x)R_0q(x)[C_0'(u,x)V'(u) + C_0(u,x)V''(u)] -$$

$$-\frac{1}{2}\varPi C_0(u,x)q(x)[C_0'(u,x)V'(u) + C_0(u,x)V''(u)] =$$

$$= [\varPi C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0'(u,x) - \frac{1}{2}\varPi C_0(u,x)q(x)C_0'(u,x)]V'(u) +$$

$$+[\varPi C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0(u,x) - \frac{1}{2}\varPi C_0(u,x)q(x)C_0(u,x)]V''(u).$$

Або

$$\varPi \boldsymbol{L}_0(x)\varPi V(u) = b(u)V'(u) + \frac{1}{2}Sp[B(u)V''(u)],$$

де $b(u)$ і $B(u)$ представлені в (3.153) і (3.154).

Враховуючи останнє і (3.188) для правої частини (3.187) маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_t = a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0V(u), \tag{3.189}$$

де

$$\boldsymbol{L}_0V(u) = b(u)V'(u) + \frac{1}{2}Sp[B(u)V''(u)]. \tag{3.190}$$

Таким чином з (3.174) отримуємо

$$\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0V(u) + \varepsilon\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u). \tag{3.191}$$

Завершуючи аналіз залишкового члена в (3.174), використаємо представлення

$$V_2(u,x) = \boldsymbol{L}_{ta}(x)V(u), \tag{3.192}$$

де

$$\boldsymbol{L}_{ta}(x)V(u) = \widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x),$$

а

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) = \overline{\boldsymbol{C}}(x) - \boldsymbol{C}, \widetilde{\boldsymbol{L}}_0(x) = \boldsymbol{L}_0(x) - \boldsymbol{L}_0.$$

Використовуючи (3.192) і (3.179) в (3.175) отримуємо обмеженість множника $\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u)$, звідки маємо

$$\varepsilon\|\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u)\| \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{3.193}$$

Для подальшого аналізу нам необхідно мати явний вигляд для $\theta_0^\varepsilon(x)V(u)$. В (3.175) обчислимо перший доданок

$$Q_2(x)V_1(u,x) = [a(t)\boldsymbol{C}(x)Q_0 + \frac{a^2(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)Q_0]a(t)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)V(u) =$$

$$= a^2(t)\theta_1(x)V(u), \tag{3.194}$$

де

$$\theta_1(x)V(u) = \theta_{11}(x)V(u) + \frac{a(t)}{2}\theta_{12}(x)V(u), \tag{3.195}$$

а

$$\theta_{11}(x) = \overline{\boldsymbol{C}}(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) - \boldsymbol{C}(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x),$$

$$\theta_{12}(x) = \boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) - \boldsymbol{C}(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0^2(x).$$

Для другого доданку маємо

$$Q_2(x)V_2(u,x) = [a(t)\boldsymbol{C}(x)Q_0 + \frac{a^2(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)Q_0]a(t)\boldsymbol{L}_{ta}(x)V(u) =$$

$$= a^2(t)[\boldsymbol{C}(x)Q_0\boldsymbol{L}_{ta}(x) + \frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)Q_0\boldsymbol{L}_{ta}(x)]V(u). \tag{3.196}$$

Обчислимо доданки в (3.196). Перший доданок дає

$$\boldsymbol{C}(x)Q_0\boldsymbol{L}_{ta}(x) = \boldsymbol{C}(x)q(x)\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}_{ta}(x). \tag{3.197}$$

Оскільки

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}_{ta}(x) = \boldsymbol{P}[\widetilde{\boldsymbol{C}}(x) + a(t)\widetilde{\boldsymbol{L}}_0] = a(t)\boldsymbol{L}_{0P}(x), \tag{3.198}$$

де

$$\boldsymbol{L}_{0P}(x) := \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}_0(x) - \boldsymbol{L}_0,$$

то з (3.197) маємо

$$\boldsymbol{C}(x)Q_0\boldsymbol{L}_{ta}(x) = a(t)\overline{\boldsymbol{C}}(x)\boldsymbol{L}_{0P}(x). \tag{3.199}$$

Використовуючи (3.199) для другого доданку маємо

$$\frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)Q_0\boldsymbol{L}_{ta}(x) = \frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0^2(x)q(x)a(t)\boldsymbol{L}_{0P}(x) =$$

$$= \frac{a^2(t)}{2}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)\boldsymbol{L}_{0P}(x). \tag{3.200}$$

Разом (3.199) і (3.200) дають для (3.196) представлення

$$Q_2(x)V_2(u,x) = a^2(t)[a(t)\overline{\boldsymbol{C}}(x)\boldsymbol{L}_{0P}(x) + \frac{a^2(t)}{2}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)\boldsymbol{L}_{0P}(x)]V(u) =$$

$$= a^3(t)\theta_2(x)V(u), \tag{3.201}$$

де
$$\theta_2(x) := \overline{\boldsymbol{C}}(x)\boldsymbol{L}_{0P}(x) + \frac{a(t)}{2}\boldsymbol{C}_0(x)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)\boldsymbol{L}_{0P}(x). \tag{3.202}$$

Далі третій доданок в (3.175) має вигляд

$$Q_1(x)V_2(u,x) = a(t)\boldsymbol{C}_0(x)Q_0a(t)\ \boldsymbol{L}_{ta}(x)V(u) = a^3(t)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)\ \boldsymbol{L}_{0P}(x). \tag{3.203}$$

Представлення (3.194), (3.201) і (3.203) для (3.175) дають

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) = a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.204}$$

де
$$\theta_1^\varepsilon(x)V(u) = [\theta_1(x) + a(t)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)\boldsymbol{L}_{0P}(x) + \varepsilon a(t)\theta_2(x)]V(u), \tag{3.205}$$

а $\theta_1(x)$ і $\theta_2(x)$ визначенні відповідно в (3.195) і (3.202).

Розглянемо повний оператор (3.161) через зрізаний (3.173) в вигляді

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon = \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon + \theta_{\boldsymbol{L}}^\varepsilon(x)$$

на тест-функціях $V^\varepsilon(u,x)$. Отримуємо розклад

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = [\ \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon + \theta_{\boldsymbol{L}}^\varepsilon(x)]V^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) + \theta_{\boldsymbol{L}}^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u,x) =$$

$$= a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0V(u) + \varepsilon\theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \theta_L^\varepsilon(x)\varPhi^\varepsilon(x)V(u),$$

де
$$\varPhi^\varepsilon(x)V(u) = I + \varepsilon a(t)R_0\overline{\boldsymbol{C}}_0(x) + \varepsilon^2 a(t)\boldsymbol{L}_{ta}(x).$$

Враховуючи останнє, отримуємо граничне представлення КО

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0V(u) + \varepsilon a^2(t)H_t^\varepsilon(u,x)V(u), \tag{3.206}$$

де
$$H_t^\varepsilon(u,x)V(u) = \theta_1^\varepsilon(x)V(u) + \theta_2^\varepsilon(x)V(u), \tag{3.207}$$

а
$$\theta_1^\varepsilon(x) = \theta_1(x) + a(t)\overline{\boldsymbol{C}}_0(x)\boldsymbol{L}_{0t}(x) + \varepsilon\theta_2(x),$$

і
$$\theta_2^\varepsilon(x)V(u) = \frac{\varepsilon}{2}C^2(u,x)q(x)\varPhi^\varepsilon(x)V''(u) +$$

$$+\frac{a(t)}{6}(C_\varepsilon(u,x))^3q(x)\varPhi^\varepsilon(x)V'''(\theta u), 0 \le \theta \le 1,$$

де $C_\varepsilon(u,x) = \varepsilon C^\varepsilon(u,x) = \varepsilon C(u,x) + C_0(u,x)$.

Гладкість функцій $V(u), C(u,x), C_0(u,x)$, обмеженість $a(t) \le a < \infty$ функції $a(t)$ і операторів $\boldsymbol{P}$ і R_0 забезпечують обмеженість правої частини в (3.207).

Доведення теореми 3.2.1. Використовуючи оцінки C2, умову C1 експоненційної стійкості системи (3.149), а також монотонність та обмеженість $a(t) \le a < \infty$ нормуючої функції маємо

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)\boldsymbol{C}V(u) + a^2(t)\boldsymbol{L}_0 V(u) + \varepsilon a^2(t) H_t^\varepsilon(u,x)V(u) \le$$

$$\le -a(t)(\delta^* - \varepsilon c)V(u) \le -\delta a(t)V(u), \delta > 0. \tag{3.208}$$

Остання нерівність має місце при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$, де ε_0 таке, що $\varepsilon_0 < \delta^*/c$.

По-друге, явний вигляд збурень (3.179) і (3.192), а також умова C2 теореми, дають оцінку збуреної функції Ляпунова

$$0 < (1 - \varepsilon a(t)c)V(u) \le V^\varepsilon(u,x) \le (1 + \varepsilon a(t)c)V(u).$$

По-третє, встановимо як і в лемі 3.2.6, що процес

$$V_n^\varepsilon := V^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), n \ge 0,$$

є невід'ємним супермартингалом.

Використання оцінки (3.208) завершує доведення теореми за схемою доведення теореми 3.1.1.

РОЗДІЛ 4
АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ У МАРКОВСЬКОМУ ТА НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Як і в неперервному випадку так і для стрибкової процедури стохастичної апроксимації властивості граничного розподілу процедури дозволяють оцінити швидкість збіжності, а також вказати параметри за якими можна керувати оптимізацією ПСА.

В розділі розглянуто асимптотичну нормальність стрибкової процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі в схемі усереднення, та в схемі дифузійної апроксимації, а також в напівмарковському середовищі в схемі усереднення та в схемі дифузійної апроксимації .

4.1. Асимптотична нормальність стрибкової ПСА у марковському середовищі

В даному підрозділі асимптотична нормальність стрибкової ПСА досліджується методом розв'язку проблеми сингулярного збурення для породжуючого оператора нормованої ПСА. Особливість даної задачі полягає в тому, що приріст нормованої стрибкової ПСА має дві компоненти: неперервну і стрибкову, в той час, як неперервна ПСА має тільки неперервну компоненту.

4.1.1. Схема усереднення. Стрибкова ПСА в схемі серій в марковському середовищі задається співвідношенням (покладемо $\sum\limits_{k=0}^{-1} a(\tau_k^\varepsilon)C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} a(\tau_k^\varepsilon)C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, t \geq 0. \tag{4.1}$$

В ПСА (4.1) мають місце вкладеності

$$u_n^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^2 \tau_n, a(\tau_n^\varepsilon) = \frac{a}{\tau_n^\varepsilon}, a > 0, n \geq 0.$$

Функція регресії $C(u, x)$, $u \in R$, $x \in X$, така, що $C(u, \cdot) \in C^3(R)$, тому має місце розклад

$$C(u, x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2 C_2(u, x), \tag{4.2}$$

$$C^0(x) = C(0, x), C^1(x) = C'_u(0, x), \tag{4.3}$$

$$C_2(u, x) = \frac{1}{2} C''_u(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Збіжність стрибкової ПСА (4.1) в умовах теореми

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow 0, t \to \infty, \varepsilon \leq \varepsilon_0, \tag{4.4}$$

означає, що має місце рівність

$$C(0) = 0 \tag{4.5}$$

і точка $u = 0$ є точкою рівноваги системи

$$du(t)/dt = C(u(t)), \tag{4.6}$$

де

$$C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u, x). \tag{4.7}$$

З (4.3), (4.4) і (4.5) маємо умову балансу

УБ: $\tilde{\Pi} C^0(x) = 0$,

де $\widetilde{\Pi}$ - проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, тобто $\widetilde{\Pi}\varphi(x) = \int_X \rho(dx)\varphi(x)$,

З іншої сторони (4.4) означає, що флуктуації стрибкової ПСА доцільно вивчати з наступним нормуванням

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t} u^\varepsilon(t)/\varepsilon, \tag{4.8}$$

тобто має місце зворотній зв'язок

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon v^\varepsilon(t)/\sqrt{t}.$$

Асимптотична нормальність нормованої ПСА (4.8) встановлюється при умовах збіжності ПСА (4.1)

$C1 : C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u)$,

$C2 : |\tilde{C}(u, x)V'(u)| \leq c_1(1 + V(u))$,

$C3 : |C(u, x)R_0[\widetilde{C}(u, x)V'(u)]'| \leq c_2(1 + V(u))$,

де $\widetilde{C}(u, x) := C(u, x) - C(u), V(u)$ - функція Ляпунова усередненої системи (4.6), а також при додаткових умовах:

$D1 : \rho^2 := 2 \int_X \pi(dx)\widetilde{C}^0(x)R_0\tilde{C}^0(x) - \frac{q}{2} \int_X \rho(dx)(C^0(x))^2 > 0$,

де

$$\widetilde{C}^0(x) := q(x)C^0(x); \tag{4.9}$$

$D2 : d > 0$,

де

$$d = -q \int_X \rho(dx) C^1(x),$$

$D3 : b := ad - \frac{1}{2} > 0.$

Теорема 4.1.1. *В умовах $C1$–$C3$ збіжності стрибкової ПСА (4.1), та при додаткових умовах $D1, D2, D3$ має місце слабка збіжність*

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \varepsilon \to 0,$$

в кожному скінченому інтервалі $0 < t_0 \leq t \leq T$.

Граничний дифузійний процес $\zeta(t), t \geq 0$, є процесом типу Орнштейна-Уленбека, і визначається генератором

$$\boldsymbol{L}\varphi(v) = -bv\varphi'(v) + \frac{1}{2}a^2\rho^2\varphi''(v).$$

Умова D2 забезпечує виконання умови $b < 0$ звідки слідує ергодичність граничного процесу $\zeta(t), t \geq 0$, а умова D1 забезпечує дифузійність процесу $\zeta(t), t \geq 0$.

Граничний процес Орнштейна-Уленбека з генератором $\mathbf{L}$ в умовах теореми є ергодичним з стаціонарним нормальним розподілом $N(0, \sigma_0^2)$, де дисперсія обчислюється за формулою $\sigma_0^2 = a^2\rho^2/2b$.

В умовах теореми ПСА $v^\varepsilon(t)$ має асимптотично нормальний розподіл $N(0, \sigma_0^2)$, тобто $v^\varepsilon(t) \Rightarrow v$,$\varepsilon \to 0$, $t \to \infty$, де випадкова величина v має розподіл $N(0, \sigma_0^2)$.

Побудуємо породжуючий оператор (генератор) двокомпонентного марковського процесу

$$v^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2), t \geq 0. \tag{4.11}$$

Лема 4.1.1. *Генератор марковського процесу (4.11) на тест-функціях $\varphi(v, \cdot) \in C^2(R)$ має представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v, x) = \varepsilon^{-2} q(x) \boldsymbol{P}[\varphi(v + \varepsilon \frac{a}{\sqrt{t}} C(\varepsilon \frac{v}{\sqrt{t}}, x), y) - \varphi(v, x)] +$$

$$+ \frac{v}{2t}\varphi'_v(v, x), \tag{4.12}$$

де

$$\boldsymbol{P}\varphi(\cdot, y) = \int_X P(y, dz)\varphi(\cdot, z).$$

Доведення. Спочатку обчислимо приріст $\Delta v^\varepsilon(t)$ нормованої ПСА (4.8) за малий проміжок часу $\Delta > 0$ при умовах

$$v^\varepsilon(t) = v, x_t^\varepsilon = x.$$

Таким чином враховуючи (4.8) та розклад $\sqrt{t + \Delta} = \sqrt{t}(\Delta/2t + o(\Delta))$, маємо

$$\Delta v^{\varepsilon}(t) := v^{\varepsilon}(t+\Delta) - v^{\varepsilon}(t) = \frac{\Delta}{2t}v + \varepsilon^{-1}(t + \frac{\Delta}{2\sqrt{t}})\Delta u^{\varepsilon}(t) + o(\Delta).$$

Оскільки приріст $\Delta u^{\varepsilon}(t)$ ПСА (4.1) при наявності стрибка має вигляд

$$\Delta u^{\varepsilon}(t) := u^{\varepsilon}(t+\Delta) - u^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^2 \frac{a}{t} C(u^{\varepsilon}(t), x_t^{\varepsilon}),$$

то для умовного математичного сподівання

$$E[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\,|v^{\varepsilon}(t) = v, x_t^{\varepsilon} = x, \tau^{\varepsilon}(t) = t] =$$

$$= E_{v,x}[\varphi(v + \Delta v^{\varepsilon}(t), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] =$$

$$= E_{v,x}[\varphi(v + \Delta v^{\varepsilon}(t), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})][I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta) + I(\theta_x \le \varepsilon^{-2}\Delta)]$$

з урахуванням того, що $I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta) = 1 - \varepsilon^{-2}\Delta q(x)) + o(\Delta)$ і $I(\theta_x \le \varepsilon^{-2}\Delta) = \varepsilon^{-2}\Delta q(x) + o(\Delta)$, маємо

$$E_{v,x}[\varphi(v + \Delta v^{\varepsilon}(t), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] = \varphi(v,x) - \varepsilon^{-2}\Delta q(x)\varphi(v,x) +$$

$$+ E_{v,x}[\varphi(v + \varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}, x), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})]\varepsilon^{-2}\Delta q(x) + \Delta\frac{v}{2t}\varphi_v'(v,x) + o(\Delta)].$$

З означення генератора [6] марковського процесу (4.11) отримуємо

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-1} E_{v,x}[\varphi(v + \Delta v^{\varepsilon}(t), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(v,x)] = \boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,x),$$

де $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ має представлення (4.12).

Наслідок 4.1.1. *Генератор марковського процесу (4.11) на тест-функціях $\varphi(v,\cdot) \in C^2(R)$ має представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-2}q(x)\boldsymbol{L}_0^{\varepsilon}\varphi(v,x), \tag{4.13}$$

де

$$\boldsymbol{L}_0^{\varepsilon}\varphi(v,x) = \boldsymbol{P}[\varphi(v + \varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}, x), y) - \varphi(v,y)] + \varepsilon^2 g(x)\frac{v}{2t}\varphi_v'(v,x). \tag{4.14}$$

Доведення. Представлення (4.13) отримуємо з (4.12) використовуючи доданок $\pm\varphi(v,y)$ в квадратних дужках.

Лема 4.1.2. *Генератор (4.13) на тест-функціях $\varphi(v,\cdot) \in C^3(R)$ має асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}Q_1(x)Q_0\varphi(v,x) +$$

$$+ \frac{1}{t}Q_2(x)\varphi(v,x) + \theta_t^{\varepsilon}\varphi(v,x), \tag{4.15}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v) = aC^0(x)\varphi'(v), \tag{4.16}$$

$$Q_0 := q(x)\boldsymbol{P},$$

$$Q_2(x)\varphi(v) = vb(x)\varphi'(v), \tag{4.17}$$

і

$$b(x) = aC^1(x)Q_0 + 1/2, \tag{4.18}$$

а залишковий член $\theta_t^\varepsilon \varphi(v,x)$ *такий, що*

$$\| \theta_t^\varepsilon \varphi(v,x) \| \to 0, \varepsilon \to 0, 0 < t_0 < t < T < \infty.$$

Доведення. Виходячи з гладкості функцій $\varphi(v,x)$ маємо

$$\varphi(v + \varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}, x), y) =$$

$$= \varphi(v,y) + \varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}, x)\varphi'_v(v,y) + o(\varepsilon). \tag{4.19}$$

Згідно з (4.2) для $C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}, x)$ отримаємо розклад

$$C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}, x) = C^0(x) + \varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}C^1(x) + o(\varepsilon). \tag{4.20}$$

Підставляючи (4.20) і (4.19) в (4.14) маємо

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon\varphi(v,x) = \varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C^0(x)\boldsymbol{P}\varphi'_v(v,y) + \varepsilon^2\frac{v}{t}[aC^1(x)\boldsymbol{P} + \frac{g(x)}{2}]\varphi'_v(v,y) + o(\varepsilon).$$

На завершення, використовуючи останнє, з (4.13) отримуємо (4.15) в позначеннях (4.16)–(4.18). Лему доведено.

Побудуємо розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (4.15) на збурених тест-функціях виду

$$\varphi^\varepsilon(v,x) = \varphi(v) + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,x). \tag{4.21}$$

Лема 4.1.3. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (4.15) на тест-функціях (4.21) з* $\varphi(v,\cdot) \in C^3(R)$ *має вигляд*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,x) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v) + \theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v), \tag{4.22}$$

де оператор $\boldsymbol{L}$ *має представлення (4.10), а залишковий член* $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)$ *такий, що*

$$\| \theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v) \| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Спочатку розглянемо розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного до (4.15) оператора, а саме

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}\varphi(v,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}Q_1(x)Q_0\varphi(v,x) +$$

$$+\frac{1}{t}Q_2(x)\varphi(v,x).$$

Оскільки $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}$ на функціях (4.21) має представлення

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}\varphi^{\varepsilon}(v,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}[Q\varphi_1(v,x) + Q_1(x)Q_0\varphi(v)] +$$

$$+\frac{1}{t}[Q\varphi_2(v,x) + Q_1(x)Q_0\varphi_1(v,x) + Q_2(x)\varphi(v)] + \theta^{\varepsilon}_{t0}(x)\varphi(v) =$$

$$= \frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v) + \theta^{\varepsilon}_{t0}(x)\varphi(v), \tag{4.23}$$

то з умови

$$Q\varphi_1(v,x) + Q_1(x)Q_0\varphi(v) = 0$$

і умови балансу УБ маємо

$$\varphi_1(v,x) = R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v) = aR_0\widetilde{C}^0(x)\varphi'(v), \tag{4.24}$$

де $\widetilde{C}^0(x)$ обчислюємо за (4.9).

Далі з умови розв'язності (4.23) і представлення (4.24) маємо

$$Q\varphi_2(v,x) + Q_1Q_0(x)R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v) + Q_2(x)\varphi(v) = \boldsymbol{L}\varphi(v),$$

де оператор $\boldsymbol{L}$ такий, що

$$\boldsymbol{L}\Pi\varphi(v) = \Pi\boldsymbol{L}(x)\Pi\varphi(v), \tag{4.25}$$

а

$$\boldsymbol{L}(x)\varphi(v) = Q_1(x)Q_0R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v) + Q_2(x)\varphi(v). \tag{4.26}$$

Обчислення правої частини (4.25), враховуючи (4.26) і (4.24), дає праву частину представлення (4.22).

На завершення зауважимо, що малий доданок в представленні (4.15) генератора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t$ не впливає на розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (4.22), тобто права частина розв'язоку проблеми сингулярного збурення для оператора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t$ має вигляд правої частини (4.25) . Лему доведено.

Доведення теореми опирається на результати лем 4.1.1 – 4.1.3.

4.1.2. Схема дифузійної апроксимації. В цьому підрозділі розглянемо асимптотичну нормальність стрибкової ПСА в марковському середовищі, що описується стрибковими еволюціями, з асимптотично дифузійним збуренням в умовах збіжності такої процедури, методом РПСЗ.

Стрибкова процедура стохастичної апроксимації з сингулярним збуренням функції регресії задається рівнянням (покладемо $\sum\limits_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), t \geq 0, \tag{4.27}$$

де послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значеннями функції $a(t), t > 0$, такої, що задовольняє умовам збіжності ПСА

$$a(t) > 0, \int_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty, \int_{t_0}^{\infty} a^2(t)dt < \infty, t_0 > 0,$$

через співвідношення: $a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0$, де $\tau_n, n \geq 0$, моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного марковського процесу $x(t), t \geq 0$, в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$.

Надалі покладемо $a(t) = a/t$.

Функція $C^\varepsilon(u, x) := C(u, x) + \varepsilon^{-1} C_0(x), u \in R, x \in X$, задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)dt = C^\varepsilon(u_x(t), x), x \in X.$$

Збіжність ПСА (4.27) розуміємо в сенсі збіжності з ймовірністю одиниця до точки рівноваги u_0 усередненої системи

$$du(t)/dt = C(u(t)),$$

де функція регресії $C(u)$ є усередненням функції $C(u, x)$ по стаціонарному розподілу вкладеного ланцюга Маркова:

$$C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u, x).$$

Для збурення $C_0(x)$ процедури (4.27) передбачається виконання умови балансу:

УБ1: $\int\limits_X \rho(dx) C_0(x) = 0,$

або

$$\widetilde{\Pi} C_0(x) = 0,$$

де $\widetilde{\Pi}$ - проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, тобто $\widetilde{\Pi}\varphi(x) = \int\limits_X \rho(dx)\varphi(x)$.

Без зменшення загальності будемо вважати $u_0 = 0$, тобто виконання умови

$$C(0) = 0. \tag{4.28}$$

Додаткові умови на функцію регресії $C(u, x)$ такі, як і у попередньому підрозділі, а саме, $C(u, \cdot) \in C^3(R)$, тобто має місце розклад за формулою Тейлора

$$C(u, x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2 C_2(u, x), \tag{4.29}$$

де

$$C^0(x) = C(0, x), \tag{4.30}$$

$$C^1(x) = C'_u(0, x), C_2(u, x) = \frac{1}{2} C''_u(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Виходячи з (4.28), (4.29) та (4.30) маємо додаткову умову балансу

УБ2:$\widetilde{\Pi} C^0(x) = 0$.

Для дифузійного збурення

$$C_0^\varepsilon(t) := \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C_0(x_k^\varepsilon), \tag{4.31}$$

ПСА (4.27) має місце слабка збіжність

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \frac{a\rho q}{t} w(t), \varepsilon \to 0, \tag{4.32}$$

де $w(t)$ – стандартний вінерівський процес, а

$$\rho^2 = 2 \int\limits_X \pi(dx) \widetilde{C}_0(x) R_0 \widetilde{C}_0(x) - q \int\limits_X \rho(dx) C_0^2(x),$$

$$\widetilde{C}_0(x) = q(x) C_0(x).$$

Використовуючи (4.31), для ПСА (4.27) маємо представлення

$$u^\varepsilon(t) = \widetilde{v}^\varepsilon(t) + \varepsilon C_0^\varepsilon(t), \tag{4.33}$$

де

$$\widetilde{v}^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon).$$

Флуктуації ПСА (4.27) розглядаються в такому вигляді:

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\sqrt{t}, \tag{4.34}$$

або в зворотньому зв'язку

$$\widetilde{v}^\varepsilon(t) = \sqrt{t}v^\varepsilon(t)/\varepsilon. \tag{4.35}$$

З (4.33) та (4.35) маємо

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon[v^\varepsilon(t) + \sqrt{t}C_0^\varepsilon(t)]/\sqrt{t},$$

звідки отримуємо (4.34) у вигляді

$$v^\varepsilon(t) = [u^\varepsilon(t)/\varepsilon - C_0^\varepsilon(t)]\sqrt{t}.$$

Надалі позначимо через

$$d := -q\int\limits_X \rho(dx)C^1(x), \tag{4.36}$$

а через

$$b := ad - \frac{1}{2}. \tag{4.37}$$

Теорема 4.1.2. *В умовах збіжності ПСА (4.27) та при додаткових умовах*

D1: $\rho^2 > 0$,

D2: $d > 0$,

D3: $b > 0$,

має місце слабка подвійна збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), \varepsilon \to 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = a^2\rho^2q^2/t^2$$

в кожному скінченому інтервалі $0 < t_0 < t < T < \infty$.

Двокомпонентний граничний процес $\zeta(t), \sigma(t)w(t), t > 0$, *є дифузійним процесом, що визначається генератором*

$$\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) = q(-bv - ad\sqrt{t}w)\varphi'_v(v,w) + \frac{a^2\rho^2}{2t}\varphi''_w(v,w). \tag{4.38}$$

Граничний процес $\zeta(t), t > 0$, задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\zeta(t) = (-bq\zeta(t) - adq\sqrt{t}w(t))dt.$$

Умова D2 забезпечує від'ємність параметра b, що зумовлює ергодичність граничного процесу $\zeta(t), t > 0$.

Розглянемо властивості генератора марковського процесу

$$v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^4), t > 0. \tag{4.39}$$

Ключовим кроком в асимптотичному аналізі флуктуацій , є асимптотичне представлення генератора МП (4.39).

Лема 4.1.5. *Генератор МП (4.39) на тест-функціях $\varphi(v,\cdot,\cdot) \in C^2(R)$ має представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}q(x)\boldsymbol{P}[\varphi(v + \varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}},x), w+$$

$$+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x), y) - \varphi(v,w,x)] + \frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x), \tag{4.40}$$

де

$$z = v + \sqrt{t}w. \tag{4.41}$$

Доведення. Спочатку розглянемо прирости флуктуацій $\Delta v^\varepsilon(t)$ в моменти стрибків при $\tau_n^\varepsilon = t, x_n = x$, з приростами часу Δ, використовуючи (6.34):

$$\Delta v^\varepsilon(t) := v^\varepsilon(t+\Delta) - v^\varepsilon(t) = \sqrt{t+\Delta}\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta)/\varepsilon - \sqrt{t}\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon =$$

$$= \sqrt{t}(1 + \frac{\Delta}{2t}\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta)/\varepsilon - \sqrt{t}\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + o(\Delta) =$$

$$= \sqrt{t}\Delta v^\varepsilon(t) + o(\Delta).$$

Остаточно, з того що $\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta) = \widetilde{v}^\varepsilon(t) + o(\Delta)$, маємо

$$\Delta v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + \frac{\Delta}{2t}\widetilde{v}^\varepsilon(t) + o(\Delta). \tag{4.42}$$

Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), C_0^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | v^\varepsilon(t) = v, C_0^\varepsilon(t) = w, x_t^\varepsilon = x] =$$

$$= E_{v,w,x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)].$$

Використовуючи (4.35) і (4.42) з останнього маємо

$$E_{v,w,x}[\varphi(v+\Delta v^\varepsilon(t), w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= E_{v,w,x}[\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + \Delta\frac{v}{2t} + o(\Delta), w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= E_{v,w,x}[\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\Delta})] +$$

$$+\Delta\frac{v}{2t}\varphi'_v(v, w, x^\varepsilon_{t+\Delta})] + o(\Delta), \tag{4.43}$$

оскільки $\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)$ і $\Delta C_0^\varepsilon(t)$ не залежать від $x^\varepsilon_{t+\Delta}$.

Враховуючи, що ліву частину (4.43) можна подати в формі

$$E_{v,w,x}[\varphi(v+\Delta v^\varepsilon(t), w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\Delta})][I(\theta_x > \varepsilon^{-4}\Delta) + I(\theta_x \le \varepsilon^{-4}\Delta)]$$

і те, що

$$P\{\theta_x > \varepsilon^{-4}\Delta\} = e^{-\varepsilon^{-4}\Delta q(x)} = 1 - \varepsilon^{-4}\Delta q(x) + o(\Delta),$$

$$P\{\theta_x \le \varepsilon^{-4}\Delta\} = 1 - e^{-\varepsilon^{-4}\Delta q(x)} = \varepsilon^{-4}\Delta q(x) + o(\Delta),$$

отримаємо

$$E_{v,w,x}[\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\Delta}) + \Delta\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x)] =$$

$$= \varphi(v,w,x)(1-\varepsilon^{-4}\Delta q(x)) + \Delta\varepsilon^{-4}q(x)\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x) +$$

$$+E_{v,w,x}\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x^\varepsilon_{t+\Delta})\Delta\varepsilon^{-4}q(x) + o(\Delta). \tag{4.44}$$

З (4.32) та (4.35) для приростів $\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)$ і $\Delta C_0^\varepsilon(t)$ маємо представлення

$$\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t) = \varepsilon^4\frac{a}{\sqrt{t}}C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}}, x), \tag{4.45}$$

$$\Delta C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x), \tag{4.46}$$

де z обчислюється в (4.41).

Враховуючи (4.45) і (4.46) в (4.44) маємо представлення умовного математичного сподівання

$$E_{v,w,x}[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), C_0^\varepsilon(t+\Delta), x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(v,w,x)] =$$

$$+\Delta\varepsilon^{-4}q(x)\boldsymbol{P}[\varphi(v+\varepsilon^4\frac{a}{\sqrt{t}}C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}}, x), w+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x), y) + \frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x)] + o(\Delta).$$

Остаточно, за означенням генератора МП (4.39)

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}E_{v,w,x}[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), C_0^\varepsilon(t+\Delta), x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(v,w,x)] = \boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x)$$

отримуємо (4.40).

Наслідок 4.1.1. Генератор МП (4.39) на тест-функціях $\varphi(v,\cdot,\cdot) \in C^2(R)$ має представлення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4} Q\varphi(\cdot,\cdot,x) + \varepsilon^{-4} q(x) \boldsymbol{L}_0^\varepsilon \mathbf{P}\varphi(v,w,x), \tag{4.47}$$

де

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon \varphi(v,w,x) = \varphi(v + \varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C(\varepsilon z, x), w + \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x), y) -$$

$$-\varphi(v,w,y) + \varepsilon^4 \frac{v}{2t} \varphi'_v(v,w,x). \tag{4.48}$$

Доведення. Представлення (4.47) отримуємо використовуючи доданок $\pm\varphi(v,w,y)$ в квадратних дужках (4.40).

Лема 4.1.6. *Генератор МП (4.39) на тест-функціях* $\varphi(v,w,\cdot) \in C^{2,3}(R \times R)$ *має асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v,w,x) = [\varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} \frac{1}{t} q(x) Q_1(x) \boldsymbol{P} + \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} q(x) Q_2(x) \boldsymbol{P} +$$

$$+ \frac{1}{t} q(x) Q_3(x) \boldsymbol{P} + \theta_t^\varepsilon Q_0] \varphi(v,w,x), \tag{4.49}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(w) = aC_0(x)\varphi'(w),$$

$$Q_2(x)\varphi(v) = aC^0(x)\varphi'(v),$$

$$Q_3(x)\varphi(v,w) = C(v,\sqrt{t}w,x)\varphi'_v(v,w) + \frac{a^2}{2t} C_0^2(x) \varphi''_w(v,w),$$

$$C(v,\sqrt{t}w,x) = a(v + \sqrt{t}w)C^1(x) + \frac{v}{2},$$

Q_0 *обчислюється за формулою*

$$Q_0\varphi(x) = q(x) \int_X P(x,dy)\varphi(y), \tag{4.50}$$

а залишковий член $\theta_t^\varepsilon Q_0$ *такий, що*

$$\| \theta_t^\varepsilon Q_0 \varphi(v,w,x) \| \to 0, \varepsilon \to 0, t \to \infty.$$

Доведення. Виходячи з гладкості функцій $\varphi(v,w) = \varphi(v,w,\cdot)$ (третя змінна $x \in X$ не приймає участі в подальших перетвореннях) маємо

$$\varphi(v + \varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C(\varepsilon z/\sqrt{t}, x), w + \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x)) = \varphi(v,w) +$$

$$+ \varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C(\varepsilon z/\sqrt{t}, x) \varphi'_v(v,w) + \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x) \varphi'_w(v,w) +$$

$$+\varepsilon^4 \frac{a^2}{2t^2} C_0^2(x)\varphi''_w(v,w) + o(\varepsilon^4). \qquad (4.51)$$

Аналогічно, згідно (4.29), для $C(\varepsilon z/\sqrt{t})$ маємо

$$C(\varepsilon z/\sqrt{t}) = C^0(x) + \varepsilon \frac{z}{\sqrt{t}} C^1(x) + o(\varepsilon). \qquad (4.52)$$

Враховуючи (4.52) і (4.51) в (4.48), з (4.47) маємо (4.49). Лему доведено.

Заключним етапом побудови граничного оператора є використання РПСЗ. Для цього розглянемо розклад оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ з (4.49) на збурених функціях виду

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon^2 \frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x) + \varepsilon^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4 \varphi_4(v,w,x).$$

Лема 4.1.7. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення з* $\varphi(v,w) \in C^{3,4}(R\times R)$ *для оператора* $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ *має наступний вигляд*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,w,x) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t \varphi(v,w) + \theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v,w), \qquad (4.53)$$

де $\boldsymbol{L}_t$ *має вигляд (4.38), а залишковий член* $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v,w)$ *такий, що*

$$|\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v,w)| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Для отримання (4.53) достатньо розглянути РПСЗ на зрізаному операторі $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$ з (4.49), а саме

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon = \varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t} q(x) Q_1(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}} q(x) Q_2(x)\boldsymbol{P} + \frac{1}{t} q(x) Q_3(x)\boldsymbol{P}.$$

Значення оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$ на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(v,w,x)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,w,x) = \varepsilon^{-4} Q\varphi(v,w) + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t}[Q\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_1(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}[Q\varphi_3(v,w,x) + q(x)Q_2(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\frac{1}{t}[Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t} q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\theta_{t0}^\varepsilon(x)\varphi(v,w) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) + \theta_{t0}^\varepsilon(x)\varphi(v,w), \qquad (4.64)$$

де залишковий член $\theta_{t0}^\varepsilon(x)\varphi(v,w)$ такий, що $|\theta_{t0}^\varepsilon(x)\varphi(v,w)| \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

З умови розв'язності проблеми сингулярного збурення (4.54)

$$Q\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) = 0$$

і умови балансу УБ1 маємо представлення

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0 q(x) Q_1(x)\varphi(v,w) = aR_0\widetilde{C}_0(x)\varphi'_w(v,w). \tag{4.55}$$

Аналогічно з рівності

$$Q\varphi_3(v,w,x) + q(x)Q_2(x)\varphi(v,w) = 0$$

і УБ2 маємо

$$\varphi_3(v,w,x) = aR_0\widetilde{C}^0(x)\varphi'_v(v,w)$$

де $\widetilde{C}^0(x) := q(x)C^0(x)$.

Остаточно з умови розв'язності (4.54) маємо

$$Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}_t\varphi(v,w),$$

де оператор $\boldsymbol{L}_t$ такий, що

$$\boldsymbol{L}_t\Pi\varphi(v,w) = \Pi\boldsymbol{L}_t(x)\Pi\varphi(v,w), \tag{4.56}$$

а

$$\boldsymbol{L}_t(x)\varphi(v,w) = \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0 q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w). \tag{4.57}$$

Обчислимо праву частину в (4.56). Враховуючи (4.57) і (4.55) для (4.56) маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_t\Pi\varphi(v,w) = \frac{a^2}{t}\Pi q(x)C_0(x)\boldsymbol{P}R_0 q(x)C_0(x)\Pi\varphi''_w(v,w)+$$
$$+\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v,w). \tag{4.58}$$

Для першого доданку в (4.58) отримуємо

$$\Pi q(x)C_0(x)\boldsymbol{P}R_0 q(x)C_0(x)\Pi \ =$$

$$= \int\limits_X \pi(dx)\widetilde{C}_0(x)R_0\widetilde{C}_0(x) - q\int\limits_X \rho(dx)C_0^2(x). \tag{4.59}$$

А для другого маємо

$$\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v,w) = q[bv + \sqrt{t}wc_1]\varphi'_v(v,w)+$$

$$+\frac{a^2}{2t}q\int\limits_X \rho(dx)C_0^2(x)\varphi''_w(v,w),$$

в позначеннях 6-36 та 6-37. Остання формула разом з (4.59) дає для оператора $\boldsymbol{L}_t$ зображення (4.38). Лему доведено.

Зауваження 4.1.1. Малий доданок в (4.49) не впливає на розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора $\mathbf{L}_{t0}$ в формі (4.53), тобто головна частина РПСЗ для оператора $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ має вигляд правої частини (4.53).

4.2. Асимптотична нормальність стрибкової ПСА в напівмарковському середовищі

В підрозділі отримано достатні умови асимптотичної нормальності одновимірної стрибкової ПСА в напівмарковському середовищі в схемі усереднення та в схемі дифузійної апроксимації. При цьому використано асимптотичні представлення компенсуючого оператора ПСА, а також функцію Ляпунова для усереднених систем за стаціонарними розподілами вкладеного ланцюга Маркова.

4.2.1. Схема усереднення. Розглянемо стрибкову ПСА

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} a_n^\varepsilon C(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, \quad t > 0. \tag{4.60}$$

де $\nu(t) := max\{n : \tau_n \le t\}$ – лічильний процес моментів стрибків τ_n, $n \ge 1$.

Як і в (4.1) покладемо $\sum_{k=0}^{-1} a(\tau_k^\varepsilon) C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$.

Нехай функція регресії $C(u, x)$, $u \in R$, $x \in X$, задовольняє умові існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

У1: $du_x(t)/dt = C(u_x(t), x)$, $x \in X$.

Напівмарковський процес переключень $x(t), t \ge 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається напівмарковським ядром

$$Q(x, B, t) = P(x, B) G_x(t), \quad x \in X, \quad B \in X, \quad t \ge 0, \tag{4.61}$$

з стохастичним ядром $P(x, B)$

$$P(x, B) = P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\},$$

та функцією розподілу $G_x(t)$, $x \in X$, $t \ge 0$

При відповідних умовах на нормуючу послідовність a_n^ε, $n \ge 0$, та при рівномірній ергодичності напівмарковського процесу $x(t), t \ge 0$ стрибкова ПСА, що визначається розв'язком еволюційного рівняння (4.60) збігається з ймовірністю одиниця до точки рівноваги u_0 усередненої системи

$$du(t)/dt = C(u(t)), \quad C(u_0) = 0, \tag{4.62}$$

з функцією регресії

$$C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u, x).$$

Дискретна процедура стохастичної апроксимації (ДПСА) задається співвідношенням

$$u_{n+1}^{\varepsilon} = u_n^{\varepsilon} + \varepsilon^2 a_n^{\varepsilon} C(u_n^{\varepsilon}, x_n^{\varepsilon}), \quad n \geq 0. \tag{4.63}$$

Вкладеність ДПСА (4.63) в ПСА (4.60) визначається формулами

$$u_n^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}), \quad a_n^{\varepsilon} = a(\tau_n^{\varepsilon}), \quad \tau_n^{\varepsilon} := \varepsilon^2 \tau_n. \tag{4.64}$$

Зауважимо, що біжність ПСА

$$u^{\varepsilon}(t) \Rightarrow 0, \quad t \to \infty, \tag{4.65}$$

означає, що флуктуації доцільно вивчати з наступним нормуванням:

$$v^{\varepsilon}(t) = \sqrt{t} u^{\varepsilon}(t)/\varepsilon. \tag{4.66}$$

З (4.64) та (4.66) для процедури (4.60) маємо нормовану ДПСА

$$v_n^{\varepsilon} = \sqrt{\tau_n^{\varepsilon}} u_n^{\varepsilon}/\varepsilon, \tag{4.67}$$

або у вигляді оберненого зв'язку

$$u_n^{\varepsilon} = \varepsilon v_n^{\varepsilon} \Big/ \sqrt{\tau_n^{\varepsilon}}. \tag{4.68}$$

Надалі, не зменшуючи загальності, вважаємо $u_0 = 0$, тобто має місце умова

У2: $C(0)$=0.

При цьому будемо розглядати стандартну ПСА з нормуючою функцією

У3: $a(t) = a/t$, $t > 0$.

Додаткові умови на функцію регресії такі самі, як і в п. 4.1, а саме:

У4: $C(u, \cdot) \in C^3(R)$,

тобто друга похідна по u $C_u''(u, \cdot)$ задовольняє глобальній умові Ліпшиця:

$$|C_u''(u, x) - C_u''(u', x)| \leq C \, |u - u'| \, ,$$

з константою C, що не залежить від $x \in X$.

Рівномірна ергодичність напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, з напівмарковським ядром (6.61) визначає генератор

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $q(x) := 1/g(x)$, $g(x) := \int\limits_0^\infty \bar{G}_x(t)dt$, $\bar{G}_x(t) := 1 \text{-} G_x(t)$, супроводжуючого рівномірно ергодичного марковського процесу $x^0(t), t \geq 0$. При цьому генератор Q є зведено оборотним, для якого існує потенціал R_0, що визначається рівняннями

$$R_0 Q = Q R_0 = \Pi - I.$$

Враховуючи умову У4 будемо використовувати формулу Тейлора для функції регресії

$$C(u, x) = C_0(x) + uC_1(x) + \frac{u^2}{2} C_2(u, x), \tag{4.69}$$

Тут за означенням

$$C_0(x) := C(0, x), \quad C_1(x) := C'_u(u, x)|_{u=0},$$

$$C_2(u, x) := C''_u(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1. \tag{4.70}$$

Нехай виконуються умови збіжності ПСА (4.63) в напівмарковському середовищі: існує функція Ляпунова $V(u)$, $u \in R$, що забезпечує експоненційну стійкість системи (4.62)

C1: $C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0;$

а також для функції $\widetilde{C}(u, x) := C(u, x) - C(u)$ мають місце додаткові умови (див. 4.1)

C2: $|\widetilde{C}(u, x)V'(u)| \leq c_1(1 + V(u)), c_1 > 0,$

$|C(u, x)[\widetilde{C}(u, x)V'(u)]'| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,$

$|C(u, x)[C(u, x)[\widetilde{C}(u, x)V'(u)]']'| \leq c_3(1 + V(u)), c_3 > 0.$

Крім того, функції розподілу $G_x(t)$,$x \in X$,$t \geq 0$, задовольняють умові Крамера рівномірно по $x \in X$

$$C3 : \sup_{x \in X} \int\limits_0^\infty e^{ht} \bar{G}_x(t)dt \quad \leq H < +\infty, h > 0.$$

Введемо також необхідні позначення

$$d := -q \int_X \rho(dx) C_1(x), \quad b := ad - 1/2,$$

$$\rho^2 := 2 \int_X \pi(dx)[\widetilde{C}_0(x) R_0 \widetilde{C}_0(x) - \frac{1}{4} q(x) C_0^2(x)],$$

де $\widetilde{C}_0(x) := q(x) C_0(x)$.

Теорема 4.2.1. *В умовах C1, C2, C3 збіжності ПСА (4.61) в напівмарковському середовищі та при додаткових умовах*

D1: $\rho^2 > 0$*,*

та

D2: $b > 0$,

D3: $d > 0$,

має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \varepsilon \to 0, \tag{4.71}$$

в кожному скінченому інтервалі $0 < t_0 \le t \le T$*. Граничний процес* $\zeta(t)$*,* $t \ge 0$*, є процесом типу Орнштейна-Уленбека, що визначається генератором*

$$\boldsymbol{L}\varphi(v) = -bv\varphi'(v) + \frac{a^2\rho^2}{2}\varphi''(v). \tag{4.72}$$

Зауваження 4.2.1. Умова D1 забезпечує дифузійність граничного процесу $\zeta(t), t \ge 0$, а умова D2 означає ергодичність процесу $\zeta(t), t \ge 0$, зі стаціонарним нормальним розподілом $N(0, \sigma_0^2)$, $\sigma_0^2 = \rho^2/2b$.

З слабкої збіжності (4.71) маємо

Висновок 4.2.1. В умовах теореми нормована ПСА $v^\varepsilon(t)$ має асимптотично нормальний розподіл $N(0, \sigma_0^2)$, тобто

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow v, \varepsilon \to 0, t \to \infty.$$

Випадкова величина $v \in N(0, \sigma_0^2)$.

Розглянемо формулу Тейлора

$$\sqrt{t + \varepsilon^2 s} = \sqrt{t}(1 + \frac{\varepsilon^2 s}{2t} + \varepsilon^2 h^\varepsilon(s)), \tag{4.73}$$

де $h^\varepsilon(s) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, рівномірно в кожному скінченому інтервалі: $s \in [0, S_0], S_0 < \infty$.

Отже приріст функції $\sqrt{t}$ при зміні аргументу на величину $\varepsilon^2 s$ має вигляд

$$\sqrt{t+\varepsilon^2 s} - \sqrt{t} = \frac{\varepsilon^2 s}{2\sqrt{t}} + \varepsilon^2 h^\varepsilon(s)\sqrt{t}. \tag{4.74}$$

Лема 4.2.1. *Нормована ДПСА (4.67) задовольняє співвідношення*

$$v_{n+1}^\varepsilon = v_n^\varepsilon + \varepsilon \frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} C(\varepsilon v_n^\varepsilon / \sqrt{\tau_n^\varepsilon}, x_n^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\theta_n^\varepsilon}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon + \varepsilon^2 H^\varepsilon(\theta_{n+1}), \tag{4.75}$$

де залишковий член $H^\varepsilon(\theta_{n+1})$ такий, що $EH^\varepsilon(\theta_{n+1}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Для приросту $\Delta v_n^\varepsilon := v_{n+1}^\varepsilon - v_n^\varepsilon$ нормованої ДПСА (4.67) маємо представлення

$$\Delta v_n^\varepsilon = [\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon} u_{n+1}^\varepsilon - \sqrt{\tau_n^\varepsilon} u_n^\varepsilon]/\varepsilon,$$

або

$$\Delta v_n^\varepsilon = [\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon} \Delta u_n^\varepsilon + (\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon} - \sqrt{\tau_n^\varepsilon}) u_n^\varepsilon]/\varepsilon. \tag{4.76}$$

Згідно (4.60) та (4.64) приріст Δu_n^ε обчислюється за формулою

$$\Delta u_n^\varepsilon = \varepsilon^2 a_n^\varepsilon C(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon).$$

Враховуючи (4.68) та (4.64) маємо наступне зображення

$$\Delta u_n^\varepsilon = \varepsilon^2 \frac{a}{\tau_n^\varepsilon} C(\varepsilon v_n^\varepsilon / \sqrt{\tau_n^\varepsilon}, x_n^\varepsilon). \tag{4.77}$$

Підставляючи (4.77) в (4.76), та враховуючи (4.73) та (4.74), маємо

$$\Delta v_n^\varepsilon = [\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon} \varepsilon^2 \frac{a}{\tau_n^\varepsilon} C(\varepsilon v_n^\varepsilon / \sqrt{\tau_n^\varepsilon}, x_n^\varepsilon) + \varepsilon^2 (\frac{\theta_{n+1}}{2\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} + \sqrt{\tau_n^\varepsilon} h^\varepsilon(\theta_{n+1}))\varepsilon \frac{v_n^\varepsilon}{2\sqrt{\tau_n^\varepsilon}})]/\varepsilon =$$

$$= \varepsilon \frac{a\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon}}{\tau_n^\varepsilon} C(\varepsilon v_n^\varepsilon / \sqrt{\tau_n^\varepsilon}, x_n^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon + \varepsilon^2 h_1^\varepsilon(\theta_{n+1}) =$$

$$= \varepsilon \frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} C(\varepsilon v_n^\varepsilon / \sqrt{\tau_n^\varepsilon}, x_n^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon + \varepsilon^2 H^\varepsilon(\theta_{n+1}),$$

де $h_1^\varepsilon(\theta_{n+1})$ володіє тими ж властивостями, що і $h^\varepsilon(\theta_{n+1})$ з (4.73).

З останніх міркувань отримуємо твердження (4.75). Лему доведено.

Висновок 4.2.2. Головний член приросту нормованої ДПСА (4.67) має вигляд

$$\Delta v_n^\varepsilon = \varepsilon \frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} C(\varepsilon v_n^\varepsilon / \sqrt{\tau_n^\varepsilon}, x_n^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon. \tag{4.78}$$

Використовуючи представлення (4.69) маємо

В позначеннях 6-70 приріст (4.78) має вигляд

$$\Delta v_n^\varepsilon = \varepsilon \frac{a}{\sqrt{\tau_n^\varepsilon}} C_0(x) + \varepsilon^2 [\frac{a v_n^\varepsilon}{\tau_n^\varepsilon} C_1(x) + \frac{\theta_{n+1}}{2\tau_n^\varepsilon} v_n^\varepsilon] + \varepsilon^2 h^\varepsilon(v, x) \tag{4.79}$$

де $h^\varepsilon(v,x)$ - знехтуючий член, такий, що $|h^\varepsilon(v,x)| \to 0$, $\varepsilon \to 0, t \geq t_0 > 0$.

Як і в підрозділі 4.1, будемо використовувати компенсуючий оператор (КО) розширеного *процесу марковського відновлення*

$$v_n^\varepsilon = v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon/\varepsilon^2) = x(\tau_n), \quad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2\tau_n, \quad n \geq 0, \tag{4.80}$$

який задається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,x,t) = \varepsilon^{-2}q(x)[E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) \mid v_n^\varepsilon = v, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t]-$$

$$-\varphi(v,x,t)]. \tag{4.81}$$

Розглянемо напівгрупу

$$\varGamma_s\varphi(v) = \varphi(v + \frac{v}{2t}s), s \geq 0, \tag{4.82}$$

з породжуючим оператором

$$\varGamma\varphi(v) = \frac{v}{2t}\varphi'(v),$$

а також стрибковий оператор

$$\boldsymbol{D}^\varepsilon\varphi(v) = \varphi(v + \varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon v/\sqrt{t})), t > 0. \tag{4.83}$$

Лема 4.2.2. *Компенсуючий оператор (4.81) має аналітичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-2}q(x)\int_0^\infty G_x(ds)[\varGamma_{\varepsilon^2 s}\boldsymbol{D}^\varepsilon - \mathrm{I}]\boldsymbol{P}\varphi(v,x). \tag{4.84}$$

де

$$\boldsymbol{P}\varphi(x) := \int_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання в (4.81), враховуючи співвідношення (див. (4.80))

$$v_{n+1}^\varepsilon = v_n^\varepsilon + v^\varepsilon(\varepsilon^2\theta_{n+1}).$$

Представлення (4.81) в операторній формі має вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}q(x)\int_0^\infty G_x(ds)\boldsymbol{P}[\varphi(v + \varDelta v^\varepsilon, x) - \varphi(v,x)], \tag{4.85}$$

де приріст $\varDelta v^\varepsilon$ складається з стрибкової складової, що визначається оператором (4.83), та неперервної складової, що визначається напівгрупою (4.82). Їх сума дає головний приріст (4.78) нормованої ДПСА.

Для вивчення асимптотики КО розглянемо асимптотику приросту еволюції $\varphi(v,x)$. Ввівши позначення $s=\theta^\varepsilon_{n+1}, x=x^\varepsilon_n, t=\tau^\varepsilon_n, v=v^\varepsilon_n$, та враховуючи 6-79, маємо

$$\varDelta\varphi(v,x):=\varphi(v+\varDelta v^\varepsilon,x)-\varphi(v,x)=\varphi(v+\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C_0(x)+$$

$$+\varepsilon^2\frac{v}{t}[aC_1(x)+\frac{s}{2}]+\varepsilon^2h^\varepsilon(v,s),x)-\varphi(v,x).$$

Отже при відповідній гладкості $\varphi(v,\cdot)\in C^3(R)$ остаточно маємо

$$\varDelta\varphi(v,x)=[\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C_0(x)+\varepsilon^2\frac{v}{t}b(x,s)]\varphi'(v,x)+\varepsilon^2\frac{a^2}{2t}C_0^2(x)\varphi''(v,x)+$$

$$+\varepsilon^2h^\varepsilon(v,x)$$

де

$$b(x,s)=aC_1(x)+\frac{s}{2},$$

а $h^\varepsilon(v,x)$ такий, що $|h^\varepsilon(v,x)|\to 0,\ \varepsilon\to 0, t\ge t_0>0$.

Враховуючи останнє, з (4.85) маємо (4.84). Лему доведено.

Лема 4.2.3. *Компенсуючий оператор (4.84) на тест-функціях $\varphi(v,x)\in C^3(R)$, $x\in X$, допускає асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_t\varphi(v,x)=\varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x)+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,x)+\frac{1}{t}Q_2(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,x)+$$

$$+\theta^\varepsilon_t(x)\varphi(v,x), \tag{4.86}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v)=aC_0(x)\varphi'(v),$$

$$Q_2(x)\varphi(v)=vb(x)\varphi'(v)+\frac{a^2}{2}C_0^2(x)\varphi''(v)$$

$$b(x)=aC_1(x)+\frac{1}{2},$$

а залишковий член $\theta^\varepsilon_t(x)\varphi(v,x)$ такий, що

$$\|\ \theta^\varepsilon_t(x)\varphi(v,x)\ \|\to 0,\varepsilon\to 0, t\ge t_0>0.$$

Доведення. Розглянемо другий доданок в (4.84), ввівши позначення

$$\boldsymbol{L}_1^\varepsilon\varphi(v,x) = \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_0^\infty G_x(ds)[\varGamma_{\varepsilon^2 s}\boldsymbol{D}^\varepsilon - I]\boldsymbol{P}\varphi(v,x) =$$

$$= [\boldsymbol{L}_\varGamma^\varepsilon + \boldsymbol{L}_D^\varepsilon + \boldsymbol{L}_{\varGamma D}^\varepsilon]\varphi(v,x),$$

де

$$\boldsymbol{L}_\varGamma^\varepsilon\varphi(v,x) := \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_0^\infty G_x(ds)[\varGamma_{\varepsilon^2 s} - I]\boldsymbol{P}\varphi(v,x),$$

$$\boldsymbol{L}_D^\varepsilon\varphi(v,x) := \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_0^\infty G_x(ds)[\boldsymbol{D}^\varepsilon - I]\boldsymbol{P}\varphi(v,x),$$

$$\boldsymbol{L}_{\varGamma D}^\varepsilon\varphi(v,x) := \varepsilon^{-2}q(x)\int\limits_0^\infty G_x(ds)[\varGamma_{\varepsilon^2 s} - \mathrm{I}][\boldsymbol{D}^\varepsilon - \mathrm{I}]\boldsymbol{P}\varphi(v,x).$$

Розглянемо властивості кожного з введених операторів.

Враховуючи рівняння для напівгрупи

$$\varGamma_{\varepsilon^2 s} - \mathrm{I} = \varGamma\int\limits_0^{\varepsilon^2 s}\varGamma_t dt,$$

та інтегрування чистинами, отримаємо

$$\boldsymbol{L}_\varGamma^\varepsilon\varphi(v,x) = [\varGamma\boldsymbol{P} + \theta_\varGamma^\varepsilon(x)]\varphi(v,x). \tag{4.87}$$

Враховуючи розклад за формулою Тейлора в (4.83), отримаємо

$$\boldsymbol{L}_D^\varepsilon\varphi(v,x) = [\varepsilon^{-1}\boldsymbol{D}_1(x)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}_2(x)\boldsymbol{P}]\varphi(v,x) + \theta_D^\varepsilon(x)\varphi(v,x), \tag{4.88}$$

де

$$\boldsymbol{D}_1(x)\varphi(v) = \frac{a}{\sqrt{t}}C_0(x)\varphi'(v),$$

$$\boldsymbol{D}_2(x)\varphi(v) = \frac{a}{t}[vC_1(x)\varphi'(v) + \frac{a}{2}C_0^2(x)\varphi''(v)].$$

Нарешті не важко переконатись, що

$$\boldsymbol{L}_{\varGamma D}^\varepsilon\varphi(v,x) = \theta_{\varGamma D}^\varepsilon(x)\varphi(v,x). \tag{4.89}$$

Тут скрізь оператори $\theta_\bullet^\varepsilon(x)$ є знехтуючими на класі тест-функцій $\varphi(v,\cdot) \in C^k(R), k \geq 3$.

Підсумовуючи результати асимптотичних розкладів (4.87), (4.88), (4.89) отримаємо твердження леми.

Доведення теореми 4.2.1. Доведення теореми про асимптотичну нормальність нормованої ПСА (4.67) полягає у застосуванні розв'язку проблеми сингулярного збурення до зрізаного компенсуючого оператора

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon \varphi(v,x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}} Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,x) + \frac{1}{t} Q_2(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,x)$$

з представлення (4.86).

Використовуючи збурену тест-функцію

$$\varphi^\varepsilon(v,x,t) = \varphi(v) + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,x),$$

отримаємо

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,x,t) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}} Q_1(x)\boldsymbol{P} + \frac{1}{t} Q_2(x)\boldsymbol{P}][\varphi(v) + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x) +$$

$$+ \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,x)] =$$

$$= \frac{1}{t}[Q \quad \varphi_2(v,x) + (Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0 Q_1(x) + Q_2(x))\varphi(v)] + \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v) =$$

$$= \frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v) + \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v),$$

де оператор $\boldsymbol{L}$ такий, що

$$\boldsymbol{L}\Pi = \Pi Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0 Q_1(x)\Pi + \Pi Q_2(x)\Pi. \tag{4.90}$$

Обчислення за формулою (4.90) дають генератор (4.65) граничного дифузійного процесу.

Завершення доведення теореми реалізується за схемою доведення теореми 4.1.1.

4.2.2. Асимптотична нормальність стрибкової ПСА в напівмарковському середовищі у схемі дифузійної апроксимації.

У цьому підрозділі розглянемо стрибкову ПСА з асимптотично дифузійним збуренням в напівмарковському середовищі, для якої встановлюється асимптотична нормальність флуктуацій через властивості компенсуючого оператора.

Стрибкова ПСА в схемі дифузійної апроксимації в напівмарковському середовищі задається в такому вигляді (вважаємо, що $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) := 0$):

$$u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, t > 0. \tag{4.91}$$

Тут послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значенням функції $a(t)$, $t > 0$, через співвідношення:

$$a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0, \tag{4.92}$$

де $\tau_n, n \geq 0$, - моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ з лічильним процесом

$$\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0.$$

НМП $x(t), t > 0$, задається напівмарковським ядром $Q(x, B, t), x \in X, B \in \boldsymbol{X}, t \geq 0$.

В ПСА (4.91) разом з (4.92) мають місце співвідношення

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0.$$

Функція $C^\varepsilon(u, x)$ в ПСА (4.91) така, що

$$C^\varepsilon(u, x) := C(u, x) + \varepsilon^{-1} C_0(x), x \in X, \tag{4.94}$$

і задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)/dt = C^\varepsilon(u_x(t), x), x \in X.$$

Функція регресії $C(u, x)$ така, що $C(u, \cdot) \in C^3(R)$, тому має місце розклад Тейлора

$$C(u, x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2 C_2(u, x), \tag{4.95}$$

де

$$C^0(x) = C(0, x), C^1(x) = C'(0, x), \tag{4.96}$$

$$C_2(u, x) = \frac{1}{2} C''(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Для збурення $C_0(x)$ функції регресії (4.94) передбачається виконання умови балансу

УБ1: $\tilde{\Pi} C_0(x) := \int\limits_X \rho(dx) C_0(x) = 0$.

При відповідних умовах на функцію $a(t), t > 0$, стрибкова ПСА (4.91) збігається з ймовірністю одиниця до точки рівноваги $u_0 = 0$ усередненої системи

$$du(x)/dt = C(u(t)),$$

де

$$C(u) := q \int_X \rho(dx) C(u, x). \tag{4.97}$$

Надалі $a(t) = a/t, a > 0, t > 0$.

Оскільки $u_0 = 0$, то має місце рівність

$$C(0) = 0. \tag{4.97}$$

Виходячи з (4.96) та (4.97) маємо додаткову умову балансу

УБ2: $\tilde{\Pi} C^0(x) = 0$.

Асимптотична нормальність ПСА (4.91) встановлюється для нормованих флуктуацій

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)]/\varepsilon, \tag{4.99}$$

де дифузійне збурення

$$C_0^\varepsilon(t) := \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C_0(x_k), \tag{4.100}$$

визначається збуренням $C_0(x)$ з (4.94).

Зауважимо, що для збурення $C_0^\varepsilon(t)$ має місце слабка збіжність

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t) w(t), \quad t > 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = \sigma^2/t^2,$$

$$\sigma^2 = 2a^2 \int_X \pi(dx) \tilde{C}_0(x) R_0 \tilde{C}_0(x),$$

$$\tilde{C}_0(x) := q(x) C_0(x).$$

Надалі оператор $\boldsymbol{P}$ визначається ядром $P(x, B), B \in X$,

$$\boldsymbol{P}\varphi(x) := \int_X P(x, dy)\varphi(y). \tag{4.101}$$

Зауважимо, що нормована флуктуація (4.99) означає, що

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}\tilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, \tag{4.102}$$

де

$$\tilde{v}^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon),$$

або

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon[v^\varepsilon(t)/\sqrt{t} + C_0^\varepsilon(t)]. \tag{4.103}$$

Представлення (4.103) в дискретному випадку має вигляд

$$u_n^\varepsilon = \varepsilon[v_n^\varepsilon/\sqrt{\tau_n^\varepsilon} + C_n^\varepsilon],$$

де

$$C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon).$$

Введемо позначення

$$\rho^2 = 2\int\limits_X \pi(dx)\tilde{C}_0(x)R_0\tilde{C}_0(x) - q\int\limits_X \rho(dx)C_0^2(x),$$

$$d = -q\int\limits_X \rho(dx)C^1(x),$$

$$b = ad - \frac{1}{2}.$$

Теорема 4.2.2. *При умовах збіжності ПСА (4.91) та при додаткових умовах УБ1, УБ2, а також*

$D1 : \rho^2 > 0;$

$D2 : d > 0,$

$D3 : b > 0,$

має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow w_\sigma(t), \varepsilon \to 0, t > 0,$$

в кожному скінченому інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний двокомпонентний процес $\zeta(t), w_\sigma(t)$, $t > 0$, *визначається генератором*

$$\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) = B(v,\sqrt{t}w)\varphi_v'(v,w) + \frac{a^2\rho^2}{2t}\varphi_w''(v,w), \tag{4.104}$$

де

$$B(v,\sqrt{t}w) = [-bv - ad\sqrt{t}w].$$

Висновок 4.2.2. Граничний процес флуктуацій $\zeta(t), \quad t > 0$, визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\zeta(t) = [-b\zeta(t) - ad\sqrt{t}]dw_\sigma(t),$$

де $w_\sigma(t)$ – гаусовський процес з дисперсією

$$\sigma^2(t) = a^2\rho^2/t^2.$$

Розглянемо властивості нормованого процесу флуктуацій.

Введемо розширений процес марковського відновлення

$$v_n^\varepsilon := v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4\tau_n, \quad n \geq 0, \tag{4.105}$$

де τ_n– моменти марковського відновлення НМП $x(t), t \geq 0$. Компенсуючий оператор для (4.105) визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) := \varepsilon^{-4}q(x)[E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon)|v_n^\varepsilon = v, w_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t]-$$

$$-\varphi(v,w,x)], \tag{4.106}$$

в позначеннях $C_n^\varepsilon = w_n^\varepsilon$.

Лема 4.2.4. *Компенсуючий оператор (4.106) розширеного процесу марковського відновлення (4.105) для $\varphi(v,w,\cdot) \in C^3(R\times R)$, має аналітичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}q(x)[\boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x)\boldsymbol{P} - I]\varphi(v,w,x), \tag{4.107}$$

де

$$\boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x)\varphi(v,w) = \int_0^\infty G_x(ds)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^{\boldsymbol{t}}(v)\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)\varphi(v,w).$$

Тут напівгрупи $\boldsymbol{C}_s^{\boldsymbol{t}}(v), t > 0, s > 0$, визначаються генератором

$$\boldsymbol{C}_t(v)\varphi(v) = \frac{v}{2t}\varphi'(v),$$

а оператори зсуву $\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)$, $\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)$ через представлення

$$\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)\varphi(v,w) = \varphi(v + \varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}} + w), x), w),$$

і

$$\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)\varphi(v,w) = \varphi(v, w + \varepsilon^3\frac{a}{t}C_0(x)).$$

Доведення. Спочатку обчислимо прирости процесу (4.105), враховуючи означення (4.99) та (4.103), а також представлення (4.100).

Для приросту Δv_n^ε маємо (див. 6-102)

$$\Delta v_n^\varepsilon := v_{n+1}^\varepsilon - v_n^\varepsilon = [\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon}\tilde{v}_{n+1}^\varepsilon - \sqrt{\tau_n^\varepsilon}\tilde{v}_n^\varepsilon]/\varepsilon = [\sqrt{t+\varepsilon^4\theta_x}\tilde{v}_{n+1}^\varepsilon - \sqrt{t}\tilde{v}_n^\varepsilon]/\varepsilon,$$

де $\tilde{v}_n^\varepsilon := \tilde{v}^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon)$.

Згідно (4.102) та (4.103) в позначеннях $v_n^\varepsilon = v, C_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t$, з останнього маємо

$$\Delta v_n^\varepsilon = \varepsilon^4\frac{v}{2t}\theta_x + \varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}} + w), x) + h^\varepsilon(x),$$

де $h^\varepsilon(x)$ залишковий член: $h^\varepsilon(x) = o(\varepsilon^4), x \in X$.

Легко обчислити (див. (4.100)) приріст

$$\Delta C_n^\varepsilon := C_{n+1}^\varepsilon - C_n^\varepsilon = C_0^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) - C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x).$$

Тепер обчислюємо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, C_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon)\,|v_n^\varepsilon = v, C_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] =$$

$$= E_{v,w,x,t}\varphi(v + \Delta v_n^\varepsilon, w + \Delta C_n^\varepsilon, x_{n+1}) =$$

$$= E_{v,w,x,t}\varphi(v + \varepsilon^4 \frac{v}{2t}\theta_x + \varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}} + w), x), w + \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x), x_{n+1}) =$$

$$= \int_0^\infty G_x(ds)\, \boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v) \boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x) \boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x) \boldsymbol{P}\varphi(v, w, x).$$

З останнього і з означення КО маємо (4.107).

Наступна лема має визначальне значення для доведення теореми.

Лема 4.2.5. *Компенсуючий оператор (4.107) розширеного процесу марковського відновлення (4.106) допускає асимптотичне представлення на тест-функціях $\varphi(v, w)$ є $C^{3,4}(R \times R)$ в такому вигляді*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) = [\varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} \frac{1}{t} Q_1(x) Q_0 + \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} Q_2(x) Q_0 +$$

$$+ \frac{1}{t} Q_3(x) Q_0 + \theta_t^\varepsilon(x)]\varphi(v, w, x), \tag{4.108}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v, w) = aC_0(x)\varphi'_w(v, w), \tag{4.109}$$

$$Q_2(x)\varphi(v, w) = aC^0(x)\varphi'_v(v, w), \tag{4.110}$$

$$Q_3(x)\varphi(v, w) = \left[(aC^1(x) + \frac{1}{2} g(x))v + \sqrt{t} w C^1(x)\right] \varphi'_v(v, w) +$$

$$+ \frac{a^2}{2t} q(x) C_0^2(x) \varphi''_w(v, w), \tag{4.111}$$

а оператор Q_0 має представлення

$$Q_0 \varphi(x) = q(x)\mathbf{P}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)\varphi(y). \tag{4.112}$$

Залишковий член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v, w, x)$ такий, що

$$|\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v, w, x)| \to 0, \varepsilon \to 0, 0 \le t_0 \le t \le T. \tag{4.113}$$

Доведення. Спочатку виконаємо елементарне перетворення КО в формулі (4.107)

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon = \varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-4} \boldsymbol{L}_0^\varepsilon Q_0,$$

де

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon = \boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x) - I. \tag{4.114}$$

Далі використаємо алгебраїчну тотожність

$$abc - 1 = a - 1 + b - 1 + c - 1 + (a-1)(b-1) + (a-1)(c-1) +$$

$$+ (b-1)(c-1) + (a-1)(b-1)(c-1),$$

покладаючи $a := \boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v)$, $b := \boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)$, $c := \boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)$.

Отже з (4.114) маємо представлення оператора $\boldsymbol{L}_0^\varepsilon$:

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon = \boldsymbol{L}_a^\varepsilon + \boldsymbol{L}_b^\varepsilon + \boldsymbol{L}_c^\varepsilon + \boldsymbol{L}_{ab}^\varepsilon + \boldsymbol{L}_{ac}^\varepsilon + \boldsymbol{L}_{bc}^\varepsilon + \boldsymbol{L}_{abc}^\varepsilon. \tag{4.115}$$

Тепер обчислимо асимптотику кожного доданку в (4.115). Для $\boldsymbol{L}_a^\varepsilon$ інтегруванням частинами, маємо

$$\boldsymbol{L}_a^\varepsilon \varphi(v) = \int_0^\infty G_x(ds) \left[\boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v) - I \right] \varphi(v) =$$

$$= \varepsilon^4 \boldsymbol{C}_t(v) \int_0^\infty \bar{G}_x(s) \boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v) ds \varphi(v), \tag{4.116}$$

де $\boldsymbol{C}_t(v)$ – генератор напівгрупи $\boldsymbol{C}_s^t(v)$, тобто

$$d\boldsymbol{C}_s^t(v)/ds = \boldsymbol{C}_t(v) \boldsymbol{C}_s^t(v),$$

або в інтегральній формі з використанням нормування часу на ε^4

$$\boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v) - I = \boldsymbol{C}_t(v) \int_t^{t+\varepsilon^4 s} \boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 l}^t(v) dl. \tag{4.117}$$

Ще раз інтегруючи (4.116) частинами і використовуючи (4.117) маємо

$$\boldsymbol{L}_a^\varepsilon \varphi(v) = \varepsilon^4 \boldsymbol{C}_t(v) \left[g(x) + \boldsymbol{C}_t(v) \boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x) \right] \varphi(v),$$

де

$$\boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x) = \int_0^\infty \bar{G}_x^{6-92}(s) \boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v) ds,$$

а $\bar{G}_x^2(s) := \int\limits_s^\infty \bar{G}_x(t)dt$, або інакше

$$\boldsymbol{L}_a^\varepsilon \varphi(v) = \varepsilon^4 g(x) \boldsymbol{C}_t(v)\varphi(v) + \varepsilon^4 \theta_a^\varepsilon(x)\varphi(v), \tag{4.118}$$

з залишковим членом

$$|\theta_a^\varepsilon(x)\varphi(v)| \to 0, \varepsilon \to 0, \quad \varphi(v) \in C^3(R).$$

Для оператора $\boldsymbol{L}_b$ маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_b^\varepsilon \varphi(v) = \int\limits_0^\infty G_x(ds)[\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x) - I]\varphi(v) = [\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x) - I]\varphi(v) =$$

$$= \varphi(v + \varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}} + w), x)) - \varphi(v). \tag{4.119}$$

Враховуючи розклад (4.95) в формі

$$C(\varepsilon u, x) = C^0(x) + \varepsilon u C^1(x) + \varepsilon^2 u^2 C^2(u, x)$$

з (4.119) маємо

$$\boldsymbol{L}_b^\varepsilon \varphi(v) = \left[\varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C^0(x) + \varepsilon^4 \frac{a}{t}(v + \sqrt{t}w)C^1(x)\right] \varphi'(v) + \varepsilon^4 \theta_b^\varepsilon(x)\varphi(v), \tag{4.120}$$

з залишковим членом

$$|\theta_b^\varepsilon(x)\varphi(v)| \to 0, \varepsilon \to 0, \quad \varphi(v) \in C^3(R).$$

Аналогічно маємо

$$\boldsymbol{L}_c^\varepsilon \varphi(w) = \int\limits_0^\infty G_x(ds)[\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x) - I]\varphi(w) =$$

$$= [\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x) - I]\varphi(w) =$$

$$= \varphi(w + \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x)) - \varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x)\varphi'(w) + \varepsilon^4 \frac{a^2}{2t^2} C_0^2(x)\varphi''(w) + \varepsilon^4 \theta_c^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{4.121}$$

з залишковим членом

$$|\theta_c^\varepsilon(x)\varphi(w)| \to 0, \varepsilon \to 0, \quad \varphi(w) \in C^3(R).$$

Далі можна переконатись в тому, що решта членів в (4.115) є знехтуючими. Наприклад згідно з (4.118) і (4.120), отримуємо

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{ab}\varphi(v) = \boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{a}\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{b}\varphi(v) = \varepsilon^4\theta_{ab}(x)\varphi(v), \tag{4.122}$$

з $|\theta^{\varepsilon}_{ab}(x)\varphi(v)| \to 0, \varepsilon \to 0$, $\varphi(v) \in C^3(R)$.

Аналогічно з (4.118) і (4.121)

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{ac}\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{a}\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{c}\varphi(v,w) = \varepsilon^4\theta_{ac}(x)\varphi(v,w) \tag{4.123}$$

а також з (4.120) і (4.121)

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{bc}\varphi(w) = \boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{b}\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{c}\varphi(w) = \varepsilon^4\theta_{bc}(x)\varphi(w). \tag{4.124}$$

Очевидним є також представлення

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{abc}\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{a}\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{b}\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{c}\varphi(v,w) = \varepsilon^4\theta_{abc}(x)\varphi(v,w), \tag{4.125}$$

Підставляючи (4.118)–(4.125) в розклад (4.125), та враховуючи решту знехтуючих членів, отримуємо розклад (4.108)–(4.113). Лему доведено.

Заключним етапом побудови граничного оператора $\boldsymbol{L}_t$ є використання розв'язку проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0} = \varepsilon^{-4}Q + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t}Q_1(x)Q_0 + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}Q_2(x)Q_0 + \frac{1}{t}Q_3(x)Q_0 \tag{4.126}$$

з (4.108). При цьому збурена тест-функція буде мати вигляд

$$\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x) + \varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4\frac{1}{t}\varphi_4(v,w,x).$$

Лема 4.2.6. *Граничний оператор $\boldsymbol{L}_t$ визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення для оператора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}$ формулою*

$$\boldsymbol{L}_t = \frac{1}{t}\Pi Q_1(x)Q_0R_0Q_1(x)Q_0\Pi + \Pi Q_3(x)\Pi. \tag{4.127}$$

Доведення. Розглянемо проблему сингулярного збурення для оператора (4.126):

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) + \theta^{\varepsilon}_{L}(x)\varphi(v,w). \tag{4.128}$$

Покладаючи $\varphi^{\varepsilon}(v,w,x)$ в ліву частину (4.128), з урахуванням розкладу (4.126), отримаємо систему рівнянь

$$Q\varphi(v,w) = 0, \tag{4.129}$$

$$Q\varphi_2(v,w,x) + Q_1(x)Q_0\varphi(v,w) = 0, \tag{4.130}$$

$$Q\varphi_3(v,w,x) + Q_2(x)Q_0\varphi(v,w) = 0, \tag{4.131}$$

$$Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t}Q_1(x)Q_0\varphi_2(v,w,x) + Q_3(x)Q_0\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) \tag{4.132}$$

Рівняння (4.129) очевидно справедливе для всіх тест-функцій $\varphi(v,w)$, що не залежать від аргументу $x \in X$.

Розв'язність рівняння (4.130) забезпечується умовою балансу УБ1, а саме

$$\varPi Q_1(x)Q_0 = a\varPi C_0(x)Q_0 = a\int\limits_X \pi(dx)q(x)C_0(x) = aq\int\limits_X \rho(dx)C_0(x) = 0.$$

Отже розв'язок рівняння (4.130) такий

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v,w).$$

Розв'язність рівняння (4.131) забезпечується умовою балансу УБ2, а саме

$$\varPi Q_2(x)Q_0 = a\varPi C^0(x)Q_0 = aq\int\limits_X \rho(dx)C^0(x) = 0.$$

Нарешті умова розв'язності рівняння (4.132) дає вираз граничного оператора $\boldsymbol{L}_t$ в формі (4.127).

Доведення теореми 4.2.2. Оскільки

$$Q_0R_0 = q(x)R_0 + \varPi - I$$

та

$$Q_0\varPi = q(x)\varPi,$$

враховуючи (4.109), для першого доданку з (4.127) отримуємо

$$\frac{1}{t}\varPi Q_1(x)Q_0R_0Q_1(x)Q_0\varPi\varphi(v,w) =$$

$$= \frac{a^2}{t}\varPi C_0(x)q(x)\boldsymbol{P}R_0C_0(x)q(x)\boldsymbol{P}\varPi\varphi''_w(v,w) =$$

$$= \frac{a^2}{t}\varPi C_0(x)[q(x)R_0q(x)C_0(x) + \varPi q(x)C_0(x) - q(x)C_0(x)]\varphi''_w(v,w) =$$

$$= \frac{a^2}{t}[\varPi\widetilde{C}_0(x)R_0\widetilde{C}_0(x) - \varPi q(x)C_0^2(x)]\varphi''_w(v,w). \tag{4.134}$$

Згідно (4.111) для другого доданку (4.127) маємо

$$\varPi Q_3(x)\varPi\varphi(v,w) = \varPi[(aC^1(x) + \frac{1}{2}g(x))v + a\sqrt{t}wC^1(x)]Q_0\varPi\varphi'_v(v,w) +$$

$$+\frac{a^2}{2t}\varPi C_0^2(x)Q_0\varPi\varphi''_w(v,w) =$$

$$= [(ac_1q + \frac{1}{2})v + aq\sqrt{t}wc_1]\varphi'_v(v,w) + \frac{a^2}{2t}\varPi q(x)C_0^2(x)\varphi''_w(v,w), \tag{4.135}$$

де

$$c_1 = \int_X \rho(dx) C^1(x).$$

Використовуючи представлення (4.134) та (4.135) в (4.127), отримуємо (4.104). Відзначимо, що як і в попередніх теоремах РПСЗ для зрізаного оператора визначає граничний оператор повного генератора ПСА.

Використання модельної граничної теореми [3] обґрунтовує твердження нашої теореми.

РОЗДІЛ 5
ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В СХЕМІ УСЕРЕДНЕННЯ ТА ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

У цьому розділі ми розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації в схемі усереднення в випадку безпосередньої залежності функції регресії від марковського переключаючого процесу, такої, що задовольняє умові Ліпшиця. Буде встановлено достатні умови збіжності процедури до точки екстремуму в термінах властивостей функції Ляпунова чисто градієнтної усередненої системи за стаціонарним розподілом марковського процесу. Встановлено асимптотичну нормальність одновимірної процедури стохастичної оптимізації, що описується процесом Орнштейна-Уленбека. Отримано достатні умови збіжності процедури стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням, що визначається сімейством процесів з незалежними приростами в умовах глобального балансу на перші моменти приростів таких процесів.

5.1. Процедура стохастичної оптимізації у схемі усереднення.

5.1.1. Збіжність процедури стохастичної оптимізації.

В даному підрозділі досліджена неперервна процедура стохастичної оптимізації пошуку точки максимуму $u_0 \in R^d$ функції регресії $C(u, x)$, що безпосередньо залежить від впливу зовнішнього середовища з марковськими переключеннями. Доведено збіжність запропонованої процедури в схемі серій, використовуючи властивості генератор двокомпонентного марковського процесу ПСО та його асимптотичне представлення на збуреній функції Ляпунова.

Нехай $C(u, x), u \in R^d$, — функція регресії, яка досягає єдиного максимуму в точці $u_0, u_0 \in R^d$. Друга компонента x функції регресії характеризує вплив зовнішніх факторів, які описуються рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t), t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі станів $(X, \mathbf{X})$. Генератор марковського процесу визначається співвідношенням:

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right],$$

на банаховому просторі $\mathbf{B}(X)$ дійснозначних обмежених неперервних функцій $\varphi(x), x \in X$, з нормою

$$\|\varphi(x)\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|,$$

де $P(x, B), x \in X, B \in \mathbf{X}$ — стохастичне ядро [7], $q(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = E\theta_x$, θ_x – час перебування марковського процесу в стані x.

Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \mathbf{X}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0$ визначається співвідношеннями

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

де $\rho(dx)$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова. Для генератора Q марковського процесу $x(t), t \geq 0$, визначений потенціал

$$R_0 = \Pi - (\Pi + Q)^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int\limits_X \pi(dx)\varphi(x)$ — проектор на підпростір нулів оператора Q: $N_Q = \{\varphi : Q\varphi = 0\}$ [7].

Неперервна процедура стохастичної оптимізації функції регресії $C(u, x)$ в ергодичному марковському середовищі задається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)\nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))dt, \tag{5.1}$$

де

$$\nabla_{b(t)}C(u, x) = \Big\{C(u_i^+, x) - C(u_i^-, x)2b(t), i \in \overline{1, d}\Big\},$$

$$u_i^\pm = u_i \pm b(t)e_i, i = \overline{1, d}, e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

Для усередненої функції регресії

$$C(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u, x)$$

розглянемо ґрадієнтну еволюційну систему

$$\frac{du}{dt} = \operatorname{grad} C(u), \operatorname{grad} C(u) = \Big\{\partial C(u)\partial u_i, i \in \overline{1, d}\Big\}. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1.1. *Нехай існує функція Ляпунова $V(u), u \in R^d$, для усередненої системи (5.2) така, що задовольняє умови*

C1(експоненційна стійкість еволюційної системи (5.2))

$$C'(u)V'(u) \leq -c_0V(u), c_0 > 0;$$

$C2|V'(u)| \leq c_1(1 + V(u)), c_1 > 0;$
$C3|\nabla_{b(t)}C(u, x)R_0[\nabla_{b(t)}\tilde{C}(u, x)V'(u)]'| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,$

$$\tilde{C}(u, x) := C(u, x) - C(u).$$

Функція регресії $C(u, x)$ по еволюції и задовільняє глобальну умову Ліпшиця

$C4|\nabla_{b(t)}C(u) - C'(u)| \leq c_3b(t), c_3 > 0.$

Функції $a(t), b(t), t \geq 0$ задовольняють умови збіжності процедури стохастичної оптимізації:

C5:
$$\int\limits_0^{+\infty} a(t)dt = \infty, \int\limits_0^{+\infty} a(t)b(t)dt < \infty, a(t) > 0, b(t) > 0.$$

Тоді для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) \in R^d$ процедура стохастичної оптимізації (5.1) при довільних $\varepsilon \le \varepsilon_0$,
ε_0 – достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки максимуму u_0.

Теорема 5.1.2. *Нехай існує функція Ляпунова $V(u), u \in R^d$, для усередненої системи (5.2) така, що задовольняє умови*

C1(експоненційна стійкість еволюційної системи (5.2))

$$C'(u)V'(u) \le -c_0V(u), c_0 > 0;$$

C2$|V'(u)| \le c_1(1 + V(u)), c_1 > 0;$
C3$|\nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[\nabla_{b(t)}\tilde{C}(u,x)V'(u)]'| \le c_2(1 + V(u)), c_2 > 0$,
$\tilde{C}(u,x) := C(u,x) - C(u).$

Функція регресії $C(u,x)$ по еволюції u задовільняє глобальну умову Ліпшица

C4$|\nabla_{b(t)}C(u) - C'(u)| \le c_3b^2(t), c_3 > 0.$

Функції $a(t), b(t), t \ge 0$ задовольняють умови збіжності процедури стохастичної оптимізації

C5:
$$\int\limits_0^{+\infty} a(t)dt = \infty, \int\limits_0^{+\infty} a(t)b^2(t)dt < \infty, a(t) > 0, b(t) > 0.$$

Тоді для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) \in R^d$ процедура стохастичної оптимізації (1.1) при довільних $\varepsilon \le \varepsilon_0$,
ε_0 – достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки максимуму u_0.

Для доведення теореми 5.1.1 спочатку побудуємо генератор процедури стохастичної оптимізації та розглянемо його асимптотичне представлення.

Лема 5.1.1. *Генератор двокомпонентного марковського процесу*

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon), t \ge 0 \tag{5.3}$$

на банаховому просторі $\boldsymbol{B}(R^d, X)$ дійснозначних функцій
$\varphi(u,x) \in C^{2,0}(R^d, X)$ має вигляд $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + a(t)\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(u)\varphi(u,x)$,
де
$$\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(u)\varphi(u,x) = \nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x).$$

Доведення. Розглянемо умовне математичне сподівання тест-функцій $\varphi(u,x) \in C^{2,0}(R^d, X)$

$$E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x^\varepsilon_{t+\Delta})\,|u^\varepsilon(t)=u, x^\varepsilon_t = x\,] =$$

$$E_{u,x}\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x^\varepsilon_{t+\Delta}) =$$

$$= E_{u,x}\varphi(u + \int\limits_t^{t+\Delta} a(s)\nabla_{b(s)}C(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon))ds, x)I(\theta > \varepsilon^{-1}\Delta) +$$

$$+E_{u,x}\varphi(u + \int\limits_t^{t+\Delta} a(s)\nabla_{b(s)}C(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon))ds, x^\varepsilon_{t+\Delta})I(\theta \leq \varepsilon^{-1}\Delta) +$$

$$+o(\Delta).$$

Функція розподілу часу перебування θ_x в стані x має показниковий розподіл, тобто мають місце розклади

$$I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta) = e^{-\varepsilon^{-1}q(x)\Delta} = 1 - \varepsilon^{-1}q(x)\Delta + o(\Delta),$$

та

$$I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1}\Delta) = 1 - e^{-\varepsilon^{-1}q(x)\Delta} = \varepsilon^{-1}q(x)\Delta + o(\Delta),$$

де $q(x)$ – інтенсивність.

За формулою Тейлора для тест-функції $\varphi(u,x) \in C^{2,0}(R^d, X)$ отримуємо

$$\varphi(u + \int\limits_t^{t+\Delta} a(s)\nabla_{b(s)}C(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon))ds, x) =$$

$$= \varphi(u,x) + \varphi'_u(u,x) \int\limits_t^{t+\Delta} a(s)\nabla_{b(s)}C(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon))ds =$$

$$= \varphi(u,x) + \nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x)a(t)\Delta + o(\Delta).$$

Отже

$$E_{u,x}[\varphi(u,x) + a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta][1 - \varepsilon^{-1}q(x)\Delta + o(\Delta)] +$$

$$+E_{u,x}[\varphi(u,x^\varepsilon_{t+\Delta})+a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x^\varepsilon_{t+\Delta})\Delta][\varepsilon^{-1}q(x)\Delta+o(\Delta)]=$$

$$=\varphi(u,x)+a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta-\varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x}\varphi(u,x)\Delta-$$

$$-\varepsilon^{-1}q(x)(a(t)E_{u,x}\nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta^2)+o(\Delta)+$$

$$+\varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x}\varphi(u,x^\varepsilon_{t+\Delta})\Delta+o(\Delta)=$$

$$=\varphi(u,x)+a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta+$$

$$+\varepsilon^{-1}q(x)\Delta\int_X P(x,dy)[\varphi(u,y)-\varphi(u,x)]+o(\Delta). \qquad (5.4)$$

З (5.4) отримуємо генератор марковського процесу (5.3)

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_t\varphi(u,x)=$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}(\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta),x^\varepsilon_{t+\Delta})-\varphi(u,x))=$$

$$=\varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x)+a(t)\nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x).$$

Нехай збурена функція Ляпунова має вигляд

$$V^\varepsilon(u,x)=V(u)+\varepsilon a(t)V_1(u,x), \qquad (5.5)$$

де $V(u)\in C^3(R^d)$ – функція Ляпунова усередненої системи (5.2).

Лема 5.1.2. *Генератор $\boldsymbol{L}^\varepsilon_t$ на збуреній функції Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$ має асимптотичне представлення:*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_t V^\varepsilon(u,x)=a(t)\boldsymbol{L}V(u)+\varepsilon a^2(t)\Theta_t(x)V(u),$$

де граничний генератор

$$\boldsymbol{L}V(u)=\nabla_{b(t)}C(u)V'(u),$$

а залишковий член

$$\Theta_t(x)V(u)=\nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[\nabla_{b(t)}\tilde{C}(u,x)V'(u)]'.$$

Доведення. Генератор $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ на збуреній функцію Ляпунова (1.2) має представлення

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) =$$

$$= \left[\varepsilon^{-1} Q + a(t) \nabla_{b(t)} \boldsymbol{C}(x)\right] \left[V(u) + \varepsilon a(t) V_1(u,x)\right] =$$

$$= \varepsilon^{-1} Q V(u) + a(t) Q V_1(u,x) + a(t) \nabla_{b(t)} \boldsymbol{C}(x) V(u) +$$

$$+ \varepsilon a^2(t) \nabla_{b(t)} \boldsymbol{C}(x) V_1(u,x). \tag{5.6}$$

Враховуючи умови розв'язності $QV(u) = 0$ проблеми сингулярного збурення (5.6), отримуємо a(t) Q V$_1(u,x) + a(t)\nabla_{b(t)} \boldsymbol{C}(x) V(u) =$
$= a(t)\Big[QV_1(u,x) + \nabla_{b(t)} \boldsymbol{C}(x) V(u)\Big] =$
$= a(t)\boldsymbol{L}V(u)$, де граничний оператор $\boldsymbol{L}$ має представлення

$$\boldsymbol{L}V(u) = \nabla_{b(t)} C(u) V'(u).$$

Отже для збурення $V_1(u,x)$ маємо

$$V_1 = R_0 \nabla_{b(t)} \tilde{C}(u,x) V(u).$$

Звідси для залишкового члена з (5.6) отримуємо

$$\varepsilon a^2(t) \nabla_{b(t)} \mathbf{C}(x) V_1(u,x) =$$

$$= \varepsilon a^2(t) \nabla_{b(t)} \mathbf{C}(x) \left[R_0 \nabla_{b(t)} \tilde{C}(x) V(u)\right] =$$

$$= \varepsilon a^2(t) \nabla_{b(t)} C(u,x) R_0 \left[\nabla_{b(t)} \tilde{C}(u,x) V'(u)\right]'.$$

Таким чином, залишковий член має вигляд

$$\theta_t(x) V(u) = \nabla_{b(t)} C(u,x) R_0 \left[\nabla_{b(t)} \tilde{C}(u,x) V'(u)\right]'.$$

Отже,

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) = a(t) \boldsymbol{L} V(u) + \varepsilon a^2(t) \Theta_t(x) V(u).$$

Доведення теорем.
З умови $C1$ теореми маємо оцінку

$$\nabla_{b(t)} C(u) V'(u) \leq -c_0 V(u) - [C'(u) - \nabla_{b(t)} C(u)] V'(u),$$

а з умов C2-C5 отримуємо обмеженість залишкового члена
$\theta_t(x)V(u)$ у вигляді

$$|\theta_t(x)V(u)| \le c(1+V(u)).$$

Тоді

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) \le -a(t)c_0V(u) + \varepsilon(a^2(t)c_4 - \\ -c_5a(t)b(t))(1+V(u)). \tag{5.7}$$

З (5.7) та теореми про збіжність процедури стохастичної апроксимації Невельсона-Хасьмінського ([2] теорема 1.2) отримаємо твердження теореми 5.1.1.

Доведення теореми 5.1.2 проводимо за схемою доведення теореми 5.1.1 з урахуванням умов $C4$ і $C5$ теореми 5.1.2, а саме оцінки

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) \le -a(t)c_0V(u) + \varepsilon(a^2(t)c_4 -$$

$$-c_5a(t)b^2(t))(1+V(u)).$$

Асимптотична нормальність процедури стохастичної оптимізації.

Далі ми розглянемо асимптотичну нормальність одновимірної процедури стохастичної оптимізації з марковськими переключеннями функції регресії в класичній схемі нормування по часу та по малому параметру.

Нехай $C(u,x)$, $u \in R$, – функція регресії, що досягає єдиного максимуму в точці u_0, $u_0 \in R$. Компонента x характеризує вплив зовнішніх факторів, які описуються рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t)$, $t \ge 0$ у вимірному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$ [7]. Генератор МП задається співвідношенням:

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right],$$

де $P(x,B), x \in X, B \in X$ – стохастичне ядро.

Розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації пошуку точки u_0 в схемі усереднення, що задається еволюційним диференціальним рівнянням:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)\nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)) \tag{5.8}$$

де

$$\nabla_{b(t)}C(u,x) = \frac{C(u+b(t),x) - C(u-b(t),x)}{2b(t)},$$

з нормуючуми функціями

$$b(t) = \frac{b}{\sqrt{t}},\ b > 0$$

та

$$a(t) = \frac{a}{t},\ a > 0.$$

Асимптотична нормальність ПСО досліджується в умовах експоненційної стійкості усередненої системи

$$\frac{du}{dt} = C'(u), \tag{5.9}$$

де

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$$

усереднена функція регресії за стаціонарним розподілом $\pi(B), \ B \in X$.

Нехай виконуються умови збіжністості ПСО в схемі усереднення до точки u_0 рівноваги усередненої системи (5.9).

Нормована ПСО має вигляд

$$v^\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{t}u^\varepsilon(t)}{\varepsilon}. \tag{5.10}$$

Теорема 5.1.3. *Нехай функція регресії $C(u,\cdot) \in C^3(R)$ та виконуються додаткові умови:*

$$\begin{aligned} &C1: \ \ \rho^2 := 2\int\limits_X \pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x) > 0;\\ &C2: \ \ C_2 := \int\limits_X \pi(dx)C''(0,x) < 0;\\ &C3: \ \ b := aC_2 + \tfrac{1}{2} < 0.\end{aligned}$$

Тоді нормована ПСО (5.10) слабо збігається $v^\varepsilon(t) \to \varsigma(t) \ \forall \ (t_0, t] \subset (0, T]$ при $\varepsilon \to 0$, $T > 0$, де $\varsigma(t), \quad t \geq 0$, - процес Орнштейна-Уленбека з генератором

$$L\varphi(v) = bv\varphi'(v) + \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(v)$$

та дисперсією $\sigma^2 = a^2\rho^2$.

Висновок 5.1.1. Граничний процес Орнштейна-Уленбека $\varsigma(t)$ є ергодичним зі стаціонарним нормальним розподілом $N(0, \sigma_0^2)$,

$$\sigma_0^2 = -\frac{\sigma^2}{2b}.$$

Висновок 5.1.2. Умова $C1$ визначає дифузійність процесу $\zeta(t)$, а умова $C3$- ергодичність.

Доведення теореми 5.1.3 базується на наступних лемах.

Лема 5.1.3. *Нормована ПСО (5.10) є розв'язком диференціального рівняння:*

$$\frac{dv^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C\left(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}, x\right) + \frac{1}{2t}v. \tag{5.11}$$

Доведення. Оскільки,

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}u^\varepsilon(t)/\varepsilon,$$

то

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon v^\varepsilon(t)t^{-1/2}.$$

Продиференціюємо останню рівність по t,

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon(-\frac{1}{2})t^{-3/2}v^\varepsilon(t) + \varepsilon t^{-1/2}\frac{dv^\varepsilon(t)}{dt}. \tag{5.12}$$

Прирівняємо праві частини рівностей (5.12) та (5.10),

$$\varepsilon(-\frac{1}{2})t^{-3/2}v^\varepsilon(t) + \varepsilon t^{-1/2}\frac{dv^\varepsilon(t)}{dt} = \frac{a}{t}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon v^\varepsilon(t)/\sqrt{t}, x_t^\varepsilon). \tag{5.13}$$

Виконаємо елементарні перетворення (5.13),

$$\frac{dv^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}\left[\frac{a}{t}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon v^\varepsilon(t)/\sqrt{t}, x_t^\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon t^{-3/2}v^\varepsilon(t)\right] =$$

$$= \frac{a}{\varepsilon\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\frac{\varepsilon v^\varepsilon(t)}{\sqrt{t}}, x_t^\varepsilon) + \frac{1}{2t}v^\varepsilon(t).$$

Отже, має місце (5.11).

Лема 5.1.4. *Генератор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ двокомпонентного марковського процесу $v^\varepsilon(t)$, $x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2), t \geq 0$, на банаховому просторі $B(R, X)$ дійснозначних функцій $\varphi(v, x) \in C^2(R^d, X)$, визначається співвідношенням:*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v, x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(v, x) + \boldsymbol{C}_t(x)\varphi(v, x), \tag{5.14}$$

де

$$\boldsymbol{C}_t(x)\varphi(v, x) = [\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}, x) + \frac{1}{2t}v]\varphi'(v, x). \tag{5.15}$$

Доведення. Згідно означення породжуючого оператора марковського процесу:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(v, x) = \lim_{\varDelta\to 0}\varDelta^{-1}[E_{v,x}\varphi(v^\varepsilon + \varDelta v^\varepsilon, x_{t+\varDelta}^\varepsilon) -$$

$$-\varphi(v, x)|v^\varepsilon(t) = v, x_{t+\varDelta}^\varepsilon = x] =$$

$$= \lim_{\varDelta\to 0}\varDelta^{-1}E_{v,x}[\varphi(v + \varDelta v, x_{t+\varDelta}^\varepsilon) - \varphi(v, x)].$$

Для першого доданку має місце розклад

$$E_{v,x}[\varphi(v + \varDelta v, x_{t+\varDelta})] = E_{v,x}\varphi(v, x_{t+\varDelta}) +$$

$$+E_{v,x}[\varphi(v + \varDelta v, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, x_{t+\varDelta})].$$

Враховуючи розподіл часу θ_x перебування МП $x(t), t \geq 0$, в стані x маємо

$$E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v, x_{t+\Delta})] = E_{v,x}\varphi(v, x_{t+\Delta}) + E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v, x) -$$

$$-\varphi(v,x)]I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta) + E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v, x_{t+\Delta}) -$$

$$-\varphi(v, x_{t+\Delta})]I(\theta_x \leq \varepsilon^{-2}\Delta).$$

Для неперервної по v функції $\varphi(v,x)$отримуємо:

$$E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, x_{t+\Delta})]I(\theta_x \leq \varepsilon^{-2}\Delta) = o(\Delta).$$

Аналогічно:

$$E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v, x) - \varphi(v,x)]I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta) =$$

$$= E_{v,x}[\varphi'(v,x)[\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_b C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}, x) + \frac{1}{2t}v]\Delta -$$

$$-\varepsilon^{-2}q(x)\varphi'(v,x)\frac{a}{\varepsilon\sqrt{t}}\nabla_b C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}, x)\Delta^2 + o(\Delta)].$$

Отже, генератор набуде вигляду

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}\{E_{v,x}[\varphi(v, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,x)] +$$

$$+E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, x_{t+\Delta})]\} =$$

$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x) + [\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_{b(t)}C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}, x) + \frac{1}{2t}v]\varphi'(v,x),$$

оскільки

$$E_{v,x}[\varphi(v, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,x)] =$$

$$= E_{v,x}[\varphi(v, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,x)][I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta) + I(\theta_x \leq \varepsilon^{-2}\Delta] =$$

$$= E_{v,x}[\varphi(v, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,x)][\varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta)] =$$

$$= \varepsilon^{-2}q(x)E_{(v,x)}[\varphi(v, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,x)]\Delta + o(\Delta).$$

Лема 5.1.5. *Генератор* $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ *на тест-функціях* $\varphi(v,\cdot) \in C^2(R)$ *для* $C(u,\cdot) \in C^3(R)$, *має аналітичне представлення:*

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon\varphi(v,x) &= \varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x) + \varepsilon^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{t}}Q_1(x)\varphi(v,x) + \\ &+ \tfrac{1}{t}Q_2(x)\varphi(v,x) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon\varphi(v), \end{aligned} \tag{5.16}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v,x) = aC'(0,x)\varphi'(v,x),$$

$$Q_2(x)\varphi(v,x) = v(aC''(0,x) + \frac{1}{2})\varphi'(v,x),$$

а залишковий член

$$\theta_t^\varepsilon \varphi(v) = \frac{1}{t\sqrt{t}}[Q_1(x)\varphi_2(v,x) + Q_2(x)\varphi_1(v,x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}Q_2(x)\varphi_2(v,x)].$$

Доведення. Розглянемо функцію $\nabla_{b(t)}C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}},x)$. Оскільки $C(u,\cdot) \in C^3(R)$, то її можна розкласти в ряд Тейлора в околі нуля:

$$\nabla_{b(t)}C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}},x) = C'(0,x) + \varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}C''(0,x) + o(\varepsilon^2). \qquad (5.17)$$

Підставимо (5.17) у (5.15) та проведемо перетворення

$$\mathbf{C}_t(x)\varphi(v,x) = [\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}[C'(0,x) + \varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}C''(0,x)] + \frac{1}{2t}v]\varphi'(v,x) +$$

$$+o(\varepsilon^2) =$$

$$= [\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C'(0,x) + \frac{av}{\sqrt{t}}C''(0,x) + \frac{1}{2t}v]\varphi'(v,x) + o(\varepsilon^2).$$

Тоді, генератор (5.14) з врахуванням останнього і позначень операторів $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ та залишкового члена

$$\theta_t^\varepsilon \varphi(v) = \frac{1}{t\sqrt{t}}[Q_1(x)\varphi_2(v,x) + Q_2(x)\varphi_1(v,x) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}Q_2(x)\varphi_2(v,x)] + o(\varepsilon^2)$$

набуде вигляду (5.16).

Розглянемо тест-функції виду

$$\varphi^\varepsilon(v,x) = \varphi(v) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x) + \frac{\varepsilon^2}{t}\varphi_2(v,x), \varphi(v) \in C^3(R).$$

Лема 5.1.6. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(v,x)$ має вигляд:*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,x) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v),$$

де $\boldsymbol{L}_t$*- граничний генератор вигляду:*

$$\boldsymbol{L}_t\varphi(v) = v(aC_2 + \frac{1}{2})\varphi'(v) + \frac{a^2\rho^2}{2}\varphi''(v),$$

$$C_2 = \int\limits_X \pi(dx)C''(0,x), \rho^2 = 2\int\limits_X \pi(dx)C'(0,x)R_0C'(0,x),$$

а залишковий член обмежений:

$$\|\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)\| \le M < \infty.$$

Доведення. Розглянемо дію зрізаного генератора

$$\hat{\boldsymbol{L}}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{t}}Q_1(x) + \frac{1}{t}Q_2(x)$$

на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(v,x)$. Отже, отримаємо:

$$\hat{\boldsymbol{L}}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi + \frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{t}}[Q\varphi_1 + Q_1(x)\varphi] +$$

$$+\frac{1}{t}[Q\varphi_2 + Q_1(x)\varphi_1 + Q_2(x)\varphi] +$$

$$+\frac{\varepsilon}{t\sqrt{t}}[Q_1(x)\varphi_2 + Q_2(x)\varphi_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}Q_2(x)\varphi_2]. \tag{5.18}$$

Оскільки оператор Q діє тільки по змінній x, то для першого доданку в (1.18) маємо $Q\varphi \equiv 0$. Використаємо умову балансу

$$\int\limits_X \pi(dx)Q_1(x) = 0,$$

оскільки $\int\limits_X \pi(dx)C'(0,x) = C'(0) = 0$, та додаткову умову $\Pi\varphi_1 = 0$. Тоді для другого доданку в (5.18) маємо:

$$Q\varphi_1 + Q_1(x)\varphi = 0.$$

Звідси, отримаємо вигляд функції $\varphi_1(v,x)$:

$$\varphi_1(v,x) = R_0Q_1(x)\varphi(v) = aR_0C'(0,x)\varphi'(v).$$

Використаємо другу умову розв'язності проблеми сингулярного збурення та додаткову умову $\Pi\varphi(v) = 0$.

Для третього доданку маємо

$$Q\varphi_2(v,x) + L_t(x)\varphi(v) = L_t\varphi(v), \tag{5.19}$$

де

$$L_t(x)\varphi(v) = Q_1(x)\varphi_1(v,x) + Q_2(x)\varphi(v),$$

а $L_t = \Pi L_t(x)$.

З (5.19) отримуємо представлення для $\varphi_2(v,x)$

$$\varphi_2(v,x) = R_0\tilde{L}_t\varphi(v), \tag{5.20}$$

де

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_t = \boldsymbol{L}_t(x) - \boldsymbol{L}_t.$$

З представлення $\varphi_1(v,x)$, $Q_1(x)$ та $Q_2(x)$маємо

$$\boldsymbol{L}_t(x)\varphi(v) = a^2C'(0,x)R_0C'(0,x)\varphi''_v(v) + v(aC''(0,x) + \frac{1}{2}]\varphi'_v(v).$$

З останнього та представлення $\varphi_2(v,x)$ отримуємо твердження Леми 5.1.6.

Доведення теореми 5.1.3.

Використовуючи твердження – Леми 5.1.6 легко перевірити виконання умов Модельної граничної теореми, тобто має місце слабка збіжність $v^\varepsilon(t) \to \zeta(t)$, при $\varepsilon \to 0$.

5.1.2. Процедура стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням.

Однією з проблем системного аналізу складних систем за умов невизначеності, що описується марковським процесом, є встановлення збіжності процедур стохастичної оптимізації (ПСО) в випадку безпосереднього впливу функції регресії від такого процесу. Багаточисельні приклади застосування таких процедур та їх модифікацій в теорії керування, теорії передачі повідомлень, при розв'язку непараметричних задач математичної статистики, зокрема при встановленні найкращих значень параметрів асимптотично нормального розподілу процедури стохастичної оптимізації, визначають важливість встановлення нових узагальнень та властивостей ПСО.

Різницева процедура стохастичної оптимізації в ергодичному марковському середовищі з імпульсним збуренням задається еволюційним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)[\nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon d\eta^\varepsilon(t)], \tag{5.21}$$

де $C(u,\cdot) \in C^3(R)$.

Марковський процес $x(t), t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається генератором:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad \varphi \in \mathbf{B}(X),$$

де $\mathbf{B}(X)$ - банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум - нормою $||\varphi|| = \max_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x, B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$ із стаціонарним розподілом $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0$ визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \;\; q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Потенціальний оператор R_0 генератора $\mathbf{Q}$ визначається співвідношенням: $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$,
де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)$ - проектор на підпростір
$N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ задається співвідношеннями:

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^2));$$

де сімейство процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$ задається генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon_w(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int_R [\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)] \mathit{\Gamma}(dv; x), x \in X. \tag{5.22}$$

Нехай при цьому виконується умова балансу

$$\Pi \mathbf{\Gamma_1}(x) = \int_X \pi(dx) b_1(x) = 0, b_1(x) = \int_R v \mathit{\Gamma}(dv; x). \tag{5.23}$$

Розглянемо також генератор $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon_u(x)$, аналогічний (5.3), проте діє по першому параметру функції $\varphi(u, w, x)$ (в той час, як $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon_w(x)$ діє по другому). Тобто

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon_u(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-2} \int_R [\varphi(u + \varepsilon v, w, x) - \varphi(u, w, x)] \mathit{\Gamma}(dv; x), \tag{5.24}$$

$x \in X$.

Усереднена система

$$\frac{du}{dt} = C'(u), C(u) = \int_X \pi(dx) C(u; x). \tag{5.25}$$

Теорема 5.1.4. *Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R)$, що забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (5.25):*

$$C1 : C'(u)V'(u) \leq -cV(u), c > 0, \tag{5.26}$$

а також додаткові умови

$$\begin{array}{l}
C2 : |\mathbf{\Gamma_2}(x)V(u)| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,\\
C3 : |\gamma^\varepsilon(x)V(u)| \leq c_3(1 + V(u)), c_3 > 0,\\
C4 : |\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)V(u)| \leq c_4(1 + V(u)), c_4 > 0,\\
C5 : |\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\tilde{\mathbf{C}}(x)V(u)| \leq c_5(1 + V(u)), c_5 > 0,\\
C6 : |\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)V(u)| \leq c_6(1 + V(u)), c_6 > 0,\\
C7 : |\mathbf{C}(x)R_0\tilde{\mathbf{C}}(x)V(u)| \leq c_7(1 + V(u)), c_7 > 0,\\
C8 : |\mathbf{\Gamma_2}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)V(u)| \leq c_8(1 + V(u)), c_8 > 0,\\
C9 : |\mathbf{\Gamma_2}(x)R_0\tilde{\mathbf{C}}(x)V(u)| \leq c_9(1 + V(u)), c_9 > 0,\\
C10 : |\gamma^\varepsilon(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)V(u)| \leq c_{10}(1 + V(u)), c_{10} > 0,\\
C11 : |\gamma^\varepsilon(x)R_0\tilde{\mathbf{C}}(x)V(u)| \leq c_{11}(1 + V(u)), c_{11} > 0,\\
C12 :| \ (\nabla_{b(t)}C(u) - C'(u))V'(u) \ |\leq c_1 b(t)(1 + V(u)),
\end{array} \tag{5.27}$$

де

$$\tilde{\mathbf{C}}(x) = \mathbf{C}(x) - \mathbf{L}.$$

Крім того, нехай функція $C(u, x)$ має перші дві похідні по $u \in R$ і разом з функціями $b_1(x)$ та $b_2(x)$ є рівномірно обмеженими по $x \in X$.

Також нехай виконується умова балансу (5.23). Нехай керуюча функція $a(t) > 0$ вибрана так, що виконуються умови

$$\int\limits_0^\infty a(t)dt = \infty, \quad \int\limits_0^\infty a^2(t)dt < \infty, \int\limits_0^\infty a(t)b(t)dt < \infty$$

Тоді для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 - достатньо малому, розв'язок еволюційного рівняння (5.21), при усіх початкових умовах $u^\varepsilon(0) = u$ з імовірністю 1 збігаються до точки мінімуму $u_0 = 0$ усередненої системи (5.22):

$$P\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

Доведемо декілька лем.

Лема 5.1.7. *Генератори сімейства процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$ на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(R)$ допускають асимптотичне представлення:*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon_w(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{5.28}$$

де

$$\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w); \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w); \quad b_2(x) = \int_R v^2 \mathit{\Gamma}(dv;x),$$

а залишковий член такий, що $||\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)|| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$; $\varphi(w) \in C^3(R)$.

Доведення. Використовуючи розклад функції $\varphi(w)$ в ряд Тейлора, проведемо перетворення генератора:

$$\mathbf{\Gamma}_w^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w+\varepsilon v) - \varphi(w)]\mathit{\Gamma}(dv;x) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\int_R [\varphi(w+\varepsilon v) - \varphi(w) - \varepsilon v\varphi'(w) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^2\varphi''(w)]\mathit{\Gamma}(dv;x) +$$

$$+\varepsilon^{-1}b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1}b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w).$$

Зважаючи на те, що $\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = O(\varepsilon)$, $\varphi(w) \in C^3(R)$ отримуємо очікуване представлення.

Лема 5.1.8. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $\eta^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $t \geq 0$, *має вигляд:*

$$\begin{aligned}\hat{\mathit{\Gamma}}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(w,x) +\\ +\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(w,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x),\end{aligned} \tag{5.29}$$

де оператори $\mathbf{\Gamma}_1(x)$, $\mathbf{\Gamma}_2(x)$ *визначаються в лемі 5.1.7, а залишковий член такий, що* $||\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)|| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varphi(w,\cdot) \in C^3(R)$.

Доведення. Доведення проводиться з використанням означення генератора марковського процесу та вигляду відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t)$ та $x(t/\varepsilon^2)$.

Зрізаний оператор має вигляд:

$$\mathbf{\Gamma}_0^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w,x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w,x). \tag{5.30}$$

Лема 5.1.9. *За умови балансу (5.23) розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (5.30) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(w,x)$$

реалізується співвідношенням:

$$\mathbf{\Gamma}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w) + \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{5.31}$$

де залишковий член $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ *рівномірно обмежений по* x.

Граничний оператор $\mathbf{\Gamma}$ *визначається формулою:*

$$\mathbf{\Gamma}\Pi\varphi(w) = \Pi\mathbf{\Gamma_2}(x)\Pi\varphi(w) + \Pi\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\Pi\varphi(w). \qquad (5.32)$$

Доведення. Для виконання рівності (5.31) необхідно щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа співпадали. Обчислимо:

$$\mathbf{\Gamma}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w) + \varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w)] +$$

$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w)] +$$
$$+\varepsilon[\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi_1(w,x) + \varepsilon\mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi_2(w,x)].$$

Оскільки $\varphi(w)$ не залежиить від x то

$$\mathbf{Q}\varphi(w) = 0, \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_{\mathbf{Q}}.$$

Умова балансу (5.23) є умовою розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) = 0.$$

Тому

$$\varphi_1(w,x) = R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w). \qquad (5.33)$$

Рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_1(w,x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w)$$

з використанням (5.33) можна звести до вигляду

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w)$$

Умова розв'язності останнього рівняння і дає граничний оператор $\mathbf{\Gamma}$ в формі (5.32).

Тоді

$$\varphi_2(w,x) = R_0[\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x) - \mathbf{\Gamma}]\varphi(w). \qquad (5.34)$$

Використовуючи (5.33) та (5.34), залишковий член набуде потрібного вигляду.

Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon\varphi(w)$ випливає з властивостей генераторів $\mathbf{\Gamma_1}(x)$, $\mathbf{\Gamma_2}(x)$ та R_0.

Завершення доведення теореми.

Проводиться з використанням результатів Леми 5.1.3 та граничної модельної теореми Королюка В.С. [3].

Розглянемо двокомпонентний марковський процес

$$u^\varepsilon(t),\ x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2),\ t \geq 0. \qquad (5.35)$$

Оскільки ПСО $u^\varepsilon(t)$ залежить від керуючої функції $a(t)$, то цей процес є неоднорідним в часі.

Лема 5.1.10. *Генератор двохкомпонентного марковського процесу* $u^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $t \geq 0$ *має вигляд:*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u,x) + \varepsilon a(t)\mathbf{\Gamma}_u^\varepsilon(x)\varphi(u,x) + a(t)\mathbf{C}^\nabla(x)\varphi(u,x), \tag{5.36}$$

де $\mathbf{C}^\nabla(x)\varphi(u,x) = \nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'_u(u,x)$,

Доведення. Введемо позначення $u^\varepsilon(t) = u_t$, $x(t/\varepsilon^2) = x_t$. Тоді згідно означення генератора марковського процесу

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u^\varepsilon(t+\varDelta), x((t+\varDelta)/\varepsilon^2))-$$

$$-\varphi(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)|u^\varepsilon(t) = u, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= \lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(u,x)] =$$

$$= \lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(u, x_{t+\varDelta})]+$$

$$+\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u, x_{t+\varDelta}) - \varphi(u,x)] \tag{5.37}$$

Оскільки має місце представлення:

$$u(t+\varDelta) = u + a(t)\nabla_b C(u,x)\varDelta + \varepsilon a(t)\varDelta\eta^\varepsilon(t) + o(\varDelta),$$

то для першого доданку з (5.37) маємо

$$\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(u, x_{t+\varDelta})] =$$

$$= \lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u + a(t)\nabla_b C(u,x)\varDelta+$$

$$+\varepsilon a(t)\varDelta\eta^\varepsilon(t) + o(\varDelta), x_{t+\varDelta}) - \varphi(u, x_{t+\varDelta})]$$

Використовуючи доданок

$$\pm\varphi(u + a(t)\nabla_b C(u,x)\varDelta + o(\varDelta), x_{t+\varDelta}),$$

з останнього отримуємо:

$$\lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(u, x_{t+\varDelta})] =$$

$$= \lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta}E[\varphi(u + a(t)\nabla_b C(u,x)\varDelta + \varepsilon a(t)\varDelta\eta^\varepsilon(t) + o(\varDelta), x_{t+\varDelta})-$$

$$-\varphi(u + a(t)\nabla_b C(u,x)\varDelta + o(\varDelta), x_{t+\varDelta})]+$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u+a(t)\nabla_b C(u,x)\Delta+o(\Delta),x_{t+\Delta})-\varphi(u,x_{t+\Delta})].$$

Оскільки, згідно означення генератора $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)$:

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u+\Delta\eta^\varepsilon(t))-\varphi(u)],$$

і провівши заміну: $v=u+a(t)\nabla_b C(u,x)\Delta+o(\Delta)$ (Зауважимо, що $v\to u$ при $\Delta\to 0$), одержимо наступний вигляд для першої границі:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v+\varepsilon a(t)\Delta\eta^\varepsilon(t),x_{t+\Delta})-$$

$$-\varphi(v,x_{t+\Delta})]=\varepsilon a(t)\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(u,x).$$

Після перетворень друга границя набуде вигляду:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u+a(t)\nabla_b C(u,x)\Delta,x_{t+\Delta})-\varphi(u,x_{t+\Delta})]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi'_u(u,x_{t+\Delta})(a(t)\nabla_b C(u,x)\Delta+o(\Delta))]=$$

$$=a(t)C(u,x)\varphi'_u(u,x).$$

Скориставшись означенням генератора марковського процесу $x(t/\varepsilon^2)$:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u,x_{t+\Delta})-\varphi(u,x)]=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u,x),$$

і просумувавши одержані границі, отримаємо (5.36).

Лема 5.1.11. *Генератор* $\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)$ *двохкомпонентного марковського процесу* $u^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $t\geq 0$ *допускає асимптотичне представлення*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)&=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u,x)+a(t)\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(u,x)+\\&+a(t)\mathbf{C}^\nabla(x)\varphi(u,x)+\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x),\end{aligned}\tag{5.38}$$

де

$$\theta_t^\varepsilon(x)=\varepsilon^2 a(t)\gamma^\varepsilon(x)+\varepsilon a(t)\mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(u,x).$$

Також залишковий член такий, що $||\theta_t^\varepsilon(x)(x)\varphi(u,x)||\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Доведення. Доведення проводиться із використанням представлення оператора $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)$ та результатів леми 1.1.10.

Лема 5.1.12 *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (1.38) на збуреній функції Ляпунова*

$$V^\varepsilon(u,x)=V(u)+\varepsilon^2 a(t)V_0(u,x).$$

має представлення:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u,x) = a(t)\mathbf{L}V(u) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(x)V(u), \tag{5.39}$$

де граничний генератор $\mathbf{L}$ *має вигляд*

$$\mathbf{L}V(u) = \nabla_{b(t)}\mathbf{C}(u)V'(u), \nabla_{b(t)}\mathbf{C}(u) = \int\limits_X \pi(dx)\nabla_{b(t)}\mathbf{C}(u,x). \tag{5.40}$$

а залишковий член $\theta_t^\varepsilon(x)$ *задовольняє нерівність*

$$|\theta_t^\varepsilon(x)V(u)| \le c^* a^2(t)(1+V(u)). \tag{5.41}$$

Доведення. Розклад генератора (5.38) на збуреній функції Ляпунова набуде вигляду:

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)V_t^\varepsilon(u,x)\\ = [\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + a(t)\mathbf{\Gamma_1}(x) + a(t)\mathbf{C}^\nabla(x)]*\\ *[V(u) + \varepsilon^2 a(t)V_0(u,x)] =\\ = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}V(u) + a(t)[\mathbf{Q}V_0(u,x)+\\ +\mathbf{C}^\nabla(x)V(u) + \mathbf{\Gamma_1}(x)V(u)]+\\ +\varepsilon^2 a^2(t)[\mathbf{\Gamma_1}(x)V_0(u,x)+\\ +\mathbf{C}^\nabla(x)V_2(u,x)].\end{gathered} \tag{5.42}$$

Оскільки $V(u)$ не залежиить від x, то

$$\mathbf{Q}V(u) = 0, \Leftrightarrow V(u) \in N_Q.$$

З умови розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}V_0(u,x) + \mathbf{C}^\nabla(x)V(u) + \mathbf{\Gamma_1}(x)V(u) = \mathbf{L}_tV(u)$$

одержуємо вигляд граничного оператора

$$\mathbf{L}_t = \Pi\mathbf{L}_t = \Pi[\mathbf{C}^\nabla(x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)].$$

А, оскільки згідно умови балансу (5.23) $\Pi\mathbf{\Gamma_1}(x) = 0$, то граничний оператор набуде вигляду

$$\mathbf{L}_t = \Pi\mathbf{C}^\nabla(x).$$

Завершення доведення теореми.

З умови $C1$ теореми та нерівності (5.41) одержимо нерівність:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)V_t^\varepsilon(u,x) \le -ca(t)V(u) + c^*a^2(t)(1+V(u)). \tag{5.43}$$

Збіжність процедури стохастичної оптимізації випливає з нерівності (5.43) та теореми Невельсона-Хасьмінського [1].

5.2. Процедура стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації

У цьому підрозділі буде розглянуто неперервну процедуру стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації з залежною від марковського перемикаючого процесу функцією регресії, такої, що задовольняє умові Ліпшиця в умовах глобального балансу на сингулярне збурення функції регресії. Встановлено достатні умови збіжності процедури до точки екстремуму в термінах властивостей функції Ляпунова усередненої системи. Встановлено асимптотичну дифузійність флуктуації одновимірної процедури стохастичної оптимізаціїв схемі дифузійної апроксимації, що описується стохастичним диференціальним рівнянням. В випадку процедури стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням встановлено асимптотичну дифузійність флуктуації з квадратичним зсувом граничного дифузійного процесу.

5.2.1. Збіжність процедури стохастичної оптимізації. Нехай $C(u,x)$, $u \in R^d$, - функція регресії залежить від впливу зовнішнього середовища, яке описується рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t)$, $t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$. Для генератора

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

марковського процесу $x(t)$, $t \geq 0$, що визначений на банаховому просторі $\boldsymbol{B}(X)$ дійснозначних неперервних функцій $\varphi(x)$, $x \in X$, з супремум нормою $\|\varphi(x)\| = \sup\limits_{x\in X} |\varphi(x)|$, де $P(x,B)$, $x \in X$, $B \in \boldsymbol{X}$, - стохастичне ядро, $q(x) = g(x)^{-1}(x)$, $g(x) = E\theta_x$, $\theta(x)$ - час перебування марковського процесу в стані x, будується потенціал $R_0 = \varPi - (\varPi + Q)^{-1}$, де $\varPi\varphi(x) = \int\limits_X \pi(dx)\varphi(x)$ - проектор на підпростір нулів оператора Q: $N_Q = \{\varphi : Q\varphi = 0\}$, а $\pi(B)$, $B \in \boldsymbol{X}$, стаціонарний розподіл марковського процесу.

Неперервна процедура стохастичної оптимізації пошуку точки максимуму функції регресії $C(u,x)$ в схемі дифузійної апроксимації задається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$\begin{aligned} du^\varepsilon(t) = a(t)[\nabla_{b(t)} C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)) + \\ + \varepsilon^{-1} C_0(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))]dt, \end{aligned} \tag{5.44}$$

де $\nabla_{b(t)} C(u,\cdot) = [(C(u_i^+,\cdot) - C(u_i^-,\cdot))/2b(t), i = \overline{1,d}]$,
$u_i^{\pm} = u_i \pm b(t)e_i$, $e_i = \{0,...,1,0,...,0\}$,
$C_0(u,x) = \{C_{0i}(u,x)\ i = \overline{1,d}\}, u \in R^d, x \in X$

Поряд з системою (5.44) розглядаємо параметричну систему

$$du_x(t) = C^{\varepsilon,\nabla_b}(u_x,x)dt, x \in X,$$

де

$$C^{\varepsilon,\nabla_b}(u,x) = \nabla_{b(t)} C(u,x) + \varepsilon^{-1} C_0(u,x),$$

з породжуючим оператором

$$\boldsymbol{C}^{\varepsilon,\nabla_b}\varphi(u,x) = \left[\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x) + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0(x)\right]\varphi(u,x),$$

де $\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)\varphi(u,x) = \nabla_{b(t)}C(u,x)\varphi'(u,x)$,
$\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u,x) = C_0(u,x)\varphi'(u,x)$.

Процедура (5.44) розглядається в умовах балансу на збурення $C_0(u,x)$:

$$\int_X \pi(dx)C_0(u,x) = 0. \tag{5.45}$$

Для усередненої функції регресії

$$C(u) = \Pi C(u,x) = \int_X \pi(dx)C_(u,x)$$

розглянемо динамічну систему

$$\frac{du(t)}{dt} = grad\,C(u(t))^T, grad\;C(u) = \left[\frac{\partial C(u)}{\partial u_i}, i = \overline{1,d}\right]. \tag{5.46}$$

Припустимо, що існує єдина точка максимуму функції регресії.

Теорема 5.2.1. *Нехай усереднена функція регресії $C(u)$ має неперервні часткові похідні по $u \in R^d$, що задовольняють глобальну умову Ліпшиця*

$$B : |\nabla_{b(t)}C(u) - grad\,C(u)| < kb(t), k > 0;$$

вектор-функція $C_0(u,x)$ має перші дві похідні, а вектор-функція $\nabla_{b(t)}C(u,x)$ має перші дві похідні по $u \in R^d$, обмежені рівномірно по $x \in X$, функція Ляпунова $V(u)$ для усередненої системи (5.46), що має обмежені похідні до третього порядку включно, задовольняє умовам:

C1: експоненційної стійкості динамічної системи (5.46)
$gradC(u)V'(u) < -cV(u), c > 0$;
C2:$|V'(u)| \le c_1(1 + V(u)), c_1 > 0$;
C3:$|C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]'| \le c_2(1 + V(u)), c_2 > 0$;
C4:$|\nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]'| \le c_3(1 + V(u)), c_3 > 0$;
C5:$|C_0(u,x)R_0[\nabla_{b(t)}\widetilde{C}(u,x)V'(u)]'| \le c_4(1 + V(u)), c_4 > 0$;
C6:$|\nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[\nabla_{b(t)}\widetilde{C}(u,x)V'(u)]'| \le c_5(1 + V(u)), c_5 > 0$;
C7:$|C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]']'| \le c_6(1 + V(u))$, $c_6 > 0$;
C8:$|\nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]']'| \le c_7(1 + V(u))$, $c_7 > 0$;
де $\nabla_{b(t)}\widetilde{C}(u,x) = \nabla_{b(t)}C(u,x) - \nabla_{b(t)}C(u)$.

Крім того виконується умова балансу (5.45), а функції $a(t) > 0$,$b(t) > 0$, *такі, що виконуються умови*

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty, \int_0^\infty a(t)b(t)dt < \infty.$$

Тоді, для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) = u$,$u \in R^d$, розв'язок рівняння (1.44) при достатньо малих $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ збігаються з ймовірністю 1 до точки екстремуму u_0, що визначається однозначно рівнянням $gradC(u_0) = 0$.

Для встановлення умов збіжності процедури стохастичної оптимізації побудуємо генератор процедури стохастичної оптимізації та розглянемо його асимптотичне представлення.

Розглянемо двокомпонентний марковський процес

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^2), t \geq 0. \tag{5.47}$$

Лема 5.2.1. *Генератор двокомпонентного марковського процесу (1.47) на тест-функціях $\varphi(u,x) \in C^{2,0}(R^d, X)$ має аналітичне представлення*

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-2} \boldsymbol{Q} \varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} a(t) \boldsymbol{C}_0(x) \varphi(u,x) +$$

$$+ a(t) \nabla_{b(t)} \boldsymbol{C}(x) \varphi(u,x).$$

Доведення. Розглянемо умовне математичне сподівання:

$$E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x] =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u + \int_t^{t+\Delta} a(s) C^{\varepsilon, \nabla_b}(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon^2))\, ds, x] I(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta) +$$

$$+ E_{u,x} \varphi[u + \int_t^{t+\Delta} a(s) C^{\varepsilon, \nabla_b}(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon^2))\, ds, x_{t+\Delta}] \times$$

$$\times I(\theta_x \leq \varepsilon^{-2}\Delta) + o(\Delta) \tag{5.48}$$

Час перебування θ_x у стані x має показниковий розподіл, тобто мають місце розклади:

$$I(\theta_x > \varepsilon^{-2}) = e^{-\varepsilon^{-2} q(x)\Delta} = 1 - \varepsilon^{-2} q(x)\Delta + o(\Delta),$$

$$I(\theta_x \leq \varepsilon^{-2}) = 1 - e^{-\varepsilon^{-2} q(x)\Delta} = \varepsilon^{-2} q(x)\Delta + o(\Delta), \tag{5.49}$$

де $q(x)$ – інтенсивність.

Проведемо перетворення для тест-функцій $\varphi(u,x)$:

$$\varphi[u + \int\limits_t^{t+\Delta} a(s) C^{\varepsilon,\nabla_b}(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon^2))\, ds, x] =$$

$$= \varphi(u,x) + \varphi'_u(u,x) \int\limits_{t+\Delta}^{t} a(s) C^{\varepsilon,\nabla_b}(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon^2)) ds =$$

$$= \varphi(u,x) + C^{\varepsilon,\nabla_b}(u,x)\varphi'_u(u,x) a(t)\Delta + o(\Delta) \qquad (5.50)$$

Враховуючи (5.49) та (5.50), обчислимо умовне математичне сподівання (5.48):

$$E_{u,x}[\varphi(u,x) + a(t) C^{\varepsilon,\nabla_b}(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta][1 - \varepsilon^{-2} q(x)\Delta + o(\Delta)] +$$

$$+ E_{u,x}[\varphi(u, x^\varepsilon_{t+\Delta}) + a(t) C^{\varepsilon,\nabla_b}(u,x)\varphi'_u(u, x^\varepsilon_{t++\Delta})\Delta] \times$$

$$\times [\varepsilon^{-2} q(x)\Delta + o(\Delta)] = \varphi(u,x) + a(t) C^{\varepsilon,\nabla_b}(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta -$$

$$- \varepsilon^{-2} q(x)\Delta[E_{u,x}\varphi(u,x) + o(\Delta)] + \varepsilon^{-2} q(x)\Delta[E_{u,x}\varphi(u, x^\varepsilon_{t+\Delta}) + +o(\Delta)] =$$

$$\varphi(u,x) + a(t) C^{\varepsilon,\nabla_b}(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta +$$

$$+ \varepsilon^{-2} q(x)\Delta \int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u,y) - \varphi(u,x)] + o(\Delta) \qquad (5.51)$$

Враховуючи (5.51) та означення генератора двокомпонентного марковського процесу, отримаємо:

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_t \varphi(u,x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta}(E(\varphi(u^\varepsilon(t + +\Delta), x^\varepsilon_{t+\Delta}) | u^\varepsilon(t) = u, x^\varepsilon_t = x) -$$

$$- \varphi(u,x)) = = \varepsilon^{-2} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} a(t)\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u,x) + a(t)\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)\varphi(u,x).$$

Лему доведено.

Використаємо збурену функцію Ляпунова у вигляді:

$$V^\varepsilon(u,x) = V(u) + \varepsilon a(t) V_1(u,x) + \varepsilon^2 V_2(u,x),$$

де $V(u) \in C^3(R^d)$-функція Ляпунова усередненої системи (1.46).

Лема 5.2.1. *Генератор $\boldsymbol{L}^\varepsilon_t$ на збуреній функції Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$ допускає асимптотичний розклад:*

$$\boldsymbol{L}_t V(u) = [a(t)\Pi\boldsymbol{C}_0(x) R_0 \boldsymbol{C}_0(x) + \Pi\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)]V(u),$$

$$\Theta_t(x)V(u) = \boldsymbol{C}_0(x) R_0 \widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x) V(u) + \nabla_b \boldsymbol{C}(x) R_0 \boldsymbol{C}_0(x) V(u) +$$

$$+ \varepsilon\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}_0(x) R_0 \widetilde{\ } \boldsymbol{L}_t(x) V(u), \text{де } \widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x) = \boldsymbol{L}_t(x) - \boldsymbol{L}.$$

Доведення. Генератор на збуреній функції Ляпунова має представлення:

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^{-2} QV(u) + \varepsilon^{-1} a(t)[a(t)QV_1(u,x) + \boldsymbol{C}_0(x)V(u)] +$$

$$+ a(t)[QV_2(u,x) + a(t)\boldsymbol{C}_0(x)V_1(u,x) + \nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)V(u)] +$$

$$+\varepsilon a^2(t)[\boldsymbol{C}_0(x)V_2(u,x) + \nabla_b \boldsymbol{C}(x)V_1(u,x) + \ + \varepsilon\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)V_2(u,x)].$$

Розглянемо доданки, погруповані за степенями параметру ε.

Оскільки функція $V(u)$ не залежить від змінної x, то перший доданок дорівнює нулеві:

$$QV(u) = 0.$$

Використовуючи першу умову розв'язності проблеми сингулярного збурення, доданок з коефіцієнтом ε^{-1} прирівнюємо до нуля:

$$a(t)QV_1(u,x) + a(t)\boldsymbol{C}_0(x)V(u) = 0. \tag{5.52}$$

Використовуючи умову балансу для рівняння (5.52) та додаткову умову $\Pi V_1 = 0$, отримаємо розв'зок у вигляді:

$$V_1(u,x) = R_0 \boldsymbol{C}_0(x)V(u). \tag{5.53}$$

З розв'язності проблеми сингулярного збурення для визначеності функції $V_2(u,x)$ маємо рівність

$$QV_2(u,x) + \boldsymbol{L}_t(x)V(u) = \boldsymbol{L}_t V(u),$$

де

$$\boldsymbol{L}_t(x)V(u) = a(t)\boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u) + \nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)V(u),$$

а $\boldsymbol{L}_t = \Pi \boldsymbol{L}_t(x)$, тобто

$$\boldsymbol{L}_t = a(t)\Pi\boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x) + \Pi\nabla_b\boldsymbol{C}(x). \tag{5.54}$$

Отже, отримаємо

$$V_2(u,x) = R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u), \tag{5.55}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x) = \boldsymbol{L}_t(x) - \boldsymbol{L}_t$.

У четвертий доданок підставимо значення функцій $V_1(u,x)$ (5.53) та $V_2(u,x)$ (5.55) і виділимо залишковий член $\Theta_t(x)V(u)$:

$$\Theta_t(x)V(u) = \boldsymbol{C}_0(x)V_2(u,x) + \nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)V_1(u,x) +$$

$$+\varepsilon\nabla_b\boldsymbol{C}(x)V_2(u,x) =$$

$$= \boldsymbol{C}_0(x)R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u) + \nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u) +$$

$$+\varepsilon\nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u).eqno(5.56)$$

Лему доведено.

Доведення теореми. Встановимо ряд оцінок для асимптотичного розкладу генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$. Зокрема, враховуючи (5.54), умови $C1 - C3$ та B теореми 5.2.1, для першого доданку маємо

$$\boldsymbol{L}_t V(u) = \int_X \pi(dx)\nabla_{b(t)} C(u,x)V'(u)+$$

$$+a(t)\int_X \pi(x)C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)] <$$

$$< -cV(u) + k^* b(t)(1+V(u)) + c_1^* a(t)(1+V(u)). \tag{5.57}$$

Позначимо через $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ відповідні доданки без коефіцієнтів в (5.56). Отже, для Θ_1 маємо

$$\Theta_1 = \boldsymbol{C}_0(x)R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u) = C_0(u,x)R_0[\nabla_{b(t)}\widetilde{C}(u,x)V'(u)]'+$$

$$+a(t)C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]']'-$$

$$-a(t)\int_X \pi(dx)C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]']'.$$

Враховуючи умови C5–C8 теореми отримуємо:

$$|\Theta_1| \le c *_2 (1+V(u)). \tag{5.58}$$

Для Θ_2 маємо

$$\Theta_2 = \nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u) = \nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]'.$$

Згідно умови $C4$ теореми

$$|\Theta_2| \le c_2^*(1+V(u)). \tag{5.59}$$

Для третього доданку маємо

$$\Theta_3 = \nabla_{b(t)}\boldsymbol{C}(x)R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}_t(x)V(u) =$$

$$= \nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[\nabla_{b(t)}\widetilde{C}(u,x)V'(u)]'+$$

$$+a(t)\nabla_b C(u,x)R_0[C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]']'-$$

$$-a(t)\int_X \pi(dx)\nabla_{b(t)}C(u,x)R_0[C_0(u,x)R_0[C_0(u,x)V'(u)]']'.$$

Отже,

$$|\varTheta_3| \le c *_3 (1 + V(u)). \tag{5.60}$$

Таким чином, враховуючи (5.58)–(5.60), для залишкового члена $\varTheta_t(x)V(u)$ маємо сумарну оцінку:

$$|\varTheta_t(x)V(u)| \le c *_4 (1 + V(u)). \tag{5.61}$$

Разом з (5.57) та (5.61) отримуємо для $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x)$ обмеження:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) \le -ca(t)V(u) + k * a(t)b(t)(1 + \; + V(u)) + c *_5 a^2(t)(1 + V(u)).$$

З останнього та з мартингальної характеризації процесу

$$V^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t), x_t^{\varepsilon}),\ t \ge O$$

випливає твердження теореми, згідно теореми Невельсона-Хасьмінського [1].

Теорему доведено.

Наслідок 5.2.1. У випадку, коли збурення $C_0(u,x) = C_0(x)$, тобто не залежить від еволюції u твердження теореми має місце при наступних умовах:

C3*:$|C_0(x)R_0[C_0(x)V''(u)]| \le c_2(1 + V(u)), c_2 > 0;$

C4*:$|\nabla_{b(t)} C(u,x)R_0[C_0(x)V''(u)]| \le c_3(1 + V(u)), c_3 > 0;$

C5*:$|C_0(x)R_0[\nabla_{b(t)}\widetilde{C}(u,x)V'(u)]'| \le c_4(1 + V(u)), c_4 > 0;$

C7*:$|C_0(x)R_0[C_0(x)R_0[C_0(x)V'''(u)]]| \le c_6(1 + V(u)), c_6 > 0;$

C8*:$|\nabla_{b(t)} C(u,x)R_0[C_0(x)R_0[C_0(x)V'''(u)]]| \le c_6(1 + V(u)),$ $c_6 > 0.$

Наслідок 5.2.2. З обчислення (5.57) граничного оператора $\boldsymbol{L}_t$ робимо висновок про збіжність процедури (5.44) до процедури, що визначається стохастичним диференціальним рівнянням.

$$du(t) = a(t)\nabla_{b(t)} C(u(t))dt + a^2(t)[b(u(t))dt + B(u(t))dw_t],$$

де вираз в квадратних дужках є збурюючим дифузійним процесом з функцією зсуву

$$b(t) = \varPi C_0(u,x)R_0C_0'(u,x) = \int\limits_X \pi(dx)C_0(u,x)R_0C_0'(u,x),$$

та матрицею дисперсії

$$B(u) = \varPi C_0(u,x)R_0C_0(u,x) = \int\limits_X \pi(dx)C_0(u,x)R_0C_0(u,x);$$

$u \in R^d$ і всі похідні обчислюються по змінній $u:$

$$C_0'(u,x) = \partial C_0(u,x)/\partial u_k, k = \overline{1,N};$$

w_t-стандартний вінерівський процес.

Флуктуації процедури стохастичної оптимізації з дифузійним збуренням. Поведінка флуктуацій процедури стохастичної оптимізації характеризує швидкість сходження системи до точки екстремуму. В цьому розділі розглядаються властивості флуктуацій ПСО з дифузійним збуренням в околі точки екстремуму усередненої системи. В подальшому це дасть змогу розглядати проблеми асимптотичної поведінки ПСО.

Розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4))dt, \tag{5.62}$$

з функцією регресії

$$C^\varepsilon(u, x) = \nabla_{b(t)}C(u, x) + \varepsilon^{-1}C_0(u, x), u \in R, x \in X. \tag{5.63}$$

такою, що задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючої системи

$$\frac{u_x^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)C^\varepsilon(u_x^\varepsilon(t), x), x \in X \tag{5.64}$$

Також нехай $C(u, \cdot) \in C^2(R)$, $C_0(u, \cdot) \in C^3(R)$. Марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається генератором:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int\limits_X P(x, dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad \varphi \in \mathbf{B}(X),$$

де $\mathbf{B}(X)$ – банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум-нормою $||\varphi|| = \max\limits_{x\in X}|\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x, B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$ із стаціонарним розподілом $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0$ визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int\limits_X \pi(dx)q(x).$$

Потенціальний оператор R_0 [?] генератора $\mathbf{Q}$ визначається співвідношенням:

$$R_0 = \mathit{\Pi} - (\mathit{\Pi} + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\mathit{\Pi}\varphi(x) = \int\limits_X \pi(dy)\varphi(y)$ - проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Нехай для збурення $C_0(u, x)$ функції регресії виконується умова балансу

$$\int\limits_X \pi(dx)C_0(u, x) \equiv 0. \tag{5.65}$$

В умовах теореми 5.2.1 неперервна ПСО (5.44) з ймовірністю одиниця збігається до точки екстремуму усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C'(u(t)), \tag{5.66}$$

де

$$C(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x).$$

Умовою існування точки екструмуму u_0 є умова балансу

$$\Pi C'(0,x) = \int\limits_X \pi(dx)C'(0,x) = 0. \tag{5.67}$$

Керуючу функцію $a(t)$ визначимо співвідношенням:

$$a(t) = a/t, 0 < t_0 < t, a > 0,$$

Дифузійне збурення задається співвідношенням

$$\bar{C}_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} a \int\limits_{t_0}^{t} C_0(u^\varepsilon(s), x(s/\varepsilon^4))/sds.$$

Позначимо через $C_0^0(x) = C_0(0,x)$, тоді дифузійне збурення в точці екструмуму набуде вигляду:

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} a \int\limits_{t_0}^{t} C_0(0, x(s/\varepsilon^4))/sds =$$

$$= \varepsilon^{-2} a \int\limits_{t_0}^{t} C_0^0(x(s/\varepsilon^4))/sds. \tag{5.68}$$

Флуктуацію ПСО розглянемо в вигляді

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} t^{1/2} \left[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)\right]. \tag{5.69}$$

Теорема 5.2.2. *Нехай виконуються умови балансу (5.67) і (5.45), умови збіжності ПСО (5.62), а також нехай функції $C_0'(u,x)$ і $C_0''(u,x)$ рівномірно обмежені по x*

$$\sup_{x \in X} ||C_0'(u,x)|| \le C_1 < +\infty;$$

$$\sup_{x \in X} ||C_0''(u,x)|| \le C_2 < +\infty. \tag{5.70}$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$(v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t)) \to (\zeta(t), W_\sigma(t)), t > 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$. *Граничний процес* $(\zeta(t), W_\sigma(t))$ *задається генератором*

$$\boldsymbol{L}\varphi(v,w) = \left[\frac{acv^2}{\sqrt{t}} + acvw + \frac{v}{2} + \frac{ac\sqrt{t}w^2}{2}\right]\varphi'_v(v,w) +$$

$$+\frac{a^2\rho^2}{2t}\varphi''_w(v,w),$$

де

$$c = \int\limits_X \pi(dx)C''(0,x);$$

$$\rho^2 = 2\int\limits_X \pi(dx)C_0(0,x)R_0C_0(0,x).$$

Доведення теореми.

Лема 5.2.3. *Флуктуація (5.69) задовольняє стохастичному диференціальному рівнянню*

$$dv^\varepsilon(t) = C_t^\varepsilon(v^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon)dt, \tag{5.71}$$

де

$$C_t^\varepsilon(v,x) = \frac{\varepsilon^{-2}a}{t^{1/2}}\left[C_0(\varepsilon z^\varepsilon(t), x) - C_0(0,x)\right] +$$

$$+\frac{\varepsilon^{-1}a}{t^{1/2}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z^\varepsilon(t), x) + \frac{v}{2t},$$

$$z^\varepsilon(t) = t^{-1/2}v^\varepsilon(t) + w,$$

$$w = C_0^\varepsilon(t),$$

$$v = v^\varepsilon(t).$$

Доведення. Диференціюючи (5.68), отримуємо

$$dv^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\left[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)\right]dt +$$

$$+\varepsilon^{-1}t^{1/2}\left[du^\varepsilon(t) - \varepsilon dC_0^\varepsilon(t)\right]. \tag{5.72}$$

Оскільки

$$du^\varepsilon(t) = \frac{a}{t}\left[\nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon(t),x) + \varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t),x)\right]dt,$$

та $\mathrm{d}\mathrm{C}_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2}at^{-1}C_0(0,x)dt$, то,враховуючи отримуємо для (5.72)

$$dv^\varepsilon(t) = \frac{1}{2t}v^\varepsilon(t)dt + \varepsilon^{-1}t^{1/2}[\frac{a}{t}[\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z^\varepsilon(t),x) + \varepsilon^{-1}C_0(\varepsilon z^\varepsilon(t),x)] -$$

$$-\varepsilon^{-1}\frac{a}{t}C_0^\varepsilon(t)dt] =$$

$$= [\varepsilon^{-2}at^{-1/2}C_0(\varepsilon z^\varepsilon(t),x) + \varepsilon^{-1}at^{-1/2}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z^\varepsilon(t),x) -$$

$$-\varepsilon^{-2}at^{-1/2}C_0(0,x) + \frac{1}{2t}v^\varepsilon(t)]dt.$$

З останнього отримуємо очікуване твердження.

Для системи (5.71) розглянемо параметричну систему

$$dv_x^\varepsilon(t) = C_t^\varepsilon(v_x^\varepsilon(t),x)dt \tag{5.73}$$

з напівгрупою операторів

$$\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = \varphi(v_x^\varepsilon(t+s)), v_x^\varepsilon(s) = v,$$

на розв'язках системи (5.73), що має генератор

$$\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v) = C_t^\varepsilon(v,x)\varphi'(v). \tag{5.74}$$

Лема 5.2.4 *Генератор (5.74) має асимптотичне представлення*

$$\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}[z^\varepsilon(t)C_0'(0,x) + C'(0,x)]\varphi'(v) +$$

$$+\frac{a}{t^{1/2}}z^\varepsilon(t)[\frac{z^\varepsilon(t)}{2}C_0''(0,x) + C''(0,x)]\varphi'(v) +$$

$$+\frac{1}{2t}v\varphi'(v) + \theta^\varepsilon(x)\varphi(v),$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon(x)\varphi(v)$ такий, що

$$|\theta^\varepsilon(x)\varphi(v)| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доведення. З (5.74) маємо

$$\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v) = C^\varepsilon(v,x)\varphi'(v) =$$

$$= [\varepsilon^{-2}\frac{a}{t^{1/2}}\,[C_0(\varepsilon z^\varepsilon(t),x) - C_0(0,x)] +$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}\nabla_{b(t)}C(\varepsilon z^\varepsilon(t),x) + \frac{1}{2t}v]\varphi'(v) =$$

$$= [\varepsilon^{-2}\frac{a}{t^{1/2}}[C_0(0,x) + \varepsilon z^\varepsilon(t)C_0'(0,x) + \frac{\varepsilon^2 z^\varepsilon(t)^2}{2}C_0''(0,x)+$$

$$+O(\varepsilon^3) - C_0(0,x)]\varphi'(v)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}[C'(0,x) + \varepsilon z^\varepsilon(t)C''(0,x) + O(\varepsilon^3)] + \frac{1}{2t}v]\varphi'(v) =$$

$$= [\varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}[z^\varepsilon(t)C_0'(0,x) + C'(0,x)]+$$

$$+\frac{a}{t^{1/2}}z^\varepsilon(t)[\frac{z^\varepsilon(t)}{2}C_0''(0,x) + C''(0,x)]+$$

$$+\frac{1}{2t}v]\varphi'(v) + \varepsilon\theta_v^\varepsilon(x)\varphi'(v),$$

де $\theta_v^\varepsilon(x)\varphi'(v)$ рівномірно обмежена функція по x.

Лема 5.2.5. *Генератор $\boldsymbol{L}^\varepsilon$ трьохкомпонентного марковського процесу*

$$v^\varepsilon(t) =: v_t,\ C_0^\varepsilon(t) =: w_t,\ x(t/\varepsilon^4) = x_t^\varepsilon,\ t \geq 0 \tag{5.75}$$

на тест-функціях $\varphi(v,w,\cdot) \in C^{2,2}(R^d \times R^d)$ має асимптотичне представлення

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x) + \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}\boldsymbol{C}_0^1(v,w,x)\varphi(v,w,x) + \frac{a}{t}\boldsymbol{C}_0^2(v,w,x)\varphi(v,w,x)+$$

$$+\theta_{L^\varepsilon}^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x), \tag{5.76}$$

де $C_0(x)\varphi(v,w,x) = C_0(0,x)\varphi_w'(v,w,x)$.

$$\boldsymbol{C}_0^1(v,w,x)\varphi(v,w,x) = (zC_0'(0,x) + C'(0,x))\varphi'(v,w,x),$$

$$\boldsymbol{C}_0^2(v,w,x)\varphi(v,w,x) = (\sqrt{t}z(\frac{z}{2}C_0''(0,x) + C''(0,x)) + \frac{v}{2a})\varphi'(v,w,x),$$

а залишковий член $||\theta_{L^\varepsilon}^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)|| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Згідно означення генератора марковського процесу маємо

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta),C_0^{\varepsilon}(t+\Delta),x((t+\Delta)/\varepsilon^4))-$$

$$-\varphi(v^{\varepsilon}(t),C_0^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon^4))|v^{\varepsilon}(t)=v,C_0^{\varepsilon}(t)=w,x(t/\varepsilon^4)=x]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi(v,w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]+$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta})-\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})]+$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x_{t+\Delta})].$$

З того, що

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi(v,w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x)]=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x),$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi(v_{t+\Delta},w_{t+\Delta},x_{t+\Delta})-\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi'_w(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})]\frac{dC_0^{\varepsilon}(t)}{dt}=$$

$$=\varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(0,x)\varphi'_w(v,w,x),$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{v,w,x}[\varphi(v_{t+\Delta},w,x_{t+\Delta})-\varphi(v,w,x_{t+\Delta})]=$$

$$=\mathbf{C}_t^{\varepsilon,V}(x)\varphi(v,w,x),$$

отримуємо, використовуючи результат леми 5.2.4,

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\frac{a}{t}C_0(0,x)\varphi'_w(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}[zC_0'(0,x)+C'(0,x)]\varphi'_v(v,w,x)+$$

$$+\frac{a}{t^{1/2}}z[\frac{z}{2}C_0''(0,x)+C''(0,x)]\varphi'_v(v,w,x)+$$

$$+\frac{1}{2t}v\varphi'_v(v,w,x)+\theta^\varepsilon_{L^\varepsilon}(x)\varphi(v,w,x).$$

В результаті маємо твердження леми.

Надалі розглянемо зрізаний оператор до

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_0=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}+\varepsilon^{-2}\frac{a}{t}\boldsymbol{C}_0(x)+\varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)+$$

$$+\frac{a}{t}\boldsymbol{C}^2_0(v,w,x). \tag{5.77}$$

Для побудови граничного оператора знайдемо розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (5.77) на тест-функції виду

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\varphi(v,w)+\varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x)+\varepsilon^4\frac{1}{t}\varphi_4(v,w,x). \tag{5.78}$$

Лема 5.2.5. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (5.77) на тест-функціях (5.78) має вигляд*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon_0\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v,w)+\varepsilon\theta^\varepsilon_{L^\varepsilon_0}(v,w,x)\varphi(v,w), \tag{5.79}$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon_{L^\varepsilon_0}(v,w,x)\varphi(v,w)$ *має представлення*

$$\theta^\varepsilon_{L^\varepsilon_0}(v,w,x)\varphi(v,w)=\frac{a}{t^{3/2}}\theta^\varepsilon_1(v,w,x)+\frac{a}{t}\theta^\varepsilon_2(v,w,x)+$$

$$+\frac{a}{t^2}\theta^\varepsilon_3(v,w,x),$$

$$\theta^\varepsilon_1(v,w,x)=\mathbf{C}_0(x)\varphi_3(v,w,x)+$$

$$+\mathbf{C}^1_0(v,w,x)\varphi_2(v,w,x)+\varepsilon^2\mathbf{C}^1_0(v,w,x)\varphi_4(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^2\mathbf{C}^2_0(v,w,x)\varphi_3(v,w,x),$$

$$\theta^\varepsilon_2(v,w,x)=\varepsilon\mathbf{C}^1_0(v,w,x)\varphi_3(v,w,x),$$

$$\theta^\varepsilon_3(v,w,x)=\varepsilon\mathbf{C}_0(x)\varphi_4(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}^2_0(v,w,x)\varphi_2(v,w,x)+\varepsilon^3\mathbf{C}^2_0(v,w,x)\varphi_4(v,w,x),$$

а граничний оператор $\mathbf{L}$ *має вигляд:*

$$\mathbf{L}\Pi = a\Pi\mathbf{C}_0^2(v,w,x)\Pi + \frac{a^2}{t}\Pi\mathbf{C}_0(x)R_0\mathbf{C}_0(x)\Pi. \tag{5.80}$$

Доведення. Розглянемо оператор $\mathbf{L}_0^\varepsilon$ на тест-функції (5.78):

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,w,x) = [\varepsilon^{-4}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-2}\frac{a}{t}\boldsymbol{C}_0(x) + \varepsilon^{-1}\frac{a}{t^{1/2}}\boldsymbol{C}_0^1(v,w,x) +$$

$$+\frac{a}{t}\boldsymbol{C}_0^2(v,w,x)][\varphi(v,w) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x) +$$

$$+\varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4\frac{1}{t}\varphi_4(v,w,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w) + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t}[\mathbf{Q}\varphi_2(v,w,x) + a\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{1}{t^{1/2}}[\mathbf{Q}\varphi_3(v,w,x) + a\boldsymbol{C}_0^1(v,w,x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\frac{1}{t}[a\boldsymbol{C}_0^2(v,w,x)\varphi(v,w) + \frac{a}{t}\boldsymbol{C}_0(x)\varphi_2(v,w,x) + \mathbf{Q}\varphi_3(v,w,x)] +$$

$$+\varepsilon\theta^\varepsilon_{L_0^\varepsilon}(v,w,x)\varphi(v,w).$$

Перша умова розв'язності виконується, оскільки $\varphi(v,w)$ не залежить від x, тобто має місце

$$\mathbf{Q}\varphi(v,w) = 0.$$

Друга умова розв'язності проблеми сингулярного збурення

$$\mathbf{Q}\varphi_2(v,w,x) + a\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w) = 0$$

виконується, оскільки має місце умова балансу (1.45). Тому з останнього маємо

$$\varphi_2(v,w,x) = aR_0\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w). \tag{5.81}$$

Третя умова розв'язності дає рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_3(v,w,x) + a\boldsymbol{C}_0^1(v,w,x)\varphi(v,w) = 0,$$

а разом з умовами балансу маємо

$$\varphi_3(v,w,x) = aR_0\boldsymbol{C}_0^1(v,w,x)\varphi(v,w). \tag{5.82}$$

Четверта умова має вигляд

$$\frac{1}{t}[\mathbf{Q}\varphi_4(v,w,x) + \boldsymbol{L}(x)\varphi(v,w)] = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v,w),$$

де

$$\boldsymbol{L}(x)\varphi(v,w) = a\,\boldsymbol{C}_0^2(v,w,x)\varphi(v,w) + \frac{a}{t}\,\boldsymbol{C}_0(x)\varphi_2(v,w,x) =$$

$$= a\,\boldsymbol{C}_0^2(v,w,x)\varphi(v,w) + \frac{a^2}{t}\,\boldsymbol{C}_0(x)R_0\,\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w). \tag{5.83}$$

Граничний оператор має вигляд

$$\boldsymbol{L} = \Pi\,\boldsymbol{L}(x)\Pi,$$

отже, згідно з (5.83), отримуємо (5.80).

Таким чином для складової $\varphi_4(v,w,x)$ маємо представлення

$$\varphi_4(v,w,x) = R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(v,w), \tag{5.84}$$

де

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}(x) = \boldsymbol{L}(x) - \boldsymbol{L}.$$

Завершення доведення теореми.

Обчислимо представлення (5.84)

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = a[\sqrt{t}z(\frac{z}{2}\int\limits_X \pi(dx)(C_0''(0,x) + C''(0,x))) + \frac{v}{2a}]\varphi_v'(v,w)+$$

$$+\frac{a^2}{t}\int\limits_X \pi(dx)C_0(0,x)R_0C_0(0,x)\varphi_w''(v,w).$$

З умови балансу (5.45) маємо

$$\int\limits_X \pi(dx)C_0''(0,x) = 0,$$

отже остаточно маємо

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = (a\sqrt{t}\frac{z^2}{2}c + \frac{v}{2})\varphi_v'(v,w)+$$

$$+\frac{a^2\rho^2}{2t}\varphi_w''(v,w),$$

в позначеннях теореми. Оскільки

$$z = t^{-1/2}v + w,$$

то з останнього маємо представлення граничного генератора.

Для завершення доведення теореми встановимо обмеженість

$$||\theta^{\varepsilon}_{L^{\varepsilon}_0}(v,w,x)\varphi(v,w)|| \le M, 0 < M < \infty \tag{5.85}$$

залишкового члена в представленні (5.79). З представлень (5.80), (5.81) та (5.83) для $\theta^{\varepsilon}_1(v,w,x)$ маємо

$$\theta^{\varepsilon}_1(v,w,x) = a\boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)\varphi(v,w)+$$

$$+a\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w) + \varepsilon^2\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(v,w)+$$

$$+\varepsilon a^2\boldsymbol{C}^2_0(v,w,x)R_0\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)\varphi(v,w). \tag{5.86}$$

Для першого доданку з (5.86) маємо

$$\boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)\varphi(v,w) =$$

$$= C_0(0,x)R_0[((\frac{v}{\sqrt{t}}w)C'_0(0,x) + C'(0,x))\varphi'_v(v,w)]'_w.$$

Другий доданок має представлення

$$\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(v,w) =$$

$$= ((\frac{v}{\sqrt{t}} + w)C'_0(0,x) + C'(0,x))R_0[C_0(0,x)\varphi'_w(v,w)]'_v.$$

Для третього маємо

$$\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)R_0\widetilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(v,w) =$$

$$= ((v+\sqrt{t}w)(\frac{v+\sqrt{t}w}{2\sqrt{t}}C''_0(0,x) + C''(0,x)) + \frac{v}{2a}R_0[\widetilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(v,w)]'_v.$$

Четвертий доданок має представлення

$$\boldsymbol{C}^2_0(v,w,x)R_0\boldsymbol{C}^1_0(v,w,x)\varphi(v,w) =$$

$$= ((v+\sqrt{t}w)(\frac{v+\sqrt{t}w}{2\sqrt{t}}C''_0(0,x) + C''(0,x)) + \frac{v}{2a})$$

$$R_0[(\frac{v+\sqrt{t}w}{2\sqrt{t}}C'_0(0,x) + C'(0,x))\varphi'_v(v,w)]'_v.$$

З гладкості функцій $C_0(u,x)$, $C(u,x)$ та тест-функцій $\varphi(v,w)$ з отриманих представлень доданків та з (1.86) отримуємо оцінку

$$||\theta^{\varepsilon}_1(v,w,x)|| \le M_1, 0 < M_1 < \infty.$$

Також мають місце оцінки

$$||\theta_2^\varepsilon(v, w, x)|| \leq M_2, 0 < M_2 < \infty.$$

$$||\theta_3^\varepsilon(v, w, x)|| \leq M_3, 0 < M_3 < \infty.$$

Отже має місце (5.85).

Згідно Модельної техеми Королюка [3] отримуємо твердження теореми 5.2.2.

5.2.2. Флуктуації процедури стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням.

Однією з проблем системного аналізу за умов невизначеності, що описується марковським процесом, є встановлення збіжності флуктуації процедур стохастичної оптимізації до дифузійного процесу в випадку безпосереднього впливу функції регресії від марковських переключень. Багаточисельні приклади застосування таких процедур та їх модифікацій в теорії керування, теорії передачі повідомлень, при розв'язку непараметричних задач математичної статистики, зокрема при встановленні найкращих значень параметрів асимптотично нормального розподілу процедури стохастичної оптимізації, визначають важливість встановлення нових узагальнень та властивостей ПСО.

Різницева процедура стохастичної оптимізації в ергодичному марковському середовищі з імпульсним збуренням задається еволюційним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)[\nabla_{b(t)} C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon d\eta^\varepsilon(t)], \tag{5.87}$$

де

$$a(t) = \frac{a}{t}, a > 0,$$

$$\nabla_{b(t)} C(u, x) = \frac{1}{2b(t)}[C(u + b(t), x) - C(u + b(t), x)], \ C(u, \cdot) \in C^3(R)).$$

Марковський процес $x(t), t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається генератором:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad \varphi \in \mathbf{B}(X),$$

де $\mathbf{B}(X)$ - банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум - нормою $||\varphi|| = \max_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x, B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$ із стаціонарним розподілом $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0$ визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Потенціальний оператор R_0 генератора $\mathbf{Q}$ визначається співвідношенням: $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)$ – проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ задається співвідношеннями:

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^2)); \tag{0.1}$$

де сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x),\ t \geq 0,\ x \in X$ задається генераторам: $\Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int_R [\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)]\Gamma(dv; x), x \in X$.

Нехай виконуються умови балансу

$$\Pi\mathbf{\Gamma_1}(x) = \int_X \pi(dx)b_1(x) = 0, b_1(x) = \int_R v\Gamma(dv, x), \tag{5.88}$$

$$\Pi C'(0, x) = \int \pi(dx)C'(0, x) = 0, \tag{5.89}$$

Нормоване імпульсне збурення задається співвідношенням

$$\mu^\varepsilon(t) = a \int_{t_0}^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^4))/s^{\frac{1}{2}};$$

Розглянемо флуктуацію ПСО у вигляді

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}t^{\frac{1}{2}}[u^\varepsilon(t) - \varepsilon\mu^\varepsilon(t)] \tag{5.90}$$

Теорема 5.2.3. *При виконанні умов балансу (5.88) та (5.89), а також умови збіжності ПСО, має місце слабка збіжність*

$$(v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t)) \to (\zeta(t), \sigma(t)W(t)), t > 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний процес $(\zeta(t), \sigma(t)W(t))$ *задається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(v, w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}) + act^{\frac{1}{2}}w\right]\varphi'_v(v, w) + \frac{a}{2}B(t)\varphi''_w(v, w),$$

де

$$c_2 = \int_X \Pi(dx)C''(0, x),$$

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t) + B_3(t),$$

$$B_1(t) = \int\limits_X \pi(dx) b_2(x) +$$

$$+2at^{-\frac{1}{2}} \int\limits_X \pi(dx) b_1(x) R_0 b_1(x);$$

$$b_2(x) = \int\limits_R v^2 \Gamma(dv, x);$$

$$B_2(t) = 2a \left[\int\limits_X \pi(dx) b_1(x) R_0 C'(0, x) + \int\limits_X \pi(dx) C'(0, x) R_0 b_1(x) \right];$$

$$B_3(t) = 2at^{\frac{1}{2}} \int\limits_X \pi(dx) C'(0, x) R_0 C'(0, x).$$

Лема 5.2.7. *Генератор $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w)$ допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) + \varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w),$$

де $\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w)$; $\mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w)$, а залишковий член такий, що $||\varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення. За означенням генератора маємо $\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int\limits_R [\varphi(w + \varepsilon v) - \varphi(w)] \Gamma(dv, x)$

Використаємо розклад в ряд Тейлора функції φ та отримаємо

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int\limits_R [\varphi(w) + \varepsilon v \varphi'(w) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^2 \varphi''(w) +$$

$$+\varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) - \varphi(w)]\Gamma(dv, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2} \int\limits_R (\varepsilon v \varphi'(w) \Gamma(dv, x) +$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{-2} \int\limits_R \varepsilon^2 v^2 \varphi''(w) \Gamma(dv, x) + \varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1} b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2} b_2(x) \varphi''(w) + \varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \varepsilon\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w).$$

Лема 5.2.8. *Нормована флуктуація (5.90) задовольняє диференціальному рівнянню*

$$dv^{\varepsilon}(t) = C_t^{\nabla,\varepsilon}(v^{\varepsilon}(t), x_t^{\varepsilon})dt, \tag{5.91}$$

де

$$C_t^{\nabla,\varepsilon}(v,x) = \varepsilon^{-1} a \nabla_{b(t)} C(\varepsilon z, x) + \frac{1}{2} v t^{-1},$$

а

$$z = t^{-\frac{1}{2}} v + w; v = v^\varepsilon(t), w = \mu^\varepsilon(t).$$

Доведення.
З диференціювання (5.90) та використання (5.86) отримуємо (5.91).

Зауважимо, що рівняння (5.91) породжує напівгрупу операторів $\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(v) = \varphi(v_x^\varepsilon(t+s))$, $v_x^\varepsilon(s) = v$, з генератором

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = C^{\nabla,\varepsilon}(v,x)\varphi'(v). \tag{5.92}$$

Лема 5.2.9. *Генератор (5.92) має асимптотичне представлення на тест-функціях*

$$\varphi(v) \in C^2(R), C(u,\cdot) \in C^3(R)$$

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1} a C'(0,x)\varphi'(v) +$$

$$+((avt^{-\frac{1}{2}} + aw)C''(0,x) + \frac{1}{2}t^{-1}v)\varphi'(v) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi'(v), \tag{5.93}$$

де $\theta^\varepsilon(x)\varphi'(v)$ рівномірно обмежена по x та по v функція.

Доведення. Для генератора (5.92) маємо перетворення:

$$\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\varphi(v) = \varepsilon^{-1} a \nabla_{b(t)} C(\varepsilon z, x)\varphi'(v) + \frac{1}{2} v t^{-1}\varphi'(v) =$$

$$= \varepsilon^{-1} a \left[C'(0,x) + \varepsilon z C''(0,x) + O(\varepsilon^3)\right]\varphi'(v) + \frac{1}{2} v t^{-1}\varphi'(v).$$

Таким чином, звівши доданки по степенях ε, одержимо (5.93).

Лема 5.2.10. *Генератор трьохкомпонентного марковського процесу*

$$v^\varepsilon(t) = v_t,\ \mu^\varepsilon(t) = w_t,\ x(t/\varepsilon^2) = x_t^\varepsilon,\ t \geq 0 \tag{5.94}$$

має аналітичний вигляд

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \left[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + a t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x) + \mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\right]\varphi(v,w,x).$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання:

$$E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), \mu^\varepsilon(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^2)) -$$

$$-\varphi(v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)) | v^\varepsilon(t) = v, \mu^\varepsilon(t) = w, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v,w,x)] =$$

$$= E[\varphi(v_{t+\varDelta}, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta})] +$$

$$+ E[\varphi(v, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x)].$$

Згідно означення генератора марковського процесу та останнього представлення, одержуємо

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(v, w, x) = \lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\varDelta), \mu^{\varepsilon}(t+\varDelta), x((t+\varDelta)/\varepsilon^2)) -$$

$$-v^{\varepsilon}(t), \mu^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2)) | v^{\varepsilon}(t) = v, \mu^{\varepsilon}(t) = w, x(t/\varepsilon^2) = x] =$$

$$= \lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[v_{t+\varDelta}, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x)] =$$

$$= \lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[\varphi(v_{t+\varDelta}, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta})] +$$

$$+ \lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E\varphi(v, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x)].$$

Перша границя визначає генератор (5.93) еволюції v, а друга границя дає генератор двокомпонентного марковського процесу

$$\mu^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2),\ t \geq 0.$$

Оскільки має місце представлення:

$$\lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[\varphi(v, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x)] =$$

$$= \lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[\varphi(v, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x_{t+\varDelta})] =$$

$$= \lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[\varphi(v, w, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x)],$$

то враховуючи

$$\lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[\varphi(v, w_{t+\varDelta}, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x_{t+\varDelta})] = at^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(v, w, x),$$

та

$$\lim_{\varDelta \to 0} \frac{1}{\varDelta} E[\varphi(v, w, x_{t+\varDelta}) - \varphi(v, w, x)] = \varepsilon^{-2} Q\varphi(v, w, x),$$

отримаємо

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(v, w, x) = \left[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x) + \mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)\right] \varphi(v, w, x).$$

Лема 5.2.11. *Генератор $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}$ допускає асимптотичне представлення*

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}\varphi(v,w,x) = (\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q} + \varepsilon^{-1}(at^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Gamma}_1(x) + a\boldsymbol{C}_1(x)) +$$

$$+at^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Gamma}_2(x) + (at^{-\frac{1}{2}}(v + t^{\frac{1}{2}}w)\boldsymbol{C}_2(x) + \frac{1}{2}t^{-1}v\boldsymbol{D}(x)) +$$

$$+\theta_L^{\varepsilon}(x))\varphi(v,w,x), \tag{5.95}$$

де

$$\boldsymbol{C}_1(x)\varphi(v,w,x) = C'(0,x)\varphi'_v(v,w,x);$$

$$\boldsymbol{C}_2(x)\varphi(v,w,x) = C''(0,x)\varphi'_v(v,w,x);$$

$$\boldsymbol{D}\varphi(v,w,x) = \varphi'_v(v,w,x);$$

а залишковий член такий, що $||\theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w,x)|| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Доведення випливає з представлення генераторів $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$ та $\mathbf{C}_t^{\nabla,\varepsilon}(x)$.

Для генератора (5.95) розглянемо зрізаний оператор:

$$\boldsymbol{L}_0^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(x) + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q_2}(x), \tag{5.96}$$

де

$$\mathbf{Q}_1(x) = \mathbf{\Gamma}_1(x) + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x),$$

$$\mathbf{Q}_2(x) = \mathbf{\Gamma}_2(x) + (v + t^{-\frac{1}{2}}w)\mathbf{C}_2(x) + \frac{1}{2at^{\frac{1}{2}}}v\mathbf{D}.$$

Лема 5.2.12. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (1.96) на тест-функціях*

$$\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon t^{-\frac{1}{2}}\varphi_1(v,w,x) + \varepsilon^2 t^{-\frac{1}{2}}\varphi_2(v,w,x)$$

в умовах теореми реалізується співвідношенням

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi(v,w) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w), \tag{5.97}$$

де залишковий член $\theta^{\varepsilon}(x)$ рівномірно обмежений по x, а граничний оператор $\mathbf{L}$ *визначається співвідношенням:*

$$\mathbf{L}\mathit{\Pi} = a\mathit{\Pi}\mathbf{Q_2}(x)\mathit{\Pi} + a^2t^{-\frac{1}{2}}\mathit{\Pi}\mathbf{Q_1}(x)R_0\mathbf{Q}_1(x)\mathit{\Pi}.$$

Доведення. Розглянемо вигляд генератора $\mathbf{L}_0^{\varepsilon}$ на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(v,w,x)$, а саме

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(v,w) + \varepsilon^{-1}t^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{Q}\varphi_1(v,w,x) + a\mathbf{Q}_1(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2(x)\varphi(v,w) + at^{-1}\mathbf{Q}_1(x)\varphi_1(v,w,x) +$$

$$+t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\varphi_2(v,w,x) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w).$$

Оскільки φ не залежить від x, то

$$\mathbf{Q}\varphi = 0, \Leftrightarrow \varphi \in N_Q.$$

Умови балансу (5.88) та (5.89) визначають розв'язність рівняння:

$$\mathbf{Q}\varphi_1(v,w,x) + a\mathbf{Q}_1(x)\varphi(v,w) = 0.$$

Отже,

$$\varphi_1(v,w,x) = aR_0\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u,w). \tag{5.98}$$

Таким чином, враховуючи (5.98), отримуємо представлення:

$$t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\varphi_2(v,w,x) + t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}(x)\varphi(v,w) = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi(v,w),$$

де

$$\mathbf{L}(x)\varphi(v,w) = a\mathbf{Q}_2(x)\varphi(v,w) + a^2t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(x)R_0\mathbf{Q}_1\varphi(v,w).$$

Для $\varphi_2(v,w,x)$ маємо представлення

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0[\mathbf{L}(x) - \mathbf{L}]\varphi(v,w). \tag{5.99}$$

Через те, що

$$\Theta^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = at^{-1}\mathbf{Q}_1\varphi_2(v,w,x) +$$

$$+at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2\varphi_1(v,w,x) + at^{-1}\mathbf{Q}_2\varphi_2(v,w,x)$$

та враховуючи (5.98) і (5.99), а також гладкість функції $\varphi(v,w)$, отримуємо твердження леми про залишковий член.

Завершення доведення теореми.

Обчислимо граничний оператор $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = a\Pi\mathbf{\Gamma}_2(x)\varphi(v,w) + a(v + t^{\frac{1}{2}}w)\Pi\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w) +$$

$$+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}v\mathbf{D}\varphi(v,w) + a^2t^{-\frac{1}{2}}\Pi[\mathbf{\Gamma}_1(x) +$$

$$+t^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x)]R_0[\mathbf{\Gamma}_1(x) + t^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_1(x)]\varphi(v,w) =$$

$$= a \int_X \pi(dx) b_2(x) \varphi''_w(v,w) +$$

$$+ a(v + t^{\frac{1}{2}} w) \int_X \pi(dx) C''(0,x) \varphi'_v(v,w) +$$

$$+ \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} v \varphi'_v(v,w) + a^2 t^{-\frac{1}{2}} (\int_X \pi(dx) b_1(x) R_0 b_1(x) \varphi''_w(v,w) +$$

$$+ t^{\frac{1}{2}} \int_X \pi(dx) b_1(x) R_0 C'(0,x) \varphi''_{vw}(v,w) +$$

$$+ t^{\frac{1}{2}} \int_X \pi(dx) C'(0,x) R_0 b_1(x) \varphi''_{vw}(v,w) +$$

$$+ t \int_X \pi(dx) C'(0,x) R_0 C'(0,x) \varphi''_v(v,w)).$$

Отже,

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}) + act^{\frac{1}{2}} w \right] \varphi'_v(v,w) +$$

$$+ \frac{a}{2} B(t) \varphi''_w(v,w),$$

де

$$B(t)\varphi''(v,w) = B_1(t)\varphi''_w(v,w) + B_2(t)\varphi''_w(v,w) + B_3(t)\varphi''_w(v,w),$$

$$B_1(t) = 2 \int_X \pi(dx) b_2(x) + 2at^{-\frac{1}{2}} \int_X \pi(dx) b_1(x) R_0 b_1(x);$$

$$B_2(t) = 2a \left[\int_X \pi(dx) b_1(x) R_0 C'(0,x) + \int_X \pi(dx) C'(0,x) R_0 b_1(x) \right];$$

$$B_3(t) = 2at^{\frac{1}{2}} \int_X \pi(dx) C'(0,x) R_0 C'(0,x).$$

Завершення доведення теореми проводиться за допомогою Модельної граничної теореми Королюка [3].

Розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації:

$$du^\varepsilon(t) = a(t) C^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)) dt, \tag{5.100}$$

з функцією регресії

$$C^{\varepsilon}(u,x) = \nabla_{b(t)}C(u,x(t) + \varepsilon^{-1}C_0(u,x), u \in R, x \in X.$$

Усереднена система

$$\frac{du}{dt} = C'(u), C(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u,x).$$

Умови балансу

$$\int\limits_X \pi(dx)C_0(u,x) = 0, \int\limits_X \pi(dx)C'(0,x) = 0. \tag{5.101}$$

Позначимо через $C_0^0(x) = C_0(0,x)$, тоді дифузійне збурення в точці екстремуму набуде вигляду:

$$C_0^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}a\int\limits_{t_0}^{t} C_0(0, x(s/\varepsilon^2))/s^{\frac{1}{2}}ds =$$

$$= \varepsilon^{-1}a\int\limits_{t_0}^{t} C_0^0(x(s/\varepsilon^2)))/s^{\frac{1}{2}}ds.$$

Розглянемо флуктуації ПСО (5.100) в наступному нормуванні

$$v^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}t^{\frac{1}{2}}\left[u^{\varepsilon}(t) - \varepsilon C_0^{\varepsilon}(t)\right].$$

Теорема 5.2.4. *Нехай виконуються умови балансу (5.101), а також умови збіжності ПСО (5.100). Також нехай функції $C_0'(u,x)$ і $C_0''(u,x)$ рівномірно обмежені по x*

$$\sup_{x\in X} ||C_0'(u,x)|| \leq C_1 < +\infty;$$

$\sup\limits_{x\in X} ||C_0''(u,x)|| \leq C_2 < +\infty.$
Тоді має місце слабка збіжність

$$(v^{\varepsilon}(t), C_0^{\varepsilon}(t)) \to (\zeta(t), W_{\sigma}(t)), t > 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$. Граничний процес $(\zeta(t), W_{\sigma}(t))$ задається генератором

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \left[v(ac_2 + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}) + ac_2t^{-\frac{1}{2}}w\right]\varphi_v'(v,w) +$$

$$+\frac{at^{-\frac{1}{2}}}{2}B\varphi''_w(v,w),$$

де

$$c_2 = \int_X \pi(dx)C''(0,x);$$

$$B = 2\int_X \pi(dx)C_0(0,x)R_0C_0(0,x).$$

Мають місце леми.

Лема 5.2.13. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon$ *допускає асимптотичне представлення на тест-функціях* $\varphi(v) \in C^4(R)$

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \Big[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}^0(x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}a\mathbf{C}(x) + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}^1_t(x) + \theta^\varepsilon_L(x)\Big]\varphi(v,w,x),$$

де

$$\mathbf{C}^0(x)\varphi(v,w,x) = C^0_0(x)\varphi'_w(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(v,w,x) = [C(0,x) + zC'_0(0,x)]\,\varphi'_v(v,w,x);$$

$$\mathbf{C}^1_t(x)\varphi(v,w,x) = (t^{\frac{1}{2}}z\,[C'(0,x) + zC''_0(0,x)/2]+$$

$$+\frac{v}{2a}t^{\frac{1}{2}})\varphi'_v(v,w,x),$$

$$z = t^{-\frac{1}{2}}v + w,$$

а залишковий член такий, що

$$||\theta^\varepsilon_L(x)\varphi(v,w,x)|| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Лема 5.2.14. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора*

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0 = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}a[t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}^0(x)+$$

$$+\mathbf{C}(x)] + at^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}^1_t(x),$$

в умовах теореми реалізується співвідношенням

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}\varphi(v,w) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w),$$

де залишковий член $\theta^{\varepsilon}(x)$ рівномірно обмежений по x. Граничний генератор визначається співвідношенням:

$$\mathbf{L}\Pi = a\Pi\mathbf{C}_t^1(x)\Pi + a^2 t^{-\frac{1}{2}}\Pi\boldsymbol{C}^0(x)R_0\boldsymbol{C}^0(x)\Pi.$$

Доведення теореми 5.2.4 проводиться за схемою доведення теореми 5.2.3 з використинням лем 5.2.13, 5.2.14 та із застосуванням Модельної граничної теореми Королюка [3].

Таким чином, флуктуації ПСО з імпульсним збуренням при наявності точки рівноваги на зростаючих інтервалах часу описуються стохастичним диференціальним рівнянням, дифузійна складова якого формується як з першого та другого моментів імпульсного процесу, так і з швидкості зміни функції регресії в точці рівноваги.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Nevelson M.S., Khasminsky R.Z. Stochastic Approximation and Recurrence Evaluation. - Nauka, Moscow, –1972, – 332p.
2. Королюк, А.Ф. Турбин. Полумарковские процессы и их применение. Киев: Наук. думка, 1976.-184с.
3. Korolyuk V.S. Stochastic models of systems / V.S. Korolyuk, V.V. Korolyuk. – Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 1999. – 197 p.
4. В.С.Королюк. Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр.мат.журн. - 1998. - 50, №1. – С.36 – 47.
5. Kiefer E., Wolfowitz J. Stochastic estimation of the maximum of regression function. Ann. Math. Statist., – 1952. –**23**, №3,– P. 462 – 466.
6. Чабанюк Я.М. Процедура стохастичної апроксимації в ергодичному середовищі Маркова. Мат. Stud. – 2004. – Т.21, №1. – С.81-86.
7. Korolyuk V.S.,Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific, Singapore,– 2005, – 330P.
8. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей / С.Н. Бернштейн // Видання 4. – 1946. – С. 485-546.
9. Боголюбов М.М. Про рівняння Фоккера-Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом,заснованим на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана / М.М. Боголюбов, М.М.Крилов // Киевский университ. - Зап.каф.мат, физики, 1939. – С. 5 – 158.
10. Гихман И.И. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями / И.И. Гихман // Украинский математический журнал. – 1950. – Том 2, №3. – С. 45-69.
11. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – К.:Наукова думка, 1982. – 612 с.
12. Ежов И.И. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I / И.И. Ежов, А.В. Скороход // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Том 14, №1. – С. 3–14.
13. Ежов И.И. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. II / И.И. Ежов, А.В. Скороход // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Том 14, №4. – С. 679–692.
14. Згуровский М.З. Системный анализ: проблемы, методология, приложения / М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. – К.:Наукова думка, 2011. – 726 с.
15. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика / М.В. Карташов. – К.: Редакційно-видавничий центр Київського університету, 2007. – 294 с.
16. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики / М. Кац. – М.:Наука, 1967. – 176 с.
17. Колесник А.Д. Инфинитезимальный гиперболический оператор марковских случайных эволюций в $\mathbf{R}^n$ / А.Д. Колесник, А.Ф. Турбин // Докл. АН УССР. Серия А. – 1991. – №1. – С. 11-14.

18. Колесник А.Д. Симметричные случайные эволюции в $\mathbf{R}^2$ / А.Д. Колесник, А.Ф. Турбин // Докл. АН УССР. Серия А. – 1990. – №2. – С. 10-11.
19. Королюк В.С. Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских. – К.: Наукова думка, 1981. – 240 с.
20. Королюк В.С. Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения марковской цепи / В.С. Королюк, И.П. Пенев, А.Ф. Турбин // Кибернетика. – 1973. – №4. – С. 133-135.
21. Королюк В.С. Великі відхилення для імпульсних процесів накопичення в схемі фазового укрупнення / В.С. Королюк, І.В. Самойленко // Доповіді НАН України. – 2014. – №7. – С. 28-35.
22. Королюк В.С. Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии / В.С. Королюк // Доповіді НАН України. – 2010. – №6. – С. 22-26.
23. Королюк В.С. Математические основы фазового укрупнения сложных систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.:Наукова думка, 1978. – 220 с.
24. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.:Наукова думка, 1976. – 184 с.
25. Королюк В.С. Полумарковские случайные эволюции / В.С. Королюк, А.В. Свищук. – К.: Наукова думка, 1992. – 256 с.
26. Королюк В.С. Потенціальний оператор процесу Орнштейна-Улен- бека та його застосування / В.С. Королюк, І.В. Самойленко // Доповіді НАН України. – 2013. – №3. – С. 21-27.
27. Королюк В.С. Предельное представление непрерывных полумарковских случайных эволюций в схеме серий / В.С. Королюк, А.В. Свищук. // Украинский математический журнал. – 1989. – №11. – С. 1476-1482.
28. Королюк В.С. Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії / В.С. Королюк // Український математичний журнал. – 2010. – **62**, №5. – С. 643 – 650.
29. Королюк В.С. Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения / В.С. Королюк, А.В. Свищук. // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – №41. – С. 80–95.
30. Королюк В.С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями / В.С. Королюк // Докл. АН УССР. Серия А. – 1990. – №6. – С. 16-19.
31. Кошманенко В.Д. Модель динамічної системи конфліктної тріади / В.Д. Кошманенко, І.В. Самойленко // Нелінійні коливання. – 2011. – Т.14, №1. – С. 1-21.
32. Ланжевен П. О теории броуновского движения / П. Ланжевен // Избранные труды / П. Ланжевен. – М.:Издательство АН СССР, 1960. – С. 338-341.
33. Скороход А.В. Асимптотичнские методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А.В. Скороход. – К.: Наукова думка, 1987. – 328 с.

34. Турбин А.Ф. Предельные теоремы для динамических систем с коэффициентами, зависящими от марковского процесса / А.Ф. Турбин, О.С. Хохель // Прикладные задачи теории вероятностей. – К.: Инст. матем. АН УССР, 1982. – С. 117-133.
35. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров / Р.З. Хасьминский. – М.:Наука, 1969. – 367 с.
36. Хасьминский Р. З. О диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями. / Р. З. Хасьминский // Пробл. передачи информ. Москва. – 1965. – 1:1. – С. 88-104.
37. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е.Ф. Царьков. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
38. Чабанюк Я.М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса. / Я.М. Чабанюк // Кібернетика і системний аналіз. – 2006. – №3. – С.1–7
39. Чабанюк Я.М. Стійкість динамічної системи з напівмарковськими переключеннями в умовах дифузійної апроксимації / Я.М. Чабанюк // Український математичний журнал. – 2007. – **59**, №9. – С. 1290-1297.
40. Чабанюк Я.М. Стійкість динамічної системи з напівмарковськими перемиканнями за умов стійкості усередненої системи / Я.М. Чабанюк, В.С. Королюк // Український математичний журнал. – 2002. – **54**, №2. – С. 195–204.
41. Шапиро В.Е. Динамические системы при случайных воздействиях. Простейшие средства анализа / В.Е. Шапиро, В.М. Логинов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 160 с.
42. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова / В.М. Шуренков. – М.:Наука, 1989. – 336 с.
43. Эшби У.Р. Введение в кибернетику / У.Р. Эшби. – М.:Издательство иностранной литературы, 1959. – 432 с.
44. de Acosta, A. Exponential tightness and projective systems in large deviation theory / A. de Acosta // Festschrift for Lucien Le Cam. – New York:Springer, 1997. – P. 143-156.
45. Albeverio S. Asymptotic expansion of semi-Markov random evolutions / S. Albeverio, V.S. Koroliuk, I.V. Samoilenko // Stochastics: An international journal of probability and stochastic processes. – 2009. – Vol. 81, No.5. – P. 477-502.
46. Albeverio S. The conflict interaction between two complex systems: cyclic migration / S. Albeverio, V.D. Koshmanenko, I.V. Samoilenko // Journal of interdisciplinary mathematics. – 2008. – V.11, No.2. – P. 163–185.
47. Anisimov V.V. Switching processes in queuing models / V.V. Anisimov. – London:Wiley-ISTE, 2008. – 352 p.
48. Bainov D. Integral inequalities and applications / D. Bainov, P. Simeonov. – Dordrecht:Kluver Academic Publishers, 1992. – 316 p.
49. Bertoin J. Lévy processes / J. Bertoin // Cambridge Tracts in Mathematics, 121. – Cambridge:Cambridge University Press, 1996. – 266 p.

50. Billingsley P. Convergence of probability measures / P. Billingsley. – New York:Wiley, 1968. – 253 p.
51. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. – Utrecht-Boston:Wal- ter de Gruyter, 2004. – 317 p.
52. Bryc W. Large deviations by the asymptotic value method / W. Bryc // Diffusion processes and related problems in analysis. – Basel:Birkhauser, 1990. – P. 447–472.
53. Chabaniuk Y. Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point / Y. Chabaniuk, V.S. Koroliuk, N. Limnios // France Academy of Sciences, Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris, Ser. I. – 2007. – 345. – P.405–410.
54. Chernoff H. Measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations / H. Chernoff // Annals of Mathematical Statististics. – 1952. – Volume 23, Number 4. – P. 493-655.
55. Çinlar E. Semimartingale and Markov processes / E. Çinlar, J. Jacod, P. Protter, M.J. Sharpe // Z. Wahrschein. verw. Gebiete. – 1980. – No.54. – P. 161–219.
56. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics / J.D. Cole // The quarterly of applied mathematics. – 1951. – No.9. – P. 225–236.
57. Cramér H. Sur un nouveau théoreme-limite de la théorie des probabilités / H. Cramér // Acta. Sci. et Ind. – 1938. – 736. – P. 5–23.
58. Crandall M.G. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations / M.G. Crandall, P.-L. Lions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – 277. – P. 1–42.
59. Davis M.H.A. Markov models and optimization / M.H.A. Davis. – Boca Raton:Chapman&Hall/CRC Press, 1993. – 308 p.
60. Dellacherie C. Probabilities and potential / C. Dellacherie, P.-A. Meyer. – Amsterdam-New York:North-Holland Publishing, 1978. – 202 p.
61. Dembo A. Large deviations techniques and applications / A. Dembo, O. Zeitouni. – Boston:Jones and Bartlett Publishers, 1993. – 412 p.
62. Deuschel J.-D. Large deviations/ J.-D. Deuschel, D.W. Stroock. – Boston:Academic Press, 1989. – 306 p.
63. Devooght J. Dynamic reliability / J. Devooght // Advances in nuclear science and technology. – 1997. – No.25. – P. 215–278.
64. Doléans-Dade C. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales / C. Doléans-Dade, P.-A. Meyer // Séminaire de Probabilités IV Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics. – 1970. – Vol. 124. – P. 77-107.
65. Donsker M.D. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I / M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1975. – **27**. – P. 1–47.
66. Donsker M.D. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. II / M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1975. – **28**. – P. 279–301.

67. Donsker M.D. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III / M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 19756. – **29**. – P. 389–461.
68. Doob J.L. Stochastic processes. Reprint of the 1953 original / J.L. Doob. – New York:John Wiley&Sons, Inc., 1990. – 664 p.
69. Dupuis P. A weak convergence approach to the theory of large deviations / P. Dupuis, R.S. Ellis. – New York:Wiley, 1997. – 504 p.
70. Ethier S.N. Markov processes:characterization and convergence / S.N. Ethier, T.G. Kurtz. – New York:Wiley, 1985. – 552 p.
71. Feng J. Large deviation for stochastic processes / J. Feng, T.G. Kurtz. – Mathema-tical Surveys and Monographs, 131. Providence, RI, American Mathematical Society, 2006. – 410 p.
78. Feng J. Martingale problems for large deviations of Markov processes / J. Feng // Stochastic processes and applications. – 1999. – **81**, no.2. – P. 165–216.
79. Fleming W.H. Controlled Markov processes and viscosity solutions / W.H. Fleming, H.M. Soner. – New York:Springer, 2006, 429 p.
80. Fleming W.H. A PDE approach to some large deviations problems / W.H. Fleming, P.E. Souganidis // Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984), Lectures in Applied Mathematics, 23. Providence, RI, American Mathematical Society, 1986. – P. 441-447.
85. Freidlin M.I. The averaging principle and theorems on large deviations / M.I. Freidlin // Russian Math. Surveys. – 1978. – **33**. – P. 117–176.
86. Fukushima M. Reversibility of solutions to martingale problems / M. Fukushima, D.W. Stroock // Adv. Math. (Suppl. Stud.). – 1986. – No.9. – P. 107–123.
87. Generalized inverses and applications / editor: M.Z. Nashed.– New York: Academic Press, 1976. – 1054 p.
88. Gorostiza L. A central limit theorem for a class of d-dimential random motions with constant speed / L. Gorostiza // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – No.78. – P. 575-577.
88. Gorostiza L. The central limit theorem for random motions of d-dimentional Euclidean space / L. Gorostiza // Annals of Probability – 1973. – No.1. – P. 603–612.
89. Gorostiza L. An invariance principle for a class of d-dimentional polygonal random functions / L. Gorostiza // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – No.177. – P. 413–445.
90. Griego R. Random evelutions, Markov chains, and systems of partial differential equations / R. Griego, R. Hersh // Proc.Nath.Acad.Sci. – 1969. – No.62. – P. 305–308.
91. Griego R. Theory of random evelutions with applications to partial differential equations / R. Griego, R. Hersh // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – No.156. – P. 405–418.
92. Hersh R. Random evolutions: survey of results and problems / R. Hersh // Rocky Mount.J.Math. – 1974. – No.4. – P. 443–477.

93. Hersh R. The birth of random evolutions / R. Hersh // Mathematical Intelligencer. 2003. – **25**(1). – P. 53-–60.
94. Hersh R. Non-commuting random evolutions, and an operator-valued Feynman-Kac formula / R. Hersh, G. Papanicolaou // Comm.Pure and Appl.Math. – 1972. – XXX. – P. 337–367.
95. Hersh R. Random evolutions are asymptotically Gaussian / R. Hersh, M. Pinsky // Comm.Pure and Appl.Math. – 1972. – XXV. – P. 33–34.
96. Hillen T. Transport equations and chemosensitive movement / T. Hillen - Tübingen, University of Tübingen, Habilitation thesis, 2001.
97. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ / E. Hopf // Comm.Pure and Appl. Math. – 1950. – III. – P. 201–230.
98. Jacod J. Limit theorems for stochastic processes / J. Jacod, A.N. Shiryaev. – Berlin:Springer-Verlag, 2003. – 601 p.
99. Kolesnik A.D. Weak convergence of a planar random evolution to the Wiener process / A.D. Kolesnik // J. Theoret. Probab. – 2001. – **14** No.2. – P. 485–494.
100. Kolesnik A.D. Weak convergence of the distributions of Markovian random evolutions in two and three dimensions / A.D. Kolesnik // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. – 2003. – No. 3. – P. 41–52.
101. Koroliuk V.S. Large deviations for random evolutions in the scheme of asymptotically small diffusion / V.S. Koroliuk, I.V. Samoilenko // Modern stochastics and applications, Springer optimization and its applications. – 2014. – Vol. 90. – P. 201–217.
102. Koroliuk V.S. Lévy approximation of impulsive recurrent process with semi-Markov switching / V.S. Koroliuk, N. Limnios, I.V. Samoilenko // Theory of stochastic processes. – 2010. – 16(32), No.2. – P. 77–85.
103. Korolyuk V.S. Lévy approximation of an impulse recurrent process with Markov switching / V.S. Korolyuk, N. Limnios, I.V. Samoilenko // Theory of probability and mathematical statistics. – 2010. – №80. – P. 15–23.
104. Korolyuk V.S. Mathematical foundations of the state lumping of large systems / V.S. Korolyuk, A.F. Turbin. – Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 1993. – 278 p.
105. Korolyuk V.S. Stochastic models of systems / V.S. Korolyuk, V.V. Korolyuk. – Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 1999. – 197 p.
106. Kurtz T.G. A limit theorem for perturbed operator semigroups with applications to random evolutions / T.G. Kurtz // J. Functional analysis. – 1973. – No.12. – P. 55–67.
107. Kurtz T.G. Martingale problems for controlled processes / T.G. Kurtz // Lecture notes in control and information sciences. – Berlin:Springer, 1987. – Vol. 91. , P. 75–90.
108. Kushner H.J. Weak convergence methods and singular perturbed stochastic control and filtering problems / H.J. Kushner. – Boston:Birk- häuser, 1990. – 244 p.
109. Limnios N. Poisson approximation of processes with independent increments with Markov switching / N. Limnios, I.V. Samoilenko // Міжнародна конференція "Modern Stochastics: Theory and Applications III"(Kyiv, Ukraine,

September 10-14, 2012): Conference materials. – Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2012. – P. 113–114.
110. Limnios N. Poisson approximation of processes with locally independent increments with Markov switching / N. Limnios, I.V. Samoilenko // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2013. – №89. – С. 106–116.
111. Limnios N. Semi-Markov processes and reliability / N. Limnios, G. Oprişan. – Boston:Birkhäuser, 2001. – 222 p.
112. Mogulskii A.A. Large deviation for processes with independent incre- ments / A.A. Mogulskii // Annals of probability. – 1993. – No.21. – P. 202-215.
113. Nikitin A.V. Asymptotic Properties of a Stochastic Diffusion Transfer Process with an Equilibrium Point of a Quality Criterion / A.V. Nikitin // Cybernetics and System analysis. – 2015. – No.4 (51). – P. 650-656.
114. Nikitin A.V. Asymptotics of Normalized Control with Markov Switchings / A.V. Nikitin, U.T.Khimka // Ukrainian Mathematical Journal. – 2017. – №8 (68) P. 1252-1262.
115. O'Brien G.L. Compactness in the theory of large deviations / G.L. O'Brien, W. Vervaat // Stochastic processes and applications. – 1995. – No.57. – P. 1-10.
116. Oprisan A. Large deviations for ergodic processes in split spaces / A. Oprisan, A. Korzeniowski // Dynamic systems and applications. – 2009. – **18**, No.3-4. – P. 589–604.
117. Orsingher E. Bessel functions of third order and the distribution of cyclic planar motions with three directions / E. Orsingher // Stoch. Stoch. Rep. – 2002. – **74**, No.3-4. – P. 617–631.
118. Orsingher E. A cyclic random motion in $\mathbf{R}^3$ with four directions and finite velocity / E. Orsingher, A.M. Sommella // Stoch. Stoch. Rep. – 2004. – **76**, No. 2. – P. 113–133.
119. Othmer H.G. The diffusion limit of transport equations II: chemotaxis equations / H.G. Othmer, T. Hillen // Siam J. Appl. Math. – 2002. – **62**(4). – P. 1222—1250.
120. Papanicolaou G. Asymptotic analysis of transport processes / Papanico- laou G. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. – No.81. – P. 330-392.
121. Papanicolaou G. Martingale approach to some limit theorems / G. Papanicolaou, D. Stroock, S.R.S. Varadhan – Duke turbulence conference (Durham, NC, April 23–25, 1976). Duke University Mathema- tics Series III. – 1977. – New York:Duke University. – 120 p.
122. Papanicolaou G. Motion of a particle in a random field / G. Papanicolaou // J.Math.Phys. – 1971. – No.12. – P. 1494–1496.
123. Papanicolaou G. Probabilistic problems and methods in singular perturbations / G. Papanicolaou // Rocky Mountain Journal of Math. – 1976. – No.6. – P. 653–673.
124. Papanicolaou G. Some limit theorems for stochastic equations and applications / G. Papanicolaou, R. Hersh // Indiana U.Math.J. – 1972. – No.21. – P. 815–840.

125. Papanicolaou G. Stochastic differential equations with applications to random harmonic oscillations and wave propagation in random media / G. Papanicolaou, J. Kellek // SIAM J.Appl.Math. – 1971. – No.21. – P. 287–305.
126. Papanicolaou G. Stochastic equations and their applications / G. Papanicolaou // Amer.Math.Mountly. – 1973. – No.80. – P. 526–544.
127. Papanicolaou G. Wave propagation in a one-dimensional random medium / G. Papanicolaou // SIAM J.Appl.Math. – 1971. – No.21. – P. 13–18.
128. Pinsky M. Differential equations with a small parameter and the central limit theorem for functions defined on a finite Markov chain / M. Pinsky // Z. Wahrschein. verw. Gebiete. – 1968. – No.2. – P. 101–111.
129. Pinsky M. Lectures on random evolutions / M. Pinsky. – Singapore: World Scientific, 1991. – 136 p.
130. Protter P. Stochastic integration and differential equations. A new approach / P. Protter. – Berlin:Springer-Verlag, 1990. – Applications of mathematics, 21. – 302 p.
131. Puhalskii A. On functional principle of large deviations / A. Puhalskii // New trends in probability and statistics. – 1991. – Vol. 1. – Utrecht:VSP. – P. 198–219.
132. Roth J.P. Opérateurs carré du champ et formule de Lévy-Khinchine sur les spaces localment compacts / J.P. Roth // France Academy of Sciences, Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris, Ser. A. – 1974. – No.278. – P. 1103–1106.
133. Samoilenko I.V. Differential Equations with Small Stochastic Additions Under Poisson Approximation Conditions / I.V.Samoilenko, Y.M. Chabanyuk, A.V. Nikitin, U.T. Khimka // Cybernetics and System analysis. – 2017. – Volume 53, Issue 3 – P.410–416.
134. Schied A. Criteria for exponential tightness in path spaces / A. Schied. – Berlin:Institut für Mathematik Humboldt-Universität, 1995. – 12 p. – (Preprint / Institut für Mathematik Humboldt-Universität).
135. Silvestrov D.S. Limit theorems for randomly stopped stochastic processes / Silvestrov D.S. – Berlin:Springer, 2004. – Series: Probability and its Applications. – 398 p.
136. Skorokhod A.V. Asymptotic methods in the theory of stochastic differential equations / A.V. Skorokhod. – Translations of mathematical monographs, 78. Providence, RI, American Mathematical Society, 1989. – 339 p.
137. Skorokhod A.V. Random perturbation methods with applications in science and engineering / A.V. Skorokhod, F.C. Hoppensteadt, H. Salehi. – New York:Springer-Verlang, 2002. – 504 p.
138. Stroock D.W. Multidimensional diffusion processes / D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan. – Berlin:Springer-Verlag, 1979. – 338 p.
139. Sviridenko M.N. Martingale characterization of limit distributions in the space of functions without discontinuities of second kind / M.N. Sviridenko // Math. Notes. – 1998. – **43**, No.5. – P. 398–402.

140. Tataru D. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with unbounded nonlinear terms / D. Tataru // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – No.163. – P. 345–392.
141. Uhlenbeck G.E. On the theory of Brownian motion / G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein // Phys. Rev. – 1930. – No.36. – P. 823–841.
142. Varadhan S.R.S. Asymptotic probabilities and differential equations / S.R.S. Varadhan // Comm. Pure Appl. Math. – 1966. – No.19. – P. 261-286.
143. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure /O. Vasicek // J. Fin. Econ. – 1977. – V.5. – P. 177–188.
144. Wentzell A.D. Limit theorems on large deviations for Markov stochastic processes / A.D. Wentzell. – Dordrecht:Kluwer, 1990. – 176 p.
145. Yin G.G. Continuous-time markov chains and applications. A singular perturbation approach / G.G. Yin, Q. Zhang. – New York:Springer, 1998. – 349 p.
146. Yin G.G. Discrete-time markov chains. Two-time-scale methods and applications / G.G. Yin, Q. Zhang. – New York:Springer, 2005. – 368 p.